

60382
6



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

LF

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

INTERMITENCIA DE VELOCIDAD Y
TEMPERATURA EN TURBULENCIA
DESARROLLADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A :
GERARDO RUIZ CHAVARRIA



DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO CILIBERTO

MEXICO, D. F.,

1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

UNAM



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ABSTRACT

In this work some results concerning the fully developed turbulence are presented. In particular:

- 1) The investigation of a property of turbulent flows that allow to enlarge the self similar behavior on a broader interval than the inertial range. This property is known as Extended Self Similarity. Moreover, we can use it in order to close the Kolmogorov equation, the last being a result deduced directly from the Navier-Stokes equation.
- 2) Experimental verification of a turbulence model based on a hierarchy of the energy dissipation moments. According to that model, in fully developed turbulence there are structures of many degrees of coherence (from random to filamentary vortex).
- 3) Study of the behavior of a passive scalar. Some points are taken into account, for example the existence of two different dissipative scales, one for velocity and the other for the temperature. On the other hand, an investigation is made concerning the corrections introduced by the intermittency of kinetic energy and temperature fluctuations. Finally, Extended Self Similarity is tested for the temperature statistics.

A través de estas líneas quiero agradecer a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM por haberme proporcionado una beca para la realización del trabajo experimental de tesis en la Ecole Normale Supérieure de Lyon. También quiero extender mi reconocimiento a los miembros del Laboratorio de Física de la ENSL, cuya calidez y amistad me permitieron tener una estancia grata en Francia. No puedo dejar de mencionar en estas líneas a los doctores Ramón Peralta, Luis Antonio Dávalos, Gustavo Martínez, Cesar Treviño, Eduardo Ramos y Rafael Fernández, quienes revisaron el presente manuscrito. Desde luego, quiero mostrar mi agradecimiento al Dr. Sergio Ciliberto, mi director de tesis y a Christophe Baudet, quien me proporcionó una valiosa ayuda para la realización del trabajo experimental.

Cuando salí a Francia no tenía idea de todo lo que me iba a deparar esa estancia en otro país, tanto desde el punto de vista académico como del personal. Vayan en estas líneas unas palabras de gratitud a toda la banda de amigos que nos reuníamos en Lyon para pasar fiestas y veladas. También a los amigos de la Casa de México en París, quienes me llevaron a conocer muchos sitios de la capital francesa. A Laura y a Nina, cuyo regresó a México en octubre de 1994 fue la primera señal de que mi retorno estaba próximo. También quiero dejar sentado un agradecimiento a mis hermanos, a mi madre y a todos los amigos que he conocido en estos últimos años.

CONTENIDO

1	PROLOGO	3
2	INTRODUCCION	7
2.1	DEFINICION DE MAGNITUDES ASOCIADAS A LA TURBULENCIA	7
2.2	TEORIAS DE KOLMOGOROV	14
2.3	MODELOS ALTERNATIVOS	19
2.4	ESCALAR PASIVO	21
3	DISPOSITIVO EXPERIMENTAL	25
3.1	TUNEL DE VIENTO	25
3.2	GENERACION DE LA TURBULENCIA	27
3.3	ANEMOMETRO Y SONDAS DE VELOCIDAD	28
3.4	MEDICION DE LA TEMPERATURA	31
3.5	CALENTAMIENTO DEL AIRE	33
3.6	SISTEMA DE ADQUISICION DE DATOS	34
4	AUTOSEMEJANZA EXTENDIDA	37
4.1	AUTOSEMEJANZA Y LEYES DE POTENCIA	37
4.2	FUNCION DE ESTRUCTURA DE ORDEN 3	42
4.3	CERRADURA DE LA ECUACION DE KOLMOGOROV	44
4.4	ESCALAMIENTO DE OTRAS FUNCIONES DE ESTRUCTURA	46
4.5	FUNCION UNIVERSAL	52
4.6	INFLUENCIA DEL TAMAÑO DE LA SONDA	59
4.7	LIMITACIONES DE LA SONDA DE VELOCIDAD	62
4.8	COMPORTAMIENTO A PEQUEÑAS ESCALAS	67
4.9	DISCUSION	68
5	GENERALIZACION DE LA HIPOTESIS MODIFICADA DE KOLMOGOROV	73
5.1	CONSIDERACIONES BASICAS	73
5.2	CALCULO DE LOS MOMENTOS DE ϵ_r	75
5.3	VERIFICACION EXPERIMENTAL	79

6	MODELO DE NIVELES DE DISIPACION DE ENERGIA	83
6.1	INTRODUCCION	83
6.2	DESCRIPCION DEL MODELO	84
6.3	DETERMINACION DE LOS NIVELES DE DISIPACION DE ENERGIA.	87
6.3.1	CALCULO DE β	87
6.3.2	EVALUACION DE $\epsilon^{(\infty)}$	90
6.3.3	VALIDACION GLOBAL DEL MODELO	91
6.4	IMPLICACIONES DEL MODELO SOBRE LAS FUNCIONES DE ESTRUCTURA	93
7	ESCALAR PASIVO	99
7.1	ESCALA DISIPATIVA	99
7.2	EXPONENTES EN EL INTERVALO INERCIAL	101
7.3	MODELO β ALEATORIO	108
7.4	ESCALAMIENTO DE OTRAS FUNCIONES DE ESTRUCTURA	111
7.5	AUTOSEMEJANZA EXTENDIDA	115
7.6	FUNCION UNIVERSAL	119
8	CONCLUSIONES	123
9	BIBLIOGRAFIA	127

1. PROLOGO

Existen problemas que no tienen solución. Por ejemplo, desde el siglo pasado se sabe que es imposible la construcción de un móvil perpetuo. Otro ejemplo es la imposibilidad de construir una expresión del tipo:

$$m^q = n^q + p^q$$

en donde m , n , p y q son números enteros y $q > 2$. Otro tipo de problemas son insolubles sólo dentro un cierto marco de referencia. En este punto quisiera referirme a una fábula acerca del perro a quien se le ha atado una sartén en la cola. La pregunta que se plantea es la siguiente: ¿A que velocidad debe de ir el perro para que no escuche el ruido que produce la sartén cuando golpea con el piso? A menudo la respuesta es: el animal debe correr a una velocidad supersónica. Pero hasta ahora no se ha visto a un perro correr a una velocidad supersónica. Una respuesta alternativa, mucho más simple, es que el animal se mantenga en reposo. Tal vez a este último genero de problemas pertenezca la turbulencia. En palabras de Feynman "la turbulencia es el único problema aún no resuelto de la mecánica clásica" y es que aquí convergen varias de las dificultades más pertinaces de las ciencias físicas. Por una parte, la ecuación de Navier-Stokes, que describe el comportamiento de los fluidos, es no lineal. Esto significa, en términos de una descomposición de Fourier, que hay una interacción entre distintos modos. Se debe decir en este punto que la matemática y la física hasta principios del siglo XX (salvo unas cuantas excepciones) estuvieron orientadas fundamentalmente a la resolución de problemas lineales donde es válido el principio de superposición. En términos más simples, la física lineal es aquella donde el todo es la suma de la partes. Pero la turbulencia no presenta ese tipo de comportamiento pues sus distintos componentes interactúan entre si. De entrada hay una inyección de energía en las escalas más grandes, luego se produce una transferencia de ella hacia las escalas más pequeñas y al final la viscosidad se encarga de convertir la energía cinética en calor. Ninguna de las partes es independiente de las demás. Otra de las dificultades tal vez sea la propia manera de abordar el problema. O sea que aquí ocurriría algo similar a lo planteado en la fábula del perro y la sartén. Hasta donde se tiene conocimiento, la ecuación de Navier-Stokes describe adecuadamente el movimiento de los fluidos, pero con las computadoras actuales sólo se pueden hacer cálculos hasta números de Reynolds más bien modestos pues el número de nodos crece como $Re^{3/4}$. A raíz de esta limitante técnica se

han propuesto muy diversos modelos que reproducen las características de la turbulencia sobre escalas de longitud en donde no influyen ni la viscosidad ni la geometría del sistema (ese intervalo recibe el nombre de región inercial). En las escalas más pequeñas se tienen menos problemas pues ahí las interacciones no-lineales son considerablemente menores que los efectos de viscosidad.

El concepto de turbulencia es una noción familiar, pero no es fácil definirla. Osborne Reynolds dijo acerca de ella que se trataba de "movimiento sinuoso". En el diccionario Porrúa de la lengua española se le da el significado de agitación, confusión y alboroto. Se trata en todo caso de una definición muy general. En 1937 Taylor y Von Karman dan otra definición: la turbulencia es un movimiento irregular que hace su aparición en líquidos y gases cuando estos contornean superficies sólidas o aún cuando hay un movimiento relativo entre distintas capas del mismo fluido. Desde un punto de vista estadístico se puede decir que un movimiento turbulento es una condición de flujo donde diversas cantidades exhiben un comportamiento aleatorio, pero los promedios estadísticos muestran una gran estabilidad.

En este trabajo se expondrán algunas ideas acerca de la turbulencia. Los tres puntos principales que se abordarán son:

1) Estudio de una propiedad de los flujos turbulentos que permite extender el comportamiento autosemejante sobre un intervalo más extenso que la región inercial. Esta propiedad lleva el nombre de Autosemejanza Extendida. Originalmente fue descubierta en el Laboratorio de Física de la Ecole Normale Supérieure de Lyon y en la Universidad de Roma. La contribución que se hace en este trabajo es la verificación exhaustiva de esta propiedad sobre un amplio intervalo de valores de número de Reynolds. Debe destacarse que en el intervalo de validez de la Autosemejanza Extendida es posible cerrar la ecuación de Kolmogorov (también se le conoce como ecuación de Howart-Von Karman) que es uno de los pocos resultados sobre turbulencia que se deducen a partir de la ecuación de Navier-Stokes .

Por otra parte, la idea de Autosemejanza Extendida condujo a la definición de una función universal. A partir de ella se puede expresar una función de estructura de orden arbitrario. En este trabajo se investigaron en detalle sus características y se le utilizó para determinar con precisión el intervalo de aplicabilidad de la Autosemejanza Extendida. Otro de los puntos importantes es que a partir de la función universal se ha establecido experimentalmente una generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov de 1962 sobre el escalamiento de las funciones de estructura. Dicha generalización toma en cuenta también el carácter intermitente de la disipación de energía, pero a diferencia de la versión de Kolmogorov, su aplicabilidad incluye las regiones disipativa e inercial.

2) Verificación experimental de un modelo de turbulencia (desarrollado en el Observatorio de Nice, Francia y en la Universidad de Arizona, EUA) que se basa en una jerarquía de los momentos de la disipación de energía. De acuerdo a él, en turbulencia desarrollada coexisten estructuras con diverso grado de coherencia, que van desde vórtices aleatorios, hasta estructuras filamentosarias de

dimensión 1, pasando por objetos de dimensión fractal. El modelo, basado inicialmente en simulaciones numéricas, posee la característica de que la mayoría de sus supuestos son susceptibles de verificación experimental. Una primera prueba consiste en comparar la predicción de los exponentes de las funciones de estructura con los obtenidos mediante Autosemejanza Extendida. La diferencia entre los resultados teóricos y experimentales es a lo más de un 1%, lo que representa una primera confirmación del modelo. Por otra parte, se trató de comprobar la validez de una ecuación que los autores proponen para los momentos estadísticos de la disipación de energía. Las medidas de turbulencia que se hicieron en túnel de viento también dan un resultado positivo. De manera adicional, mediante el uso de la generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov, la ecuación entre momentos de disipación de energía se reescribió en términos de funciones de estructura. Esta nueva relación se cumple sobre un intervalo de longitudes más extenso que la región de validez de la Autosemejanza Extendida

3) Estudio del comportamiento de un escalero pasivo en turbulencia desarrollada. Varios fueron los puntos que se abordaron, comenzando por el problema de la existencia de dos escalas disipativas, una para velocidad y la otra para temperatura. Esto significa que la viscosidad y la difusividad térmica se vuelven relevantes a longitudes distintas. También se prestó atención a un modelo sobre el comportamiento estadístico de la temperatura, según el cual la función de estructura de orden 2 sólo es afectada por la intermitencia de la disipación de energía cinética. Experimentalmente se demostró que el modelo describe bien lo que ocurre en este caso particular. Por otra parte, se ha usado el concepto de Autosemejanza Extendida. Los datos experimentales indican que la idea de un intervalo inercial extendido funciona también en este contexto, pero sobre un intervalo más estrecho.

Los resultados que se presentan en la tesis se han publicado en 5 artículos (ver referencias 1 a 5).

Antes de finalizar debo mencionar que todos los experimentos se realizaron en el túnel de viento del Laboratorio de Física de la Ecole Normale Supérieure de Lyon durante 1993 y 1994. El túnel fue diseñado y construido por Christophe Baudet, a quien se le extiende un agradecimiento en estas líneas.

2. INTRODUCCION

2.1 DEFINICION DE MAGNITUDES ASOCIADAS A LA TURBULENCIA

El estudio del comportamiento de los fluidos se enmarca dentro de la mecánica clásica. Mediante la utilización de la hipótesis del continuo y de las leyes de Newton se deduce una ecuación de balance de momento lineal [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

en donde \mathbf{u} es el vector velocidad, p es la presión, ρ es la densidad del fluido y ν la viscosidad cinemática. En esta representación las variables independientes son las coordenadas espaciales y el tiempo. En su deducción se ha supuesto una relación lineal entre los esfuerzos viscosos y el tensor de rapidez de deformación, vale decir, se hizo la hipótesis de fluido newtoniano [7].

En turbulencia el campo de velocidades se expresa usualmente como un valor medio \mathbf{U} más una parte fluctuante \mathbf{u}' :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'. \quad (2.2)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.1) y luego de tomar el promedio estadístico se llega al siguiente resultado [6]:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right), \quad (2.3)$$

en donde i y j toman valores entre 1 y 3. Los términos $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ se conocen en la literatura como esfuerzos de Reynolds. Son una contribución que aparece a causa de la no linealidad de la ecuación de Navier-Stokes. Ellos dan cuenta de la transferencia de momento turbulento debida a las fluctuaciones aleatorias de velocidad. El problema principal en turbulencia desarrollada es que los

esfuerzos de Reynolds son más importantes que los esfuerzos de corte debidos a la viscosidad.

En la definición dada en la ecuación (2.3) se ha introducido el concepto de media estadística. Existen varias definiciones al respecto [8], una de ellas es la que se construye sobre un *ensemble*, es decir, se toman eventos sobre un conjunto de sistemas iguales. Otra es la media construida sobre un sólo sistema, tomando eventos a diferentes tiempos. Usando la hipótesis ergódica se establece que el promedio sobre un ensemble es igual al promedio temporal. Desde un punto de vista experimental no es posible tener un número infinito de sistemas iguales, así que lo que se calcula son medias temporales.

La adimensionalización de la ecuación de Navier-Stokes conduce directamente a la definición del número de Reynolds [6]:

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (2.4)$$

en donde U es la velocidad promedio y L es una escala de longitud representativa del tamaño del sistema. Por ejemplo, en turbulencia generada por un enrejado, L es el diámetro de las barras, mientras que en turbulencia detrás de un cilindro L es el diámetro de este último. El número de Reynolds da una estimación del cociente entre las fuerzas inerciales y las viscosas [6,7].

Las ecuaciones (2.1) y (2.3) son no lineales, lo que implica que el cálculo de sus soluciones presenta considerables dificultades matemáticas. Hasta la década de los 50 sólo se conocían unas pocas soluciones, en la mayoría de ellas los términos no lineales se anulaban o simplemente se despreciaban. Baste recordar que el libro de Lamb sobre hidrodinámica, escrito en 1879 sobre la base de métodos lineales, continúa siendo uno de los textos básicos de la mecánica de fluidos [9]. La mayoría de los métodos analíticos no pueden ir más allá de la resolución de problemas lineales o de perturbaciones infinitesimales. La aparición de las computadoras, junto con el surgimiento de nuevos desarrollos en las matemáticas han permitido conocer nuevas soluciones, en particular se han determinado algunas características de los flujos turbulentos. En líneas generales, existen dos tipos de regímenes para un flujo. El primero ocurre cuando la viscosidad es relevante; entonces el campo de velocidades y las demás propiedades del sistema poseen un comportamiento suave y regular [10]. A los flujos que se comportan de esta manera se les llama laminares. El segundo aparece cuando las no linealidades se vuelven importantes, en cuyo caso el campo de velocidades exhibe un comportamiento estocástico en el espacio y en el tiempo. Otra característica es que hay una fuerte dependencia con respecto a las condiciones iniciales [11]. El régimen que se acaba de describir someramente es lo que se conoce como turbulencia.

En la figura 2.1 se presenta una gráfica típica de velocidad vs. tiempo en un flujo turbulento. En rasgos generales, lo que se observa son grandes fluctuaciones en los valores de la velocidad sin ninguna regularidad aparente. Por otro lado, a pesar de que las condiciones iniciales y la geometría del sistema se mantengan prácticamente invariables, los resultados en dos experimentos

tos aparentemente iguales distan de ser los mismos en detalle. Este comportamiento errático del campo de velocidades hace que la predicción de cantidades instantáneas sea virtualmente imposible de realizar.

En 1922 Richardson [12] propuso una descripción de la turbulencia que ha tenido una considerable influencia sobre las subsiguientes investigaciones en este campo. Según el autor, un flujo turbulento estaría compuesto por estructuras (en adelante se les llamará vorticillos; en inglés reciben el nombre de eddies) de diferentes tamaños que interactúan entre sí. Los vorticillos de una cierta dimensión reciben su energía de los vorticillos de escalas mayores y luego los ceden a otros vorticillos de tamaño menor. En esta representación hay dos longitudes que delimitan las dimensiones de las estructuras turbulentas. La primera es la longitud L , en donde se produce la inyección de energía. La segunda es la longitud η donde la viscosidad se vuelve importante y por lo tanto es la escala donde la energía cinética se disipa en calor. En esta representación se introducen dos cantidades, la transferencia de energía de las grandes a las pequeñas escalas y la disipación viscosa. La primera corresponde a un proceso no lineal en donde hay una interacción mutua entre los vorticillos de diferentes tamaños. En el modelo se supone que las interacciones son locales, en el sentido de que la energía es cedida de los vorticillos de un determinado tamaño a otros de dimensión inmediatamente menor. En relación a la disipación viscosa (de la energía), se trata de un proceso que se desarrolla en lo fundamental sobre longitudes del orden de η , que se traduce en la destrucción de los vorticillos más pequeños y en la suavización de las fluctuaciones de velocidad. La definición formal de la tasa local de disipación de energía es [10]:

$$\epsilon(x, t) = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad (2.5)$$

en donde se debe sumar por todos los valores posibles de i y j , es decir, se trata de una adición de nueve términos. Por otra parte u_i son las componentes del vector velocidad. Considerando que el campo de velocidades sigue un comportamiento aleatorio en el espacio y en el tiempo, es de esperarse que $\epsilon(x, t)$ también reproduzca esa característica. Una confirmación de esta idea se muestra en la figura 2.2, en donde se grafica $\epsilon(x, t)$ en función del tiempo. Como se puede observar, existen eventos de gran amplitud que se encuentran distribuidos al azar.

Si se supone homogeneidad e isotropía, la media de $\epsilon(x, t)$ se puede expresar de una manera simple, pues algunos términos de (2.5) se anulan, mientras que los restantes están relacionados entre sí. El resultado final se muestra a continuación:

$$\bar{\epsilon} = 15\nu \left\langle \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 \right\rangle, \quad (2.6)$$

en donde V es la componente de velocidad en la dirección del flujo medio, x es la coordenada en la dirección de V y $\langle \dots \rangle$ significa promedio estadístico.

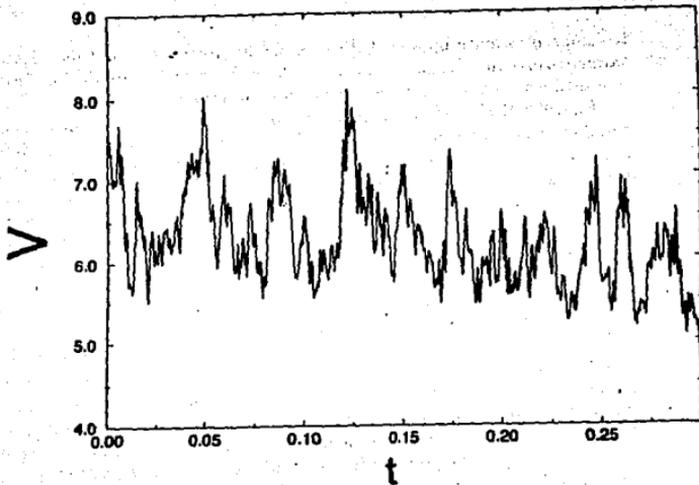


Figura 2.1.- Gráfica de velocidad vs tiempo en un flujo turbulento.

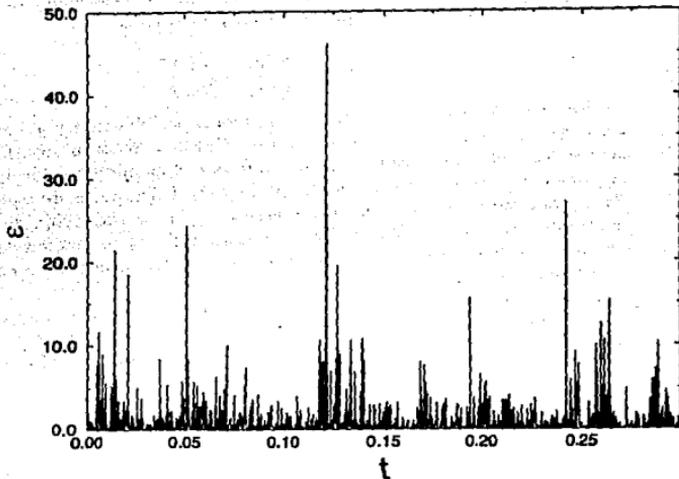


Figura 2.2.- Gráfica de $c(x,t)$ vs t en turbulencia desarrollada.

Una deducción detallada de (2.6) se encuentra en la referencia [13]. Experimentalmente esta expresión es relativamente fácil de calcular ya que se debe conocer solamente una componente del vector velocidad.

El promedio de la tasa local de disipación de energía se ha utilizado profusamente en las investigaciones sobre turbulencia, siendo uno de los parámetros básicos de la mayoría de los modelos desarrollados en la actualidad [14, 15, 16]. La ecuación (2.6) proporciona una definición de $\bar{\epsilon}$ a partir de cantidades locales. Pero también se puede dar una estimación de ella usando magnitudes correspondientes a las grandes escalas [7]. De hecho, mediante un análisis dimensional se demuestra que:

$$\bar{\epsilon} \sim \frac{U^3}{L}, \quad (2.7)$$

Una de las principales líneas de investigación sobre turbulencia que se ha desarrollado en las últimas cinco décadas es el enfoque estadístico, debido a varias razones. La primera tiene que ver con el hecho de que los valores promedio tienen un comportamiento regular y estable. La segunda es que sus resultados son aplicables a una amplia gama de flujos, que incluyen por ejemplo los movimientos del aire en la atmósfera o del agua en el mar, la turbulencia generada dentro de un túnel de viento, etc. Una tercera razón es que la descripción estadística requiere la utilización de pocos parámetros y de un número reducido de hipótesis. De entre las cantidades que se utilizan destacan la tasa local de disipación de energía y el coeficiente de viscosidad cinemática.

Macroscopicamente hablando no hay propiedades comunes entre toda la gama de flujos turbulentos. Las geometrías varían de un caso a otro, lo mismo se puede decir de la fuente que proporciona la energía, etc. En este nivel no se puede construir una teoría general, aunque debe decirse que las aplicaciones prácticas requieren del conocimiento particular de lo que ocurre sobre las grandes escalas. Por el contrario, una universalidad podría aparecer sobre las pequeñas escalas si durante cada paso del proceso de cascada se pierde una parte de la influencia de lo que ocurre sobre longitudes del tamaño del sistema. Dos conceptos que se han utilizado para el diseño de una teoría estadística general sobre la turbulencia son los de homogeneidad e isotropía locales [10]. Por homogeneidad se entiende que los promedios son invariantes ante traslaciones, mientras que la isotropía implica que hay invariancia frente a rotaciones y reflexiones del sistema de coordenadas. El que sean locales significa que no es necesario que ambas condiciones se satisfagan a todas las escalas, sino sólo sobre longitudes pequeñas en comparación con L . Si se satisfacen las condiciones de homogeneidad e isotropía locales entonces se espera que la turbulencia exhiba un comportamiento universal.

La construcción de una teoría estadística de la turbulencia requiere la definición de magnitudes que den información sobre lo que ocurre a diferentes escalas, vale decir, que permitan conocer las características de los vorticillos y la manera como interaccionan. Por ejemplo, la velocidad media proporciona

información sobre el flujo a gran escala, a partir de ella se calcula el número de Reynolds o se estima, por el orden de magnitud, el valor de la energía inyectada al sistema. Por otra parte, la desviación estándar da una estimación global de las fluctuaciones de velocidad, pero aún no permite conocer los detalles particulares de los vorticillos. Si se pretende conocer el comportamiento de las estructuras turbulentas de un tamaño particular, lo que se debe hacer es construir cantidades donde se haya sustraído la influencia de los vorticillos de otras escalas. Una de ellas es el espectro de energía $E(k)$ en el espacio de números de onda k , es decir, la transformada de Fourier de la densidad de energía. Esta cantidad da la manera como la energía se distribuye sobre las diferentes escalas y debe anotarse que se ha usado profusamente en las investigaciones teóricas y experimentales sobre este tema [17]. Otras magnitudes que se usan para investigar el comportamiento a diferentes escalas son las funciones de estructura [10, 18], definidas de la siguiente manera:

$$\langle \delta V(r)^n \rangle = \langle (V(x+r) - V(x))^n \rangle \quad (2.8)$$

Se trata de los momentos de la diferencia de velocidad entre 2 puntos separados por una distancia r . En la ecuación (2.8) se ha usado una diferencia de velocidades para sustraer los efectos del flujo medio. Hagase un comentario en este punto: la mayoría de los resultados que se van a presentar en esta tesis están expresados en términos de las funciones de estructura, o sea se está dando énfasis a la estadística de las diferencias de velocidad. En una función de estructura de un orden particular se resaltan eventos de una determinada magnitud. Por ejemplo, las diferencias de velocidad grandes son las que determinan en gran medida el comportamiento de las funciones de estructura de orden elevado.

A través del uso de la ecuación de Navier-Stokes y utilizando como hipótesis que el flujo exhibe homogeneidad e isotropía locales, se deduce la siguiente ecuación donde aparecen dos funciones de estructura y el promedio de la disipación de energía [7, 10]:

$$\langle \delta V(r)^3 \rangle = -\frac{4}{5}\bar{\epsilon}r + 6\nu\frac{d}{dr}\langle \delta V(r)^2 \rangle \quad (2.9)$$

que se conoce en la literatura como ecuación de Kolmogorov o de Howart-von Karman. La isotropía no implica la anulación de $\langle \delta V(r)^3 \rangle$. De hecho, la turbulencia es un fenómeno irreversible a causa de la disipación viscosa y por lo tanto no hay invariancia frente a una reflexión del tiempo. Por otra parte, debe mencionarse que el término $\langle \delta V(r)^3 \rangle$ proviene de la parte no lineal de la ecuación de Navier-Stokes. Su anulación implicaría que las interacciones no lineales no tendrían influencia sobre el comportamiento estadístico de la turbulencia. La ecuación (2.9) proporciona detalles sobre el comportamiento de las dos funciones de estructura que aparecen en ella; por una parte, si se está en el intervalo de longitudes donde la viscosidad no es importante, entonces $\langle \delta V(r)^3 \rangle \approx -\frac{4}{5}\bar{\epsilon}r$, es decir, hay una proporcionalidad de la función

de estructura de orden 3 con la distancia r . Por otra parte, para escalas suficientemente pequeñas $\langle \delta V(r)^3 \rangle \ll \langle \delta V(r)^2 \rangle$ y entonces el término de la izquierda se puede despreciar sobre los restantes. Se concluye entonces que $\langle \delta V(r)^2 \rangle \approx \langle \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \rangle r^2$. Finalmente, es importante destacar que la ecuación (2.9) deja de ser válida a escalas próximas a L , pues sobre esas longitudes ya son importantes las anisotropías debidas a la geometría del flujo. La ecuación de Kolmogorov predice que $\langle \delta V(r)^3 \rangle$ debe crecer indefinidamente con r , mientras que los datos experimentales indican que esta función de estructura se encuentra acotada.

La ecuación (2.9) posee dos parámetros, $\bar{\epsilon}$ y ν , mientras que el número de dimensiones básicas es también dos: la longitud y el tiempo. Usando el teorema π de Buckingham [19], la ecuación (2.9) se puede reescribir sin ningún parámetro adimensional. Con este fin se hacen los cambios de variables: $z = r/\eta$ y $u = V/(\bar{\epsilon}\nu)^{1/4}$, en donde $\eta = (\nu^3/\bar{\epsilon})^{1/4}$. El resultado es:

$$\langle \delta u(z)^3 \rangle = -\frac{4}{5}z + 6\frac{d}{dz} \langle \delta u(z)^2 \rangle \quad (2.10)$$

Escrita de esta última manera, la ecuación de Kolmogorov muestra la existencia de una cierta universalidad en la turbulencia isotrópica pues no hay ningún parámetro en ella. Es decir, mediante un reescalamiento en la longitud y en la velocidad, las funciones de estructura de ordenes 2 y 3 deben colapsarse respectivamente sobre dos curvas universales.

La longitud

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\bar{\epsilon}}\right)^{1/4} \quad (2.11)$$

se conoce como escala de Kolmogorov [20]. Es la única combinación de ν y $\bar{\epsilon}$ con dimensiones de distancia. Se interpreta como la escala de longitud donde la viscosidad comienza a tener un papel relevante, suavizando las fluctuaciones de velocidad. La adimensionalización da otra cantidad: $(\bar{\epsilon}\nu)^{1/4}$, que se conoce en la literatura como velocidad de Kolmogorov.

Una longitud que se usa muy comúnmente es la escala de Taylor [21], definida como:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\langle \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \rangle}} \quad (2.12)$$

σ es la desviación estandar de velocidad, es decir $\sigma^2 = \langle (V(x) - U)^2 \rangle$. El cálculo del promedio del cuadrado de $\frac{dV}{dz}$ se puede expresar en términos de la media de la disipación local de energía, a través de la ecuación (2.6):

$\langle \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \rangle = \bar{\epsilon}/15\nu$. Asociado a la escala de Taylor, se define otro número de Reynolds [13]:

$$R_\lambda = \frac{\sigma \lambda}{\nu}, \quad (2.13)$$

que se usará más adelante. Existe una relación entre R_λ y Re . Usando el hecho de que $\bar{\epsilon} \sim U^3/L$ y suponiendo que existe una proporcionalidad entre σ y U se deduce que:

$$R_\lambda \sim Re^{1/2}. \quad (2.14)$$

En general las medidas de turbulencia están expresadas en función ya sea de Re o bien de R_λ . Mediante simulaciones numéricas se han alcanzado valores de R_λ hasta 200 [22], en los experimentos en túneles de viento los valores llegan a 3,000 [23], mientras que en la atmósfera se han observado valores hasta del orden de 10,000 [17].

2.2 TEORIAS DE KOLMOGOROV

El modelo fenomenológico de Kolmogorov de 1941 (K41) [20] fue creado para describir la turbulencia localmente homogénea e isotrópica. Esta teoría se basa en la idea de Richardson sobre vorticillos que se destruyen y que dan lugar a vorticillos más pequeños. En palabras del propio Kolmogorov: "desde un punto de vista energético es natural imaginar el proceso de mezclado turbulento de la siguiente manera: las pulsaciones de primer orden absorben la energía de movimiento y la transfieren a las pulsaciones de orden más alto. Al final la energía de las pulsaciones más finas es transformada en calor debido a la viscosidad" [20].

Adicionalmente, se están considerando otros supuestos. a) Las estructuras turbulentas están uniformemente distribuidas en todo el espacio. Por lo tanto, la transferencia y la disipación de energía estarían ocurriendo aproximadamente de la misma manera en cada región del espacio. b) Se consideran flujos en el límite de número de Reynolds infinito. Esto permite tener una separación neta entre las escalas η y L . La escala integral es una cantidad fija, pero η es una función decreciente de Re . En esas condiciones la cascada de energía se desarrolla sobre un amplio intervalo de longitudes, de manera que se puede pensar en la existencia de una región donde no influyen ni las anisotropías de las grandes escalas, ni la viscosidad. c) Existe un intervalo de longitudes donde se pierde la noción de escalas características en el espacio y en el tiempo. Esto conduce a menudo a un comportamiento de ley de potencias.

El artículo de 1941 introduce dos hipótesis sobre la estadística del campo de velocidades. Traducidas al lenguaje de funciones de estructura son:

1) En turbulencia localmente homogénea e isotrópica las distribuciones de probabilidad de las diferencias de velocidad $V(x+r) - V(x)$ dependen exclusivamente de ν , $\bar{\epsilon}$, y de r

2) Si r es grande en comparación con la escala disipativa η , entonces las funciones de distribución de probabilidad se vuelven independientes de la viscosidad. El intervalo de longitudes donde hay independencia de la viscosidad y de las anisotropías de la escala integral se conoce como región inercial.

Con base en la hipótesis 2 y mediante argumentos dimensionales se deduce un escalamiento de las funciones de estructura en la región inercial:

$$\langle \delta V(r)^n \rangle \sim \bar{\epsilon}^{n/3} r^{n/3}, \quad (2.15)$$

mientras que el espectro de energía tiene la siguiente forma:

$$E(k) \sim \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3}. \quad (2.16)$$

La autosemejanza en la región inercial nos remite a un comportamiento de ley de potencias [52]. Abundemos ahora sobre el punto. La función de estructura de orden n se puede expresar de la siguiente manera:

$$\langle \delta V(r)^n \rangle = \Delta U^n F_n \left(\frac{r}{L} \right), \quad (2.17)$$

en donde ΔU es una diferencia de velocidades representativa de la región integral (por ejemplo la desviación estándar) y F_n es una función desconocida por ser determinada. Aquí se han usado algunas de las ideas de Kolmogorov sobre el comportamiento estadístico en el intervalo inercial, por ejemplo que hay independencia de la viscosidad y que el único parámetro relevante es $\bar{\epsilon}$ (que se introduce a través de ΔU). Tómese ahora un *ensemble* de cubos de arista r , con la característica de que en todos ellos se tiene un mismo valor de $\delta V(r)$. Nótese que para este conjunto la longitud integral y la velocidad representativa son respectivamente r y $\delta V(r)$. La estadística condicional de las diferencias de velocidad sobre una distancia s dentro de los elementos del *ensemble* es:

$$\langle \delta V(s)^n \mid \delta V(r) \rangle = \delta V(r)^n F_n \left(\frac{s}{r} \right), \quad (2.18)$$

en donde $\delta V(r)$ y r han tomado los papeles de ΔU y L respectivamente. En las ecuaciones (2.17) y (2.18) se está haciendo uso de la hipótesis de autosemejanza puesto que se está suponiendo que el comportamiento en dos escalas diferentes se describe con la misma función F_n . Promediamos ahora a (2.18) sobre todos los valores posibles de $\delta V(r)$. Esto da por resultado la media no condicional, lo que nos conduce a la siguiente relación :

$$\langle \delta V(s)^n \rangle = \langle \delta V(r)^n \rangle F_n \left(\frac{s}{r} \right), \quad (2.19)$$

de donde se concluye que:

$$F_n \left(\frac{s}{L} \right) = F_n \left(\frac{r}{L} \right) F_n \left(\frac{s}{r} \right). \quad (2.20)$$

Derivese la ecuación (2.20) con respecto a s , luego hágase $s=r$. Esto nos va a permitir obtener una ecuación diferencial ordinaria para la función F_n , a saber:

$$\xi F_n'(\xi) = F_n(\xi) F_n'(1), \quad (2.21)$$

en donde $\xi = r/L$. Su solución es:

$$F_n \left(\frac{r}{L} \right) = \left(\frac{r}{L} \right)^{\zeta(n)}, \quad (2.22)$$

en donde $\zeta(n) = F_n'(1)$. Por lo tanto, la forma funcional de la función de estructura es:

$$\langle \delta V(r)^n \rangle = \Delta U^n \left(\frac{r}{L} \right)^{\zeta(n)}. \quad (2.23)$$

Desde un punto de vista experimental se verifica la existencia de un régimen inercial, es decir, existe un intervalo de longitudes donde $\langle \delta V(r)^n \rangle \sim r^{\zeta(n)}$ [24], pero los exponentes $\zeta(n)$ no corresponden con la predicción que hace el modelo, salvo para $n=3$. Las diferencias son pocas cuando n es pequeña, pero crecen conforme aumenta el valor de n . Esto último es una indicación de que los eventos de gran amplitud influyen considerablemente sobre las características estadísticas de la turbulencia y son los que producen la desviación de la ley de escala $n/3$. Poco después de la formulación de la teoría K41, Landau hizo varios cuestionamientos [7], el primero es que del lado izquierdo de (2.15) aparece un promedio, mientras que en el lado derecho se tiene la potencia $n/3$ de un promedio. Pero la crítica más importante tiene que ver con el hecho de que la ecuación (2.15) no toma en cuenta el carácter aleatorio e intermitente de la tasa local de disipación de energía. Si $\epsilon(x, t)$ exhibe características de intermitencia, es de esperarse que su estadística tenga también un comportamiento autosemejante (de ley de potencias). El primer modelo de Kolmogorov requiere que las fluctuaciones de la disipación de energía estén confinadas sobre escalas del orden de η , sin embargo los datos experimentales indican que esto no es así [25].

En 1962 Oboukhov y Kolmogorov [26, 27] proponen que $\bar{\epsilon}$ debe ser reemplazada por su promedio sobre el espacio, esto último con el fin de incluir la intermitencia en la disipación de energía. Se define entonces la siguiente cantidad:

Distancia (cm)	Coefficiente de correlación
1.6	0.43
3.2	0.30
6.4	0.22

Tabla 2.1 Coeficiente de correlación entre $|\delta V(r)|$ y $(\epsilon, r)^{1/3}$ para diferentes distancias en turbulencia generada por un cilindro. Los valores apreciablemente grandes apuntan hacia una confirmación de la hipótesis modificada de Kolmogorov

$$\epsilon_r = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{|x|<r} \epsilon(x+y) dy, \quad (2.24)$$

es decir, el promedio de $\epsilon(x, t)$ sobre una esfera de radio r . Desde un punto de vista experimental el promedio de $\epsilon(x, t)$ sobre un volumen es difícil de evaluar, en su lugar se calcula la media sobre un intervalo de longitud r . Diversos estudios teóricos y experimentales indican que en ambos casos se llegan a los mismos resultados [28].

El escalamiento que se propone en esta nueva teoría es:

$$\langle \delta V(r)^n \rangle \sim \langle \epsilon_r^n \rangle > r^{n/3}. \quad (2.25)$$

Esta relación lleva el nombre de hipótesis modificada de Kolmogorov. El contenido físico de la ecuación (2.25) es que el comportamiento estadístico de $\delta V(r)^3/r$ es el mismo que el de ϵ_r . La primera cantidad es una estimación de la transferencia de energía de las grandes a las pequeñas escalas, mientras que la segunda es un promedio espacial de la disipación de energía. Considerando que en condiciones estacionarias los promedio de la transferencia y la disipación de energía son iguales, se espera que (2.25) sea esencialmente correcta. Recientemente Thorodsen y Van Atta [28] han investigado la estadística conjunta de $|\delta V(r)|$ y $(\epsilon, r)^{1/3}$ en turbulencia generada por un cilindro. Ellos han hecho un experimento con $R_\lambda = 553$, siendo las escalas η y L respectivamente 0.2 mm y 9 cm. El cálculo del coeficiente de correlación (definido como $\langle \delta V(r) \epsilon_r \rangle / \langle \delta V(r)^2 \rangle^{1/2} \langle \epsilon_r^2 \rangle^{1/2}$) da valores apreciablemente altos, tal como se puede apreciar en la tabla 2.1

Una fuerte correlación también ha sido reportada por Praskovsky [29] en un experimento realizado en el túnel de viento del Instituto Central Aerodinámico de Moscú. El valor R_λ que reportan es de 3000. Finalmente, en una reciente investigación numérica llevada a cabo por Chen *et al.* [22], siguiendo un esquema de integración de Adams-Bashforth, se ha demostrado que eventos de $\delta V(r)$ grandes coinciden con una marcada disipación de energía. De hecho, se encuentra que a *grosso modo* hay una dependencia lineal entre $\langle |\delta V(r)| (r\epsilon_r)^{1/3} \rangle$ y $\langle (r\epsilon_r)^{1/3} \rangle$, en donde $\langle \dots \rangle$ significa estadística condicional.

La hipótesis modificada de Kolmogorov introduce una desviación con respecto al escalamiento clásico $n/3$, pero por sí sola no permite determinar el

valor de los exponentes de las funciones de estructura pues no se tiene la dependencia de $\langle \epsilon_r^n \rangle$ con respecto a r . Por este motivo, Kolmogorov y Oboukhov [26, 27] introdujeron una propuesta sobre la estadística de $\log \epsilon_r$, a saber, su función de densidad de probabilidad es del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[-\frac{x - x_m}{\sqrt{2}\sigma_x} \right]^2, \quad (2.26)$$

en donde $x = \log \epsilon_r$, $x_m = \langle x \rangle$ y σ_x es la desviación estándar de x , que dicho sea de paso, es de la forma:

$$\sigma_x^2 = A + \mu \log \left(\frac{L}{r} \right). \quad (2.27)$$

Se está suponiendo que el logaritmo de la disipación de energía tiene un comportamiento normal. Detengámonos un poco en este punto. Consideréase que la cascada turbulenta ocurre sobre una colección de vorticillos, cuyas longitudes características son: $r_0 = L$, $r_1 = L/\gamma$, $r_2 = L/\gamma^2 \dots r_p = L/\gamma^p$, en donde γ es una constante positiva mayor a 1. Se supone que los cocientes:

$$\frac{\langle \epsilon_{r_{p-1}} \rangle}{\langle \epsilon_{r_p} \rangle}, \quad (2.28)$$

son independientes de r_n , lo que es equivalente a decir que se ha perdido la escala característica. Entonces, la expresión $\log \langle \epsilon_{r_p} \rangle / \langle \epsilon_L \rangle$ se puede escribir como una suma de términos correspondientes a diferentes pasos de la cascada:

$$\log \frac{\langle \epsilon_{r_p} \rangle}{\langle \epsilon_L \rangle} = \log \frac{\langle \epsilon_{r_p} \rangle}{\langle \epsilon_{r_{p-1}} \rangle} + \dots + \log \frac{\langle \epsilon_{r_1} \rangle}{\langle \epsilon_L \rangle}. \quad (2.29)$$

Por hipótesis cada término de la suma es independiente de los demás, entonces si se aplica el teorema del límite central [30] se concluye que $\log \langle \epsilon_r \rangle$ sigue un comportamiento gaussiano.

La función de densidad de probabilidad determina completamente la estadística, eso significa que a partir de ella se puede calcular el escalamiento de las funciones de estructura en la región inercial. El resultado se da a continuación:

$$\langle |\delta V(r)|^n \rangle \sim (\bar{\epsilon} r)^{n/3} \left(\frac{r}{L} \right)^{\frac{\mu n}{18}(3-n)} \quad (2.30)$$

Se concluye que $\zeta(n) = \frac{n}{3} + \frac{\mu n}{18}(3-n)$. Usualmente el valor de μ se calcula utilizando la función de estructura de orden 6. De hecho $\mu = 2 - \zeta(6)$. Se destaca que la dependencia entre $\zeta(n)$ y n es no lineal bajo el modelo log-normal.

La teoría de Kolmogorov de 1962 describe con una buena exactitud la estadística correspondiente a n pequeños. Diversas mediciones en tuneles de viento y en la atmósfera conducen al valor $\mu = 0.25 \pm 0.05$. Por lo tanto el

exponente de la función de estructura de orden dos es $\zeta(2) = 0.70$, mientras que el espectro de energía satisface el siguiente escalamiento: $E(k) \sim k^{-2.70}$. Desde un punto de vista experimental no se puede decir cuál de las dos leyes es válida, si la $5/3$ o la 2.70 , ya que la diferencia entre ellas es 2% , es decir, un porcentaje que queda dentro de los errores de medida. Sin embargo la diferencia entre $2/3$ y 0.70 es del 5% . Las medidas que se tomaron en la tesis indican firmemente que el exponente de la función de estructura de orden 2 es superior a $2/3$.

Por el contrario, el modelo de 1962 no reproduce con exactitud la estadística de orden elevado. Pero también hay varias cuestionamientos acerca de sus supuestos básicos. Uno de ellos es que la no linealidad del proceso de transferencia de energía puede invalidar la log-normalidad. Esto ha sido tratado en detalle en un artículo de Kraichnan aparecido en 1974 [25]. Otro punto débil de este modelo tiene que ver con el hecho de que la suma de variables log-normales por lo general no es log-normal.

2.3. MODELOS ALTERNATIVOS

Luego de la formulación de la teoría de Kolmogorov de 1962 han surgido varias alternativas que han intentado remontar las dificultades de este modelo. En ellas se abandona la idea de vorticillos distribuidos por todo el espacio, que es un concepto inherente a la teoría de 1942. Pero además se cuestiona que estos sean cubos y no tomen otras formas como hojas, líneas, cilindros, etc. Explíquese un poco más. Mediante simulaciones numéricas y técnicas de visualización se ha encontrado que las estructuras turbulentas ocupan sólo una porción del espacio y que ahí ocurren eventos de gran amplitud. Considérese un elemento de volumen de forma cúbica dentro de un flujo arbitrario. Los esfuerzos de corte producen un estiramiento, así que al cabo de cierto intervalo de tiempo se habrá perdido toda traza de la forma cúbica original. Si además se toma en cuenta la incompresibilidad, es de esperarse que los vértices del elemento de volumen se aproximen, formando una estructura extendida delgada. Lo que se vislumbra como más probable es una estructura de tipo serpentina, ya que el estiramiento difícilmente es igual en todas direcciones [31, 32].

Una de las teorías alternativas es el modelo β [33], según el cual las estructuras turbulentas tienden a llenar una fracción cada vez más pequeña del espacio. Explíquese. Supóngase que las dimensiones típicas de los vorticillos son $l_0, l_1 = l_0/2, l_2 = l_0/2^2, \dots, l_p = l_0/2^p$, etc. La idea básica del modelo β es que un vorticillo de la generación p da lugar a N^* vorticillos de la siguiente generación, con N^* un número positivo menor o igual a 8. En el caso $N^* = 8$ el volumen ocupado por las estructuras turbulentas es independiente de l_p .

Se define el parámetro β como el cociente entre los volúmenes ocupados por los vorticillos de la generación $p+1$ y los de la generación p . Es decir:

$$\beta = \frac{N^* (l_p/2)^3}{l_p^3} = \frac{N^*}{8} \quad (2.31)$$

Esta es una cantidad que no depende de p . Así que la fracción de volumen ocupada por las estructuras turbulentas de dimensión l_p es igual al producto de p veces β :

$$\beta_p = \beta^p = \left(\frac{N^*}{8}\right)^p \quad (2.32)$$

Se define una dimensión fractal a partir de la relación $N=2^D$. Hagase un alto para detallar este concepto: tómanse una línea, un cuadrado y un cubo. Si se reducen las dimensiones lineales de estos objetos en un factor 2, se necesitarán respectivamente, 2^1 líneas, 2^2 cuadrados y 2^3 cubos para reconstruir el objeto original. El exponente concuerda con la dimensión de las figuras. La relación $N=2^D$ corresponde con la definición de dimensión de Hausdorff [33]. Los autores del modelo proponen el valor $D=2.5$ como el más plausible, es decir, las estructuras turbulentas serían típicamente hojas fuertemente enrolladas.

El modelo β permite calcular los exponentes de las funciones de estructura. Para ello se deben tener en cuenta dos condiciones: 1) La conservación de la energía. Esto se traduce en que la suma de las energías de los vorticillos de dimensión l_p es una constante independiente de p . 2) El promedio de las diferencias de velocidad δV_p no debe de hacerse sobre todo el espacio, sino solamente sobre una fracción del volumen total, la ocupada por las estructuras de tamaño l_p . La ley de escala que se deduce da el siguiente resultado:

$$\zeta(n) = \frac{n}{3} + \frac{1}{3}(3-D)(3-n) \quad (2.33)$$

Si se hace $D=3$ se recuperan los resultados del modelo K41. La ecuación (2.33) proporciona una corrección al escalamiento clásico $n/3$, sin embargo aún persiste la relación lineal entre $\zeta(n)$ y n .

Una generalización es el modelo β aleatorio [34], en donde el parámetro β ya no es una constante, sino que cambia en cada paso de la cascada. Entonces, la fracción de volumen ocupada por los vorticillos de dimensión l_p , estaría dado por el producto de p factores aleatorios β_i . Mediante este refinamiento se han obtenido resultados que concuerdan mejor con los valores experimentales.

Luego del trabajo pionero de Mandelbrot acerca de los fractales en turbulencia desarrollada [35] se han construido varios modelos que se basan en esa idea. Por ejemplo, el formalismo multifractal [15, 36], según el cual la turbulencia consiste en una colección de estructuras de diferentes dimensiones. Meneveu y Sreenivasan [15] proponen un modelo simplificado, en donde la energía de un vorticillo se distribuye desigualmente entre los vorticillos de la siguiente generación. Esta es una manera de producir eventos de muy diversas intensidad, vale decir, con ello se introduce la intermitencia.

Los modelos de turbulencia desarrollada se dividen en dos categorías: por un lado, los que proponen una forma particular de la función de densidad de

probabilidad (a esta categoría pertenece el de Kolmogorov de 1962) y por el otro los que proponen relaciones entre diferentes niveles de la cascada, por ejemplo, de la disipación de energía. Uno de los principales problemas que se presentan es que no todos ellos pueden recibir una confirmación experimental, excepto por el valor de los exponentes de cantidades tales como las funciones de estructura o el espectro de frecuencias. Y tampoco existe una conexión con la ecuación de Navier-Stokes [21], después de todo los modelos se han construido debido a la extrema dificultad que se encuentra en la resolución de la ecuación de conservación de momento.

2.4 ESCALAR PASIVO

Por escalar se entiende una propiedad del sistema que no tiene carácter vectorial (por ejemplo la concentración de una sustancia o la temperatura). Y por pasivo se presupone que dicha propiedad ejerce una influencia despreciable sobre la estadística de velocidad. Si se habla de la temperatura, eso significaría que el calentamiento del fluido no da lugar al surgimiento de la convección. De aquí en adelante cuando se mencione a un escalar pasivo se estará entendiendo que se hace referencia a la temperatura.

La ecuación básica de un escalar pasivo es [10]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \chi \nabla^2 T, \quad (2.34)$$

en donde T es la temperatura y χ es el coeficiente de difusión térmica. Esta ecuación se deduce en la representación euleriana, así que las variables independientes son las coordenadas espaciales y el tiempo. Existen dos características que definen en gran parte el comportamiento del campo de temperatura, la primera es su acoplamiento con el campo de velocidades y la segunda es la existencia de procesos de difusión de calor, mismos que se vuelven importantes a escalas pequeñas. La inyección de las fluctuaciones de temperatura ocurre en las escalas grandes, luego se da una transferencia hacia las longitudes pequeñas, hasta que le difusividad térmica se encarga de destruirlas. La ecuación (2.34) es lineal en la temperatura, pero eso no significa que haya independencia de lo que ocurre sobre las diferentes escalas pues existe un acoplamiento con el campo de velocidades. Es decir, la interacción entre las estructuras de temperatura de diferentes longitudes ocurre por intermedio de la velocidad. Otra característica que se debe señalar es que el escalar pasivo muestra un comportamiento aleatorio y fuertemente intermitente.

La adimensionalización de la ecuación (2.34) conduce a la definición del número de Péclet:

$$Pe = \frac{UL}{\chi}, \quad (2.35)$$

que se interpreta como el cociente de los términos inerciales y los de difusión térmica [10]. Entre este parámetro y el número de Reynolds existe una relación:

$$Pe = Re \cdot Pr, \quad (2.36)$$

en donde $Pr = \nu/\chi$ se conoce como número de Prandtl.

La teoría estadística del campo de temperatura en turbulencia desarrollada se construye sobre la base de que existen escalas de longitud donde no influyen ni la difusividad térmica ni las anisotropías debidas a la geometría del sistema. Esta condición se satisface en el límite de números de Péclet y Reynolds grandes. Por otra parte, se necesita la introducción de nuevas cantidades que den cuenta del comportamiento específico del escalar pasivo. Una de ellas es la tasa local de disipación de fluctuaciones de temperatura [37]:

$$N = \chi \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2. \quad (2.37)$$

El promedio de esta cantidad es una magnitud que aparece en la formulación de las teorías estadísticas del escalar pasivo. Si se suponen homogeneidad e isotropía locales se deduce la siguiente expresión [10]:

$$\bar{N} = 3\chi \left\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \right\rangle, \quad (2.38)$$

en donde la coordenada x se ha tomado en la misma dirección que el flujo medio.

De entre las cantidades que se van a usar para investigar lo que ocurre a diferentes escalas destacan las funciones de estructura, que se definen de la siguiente manera [38]:

$$S_n(r) = \langle |\delta T(r)|^n \rangle = \langle |T(x+r) - T(x)|^n \rangle. \quad (2.39)$$

Si el campo de temperatura sigue un comportamiento autosemejante, se espera la existencia de un intervalo donde el escalamiento de las funciones de estructura sea de ley de potencias.

Mediante la utilización de la ecuación (2.34) y de las hipótesis de homogeneidad e isotropía locales se deduce una ecuación donde aparecen los momentos $\langle \delta T(r)^2 \rangle$ y $\langle \delta V(r) \delta T(r)^2 \rangle$ [45]. Se trata de:

$$\langle \delta V(r) \delta T(r)^2 \rangle = -\frac{4}{3} \bar{N} r + 2\chi \frac{d}{dr} \langle \delta T(r)^2 \rangle. \quad (2.40)$$

De esta ecuación se deducen dos comportamientos asintóticos. El primero corresponde al régimen donde la difusividad térmica no es importante, en cuyo caso el segundo término de la derecha se puede despreciar y entonces:

$$\langle \delta V(r) \delta T(r)^2 \rangle \approx -\frac{4}{3} \bar{N} r . \quad (2.41)$$

El segundo caso corresponde a longitudes suficientemente pequeñas, donde $\langle \delta V(r) \delta T(r)^2 \rangle \ll \langle \delta T(r)^2 \rangle$. En tal situación la función de estructura de temperatura de orden 2 se puede aproximar por:

$$\langle \delta T(r)^2 \rangle \approx \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 r^2 . \quad (2.42)$$

La región de validez de la ecuación (2.42) se conoce como intervalo disipativo.

Se ha mencionado previamente que a longitudes suficientemente pequeñas la difusión térmica juega un papel importante. La escala de longitud representativa no coincide, por lo general, con η , pues se trata de dos procesos difusivos diferentes, uno de momento y el otro es térmico. Siguiendo un procedimiento paralelo al seguido en la sección 2.1 con la ecuación de Kolmogorov, una estimación de la escala disipativa se puede obtener mediante la adimensionalización de (2.40). El resultado es:

$$\eta_T = \left(\frac{\chi^4}{\nu \bar{\epsilon}} \right)^{1/4} . \quad (2.43)$$

Desafortunadamente esta no es la única combinación posible de χ , $\bar{\epsilon}$ y ν , con unidades de longitud. De hecho, la forma más general de la escala disipativa de temperatura es:

$$\eta_T = \eta f(\text{Pr}) , \quad (2.44)$$

siendo $f(\text{Pr})$ una función arbitraria del número de Prandtl.

Oboukhov y Corrsin [40] desarrollaron un modelo del comportamiento estadístico de un escalar pasivo en turbulencia homogénea e isotrópica. Las ideas principales concuerdan con las de modelo de Kolmogorov de 1941. Las hipótesis que se introducen son:

1) En turbulencia localmente homogénea e isotrópica la función de densidad de probabilidad de las diferencias $T(x+r) - T(x)$ depende exclusivamente de χ , $\bar{\epsilon}$, ν , \bar{N} y r .

2) Si r es grande en comparación con η_T , entonces la función de densidad de probabilidad se vuelve independiente de los coeficientes de transporte ν y χ .

Con base en los incisos 1) , 2) y mediante un análisis dimensional se deduce un escalamiento para las funciones de estructura en la región inercial:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle \sim \epsilon^{-n/6} N^{n/2} r^{n/3}, \quad (2.45)$$

es decir, los exponentes valen $\xi(n) = n/3$ como en la teoría K41. Diversas mediciones muestran la existencia de una región donde se observa un comportamiento de ley de potencias, pero por otro lado los exponentes distan de tomar el valor predicho por el modelo, incluso cuando n es pequeño. Desde un punto de vista teórico el principal cuestionamiento tiene que ver con el hecho de que no se toma en cuenta el carácter aleatorio e intermitente de ϵ y N .

Una modificación a esta teoría ha sido propuesta por diversos autores [39, 40]. El escalamiento es:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle \sim \langle \epsilon_r^{-n/6} N_r^{n/2} \rangle r^{n/3}, \quad (2.46)$$

en donde:

$$N_r = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{|y| < r} N(x+y) dy. \quad (2.47)$$

Es decir, la estadística de temperatura se encuentra influida por la intermitencia tanto de ϵ como de N .

Hagamos ahora un comentario final: la investigación sobre un escalar pasivo en turbulencia desarrollada no ha recibido la misma atención que el estudio sobre la estadística de velocidad. En fechas recientes se han hecho algunos intentos por describirlo, por ejemplo utilizando el modelo β aleatorio [41], o mediante simulaciones numéricas de las ecuaciones básicas [42].

3. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

La realización de un experimento sobre turbulencia presupone contar con varios elementos. Si se pretende hacer un estudio bajo condiciones controladas, se debe tener un túnel de viento. Se necesitan además sondas de velocidad y temperatura, un anemómetro, un sistema de adquisición y almacenamiento de datos, así como equipo de cómputo. En este capítulo se hará una descripción de todos estos dispositivos.

3.1 TUNEL DE VIENTO

Las medidas de turbulencia se realizaron en el túnel de viento de la Ecole Normale Supérieure de Lyon, cuya sección transversal es de $50 \times 50 \text{ cm}^2$, mientras que la longitud de la sección de trabajo es de 3 m. Un esquema del túnel, con sus principales componentes, aparece en la figura 3.1. La sección de trabajo fue hecha en acrílico, con las paredes laterales divididas en segmentos desmontables, con el fin de instalar las sondas de velocidad y temperatura y el objeto generador de la turbulencia.

El aire es impelido por un ventilador centrífugo conectado a un motor trifásico, cuya potencia es de 3.6 kw; que permitía alcanzar velocidades medias de hasta de 8 m/s. Las palas del ventilador introducen asimetrías, así que se ha dejado una distancia de aproximadamente 2 metros entre éste y el "panel de abeja", de tal forma que haya recirculación y el flujo tienda a homogeneizarse. El panel de abeja consta de estructuras hexagonales de 3.6 mm de diámetro interno (d). Su función es la de suprimir las inhomogeneidades transversales que subsisten en el aire que fluye por el túnel de viento. En efecto, cuando un líquido o un gas se mueven dentro de un tubo delgado, pero suficientemente largo, la capa límite termina por invadir toda la sección transversal, así que la velocidad media a la salida está determinada únicamente por el gradiente de presión y el diámetro del tubo. De acuerdo a la teoría de capa límite laminar el espesor de ésta es proporcional a $xRe^{-1/2}$, en donde x es la distancia que hay entre la boca del tubo y el punto de medida y el número de Reynolds se

calcula usando a x como escala de longitud. El largo mínimo de los tubos para que a la salida la capa límite los invada completamente está dado por [7, 19]:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (3.1)$$

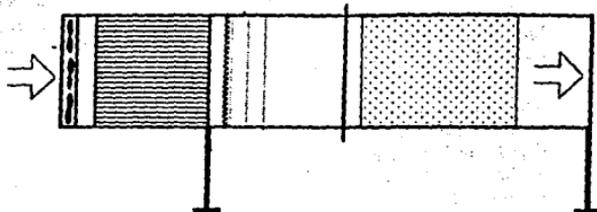
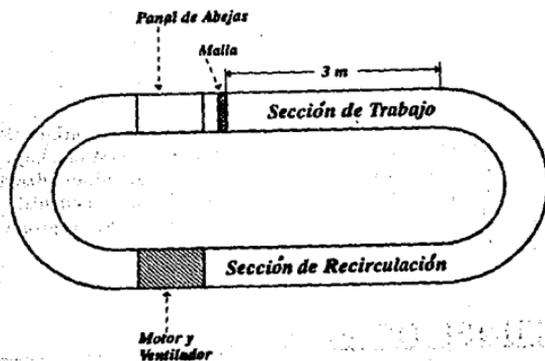


Figura 3.1.- Vistas superior y lateral del túnel de viento.

La aproximación laminar está justificada por el hecho de que el número de Reynolds basado en el diámetro de los tubitos es aproximadamente 1600 para una velocidad de 8 m/s, mientras que el valor crítico de transición a la turbulencia es de 2300, como lo demostró Osborne Reynolds el siglo pasado en sus investigaciones en tubos de sección circular [19].

A una velocidad de 8 m/s la capa límite invade todo el tubo a la distancia de 1.30 m después de la entrada. En nuestro dispositivo experimental se ha usado un "panal de abejas" de 2 metros de largo. Por otra parte, una estimación de la caída de presión en el tubo se obtiene usando los resultados del flujo laminar de Poiseuille circular [6]:

$$\Delta P = \frac{32\mu U_0 L_t}{d^2}, \quad (3.2)$$

en donde μ es la viscosidad dinámica del fluido y L_t es la longitud total del panal de abejas. Para una velocidad de 8 m/s se obtiene $\Delta P = 230$ Pa.

Un poco después del "panal de abeja" se colocó una serie de mallas de enrejado cuadrado, siendo el paso de 0.2 mm. Los alambres del enrejado son de 0.1 mm de diámetro. Las funciones de las mallas son las siguientes.

* Redireccionamiento del flujo según el eje del túnel de viento. Schubauer *et. al.* [43] han demostrado que si el flujo llega a la malla con un ángulo de incidencia no nulo, el aire sufre una desviación, acercándose a la normal. Este fenómeno se entiende si se toma en cuenta que la solidez aparente de la malla aumenta cuando la dirección del flujo incidente se separa de la normal, creando de esta manera una pérdida de carga más importante.

* Homogeneización espacial del flujo. Las variaciones espaciales estacionarias son mas débiles después que antes de la malla. Este efecto fue observado por Prandtl [44], y después por Taylor y Batchelor [45].

* Reducción del porcentaje de turbulencia. Este efecto, descrito por Dryden y Schubauer [46], concuerda bien con nuestras medidas experimentales. La introducción de las mallas ha permitido reducir las fluctuaciones de velocidad del 3% a menos del 1%.

Por lo demás, después de la primera malla se puso una capa de hule espuma (como la utilizada en los filtros de aspiradora) con el fin de incrementar la pérdida de carga y de crear una zona de recirculación para homogeneizar al flujo.

3.2 GENERACION DE LA TURBULENCIA

El flujo que llega a la sección de trabajo es laminar como se pudo comprobar luego de varias medidas hechas a diferentes números de Reynolds. Por lo tanto la producción de un flujo turbulento está determinada por las perturbaciones

que se hacen luego de que el aire ha pasado por la malla que se ha descrito en el apartado anterior. La generación de turbulencia se hizo mediante dos procedimientos diferentes. El primero fue por medio de un cilindro (se usaron dos, cuyos diámetros son respectivamente 6 y 10 cm) colocado aproximadamente a 20 cm de la última malla. El rango de números de Reynolds alcanzado con esta configuración varió entre 6,000 y 50,000, con una desviación estandar de los datos de velocidad (en adelante se le llamará tasa de turbulencia) de entre el 10 y el 15%. El cilindro se colocó en posición vertical al centro de la sección transversal.

La segunda manera de producir la turbulencia fue mediante un chorro (ver figura 3.2). Se trata de una caja que reduce la sección transversal por donde pasa el aire, de un cuadrado de $50 \times 50 \text{ cm}^2$ a un círculo de 12.5 cm de diámetro. Los números de Reynolds que se alcanzaron con esta configuración variaron entre 200,000 y 400,000, mientras que la tasa de turbulencia se ubicó entre el 25 y el 50%. Este último dato revela algunas dificultades, pues con una tasa de turbulencia tan elevada se producen no pocos cambios de signo en la velocidad, mientras que las sondas sólo detectan valores absolutos [47].

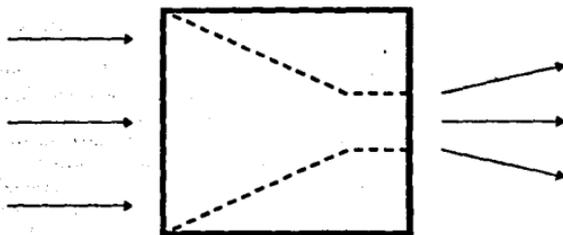


Figura 3.2.- Dispositivo para producir turbulencia de chorro en el túnel de viento. El aire entra por la izquierda y sale por una boquilla de 12.5 cm de diámetro.

3.3 ANEMOMETRO Y SONDAS DE VELOCIDAD

Las mediciones de velocidad se hicieron con un anemómetro marca TSI de sensores intercambiables. Dicho aparato proporciona una salida analógica de voltaje en el intervalo ± 6 volts. Varios parámetros son susceptibles de controlarse desde el anemómetro, entre ellos la temperatura de operación de las sondas. Además, sobre la señal se pueden realizar varias operaciones como son la sustracción de un voltaje, un filtrado y la multiplicación por un factor de ganancia.

Las sondas usadas junto con este dispositivo son conocidas como "películas

Sonda	Diámetro	Longitud	R_0	R_t
1	25 μm	0.25 mm	6.12 Ω	10.12 Ω
2	50 μm	1.00 mm	6.50 Ω	9.00 Ω
3	152 μm	2.00 mm	6.00 Ω	8.50 Ω
4	152 μm	2.00 mm	6.00 Ω	8.50 Ω

Tabla 3.1 Principales características de las sondas usadas para medir velocidad. R_0 es la resistencia a 0°C, mientras que R_t es la resistencia a 250°C

calientes". Se trata de películas conductoras depositadas sobre un alambre delgado, cuya resistencia varía linealmente con la temperatura y que operan a 250°C. La idea de trabajar en esas condiciones es que la sensibilidad de las sondas crece con el aumento de la temperatura de operación. La elección de 250°C fue a sugerencia del fabricante, pero se pueden operar en otras condiciones. Las principales características de las "películas calientes" se indican en la tabla 3.1. En adelante el diámetro de ellas se denotará por ϕ , mientras que su longitud se representará con L .

El principio de operación de una película caliente consiste en el siguiente efecto: cuando pasa una corriente de aire alrededor de la sonda se produce un enfriamiento, pues ésta disipa el calor que se produce por efecto Joule. Este desbalance se compensa con una corriente suplementaria, de manera que la sonda siempre tenga una temperatura constante. Las fluctuaciones en el paso de la corriente por la sonda se traducen en diferencias de potencial dentro del anemómetro. La relación entre la velocidad v y el voltaje E a la salida del aparato es del tipo:

$$E^2 = A + Bv^{1/2}, \quad (3.3)$$

en donde A y B son constantes que se deben determinar experimentalmente. La calibración se realizó tomando alrededor de 45 datos de velocidad en un flujo laminar. La velocidad se midió con un anemómetro DANTEC, mientras que los valores de voltaje proporcionados por el anemómetro TSI fueron medidos con un multímetro. A título de ejemplo, en la figura 3.3 se presenta la gráfica de E^2 vs $v^{1/2}$ correspondiente a la sonda # 1. La pendiente y la ordenada al origen de la recta son respectivamente A y B . Las constantes de calibración de las sondas se presentan en la tabla 3.2.

Como se puede apreciar, el coeficiente B aumenta conforme crece el tamaño de la sonda. Esto se traduce en un aumento de la sensibilidad de la película caliente con respecto a las variaciones de velocidad. Pero en este punto se debe hacer una observación. Efectivamente, las sondas grandes resuelven mejor las fluctuaciones de velocidad, pero su tamaño no permite investigar lo que ocurre en pequeñas escalas. Una longitud de dos milímetros es ya superior a la escala disipativa de todas las medidas que se hicieron y en algunos casos esta escala se ubica ya dentro de la región inercial. Por otro lado, las sondas que tienen mejor respuesta en frecuencia son las más pequeñas. De acuerdo a los datos proporcionados por el fabricante, para una velocidad de 30 m/s la respuesta

Sonda	A	B
1	0.805	0.365
2	1.271	0.950
3	2.862	2.915
4	2.932	3.107

Tabla 3.2 Constantes de calibración de las sondas. Nótese que A y B aumentan conforme crecen las dimensiones de las sondas

de la sonda número 1 es de 70 khz, mientras que la sonda número 4 tenía tan sólo una respuesta de 3 khz. Esto es particularmente crítico en las medidas de la turbulencia de chorro, donde existen componentes de frecuencia de hasta 30 khz, antes de llegar al nivel de ruido.

Los coeficientes A y B dependen linealmente de la diferencia entre la temperatura de operación ($250^{\circ}C$) y la temperatura ambiente. Este factor debe de tomarse en cuenta si la temperatura del flujo durante la medida es diferente de la temperatura del aire durante la calibración. Una variación de dos grados produce un cambio de A y B en aproximadamente un 1%.

Las sondas 1 y 2 fueron las que se usaron para realizar la mayoría de las medidas, pues con ellas se tiene la capacidad de resolver escalas pequeñas. Expliquemos un poco: los sensores de velocidad realizan una medida que no es puntual, sino que se trata de un promedio sobre su superficie. Por lo tanto la resolución mínima es igual a su longitud l .

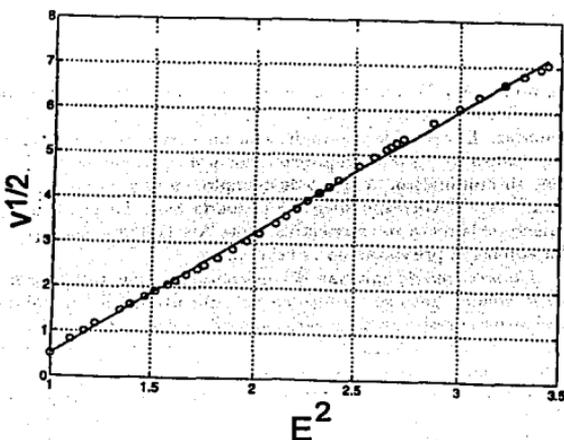


Figura 3.3.- Gráfica de $v^{1/2}$ vs E^2 para la sonda # 1. La ordenada al origen y la pendiente son respectivamente $-A/B$ y $1/B$.

Debe destacarse que en las medidas a número de Reynolds pequeño, específicamente a 6,000 y 9,000, la longitud de la sonda l fue menor que el tamaño de la escala disipativa. Por otro lado, las longitudes correspondientes al intervalo inercial fueron en todos los casos mayores que l (la región inercial inicia a un valor de r que es un orden de magnitud superior a η). Se hicieron algunas medidas con las sondas 3 y 4, pero fue únicamente con el objeto de evaluar la influencia del tamaño de la sonda sobre las mediciones. Esto será objeto de atención en un apartado del siguiente capítulo.

Las medidas del campo de velocidad se realizan usualmente en un punto, mientras que el cálculo de cantidades como las funciones de estructura requiere que se tengan datos de velocidad en puntos diferentes del espacio. Esta limitante se puede superar si se hace uso de la hipótesis de Taylor [47, 48], que establece que las estructuras turbulentas son transportadas por el flujo medio. Dicho de otra manera, una adquisición de datos en el tiempo es equivalente a una adquisición de datos en el espacio. La relación entre t y r está dada por la siguiente ecuación:

$$r = Ut, \quad (3.4)$$

donde U es la velocidad media. Diversos autores han mostrado que la hipótesis de Taylor funciona razonablemente bien cuando la tasa de turbulencia se ubica entre 10-15%. Para valores más altos se ha propuesto una modificación de la hipótesis de Taylor, que consiste en tomar velocidades promedio locales [48].

3.4 MEDICION DE LA TEMPERATURA

El principio de operación de las sondas que miden temperatura es una respuesta lineal de esta última y la resistencia. Es decir:

$$R = R_0 + \alpha \Delta T, \quad (3.5)$$

en donde α es una constante y R_0 es la resistencia de la sonda a la temperatura promedio del flujo. Un material que presenta una relación lineal entre resistencia y temperatura en un amplio intervalo es el platino. La sonda que se ocupó en nuestros experimentos es un hilo delgado fabricado por la compañía DAN-TEC, que por su aspecto se asemeja a las películas calientes usadas para medir velocidad. Sus principales características aparecen en la tabla 3.3.

La medición instantánea de R podría proporcionar directamente la temperatura, pero es preferible transformar las variaciones de resistencia en diferencias de potencial debido a que el convertidor analógico-digital sólo acepta como entrada una señal de voltaje (ver la siguiente sección). Para ello la sonda de platino se conecta a un puente de Wheatstone, como se indica en la figura 3.4.

CARACTERÍSTICA	VALOR
R_0	45 Ω
α	0.1645 $\Omega/^\circ C$
Diámetro	1 μm
Longitud	0.3 mm
Corriente aplicada	0.35 mA

Tabla 3.3 Características de la sonda de temperatura

Este último dispositivo fue diseñado y construido en el Laboratorio de Física de la ENSL.

El puente se alimenta entre los puntos A y C con una batería de automóvil de 12 volts. Por otra parte, las resistencias R_1 y R_2 se eligen mucho mayores que las restantes con el objeto de que las variaciones de la resistencia de la sonda no modifiquen sustancialmente la intensidad de corriente que pasa por ella (igual a 0.35 mA). La resistencia variable R_2 se lleva hasta el valor en que el voltaje entre los puntos B y C es igual a cero en promedio. Cuando se produce una fluctuación de temperatura con respecto a la media, se genera un desbalance en el puente.

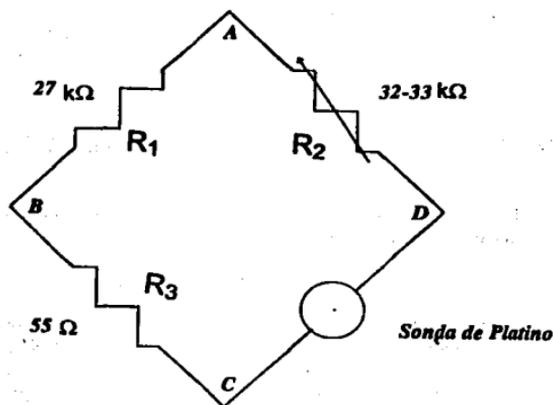


Figura 3.4.- Puente de Wheatstone. La sonda de temperatura se conectó a este dispositivo para convertir las variaciones de resistencia en diferencias de potencial.

La diferencia de potencial entre B y C ya no es cero, sino:

$$\Delta E = \frac{V_0}{R_t + \Delta R} (R_0 + \Delta R) - \frac{V_0}{R_t} R_0, \quad (3.6)$$

en donde $R_t = R_1 + R_0$, $V_0 = 12$ volts c.d. y ΔR es la fluctuación en la resistencia debido al cambio en la temperatura. Un desarrollo en serie de Taylor a primer orden da la siguiente aproximación:

$$\Delta E = \frac{V_0}{R_t} \Delta R. \quad (3.7)$$

El siguiente término del desarrollo es tres ordenes de magnitud inferior cuando $\Delta R = 1$. Por lo tanto, con bastante buena precisión se puede afirmar que hay una relación lineal entre el voltaje y las fluctuaciones de temperatura. La proporcionalidad exacta para la sonda que se usó es:

$$\Delta E = 5.75 \times 10^{-5} \Delta T. \quad (3.8)$$

El coeficiente de proporcionalidad es muy pequeño, así que debe hacerse una amplificación de la señal. Esto se realizó con un amplificador diferencial marca EGG de ganancia 10,000. Posteriormente la señal se envía a un filtro, donde además del filtrado se vuelve a hacer una amplificación; luego se envía al convertidor analógico-digital de 16 bits. Finalmente los datos se transfieren a una PC, donde quedan guardados como archivos binarios.

3.5 CALENTAMIENTO DEL AIRE

Durante los experimentos sobre escalar pasivo el aire que fluye por el túnel de viento debe calentarse a fin de producir fluctuaciones de temperatura. El sistema de calefacción debe poseer 2 características. La primera es que el aumento de la temperatura debe ser lo suficientemente pequeño como para que el calor no tenga una influencia apreciable sobre la estadística de la velocidad (es decir, se debe estar dentro de la condición de escalar pasivo). La segunda es que los valores medios de temperatura no deben tener gradientes, en caso contrario se estaría violando la condición de homogeneidad e isotropía.

Revisando la literatura sobre el tema, se encontró que un sistema que satisface con la segunda característica (la primera depende de la potencia suministrada) es una "mandolina" [50], es decir, un arreglo de alambres como el mostrado en la figura 3.5. En su construcción se usaron alambres de constante ya que este material posee una resistencia que casi no depende de la temperatura. La resistencia total de la mandolina fue de 17 Ω . Este dispositivo se colocó dentro del túnel de viento, con una orientación perpendicular a

la dirección del viento. Debe destacarse que la mandolina se usó únicamente durante los experimentos de turbulencia producida por un cilindro. En turbulencia de chorro la distancia entre el sistema de calefacción y la sonda fue insuficiente para tener un buen mezclado, así que las fluctuaciones de temperatura tenían eventos de una amplitud que superaba con mucho el valor de la desviación estandar de ΔT .

La mandolina se calienta debido a que por los alambres circula una corriente. La diferencia de potencial usada para calentar el aire fue de 130 volts dc, mientras que la intensidad total de corriente que circuló por el dispositivo fue de 7.6 A. Lo que da una potencia de aproximadamente 1000 watts. Se eligió trabajar con corriente directa, pues la alimentación con corriente alterna introduce ruido sobre la señal de temperatura, consistente en armónicos de frecuencia de 50 Hz. El calentamiento del aire con esa potencia fue de entre 0.8 y 4 grados centígrados, dependiendo de la velocidad promedio del aire.

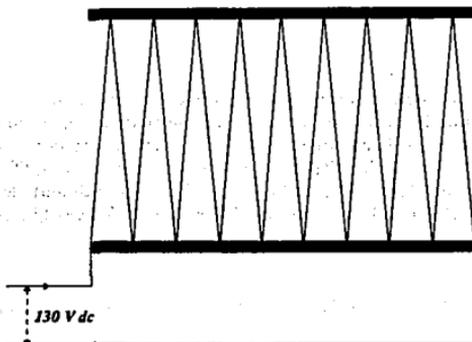


Figura 3.5.- Vista frontal de la "mandolina". Los alambres son de constantano, un material cuya resistencia casi no depende de la temperatura. La potencia de la calefacción era de aproximadamente 1 kw.

3.6 SISTEMA DE ADQUISICION DE DATOS

Tanto el anemómetro, como el puente de Wheatstone usado para medir fluctuaciones de temperatura, tienen una salida en volts. Ambos aparatos se conectan al sistema de adquisición de datos, que es un convertidor analógico-digital IOTECH, modelo 488/8S. Este dispositivo transforma los valores de voltaje en enteros de 16 bits, es decir, dentro de un intervalo de -32767 a 32767. Por otra parte, los datos se pueden adquirir hasta con una velocidad de 100,000 muestras por segundo. También es posible hacer un muestreo simultáneo por varios canales, lo que resulta adecuado cuando se hace una estadística conjunta

de velocidad y temperatura.

La elección de la frecuencia de adquisición debe contemplar, por una parte, que se incluyan la mayor parte posible de las componentes del espectro. Esto estaría apuntando a elegir la frecuencia más alta disponible. Sin embargo, el ruido de los aparatos posee la característica de que sus componentes de alta frecuencia a menudo tienen mayor amplitud que las correspondientes a la señal. Esto significa que se puede producir una deformación de la última [49]. Por ello se debe elegir una frecuencia de muestreo en donde el ruido no influya sensiblemente sobre las medidas.

Los datos deben de pasarse por un filtro pasa bajos. El dispositivo que se usó durante los experimentos fue uno marca IOTECH, modelo 488/4, que puede operar simultáneamente por 4 canales. Por medio del filtrado se pueden evitar varios problemas, el principal tiene que ver con la reconstrucción de la señal original a partir de la serie discreta de datos que proporciona el convertidor analógico-digital. Si el muestreo se hace sin ninguna precaución pueda darse el fenómeno de un corrimiento de la información de un intervalo de frecuencias a otro [49] (esto lleva el nombre de aliasing en inglés). La manera de evitar este fenómeno es utilizando una frecuencia de filtrado igual a la mitad del valor de la frecuencia de adquisición, aunque se puede elegir un valor menor.

...the first ... the second ... the third ... the fourth ... the fifth ... the sixth ... the seventh ... the eighth ... the ninth ... the tenth ... the eleventh ... the twelfth ... the thirteenth ... the fourteenth ... the fifteenth ... the sixteenth ... the seventeenth ... the eighteenth ... the nineteenth ... the twentieth ... the twenty-first ... the twenty-second ... the twenty-third ... the twenty-fourth ... the twenty-fifth ... the twenty-sixth ... the twenty-seventh ... the twenty-eighth ... the twenty-ninth ... the thirtieth ... the thirty-first ... the thirty-second ... the thirty-third ... the thirty-fourth ... the thirty-fifth ... the thirty-sixth ... the thirty-seventh ... the thirty-eighth ... the thirty-ninth ... the fortieth ... the forty-first ... the forty-second ... the forty-third ... the forty-fourth ... the forty-fifth ... the forty-sixth ... the forty-seventh ... the forty-eighth ... the forty-ninth ... the fiftieth ... the fifty-first ... the fifty-second ... the fifty-third ... the fifty-fourth ... the fifty-fifth ... the fifty-sixth ... the fifty-seventh ... the fifty-eighth ... the fifty-ninth ... the sixtieth ... the sixty-first ... the sixty-second ... the sixty-third ... the sixty-fourth ... the sixty-fifth ... the sixty-sixth ... the sixty-seventh ... the sixty-eighth ... the sixty-ninth ... the seventieth ... the seventy-first ... the seventy-second ... the seventy-third ... the seventy-fourth ... the seventy-fifth ... the seventy-sixth ... the seventy-seventh ... the seventy-eighth ... the seventy-ninth ... the eightieth ... the eighty-first ... the eighty-second ... the eighty-third ... the eighty-fourth ... the eighty-fifth ... the eighty-sixth ... the eighty-seventh ... the eighty-eighth ... the eighty-ninth ... the ninetieth ... the ninety-first ... the ninety-second ... the ninety-third ... the ninety-fourth ... the ninety-fifth ... the ninety-sixth ... the ninety-seventh ... the ninety-eighth ... the ninety-ninth ... the hundredth ...

4. AUTOSEMEJANZA EXTENDIDA

4.1 AUTOSEMEJANZA Y LEYES DE POTENCIA

La autosemejanza significa una pérdida de las escalas características. Esto se puede ejemplificar con la figura conocida como curva de Koch [51]. El punto de partida es una línea de longitud unitaria (que se denominará el iniciador). Esta se reemplaza por una línea quebrada de 4 segmentos de longitud $1/3$ (el generador). Los pasos sucesivos consisten en reemplazar cada uno de los segmentos rectos por la versión a escala del generador. El resultado se muestra en la figura 4.1. Si se toman muestras de ella a dos diferentes escalas se vería aproximadamente lo mismo. La autosemejanza implica usualmente un comportamiento de ley de potencias, una característica que está presente en la estadística de los flujos turbulentos.

De acuerdo con los modelos de Kolmogorov y a diversas medidas experimentales [3, 20], algunas de las cantidades que presentan un comportamiento de ley de potencias son:

1) Los momentos del promedio de la tasa de disipación de energía en un dominio de dimensiones lineales r (ϵ_r).

2) El espectro de energía.

3) Los momentos de las diferencias de velocidad, con o sin valor absoluto:

$$\begin{aligned} S_n(r) &= \langle \delta V(r)^n \rangle = \langle (V(x+r) - V(x))^n \rangle \\ F_n(r) &= \langle |\delta V(r)|^n \rangle = \langle |V(x+r) - V(x)|^n \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

Las diferencias de velocidad pueden ser positivas, negativas o nulas, por lo tanto los momentos de orden impar satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\langle \delta V(r)^n \rangle \leq \langle |\delta V(r)|^n \rangle \quad (4.2)$$

El hecho de que haya contribuciones positivas y negativas en las funciones de estructura de orden impar implica que habrá cancelaciones mutuas y que para alcanzar una convergencia estadística se debe usar una mayor cantidad de datos en relación a los necesarios para calcular una función de estructura de orden par o con valor absoluto.

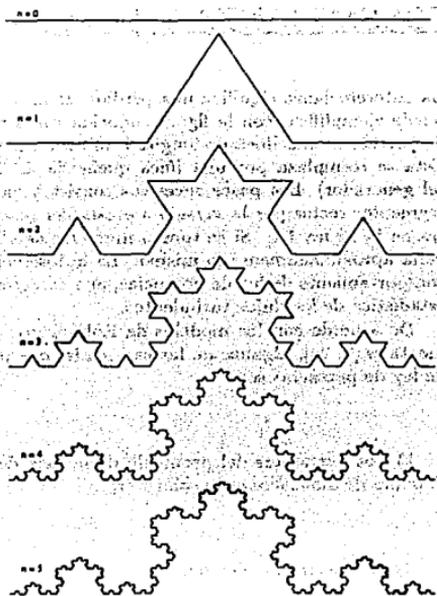


Figura 4.1.- Curva de Koch. Este es un ejemplo de la pérdida de la noción de escalas características.

El comportamiento de las funciones de estructura de orden pequeño está dominado por los eventos de baja amplitud, inclusive se puede presentar una contaminación por el ruido de los aparatos de medida. Por el contrario, si n es grande, los eventos que dominan la estadística son los de mayor amplitud, que son a la vez los menos frecuentes y como consecuencia de esto, el número de datos requerido para calcular correctamente una función de estructura crece con el aumento del orden n .

Existen dos intervalos donde se observa un comportamiento de ley de potencias, aunque sus características son notablemente distintas. En escalas pequeñas, donde la viscosidad es importante, las variaciones en el campo de velocidad son suaves y por lo tanto las diferencias se pueden aproximar con suficiente exactitud con un desarrollo en serie de Taylor cortado a primer orden.

$$V(x+r) - V(x) \approx V'(x) \cdot r, \quad (4.3)$$

en donde la prima quiere decir derivación con respecto a x . Entonces, en la región disipativa las funciones de estructura siguen la ley de potencias:

$$\langle \delta V(r)^n \rangle \sim r^n, \quad (4.4)$$

puesto que $V'(x)^n$ es una cantidad local que no depende de r (ni de x si se trata de turbulencia isotrópica).

Cuando el número de Reynolds es grande hay otra región donde se observa un comportamiento de ley de potencias, que se ubica entre la escala disipativa y la integral. Es la región inercial:

$$\langle |\delta V(r)|^n \rangle \sim r^{\zeta(n)}, \quad (4.5)$$

en donde $\eta \ll r \ll L$. Solo para el caso $n=3$ se conoce un resultado exacto [45],

$$\langle \delta V(r)^3 \rangle \sim r. \quad (4.6)$$

Los datos experimentales muestran que si $n \neq 3$, entonces $\zeta(n) \neq n/3$ [24], en donde $n/3$ es el valor clásico de la teoría de Kolmogorov de 1941. Aún más, se satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned} \zeta(n) &> \frac{n}{3} && \text{si } n < 3 \\ \zeta(n) &< \frac{n}{3} && \text{si } n > 3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por ejemplo, la diferencia entre $\zeta(n)$ y $n/3$ es de aproximadamente el 11% cuando n vale 6.

La posibilidad de determinar con exactitud el exponente $\zeta(n)$ depende de tener una región inercial extensa. Esto es difícil de alcanzar mediante simulaciones numéricas, puesto que el cociente entre las escalas integral y disipativa crece aproximadamente como $Re^{3/4}$. Digámoslo en otras palabras. Supóngase

que se ha decidido hacer una descomposición de la velocidad en una serie (o integral) de Fourier. Los modos que se deben incluir mínimamente son aquellos comprendidos entre η y L . Entonces, si se aumenta el número de Reynolds se deben incluir necesariamente números de onda cada vez mayores. Típicamente los valores de Re alcanzados numéricamente llegan alrededor de 50,000. Por otra parte, desde un punto de vista experimental las restricciones son menores. Por ejemplo, en los experimentos que se realizaron en la ENS de Lyon, este parámetro de ubicó entre 6,000 y 400,000; en la atmósfera se alcanzan números de Reynolds dos ordenes de magnitud mayores.

La región inercial no es extensa en la mayoría de los casos, lo que se traduce en que los valores de los exponentes $\zeta(n)$ se calculan con una incertidumbre que no es despreciable. Pero hay otro problema de principio. Formalmente, los modelos de turbulencia serían válidos en el límite $Re \rightarrow \infty$, por lo tanto queda una pregunta abierta: ¿Hasta qué punto existe un comportamiento universal en la turbulencia isotrópica si los números de Reynolds son finitos? Adelantándonos a lo que se escribirá más adelante, la respuesta es que se ha encontrado una propiedad (llamada Auto semejanza Extendida) que nos permite calcular los exponentes $\zeta(n)$ incluso para valores de Re moderados y pequeños [1,3]. Lo más importante es que esos valores no muestran una dependencia con respecto a Re . Este resultado nos permite afirmar que muchas de las características universales de la turbulencia ya están contenidas en flujos con valores modestos del número de Reynolds. Lo dicho anteriormente indica que existe una universalidad más grande que la establecida hasta el momento por los modelos clásicos sobre turbulencia.

Se denomina Auto semejanza Extendida (AE) a una propiedad de los flujos turbulentos que permite observar un comportamiento de ley de potencia en un intervalo más amplio que la región inercial. La idea básica consiste en redefinir la escala de longitudes. En lugar de expresar los resultados en términos de r , lo que se hace en AE es utilizar como variable independiente a la función de estructura de orden 3. Tomando en cuenta que esta función es proporcional a r sobre el intervalo inercial, todos los resultados deben poder compararse directamente con los obtenidos en los demás trabajos sobre el tema.

Los experimentos que se van a reportar a lo largo de este trabajo corresponden a dos geometrías distintas (turbulencia producida por un cilindro y turbulencia de chorro). Los valores mínimo y máximo de Re son respectivamente 6,000 y 300,000. Las principales características de las medidas que se hicieron se presentan en las tablas 4.1 y 4.2. Menciónese que los valores de Re_λ estuvieron comprendidos dentro del intervalo de 134 a 1065. Esta variedad de condiciones experimentales nos permitió tener desde flujos sin una región inercial propiamente dicha hasta flujos en donde el intervalo inercial tenía una extensión de más de un orden de magnitud.

Número de Reynolds	6,000	9,000	18,000	36,000	50,000
U (m/s)	1.5	1.4	2.8	5.7	7.9
L (cm)	6	10	10	10	10
σ (m/s)	0.16	0.158	0.35	0.59	1.21
Tasa de Turbulencia	10.7	11.2	12.5	10.6	12.6
$\bar{\epsilon}$ (m^2/s^3)	0.06	0.032	1.58	1.40	6.7
η (μ m)	400	590	200	292	140
λ (mm)	11.2	13.3	7.2	7.7	5
R_λ	225	134	342	292	480
Sonda	1, 2	1	1	1	1
F_a (khz)	10	5	20	20	50
F_c (khz)	5	2	10	8	20

Tabla 4.1 Principales características de las medidas de turbulencia producida por la introducción de un cilindro en el túnel de viento. F_a y F_c son respectivamente la frecuencia de muestreo y la frecuencia de filtrado

Número de Reynolds	250,000	300,000	400,000	JA
U (m/s)	5.51	6.40	8.76	15.8
L (cm)	12	12	12	12
σ (m/s)	2.50	3.01	3.59	4.2
Tasa de Turbulencia	45	47	41	25
$\bar{\epsilon}$ (m^2/s^3)	50	125	140	270
η (μ m)	100	80	73	64
λ (mm)	5.4	5.0	4.6	3.9
R_λ	765	800	1050	1060
Sonda	1	1	1	1
F_a (khz)	50	100	50	20
F_c (khz)	20	30	20	10

Tabla 4.2 Principales características de las diferentes medidas en turbulencia de chorro. El caso indicado con JA corresponde a una medida donde se removieron las paredes laterales del túnel de viento. Debido a que se cambió la geometría del sistema, se optó por no dar el valor de Re en ese caso. F_a y F_c son respectivamente la frecuencia de muestreo y la frecuencia de filtrado

4.2 FUNCION DE ESTRUCTURA DE ORDEN 3

En turbulencia desarrollada la función de estructura de orden 3 tiene una importancia particular. De aquí en adelante distinguiremos entre $S(r) = -\langle \delta V(r)^3 \rangle$ y $F_3(r) = \langle |\delta V(r)|^3 \rangle$. Como ya se había indicado en el capítulo precedente, $S(r)$ satisface la ecuación de Kolmogorov,

$$-S(r) = -\frac{4}{5}\bar{\epsilon}r + 6\nu\frac{d}{dr}F_2(r). \quad (4.8)$$

Esta ecuación es la herramienta fundamental para detectar la existencia de un intervalo inercial, pues si $r \gg \eta$, entonces $S(r) = 4\bar{\epsilon}r/5$. En nuestros experimentos, solo los flujos de turbulencia de chorro muestran la existencia de un intervalo inercial bien establecido, como se puede apreciar en la figura 4.2, donde se ha graficado $S(r)$ vs r/η para tres medidas distintas. Nótese que la gráfica se ha hecho en escala logarítmica para los dos ejes. Hay dos razones para ello. La primera tiene que ver con el hecho de que se grafican cantidades sobre valores de r que se extienden por varios órdenes de magnitud. La segunda es que en escala log-log las leyes de potencia aparecen como líneas rectas, cuya pendiente da directamente el exponente.

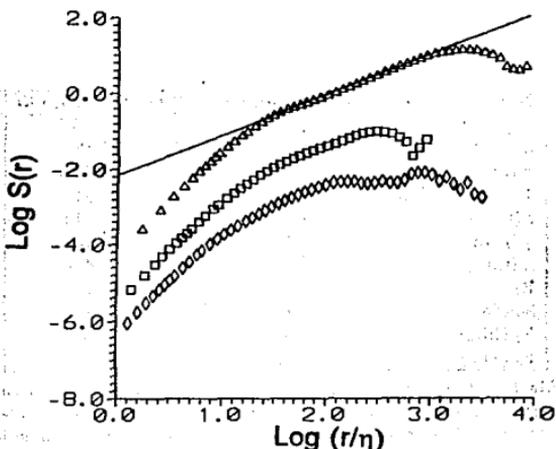


Figura 4.2.- Gráfica de $S(r) = \langle \delta V(r)^3 \rangle$ vs r/η en escala log-log para tres valores distintos de número de Reynolds: (○) $Re=6,000$ (□) $Re=18,000$ y (▲) $Re=300,000$. Los dos primeros corresponden a turbulencia producida por un cilindro y el tercero a turbulencia de chorro. La línea continua tiene pendiente 1.

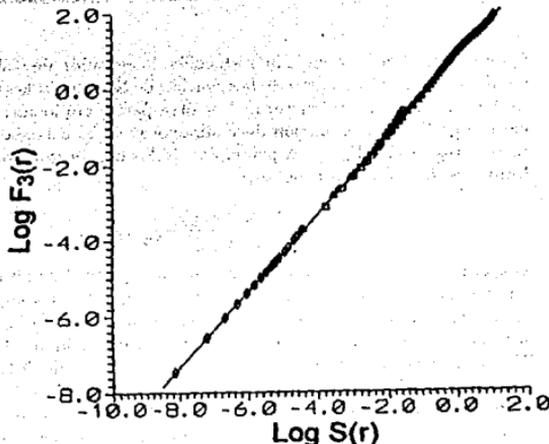


Figura 4.3.- Gráfica de $\langle \delta v(r)^2 \rangle$ vs $\langle \delta v(r)^2 \rangle$ en 4 experimentos diferentes: (●) $Re=4,400$ (turbulencia producida por un enrejado), (○) $Re=6,000$ (□) $Re=18,000$ y (▲) $Re=300,000$. En ambos ejes se tiene escala logarítmica de base 10. Todos los datos se distribuyen alrededor de una recta cuya pendiente es muy próxima a 1. Esto significa que hay proporcionalidad entre las dos cantidades.

Aunque no puede ser probado rigurosamente, se supone que $F_3(r)$ sigue un escalamiento similar al de $S(r)$. Esta idea se basa en los mismos argumentos dimensionales que utilizó Kolmogorov en sus modelos de 1941 y 1962. Específicamente, se supone que la intermitencia no afecta el comportamiento de $F_3(r)$. En la figura 4.3 se muestran gráficas de $F_3(r)$ vs $S(r)$ de varios experimentos. Todos los datos disponibles, excepto los de las grandes escalas, se distribuyen sobre una línea recta cuya pendiente es 1.005, es decir, un valor muy cercano a 1.

Este es un resultado muy importante porque pone en evidencia que los comportamientos de $F_3(r)$ y $S(r)$ no difieren el uno del otro, incluso cuando se tienen números de Reynolds pequeños. De aquí en adelante se hará uso de este hecho para investigar las propiedades de escalamiento de las funciones de estructura. Usaremos $F_3(r)$ en lugar de $S(r)$ debido a que la primera cantidad tiene una convergencia estadística más rápida, pero también porque se observó una proporcionalidad entre ellas que comienza en la escala disipativa y se extiende hasta el intervalo inercial.

4.3 CERRADURA DE LA ECUACION DE KOLMOGOROV

Como ya se mencionó en la introducción, la ecuación de Kolmogorov es el único resultado deducido a partir de la ecuación de Navier-Stokes para el escalamiento de las funciones de estructura. Por otra parte, como sucede en las teorías de campo no lineal, la ecuación de Kolmogorov no es cerrada ya que contiene dos incógnitas, $S(r)$ y $F_2(r)$. A principios de los cuarenta Oboukhov [10,27] usó la hipótesis de asimetría constante

$$\frac{\langle \delta V(r)^3 \rangle}{\langle \delta V(r)^2 \rangle^{3/2}} = cte. \quad (4.9)$$

con el fin de cerrarla. Desafortunadamente, poco después se demostró que esa suposición conducía a resultados sin sentido físico, pues se predecía un espectro de energía negativo para escalas menores a η . Nosotros usaremos una idea diferente. Con este fin fijemos la atención en la figura 4.4, donde se gráfica $F_2(r)$ vs $F_3(r)$ en escala log-log para tres valores distintos de Re . En todos los casos se observa una línea recta sobre un amplio intervalo, que comienza aproximadamente a partir de 5η . Las pendientes son las mismas en todos los experimentos, es decir, 0.70. Este valor de $\zeta(2)$ es cercano, pero diferente de la predicción de modelo K41. Resaltemos que 0.7 es el exponente de $F_2(r)$ en la región inercial.

Se pueden usar los resultados de las gráficas 4.3 y 4.4 para cerrar la ecuación (4.8). A partir de ellas se deduce que

$$F_2(r) = AS(r)^{\zeta(2)}, \quad (4.10)$$

donde A es una constante dimensional y $\zeta(2) = 0.70$. El cálculo de A se divide en dos partes. Primero se debe determinar el coeficiente de proporcionalidad (γ_1) entre las funciones F_3 y S . Luego se tienen que ajustar los datos de $\text{Log}F_2$ y $\text{Log}F_3$ a una línea recta. La ordenada en el origen (que denominaremos γ_2) junto con γ_1 nos permiten determinar el valor de A , a través de la relación: $A = \gamma_1 10^{\gamma_2}$. Usando la ecuación (4.10) se deduce finalmente:

$$S(r) = \frac{4}{5}\epsilon r - 6\nu A \frac{d}{dr} S(r)^{0.70}. \quad (4.11)$$

La anterior es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden. Su solución se puede calcular numéricamente usando como condición inicial uno de los valores experimentales de $S(r)$. En la figura 4.5 se muestran los datos de $S(r)$ vs r/η para 3 valores distintos de Re y las correspondientes soluciones numéricas. La concordancia es buena, incluso cuando $Re=6,000$. Las diferencias entre las curvas teóricas y los datos experimentales ocurren tanto en la región disipativa (donde deja de cumplirse la ecuación (4.11)), como para longitudes comparables con la escala integral (en donde desaparece la autosemejanza a causa de las anisotropías de la geometría del sistema).

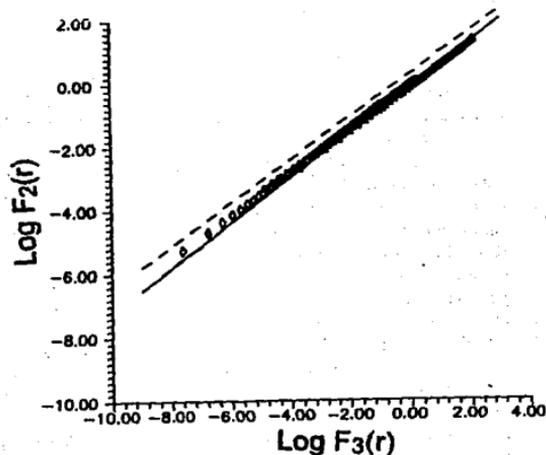


Figura 4.4.- Gráfica de $\langle \delta V(r)^2 \rangle$ vs $\langle \delta V(r)^3 \rangle$ en escala log-log para $Re=8,000$, $Re=18,000$ y $Re=30,000$ (los símbolos son los mismos de la figura 4.2). La línea continua tiene pendiente 0.70, mientras que el trazo punteado corresponde a la predicción del primer modelo de Kolmogorov (es decir, su pendiente es 2/3).

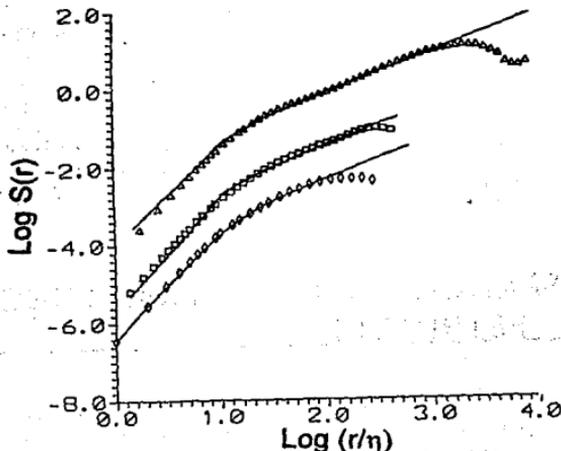


Figura 4.5.- Gráfica de $S(r) = -\langle \delta V(r)^3 \rangle$ vs r/η en escala log-log (\circ) $Re=8,000$ (\square) $Re=18,000$ y (Δ) $Re=30,000$. Las líneas continuas corresponden a la solución numérica de la ecuación de Kolmogorov usando Auto semejanza Extendida.

Uno de los detalles que debe resaltarse es que la solución numérica depende fuertemente del valor de A , mientras que existe una dependencia débil con respecto al exponente $\zeta(2)$.

Las figuras 4.4 y 4.5 proporcionan un resultado que es nuevo. El escalamiento entre $S(r)$ y $F_2(r)$ es válido no solo en la región inercial sino sobre un intervalo más extenso, que incluye escalas próximas a η . Además, dicho escalamiento aparece tanto a números de Reynolds pequeños como a números de Reynolds grandes. Esto significa, por ejemplo, que usando la misma geometría (la que fija el valor de A) la ecuación de Kolmogorov se puede utilizar para predecir la forma de las funciones de estructura de orden 2 y 3, y por lo tanto, el comportamiento del espectro de energía, habida cuenta de la relación entre este último y $F_2(r)$. En este punto vamos a definir la noción de región inercial extendida como aquella donde se observa el escalamiento de la ecuación (4.10) y a este último se le dará el nombre de Autosemejanza Extendida. Aunque esta definición puede ser cuestionada por el hecho de que a escalas muy pequeñas la ecuación de Kolmogorov establece que la viscosidad es importante, se quiere puntualizar que los efectos de disipación no cambian el escalamiento entre $F_2(r)$ y $S(r)$ sino hasta longitudes cercanas a η .

De acuerdo a la teoría modificada de Kolmogorov, la función de estructura de orden 2 debe tener un exponente $\zeta(2)$ rigurosamente mayor a $2/3$. Esto es consecuencia de que $\zeta(n)$ es una función convexa de n , lo que se deduce de la desigualdad de Hölder para momentos [53]. Los resultados mostrados en la figura 4.4 nos proporcionan un valor de $\zeta(2)$ que concuerda con la afirmación previa. En la figura 4.4 la línea punteada tiene pendiente $2/3$, que es claramente diferente del escalamiento entre $F_2(r)$ y $S(r)$. La diferencia entre $\zeta(2)$ y $2/3$ es una medida de la intermitencia del sistema. Entonces, se puede concluir que, aún a números de Reynolds pequeños, la intermitencia está presente e induce un escalamiento anómalo de las funciones de estructura. Se llama anómalo debido a que no concuerda con el valor clásico $n/3$ y porque no puede ser deducido a partir de un análisis dimensional.

4.4 ESCALAMIENTO DE OTRAS FUNCIONES DE ESTRUCTURA

En la sección precedente se ha introducido el concepto de región inercial extendida como el intervalo de longitudes donde se observa un escalamiento de ley de potencias entre las funciones $F_2(r)$ y $F_3(r)$. Ahora se investigará el comportamiento de otras funciones de estructura y se demostrará que ellas también siguen un comportamiento autosemejante sobre una región extendida cuando se hace el cambio de variable de r a $F_3(r)$.

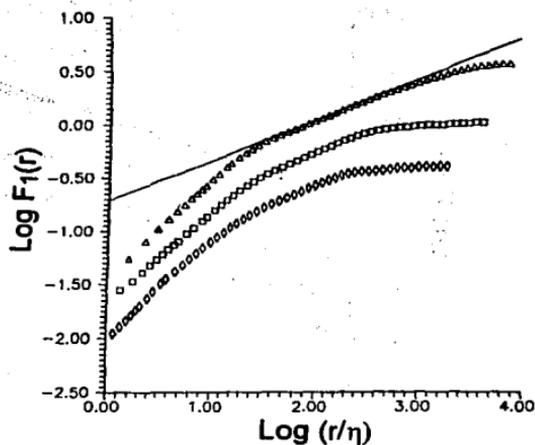


Figura 4.6.- Gráfica de $F_1(r) = \langle \delta V(r) \rangle$ vs r/η en escala log-log. (○) $Re=6,000$ (□) $Re=18,000$ y (Δ) $Re=300,000$. Una región inercial bien definida se observa sólo para el número de Reynolds más alto. El valor del exponente es 0.37.

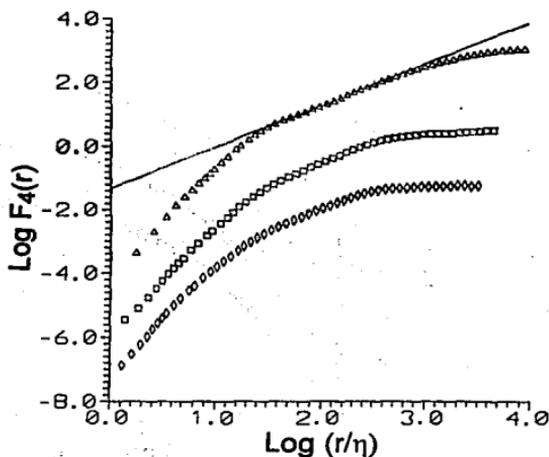


Figura 4.7.- Gráfica de $F_4(r) = \langle \delta V(r)^4 \rangle$ vs r/η en escala log-log. (○) $Re=6,000$ (□) $Re=18,000$ y (Δ) $Re=300,000$. Una región inercial bien definida se observa sólo para el número de Reynolds más alto. El valor del exponente es 1.28.

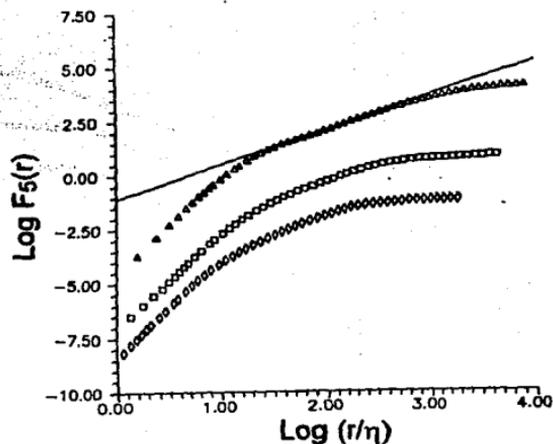


Figura 4.8.- Gráfica de $F_5(r) = \langle |\delta V(r)|^5 \rangle$ vs r/η escala log-log. (○) $Re=8,000$ (□) $Re=18,000$ y (Δ) $Re=300,000$. Una región inercial bien definida se observa sólo para el número de Reynolds más alto. El valor del exponente es 1.54.

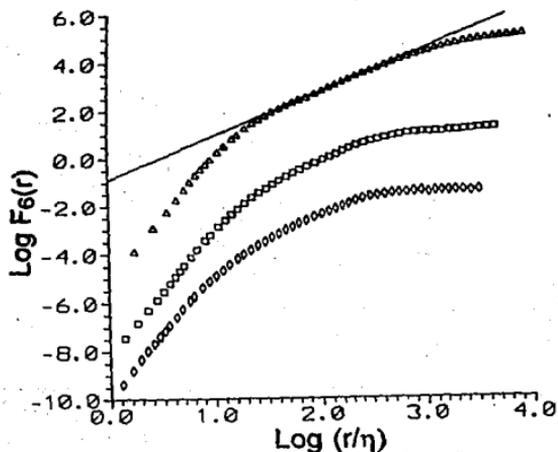


Figura 4.9.- Gráfica de $F_6(r) = \langle |\delta V(r)|^6 \rangle$ vs r/η escala log-log. (○) $Re=8,000$ (□) $Re=18,000$ y (Δ) $Re=300,000$. Una región inercial bien definida se observa sólo para el número de Reynolds más alto. El valor del exponente es 1.77.

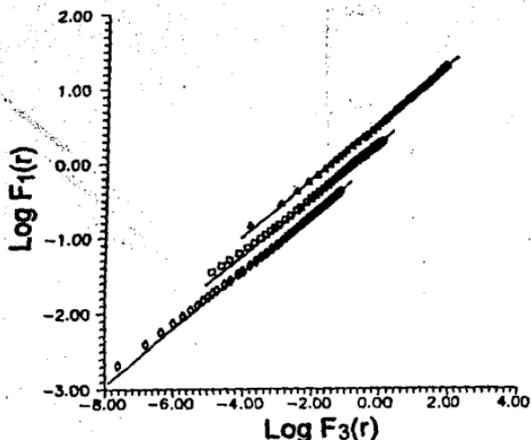


Figura 4.10.- Gráfica de F_1 vs F_3 en escala log-log. (○) $Re=6,000$ (□) $Re=18,000$ y (△) $Re=300,000$. Los datos se ajustan a una línea recta sobre un intervalo más extenso que la región inercial (ver figura 4.6), incluso cuando el número de Reynolds es pequeño. Las líneas rectas tienen pendiente 0.365.

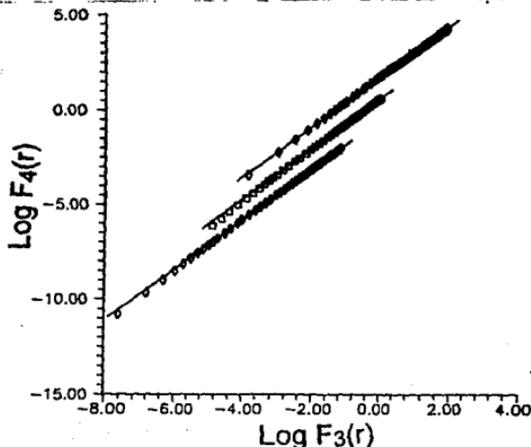


Figura 4.11.- Gráfica de F_4 vs F_3 en escala log-log. (○) $Re=6,000$ (□) $Re=18,000$ y (△) $Re=300,000$. Los datos se ajustan a una línea recta sobre un intervalo más extenso que la región inercial (ver figura 4.7), incluso cuando el número de Reynolds es pequeño. Las líneas rectas tienen pendiente 1.280.

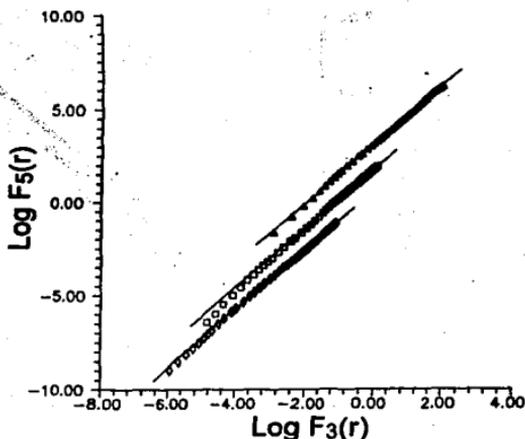


Figura 4.12.- Gráfica de F_5 vs F_3 en escala log-log. (o) $Re=6,000$ (□) $Re= 18,000$ y (Δ) $Re=300,000$. Los datos se ajustan a una línea recta sobre un intervalo más extenso que la región inercial (ver figura 4.8), incluso cuando el número de Reynolds es pequeño. Las líneas rectas tienen pendiente 1.535.

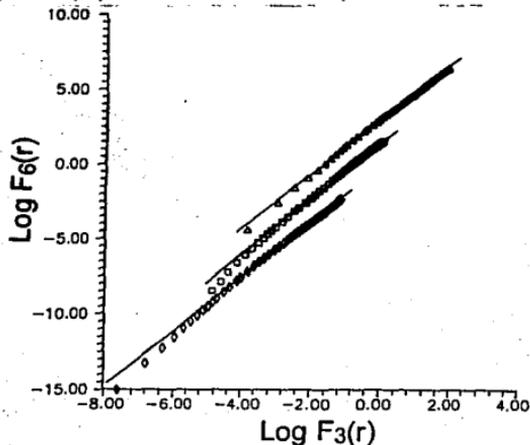


Figura 4.13.- Gráfica de F_6 vs F_3 en escala log-log. (o) $Re=6,000$ (□) $Re= 18,000$ y (Δ) $Re=300,000$. Los datos se ajustan a una línea recta sobre un intervalo más extenso que la región inercial (ver figura 4.8), incluso cuando el número de Reynolds es pequeño. Las líneas rectas tienen pendiente 1.780.

ORDEN	DIRECTO	AE
1	0.37	0.365
2	0.70	0.697
4	1.29	1.280
5	1.54	1.535
6	1.76	1.78

Tabla 4.3 Exponentes de las funciones de estructura. Cálculo directo y evaluación usando Autosemejanza Extendida. Los datos de las dos estimaciones concuerdan entre sí

En las figuras 4.6 a 4.9 se presentan gráficas de F_1 , F_4 , F_5 y F_6 como función de r/η . Cada figura contiene los datos correspondientes a una misma F_n , pero con 3 números de Reynolds diferentes (6,000 y 18,000 en turbulencia producida por un cilindro; 300,000 en turbulencia de chorro). Una región inercial extensa se tiene sólo para el número de Reynolds más alto. En el caso $Re=6,000$ la pendiente de las curvas cambia continuamente lo que significa que no se detecta un intervalo inercial.

Por otra parte, en las figuras 4.10 a 4.13 se muestran las gráficas de F_1 , F_4 , F_5 y F_6 vs F_3 en escala log-log.

La mayoría de los datos (excepto los de escalas más pequeñas) se ajustan sobre líneas rectas. Es decir, existe una región en donde se satisface la relación:

$$F_n(r) = B_n F_3(r)^{\zeta(n)} \quad (4.12)$$

Esta es una manera de expresar que las funciones de estructura exhiben un comportamiento de autosemejanza extendida. El exponente es precisamente $\zeta(n)$ puesto que en la región inercial $F_3(r) \sim r$. Los valores de los exponentes, calculados directamente (usando las medidas de turbulencia de chorro) y por medio de Autosemejanza Extendida, se presentan en la tabla 4.3. Se debe indicar que los resultados obtenidos de ambas maneras concuerdan entre sí.

Vamos a expresar ahora a la ecuación (4.12) de una manera diferente. Con este fin se introduce una función f , definida de la siguiente manera:

$$f(z) = K \frac{F_3(r)}{\bar{z}^r} \quad (4.13)$$

en donde $z=r/\eta$ y K es una constante adimensional, introducida para hacer $f(z)=1$ en la región inercial. Si ahora se despeja F_3 de la ecuación (4.13) y se sustituye en (4.12) se concluye que una función de estructura se puede expresar de la siguiente manera:

$$F_n(r) = C_n \Delta U^n \left[\frac{r}{L} f(r/\eta) \right]^{\zeta(n)} \quad (4.14)$$

en donde $\Delta U = \langle |\delta V(L)| \rangle$, $L = \Delta U^3 / \bar{\epsilon}$ es la escala integral y C_n es una constante adimensional. La introducción de la función f permite expresar de

otra manera el concepto de Auto semejanza Extendida:

Para observar un régimen inercial extendido la variable de escala debe multiplicarse por un factor, que es precisamente la función f . Por otra parte, el comportamiento de Auto semejanza Extendida aparece incluso cuando no existe un comportamiento auto semejante "normal".

La ecuación (4.13) implica la existencia de una función universal $f(r/\eta)$ que describe el comportamiento de las funciones de estructura sobre un amplio intervalo. Vamos ahora a invertir el procedimiento, es decir, se va a expresar a f en términos de $F_n(r)$,

$$f_n = \frac{L}{r} \left(\frac{F_n(r)}{C_n \Delta U^n} \right)^{1/(n)} \quad (4.15)$$

Se le ha puesto el subíndice n para indicar que se trata de una estimación de f , hecha a partir de la función de estructura de orden n . Las funciones f_n deben ser iguales a partir de $(4-5)\eta$. En la figura 4.14 se presentan curvas de f_n vs r/η correspondientes al experimento con $Re=6,000$. Los valores de n son 2, 4 y 6. La línea continua es la función f . Con semejante valor de Re la región donde $f(z)=1$ es prácticamente inexistente. Sin embargo, las diferentes funciones f_n se colapsan sobre una sola curva en un intervalo extenso. Las figuras 4.15 y 4.16 también presentan curvas de f_n vs r/η , pero con otros números de Reynolds: 18,000 y 300,000. En el caso $Re=300,000$ el valor $f(z)=1$ se observa sobre un intervalo de más de un orden de magnitud y nuevamente, las diversas f_n se colapsan sobre una sola curva dentro de una región más extensa que el intervalo inercial normal. El caso $Re=18,000$ representa una situación intermedia y ahí también se observan los mismos comportamientos de las funciones f_n .

En esta sección se han mostrado dos fenómenos íntimamente relacionados: la existencia de un intervalo inercial extendido, a partir de $(4-5)\eta$ y la existencia de un escalamiento, incluso a números de Reynolds moderados y pequeños. Esto significa que la condición $r \gg \eta$ no es necesaria para observar una auto semejanza del campo de velocidades. De hecho, la existencia del intervalo inercial extendido ocurre cuando se satisface una condición más suave: $\eta \ll L$, que será el caso de todos los flujos reportados en el presente trabajo.

4.5 FUNCIÓN UNIVERSAL

La idea de Auto semejanza Extendida y la ecuación de Kolmogorov son la base para derivar una ecuación para la función $f(r/\eta)$. Se sabe que $F_2(r)$ y $S(r)$ son proporcionales entre sí. Esto implica que:

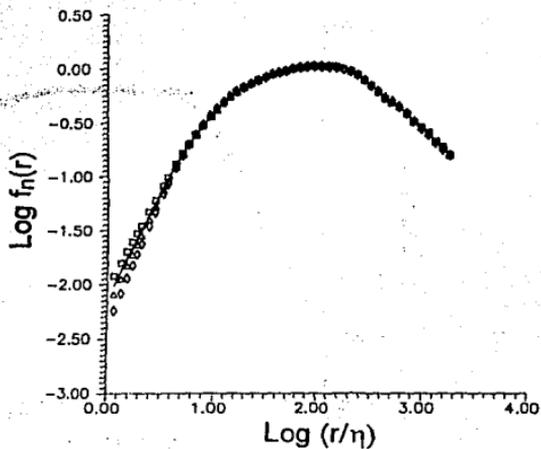


Figura 4.14.- Función universal $f_n(r/\eta)$ vs r/η en escala log-log usando diferentes funciones de estructura: (\square) $n=2$, (Δ) $n=4$ y (\circ) $n=6$. $Re=6,000$. La línea continua corresponde al cálculo de $f(r/\eta)$ usando $\langle |\delta V(r)^2| \rangle$. En este caso la región inercial es prácticamente inexistente.

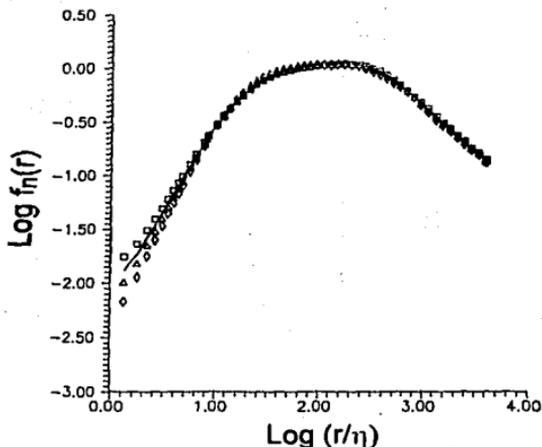


Figura 4.15.- Función universal $f_n(r/\eta)$ vs r/η en escala log-log usando diferentes funciones de estructura: (\square) $n=2$, (Δ) $n=4$ y (\circ) $n=6$. $Re=18,000$. La línea continua corresponde al cálculo de $f(r/\eta)$ usando $\langle |\delta V(r)^2| \rangle$.

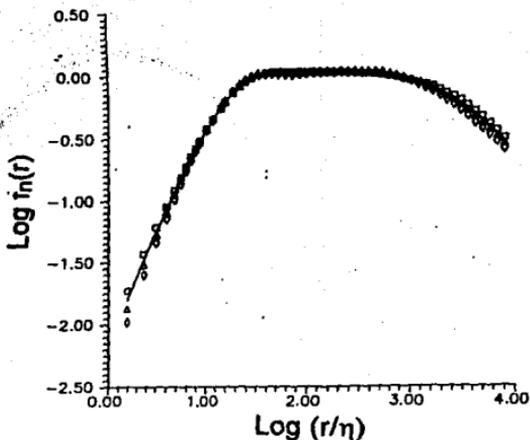


Figura 4.16.- Función universal $f_n(r/\eta)$ vs r/η en escala log-log usando diferentes funciones de estructura: (\square) $n=2$, (Δ) $n=4$ y (\circ) $n=6$. $Re=300,000$. La línea continua corresponde al cálculo de $f(r/\eta)$ usando $\langle \delta V(r)^2 \rangle$. El valor 1 se observa sobre un intervalo extenso, lo que significa que si existe en este caso un región inercial bien definida.

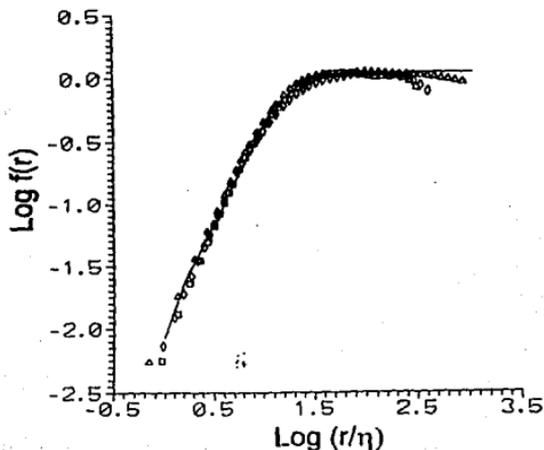


Figura 4.17.- Cálculo numérico de la función universal (línea continua) usando la ecuación de Kolmogorov y Autosemejanza Extendida. Comparación con los datos experimentales: (\circ) $Re=8,000$ (\square) $Re= 18,000$ y (Δ) $Re=300,000$.

$$F_3(r) = C_3 \Delta U^3 \frac{r}{L} f\left(\frac{r}{\eta}\right) = a S(r) \quad (4.16)$$

Debido a que $f(r/\eta) = 1$ para $r \gg \eta$ y a la definición de L , se desprende que $C_3/a = 4/5$. Entonces:

$$S(r) = \frac{4}{5} \bar{r} f(z) \quad (4.17)$$

La ecuación diferencial que define a $f(z)$ se obtiene luego de sustituir en la ecuación (4.8) las identidades dadas en las ecuaciones (4.14) y (4.17). El resultado se muestra a continuación:

$$z f(z) = z - D \frac{d}{dz} [z f(z)]^{\zeta(2)} \quad (4.18)$$

en donde:

$$D = \frac{15}{2} C_2 \left(\frac{\eta}{L}\right)^{\zeta(2)-2/3} \quad (4.19)$$

Debido a que $\zeta(2)$ es ligeramente superior a $2/3$ se podría pensar que la constante D no es independiente del número de Reynolds puesto que pues $L/\eta \sim Re^{3/4}$. Sin embargo, debe recordarse que en la introducción se demostró que $\langle \delta u(z)^3 \rangle = \langle \delta V^3 \rangle / (\bar{\epsilon}\nu)^{1/4}$ tiene un comportamiento universal que es independiente de Re . Esta propiedad vale también para:

$$\frac{\langle \delta u(z)^3 \rangle}{z} = \frac{\langle \delta V^3 \rangle}{\bar{\epsilon}r} \quad (4.20)$$

La ecuación (4.18) ya ha sido resuelta en la sección 4.3 para diferentes experimentos, usando como función a $S(r)$ en lugar de $f(z)$. En la figura 4.17 se muestran la curva de $f(z)$ calculada numéricamente y las obtenidas en el experimento. Todos los datos se colapsan en una sola curva hasta distancias cercanas a la escala disipativa. El resultado numérico da el valor 1 no sólo para r en la región inercial, sino también sobre longitudes del orden de L y superiores.

Las diferencias entre las diversas f_n no se aprecian lo suficientemente bien en las gráficas 4.14 a 4.16 pues se tiene escala logarítmica. Una mejor prueba de los límites de coincidencia se logra mediante la graficación de los cocientes f_n/f_3 vs r/η en escala log-log. El límite que se decidió establecer para el escalamiento extendido es aquel donde se tiene un error del 2%. Se llamará longitud de inicio ϑ_i al valor de r donde $|\log(f_n/f_3)| = 0.01$.

En la figura 4.18 se presentan gráficas de f_2/f_3 , f_4/f_3 y f_6/f_3 vs r/η en el experimento a $Re=6,000$. Las figuras 4.19 y 4.20 son semejantes a 4.18, pero corresponden respectivamente a los experimentos con $Re=18,000$ y $Re=300,000$. Los cocientes se mantienen dentro de la banda $[-0.01, 0.01]$ sobre un amplio

Número de Reynolds	ϑ_i/η	ϑ_i/l	$4\eta/l$
6,000	4	8.0	8.0
18,000	7	3.6	2.1
300,000	12	2.6	1.7

Tabla 4.4 Longitudes de inicio del escalamiento extendido en tres medidas de turbulencia. El tamaño de la sonda está influyendo sobre el valor de ϑ_i . En la tabla también se incluyen los cocientes ϑ_i/l y $4\eta/l$

intervalo, que es más extenso que la región inercial. Para longitudes cercanas a η los cocientes f_n/f_3 obedecen:

$$\frac{f_n}{f_3} \sim r^{n/\zeta(n)-1} \quad (4.21)$$

La potencia $n/\zeta(n) - 1$ es negativa si $n < 3$ y positiva si $n > 3$.

En la tabla 4.4 se reportan los datos de ϑ_i/η , ϑ_i/l y $4\eta/l$ de los tres experimentos que se han reportado a lo largo de este capítulo. Como se puede observar, el valor de ϑ_i/η aumenta conforme crece el número de Reynolds. Esto se debe aparentemente a efectos de tamaño de la sonda sobre las mediciones a escalas pequeñas.

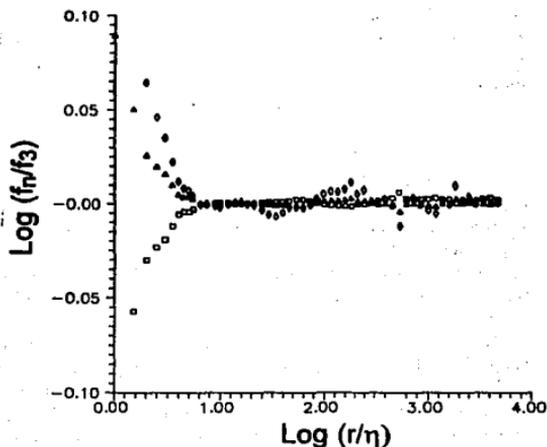


Figura 4.16.- Cocientes f_n/f_3 vs. r/η en escala log-log. $Re=6,000$. (\square) $n=2$. (Δ) $n=4$ y (\circ) $n=8$. Los cocientes se mantienen alrededor de 1 (hasta con un error del 2%) a partir de $r=4\eta$.

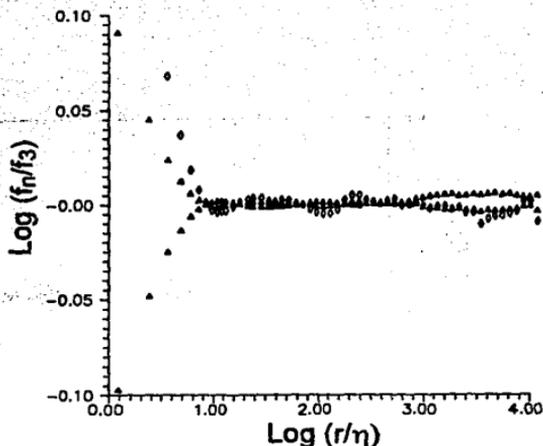


Figura 4.19.- Cocientes f_n/f_3 vs. r/η en escala log-log. $Re=18,000$. (\square) $n=2$, (Δ) $n=4$ y (\circ) $n=6$. Los cocientes se mantienen alrededor de 1 (hasta con un error del 2%) a partir de $r=7\eta$.

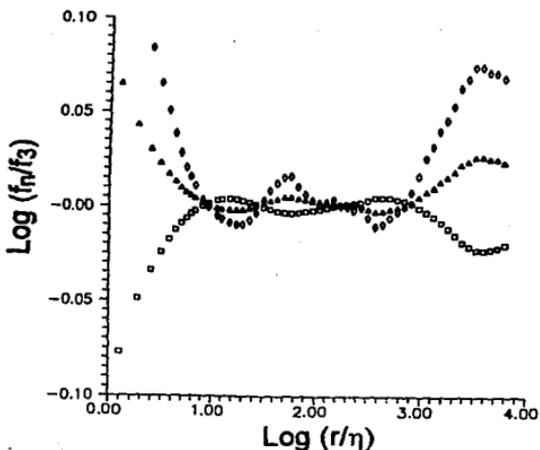


Figura 4.20.- Cocientes f_n/f_3 vs. r/η en escala log-log. $Re=300,000$. (\square) $n=2$, (Δ) $n=4$ y (\circ) $n=6$. Los cocientes se mantienen alrededor de 1 (hasta con un error del 2%) a partir de $r=12\eta$.

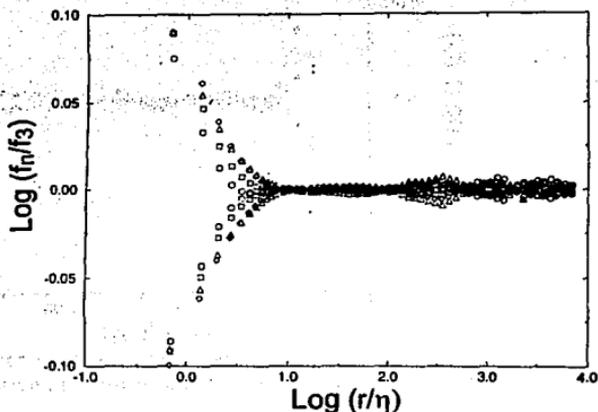


Figura 4.21.- Cocientes f_n/f_3 vs r/η en escala log-log. $Re=9,000$. Evaluación de los efectos de tamaño de la sonda: (O) sonda 1, (□) sonda 2, (Δ) sonda 3, (○) sonda 4. Entre más grande es la sonda mayor es el valor de r para el cual los cocientes tienden a 1.

En la siguiente columna de la tabla 4.4 se presentan los cocientes ϑ_i/l , l es la longitud de la sonda. En el experimento a $Re=6,000$, ϑ_i es apreciablemente más grande que l , a raíz de ello la estimación de la longitud de inicio es confiable. En el caso $Re=300,000$ el tamaño de la sonda y el inicio de la región autosemejante extendida no difieren mucho, lo que significa que la estimación de ϑ_i no es buena. Los datos para $Re=35000$ se ubican en una posición intermedia, pero aún se tiene cierta influencia de las dimensiones de la sonda.

Una estimación más sistemática de los efectos de tamaño de la sonda se puede hacer si se usan las 4 películas calientes para tomar una medida a un número Reynolds fijo. Los datos de f_2/f_3 y de f_4/f_3 se presentan en la figura 4.21. Aún para ese número de Reynolds relativamente pequeño las sondas dan diferencias con respecto a la longitud de inicio de la región extendida. Se confirma entonces la idea de que conforme crece l mayor es el valor de la estimación de ϑ_i .

4.6 INFLUENCIA DEL TAMAÑO DE LA SONDA

En la descripción euleriana de la mecánica de fluidos la velocidad es una variable dependiente de la posición y del tiempo. Lo que se investiga es el comportamiento de los elementos de volumen que pasan por un determinado punto, más que la trayectoria de las partículas. Desde un punto de vista experimental, esto es lo más adecuado, pues por lo general los instrumentos de medida permanecen fijos en una posición.

Una medida estrictamente puntual (en el espacio y en el tiempo) es una idealización, ya que las medidas de velocidad se hacen sobre una región de tamaño superior a cero y sobre intervalos finitos de tiempo. Refiriéndose a una película caliente, la medición se hace promediando sobre la superficie de un cilindro y en un intervalo de tiempo que tiene que ver con la respuesta en frecuencia de la sonda. Esta última depende de las dimensiones espaciales de la propia película caliente y de la velocidad del flujo. Mientras más pequeña sea la sonda tanto más alta será su respuesta en frecuencia.

Una regla básica de la técnica experimental es que la precisión del aparato debe ser por lo menos comparable con la escala que se pretende medir. En nuestro caso, la precisión espacial es la longitud de la sonda l . Si se desea resolver hasta la longitud de Kolmogorov entonces se debe satisfacer que $l < \eta$. Por otra parte, si se desea investigar la región inercial, la longitud de la película ha de ser menor que el límite inferior de dicho intervalo.

En este apartado se hará un estudio experimental de la influencia del tamaño de la sonda sobre las mediciones. Se han elegido dos números de Reynolds distintos, en cada caso se han hecho adquisiciones de datos con las 4 sondas. Se debe notar que para el número de Reynolds más alto la escala disipativa fue más pequeña que la longitud de todas las sondas. Por el contrario, para la medida con el número de Reynolds menor la escala de Kolmogorov es mayor que la dimensión de la sonda # 1.

El experimento con el número de Reynolds más alto se hizo con un gasto volumétrico de aproximadamente 1500 l/s. La turbulencia se produce con un cilindro de 10 cm de diámetro, mientras que la sonda se ha colocado 2.50 cm adelante, es decir, 25 veces la longitud integral. Las cantidades que se han calculado son las funciones de estructura $F_n(r)$ y $\langle \delta V(r)^3 \rangle$. También se han calculado los espectros de frecuencia. En la tabla 4.5 se presentan los valores de velocidad promedio, número de Reynolds, desviación estándar, porcentaje de turbulencia, promedio de disipación de energía, escala disipativa y cociente l/η :

Lo primero que se puede decir es que hay una cierta dispersión en cuanto al valor de la velocidad promedio. El valor mayor se detecta con la sonda # 2, mientras que el valor menor ocurre con la sonda # 3. Esto da una incertidumbre en cuanto al número de Reynolds de aproximadamente un 8 %. Por otra parte, los valores de la desviación estándar disminuyen conforme aumenta la longitud

CANTIDAD	SONDA 1	SONDA 2	SONDA 3	SONDA 4
U (m/s)	5.93	6.18	5.43	5.44
Re	38,000	39,600	34,800	34,900
σ (m/s)	0.84	0.80	0.64	0.69
Tasa de Turbulencia	14.3	12.9	11.9	12.7
$\bar{\epsilon}$ (m ³ /s ²)	4.44	4.33	2.27	2.70
η (μ m)	171	172	202	194
l/η	1.46	5.81	9.90	10.31

Tabla 4.5 Comparación de las medidas hechas con 4 sondas diferentes. El flujo es en todos los caso el mismo. La velocidad promedio se ubica alrededor de 6 m/s

de la sonda, siendo la diferencia más notable entre las películas 3 y 4 por un lado y por el otro las sondas 1 y 2. Esto se explica por la falta de sensibilidad espacial y temporal de las sondas más grandes. Tanto mayor es el tamaño de la sonda, tanto más difícil es resolver las fluctuaciones a pequeña escala, que sin duda contribuyen al valor de σ . Un fenómeno semejante ocurre con los promedios de disipación de energía; los valores más pequeños son los de las sondas de 2 mm de longitud. Las diferencias en la estimación de $\bar{\epsilon}$ son de casi el 50 %. El tamaño de la sonda también influye pues no se detectan fluctuaciones de pequeña escala, que contribuyen en un porcentaje no despreciable a la tasa local de disipación de energía.

En la figura 4.22 se muestran gráficas de $\langle |\delta V(r)|^2 \rangle$ vs r. En primer lugar, las funciones de estructura no coinciden en dos sentidos: a) la región inercial tiene diferentes tamaños y b) las curvas no se colapsan en ningún intervalo. Aquí se observa una separación bien marcada entre los datos de las sondas 1 y 2, con respecto a los datos de las sondas 3 y 4.

De acuerdo a los datos obtenidos con la sonda 1 la región inercial comienza a partir de $\log r = -2.5$, su extensión sería algo menor de un orden de magnitud. Por otra parte, las sondas 3 y 4 estarían indicando que la región inercial comienza alrededor de $\log r = -2.1$. En este punto se debe indicar que este es claramente un efecto del tamaño de la sonda, pues la longitud de ésta es del mismo orden de magnitud que la escala real de inicio de la región inercial (que valen respectivamente 2 y 3 mm). Finalmente, en la figura 4.23 se grafican los espectros de frecuencia. Nuevamente se presenta el fenómeno de separación en dos grupos. Las sondas más pequeñas detectan una mayor intensidad en las componentes de frecuencia, aunque la llegada al nivel de ruido no difiere mucho en los cuatro casos.

Un análisis semejante se hizo con un número de Reynolds más pequeño. El gasto volumétrico fue un poco superior a los 400 l/s. Los datos de las adquisiciones aparecen en la tabla 4.6. Bajo estas condiciones experimentales ya no existe tanta dispersión en los valores de la velocidad promedio, y por lo tanto en el número de Reynolds (la dispersión es de apenas un 2.8 %). Las pequeñas escalas están mejor resueltas por la sencilla razón de que las longitudes de las sondas ya no son mucho mayores que η .

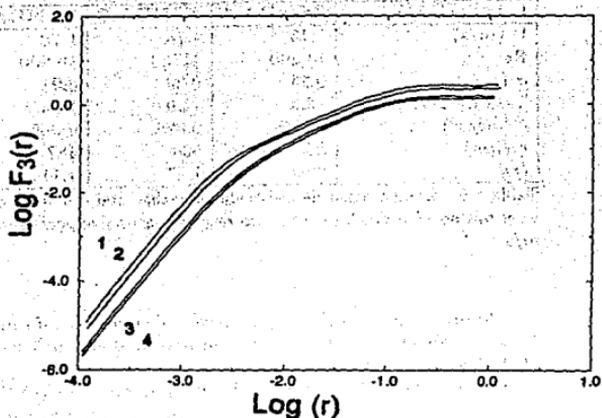


Figura 4.22.- Función de estructura $\langle \delta v(r)^2 \rangle$ vs r/η en escala log-log. $Re=38,000$ de acuerdo a los datos tomados con la sonda. Medición hecha para evaluar los efectos de tamaño de la sonda (se hicieron medidas con 4 sondas distintas).

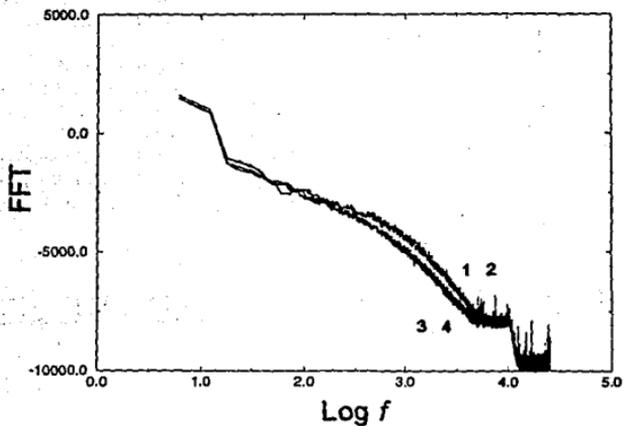


Figura 4.23.- Espectro de frecuencias del campo de velocidades. $Re=38,000$. Escala semilog. Medición hecha con 4 sondas de varios tamaños. La frecuencia de filtrado se puso en 10,000 Hz.

CANTIDAD	SONDA 1	SONDA 2	SONDA 3	SONDA 4
U (m/s)	1.75	1.74	1.70	1.73
Re	11,200	11150	10,900	11,100
σ (m/s)	0.23	0.23	0.21	0.21
Tasa de Turbulencia	13.3	13.0	12.4	12.1
$\bar{\epsilon}$ (m^3/s^2)	0.095	0.095	0.069	0.065
η (μm)	508	508	487	484
l/η	0.49	1.97	4.11	4.13

Tabla 4.6 Comparación de las medidas hechas con 4 sondas diferentes. El flujo es el mismo en todos los casos y corresponde a una velocidad media cercana a 1.7 m/s

El porcentaje de turbulencia vuelve a disminuir conforme se incrementa l . La disipación de energía exhibe una dispersión de un 30% y debe indicarse que ahora las sondas 1 y 2 dan la misma estimación para $\bar{\epsilon}$.

En la figura 4.24 se muestran las gráficas de $\langle |\delta V(r)|^2 \rangle$ vs r calculadas independientemente para cada película caliente. En esta medida, las funciones de estructura están más próximas unas de otras. Sólo con la sonda 4 se aprecia claramente una región inercial menos extensa que en los casos restantes. El intervalo inercial es muy pequeña, comenzando a partir de $\log r = -1.9$. Pero con la sonda 4, esta región comenzaría aparentemente a partir de $\log r = -1.7$. Todo lo anterior significa que, salvo por la última sonda, las demás dan una estimación apreciablemente buena de la región inercial.

Los espectros de frecuencia aparecen en la figura 4.25. El nivel de ruido se ubica alrededor de los 1000 Hz, y se observa que las dos primeras sondas detectan mejor las componentes de frecuencia.

El fabricante ha proporcionado los datos de las dimensiones de las sondas. Todo parece ser correcto, salvo por la sonda 4. Las diferencias entre esta y la sonda 3 pueden deberse a que su longitud es en realidad un poco superior a 2 mm.

4.7 LIMITACIONES DE LA SONDA DE VELOCIDAD

Hay tres limitaciones básicas de la medición con "película caliente" [47]:

- 1) Miden únicamente valores absolutos de velocidad.

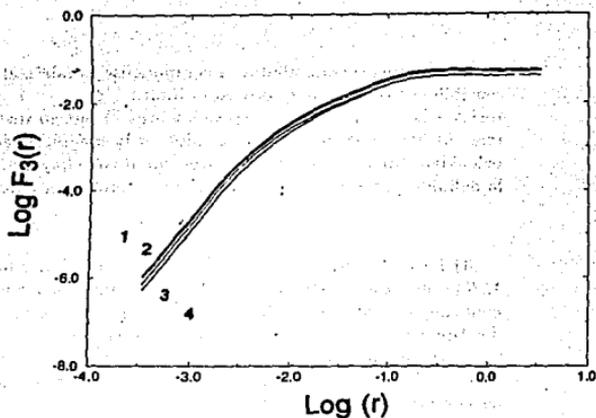


Figura 4.24.- Función de estructura $\langle [\delta V(r)]^2 \rangle$ vs r/η en escala log-log. $Re=11,000$. Medición hecha para evaluar los efectos de tamaño de la sonda (se hicieron medidas con 4 sondas distintas).

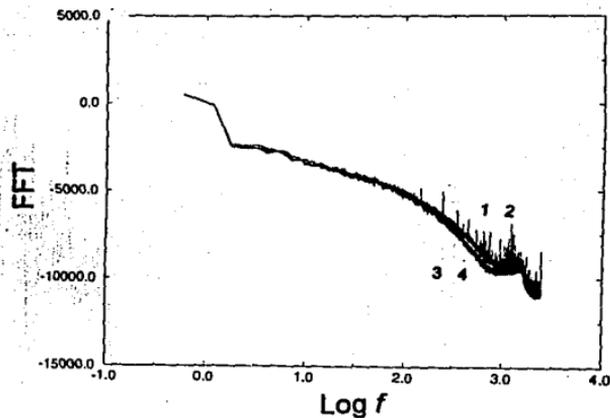


Figura 4.25.- Espectro de frecuencias del campo de velocidades. $Re=11,000$. Escala semilog. Medición hecha con 4 sondas de varios tamaños. La frecuencia de filtrado se puso en 2,000 Hz.

2) Hay una sensibilidad a la componente paralela al eje de la sonda. Esta sensibilidad se reduce a cero en el límite $l/\phi = \infty$. Por otra parte, la sonda registra las componentes perpendiculares al eje, lo que quiere decir que, estrictamente hablando, lo que se mide es la magnitud de dos componentes de velocidad. Sin embargo, si se tiene en cuenta que hay una dirección privilegiada, la definida por el flujo promedio, la otra componente es menos importante.

3) La mala respuesta en frecuencia a velocidades pequeñas. En la figura 4.26 se muestra la señal de velocidad en un intervalo donde ésta adopta valores pequeños durante un cierto lapso de tiempo. Se aprecia claramente que hay dos tipos de comportamiento. Uno donde la señal es fuertemente intermitente y que corresponde a velocidades altas. El otro donde la velocidad es menor a 1 m/s y donde se aprecia que la curva es suave (lo que implica una pérdida de las componentes de alta frecuencia).

Las mediciones de velocidad se deben hacer tomando dos precauciones:

- a) La velocidad promedio se debe hacer mayor a 1 m/s.
- b) Se debe evitar en lo posible que se produzcan cambios en el signo de la velocidad.

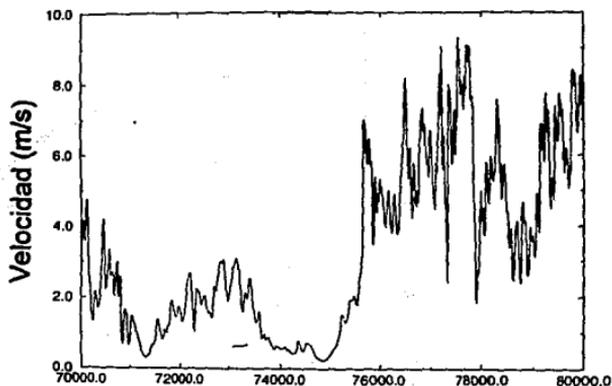


Figura 4.26.- Señal de velocidad. Turbulencia de chorro. A velocidades pequeñas (menores a 1 m/s) se observa un comportamiento suave, lo que es causado por la mala respuesta de la sonda en semejantes condiciones.

Cantidad	Túnel cerrado	Túnel abierto
Asimetría	0.629	0.042
Factor de aplanamiento	3.199	2.779

Tabla 4.7 Comparación de asimetría y factor de aplanamiento entre datos de turbulencia de chorro con túnel cerrado y túnel abierto. En el caso de túnel abierto, la distribución de probabilidad se aproxima bien a la normal

La primera es una medida fácil de implementar, pero la segunda no lo es tanto. Una manera de evaluar la ocurrencia de cambios de signo en la velocidad es a través del cálculo de la función de densidad de probabilidad (fdp). El campo de velocidades sigue en buena aproximación un comportamiento normal, así que la fdp debe ser una gaussiana. Sin embargo, si los eventos de velocidad negativa son frecuentes, entonces se tendrá un comportamiento diferente pues la sonda es incapaz de diferenciarlos de aquellos con velocidad positiva y mismo valor absoluto.

En la figura 4.27 se presenta la fdp de una medida de turbulencia de chorro, cuyo número de Reynolds es de 300,000, mientras que el porcentaje de turbulencia es del 45%. Para comparación se ha dibujado con línea continua la distribución normal. Como se puede ver, la fdp está sesgada hacia la derecha, mientras que su forma funcional difiere bastante de la gaussiana. El pico del evento más probable no está en el valor medio, sino a aproximadamente 5 m/s.

Durante la medición de turbulencia de chorro el túnel permaneció cerrado. Sin embargo, se hizo otra medida removiendo las paredes laterales de la sección de trabajo, con lo cual se lograron obtener resultados inesperados. A pesar de que la potencia del motor era la misma, la velocidad media aumentó a 15.8 m/s, mientras que la desviación standard adoptó el valor 4.2 m/s. Es decir, la tasa de turbulencia se ubicó en 26%. Se hizo un cálculo de la función de densidad de probabilidad, resultando una curva bastante parecida a la normal, aunque un poco más angosta en las colas. Esto se aprecia en la figura 4.28.

La disminución de la tasa de turbulencia hizo que la distribución se aproximara a la gaussiana. Para mayores detalles, en la tabla 4.7 se dan los valores de la asimetría y el coeficiente de aplanamiento de las dos medidas. Los valores de estos parámetros para la distribución normal son respectivamente 0 y 3 [30]. Las funciones de densidad de probabilidad en el caso de turbulencia generada por un cilindro siguen un comportamiento parecido al mostrado en la figura 4.28. Sólo dirá que la tasa de turbulencia nunca superó el 15 % en esos experimentos. Como conclusión se debe decir que una manera de evitar la ocurrencia repetida de velocidades negativas es la utilización de flujos con tasas de turbulencia no muy grandes. Hasta un 25% se observaron resultados aceptables.

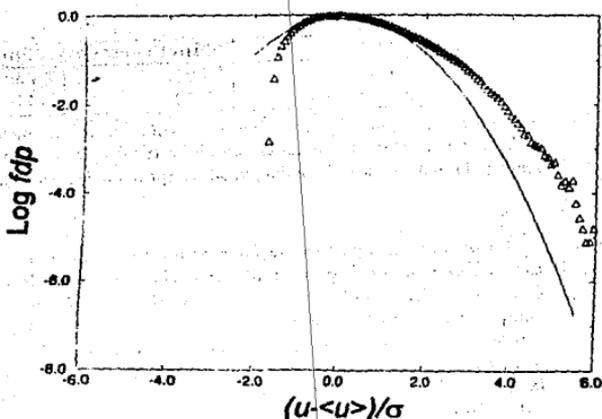


Figura 4.27.- Función de densidad de probabilidad (fdp) del campo de velocidades u . Escala semilog. Turbulencia de chorro ($Re=300,000$). El túnel estaba cerrado. La fdp se aleja bastante de un comportamiento gaussiano debido a que existen una gran cantidad de eventos con velocidad negativa, mientras que las sondas sólo registran valores absolutos de velocidad. La línea continua es la distribución normal.

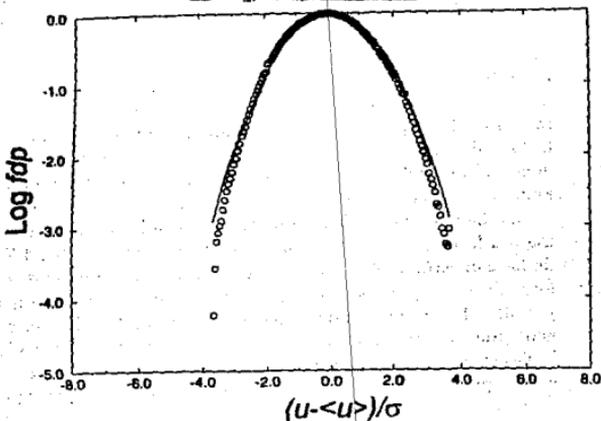


Figura 4.28.- Función de densidad de probabilidad del campo de velocidades u . Escala semilog. Turbulencia de chorro. El túnel está abierto. En este caso la tasa de turbulencia es menor si se compara con la medida de la figura anterior. La pdf se aproxima (excepto por las colas) con una distribución gaussiana. La línea continua es la distribución normal.

4.8 COMPORTAMIENTO A PEQUEÑAS ESCALAS

Hasta ahora se ha investigado el escalamiento anómalo de las funciones de estructura. Se ha encontrado que sobre un intervalo que va de $(4-5)\eta$, hasta cerca de la escala integral, las funciones de estructura exhiben una autosemejanza con exponentes anómalos. Ahora vamos a fijar la atención en lo que sucede a escalas muy pequeñas, es decir, del orden de η y menores. En el caso $Re=6000$, se pudieron medir diferencias de velocidad hasta la longitud $\eta/2$.

Dentro de la región disipativa, se espera un comportamiento regular de las diferencias de velocidad, es decir, que $\delta V(r)$ es proporcional a r si $r \leq \eta$. Entonces $\langle |\delta V(r)|^n \rangle = W_n r^n$. Por lo tanto, si se grafica una función de estructura contra otra (por ejemplo, la de orden 6 vs la de orden 3) se espera que haya dos regiones: una de escalamiento anómalo que corresponde a la Autosemejanza Extendida, y otra de escalamiento regular (en el sentido de que la viscosidad suaviza al campo de velocidades). Por ejemplo, en el caso de las funciones de estructura de órdenes 6 y 3, se debe encontrar una región donde el exponente vale $\zeta(6)/\zeta(3)$ y otra región donde el exponente es $6/3=2$.

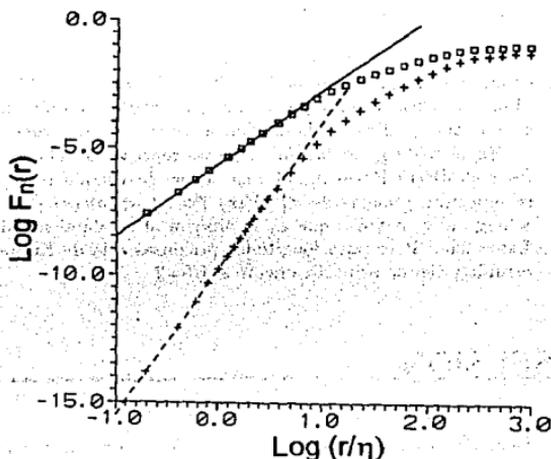


Figura 4.29.- Gráfica de $\langle |\delta V(r)|^n \rangle$ vs r/η . Escala log-log. $Re=6,000$. (\square) $n=3$ y ($+$) $n=6$. Las rectas corresponden al escalamiento $\langle |\delta V(r)|^n \rangle \sim r^n$.

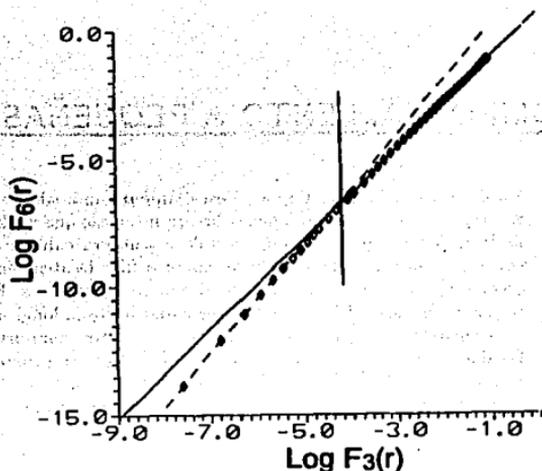


Figura 4.30.- Gráfica de $F_6(r)$ vs. $F_3(r)$ en escala log-log. $Re=8,000$. La línea punteada corresponde al escalamiento en la región disipativa, mientras que la línea continua da el escalamiento en la región inercial extendida. Las pendientes son respectivamente 2 y 1.76.

El único caso en donde se ha evaluado una función de estructura hasta escalas muy pequeñas es con $Re=6000$, del orden de $r \sim 0.5\eta$. Esto nos permitirá observar la transición del escalamiento regular al anómalo. En la figura 4.29 se muestran gráficas de la función de estructura de ordenes seis y tres vs r/η .

En dichas figuras las líneas rectas representan el escalamiento regular, es decir, $\langle |\delta V(r)|^n \rangle \sim r^n$, al cual se tiende cuando $r \rightarrow \eta$. En la figura 4.30 se muestran gráficas de $\langle |\delta V(r)|^6 \rangle$ vs $\langle |\delta V(r)|^3 \rangle$. Aproximadamente a longitudes mayores que 4η se observa el escalamiento de la Auto semejanza Extendida. Pero para longitudes proximas a la de Kolmogorov el exponente cambia y tiende asintóticamente a $6/3=2$.

4.9 DISCUSION

Se ha demostrado a lo largo de este capítulo que los momentos de las diferencias de velocidad $\delta V(r)$ se pueden expresar en términos de una función $f(r/\eta)$. Además, el escalamiento extendido de las funciones de estructura se observa aún en el caso de que no se detecte un régimen inercial.

Los resultados presentados en este capítulo nos permiten calcular con exactitud los exponentes anómalos. Esto representa un avance dentro del estudio de las propiedades estadísticas de la turbulencia. Pero por otra parte, los conceptos usuales deben modificarse. Por principio de cuentas, se tiene la idea de definir como flujos turbulentos completamente desarrollados, al menos en el caso homogéneo e isotrópico, como aquellos donde ocurre una clara transición del escalamiento regular al anómalo.

Entre las interrogantes que se pueden plantear, una de las más obvias es: ¿Cuál es el fundamento físico de la Auto semejanza Extendida? Desafortunadamente todavía no se tiene una respuesta definitiva al respecto [54]. Con el objeto de comprender la dificultad de dar una explicación teórica de la Auto semejanza Extendida, vamos a discutirla dentro de los marcos del lenguaje multifractal. Los conceptos básicos este modelo se basan en la observación de que las diferencias de velocidad $\delta V(r)$ exhiben el siguiente comportamiento [55]:

$$\delta V(r) \sim r^{h/3}, \quad (4.22)$$

en donde h es una variable aleatoria. Por otra parte, la función de densidad de probabilidad $\Pi_r(h)$ de h es de la forma:

$$\Pi_r(h) = \omega(h)r^{3-D(h)}, \quad (4.23)$$

donde D es la dimensión fractal de los eventos con exponente h . Entonces, el escalamiento de la función de estructura de orden n está dado por:

$$\langle |\delta V(r)|^n \rangle \sim \int \omega(h)r^{hn/3}r^{3-D(h)}dh \sim r^{c(n)}. \quad (4.24)$$

Con el fin de explicar la Auto semejanza Extendida dentro del lenguaje multifractal, se debe suponer que:

A) Para cada exponente h el escalamiento de las diferencias de velocidad está dado por $\delta V(r) \sim [rf(r/\eta)]^{h/3}$.

B) La función de densidad de probabilidad de h es: $\Pi_r(h) = \omega(h)[rf(r/\eta)]^{3-D(h)}$.

Inmediatamente se llega a la conclusión de que ambas suposiciones están hechas "ad hoc". Para deducir la Auto semejanza Extendida dentro de este modelo se necesitan simultáneamente dos efectos físicos distintos. Por un lado, se requiere la introducción de un factor de forma $f(r/\eta)$, el mismo para todas las funciones de estructura, con el fin de tomar en cuenta el efecto de la disipación viscosa. Por otra parte, se necesita cambiar la función de densidad de

probabilidad de h , por medio de la utilización de un factor $f(r/\eta)$. Ambas cosas pueden ser muy distintas.

Usando el concepto de función universal es posible generalizar otros modelos multifractales, de manera que se tome en cuenta la Auto semejanza Extendida. Considerése por ejemplo el modelo β aleatorio [34]. Se parte de la ecuación fenomenológica:

$$\frac{\delta V(r)^3}{r} \sim \epsilon_r. \quad (4.25)$$

Sabemos que para r suficientemente pequeñas, $\delta V^3(r)$ es proporcional a $rf(r/\eta)$. Entonces podemos generalizar la ecuación (4.25) de la siguiente manera:

$$\frac{\delta V(r)^3}{rf(r/\eta)} \sim \epsilon_r. \quad (4.26)$$

Siguiendo los pasos del modelo β usual y de su versión aleatoria, vamos a definir las escalas $L_p = 2^{-p}L$. L_p es una longitud de referencia utilizada en el proceso de cascada aleatoria, que está relacionada con la escala física l_p a través de la ecuación:

$$L_p = l_p f(l_p/\eta). \quad (4.27)$$

La relación entre las diferencias de velocidad de los pasos p y $p+1$ estaría dada por:

$$\frac{\delta V(l_p)^3}{L_p} = \beta_{p+1} \frac{\delta V(l_{p+1})^3}{L_{p+1}}, \quad (4.28)$$

donde β_i es una variable aleatoria que da el cociente de los volúmenes ocupados por los vorticillos de la generación $p+1$ y los de la generación p . Aplicando iteradamente la ecuación (4.28) y tomando en cuenta que las estructuras turbulentas ocurren sólo en una fracción del espacio, se concluye que:

$$\langle \delta V(r)^3 \rangle \sim \bar{\epsilon} r f(r/\eta). \quad (4.29)$$

Siguiendo el procedimiento usado en el modelo β , se calculan los escalamientos de las funciones de estructura, dando por resultado:

$$\langle \delta V(r)^n \rangle = L_p^{\zeta(n)} = [l_p f(l_p/\eta)]^{\zeta(n)}, \quad (4.30)$$

donde $\zeta(n) = n/3 + \log_2 \langle \beta^{1-p/3} \rangle$. El modelo anteriormente expuesto se basa en la hipótesis de que existe un conjunto de escalas L_n con respecto a las cuales se puede aplicar la fenomenología del proceso de cascada del intervalo inercial. Desde un punto de vista físico, esta suposición es equivalente a decir que toda la fenomenología estandar de la región inercial vale también para longitudes más pequeñas, a través de la introducción de una escala "efectiva" $rf(r/\eta)$. Se puede ir un poco más lejos y tratar de verificar si la tasa local

de disipación de energía sigue un escalamiento que concuerda con la ecuación (4.26). En caso afirmativo, se espera que la siguiente relación:

$$\langle \epsilon_r^n \rangle \langle \delta V(r)^3 \rangle^n = \langle \delta V(r)^{3n} \rangle, \quad (4.31)$$

sea válida en un intervalo más extenso que la región inercial. La verificación de esta conjetura se hará en el siguiente capítulo.

Ya no se va a abundar más sobre la posible explicación teórica de la Autosemejanza Extendida, pero se va a hacer una consideración final sobre la ecuación de Burgers. Esta última proporciona una descripción de la turbulencia unidimensional. En un trabajo reciente, el modelo de Burgers ha sido investigado a la luz de la Autosemejanza Extendida [54]. Se ha demostrado que ambas proporcionan resultados que no concuerdan entre sí. Esto significa que una posible explicación teórica de la Autosemejanza Extendida se encuentra estrictamente ligada a las propiedades dinámicas de la turbulencia tridimensional.

Otra pregunta referente a la Autosemejanza Extendida es: ¿Por qué el escalamiento anómalo es observado a partir de $(4.5)\eta$? Esta pregunta puede tener una respuesta simple. Consideremos la diferencia de velocidad en la escala r , es decir, $\delta V(r)$. Usando Autosemejanza Extendida podemos establecer que:

$$\langle \delta V(r)^3 \rangle \sim \Delta U^3 \frac{r}{L} f\left(\frac{r}{\eta}\right). \quad (4.32)$$

Mediante la ecuación (4.32) se puede determinar fácilmente la escala r_d a la que $\langle \delta V(r)^3 \rangle = v_n^3$, donde $v_n = \nu/\eta$ es la velocidad de Kolmogorov. Después de un simple cálculo y suponiendo que $\bar{\epsilon} = \Delta U^3/L$, encontramos que r_d satisface la ecuación:

$$\frac{r_d}{\eta} f\left(\frac{r_d}{\eta}\right) = 1. \quad (4.33)$$

Si se usan los datos de la figura 4.16 se puede resolver gráficamente la ecuación (4.33), obteniéndose $r_d = 5.1\eta$. Esto significa que la Autosemejanza Extendida se observa a partir del momento en que las fluctuaciones de velocidad son mayores que la velocidad de Kolmogorov.

El presente informe tiene como finalidad informar a la Junta de Gobierno de la Universidad de Cádiz sobre el desarrollo de las actividades de la Unidad de Extensión y Promoción Social durante el curso académico 2014-2015.

El informe se divide en tres partes: una de presentación, una de desarrollo y una de conclusiones.

En primer lugar, se presenta un resumen de las actividades realizadas durante el curso académico 2014-2015. Se han llevado a cabo una serie de actividades de extensión y promoción social, tanto a nivel de docencia como de investigación. En el ámbito de la docencia, se han impartido cursos de formación para el profesorado y se han desarrollado actividades de extensión de la docencia. En el ámbito de la investigación, se han llevado a cabo proyectos de investigación en el campo de la extensión y promoción social, así como actividades de divulgación de los resultados de la investigación.

En segundo lugar, se detallan las actividades realizadas durante el curso académico 2014-2015.

En tercer lugar, se presentan las conclusiones de las actividades realizadas durante el curso académico 2014-2015. Se concluye que las actividades de extensión y promoción social han sido muy fructíferas y han contribuido a mejorar la calidad de la docencia y de la investigación en la Universidad de Cádiz.

En fin,

El presente informe se ha elaborado en virtud de lo establecido en el artículo 10 del Reglamento de la Junta de Gobierno de la Universidad de Cádiz, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad de Cádiz el día 14 de mayo de 2014.

5. GENERALIZACION DE LA HIPOTESIS MODIFICADA DE KOLMOGOROV

5.1 CONSIDERACIONES BASICAS

En 1962 Kolmogorov y Oboukhov [26,27] propusieron un escalamiento de las funciones de estructura que tomaba en cuenta la intermitencia de la tasa local de disipación de energía:

$$\langle |\delta V(r)|^n \rangle \sim \langle \epsilon_r^{n/3} \rangle r^{n/3}. \quad (5.1)$$

Su intervalo de validez está dado por la condición $\eta \ll r \ll L$. Por otra parte, sobre el intervalo disipativo se sabe que las funciones de estructura satisfacen la relación $\langle |\delta V(r)|^n \rangle \sim r^n$. Pocos han sido los intentos por describir el comportamiento estadístico de la turbulencia a escalas intermedias. Uno de ellos es la Autosemejanza Extendida, en ella se introduce un factor de escala sobre las longitudes a fin de tener una ley de potencias a partir de $(4-5)\eta$. En este capítulo se va a presentar una hipótesis sobre el escalamiento de las funciones de estructura que ha mostrado tener validez desde la región disipativa hasta la inercial.

En el capítulo precedente se indicó que la Autosemejanza Extendida sería compatible con el modelo β aleatorio a condición de que se satisfaga la relación $\langle |\delta V(r)|^{3p} \rangle \sim \langle \epsilon_r^p \rangle \langle |\delta V(r)|^3 \rangle^p$ si $r > 5\eta$. Nuevamente tenemos una ecuación donde aparece la función de estructura de orden 3, lo que resalta una vez más la importancia que ella tiene en la descripción de la turbulencia.

Existen tres ingredientes básicos para la generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov:

1) En la región disipativa $\langle |\delta V(r)|^n \rangle \approx r^n$. Este resultado ya se argumentó en el capítulo previo.

2) En la región disipativa se cumple que $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle = cte$. En las escalas donde la viscosidad es importante, la disipación local de energía se puede desarrollar en serie de Taylor, es decir:

$$\epsilon(x+y) = \epsilon(x) + \epsilon'(x)y + \frac{\epsilon''(x)}{2}y^2 + \dots, \quad (5.2)$$

con la característica de que $\epsilon(x) \geq 0$ pues dicha cantidad es proporcional a $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$. Luego, el promedio de ϵ sobre un dominio de longitud r es:

$$\epsilon_r = \epsilon(x) + \frac{\epsilon'(x)}{2}y + \frac{\epsilon''(x)}{6}y^2 + \dots \quad (5.3)$$

Excepto en el caso $\epsilon(x) = 0$ (que ocurre si la velocidad alcanza un punto crítico), el término dominante de la ecuación previa es $\epsilon(x)$. De lo afirmado hasta aquí se concluye que $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle \approx \langle \epsilon(x)^{n/3} \rangle = cte$ cuando $r \sim \eta$ o menor.

3) El cociente $\langle |\delta V(r)|^3 \rangle / r$ y por lo tanto $f(r/\eta)$ son constantes en la región inercial, mientras que en la región disipativa siguen el escalamiento r^2 . Esto se deduce a partir de las respectivas leyes de potencias que satisface $\langle |\delta V(r)|^3 \rangle$ en los intervalos inercial y disipativo.

Con base en lo que se ha expuesto se propone la siguiente generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov:

$$\langle |\delta V(r)|^n \rangle = C_n \langle \epsilon_r^{n/3} \rangle \left[r f \left(\frac{r}{\eta} \right) \right]^{n/3} \quad (5.4)$$

De acuerdo a los incisos 2) y 3) el producto $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle \left[r f \left(\frac{r}{\eta} \right) \right]^{n/3}$ es proporcional a r^n si $r \sim \eta$, que es la misma ley de potencias que satisface $\langle |\delta V(r)|^n \rangle$ sobre la región disipativa. Por otra parte, el producto $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle \left[r f \left(\frac{r}{\eta} \right) \right]^{n/3}$ se reduce a $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle r^{n/3}$ sobre la región inercial, ya que $f \rightarrow 1$. Pero este último es el escalamiento propuesto por la teoría de Kolmogorov de 1962 para $\langle |\delta V(r)|^n \rangle$. Se espera entonces que la ecuación (5.4) valga sobre un amplio intervalo de longitudes. Los efectos de la viscosidad están incluidos aquí en el hecho de que $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle$ adopta un valor constante cuando $r \sim \eta$. Pero también por el hecho de que a escalas suficientemente pequeñas $f(r/\eta) \sim (r/\eta)^2$.

5.2 CALCULO DE LOS MOMENTOS DE ϵ_r

La disipación de energía cinética es una cantidad local, que en turbulencia isotrópica se expresa como:

$$\epsilon = 15\nu \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \quad (5.5)$$

El cálculo experimental de ϵ debe realizarse con precaución. Primero, el filtrado de los datos de velocidad debe de hacerse de manera que la señal esté lo menos contaminada por ruido. El ruido introduce a menudo fluctuaciones ficticias de pequeña amplitud, pero que pueden ser importantes en el momento de calcular diferencias de velocidad entre puntos vecinos.

El cálculo de la derivada se hizo con un simple esquema de diferencias, es decir, se tomó la aproximación:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V(x + \Delta x) - V(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (5.6)$$

Los datos de velocidad se adquieren por medio de un convertidor analógico-digital. A la entrada del aparato se conecta un anemómetro y a la salida se tiene una serie discreta de valores de V . La sonda de velocidad permanece en una posición fija, así que se usa la hipótesis de Taylor para convertir los datos de una serie temporal a una espacial. El valor de Δx es la distancia que hay entre dos puntos sucesivos de la serie, es decir:

$$\Delta x = \frac{U}{F_a} \quad (5.7)$$

en donde F_a es la frecuencia de adquisición de los datos.

El esquema de diferencias definido en (5.5) tiene la ventaja de que se toman diferencias de velocidad entre puntos que no son inmediatamente vecinos. Por lo tanto, la eventual influencia del ruido es comparativamente menor a la que habría si se tomaran diferencias entre puntos inmediatos.

ϵ_r es el promedio sobre un intervalo de longitud r :

$$\epsilon_r = \frac{1}{r} \int_0^r \epsilon(x+y) dy \quad (5.8)$$

Sólo se conoce a ϵ en un número discreto de puntos, sin embargo la integración se hace sobre un continuo. Con el objeto de remontar esta dificultad, se procedió a hacer una interpolación de la derivada de velocidad con polinomios cúbicos. La derivada de la velocidad se aproxima con una expresión del tipo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P_i = A_i + B_i x + C_i x^2 + D_i x^3 \quad (5.9)$$

en donde $x_i < x < x_{i+1}$, siendo x_i y x_{i+1} dos puntos sucesivos de la serie de datos.

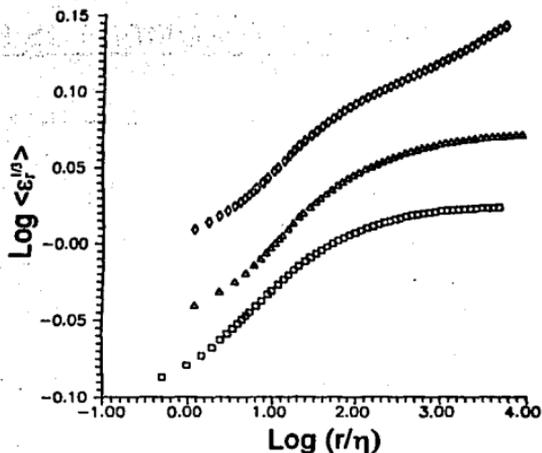


Figura 5.1.- Gráfica de $\langle \epsilon_r^{1/3} \rangle$ vs. r/η para tres valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=38,000$ y (○) $Re=300,000$. Se normalizó $\langle \epsilon_r^{1/3} \rangle$ con $\langle \epsilon_r \rangle^{1/3}$. Se ha usado escala log-log.

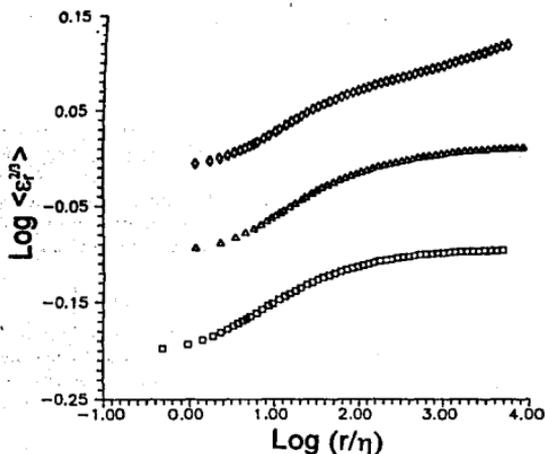


Figura 5.2.- Gráfica de $\langle \epsilon_r^{2/3} \rangle$ vs. r/η para tres valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=38,000$ y (○) $Re=300,000$. Se normalizó $\langle \epsilon_r^{2/3} \rangle$ con $\langle \epsilon_r \rangle^{2/3}$. Se ha usado escala log-log.

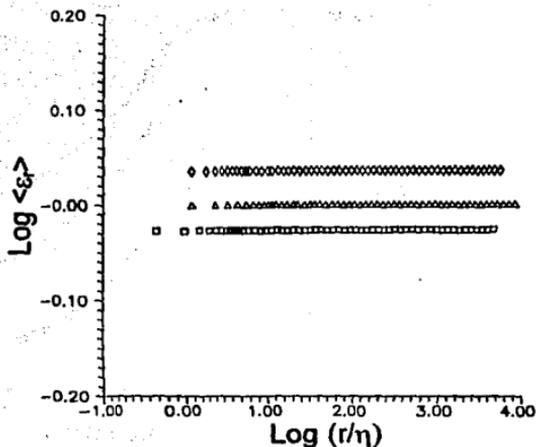


Figura 5.3.- Gráfica de $\langle \epsilon_r^{3/3} \rangle$ vs. r/η para tres valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=36,000$ y (○) $Re=300,000$.

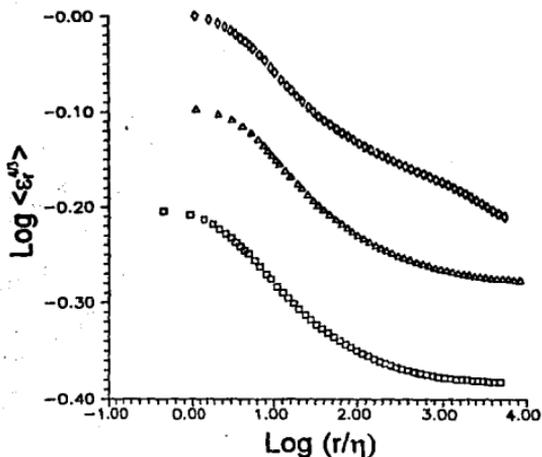


Figura 5.4.- Gráfica de $\langle \epsilon_r^{4/3} \rangle$ vs. r/η para tres valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=36,000$ y (○) $Re=300,000$. Se normalizó $\langle \epsilon_r^{4/3} \rangle$ con $\langle \epsilon_r \rangle^{4/3}$. Se ha usado escala log-log.

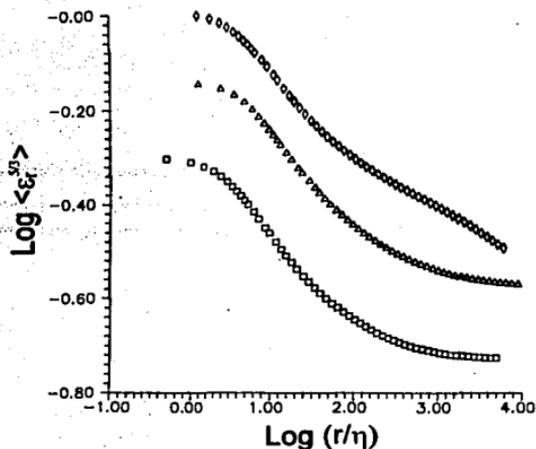


Figura 5.5.- Gráfica de $\langle \varepsilon_r^{5/3} \rangle$ vs. r/η para tres valores de número de Reynolds: (□) $\text{Re}=9,000$ (Δ) $\text{Re}=36,000$ y (○) $\text{Re}=300,000$. Se normalizó $\langle \varepsilon_r^{5/3} \rangle$ con $\langle \varepsilon_r \rangle^{5/3}$. Se ha usado escala log-log.

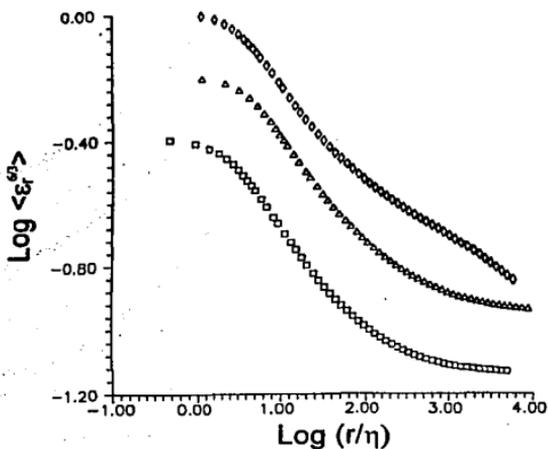


Figura 5.8.- Gráfica de $\langle \varepsilon_r^{6/3} \rangle$ vs. r/η para tres valores de número de Reynolds: (□) $\text{Re}=9,000$ (Δ) $\text{Re}=36,000$ y (○) $\text{Re}=300,000$. Se normalizó $\langle \varepsilon_r^{6/3} \rangle$ con $\langle \varepsilon_r \rangle^{6/3}$. Se ha usado escala log-log.

Se usó el método de splines naturales, es decir, las derivadas de los polinomios P_i y P_{i+1} deben coincidir en $x = x_{i+1}$. La integración se realizó analíticamente ya que el integrando era un polinomio de grado 6. Los resultados del cálculo de los momentos $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle$ se presentan en las figuras 5.1 a 5.6 para valores de n entre 1 y 6. Cada figura contiene curvas con n fijo y datos correspondientes a diferentes números de Reynolds. Una característica general de las curvas es que tienden a un valor constante cuando $r \rightarrow \eta$. Este comportamiento ya se había predicho al inicio del capítulo.

En general las funciones $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle$ exhiben una dependencia con respecto a r . Sólo en el caso $n=3$ se tiene un valor que no depende de la longitud r . De hecho, debe ocurrir que $\langle \epsilon_r \rangle = \bar{\epsilon}$. Esto nos da una nueva manera de calcular el promedio de la tasa local de disipación de energía. Otra es por medio de la relación $\langle \delta V(r)^3 \rangle = -\frac{2}{3}\bar{\epsilon}r$. La tercera es a través de $\langle \delta V(r)^2 \rangle \approx \langle \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \rangle r^2$ que vale en el intervalo disipativo. Y una última es por medio del cálculo de $\frac{\partial V}{\partial x}$ usando el método de diferencias dado en la ecuación (5.5). La discrepancia entre las cuatro estimaciones es de un 10%.

Se espera que los $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle$ sigan un comportamiento de ley de potencias en la región inercial, lo que parece cumplirse únicamente en los experimentos con el Reynolds más alto (turbulencia de chorro). Como detalle adicional, nótese que las funciones $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle$ son crecientes para $n < 3$ y decrecientes para $n > 3$. Esto significa que las correcciones de intermitencia son positivas para las funciones de estructura de órdenes 1 y 2. Mientras que para las funciones de estructura de ordenes mayor a 3 la corrección es negativa. Este cuadro concuerda con los conocimientos previos que se tenían acerca de la turbulencia, en particular con los resultados presentados en el capítulo anterior y con la desigualdad de Hölder [53].

5.3 VERIFICACION EXPERIMENTAL

De las diferentes medidas efectuadas, se han elegido las que corresponden a tres valores de Re ; 9,000, 36,000 (turbulencia generada por cilindro) y 300,000 (turbulencia de chorro). Los datos correspondientes a los valores intermedios de Re no se han incluido, pero las tendencias son las mismas. En las figuras 5.7 a 5.11 se muestran gráficas de $\langle |\delta V(r)|^n \rangle$ vs $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle$ vs $\left[rf\left(\frac{r}{\eta}\right)\right]^{n/3}$ para $n=1, 2, 4, 5$ y 6. El caso $n=3$ no se grafica pues se trata de una identidad trivial. En todos los casos los ajustes por mínimos cuadrados dan líneas rectas con pendientes muy cercanas a 1, lo que implica una relación de proporcionalidad entre ambas cantidades. Para hacer el ajuste se han eliminado los datos que corresponden a escalas mayores a la integral, donde no se cumple la condición de isotropía.

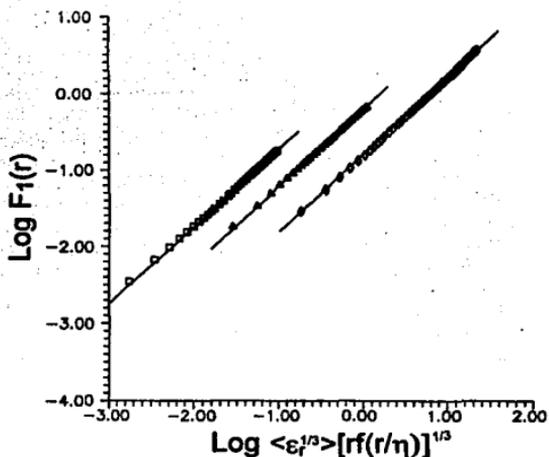


Figura 5.7.- Gráfica de $\langle |\delta v(r)| \rangle$ vs. $\langle \epsilon_r^{1/3} \rangle [r f(r/\eta)]^{1/3}$ en escala log-log. Tres valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=36,000$ y (○) $Re=300,000$. Los datos se distribuyen sobre rectas con pendiente 1.

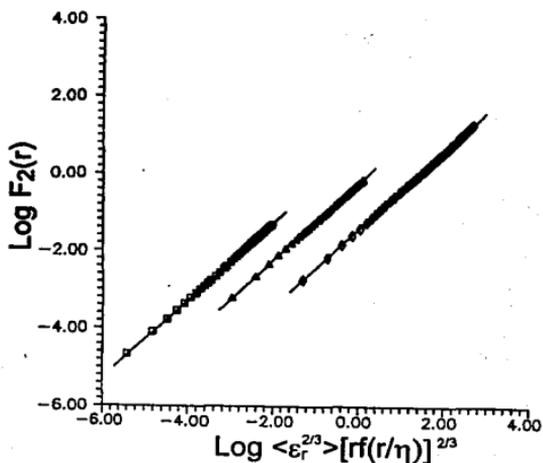


Figura 5.8.- Gráfica de $\langle |\delta v(r)|^2 \rangle$ vs. $\langle \epsilon_r^{2/3} \rangle [r f(r/\eta)]^{2/3}$ en escala log-log. Tres valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=36,000$ y (○) $Re=300,000$. Los datos se distribuyen sobre rectas con pendiente 1.

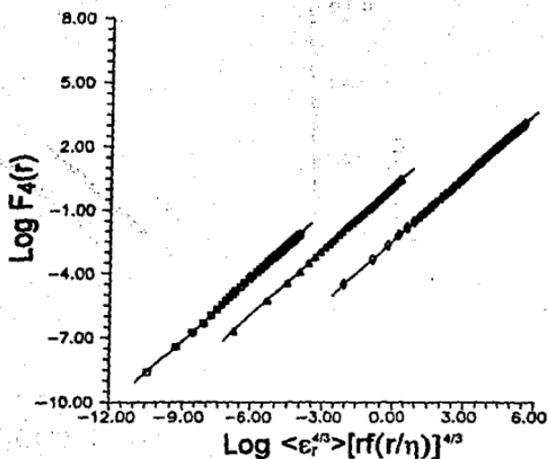


Figura 5.9.- Gráfica de $\langle \delta V(r)^4 \rangle$ vs. $\langle \epsilon_r^{4/3} \rangle [r f(r/\eta)]^{4/3}$ en escala log-log. Tres valores de número de Reynolds: (\square) $\text{Re}=9,000$ (Δ) $\text{Re}=36,000$ y (\circ) $\text{Re}=300,000$. Los datos se distribuyen sobre rectas con pendiente 1.

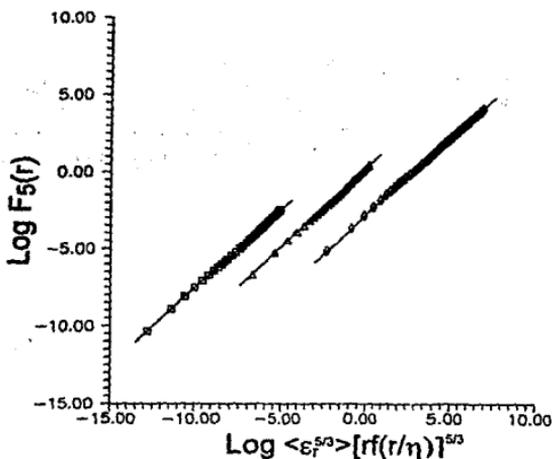


Figura 5.10.- Gráfica de $\langle \delta V(r)^5 \rangle$ vs. $\langle \epsilon_r^{5/3} \rangle [r f(r/\eta)]^{5/3}$ en escala log-log. Tres valores de número de Reynolds: (\square) $\text{Re}=9,000$ (Δ) $\text{Re}=36,000$ y (\circ) $\text{Re}=300,000$. Los datos se distribuyen sobre rectas con pendiente 1.

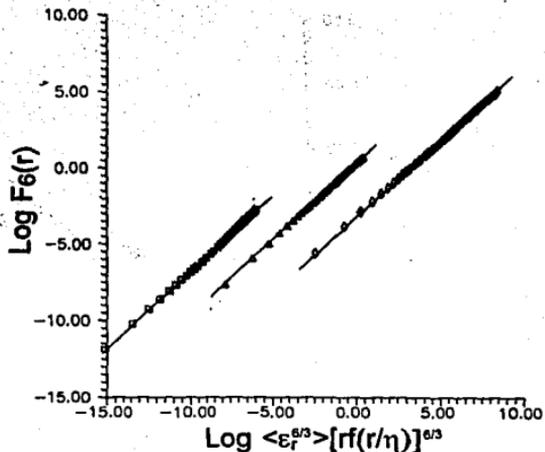


Figura 5.11.- Gráfica de $\langle |\delta V(r/\eta)| \rangle$ vs. $\langle \varepsilon_r^{2/3} \rangle [r f(r/\eta)]^{2/3}$ en escala log-log. Tres valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=36,000$ y (○) $Re=300,000$. Los datos se distribuyen sobre rectas con pendiente 1.

Lo que resulta más sorprendente es que la relación que se ha propuesto en este capítulo se cumple rigurosamente sobre todos los valores de número de Reynolds que se han investigado experimentalmente. Podemos afirmar, a manera de conclusión, que la función universal $f(r/\eta)$ determina, junto con $\langle \varepsilon_r^{2/3} \rangle$ muchas de las características de las turbulencia homogénea e isotrópica.

6. MODELO DE NIVELES DE DISIPACION DE ENERGIA

6.1 INTRODUCCION

Durante los últimos años se ha acumulado una abundante evidencia experimental de que en turbulencia desarrollada, además del desorden que subyace, existen estructuras altamente coherentes [31]. Una primera evidencia en este sentido es que las correlaciones del movimiento turbulento se desvían significativamente de la estadística gaussiana en las escalas pequeñas. Por ejemplo, los eventos de gran amplitud tienen una relativamente alta probabilidad de ocurrencia si se les compara con fenómenos que siguen un comportamiento normal.

El modelo β y en general, las teorías fractales proponen que las estructuras turbulentas de pequeña escala ocurren en subespacios de dimensión menor a 3. Esto parece tener una confirmación experimental. En este sentido Kuo y Corsin [56] muestran que el volumen relativo de las estructuras turbulentas disminuye conforme decrece la escala de longitud r .

Veamos enseguida un poco del aspecto teórico. Si se aplica el operador rotacional a la ecuación de Navier-Stokes, se obtiene la ecuación de vorticidad [10]:

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = S_{ij}\omega_j + \nu \nabla^2 \omega_i, \quad (6.1)$$

en donde S_{ij} es el tensor de rapidez de corte, mientras que $\omega = \text{rot}(\mathbf{v})$.

La dinámica de la vorticidad está determinada por dos procesos físicos: el estiramiento provocado por los esfuerzos y la reconexión y rompimiento a pequeña escala inducidos por la viscosidad.

Betchov [31] ha argumentado que la matriz S_{ij} posee dos eigenvalores positivos y uno negativo (la suma de los tres debe ser cero para que se satisfaga la condición de incompresibilidad), lo que significa que un elemento de fluido estaría sufriendo un estiramiento en dos direcciones y una contracción en la

dirección restante. Dicha especulación ha sido confirmada mediante simulaciones numéricas de turbulencia isotrópica y sobre esta base se afirma que las estructuras típicas de pequeña escala son "hojas". Esta imagen está en conflicto con el modelo clásico de vorticillos cúbicos distribuidos uniformemente en el espacio.

El proceso de formación de hojas requiere que el campo de esfuerzos se mantenga constante y uniforme sobre distancias comparables con sus dimensiones espaciales. Sin embargo esto no ocurre así. She y Lèveque sugieren entonces que las estructuras turbulentas más coherentes son tubos dispersos en el espacio [57, 58]. Estas estructuras tubulares tendrían un ancho del orden de la escala de Kolmogorov. Una característica de ellas es que en el centro son casi rectas, mientras que en los bordes del tubo están enrolladas formando una espiral.

El flujo turbulento es visto como una mezcla de estructuras interactuantes con varios grados de coherencia, que van desde los vorticillos aleatorios hasta las estructuras filamentosas. En esta representación los vórtices aleatorios constituyen un campo estocástico débilmente correlacionado, cuya existencia es la única compatible con la teoría de Kolmogorov de 1941. Las estructuras coherentes localizadas serían entonces las responsables de los efectos de intermitencia, vale decir, de la desviación de la ley de escala del modelo K41. Se concluye entonces que las estructuras turbulentas son pequeñas en uno o dos dimensiones, pero no en las tres. Esta imagen de objetos turbulentos con diverso grado de coherencia realza la naturaleza del crecimiento de la intermitencia: es la tendencia hacia la formación de estructuras coherentes locales lo que produce una fuerte desviación de los niveles medios de fluctuación.

6.2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Los modelos de turbulencia se dividen en dos grandes grupos. Por un lado están los que proponen una expresión para la función de densidad de probabilidad, dentro de ellos se pueden mencionar el de Kolmogorov de 1962 [27]. Por el otro están los modelos que proponen un proceso multiplicativo, discreto y aleatorio, que modela la cascada turbulenta. El modelo de niveles de disipación de energía pertenece a este último grupo.

La idea de She y Lèveque es la de una cascada aleatoria y cuantizada, en la que un evento conduce, ya sea a la formación de una estructura singular (un vórtice filamentario), o bien a una estructura con uno o varios defectos. Estos últimos agregan una cantidad finita de desorden. La cuantización de la cascada implica que cualquier evento puede ser representado por una estructura singular, modulada por un número entero de defectos.

Se define el nivel p de la siguiente manera:

$$\epsilon_r^{(p)} = \frac{\langle \epsilon_r^{p+1} \rangle}{\langle \epsilon_r^p \rangle}, \quad (6.2)$$

es decir, como el cociente de dos momentos de ϵ_r . Se debe destacar que conforme aumenta p , los eventos que más influyen sobre $\langle \epsilon_r^p \rangle$ son los de mayor amplitud. Esto significa que conforme crece p , el nivel $\epsilon_r^{(p)}$ tiende a resaltar los eventos más y más intermitentes. El caso $p=0$ corresponde al nivel medio de fluctuación y es constante. El límite $p \rightarrow \infty$ corresponde a las estructuras filamentosas y su escalamiento diverge cuando $r \rightarrow 0$. Veamos la dependencia de $\epsilon_r^{(\infty)}$ con respecto a r . $\epsilon_r^{(\infty)}$ tiene unidades de energía por unidad de tiempo, o sea que $\epsilon_r^{(\infty)} \sim \delta E^{(\infty)} / t_r$, en donde $\delta E^{(\infty)}$ es la energía disipada por la estructura más intermitente y t_r es un tiempo característico sobre una longitud r . Mediante un análisis dimensional se llega a que [58]:

$$t_r \sim \bar{\epsilon}^{-1/3} r^{2/3}. \quad (6.3)$$

Por otra parte, la energía disipada por la estructura más intermitente es del orden de la máxima energía disponible, es decir $\delta E^{(\infty)} \sim \delta V_0^2 \sim \bar{\epsilon}^{2/3} L^{2/3}$. Con base en esto, se deduce que $\epsilon_r^{(\infty)}$ posee la siguiente ley de potencias:

$$\epsilon_r^{(\infty)} \sim \bar{\epsilon} \left(\frac{r}{L} \right)^{-2/3} \sim r^{-2/3}. \quad (6.4)$$

Los niveles de disipación $\epsilon_r^{(p)}$ con p finito corresponden a estructuras parcialmente coherentes. El mecanismo dinámico de su formación sería el mismo que para las estructuras filamentosas, excepto que el abundante desorden local impide el establecimiento de una fuerte coherencia. Esto implica que el escalamiento de $\epsilon_r^{(p)}$ debe de estar relacionado con el de $\epsilon_r^{(\infty)}$. La relación que proponen She y Léveque en su modelo es:

$$\epsilon_r^{(p)} = A_p \epsilon_r^{(p-1)\beta} \epsilon_r^{(\infty)(1-\beta)}. \quad (6.5)$$

donde también se relaciona al nivel p con el nivel $p-1$. A_p es una constante adimensional que depende de la geometría del sistema. La conexión de este proceso multiplicativo y el escalamiento de las funciones de estructura se da por intermedio de la hipótesis modificada de Kolmogorov: $\langle |\delta V(r)|^n \rangle \sim \langle \epsilon_r^{n/3} \rangle > r^{n/3}$. Si $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle \sim r^{\tau_p}$, entonces $\zeta(n) = \tau_{n/3} + n/3$.

El límite $\epsilon_r^{(\infty)} \sim r^{-2/3}$ implica que:

$$\tau_{p+1} - \tau_p \rightarrow -2/3, \quad (6.6)$$

o sea que el exponente τ_p tiende asintóticamente a $-2/3p + C$ cuando $p \rightarrow \infty$.

A la constante C se le puede dar una interpretación en términos de la transformada de Legendre. C es la codimensión de las estructuras más intermitentes, es decir, los filamentos. Teniendo en cuenta que la dimensión del espacio es 3, resulta que $C=3-1=2$. Por lo tanto, la forma general de el exponente τ_p es:

$$r_p = -\frac{2}{3}p + 2 + f(p), \quad (6.7)$$

con la condición de que $f(p) \rightarrow 0$ cuando p tiende a infinito. Si se sustituye (6.7) en (6.5) se obtiene una ecuación indicial para la función $f(p)$:

$$f(p+2) - (1+\beta)f(p+1) + \beta f(p) = 0. \quad (6.8)$$

La solución general de esta ecuación es del tipo $f(p) = \alpha\beta^p$. Las constantes α y β se determinan a partir de dos condiciones, la primera es que $\langle \epsilon_p^2 \rangle = 1$, mientras que la segunda es $\langle \epsilon_p^4 \rangle = \text{cte}$. Esto se traduce en:

$$\tau_0 = \tau_1 = 0. \quad (6.9)$$

El sistema de ecuaciones que determina los valores de α y β es:

$$2 + \alpha = 0,$$

$$-\frac{2}{3} + 2 + \alpha\beta = 0,$$

cuya solución es:

$$\alpha = -2,$$

$$\beta = \frac{2}{3}.$$

(6.10)

De lo anterior se concluye que la corrección de intermitencia está dada por:

$$r_p = -\frac{2}{3}p + 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^p \right], \quad (6.11)$$

mientras que los exponentes de las funciones de estructuras son:

$$\zeta(n) = \frac{n}{9} + 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n/3} \right]. \quad (6.12)$$

A manera de comparación, en la tabla 6.1 se presentan los valores de $\zeta(n)$ de este modelo y los calculados mediante Auto semejanza Extendida. La diferencia entre los valores teóricos y experimentales es a lo más de 1%, lo que constituye una primera verificación del modelo. Pero esta no es la única prueba que se puede realizar, pues las otras cantidades que se han introducido son susceptibles de medida experimental.

ORDEN	MODELO	EXPERIMENTO
1	0.364	0.36
2	0.696	0.70
3	1.000	1.00
4	1.279	1.27
5	1.538	1.53
6	1.778	1.77
7	2.001	2.01
8	2.211	2.23

Tabla 6.1 Comparación de los exponentes de las funciones de estructura. Se presentan los valores predichos por el modelo y los obtenidos mediante Auto semejanza Extendida

6.3 DETERMINACION DE LOS NIVELES DE DISIPACION DE ENERGIA.

Una validación exhaustiva de la ecuación básica (6.5) implica la determinación experimental del parámetro β , así como la evaluación de $\epsilon_r^{(p)}$ para cualquier valor de p , incluyendo el límite $\epsilon_r^{(\infty)}$. Esto es lo que se va a mostrar en la presente sección. Para tal efecto se presentan los resultados de tres medidas de turbulencia, una de ellas con $Re=9,000$, otra con $Re=36,000$ y la otra con $Re=300,000$. En la figura 6.1 se grafican las funciones $\epsilon_r^{(p)}$ vs r/η en escala log-log con $Re=9,000$ y para los valores de $p=0.5, 1.0, 1.5$ y 2.0 . Las figuras 6.2 y 6.3 son semejantes a 6.1 excepto porque se consideran números de Reynolds diferentes. Se observa que en la vecindad de la escala de Kolmogorov todas las curvas tienden a un valor constante, mientras que su comportamiento para longitudes más grandes que η es un escalamiento con una potencia negativa. A excepción de $p=0$, en cuyo caso se tiene un valor independiente de r .

6.3.1 CALCULO DE β

Una manera de evaluar el exponente β es la siguiente: se dejan como parámetros libres a A_p y a β y se buscan numéricamente los valores que dan la mejor coincidencia entre las partes izquierda y derecha de (6.5). Este método requiere para su implementación que se conozca la función $\epsilon_r^{(\infty)}$. Sin embargo, existe un procedimiento alternativo [4] que no requiere un ajuste numérico. Evalúese la ecuación (6.5) en dos puntos r y r' pertenecientes al rango inercial. Luego tómesese el cociente entre ambas. El resultado se muestra a continuación:

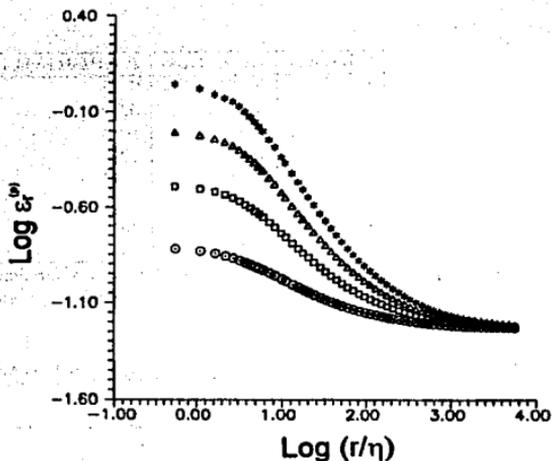


Figura 6.1.- Gráfica de $\varepsilon_r^{(p)}$ vs. r/η en escala log-log. $Re=9,000$, $R_\lambda=134$. 4 valores distintos de p : (○) $p=0.5$, (□) $p=1.0$, (Δ) $p=1.5$ y (◇) $p=2.0$.

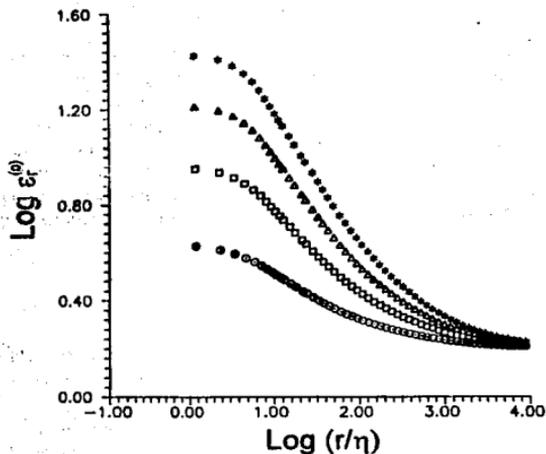


Figura 6.2.- Gráfica de $\varepsilon_r^{(p)}$ vs. r/η en escala log-log. $Re=36,000$, $R_\lambda=292$. 4 valores distintos de p : (○) $p=0.5$, (□) $p=1.0$, (Δ) $p=1.5$ y (◇) $p=2.0$.

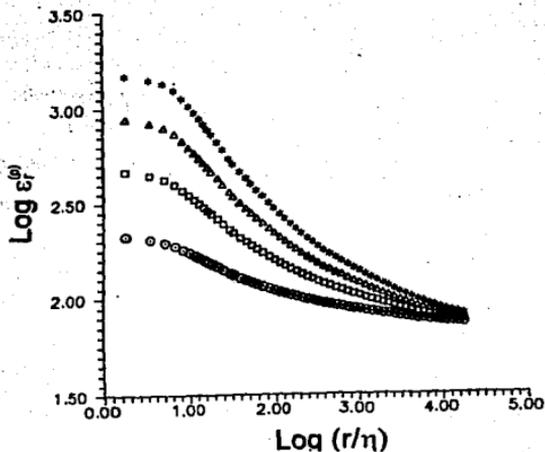


Figura 6.3.- Gráfica de $\epsilon_r^{(p)}$ vs. r/η en escala log-log. $Re=300,000$, $Pr_\lambda=800$, 4 valores distintos de p : (O) $p=0.5$, (□) $p=1.0$, (Δ) $p=1.5$ y (•) $p=2.0$.

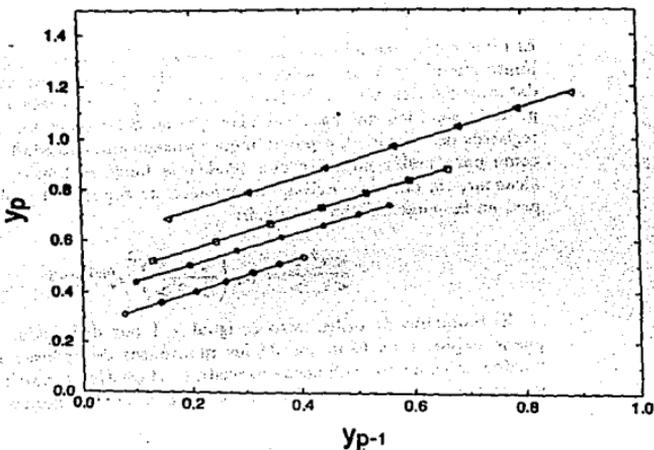


Figura 6.4.- Gráfica de y_p vs. y_{p-1} . Cálculo del parámetro β . Las líneas rectas tienen pendientes 0.68 ± 0.03 . Este valor, dentro de los errores experimentales, concuerda con la predicción del modelo ($\beta=2/3$).

$$\frac{\epsilon_r^{(p)}}{\epsilon_{r'}^{(p)}} = \left(\frac{\epsilon_r^{(p-1)}}{\epsilon_{r'}^{(p-1)}} \right)^\beta \left(\frac{\epsilon_r^{(\infty)}}{\epsilon_{r'}^{(\infty)}} \right)^{(1-\beta)} \quad (6.13)$$

Con esta operación desaparece el factor A_p . Si se dejan fijos r y r' , la ecuación depende exclusivamente de p ; además, el término $\left(\frac{\epsilon_r^{(\infty)}}{\epsilon_{r'}^{(\infty)}} \right)^{(1-\beta)}$ es constante. Defínase $Y_p = \frac{\epsilon_r^{(p)}}{\epsilon_{r'}^{(p)}}$. Entonces se satisface $Y_p \sim Y_{p-1}^\beta$. Por lo tanto, si se grafica en escala log-log Y_p vs Y_{p-1} tomando diferentes valores de p , lo que debe resultar es una línea recta, cuya pendiente es precisamente el valor de β . En la figura 6.4 se realiza esta operación, usando 4 pares de valores de r y r' (que corresponden a dos números de Reynolds). Los datos se distribuyen claramente sobre líneas rectas, cuyas pendientes valen 0.68 ± 0.03 . Lo que concuerda, dentro de los errores experimentales, con el valor $2/3$. Pero lo más sorprendente es que este valor se obtiene también con el experimento a $Re=9,000$, en donde no existe un rango inercial propiamente dicho.

6.3.2 EVALUACION DE $\epsilon_r^{(\infty)}$

El nivel $\epsilon_r^{(\infty)}$, asociado con las estructuras filamentarias, es formalmente, un límite cuando $p \rightarrow \infty$. Desde un punto de vista experimental, el número de datos necesarios para calcular un momento de ϵ_r crece con el aumento de p . Esto significa que para calcular $\epsilon_r^{(\infty)}$ se debe tener un número infinito de registros de velocidad, o por lo menos poseer una cantidad suficiente de datos como para poder observar una tendencia hacia el límite. Esto es difícil de alcanzar, sin embargo existe una manera de superar el problema [4]. Hágase $p=1$ en la ecuación (6.5), es decir:

$$\frac{\langle \epsilon_r^2 \rangle}{\langle \epsilon_r \rangle} = A_1 \left(\frac{\langle \epsilon_r \rangle}{\langle \epsilon_r^0 \rangle} \right)^\beta \epsilon_r^{(\infty)(1-\beta)} \quad (6.14)$$

El momento de orden cero es igual a 1 por definición. Entonces $\epsilon_r^{(\infty)}$ se puede expresar en términos de los momentos de ordenes 1 y 2, los que se pueden calcular con suficiente exactitud estadística a partir de los datos que se han tomado en cada medida. Si se despeja $\epsilon_r^{(\infty)}$ se llega a:

$$\epsilon_r^{(\infty)(1-\beta)} \sim \frac{\langle \epsilon_r^2 \rangle}{\langle \epsilon_r \rangle^{1+\beta}} \quad (6.15)$$

Considerando que $\langle \epsilon_r \rangle$ es una cantidad constante que no depende de r , el escalamiento de $\epsilon_r^{(\infty)}$ se relaciona directamente con la corrección de intermitencia de la función de estructura de orden 6. De hecho, si se recuerda que el

modelo predice que $\epsilon_r^{(\infty)} \sim r^{-2/3}$, se deduce inmediatamente que $\langle \epsilon_r^2 \rangle \sim r^{-2/9}$. En la figura 6.5 se presenta una grafica de $\epsilon_r^{(\infty)}$ vs r/η en escala log-log.

Con base en todo lo anterior, la ecuación que propone She y Lèveque se traduce en:

$$\epsilon_r^{(p+1)} = B_p \epsilon_r^{(p)\beta} \epsilon_r^{(1)} < \epsilon_r >^{-\beta}, \quad (6.16)$$

que es mucho más simple de evaluar que la relación original. B_p es una constante adimensional igual al cociente A_p/A_1 .

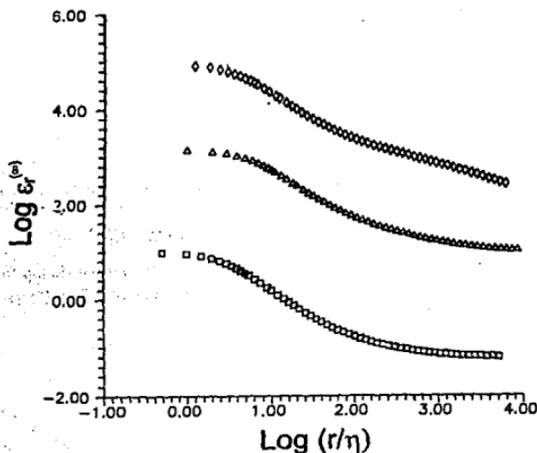


Figura 6.5.- Gráfica de $\epsilon_r^{(\infty)}$ vs. r/η en escala log-log. Tres valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=38,000$ y (○) $Re=300,000$.

6.3.3 VALIDACION GLOBAL DEL MODELO

En las figuras 6.6 a 6.8 se muestran curvas de $\epsilon_r^{(p+1)}$ vs $\epsilon_r^{(p)\beta} \epsilon_r^{(1)}$ en escala log-log. En todos los casos se recupera en una región extensa, un comportamiento de línea recta, cuya pendiente es 1.00 ± 0.01 . Los datos que se separan de la recta son los que pertenecen a la región disipativa y aquellos próximos a la escala integral L. El valor 1 en la pendiente significa que entre ambas cantidades existe una proporcionalidad, tal como lo prevee el modelo.

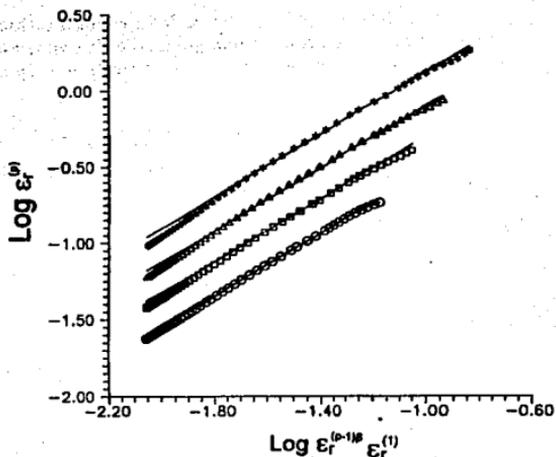


Figura 6.6.- Gráfica de $\epsilon_r^{(p)}$ vs. $\epsilon_r^{(p-1)p} \epsilon_r^{(1)}$ en escala log-log. $Re=9,000$. 4 valores distintos de p : (O) $p=0.5$, (□) $p=1.0$, (Δ) $p=1.5$ y (◊) $p=2.0$. La pendiente de las rectas es 1.

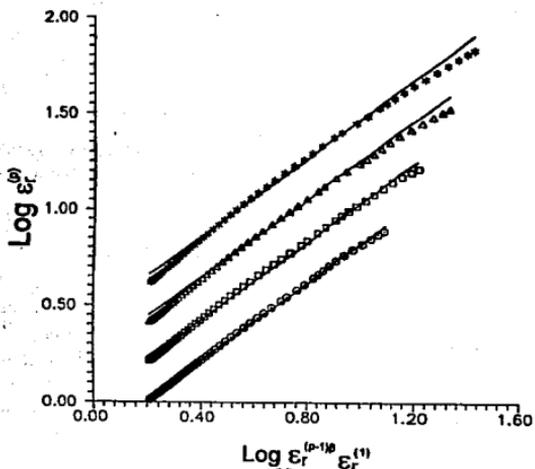


Figura 6.7.- Gráfica de $\epsilon_r^{(p)}$ vs. $\epsilon_r^{(p-1)p} \epsilon_r^{(1)}$ en escala log-log. $Re=38,000$. 4 valores distintos de p : (O) $p=0.5$, (□) $p=1.0$, (Δ) $p=1.5$ y (◊) $p=2.0$. La pendiente de las rectas es 1.

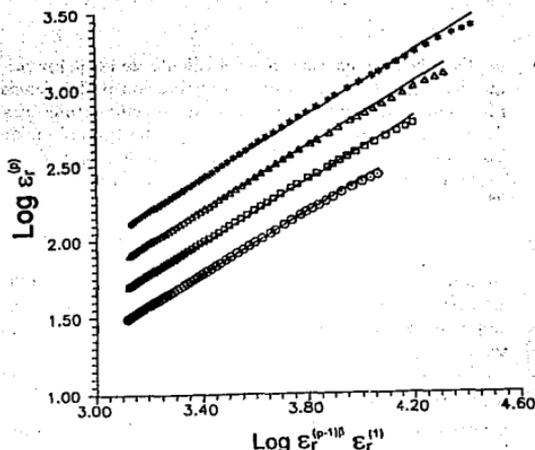


Figura 6.8.- Gráfica de $\epsilon_r^{(p)}$ vs. $\epsilon_r^{(p-1)\beta} \epsilon_r^{(1)}$ en escala log-log. $Re=300,000$. 4 valores distintos de n : (O) $p=0.5$, (□) $p=1.0$, (Δ) $p=1.5$ y (◊) $p=2.0$. La pendiente de las rectas es 1.

Como comentario final debe señalarse que se han hecho tres pruebas diferentes, la primera fue una comparación de los exponentes de las funciones de estructura con los datos experimentales, una segunda fue el cálculo del parámetro β . Y la tercera es una verificación de la ecuación (6.5) para diferentes niveles de disipación de energía. En todos los casos se obtuvo una buena concordancia con la predicción teórica. Debe destacarse que esta teoría se basa en hipótesis que pueden ser verificadas en el experimento, lo que no ocurre a menudo en los modelos de turbulencia desarrollada.

6.4 IMPLICACIONES DEL MODELO SOBRE LAS FUNCIONES DE ESTRUCTURA

La ecuación (6.5), o de manera equivalente (6.16), proponen una relación entre momentos de ϵ_r cuyos ordenes difieren entre sí en un número entero. Ahora vamos a presentar una generalización de dicha ecuación en donde las diferencias de los ordenes son fraccionarias. Lo que se quiere hacer es construir una relación entre funciones de estructura, en lugar de una relación entre momentos

de disipación de energía, pues el cálculo de las primeras impone menos errores que los segundos. En efecto, la evaluación de las funciones de estructura implica solamente tomar diferencias de velocidad, mientras que ϵ_r debe calcularse derivando la señal de velocidad, luego elevando al cuadrado y finalmente realizando una integración sobre una región de longitud r .

Se propone la siguiente generalización [5]:

$$\frac{\langle \epsilon_r^{(p+\delta)} \rangle}{\langle \epsilon_r^{(p)} \rangle} = A_p \left(\frac{\langle \epsilon_r^{(p)} \rangle}{\langle \epsilon_r^{(p-\delta)} \rangle} \right)^{\beta'} \epsilon_r^{(\infty) \cdot (1-\beta')\delta}, \quad (6.17)$$

en donde $\beta' = \beta^\delta$. Considérese el caso particular $\delta = 1/3$; si se aplica tres veces esta ecuación con los valores de p iguales a n , $n+1/3$ y $n+2/3$ respectivamente, se puede recuperar la ecuación original mediante una multiplicación entre las tres.

La ecuación (6.17) puede reescribirse en términos de funciones de estructura. Para ello la multiplicaremos por $\left(\frac{\langle \delta V(r) \rangle}{\bar{\epsilon}} \right)^{1/3}$. Usando enseguida la generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov y poniendo $p=n/3$ se llega a:

$$\frac{\langle |\delta V(r)|^{n+1} \rangle}{\langle |\delta V(r)|^n \rangle} = \left(\frac{\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle}{\langle \epsilon_r^{n/3-1/3} \rangle} \right)^{\beta'} \left(\frac{\langle |\delta V(r)|^3 \rangle}{\bar{\epsilon}} \right)^{1/3} \epsilon_r^{(\infty) \cdot (1-\beta')\delta}, \quad (6.18)$$

en donde se han eliminado los factores constantes adimensionales. Si ahora se reescribe lo que aparece entre paréntesis al lado derecho, en términos de funciones de estructura, resulta que:

$$\frac{\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle}{\langle \epsilon_r^{n/3-1/3} \rangle} = \frac{\langle |\delta V(r)|^n \rangle}{\langle |\delta V(r)|^{n-1} \rangle} \left(\frac{\langle |\delta V(r)|^3 \rangle}{\bar{\epsilon}} \right)^{-1/3}, \quad (6.19)$$

y entonces la igualdad original se reescribe así:

$$\frac{\langle |\delta V(r)|^{n+1} \rangle}{\langle |\delta V(r)|^n \rangle} = \left(\frac{\langle |\delta V(r)|^n \rangle}{\langle |\delta V(r)|^{n-1} \rangle} \right)^{\beta'} \left[\frac{\langle |\delta V(r)|^3 \rangle}{\bar{\epsilon}} \epsilon_r^{(\infty)} \right]^{\frac{1}{3}(1-\beta')}. \quad (6.20)$$

Procedamos a usar ahora la relación (6.15) entre $\epsilon_r^{(\infty)}$ y los momentos de ordenes 1 y 2:

$$\epsilon_r^{(\infty)} = \frac{\langle \epsilon_r^2 \rangle^3}{\langle \epsilon_r \rangle^5},$$

en donde ya se ha hecho $\beta = 2/3$.

Sustituamos esto en la ecuación (6.20):

$$\frac{\langle |\delta V(r)|^{n+1} \rangle}{\langle |\delta V(r)|^n \rangle} = \left(\frac{\langle |\delta V(r)|^n \rangle}{\langle |\delta V(r)|^{n-1} \rangle} \right)^{\beta'} \left[\frac{\langle |\delta V(r)|^3 \rangle}{\langle \epsilon_r \rangle^5} \right]^{\frac{1}{3}(1-\beta')} \quad (6.21)$$

Usemos nuevamente la generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov, en particular hágase $n=6$:

$$\langle |\delta V(r)|^6 \rangle = \frac{\langle |\delta V(r)|^3 \rangle^2}{\langle \epsilon^2 \rangle}, \quad (6.22)$$

con lo que se llega finalmente a la siguiente ecuación:

$$\frac{\langle |\delta V(r)|^{n+1} \rangle}{\langle |\delta V(r)|^n \rangle} = \left(\frac{\langle |\delta V(r)|^n \rangle}{\langle |\delta V(r)|^{n-1} \rangle} \right)^{\beta'} \left[\frac{\langle |\delta V(r)|^6 \rangle}{\langle |\delta V(r)|^3 \rangle^{2/3}} \right]^{(1-\beta')} \quad (6.23)$$

Se debe hacer notar que la deducción de esta ecuación se ha basado en un resultado que vale tanto en la región disipativa como en la región inercial. Su validez en la región disipativa se desprende del escalamiento $\langle |\delta V|^n \rangle \sim r^n$ y es independiente del valor de β . Por otra parte, el parámetro β es una medida de la intermitencia. Por ejemplo, si $\beta = 1$, el escalamiento de la teoría de Kolmogorov de 1941 sería el correcto.

Se debe anotar que el término que contenía a $\epsilon^{(\infty)}$ se tradujo en otro que incluye a las funciones de estructura de ordenes 3 y 6. Esto nos quiere decir que en ellas debe de haber información acerca de las estructuras más intermitentes.

Por cuestiones de notación se definen:

$$H_n = \frac{\langle |\delta V(r)|^n \rangle}{\langle |\delta V(r)|^{n-1} \rangle}, \quad (6.24)$$

$$H = \left[\frac{\langle |\delta V(r)|^6 \rangle}{\langle |\delta V(r)|^3 \rangle^{2/3}} \right]^{(1-\beta')}$$

Entonces la ecuación 6.23 se expresa como sigue:

$$H_{n+1} = H_n (H_n)^{\beta'} H. \quad (6.25)$$

El cálculo de las funciones de estructura hasta orden 6 ya se presentó en el capítulo 3. Entonces, la puesta a prueba de la ecuación (6.25) se puede realizar con un esfuerzo adicional mínimo. Aparte de las funciones de estructura de ordenes 3 y 6, que siempre están presentes, la ecuación contiene tres funciones de estructura de ordenes subsecuentes.

En las figuras 6.9 a 6.11 se grafican H_{n+1} vs $(H_n)^{\beta'} H$ en escala log-log, para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Los números de Reynolds son 9,000, 36,000 y 300,000. En todos los casos los datos (incluyendo los de escalas más pequeñas) se distribuyen sobre líneas rectas, cuyas pendientes valen 1.00 ± 0.005 . Esto significa que hay una proporcionalidad entre ambas cantidades, tal como ya se había anticipado. Debe destacarse que esta relación de proporcionalidad se verifica tanto en el intervalo disipativo como en el inercial. Lo más importante de todo esto es que el modelo, construido inicialmente para describir el comportamiento en el intervalo inercial, ha mostrado tener una validez sobre otras escalas.

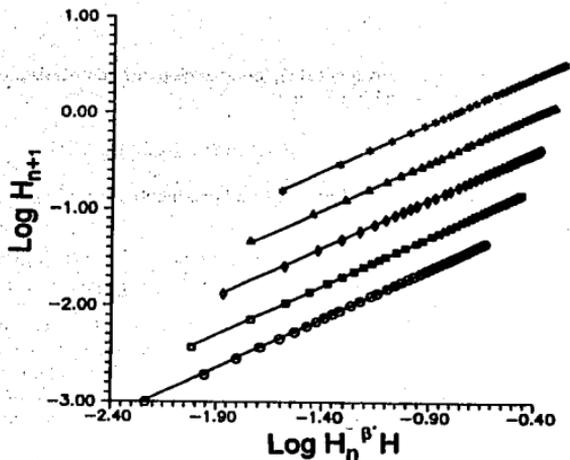


Figura 6.9.- Gráfica de $H_{n+1}(r)$ vs. $H_n(r)^{\beta} H(r)$. $Re=9,000$, $R_{\lambda}=134.5$ valores distintos de n : (O) $n=1$, (\square) $n=2$, (\circ) $n=3.0$, (Δ) $n=4$ y ($*$) $n=5$. Las líneas continuas son los ajustes por mínimos cuadrados, sus pendientes son en todos los casos muy próximas a 1.

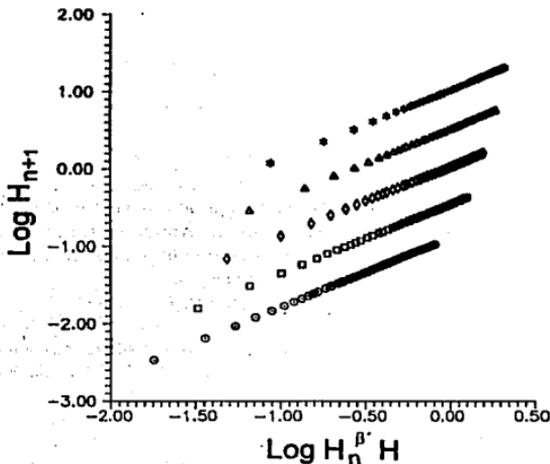


Figura 6.10.- Gráfica de $H_{n+1}(r)$ vs. $H_n(r)^{\beta} H(r)$. $Re=38,000$, $R_{\lambda}=292.5$ valores distintos de n : (O) $n=1$, (\square) $n=2$, (\circ) $n=3.0$, (Δ) $n=4$ y ($*$) $n=5$. Las líneas continuas son los ajustes por mínimos cuadrados, sus pendientes son en todos los casos muy próximas a 1.

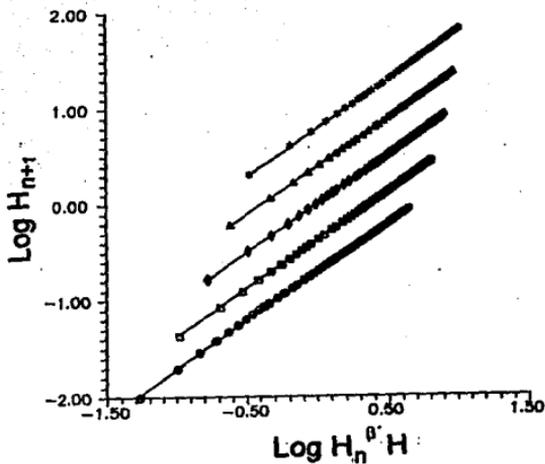
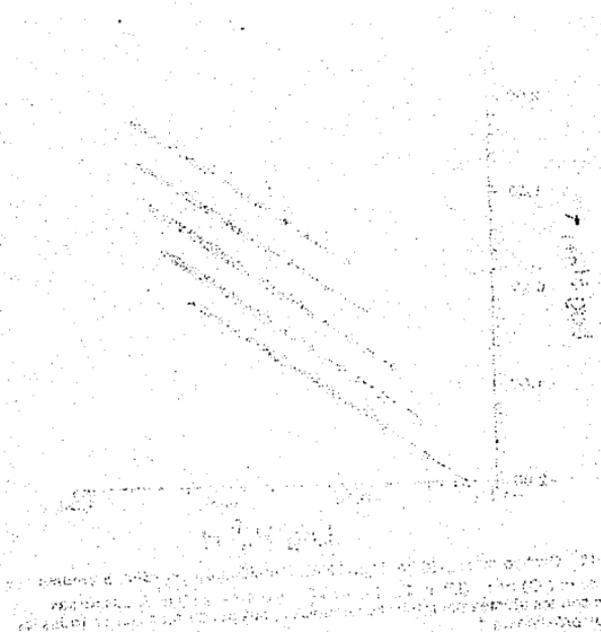


Figura 6.11.- Gráfica de $H_{n+1}(r)$ vs. $H_n(r)^\theta H(r)$. $Re=300,000$, $R_\lambda=800$. 5 valores distintos de n : (O) $n=1$, (\square) $n=2$, (\odot) $n=3.0$, (Δ) $n=4$ y ($*$) $n=5$. Las líneas continuas son los ajustes por mínimos cuadrados, sus pendientes son en todos los casos muy próximas a 1.



7. ESCALAR PASIVO

La dinámica de un escalar pasivo está descrita por una ecuación diferencial que presenta un acoplamiento con el campo de velocidad. Por lo tanto, existe una interacción entre ellos que influye sobre el comportamiento estadístico del primero. Varias son las características comunes que comparten los campos de velocidad y temperatura, por ejemplo el desarrollo de un régimen inercial o la suavización de las fluctuaciones en las escalas pequeñas a causa de los respectivos procesos de transporte [38, 59]. Pero por otro lado, también hay diferencias, baste citar que los escalamientos en la región inercial siguen leyes de potencia diferentes [60]. En este capítulo se van a abordar varios puntos referentes a la estadística de temperatura. Entre ellos destacan: a) la existencia de dos escalas disipativas, una para velocidad y la otra para el escalar pasivo, b) la evaluación de los exponentes de las funciones de estructura de temperatura en el intervalo inercial, c) la verificación de un modelo introducido recientemente en la literatura, según el cual la función de estructura de orden 2 es afectada únicamente por una corrección de intermitencia de ϵ , d) la relación de las intermitencias de \bar{N} y $\bar{\epsilon}$ con el escalamiento de las funciones de estructura y e) finalmente se va a estudiar la aplicabilidad de la Auto semejanza Extendida.

7.1 ESCALA DISIPATIVA

Mediante un análisis dimensional es posible estimar el valor de la escala disipativa de velocidad, suponiendo que esta depende exclusivamente de $\bar{\epsilon}$ y de ν :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\bar{\epsilon}} \right)^{1/4} \quad (7.1)$$

En el caso de la temperatura se debe incluir un parámetro adicional, la difusividad térmica χ . Monin y Yaglom [10] dan el siguiente valor:

$$\eta_T = \left(\frac{\chi^3}{\bar{\epsilon}} \right)^{1/4} \quad (7.2)$$

MODELO	η_T/η
Monin-Yaglom [9]	1.31
Ecuación de Difusión	1.43
Pumir [42]	0.705
Experimento (Re=9,000)	0.77
Experimento (Re=35,000)	0.70

Tabla 7.1 Diferentes estimaciones de la escala disipativa de temperatura. Las tres primeras corresponden a los modelos y las dos últimas son los resultados de nuestras medidas. El valor que da Pumir es el que mejor se acerca a los datos del experimento. El número de Prandtl del aire es 0.7.

Se ha puesto un subíndice a esta última cantidad para diferenciarla de η . El cociente de las magnitudes definidas en (7.1) y (7.2) es:

$$\eta_T/\eta = Pr^{-3/4}, \quad (7.3)$$

donde $Pr = \nu/\chi$ es el número de Prandtl. En el aire $Pr=0.7$. El cociente dado en la ecuación (7.3) es, en general, distinto de 1. Esto es una consecuencia de que la difusión de momento y la difusión térmica se vuelven importantes a escalas diferentes. La definición de η_T no es la única posible, de hecho existen otras combinaciones de $\bar{\epsilon}$, χ y ν con unidades de longitud. Una segunda estimación se puede obtener mediante la adimensionalización de la ecuación (2.31). El resultado es:

$$\eta_T = Pr^{-1}\eta. \quad (7.4)$$

Una tercera estimación de la escala disipativa de temperatura la proporciona Pumir, quien se basa en una simulación numérica [42].

$$\eta_T = 0.59 \cdot Pr^{-1/2}\eta. \quad (7.5)$$

En la introducción se mencionó que la forma más general de η_T es $\eta_T = \eta f(Pr)$.

La región disipativa es el intervalo de longitudes donde, por efecto de la viscosidad o la difusividad térmica, la función de estructura de orden n sigue el escalamiento r^n . Una manera de evaluar el cociente η_T/η es por medio de la superposición de $\langle |\delta V|^n \rangle$ y $\langle |\delta T|^n \rangle$ en la región disipativa a través de un cambio de escala en una de ellas. Las dos curvas deben de colapsarse en una sola pues en ambos casos se tiene un mismo comportamiento. Los resultados a que se llegaron en turbulencia del aire se muestran en la tabla 7.1. Los datos experimentales concuerdan con la predicción de Pumir de que la escala disipativa de temperatura es menor que la escala de velocidad. Aún más, el experimento a $Re=36,000$ concuerda cuantitativamente con la predicción numérica.

Número de Reynolds	9,000	27,000	36,000	45,000
U (m/s)	1.40	4.5	5.7	7.0
σ (m/s)	0.16	0.56	0.59	0.91
Tasa de turbulencia	12.5	12.4	10.4	13.0
η (μ m)	590	320	230	190
$\bar{\epsilon}$ (m^3/s^2)	0.071	0.6179	1.583	2.782
\bar{N} ($^{\circ}C^2/s$)	0.138	0.0625	0.0531	0.0490
λ (mm)	13.3	10.0	7.7	7.0
R_λ	140	270	300	470
F_a (khz)	5	10	20	20
F_c (khz)	2	4	8	5
ΔT ($^{\circ}C$)	3.8	1.6	1.0	0.8
σ_T ($^{\circ}C$)	0.37	0.21	0.15	0.12

Tabla 7.2 Características principales de los flujos donde se investigó el comportamiento del campo de temperaturas. El objeto generador de la turbulencia fue un cilindro de 10 cm de diámetro

7.2 EXPONENTES EN EL INTERVALO INERCIAL

Una de las consecuencias de que η_T sea menor de η es que la región inercial de temperatura es algo más extensa que la de velocidad. Este detalle es el que permite evaluar los exponentes $\xi(n)$ mediante una medición directa a números de Reynolds moderados.

Toda la adquisición de datos de temperatura se ha hecho en turbulencia generada por el cilindro de 10 cm de diámetro. Se han seleccionado 4 valores distintos de Re , que van de 9,000 a 45,000. El rango correspondiente de R_λ es de 140 a 470. Las principales características de las medidas aparecen en la tabla 7.2. ΔT es el aumento promedio de la temperatura del aire y σ_T es la desviación estándar de las fluctuaciones, ambas medidas en grados centígrados.

Se han tomado entre 7.5 y 10 millones de datos por cada experimento. Durante las mediciones hechas a $Re=9,000$ y $Re=36,000$ se adquirieron simultáneamente datos de velocidad y temperatura. Las sondas se colocaron a una distancia de aproximadamente 2.5 metros del cilindro. Entre ellas había una separación algo menor a 1 mm, de manera que se tuviera una estimación confiable de los momentos conjuntos de velocidad y temperatura. Por lo demás, para evitar que la alta temperatura de funcionamiento de la sonda de velocidad afecte las medidas de la sonda de platino, la primera se colocó siempre por arriba, tal como se muestra en la siguiente figura 7.1.

En las medidas restantes se tomaron solamente datos de temperatura. La estimación de cantidades como la velocidad promedio, la tasa de turbulencia y $\bar{\epsilon}$ se hicieron tomando 10^6 datos de velocidad, pero en esos casos la película caliente no estaba cercana a la sonda de temperatura.

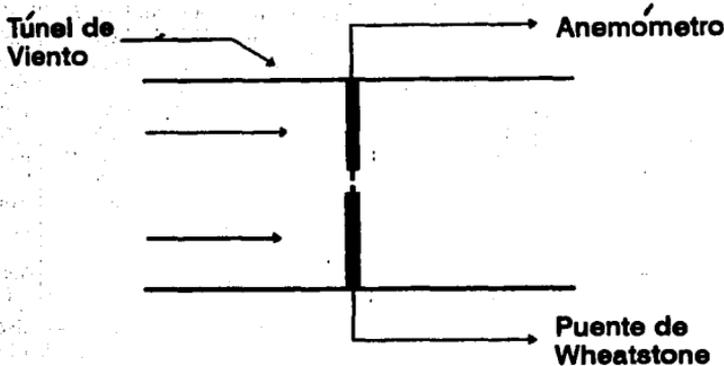


Figura 7.1.- Disposición de las sondas de temperatura y velocidad. La "película caliente" se pone por arriba para evitar que la convección generada por su alta temperatura de operación contamine los registros de la sonda de platino.

La temperatura dentro del túnel del viento en el momento de hacer las medidas fue de entre 20 y 23 °C. Por otra parte, la potencia del sistema de calefacción fue la misma en todos los casos, lo que significa que el aumento promedio de la temperatura fue diferente en cada medida, si se tiene en cuenta que los gastos máxicos también variaron. A mayor velocidad menor es el incremento de temperatura, resultado que se puede expresar como:

$$\Delta T = \frac{\text{Potencia}}{\rho c_p A U}, \quad (7.6)$$

en donde ρ es la densidad del aire, c_p es el calor específico, A el área de la sección transversal del túnel de viento y U es la velocidad promedio del flujo. Una de las consecuencias que se desprenden de esta relación es que la tasa promedio de disipación de temperatura es una función decreciente del número de Reynolds (bajo la hipótesis de que el calentamiento se mantenga con la misma potencia). Comportamiento que difiere de la disipación de energía cinética, que sigue una ley $\bar{\epsilon} \sim Re^3$. Por el contrario: $\bar{N} \sim \delta V \delta T^2 / r \sim 1/U_o L$, que equivale a: $\bar{N} \sim Re^{-1}$. Esto último se aprecia bien en la tabla 7.2, donde se observa que \bar{N} es una cantidad que decrece con el aumento de Re .

Uno de los pocos resultados exactos que se conocen sobre la región inercial de un escalár pasivo es [10]:

$$\langle \delta V(r) \delta T(r)^2 \rangle = -\frac{4}{3} \bar{N} r, \quad (7.7)$$

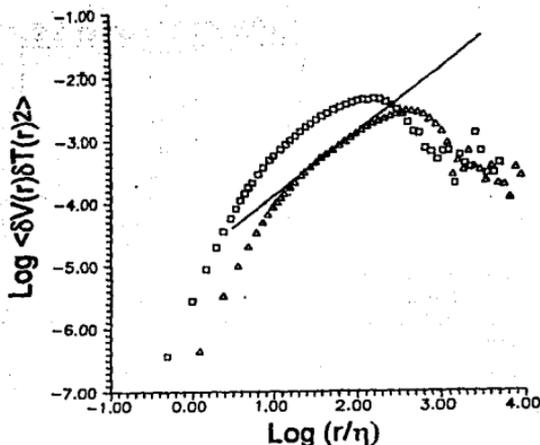


Figura 7.2.- Gráfica de $\langle \delta V(r) \delta T(r)^2 \rangle$ vs r/η . Dos valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ y (Δ) $Re=36,000$. En la región inercial $\langle \delta V(r) \delta T(r)^2 \rangle$ es proporcional a r .

Mediante (7.7) se puede calcular el valor promedio de la disipación de las fluctuaciones de temperatura \bar{N} . En la figura 7.2 se presenta la gráfica de $\langle \delta V(r) \delta T(r)^2 \rangle$ vs r/η en escala log-log para los experimentos correspondientes a $Re=9,000$ y $Re=36,000$. Como se puede apreciar el escalamiento en la región inercial concuerda con la predicción teórica.

El primer modelo acerca del escalamiento de $\langle |\delta T(r)|^n \rangle$ [39] se basa en las mismas ideas de la teoría de Kolmogorov de 1941. Utilizando el concepto de autosemejanza y mediante un análisis adimensional se propone que las funciones de estructura satisfacen la relación:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle = C_n \bar{\epsilon}^{-n/6} \bar{N}^{n/2} r^{n/3}, \quad (7.8)$$

a condición de que $\eta \ll r \ll L$. Los exponentes valen $n/3$. Este modelo, debido a Obukhov y Corrsin [21, 48], da la misma ley de potencias que la teoría de K41 para la estadística de velocidad. Las mediciones de turbulencia indican que hay desviaciones respecto de ley de potencia $n/3$, pero también que los exponentes de $\langle |\delta T(r)|^n \rangle$ y $\langle |\delta V(r)|^n \rangle$ son distintos entre sí. En la figura 7.3 se presentan las curvas de las funciones de estructura de velocidad y temperatura para $n=4$ y $Re=36,000$. Los exponentes son respectivamente $\zeta(4) = 1.28$ y $\xi(4) = 0.94$, la diferencia entre ellos es del 26%.

En las figuras 7.4 a 7.9 se grafican las funciones de estructura de orden 1 hasta 6 como función de r/η en escala log-log, correspondientes a dos valores de

ORDEN	EXPONENTE
1	0.37
2	0.62
3	0.80
4	0.94
5	1.04
6	1.12

Tabla 7.3 Exponentes de las funciones de estructura de temperatura en la región inercial. Su evaluación se hizo en el experimento a $Re=36,000$

número de Reynolds. Un aumento en Re produce un corrimiento hacia abajo en las funciones de estructura, es decir, las fluctuaciones de T se hacen menos intensas. Por otra parte, una región inercial extensa se aprecia claramente sólo con el valor más alto de Re . Los valores de los exponentes $\xi(n)$, calculados en el experimento a $Re=36,000$, se muestran en la tabla 7.3. Estos datos concuerdan con otros reportados en la literatura por Antonia et. al. [38, 60]

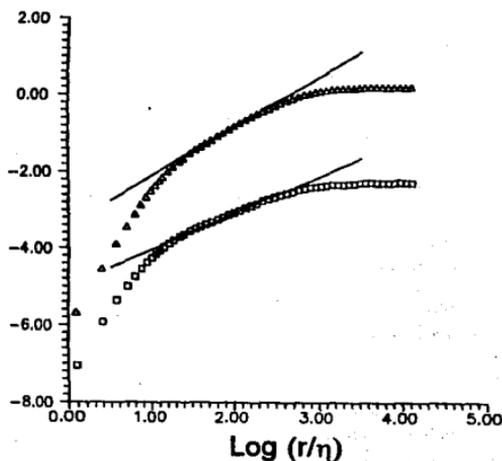


Figura 7.3.- Gráfica de: (Δ) $\langle \delta v(r)^4 \rangle$ y (□) $\langle \delta T(r)^4 \rangle$ vs r/η . Escala log-log. $Re=36,000$. Las leyes de escala en la región inercial son diferentes. Las pendientes de las rectas son respectivamente 1.28 y 0.94.

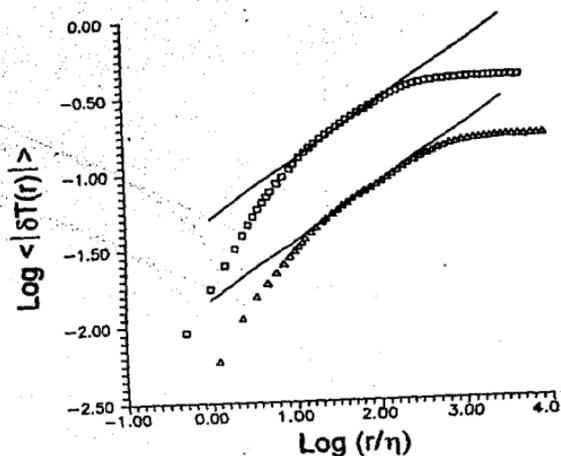


Figura 7.4.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)| \rangle$ vs r/η en escala log-log. Dos valores de número de Reynolds: (\square) $\text{Re}=9,000$ y (Δ) $\text{Re}=36,000$. Las líneas rectas tienen pendiente 0.37.

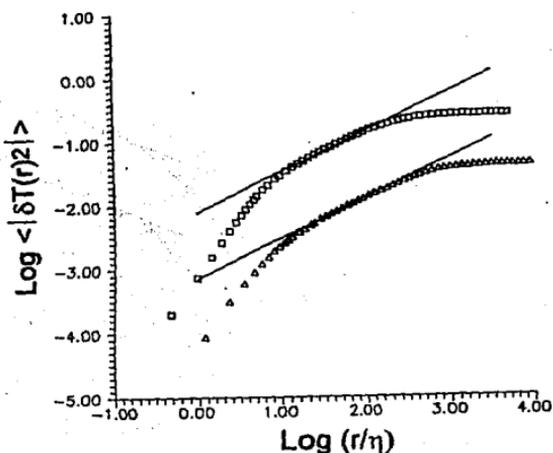


Figura 7.5.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)|^2 \rangle$ vs r/η en escala log-log. Dos valores de número de Reynolds: (\square) $\text{Re}=9,000$ y (Δ) $\text{Re}=36,000$. Las líneas rectas tienen pendiente 0.62.

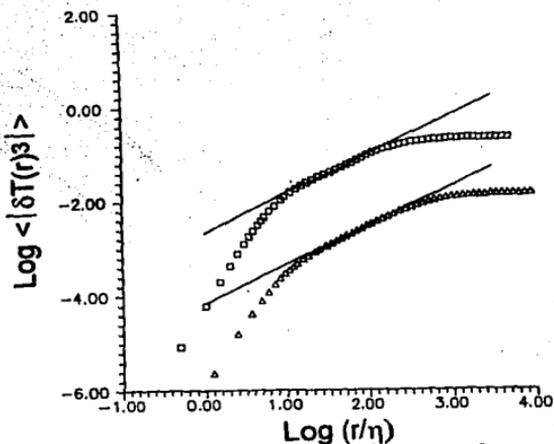


Figura 7.6.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)^3| \rangle$ vs r/η en escala log-log. Dos valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ y (Δ) $Re=36,000$. Las líneas rectas tienen pendiente 0.80.

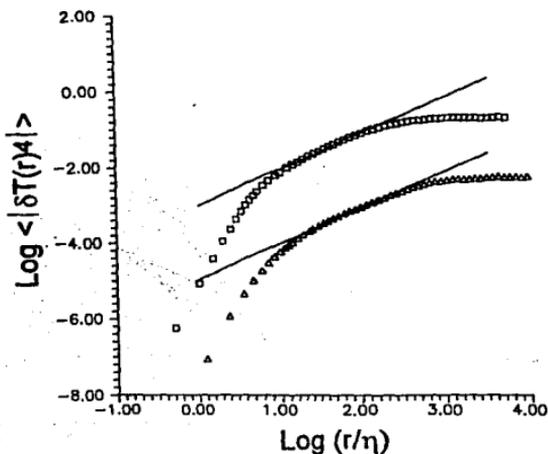


Figura 7.7.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)^4| \rangle$ vs r/η en escala log-log. Dos valores de número de Reynolds: (□) $Re=9,000$ y (Δ) $Re=36,000$. Las líneas rectas tienen pendiente 0.94.

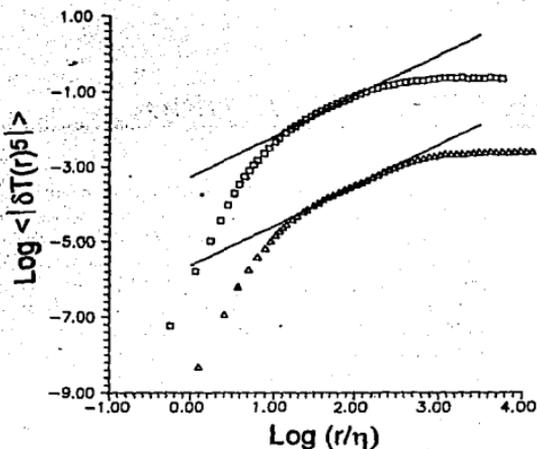


Figura 7.8.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)^2| \rangle$ vs r/η en escala log-log. Dos valores de número de Reynolds: (\square) $\text{Re}=9,000$ y (Δ) $\text{Re}=36,000$. Las líneas rectas tienen pendiente 1.04.

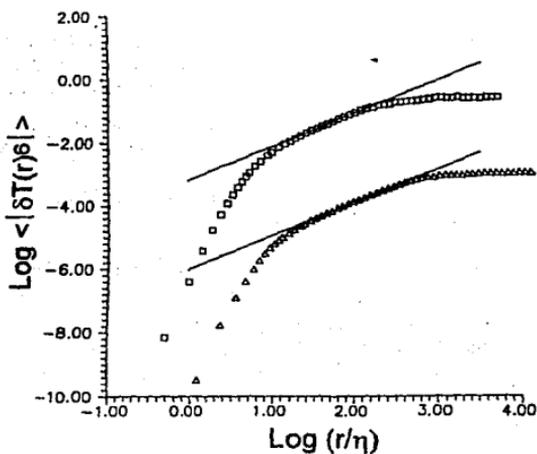


Figura 7.9.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)^2| \rangle$ vs r/η en escala log-log. Dos valores de número de Reynolds: (\square) $\text{Re}=9,000$ y (Δ) $\text{Re}=36,000$. Las líneas rectas tienen pendiente 1.12.

7.3 MODELO β ALEATORIO

El modelo de Obukhov-Corrsin no toma en cuenta la intermitencia en las disipaciones de energía cinética y de las fluctuaciones de temperatura. Benzi *et al.* [40] han desarrollado una variante del modelo β aleatorio, aplicada a la estadística de un escalador pasivo. Para comenzar, se definen un conjunto de escalas $r_0 = L, r_1 = L/2, \dots, r_p = L/2^p$. El proceso de transferencia de energía se daría a través de una cascada, donde un vorticillo de dimensión r_p se fragmenta en N^* vorticillos, con la característica de que el volumen de los N^* vorticillos de la generación $p+1$ es menor al volumen del vorticillo de longitud p . En otras palabras, las estructuras de pequeña escala llenan una fracción cada vez menor del espacio. Sea β_p la fracción de espacio ocupado por los vorticillos en el paso p , en comparación con la que ocupaban los vorticillos de la generación anterior. Esta cantidad no depende de p en el modelo β de Frisch *et al.* [33], pero en el modelo de Benzi es una variable aleatoria.

Se parte de la relación fenomenológica:

$$N \sim \frac{\delta V \delta T^2}{r} \quad (7.9)$$

es decir, se está igualando la disipación de las fluctuaciones de temperatura con la transferencia de estas últimas de las grandes a las pequeñas escalas. Se propone una relación entre la generación p y la $p+1$. Se trata de:

$$\frac{\Delta T_p^2 \Delta V_p}{r_p} = \beta_{p+1} \frac{\Delta T_{p+1}^2 \Delta V_{p+1}}{r_{p+1}} \quad (7.10)$$

A partir de (7.10) se deduce que $\langle |\delta T(r)|^n \rangle$ tiene el siguiente comportamiento en la región inercial.

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle \sim \bar{N}^{n/2} \langle \delta V^{-1} \prod \beta_i^{1-n/2} \rangle > r^{n/2} \quad (7.11)$$

En general, la corrección de intermitencia depende de la estadística conjunta de δV con los β_i , excepto cuando $n=2$. En este último supuesto, todos los términos $\beta_i^{1-n/2}$ valen uno. A raíz de esto, la única corrección sobre $\langle |\delta T(r)|^2 \rangle$ es la que introduce la función de estructura de velocidad de orden -1.

$$\langle |\delta T(r)|^2 \rangle \sim \bar{N} \langle \delta V^{-1} \rangle \quad (7.12)$$

La verificación de esta ecuación requiere el cálculo del promedio de una diferencia de velocidades elevada a una potencia negativa. Si se tiene en cuenta

que las medidas se digitalizan y por lo tanto que se cometen errores durante el proceso de discretización del campo de velocidad, la posibilidad de que δV se anule no es cero. De hecho, el número de anulaciones crece con la disminución de r . Esto no significa en realidad que $\delta V = 0$ tenga una probabilidad distinta de cero, sino más bien que este puede ser un efecto de la digitalización de los datos. Afortunadamente las divergencias en el cálculo de $\langle \delta V^{-1} \rangle$ prácticamente desaparecen cuando r está en la región inercial.

Una manera alternativa y que no introduce divergencias es la utilización de la relación:

$$\langle \delta V^{-1} \rangle = A_{-1} \langle \epsilon_r^{-1/3} \rangle \langle \delta V^3 \rangle^{-1/3}, \quad (7.13)$$

que es una consecuencia inmediata de la generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov. Aquí también se tiene el promedio de una cantidad elevada a una potencia negativa. Sin embargo, a pesar de que ϵ_r se puede anular puntualmente, su integración sobre un volumen de radio r es invariablemente positiva.

Con el objeto de verificar el modelo de Benzi, se ha calculado $\langle \delta V^{-1} \rangle$ usando varios valores de Re . Los resultados se muestran en la figura 7.10. Una ley de potencias bien definida se obtiene únicamente a $Re=36,000$, siendo el exponente $\zeta(-1) = -0.38$.

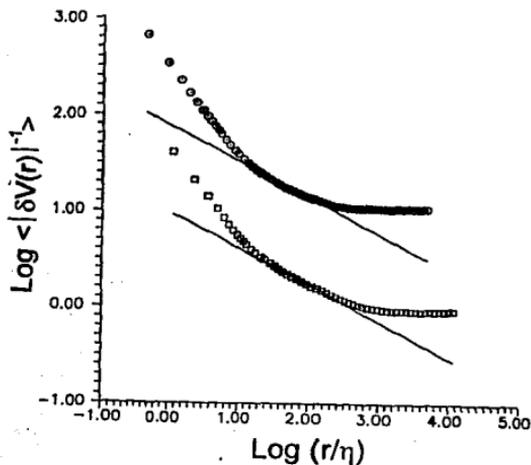


Figura 7.10.- Gráfica de $\langle |\delta V(r)|^{-1} \rangle$ vs r/η para dos valores de número de Reynolds: (O) $Re=9,000$ y (□) $Re=36,000$. El exponente de esta función de estructura es -0.38.

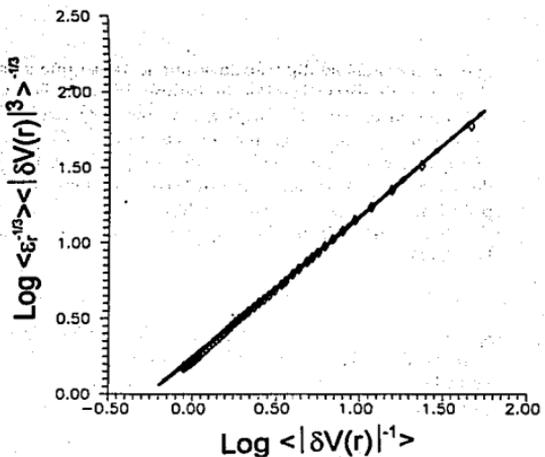


Figura 7.11.- Gráfica de $\langle r^{-1/3} \rangle \langle |\delta V(r)|^3 \rangle^{-1/3}$ vs. $\langle |\delta V(r)|^{-1} \rangle$ en escala log-log. La línea recta tiene pendiente 1. Esto significa que hay una proporcionalidad entre las dos cantidades.

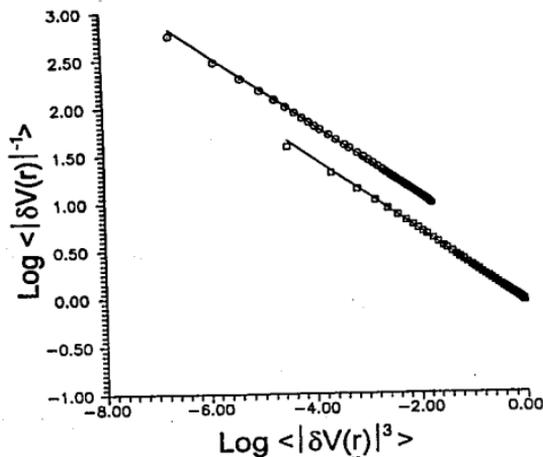


Figura 7.12.- Gráfica de $\langle |\delta V(r)|^{-1} \rangle$ vs. $\langle |\delta V(r)|^3 \rangle$. $Re=38,000$. Las líneas rectas tienen pendiente -0.38.

También se ha calculado la función de estructura de orden -1 por medio de la ecuación (7.13), y luego se le ha graficado en función de la medida directa de $\langle \delta V^{-1} \rangle$. La curva resultante, que se muestra en la figura 7.11, es una línea recta con una pendiente de 0.995 ± 0.01 , lo que implica una proporcionalidad entre ambas cantidades. El exponente de $\langle \delta V^{-1} \rangle$ se puede calcular en flujos con valores pequeños de Re si se usa el concepto de Auto semejanza Extendida, de hecho en la figura 7.12 se presenta la gráfica de esta función de estructura en términos de $\langle |\delta V(r)^3| \rangle$. El valor del exponente, usando cualquiera de los tres métodos es siempre el mismo: $\zeta(-1) = -0.38 \pm 0.005$, que difiere del valor $-1/3$ predicho por la teoría K41. El segundo ingrediente es el cálculo de la función de estructura de temperatura de orden dos. Sólo para $Re=36,000$ y $Re=45,000$ se observa un escalamiento extenso, siendo el exponente $\zeta(2) = 0.62 \pm 0.01$. Pero esto es igual, dentro del error experimental, a $1 + \zeta(-1)$. Se concluye entonces que el modelo reproduce bien las observaciones experimentales, y por tanto, que la intermitencia de N no introduce correcciones en este caso particular. Por lo demás, se debe destacar que la corrección de intermitencia tiene el signo opuesto que en el caso correspondiente a la estadística de velocidad, en donde $\zeta(2) = 0.70$.

7.4 ESCALAMIENTO DE OTRAS FUNCIONES DE ESTRUCTURA

El escalamiento anómalo es el resultado conjunto de la intermitencia de velocidad y temperatura. No basta una corrección de ϵ_r , como se aprecia en la figura 7.13, donde se ha dibujado $\langle |\delta V|^n \rangle / (\langle \epsilon_r^{-n/6} \rangle r^{n/3})$ vs r/η para $n=2, 4$ y 6 . Salvo $n=2$ (como se explicó en el apartado anterior) en ningún otro caso se recupera una región plana.

La ecuación 7.9 se puede generalizar proponiendo que:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle \sim \langle N_r^{n/2} \rangle \langle \epsilon_r^{-n/6} \rangle r^{n/3}, \quad (7.14)$$

en donde aparecen correcciones de debidas a la intermitencia de ϵ y N . Una posibilidad adicional, mencionada en la literatura [38, 40] es:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle \sim \langle N_r^{n/2} \epsilon_r^{-n/6} \rangle r^{n/3}, \quad (7.15)$$

que del lado derecho posee un sólo promedio. Y una tercera opción desde un punto de vista dimensional es:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle \sim \langle N_r^{n/2} \rangle \langle \epsilon_r^{n/6} \rangle^{-1} r^{n/3}. \quad (7.16)$$

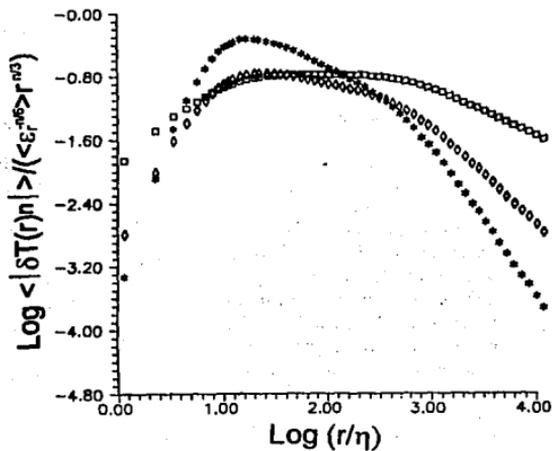


Figura 7.13.- Gráfica de $\langle \delta T(r)^n \rangle / (\langle \epsilon_r^{-n/5} \rangle r^{n/3})$ vs. r/η . $Re=38,000$. (\square) $n=2$, (Δ) $n=4$, (\bullet) $n=8$. La sola corrección de intermitencia en velocidad no es suficiente para explicar el escalamiento de las funciones de estructura de temperatura.

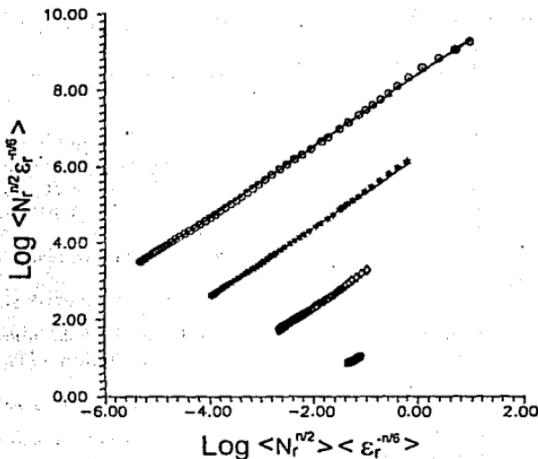


Figura 7.14.- Gráfica de $\langle N_r^{n/2} \epsilon_r^{-n/5} \rangle$ vs. $\langle N_r^{n/2} \rangle \langle \epsilon_r^{-n/5} \rangle$, $Re=38,000$. (\square) $n=2$, (\circ) $n=4$, (\bullet) $n=8$ y (\circ) $n=8$. Las rectas tienen pendientes muy cercanas a 0.9.

Físicamente esta última relación implica que la función de estructura de orden 6 no tiene corrección de intermitencia debida a la estadística de velocidad. Y como se verá más adelante esto no concuerda con los resultados experimentales.

Las ecuaciones (7.14) y (7.15) podrían ser equivalentes si el promedio del producto de N_r y ϵ_r es igual al producto de los promedios. En la figura 7.14 se presentan las curvas de $\langle N_r^{n/2} \epsilon_r^{-n/6} \rangle$ vs $\langle N_r^{n/2} \rangle \langle \epsilon_r^{-n/6} \rangle$ con $n=2, 4, 6$ y 8 en el experimento a $Re=36,000$. Los datos se distribuyen alrededor de líneas rectas con pendientes próximas a 0.9. Por lo tanto se establece que $\langle N_r^{n/2} \epsilon_r^{-n/6} \rangle \sim (\langle N_r^{n/2} \rangle \langle \epsilon_r^{-n/6} \rangle)^{0.9}$ sobre un intervalo que va del rango disipativo al inercial. Esto implica escalamientos próximos entre ambas cantidades. En el límite de la estadística de orden pequeño no se puede decidir cuál de las dos opciones reproduce mejor los resultados experimentales. Por ejemplo, si $n=2$, las correcciones introducidas por $\langle N_r^{n/2} \epsilon_r^{-n/6} \rangle$ y $\langle N_r^{n/2} \rangle \langle \epsilon_r^{-n/6} \rangle$ son prácticamente indistinguibles pues difieren en una cantidad menor al error experimental. Se debe recurrir entonces a funciones de estructura de orden más alto. Para $n=6$ las diferencias entre un modelo y otro son de alrededor del 6% del valor del exponente, algo que ya podría quedar fuera del error experimental. En las figuras 7.15, 7.16 y 7.17 se grafican las cantidades $\langle |\delta T(r)|^n \rangle / \langle N_r^{n/2} \rangle \langle \epsilon_r^{-n/6} \rangle r^{n/3}$, $\langle |\delta T(r)|^n \rangle / \langle N_r^{n/2} \epsilon_r^{-n/6} \rangle r^{n/3}$ y $\langle |\delta T(r)|^n \rangle / \langle N_r^{n/2} \rangle \langle \epsilon_r^{-n/6} \rangle^{-1} r^{n/3}$ como función de r/η , con $n=2, 4, 6$ respectivamente y $Re=36,000$.

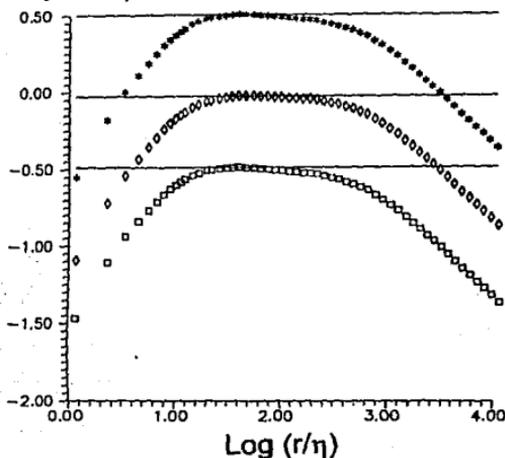


Figura 7.15.- Gráficas de: (*) $\langle \delta T(r)^2 \rangle / \langle N_r \epsilon_r^{-1/3} \rangle r^{2/3}$,
 (O) $\langle \delta T(r)^2 \rangle / \langle N_r \rangle \langle \epsilon_r^{-1/3} \rangle r^{2/3}$ y (□) $\langle \delta T(r)^2 \rangle / \langle N_r \rangle \langle \epsilon_r^{-1/3} \rangle^{-1} r^{2/3}$ vs. r/η .
 $Re=36,000$.

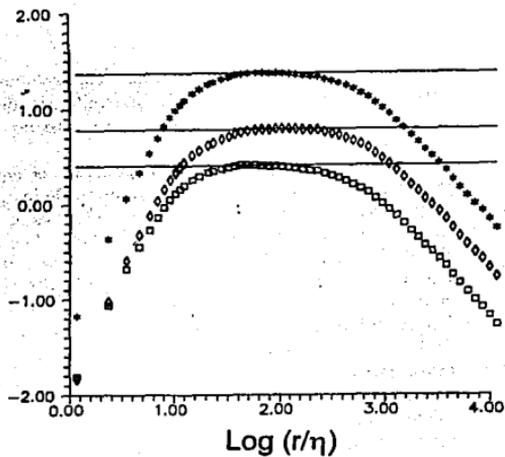


Figura 7.16.- Gráficas de: (•) $\langle \delta T(r)^4 \rangle / \langle N_r^{4/2} \epsilon_r^{-2/3} r^{4/3} \rangle$,
 (○) $\langle \delta T(r)^4 \rangle / \langle N_r^{4/2} \epsilon_r^{-2/3} r^{4/3} \rangle$ y (□) $\langle \delta T(r)^4 \rangle / \langle N_r^{4/2} \epsilon_r^{-2/3} r^{4/3} \rangle$ vs. r/η .
 $Re=36,000$.

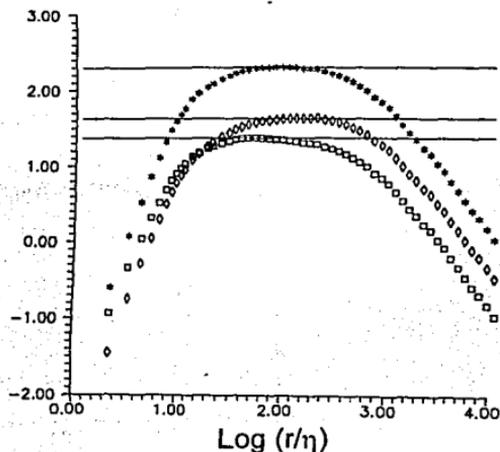


Figura 7.17.- Gráficas de: (•) $\langle \delta T(r)^6 \rangle / \langle N_r^{6/2} \epsilon_r^{-3/3} r^{6/3} \rangle$,
 (○) $\langle \delta T(r)^6 \rangle / \langle N_r^{6/2} \epsilon_r^{-3/3} r^{6/3} \rangle$ y (□) $\langle \delta T(r)^6 \rangle / \langle N_r^{6/2} \epsilon_r^{-3/3} r^{6/3} \rangle$ vs. r/η .
 $Re=36,000$.

En los dos primeros casos se tienen regiones planas, pero ocurren en intervalos diferentes. Para $n=6$, la opción que parece funcionar mejor es la ecuación (7.15). Sin embargo, en este nivel no se puede establecer con certeza cuál es la ecuación adecuada. Lo que si se puede concluir en este punto es que los exponentes $\xi(n)$ tienen una corrección que debe incluir necesariamente tanto a la intermitencia de N como la de ϵ . En relación a la tercera opción, como se puede apreciar, no se detecta bien una región plana, lo que indica que no reproduce lo que ocurre en el experimento.

7.5 AUTOSEMEJANZA EXTENDIDA

Los escalamiento de ley de potencias entre la longitud disipativa y la escala integral, vale decir, la existencia de una región inercial se observa claramente sólo para números de Reynolds grandes. Esto se debe a que conforme aumenta Re , el valor de la escala disipativa se hace más pequeño; y entonces se ensancha el intervalo donde la disipaciones térmica y viscosa no tienen un papel relevante. Sin embargo, en el capítulo 3 se demostró que los exponentes de las funciones de estructura de velocidad se pueden calcular con datos correspondientes a valores modestos de Re . Lo que indica que las características universales de la turbulencia ya se encuentran presentes incluso cuando el número de Reynolds es pequeño.

En esta sección se abordará el estudio de la aplicabilidad de la Auto semejanza Extendida al comportamiento estadístico de las fluctuaciones de temperatura. En principio se puede pensar en un escalamiento extendido usando como variable independiente a $\langle |\delta V(r)|^3 \rangle$ o $\langle \delta V(r)\delta T(r)^2 \rangle$ en vista de que ya se conocen bien sus exponentes. Sin embargo esto no se puede hacer pues las escalas disipativas, así como las regiones inerciales de velocidad y temperatura no concuerdan. El procedimiento que se va a adoptar aquí es la graficación de una función de estructura en función de otra:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle \text{ vs } \langle |\delta T(r)|^m \rangle \quad (7.17)$$

Considerando que previamente se ha hecho un estudio detallado de la función de estructura de orden 2 y que existe sobre ella un modelo que describe su comportamiento razonablemente bien, en adelante se le usará como función de referencia. Es decir, se tomará $m=2$. El escalamiento en la región inercial extendida sería:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle \sim \langle |\delta T(r)|^2 \rangle^{\beta(n,2)} \quad (7.18)$$

en donde $\beta(n,2) = \xi(n)/0.62$. En las figuras 7.18 a 7.22 se presentan respectivamente los resultados de graficar $\langle |\delta T(r)|^n \rangle$ vs $\langle |\delta T(r)|^2 \rangle$, con $n=1, 3, 4,$

ORDEN	PENDIENTE	EXPONENTE
1	0.598	0.371
2	1.000	0.620
3	1.295	0.803
4	1.516	0.940
5	1.687	1.046
6	1.810	1.12

Tabla 7.4 Exponentes de las funciones de estructura usando Autosemejanza Extendida. La pendiente es igual al cociente de los exponentes de las funciones de estructura de ordenes n y 2

5 y 6. Una clara ley de potencias se observa incluso con el número de Reynolds más pequeño. Los valores de las pendientes y de los exponentes aparecen en la tabla 7.4. Si se comparan estos resultados con los de la tabla de la sección 7.3, se concluye que la medición directa y la estimación hecha mediante Autosemejanza Extendida son concordantes. La pendiente 1 para $n=2$ es un resultado trivial como se deduce inmediatamente de la ecuación (7.18). Por otra parte, el valor del exponente $\xi(2)$ es el único que no se ha calculado usando Autosemejanza Extendida, sino que se ha echado mano de lo que se reportó en la sección anterior

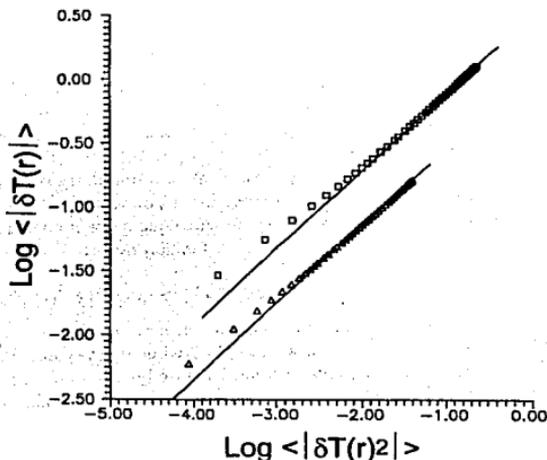


Figura 7.18.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)| \rangle$ vs. $\langle |\delta T(r)|^2 \rangle$. (□) $Re=9,000$ (Δ) $Re=38,000$. la pendiente de las rectas es 0.598.

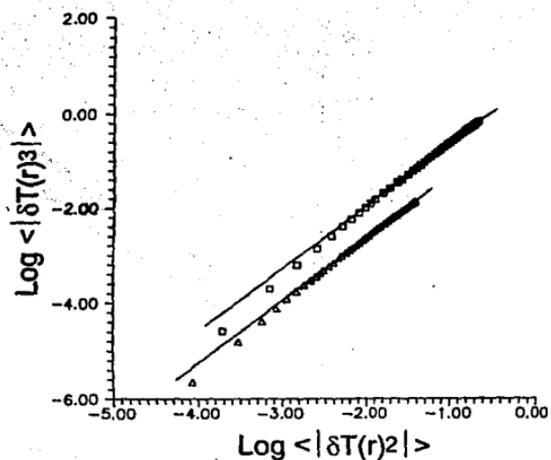


Figura 7.19.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)^3| \rangle$ vs. $\langle |\delta T(r)^2| \rangle$. (\square) $Re=9,000$ (\triangle) $Re=36,000$, la pendiente de las rectas es 1.295.

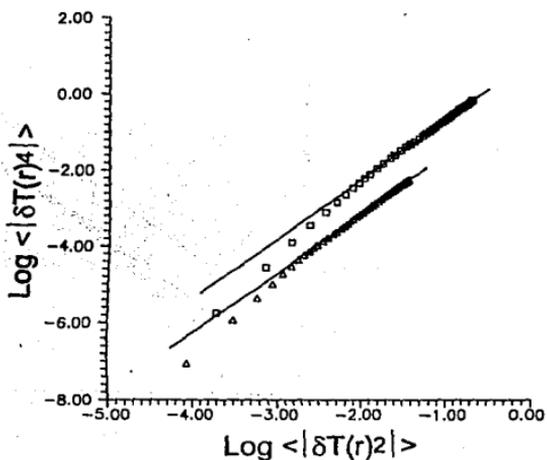


Figura 7.20.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)^4| \rangle$ vs. $\langle |\delta T(r)^2| \rangle$. (\square) $Re=9,000$ (\triangle) $Re=36,000$, la pendiente de las rectas es 1.516.

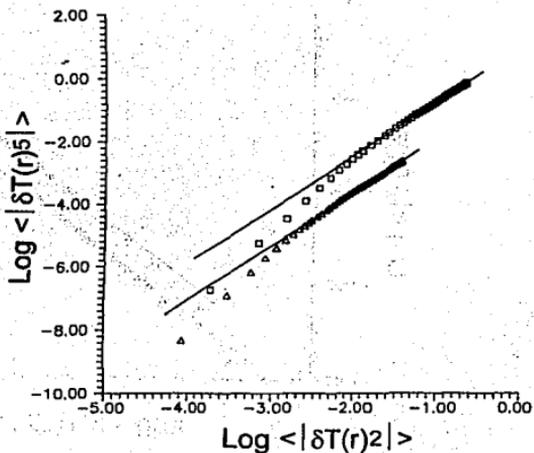


Figura 7.21.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)|^5 \rangle$ vs. $\langle |\delta T(r)|^2 \rangle$. (\square) $Re=9,000$ (Δ) $Re=36,000$.
la pendiente de las rectas es 1.687.

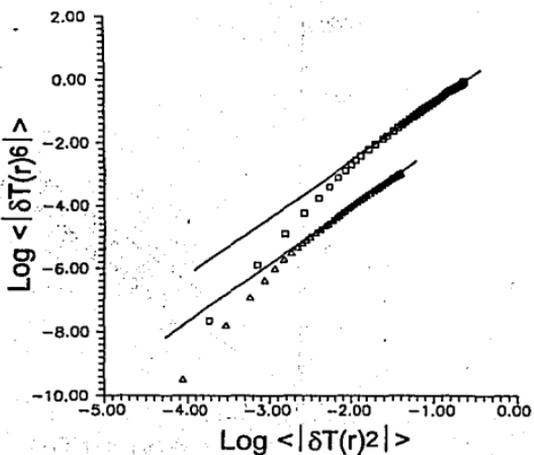


Figura 7.22.- Gráfica de $\langle |\delta T(r)|^6 \rangle$ vs. $\langle |\delta T(r)|^2 \rangle$. (\square) $Re=9,000$ (Δ) $Re=36,000$.
la pendiente de las rectas es 1.810.

A manera de comparación, en la gráfica 7.23 se presentan los exponentes $\zeta(n)$ y $\xi(n)$, así como la estimación de la teoría de Kolmogorov de 1941. En general, si $n \geq 2$ se cumple que $\xi(n) < \zeta(n)$. Además, la diferencia entre $\xi(6)$ y $n/3$ es de aproximadamente un 45%, lo que indica que la estadística de temperatura tiene una fuerte corrección de intermitencia.

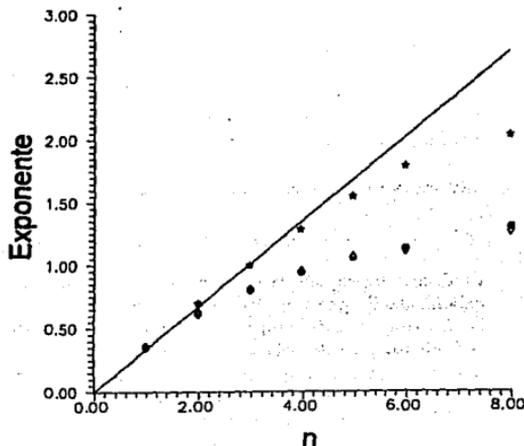


Figura 7.23.- Exponentes de funciones de estructura: (O) temperatura, $Re=9,000$, (Δ) temperatura, $Re=36,000$, (∇) velocidad. La línea continua es la predicción de la teoría de Kolmogorov de 1941.

La posibilidad de calcular los exponentes $\xi(n)$ usando datos a Re pequeño es ya una prueba de la validez de la Auto semejanza Extendida. Pero a diferencia de la velocidad, en el caso de la temperatura el inicio del rango inercial extendido se ubicaría no en 5η , sino en 7η .

7.6 FUNCION UNIVERSAL

El cociente $\langle |\delta T(r)|^2 \rangle / r^{0.62}$ toma un valor constante en la región inercial. Hágase el cambio de variable $z_1 = r/\eta_T$ y defínase una función g de la siguiente manera:

$$g(z_1) = B \frac{\langle |\delta T(z_1)|^2 \rangle^{1/2}}{z_1}, \quad (7.19)$$

Número de Reynolds	Longitud de inicio
9,000	7η
35,000	12η

Tabla 7.5 Longitudes de inicio de la región inercial. Nótese que en el caso de temperatura la Auto semejanza Extendida comienza a valores mayores de r si se compara con los resultados de la estadística de velocidad

donde la constante B es tal que en la región inercial se cumple que $g(z_1) = 1$. Por otro lado, tomando en cuenta que $\langle |\delta T(r)|^2 \rangle \sim r^2$ en la región disipativa, resulta que en dicho intervalo la función g sigue la siguiente ley de potencias $g(z_1) \sim z_1^{2.22}$. La definición de g es semejante a la de f para las funciones de estructura de velocidad.

En la región de validez de la Auto semejanza Extendida una función de estructura se puede expresar de la siguiente manera:

$$\langle |\delta T(r)|^n \rangle = A_n \Delta T^n \left[\frac{z_1}{L} g(z_1) \right]^{(n)} \quad (7.20)$$

Es decir, se propone la existencia de una función universal que define el escalamiento de una función de estructura arbitraria. ΔT es un valor típico de las fluctuaciones de temperatura sobre la escala integral. Si se invierte el procedimiento y se despeja la función g , se obtendrá un conjunto de funciones, que serán iguales en el rango extendido, pero que comenzarán a ser diferentes en la vecindad de la escala disipativa.

El establecimiento de los límites de la región inercial extendida se puede hacer con exactitud mediante las funciones g_n . Sin importar el valor de n , las diferentes estimaciones de g deben de colapsar en una sola curva. Se define el límite inferior del rango extendido a aquel donde los cocientes g_n/g_2 difieren de 1 en un 2%. En las figuras 7.24 y 7.25 se muestran dichos cocientes para $n=4$ y $n=6$; y $Re=9,000$ y $36,000$. Los valores de la longitud de inicio de la región inercial extendida se presenta en la tabla 7.5. El valor 7η ocurre con los dos números de Reynolds más pequeños. El valor 10η se alcanza con las restantes medidas. Esta diferencia podría ser debida ya sea a una influencia del tamaño de la sonda o a su respuesta en frecuencia.

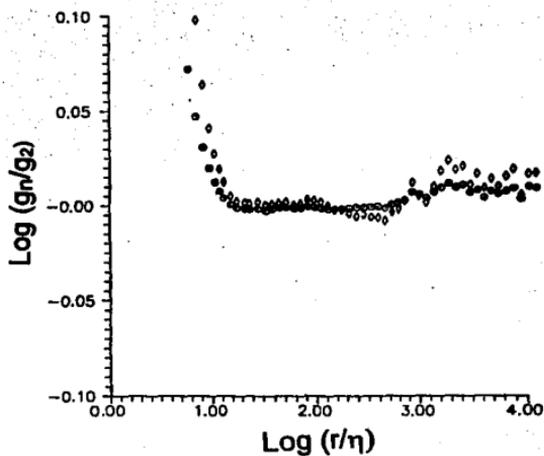


Figura 7.25.- Gráfica de g_n/g_2 vs r/η en escala log-log. $Re=38,000$. (O) $n=4$ y (◊) $n=6$.

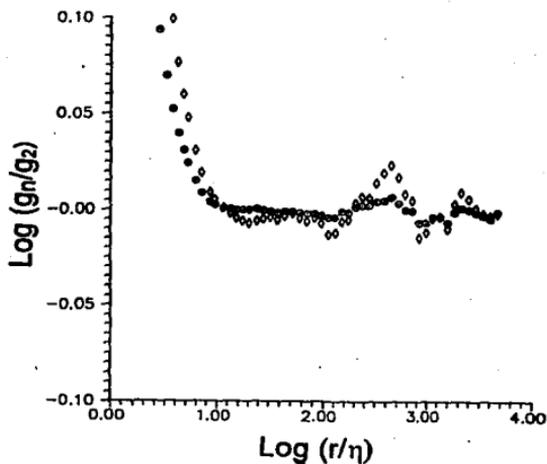


Figura 7.24.- Gráfica de g_n/g_2 vs r/η en escala log-log. $Re=9,000$. (O) $n=4$ y (◊) $n=6$.

8. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se han presentado varios resultados recientes sobre el comportamiento estadístico de los campos de velocidad y temperatura en turbulencia homogénea e isotrópica. La idea principal que ha servido de guía es la búsqueda de escalamientos sobre regiones más extensas que el intervalo inercial normal. Se ha demostrado mediante diversas medidas en túnel de viento que el comportamiento de ley de potencias de las funciones de estructura puede extenderse hasta longitudes cercanas a la escala disipativa, a condición de introducir un cambio de variable. En lugar de usar como variable de longitud a la distancia r , lo que se hace es utilizar en su lugar a la función de estructura de orden 3. De esta manera se logra observar un comportamiento de autosemejanza hasta longitudes próximas a la escala de Kolmogorov. Por otra parte, el escalamiento extendido aparece incluso cuando los números de Reynolds son pequeños, o sea, aún cuando no se detecta la existencia de una región inercial. Esta propiedad de los flujos turbulentos es lo que se ha denominado Autosemejanza Extendida. El hecho de que $\langle |\delta V(r)|^3 \rangle \sim r$ significa que los resultados obtenidos mediante Autosemejanza Extendida se reducen a los ya conocidos cuando se está en la región inercial. Una de las contribuciones que se ha hecho es que ahora los exponentes de las funciones de estructura se pueden calcular con mucha más exactitud pues el comportamiento de ley de potencias ocurre sobre un intervalo más grande.

El concepto de Autosemejanza Extendida ha permitido introducir la idea de una función universal $f(r/\eta)$ que determina muchas de las características de la estadística de los flujos turbulentos. Dicha función universal se define, salvo por algunas constantes, como el cociente $\langle |\delta V(r)|^3 \rangle / r$. A partir de ella se puede expresar una función de estructura arbitraria a partir de $r \sim 5\eta$. Por otra parte, mediante ella se ha hecho una generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov, cuyo intervalo de validez va de la región disipativa al intervalo inercial. En el modelo de Kolmogorov de 1962 se introduce una corrección debida a la intermitencia en la disipación de energía. Nuestra generalización mantiene esa corrección de intermitencia, pero introduce un factor de escala sobre la distancia r (el factor es precisamente $f(r/\eta)$). Tanto los efectos de viscosidad como el comportamiento en la región inercial están bien descritos por esta nueva hipótesis.

Otro de los puntos que se abordó en esta tesis fue la verificación experimen-

tal de un modelo de turbulencia que se basa en una jerarquía de los momentos de disipación de energía. De acuerdo al modelo, además del desorden que subyace, existen estructuras con diferentes grados de coherencia que van desde vórtices aleatorios hasta estructuras filamentosas fuertemente intermitentes, pasando por hojas de vorticidad y otros objetos de dimensión fractal. En esta teoría se propone una relación entre los momentos de disipación de energía que toma en cuenta la tendencia hacia la formación de vórtices filamentosos y la existencia de diversos grados de desorden. La intermitencia se introduce por medio de un parámetro β . Por ejemplo, si β vale 1, entonces se recuperan los resultados del modelo K41. Experimentalmente se ha encontrado que $\beta = 0.68 \pm 0.03$, lo que concuerda, dentro de los errores experimentales, con la predicción teórica (2/3). Por otra parte, la predicción del modelo acerca de los exponentes de las funciones de estructura concuerda (con un error máximo del 1%) con los datos del experimento.

La relación entre momentos de disipación de energía se transformó en una ecuación para funciones de estructura por medio de la generalización de la hipótesis modificada de Kolmogorov. La ventaja que se tiene es que el cálculo de funciones de estructura impone menos errores que la evaluación de la tasa local de disipación de energía. En el primer caso se debe calcular una diferencia de velocidades, mientras que en el segundo la señal de velocidad se debe derivar y luego promediar sobre un intervalo de longitud r . La ecuación que se dedujo resultó valer no sólo en el intervalo inercial, sino también para la región disipativa. Pero además ella se satisface incluso cuando el número de Reynolds es pequeño.

Finalmente se hizo un estudio del comportamiento de un escalador pasivo en turbulencia desarrollada. Por principio de cuentas se demostró que existen dos escalas disipativas, una para velocidad y la otra para temperatura. De hecho la escala disipativa de temperatura fue algo menor que la de velocidad. Esto contribuye a que las regiones inerciales no sean las mismas en uno y otro caso. Otro de los puntos que se trató fue el escalamiento de las funciones de estructura de temperatura en la región inercial. En particular se investigó una variante del modelo β aleatorio, según la cual la función de estructura de orden dos solo tiene una corrección debida a la intermitencia en la disipación de energía cinética. Los datos del experimento indican que efectivamente esto es así, pero que en las restantes funciones de estructura deben incluirse los efectos de intermitencia de la disipación de energía y de las fluctuaciones de temperatura. Un detalle importante a este respecto es que la corrección inducida por N es considerablemente más importante que la de ϵ , cuando el orden n es grande. Finalmente, se investigó si la Auto semejanza Extendida también se aplica a un escalador pasivo. La respuesta es que sí, pero su validez es sobre un intervalo más estrecho que comienza a partir de 7η . De manera similar a la estadística de velocidad, aquí se introdujo una función universal g , a partir de la cual se puede expresar una función de estructura de orden arbitrario.

En esta tesis se han abordado sólo unos pocos aspectos de la investigación en turbulencia y se han obtenido algunos resultados que permiten plantear prob-

lemas como: ¿hasta que punto las características universales de la turbulencia están presentes en flujos con número de Reynolds moderados y pequeños? o ¿Cuál es el fundamento físico de la Auto semejanza Extendida? Se trata de problemas abiertos cuya respuesta aún no está dada.

9. BIBLIOGRAFIA

- 1.- Benzi, R., S. Ciliberto, C. Baudet, G. Ruiz Chavarría y R. Tripicciono, Extended self-similarity in the dissipation range of fully developed turbulence. *Europhys. Lett.*, **4** (1993) 275-279.
- 2.- Ruiz Chavarría, G., Anomalous scaling of velocity structure functions in turbulence: a new approach. *J. Phys. II, France*, **4** (1994), 1083-1088.
- 3.- Benzi, R., S. Ciliberto, C. Baudet y G. Ruiz Chavarría, On the scaling of three dimensional homogeneous and isotropic turbulence. *Physica D*, **80** (1995), 385-398.
- 4.- Ruiz Chavarría, G., C. Baudet y S. Ciliberto, Hierarchy of the energy dissipation moments in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995), 1986-1989.
- 5.- Ruiz Chavarría, G., C. Baudet, R. Benzi y S. Ciliberto, Hierarchy of the velocity structure functions in fully developed turbulence. *J. Phys. II, France*, **5** (1995), 485-490.
- 6.- Currie, I.G., *Fundamental Mechanics of Fluids*. McGraw Hill. New York, 1974.
- 7.- Landau L.D. y E.M. Lifshitz, *Mécanique des Fluides*. Ed. Mir. Moscú, 1962.
- 8.- Reichl L.E., *A modern course in statistical physics*. University of Texas Press. Austin, 1980.
- 9.- Ripa P., ¿Oceanología física o física del océano? *Ciencias*, No. 13 (1988), 20-24.
- 10.- Monin L.D. y A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, vol. I y II. MIT Press, 1971.
- 11.- Ruelle D., *Hasard et chaos*. Ed. Odile Jacob. París, 1991.
- 12.- Richardson L. F., *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press. Londres, 1922.
- 13.- Taylor, G.I., *Statistical theory of turbulence*, parts I-IV. *Proceedings of the Royal Society*, **A151** (1935), 421-479.
- 14.- Borgas, M. S., A comparison of intermittency models in turbulence. *Phys. Fluids A*, **4** (1992), 2055-2061.
- 15.- Meneveu, C. y K.R. Sreenivasan, The multifractal nature of turbulent energy dissipation. *J Fluid Mech.*, **224** (1991), 429-483.
- 16.- Dubrulle, B., Intermittency in fully developed turbulence. Log-Poisson statistics and generalized scale covariance. *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994), 959-962.

17.- Nelkin, M., Universality and scaling in fully developed turbulence. *Advances in Physics*, **45** (1994), 143-181.

18.- Bohr, T., G. Grinstein, C. Jayaprakash, M.H. Hensen, J. Krug y D. Mukamel, Turbulence, power laws and galilean invariance. *Physica D*, **72** (1992), 177-184.

19.- White F. M., *Mecánica de los fluidos*. McGraw Hill. México, 1979.

20.- Kolmogorov, A.N., The local structures of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Doklady Akad. Nauk. SSSR*, **30** (1941), 301-305.

21.- Nelkin, M., What do we know about self-similarity in fluid turbulence? *J. Stat. Phys.*, **54** (1990), 1-15.

22.- Chen, S., G.D. Doolen, R.H. Kraichnan y Z.S. She, On the statistical correlations between velocity increments and locally averaged dissipation in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids A*, **5** (1993), 458-463.

23.- Gagne Y., M. Marchand y B. Castaing, Conditional velocity pdf in 3-D turbulence. *J. Phys. II France*, **4** (1994), 1-8.

24.- Anselmet F., Y. Gagne y E.J. Hopfinger, High-order velocity structure functions in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, **4** (1984), 63-89.

25.- Kraichnan, R.H., On Kolmogorov's inertial-range theories. *J. Fluid Mech.*, **62** (1974), 305-330.

26.- Oboukhov, A.M., Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid Mech.*, **13** (1962), 77-81.

27.- Kolmogorov, A.N., A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid. Mech.*, **13** (1962), 82-85.

28.- Thorodsen S.T. y C.W. Van Atta, Experimental evidence supporting Kolmogorov's refined similarity hypothesis. *Phys. Fluids A*, **4** (1992), 2592-2595.

29.- Praskovskiy, A.A., Experimental verification of the Kolmogorov refined similarity hypothesis. *Phys. Fluids A*, **4** (1992), 2589-2592.

30.- Hoel P.G., *Estadística elemental*. CECSA. México, 1982.

31.- She Z-S, E. Jackson y S.A. Orszag, Intermittent vortex structure in homogeneous isotropic turbulence. *Nature*, **334** (1990), 226-228.

32.- Vincent, A. y M. Meneguzzi, The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid. Mech.*, **225** (1991), 1-20.

33.- Frisch, U., P.L. Sulem y M. Nelkin, A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.*, **87** (1978), 719-736.

34.- Benzi, R., G. Paladin, G. Parisi y A. Vulpiani, On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *J. Phys.*, **17** (1984), 3521-3525.

35.- Mandelbrot, B.B., Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of higher moments and dimension of the carrier. *J. Fluid. Mech.*, **62** (1974), 331-358.

36.- Meneveau C. y K.R. Sreenivasan, Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987), 1424-1427.

- 37.- Mestayer P., Local isotropy and anisotropy in a high-Reynolds-number turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **125** (1982), 475-503.
- 38.- Antonia, R.A. y C.W. Van Atta, Structure functions of temperature fluctuations in turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, **84** (1978), 561-580.
- 39.- Gibson, C.H., Kolmogorov similarity hypothesis for scalar fields: sampling intermittent turbulent mixing in the ocean and galaxy. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **434** (1991), 149-164.
- 40.- Sreenivasan, K.R., On the local isotropy of passive scalars in turbulent shear flows. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **434** (1991), 165-182.
- 41.- Benzi, R., L. Biferale y G. Parisi, Intermittency correction to the Obukhov-Corrsin theory of a passive scalar. *Europhys. Lett.*, **18** (1992), 213-217.
- 42.- Pumir, A., A numerical study of the mixing of a passive scalar in three dimensions in the presence of a mean gradient. *Phys. Fluids*, **6** (1994), 2118-2132.
- 43.- Schubauer G. B., W.G. Spangenberg y P.S. Klebanoff, Aerodynamic characteristics of damping screens. *NACA Tech Note 2001* (1950),.
- 44.- Prandtl, L., Attaining a steady air stream in wind tunnels. *NACA Tech Note TM726* (1933).
- 45.- Taylor, G.I. y G.K. Batchelor, The effect of wire gauze on small disturbances in a uniform stream. *Quart. J. Mech & Apl. Math.* **11**, 1, 1-29.
- 46.- Dryden, H.L. y G. B. Schubauer, The use of damping screens for the reduction of wind tunnel turbulence. *J. Aero. Sci.*, **14** (1947), 221-228.
- 47.- Tutu, N.K. y R. Chevray, Cross wire anemometry in high intensity turbulence. *J. Fluid Mech.*, **71** (1975), 785-800.
- 48.- Pinton, J.F. y R. Labbé, Correction to the Taylor hypothesis in a von Karman swirling flow. *J. Phys. II, France* **4** (1994), 1461-1468.
- 49.- Rabiner L. R. y B. Gold, **Theory and application of digital signal processing**. Prentice Hall. New Jersey, 1975.
- 50.- Jayesh y Z. Warhaft, Probability distribution, conditional dissipation and transport of passive temperature fluctuations in grid generated turbulence. *Phys. Fluids A*, **4** (1992), 2292-2307.
- 51.- Sreenivasan, K.R., Fractals and multifractals in fluid turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23** (1991), 539-600.
- 52.- Borgas, M.S., Self-similarity and multifractals in turbulence. *Phys. Fluids A*, **5** (1993), 3181-3185.
- 53.- Feller, W., **An introduction to probability theory and its applications**, vol. 2. Ed. Wiley, New York, 1966.
- 54.- L'vov V y I. Procaccia, Extended self similarity in moderate Reynolds numbers flows. Enviado a *Physical Review E*.
- 55.- Meneveau, C. y K.R. Sreenivasan, The multifractal spectrum of the dissipation field in turbulent flows. *Nuclear Physics B (proc. Suppl.)* **2** (1987), 49-76.
- 56.- Kuo A. Y-S y S. Corrsin, Experiments on the geometry of the fine-structure regions in fully turbulent fluid. *J. Fluid Mech.*, **56** (1972), 447-479.

57.- She Z-S y E. L veque, Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 336-339.

58.- She Z-S. y S.A. Orszag, Physical model of intermittency in turbulence: inertial-range non-gaussian statistics. *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), 1701-1704.

59.- Flohr, P. y D. Olivari, Fractal and multifractal characteristics of a scalar dispersed in a turbulent jet. *Physica D*, **76** (1994), 278-290.

60.- Antonia, R.A., E. J. Hopfinger, Y. Gagne y F. Anselmet, Temperature structure functions in turbulent shear flows. *Phys. Rev. A*, **30** (1984), 2704-2707.