



00362

5.4

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

201

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ANALISIS DEL FENOMENO TERMOACUSTICO
DE ONDA SONORA ESTACIONARIA Y DE
ONDA SONORA VIAJERA Y SU COMPARACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A :
ARTURO OROZCO SANTILLAN

Director de Tesis: M. en C. Ricardo Ruiz Boulosa

MEXICO, D. F.

1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A M I M A D R E

A M I R I A M

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a mi Director de Tesis, el M. en C. Ricardo Ruiz Boullosa por el invaluable apoyo que me ha brindado, por sus sugerencias y conocimientos que ha compartido conmigo.

Les agradezco a mis sinodales: Dr. Marco Antonio Martínez Negrete, Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda, Dr. Roberto Ortega Martínez, M. en C. Augusto Cabrera Manuel, Dr. Guillermo Ramírez Santiago y M. en C. Gerardo Ruiz Chavarría, por la revisión que hicieron de mi trabajo y por sus valiosas sugerencias y comentarios que sirvieron para enriquecerlo.

INDICE

| | |
|------------------|---|
| RESUMEN. | 1 |
|------------------|---|

| | |
|-----------------------|---|
| INTRODUCCION. | 3 |
|-----------------------|---|

CAPITULO I: Teoría termoacústica.

| | |
|---|----|
| 1) Introducción. | 8 |
| 2) Variables termoacústicas. | 8 |
| 3) Potencia acústica absorbida o generada. | 16 |
| 4) Flujos de calor. | 17 |
| 5) Potencia acústica disipada por efectos de la viscosidad. | 19 |

CAPITULO II: Fenómeno termoacústico de onda estacionaria con la aproximación de "placa corta".

| | |
|---|----|
| 1) Introducción. | 20 |
| 2) Análisis. | 20 |
| a) Hipótesis. | 20 |
| b) Consideraciones. | 21 |
| c) Gradientes críticos de temperatura. | 22 |
| d) Dependencia \overline{w}_2 y \overline{q}_{hx2} con la posición x | 24 |
| e) Dependencia \overline{w}_2 y \overline{q}_{hx2} con la distancia de separación de la placa | 27 |
| f) Dependencia \overline{q}_{hy2} , \overline{q}_{cx} , y \overline{q}_{cy} , con la distancia de separación de la placa. | 29 |
| g) Relación entre \overline{w}_2 , p' y \overline{q}_{cy} | 31 |
| 3) Conclusiones. | 31 |

CAPITULO III: Fenómeno termoacústico de onda viajera con la aproximación de "placa corta".

| | |
|---|----|
| 1) Introducción. | 35 |
| 2) Análisis. | 35 |
| a) Hipótesis. | 35 |
| b) Consideraciones. | 36 |
| c) Gradientes críticos de temperatura. | 36 |
| d) Dependencia \bar{w}_2 y \bar{q}_{hx2} con la distancia de separación de la placa. | 39 |
| e) Dependencia de \bar{q}_{hy2} , \bar{q}_{cx1} y \bar{q}_{cy1} con la distancia de separación de la placa. | 41 |
| f) Relación entre w_2 , p' y q_{cy1} . | 42 |
| 3) Conclusiones. | 44 |

CAPITULO IV: Comparación del fenómeno termoacústico de onda estacionaria con el de onda viajera en la aproximación de "placa corta".

| | |
|--|----|
| 1) Introducción. | 46 |
| 2) Ciclos termoacústicos. | 46 |
| a) Refrigerador. | 46 |
| b) Generador. | 49 |
| 3) Comparación entre el ciclo de un refrigerador termoacústico de onda estacionaria con el de onda viajera. | 50 |
| 4) Comparación entre el ciclo de un generador termoacústico de onda estacionaria con el de onda viajera. | 54 |
| 5) Comparación mediante un ejemplo particular, del ciclo de un refrigerador termoacústico, para una onda estacionaria y para una onda viajera. | 56 |
| 6) Comparación mediante un ejemplo particular, del ciclo de un generador termoacústico, para una onda estacionaria y para una onda viajera. | 61 |
| 7) Conclusiones. | 65 |

CAPITULO V: Fenómeno termoacústico para una placa de longitud finita

| | |
|---|-----------|
| 1) Introducción. | 66 |
| 2) Ecuación de onda para p_1 en un gas ideal con un gradiente medio de temperatura constante. | 66 |
| 3) Onda estacionaria. | 69 |
| 4) Onda viajera propagándose hacia la derecha. | 70 |
| 5) Valores utilizados en el análisis. | 72 |
| 6) Energía acústica reflejada en la onda viajera. | 73 |
| 7) Potencia acústica total. | 75 |
| a) Efecto del gradiente medio de temperatura. | 76 |
| b) Efecto de la longitud de la placa. | 76 |
| 8) Conclusiones. | 81 |
| CONCLUSIONES. | 82 |
| APENDICE | 87 |
| REFERENCIAS | 97 |

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es analizar algunas características del fenómeno termoacústico de ondas estacionaria y viajera para el caso de una sola placa y comparar ambos en los ciclos de refrigerador y de generador. Lo anterior se hizo con la finalidad de construir algunas máquinas de este tipo.

En el Capítulo I se presenta la teoría que describe el fenómeno termoacústico producido por una sola placa inmersa en un fluido simple⁽¹⁾ donde existe un campo sonoro de ondas planas. Esta teoría fue propuesta por Rott [1,2] y aplicada por él mismo en el análisis del fenómeno termoacústico en tubos. Esta también ha sido utilizada por Swift et al. [3,4] al estudiar el fenómeno causado por un conjunto de placas planas paralelas entre sí y por otros autores en diferentes tipos de geometrías [5,6]. La teoría es lineal y las amplitudes acústicas lo suficientemente pequeñas para que se pueda considerar que no existe turbulencia.

Posteriormente se analiza el fenómeno termoacústico producido por una placa en un campo sonoro estacionario de ondas planas (Capítulo II). El objetivo principal es comprender el fenómeno, así que se introduce una serie de aproximaciones con el fin de simplificar su estudio. La más importante es considerar que la longitud de la placa es muy pequeña, respecto a la longitud de la onda sonora, que es posible despreciar las perturbaciones que

(1) Un fluido simple se define como aquel fluido que es macroscópicamente homogéneo, y que no es afectado por campos eléctricos, magnéticos o gravitacionales.

podiera causar en las oscilaciones de presión y para que la diferencia de temperatura entre los extremos de la placa sea pequeña en comparación con la temperatura absoluta del fluido. En este capítulo se estudia la dependencia espacial de la energía acústica absorbida o generada y del flujo de calor; además, se muestra explícitamente la relación entre la presión sonora, el flujo de calor por conducción en la dirección perpendicular a la placa y las regiones donde se absorbe o se genera energía acústica; lo anterior no se ha estudiado en la literatura existente. También se analizan las condiciones bajo las cuales el fenómeno termoacústico corresponde al ciclo de un refrigerador o al ciclo de un generador. En el Capítulo III se repite el mismo análisis para una onda viajera plana.

En el Capítulo IV se presenta un estudio del fenómeno termoacústico correspondiente tanto al ciclo de un refrigerador como al ciclo de un generador. Se hace una comparación entre el fenómeno de onda estacionaria con el de onda viajera para dichos ciclos. Se utilizan las mismas consideraciones sobre la longitud de la placa mencionadas anteriormente. De los resultados que se obtienen se concluye que el ciclo de un refrigerador de onda estacionaria resulta más eficiente que el de onda viajera.

En el Capítulo V se hace la comparación entre el fenómeno de onda estacionaria con el de onda viajera causado por una placa que no es muy corta respecto a la longitud de onda, de tal manera que la diferencia de temperatura entre sus extremos ya no es pequeña en comparación con la temperatura absoluta del fluido. Se analiza el ciclo de un generador y se compara la potencia acústica neta generada en cada caso.

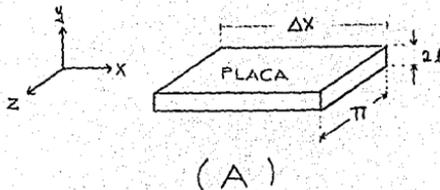
Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

INTRODUCCION

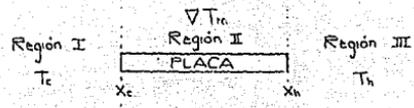
Los cambios de temperatura que acompañan a las oscilaciones de la presión en las ondas sonoras son tan pequeños que usualmente resultan de poco interés (por ejemplo, en una conversación típica entre dos personas son del orden de 10^{-4} °C en aire en condiciones normales de presión y temperatura); sin embargo, su interacción con las fronteras dan como resultado efectos que pueden ser importantes.

Considérese una placa plana y rígida con un largo Δx , un ancho Π y un espesor $2l$ inmersa en un fluido simple, y un sistema de referencias cartesiano como se muestra en la figura 1. En la placa y en el fluido localizado en el espacio perpendicular a las caras de ésta (región II de la figura 1) existe un gradiente de temperatura en la dirección x (llamado en adelante gradiente medio de temperatura ∇T_m) que sólo es función de x . Bajo estas condiciones, por algún mecanismo externo se genera un campo sonoro de ondas planas con las oscilaciones del fluido paralelas a la dirección de ∇T_m .

Si la placa tiene una capacidad calorífica lo suficientemente grande (respecto al fluido) de tal manera que en ella las oscilaciones de temperatura sean pequeñas en comparación con las que se producen en el fluido por la onda sonora, entonces se originan dos efectos importantes: un flujo neto de calor hidrodinámico (convección) paralelo a la frontera sólida y una absorción o generación de energía acústica, ambos en el fluido que tiene un buen contacto térmico con la placa. Este es el fenómeno termoacústico. La dirección del flujo neto de calor hidrodinámico y la absorción o generación de energía acústica dependen del valor del gradiente medio de temperatura.



(A)



(B)

FIGURA 1: (A) Esquema de la placa plana y el sistema de referencias utilizado. (B) Vista del plano xz; la región I tiene una temperatura T_c constante, en la región II existe un gradiente medio de temperatura en la dirección x (∇T_n) y la región III tiene una temperatura T_h también constante.

Puede ocurrir que, utilizando la energía de una onda sonora generada por un medio ajeno al sistema, se realice trabajo para producir el flujo de calor hidrodinámico de la región fría a la caliente. En este caso, el ∇T_n está determinado básicamente por el bombeo de calor hidrodinámico y, el fenómeno termoacústico corresponde al ciclo de un refrigerador.

También se puede generar energía sonora imponiendo el gradiente medio de temperatura en la placa y en el fluido localizado en el espacio perpendicular a las caras de ésta. Si el valor de ese gradiente es mayor que un cierto valor crítico, entonces se produce un flujo de calor hidrodinámico de la parte caliente hacia la fría que se utiliza para generar energía acústica. En este caso se tiene el ciclo de un generador.

La referencia más antigua del fenómeno termoacústico data de 1777 cuando Byron Higgins [3] colocó en el interior de un tubo vertical una flama de hidrógeno, originando ondas sonoras. Sin embargo, fue hasta 1896 cuando Rayleigh [7] dió la primera explicación (cualitativa) de la generación de ondas sonoras por medio de un flujo de calor. Rayleigh estableció que si el fluido recibe calor en la fase de mayor condensación y lo cede en la fase de mayor rarefacción, entonces se genera energía acústica (criterio de Rayleigh). Esta explicación ha sido aceptada como correcta.

La primera investigación cuantitativa del fenómeno termoacústico fue realizada por Rott [1,2], quien desarrolló una teoría que ha sido confirmada experimentalmente en trabajos recientes [3,4,8-13]. El modo inverso de operación mediante el cual la energía de una onda sonora es utilizada para bombear calor fue reportado recientemente y ha cobrado gran interés [3,8,14].

En casi todos los trabajos publicados hasta ahora se ha estudiado básicamente el fenómeno termoacústico producido por ondas estacionarias. Se han construido algunas máquinas (de onda estacionaria) [3,14-17] y se han evaluado algunas de sus características. Hoy se contemplan aplicaciones de estos dispositivos, por ejemplo, refrigeradores, licuefactores criogénicos, sistemas de aire acondicionado, generadores de energía eléctrica [11,15]. En cambio, el fenómeno termoacústico de onda viajera ha sido tratado muy poco hasta ahora, siendo los

trabajos de Ceperley y de Raspel los más importantes.

Ceperley [18-20] analiza el fenómeno termoacústico que se produce cuando una onda viajera plana pasa a través de un conjunto de placas paralelas entre sí y alineadas en la dirección de propagación de la onda. Supone que el proceso es prácticamente isotérmico y que no existen reflexiones de la onda sonora. En su análisis él compara el ciclo del fenómeno termoacústico de onda viajera con el ciclo de Stirling, considerando que la onda sonora al pasar entre las placas se comporta como un pistón en la máquina de Stirling. Ceperley obtiene como resultado un rendimiento de alrededor del 10% del correspondiente al ciclo de Carnot, aunque en algunos casos, dependiendo de la impedancia característica del medio (definida como el producto de la densidad por la velocidad de propagación de la onda), puede llegar al 80%. Concluye que el ciclo termoacústico de onda viajera es mucho más eficiente que el de onda estacionaria.

Raspel *et al.* [21] utilizan la teoría desarrollada por Rott para analizar el fenómeno termoacústico en un fluido no viscoso y una sola placa en un campo de ondas sonoras planas viajeras. Obtienen un rendimiento mucho menor al calculado por Ceperley. Muestran además, que debido a que la onda atraviesa una región donde existe un gradiente de temperatura, se producen reflexiones de la onda incidente, lo que contribuye a disminuir el rendimiento.

Entre las aportaciones de este trabajo al estudio del fenómeno termoacústico se encuentran las siguientes: Se muestra la dependencia del flujo de calor y de la energía acústica absorbida o generada con respecto a la distancia perpendicular a la placa; el efecto de algunos parámetros como la viscosidad y la conducción térmica; las condiciones para que el fenómeno termoacústico corresponda al ciclo de un refrigerador o de un generador (en el caso de la onda viajera); se comprueba explícitamente el criterio

de Rayleigh sobre el fenómeno termoacústico, así como la relación entre el calor por conducción en la dirección perpendicular a la placa y la absorción o la generación de energía acústica; también se presentan algunas comparaciones entre el efecto producido por una onda estacionaria y una viajera.

CAPITULO I

TEORIA TERMOACUSTICA

1) INTRODUCCION.

En este capítulo se presentan la teoría y las expresiones para describir el fenómeno termoacústico producido por una sola placa en un campo sonoro de ondas planas.

2) VARIABLES TERMOACUSTICAS.

La teoría desarrollada por Rott [1,2] para estudiar el fenómeno termoacústico en tubos se utiliza ahora en el caso de una sola placa dentro de un campo sonoro de ondas planas para deducir las expresiones de las variables que describen el fenómeno.

Supóngase la misma situación mencionada en la introducción: una placa inmóvil y totalmente rígida, con un grueso $2l$, un largo Δx y un ancho Π (figura 1) dentro de un fluido simple cuya viscosidad no es muy grande respecto a la del aire (con base en resultados empíricos se conoce que se puede describir con dos variables el estado de equilibrio termodinámico de un fluido simple [referencia 22, página 7]). Se usa un sistema de referencias cartesiano con el plano xz sobre la superficie de la placa y el eje x paralelo al eje longitudinal de ésta. Las coordenadas x de los extremos izquierdo y derecho de la placa son respectivamente x_0 y x_n .

Sea T_m la temperatura media del fluido (la temperatura absoluta que tiene en ausencia de las perturbaciones acústicas). T_m es

constante en la región del espacio $x \leq x_0$ y en la región $x \geq x_h$; en la primera tiene un valor T_0 y en la segunda un valor distinto T_h . Así, como se mencionó anteriormente, en la placa y en el fluido localizado en el espacio perpendicular a los lados de ésta (la región II de la figura 1), T_m tiene un gradiente medio de temperatura (∇T_m) en la dirección x . Por el momento no estamos interesados por la manera mediante la cual se genera esa distribución de temperatura.

Bajo estas condiciones, considérese que por algún medio externo se produce un campo sonoro de ondas planas con las oscilaciones acústicas paralelas al eje x . Supóngase que existe un estado estacionario y que la velocidad del fluido oscila alrededor de cero. Asimismo, se desprecian las disipaciones de la energía de la onda sonora fuera de las capas límite (ver sección A del apéndice).

Todas las variables tienen una perturbación con frecuencia angular ω y se usa una expansión a primer orden en la amplitud de las oscilaciones de todas ellas. Así, en el fluido, la presión, la temperatura, la densidad, la entropía por unidad de masa y la velocidad se expresan, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
 p &= p_m + p_1(x) \cdot e^{i\omega t}, \\
 T &= T_m(x) + T_1(x, y) \cdot e^{i\omega t}, \\
 \rho &= \rho_m(x) + \rho_1(x, y) \cdot e^{i\omega t}, \\
 s &= s_m(x) + s_1(x, y) \cdot e^{i\omega t}, \\
 \mathbf{v} &= \hat{x} u_1(x, y) \cdot e^{i\omega t} + \hat{y} v_1(x, y) \cdot e^{i\omega t}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde p_m , T_m , ρ_m y s_m son los respectivos valores medios, es

decir, los valores de estas variables en ausencia de la perturbación acústica. p_1 , T_1 , ρ_1 y s_1 corresponden a la dependencia espacial de las oscilaciones de las respectivas variables. v es la velocidad del fluido que produce la onda sonora, cuyas componentes en la dirección x y en la dirección y oscilan con una dependencia espacial u y v , respectivamente.

En la placa, la temperatura (T_s) es de la forma

$$T_s = T_s(x) + T_{s_1}(x,y) \cdot e^{i\omega t}, \quad (2)$$

donde T_{s_1} corresponde a la dependencia espacial de las oscilaciones.

Se ha considerado que las fluctuaciones de la presión sonora no dependen de la coordenada y . De esta manera se simplifican las expresiones matemáticas ya que se evita un acoplamiento de las ecuaciones diferenciales. Esta es una buena aproximación si las oscilaciones de la presión son muy pequeñas respecto a la presión media.

Para las perturbaciones sonoras $\partial/\partial y$ es del orden de $1/\delta_v$ (δ_v es la profundidad de penetración viscosa, en la sección A del apéndice se presenta una discusión de este concepto) y $\partial/\partial x$ es del orden de $k = \omega/c$, con $\delta_v \ll 1/k$ (c es la velocidad de propagación del sonido); así, la componente x de la ecuación de Navier - Stokes a primer orden (para más detalle ver la deducción en la sección D del apéndice), es

$$i\omega\rho_m u_1 = -\partial p_1/\partial x + \eta \cdot \partial^2 u_1/\partial y^2, \quad (3)$$

donde η es la viscosidad dinámica.

Resolviendo esta ecuación con las condiciones $u_1(y=0) = 0$ y que en el límite cuando y tiende a infinito $u_1 = i(dp_1/dx)/(\rho_m\omega)$ (es

decir, ya no está presente la perturbación producida por la placa), se tiene

$$u_1 = \frac{i}{\omega \rho_m} \frac{dp_1}{dx} \left(1 - e^{-(1+i)y/\delta v} \right) \quad (4)$$

En la placa, la ecuación general de transferencia de calor a primer orden, está dada por (la deducción se presenta en la sección E del apéndice)

$$\kappa_s \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial y^2} - i\omega T_{s1} = 0 \quad (5)$$

donde κ_s es la difusividad térmica del sólido; y en el fluido esta ecuación general es (la deducción se muestra en la sección F del apéndice)

$$\kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - i\omega T_1 = \frac{i}{\rho_m \omega} \frac{dp_1}{dx} \sqrt{T_m} \left(1 - e^{-(1+i)y/\delta v} \right) - i\omega \frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 \quad (6)$$

donde β es el coeficiente de expansión térmica, κ es la difusividad térmica y c_p es el calor específico a presión constante del fluido.

Las soluciones para T_1 y T_{s1} se obtienen al resolver las ecuaciones diferenciales (5) y (6) con las siguientes condiciones

$$T_{s1}(y) = T_{s1}(-y-2l),$$

$$T_1(y=0) = T_{s1}(y=0),$$

$$K(\partial T_1/\partial y) \Big|_{y=0} = -K_s(\partial T_{s1}/\partial y) \Big|_{y=0}, \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_1 = \frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 - \frac{1}{\rho_m \omega^2} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx};$$

(K y K_s son respectivamente la conductividad térmica del fluido y de la placa), que expresan simetría en la temperatura de la placa respecto a su centro, continuidad en las variaciones de temperatura y en el flujo de calor en la frontera placa - fluido y el hecho de que a una distancia muy lejos de la placa desaparecen las perturbaciones que ésta produce en el campo sonoro. Así, resulta

$$T_1 = \frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 - \frac{1}{\rho_m \omega^2} \left(1 - \frac{\sigma}{(\sigma-1)} e^{[-(1+i)y/\delta_v]} \right) \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} - \left(\frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 + \frac{1+c_s \sqrt{\sigma}}{(\sigma-1)\rho_m \omega^2} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} \right) \frac{e^{[-(1+i)y/\delta_k]}}{(1+c_s)} \quad (8)$$

y

$$T_{s1} = T_{b1} \frac{\cosh[(1+i)(l+y)/\delta_s]}{\cosh[(1+i)l/\delta_s]} ; \quad (9)$$

donde σ es el número de Prandtl (la razón entre la viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica del fluido), c_s el calor específico a presión constante de la placa, ρ_s la densidad de la placa, $\delta_k = (2k/\omega)^{1/2}$ es la profundidad de penetración térmica del fluido, $\delta_s = (2k_s/\omega)^{1/2}$ es la profundidad de penetración térmica de la placa (en la sección A del apéndice se discute la interpretación física de las profundidades de penetración térmica y viscosa); c_s y T_{b1} están dados por

$$c_s = \frac{(K\rho_m c_p)^{1/2}}{(K_s \rho_s c_s)^{1/2}} \quad (\text{suponiendo que } \delta_s \ll l), \quad (10)$$

$$T_{b1} = \left(\frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 - \frac{1}{\rho_m \omega^2} \frac{1}{\sigma-1} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} (\sqrt{\sigma}-1) \right) \frac{c_s}{1+c_s}, \quad (11)$$

La ecuación (8) se reduce a la ecuación (2) de Raspet [21] si la viscosidad es cero, y la ecuación (A10) de Swift [3] se reduce a la ecuación (8) si en su sistema de referencia se traslada el origen de la coordenada y a la superficie de una placa y se toma el límite cuando la separación entre ellas tiende a infinito.

De la ecuación de continuidad a primer orden, dada por

$$i\omega\rho_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m u_1) + \rho_m \frac{\partial}{\partial y} v_1 = 0, \quad (12)$$

se calcula la dependencia espacial de las oscilaciones de la componente v_1 de la velocidad en función de p_1 . Primero se elimina ρ_1 de la ecuación anterior con la igualdad

$$\rho_1 = -\rho_m \beta T_1 + \gamma p_1 / c^2 \quad (13)$$

donde γ es la razón de calores específicos del fluido y c la velocidad de propagación del sonido (la deducción de la ecuación (13) se muestra en la sección B del apéndice). Después se sustituyen T_1 y $\partial(\rho_m u_1)/\partial x$ usando las ecuaciones (8) y (3), con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial y} = & + \frac{1}{\rho_m \omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dp_1}{dx} e^{-(1+i)y/\delta_v} \right) \\ & + i \frac{\beta}{\rho_m \omega} \frac{\sigma}{\sigma-1} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} e^{-(1+i)y/\delta_v} \\ & - i\omega\beta \left(\frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 + \frac{1+\epsilon_s \sqrt{\sigma}}{(\sigma-1)\rho_m \omega^2} \frac{dp_1}{dx} \frac{dT_m}{dx} \right) \frac{e^{-(1+i)y/\delta_k}}{1+\epsilon_s} \\ & - \frac{i\omega p_1}{\rho_m c^2} - \frac{i\beta}{\rho_m \omega} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} - \frac{i}{\rho_m \omega} \frac{d^2 p_1}{dx^2} \end{aligned} \quad (14)$$

En la sección B del apéndice se muestra que para deducir la ecuación (13) se hicieron dos consideraciones importantes: la primera fue la hipótesis de que la densidad del fluido se puede expresar como una función de su temperatura y de su presión (ecuación de estado), lo cual es cierto para un fluido simple [referencia 22, pág 7] y la segunda fue la suposición de que T_1 y p_1 son tan pequeños en comparación con T_m (medida en grados Kelvin) y p_m respectivamente, que es una buena aproximación utilizar la ecuación

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp \quad (15)$$

Los valores de β , γ y c , dependen del fluido. Así, por ejemplo, la ecuación de estado de un gas ideal monoatómico es $\rho = M_0 p / (RT)$, y la condición para un proceso adiabático está expresada por $p/\rho^\gamma = \text{constante}$, donde M_0 es el peso molecular, V es el volumen y R la constante universal de los gases. En tal caso, la ecuación (13) resulta $\rho_1 = -(\rho_m/T_m)T_1 + (\rho_m/p_m)p_1$, es decir, $\beta = 1/T_m$ y $\gamma/c^2 = \rho_m/p_m$.

Si se integra la ecuación (14) respecto a y de cero a infinito, con el fin de calcular v_1 , los tres últimos términos darán como resultado cantidades proporcionales a y , lo cual no es físicamente posible porque implicaría que la v_1 crece al alejarse de la placa. Por lo tanto, la suma de éstos términos debe ser cero

$$-\frac{i\omega p_1}{\rho_m c^2} - \frac{i\beta}{\rho_m \omega} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} - \frac{i}{\rho_m \omega} \frac{d^2 p_1}{dx^2} = 0 \quad (16)$$

Simplificando esta expresión, resulta

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} + \beta \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} + \frac{\omega^2}{c^2} p_1 = 0 \quad (17)$$

Esta es la ecuación de onda termoacústica obtenida por Raszpet [21] a partir de la ecuación (13) y las ecuaciones linealizadas de Euler, de continuidad y de transferencia de calor, considerando un fluido no viscoso. La viscosidad no influye en p_1 debido a que se consideró que esta variable no depende de y . La ecuación (A19) de Swift [3] se reduce a la ecuación (17).

Así, integrando la ecuación (14) respecto a y , de cero a infinito, se obtiene

$$\begin{aligned}
 v_1 = & \frac{\beta}{\delta x} \left[\frac{1+i}{2} \frac{\delta v}{\rho_m \omega} \frac{dp_1}{dx} \left(1 - e^{-(1+i)y/\delta v} \right) \right] \\
 & + \frac{1+i}{2} \frac{\beta}{\rho_m \omega} \frac{\delta v}{\sigma-1} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} \left(1 - e^{-(1+i)y/\delta v} \right) \\
 & - \frac{1+i}{2} \frac{\omega \beta \delta k}{1+c_s} \left[\frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 + \frac{1+c_s \sqrt{\sigma}}{(\sigma-1) \rho_m \omega^2} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} \right] \left(1 - e^{-(1+i)y/\delta k} \right) .
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Esta última expresión se reduce a la ecuación (2.18) de Rott [2] si se toma $c_s = 0$ (ecuación (10)), lo que quiere decir que la capacidad calorífica de la placa es mucho mayor que la del fluido así que las oscilaciones en la temperatura de la placa son tan insignificantes respecto a su temperatura media T_m (medida en grados Kelvin) que se desprecian.

Rott hace un "truco" en el proceso de deducción de la ecuación (2.18) [2] con el fin de eliminar los 3 últimos términos de la ecuación (14) y obtener un valor físicamente posible para v_1 : Utilizó la igualdad

$$\rho_m c^2 \frac{\delta u_\infty}{\delta x} = - \frac{\delta p_1}{\delta x} , \tag{19}$$

para sustituir $\partial p_i / \partial x$ en la ecuación (12) (la ecuación de continuidad). Pero, la ecuación (19) se obtiene de la ecuación de continuidad a primer orden en un medio homogéneo en el que existe una perturbación que sólo es función de x (es decir, $p = p_m + p_1(x) \cdot e^{i\omega t}$ y $u = u_1(x) \cdot e^{i\omega t}$). Como se observa, Rott utilizó la ecuación de continuidad dos veces en un mismo proceso, pero en cada una de ellas consideró hipótesis distintas.

Resolviendo la ecuación (17) se obtiene el valor de p_1 a partir de donde se pueden calcular T_1 , T_{s_1} , u_1 y v_1 con las ecuaciones (8), (9), (4), y (18) respectivamente. Cualquier otra variable puede obtenerse a partir p_1 y T_1 con la ecuación de estado correspondiente (considerando que se trata de un fluido simple). Así, la amplitud de las oscilaciones de la densidad (ρ_1) está dada por la ecuación (13) y la de la entropía por unidad de masa (s_1), está dada por la siguiente expresión (la deducción se muestra en la sección C del apéndice)

$$s_1 = c_p T_1 / T_m - \beta p_1 / \rho_m \quad (20)$$

3) POTENCIA ACUSTICA ABSORBIDA O GENERADA.

Una vez que se conocen las soluciones de las variables acústicas y termodinámicas, es posible calcular algunas cantidades importantes. La potencia acústica por unidad de volumen absorbida o generada por el fluido está dada por [referencia 3, ecuación (30)]

$$\dot{w}_2 = - \frac{p}{\rho_m} \frac{d\rho}{dt} \quad (21)$$

El subíndice 2 indica que la variable es de segundo orden (Si \dot{w}_2 es negativo, entonces el fluido absorbe energía acústica).

Usando la relación $d\rho = -(\rho_m \beta) dT + (\gamma c^2) dp$ (Ecuación A12 del

apéndice a primer orden) para expresar la ecuación (21) en términos de la presión y la temperatura, y tomando el promedio temporal sobre un período de las oscilaciones, resulta

$$\overline{\dot{w}_2} = \overline{p_1 \beta \frac{\partial T_1}{\partial t}} + p_1 \left[\overline{\beta \frac{dT_m}{dx} u_1} \right] \quad (22)$$

(en adelante, cuando se hable del promedio temporal de una cantidad se refiere a su promedio sobre un período de las oscilaciones).

Sustituyendo los valores de T_1 y u_1 de las ecuaciones 8 y 4 e integrando la ecuación anterior respecto a y de cero a infinito, se tiene

$$\overline{\dot{w}_2} = - \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta^2 \omega}{\rho_m c_p} \frac{|p_1|^2}{1 + \epsilon_s} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\epsilon}} \frac{c_p \sqrt{T_m}}{T_m \beta \omega^2 |p_1|^2} \operatorname{Re} \left[p_1 \left(\frac{dp_1}{dx} \right)^* (1 - i) \right] \right\}, \quad (23)$$

donde ξ^* es el complejo conjugado de ξ y $|p_1|^2 = p_1 \cdot p_1^*$.

4) FLUJOS DE CALOR.

Debido a las oscilaciones del fluido causadas por la onda sonora y al intercambio de energía térmica con la placa, se produce un flujo de calor hidrodinámico (o convectivo). El promedio temporal de este flujo de calor en la dirección x está dado por [referencia 3, ecuación (25)]

$$\overline{\dot{q}_{hx2}} = \rho_m T_m \overline{u_1 s_1}. \quad (24)$$

Sustituyendo el valor de s_1 de la ecuación (20) en la expresión

anterior, resulta

$$\overline{\dot{q}_{hx_2}} = \rho_m c_p u_1 T_1 - T_m \beta u_1 p_1 \quad (25)$$

Cambiando u_1 por v_1 en la ecuación anterior, se tiene la expresión para el flujo de calor hidrodinámico en la dirección y .

Sustituyendo T_1 y u_1 (usando las expresiones (8) y (4)) en la ecuación (25) e integrando respecto a y de cero a infinito, se tiene

$$\overline{\dot{Q}_{hx_2}} = \frac{\delta x T_m \beta}{4} \frac{1}{\rho_m \omega} \frac{1}{1 + c_v} \frac{1}{1 + \sigma} \left\{ \operatorname{Re} \left[p_2 \left(\frac{dp_1}{dx} \right)^* \left(1 + \sqrt{\sigma} + i(1 - \sqrt{\sigma}) \right) - \frac{\sqrt{T_m c_p}}{T_m \beta \omega^2} \left| \frac{dp_1}{dx} \right|^2 \frac{c_v \sigma + \sigma + \sqrt{\sigma} + 1}{1 + \sqrt{\sigma}} \right] \right\} \quad (26)$$

El flujo de calor por conducción en el fluido es la suma del flujo debido al gradiente medio de temperatura constante en el tiempo ($\sqrt{T_m}$), más el flujo producido por un gradiente de temperatura variable en el tiempo originado por la onda sonora. Este último, está expresado por

$$\dot{q}_{cx_1} = -K \operatorname{Re} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} e^{i\omega t} \right) \quad (27)$$

Como se observa, el promedio temporal de \dot{q}_{cx_1} es cero. Tomando la derivada parcial respecto a y en lugar de la parcial respecto a x , se determina el correspondiente flujo de calor en la dirección y (\dot{q}_{cy_1}).

5) POTENCIA ACUSTICA DISIPADA POR EFECTOS DE LA VISCOSIDAD.

Debido a la presencia de la placa, la onda sonora perderá energía por efectos de la viscosidad. La potencia acústica perdida por unidad de área por efectos de la viscosidad sobre una pared rígida, está dada por [referencia 23, ecuación (6.4.39)]

$$\dot{W}_2 = -\frac{1}{4} \delta v \rho_m (u_t)^2, \quad (28)$$

donde u_t es la amplitud de la velocidad tangencial a la superficie fuera de la profundidad de penetración viscosa.

Hasta aquí queda completa la teoría que describe el fenómeno termoacústico para una sola placa dentro de un campo sonoro de ondas planas. Esta es una teoría lineal y se supone que las amplitudes acústicas son lo suficientemente pequeñas para evitar turbulencias, así que el número de Reynolds $u_t \delta v / \nu < 500$ [24]. También se hizo la consideración de que la amplitud de la presión sonora no depende de la coordenada y . Aplicaciones prácticas han demostrado que se tiene una buena concordancia entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales [3,4,8-13,15].

CAPITULO II

FENOMENO TERMOACUSTICO DE ONDA ESTACIONARIA

CON LA APROXIMACION DE "PLACA CORTA"

1) INTRODUCCION.

Se analiza el fenómeno termoacústico producido por una sola placa en un campo sonoro estacionario de ondas planas. El objetivo principal es dar una interpretación física, así que se hacen algunas aproximaciones para simplificar su estudio. La más importante es considerar que el largo Δx de la placa es tan pequeño (respecto a la longitud de la onda) que se pueden despreciar las perturbaciones que pudiera causar en el campo sonoro y, para que la diferencia de temperatura entre los extremos de la placa sea pequeña.

2) ANALISIS

a) HIPOTESIS.

Considérese nuevamente la situación mostrada en la figura 1. Como el objetivo es dar una interpretación física al fenómeno termoacústico, en lugar de resolver la ecuación (17), cuya solución no es simple, considérese que la longitud de la placa es tan pequeña (respecto a la longitud de la onda sonora) de tal manera que la dependencia espacial de la presión acústica se puede expresar en la forma

$$p_1 = P_A \cdot \text{sen}(kx), \quad (29)$$

donde P_1 es una cantidad real; es decir, la onda sonora no sufre ninguna alteración debido a los cambios de temperatura ni a la presencia de la placa.

Como el largo de la placa es muy pequeño, el valor de T_c es cercano al de T_h aunque exista un gradiente medio de temperatura relativamente grande en el intervalo $x_c < x < x_h$ (Región II). Así, a pesar de que T_c no es constante en la región II, resulta una buena aproximación considerar que en cada punto de esa zona existe un gradiente medio de temperatura en la dirección x y tomar $T_m = (T_c + T_h)/2$. De esta manera, los parámetros y variables que dependen de T_c se les asignará un valor constante.

b) CONSIDERACIONES.

Las características de una onda estacionaria, con amplitud de las oscilaciones de presión dadas por la ecuación (29), se repiten en la dirección x con un periodo π/k (distancia entre dos nodos adyacentes); además, existe simetría respecto a la posición de los nodos y de los antinodos de presión. Así que, en adelante, sin pérdida de generalidad, se supondrá implícitamente que los valores de x son únicamente aquellos que pertenecen al intervalo $0 \leq kx \leq \pi/2$.

En las estimaciones numéricas, se utilizó al He^4 como fluido de referencia y al kapton (plástico fabricado por DuPont cuya apariencia física es muy similar a la mica) como el material de la placa, ya que éstos se han empleado en algunas máquinas termoacústicas [3,15] (actualmente estoy trabajando en la construcción de un refrigerador usando estos mismos materiales en la sección de Acústica del CIUNAM). Las ventajas del helio son su alta velocidad de propagación del sonido y, sus bajas viscosidad y densidad; ésta última permite una profundidad de penetración térmica grande en comparación con otros gases. Se supuso también que el helio se comporta como un gas simple y que $\beta = 1/T_m$. Así,

los valores dados a las variables son los siguientes:

| | |
|--------------------------|--|
| $T_m = 293.16 \text{ K}$ | $\rho_m = 0.166 \text{ Kg/m}^3$ |
| $p_m = 1 \text{ atm}$ | $\rho_s = 1400 \text{ Kg/m}^3$ |
| $P_A = 1000 \text{ Pa}$ | $c_p = 5232.5 \text{ J/(Kg}\cdot\text{K)}$ |
| $kx = \pi/4$ | $c_s = 1100 \text{ J/(Kg}\cdot\text{K)}$ |
| $f = 800 \text{ Hz}$ | $K = 0.148 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ |
| $\gamma = 1.67$ | $K_s = 0.16 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ |
| $\sigma = 0.68$ | |

De ahora en adelante, para evitar confusiones, cuando se hable de potencia acústica absorbida se refiere a la potencia que se pierde al comprimir el fluido (valores negativos de \dot{w}_2) y no a las pérdidas por efectos de viscosidad, a las cuales se les llamará potencia acústica disipada.

c) GRADIENTES CRITICOS DE TEMPERATURA.

Como se observa de la ecuación (29), p_1 y dp_1/dx son reales; así, las ecuaciones (22) y (26) respectivamente toman la forma

$$\overline{\dot{w}_2} = -\frac{\delta k}{4} \frac{\gamma-1}{\rho_m c^2} \frac{\omega p_1^2}{1+c_s} \left[1 - \frac{\sqrt{T_m c_p}}{T_m \beta \omega^2 p_1} \frac{dp_1}{dx} \frac{1}{1+\sqrt{\sigma}} \right]. \quad (30)$$

$$\overline{\dot{q}_{hx_2}} = \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta}{\rho_m \omega} \frac{dp_1}{dx} \frac{1}{1+c_s} \frac{1}{1+\sigma} \left[1+\sqrt{\sigma} - \frac{\sqrt{T_m c_p}}{T_m \beta \omega^2 p_1} \frac{dp_1}{dx} \frac{c_s \sigma + \sigma + \sqrt{\sigma} + 1}{1+\sqrt{\sigma}} \right]. \quad (31)$$

donde se ha usado la identidad $\gamma-1 = T_m \beta^2 c^2 / c_p$. Estas ecuaciones son iguales, respectivamente, al primer término de las ecuaciones (80) y (76) de Swift [3] en el límite cuando la separación de las placas en su sistema tiende a infinito.

De las ecuaciones (30) y (31) se ve que \overline{W}_2 y \overline{Q}_{hx2} varían en forma directamente proporcional con V_{Tm} . De la ecuación (30) se observa que si V_{Tm} es igual a

$$V_{Tcrw} = \frac{T_m \beta \omega^2 p_1}{c_p (dp_1/dx)} (1 + \sqrt{\sigma}), \quad (32)$$

entonces $\overline{W}_2 = 0$; y también, que \overline{W}_2 es negativa (por lo tanto se absorbe energía acústica) si $V_{Tm} < V_{Tcrw}$, y es positiva (se genera energía) si $V_{Tm} > V_{Tcrw}$.

En forma similar, de la ecuación (31) resulta que si V_{Tm} es igual a

$$V_{Tcrq} = \frac{T_m \beta \omega^2 p_1}{c_p (dp_1/dx)} \frac{1 + \sqrt{\sigma}}{c_s \sigma + \sigma + \sqrt{\sigma} + 1} \quad (33)$$

entonces \overline{Q}_{hx2} es cero; y además, \overline{Q}_{hx2} es positivo si $V_{Tm} < V_{Tcrq}$ (flujo en la misma dirección a V_{Tm}) y es negativo si $V_{Tm} > V_{Tcrq}$ (flujo en dirección contraria a V_{Tm} , es decir de la región caliente a la fría).

Nótese que los dos gradientes críticos de temperatura, dados por las ecuaciones (32) y (33), son proporcionales a $p_1 / (dp_1/dx) = \tan(kx) / k$; y además, obsérvese que $V_{Tcrq} = V_{Tcrw}$ si $\sigma = 0$.

Por lo tanto, se aprecian cuatro comportamientos posibles dependiendo del valor del gradiente medio de temperatura: (i) si $0 \leq V_{Tm} < V_{Tcrq}$, entonces se absorbe energía sonora y se bombea calor en la dirección del gradiente medio de temperatura (hacia el antinodo de presión más cercano), correspondiendo al ciclo de un refrigerador; (ii) si $V_{Tm} > V_{Tcrw}$, entonces se genera energía acústica utilizando el flujo de calor que de manera natural ocurre en contra del gradiente medio de temperatura; (iii) cuando $V_{Tcrq} < V_{Tm} < V_{Tcrw}$, se tiene un "efecto nocivo" (se le llama así

porque se absorbe energía sonora para bombear calor de la parte caliente a la fría, lo cual ocurre de manera natural); finalmente, (ω) si $\nabla T_m < 0$, entonces, se bombea calor en dirección del antinodo de presión más cercano (de la región caliente a la fría) y se absorbe energía acústica ("efecto nocivo").

Con los datos mencionados en la sección b, se obtiene que los valores críticos del gradiente medio de temperatura son $\nabla T_{crq} = 1276.24$ K/m y $\nabla T_{crw} = 1763.99$ K/m, los cuales corresponden a los límites de los de los intervalos mencionados en el párrafo anterior.

d) DEPENDENCIA DE $\overline{\dot{W}}_2$ Y $\overline{\dot{Q}}_{hx_2}$ CON LA POSICION x .

De las ecuaciones (30) y (31) se ve que $\overline{\dot{W}}_2$ y $\overline{\dot{Q}}_{hx_2}$ dependen de la posición de la placa respecto a la onda sonora estacionaria a través de p_1 . En el nodo de presión $\overline{\dot{W}}_2$ será igual a cero y en el antinodo de presión $\overline{\dot{Q}}_{hx_2}$ será cero. Si se mantienen fijos todos los parámetros y variables (T_m , ∇T_m , δv , ω , p_m , etc.) y sólo se permiten cambios en la localización de la placa respecto a la onda estacionaria, entonces, las posiciones de ésta donde $\overline{\dot{W}}_2$ o $\overline{\dot{Q}}_{hx_2}$ alcanzan un valor máximo o mínimo, están dadas por los valores de x que satisfacen respectivamente las siguientes ecuaciones

$$\frac{d}{dx} \overline{\dot{W}}_2 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} \overline{\dot{Q}}_{hx_2} = 0 \quad (34)$$

Así, los valores de x para los cuales $\overline{\dot{W}}_2$ alcanza un valor máximo o mínimo son aquellos que cumplen con la siguiente ecuación

$$\tan(2kx) = \frac{1}{1+\sigma} \frac{kc_p}{T_m \beta \omega^2} \nabla T_m \quad (35)$$

De las ecuaciones (30) y (35) se deduce que si $\nabla T_h = 0$, \overline{W}_2 será máximo en $kx = 0$ y mínimo en $kx = \pi/2$. Conforme aumenta ∇T_h estos puntos máximo y mínimo se desplazan hacia valores mayores de kx teniendo como límite $kx = \pi/4$ para el máximo y $kx = 3\pi/4$ para el mínimo.

En la figura 2 se muestra una gráfica de \overline{W}_2 en función de la posición de la placa para tres valores de ∇T_h .

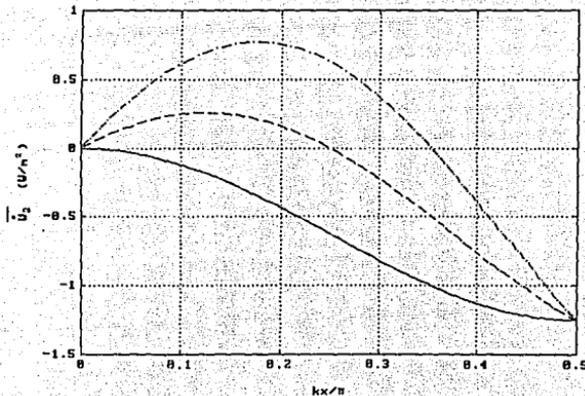


FIGURA 2: \overline{W}_2 vs kx/π . x es la posición de la placa y $p_1 = \text{sen}(kx)$ es la amplitud de la presión sonora. — $\nabla T_h = 0$, -- $\nabla T_h = 1764$ K/m, - - $\nabla T_h = 3528$ K/m.

Análogamente, las posiciones de la placa donde $\overline{Q}_{h \times 2}$ alcanza un valor máximo o mínimo corresponden a los valores de x que

satisfacen la ecuación

$$\tan(2kx) = - \frac{T_m \beta \omega^2}{c_p k} \frac{(1+\sqrt{\sigma})^2}{c_s \sigma + \sqrt{\sigma} + 1} \nabla T_m. \quad (36)$$

De las ecuaciones (31) y (36) se deduce que si $\nabla T_m = 0$, $\overline{Q_{hx_2}}$ tendrá un valor mínimo en $kx = -\pi/4$ y un valor máximo en $kx = \pi/4$. Conforme aumenta ∇T_m , estos puntos se desplazan hacia valores mayores de kx teniendo como límite $kx = 0$ para el mínimo y $kx = \pi/2$ para el máximo.

En la figura 3 se presenta una gráfica de $\overline{Q_{hx_2}}$ en función de la posición de la placa para 3 valores de ∇T_m .

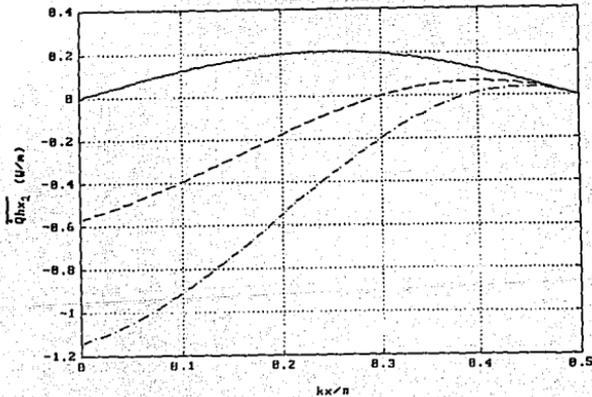


FIGURA 3. $\overline{Q_{hx_2}}$ vs. kx/π . x es la posición de la placa y $p_1 = \sin(kx)$ es la amplitud de la presión sonora. — $\nabla T_m = 0$, -- $\nabla T_m = 1764 \text{ K/m}$, - - $\nabla T_m = 3528 \text{ K/m}$.

e) DEPENDENCIA $\overline{\dot{w}_2}$ y $\overline{\dot{q}_{n \times 2}}$ CON LA DISTANCIA DE SEPARACION DE LA PLACA.

Graficando $\overline{\dot{w}_2}$ (dada por la ecuación (23)) en función de la distancia perpendicular a la placa (figura 4), puede verse que existen regiones donde se absorbe energía acústica y otras en las que se genera; en la región inmediata a la placa siempre se absorbe. El ancho de estas zonas depende del gradiente medio de temperatura.

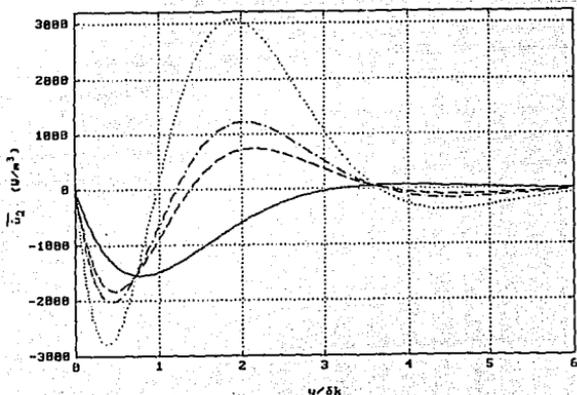


FIGURA 4: $\overline{\dot{w}_2}$ vs $y/\delta k$, para una posición de la placa $x = \pi/(4k)$. — $\nabla T_m = 0$, -- $\nabla T_m = \nabla T_{crq}$, - - $\nabla T_m = \nabla T_{crw}$, - - $\nabla T_m = 2\nabla T_{crw}$.

Otro resultado importante se observa al comparar la figura 4

con la gráfica de $\overline{q_{hx_2}}$ (ecuación (25)) en función de la distancia perpendicular a la placa, mostrada en la figura 5. Como $V_{Tm} > 0$, el flujo de calor será de la zona fría a la caliente cuando $\overline{q_{hx_2}} > 0$. Se observa que existen regiones (para un V_{Tm} dado) donde simultáneamente se absorbe energía acústica y se bombea calor de la parte caliente a la fría ("efecto nocivo"). Por ejemplo, en las curvas correspondientes a $V_{Tm} = 2V_{Tcrv}$, este efecto se ve claramente en la región limitada por $y/\delta_k \approx 0.7$ y $y/\delta_k \approx 1$. Estos resultados no se han obtenido en trabajos previos.

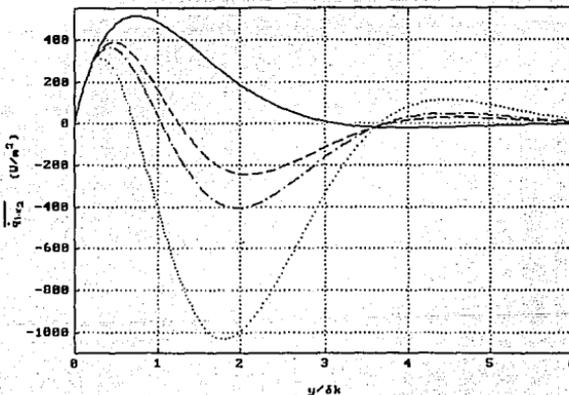


FIGURA 5: $\overline{q_{hx_2}}$ vs y/δ_k , para una posición de la placa $x = \pi/(4k)$. — $V_{Tm} = 0$, -- $V_{Tm} = V_{Tcrq}$, ·· $V_{Tm} = V_{Tcrv}$, ·· $V_{Tm} = 2V_{Tcrv}$.

f) DEPENDENCIA DE \dot{q}_{hy2} , \dot{q}_{cx1} , \dot{q}_{cy1} CON LA DISTANCIA DE SEPARACION A LA PLACA

En la figura 6 se muestra el promedio temporal de \dot{q}_{hy2} (el flujo de calor hidrodinámico en la dirección y) como una función de la distancia a la placa. Puede verse que este flujo de calor es muy pequeño, en comparación con el que ocurre en la dirección x .

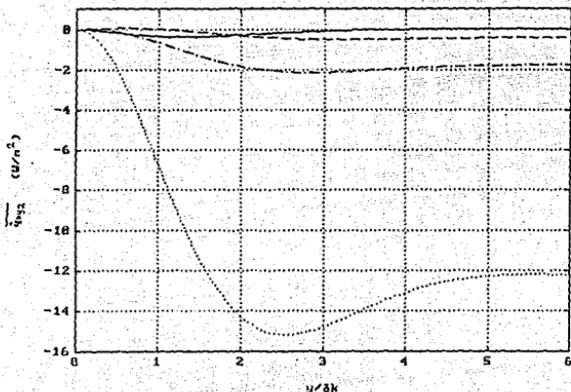


FIGURA 6: \dot{q}_{hy2} vs. $y/\delta k$, para una posición de la placa $x = \pi/(4k)$.
 — $\nabla T_m = 0$, - - $\nabla T_m = \nabla T_{crq}$, ··· $\nabla T_m = \nabla T_{crw}$,
 -- $\nabla T_m = 2\nabla T_{crw}$.

En las figuras 7 y 8 se muestra la amplitud de las oscilaciones del flujo de calor por conducción \dot{q}_{cx1} y \dot{q}_{cy1} respectivamente (cuyos promedios en el tiempo son cero), en función de la distancia a la placa.

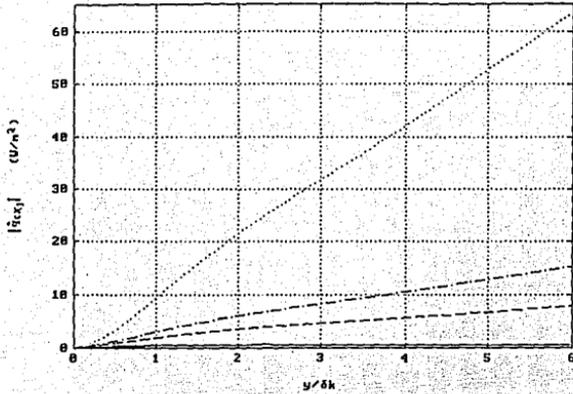


FIGURA 7: $|q_{cx}|$ vs. y/δ_k , para una posición de la placa $x = \pi/(4k)$. — $VT_m = 0$, -- $VT_m = VT_{crq}$, -·- $VT_m = VT_{crw}$, ··· $VT_m = 2VT_{crw}$.

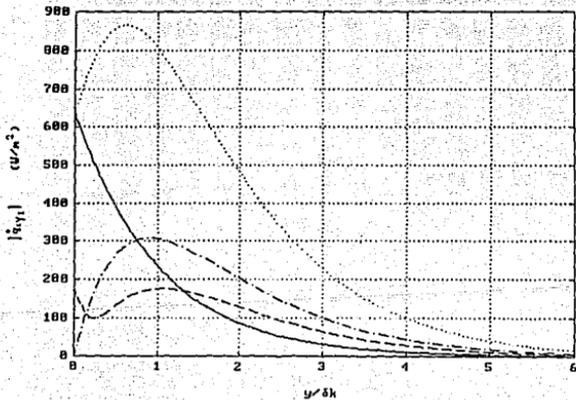


FIGURA 8: $|q_{cy}|$ vs. y/δ_k , para una posición de la placa $x = \pi/(4k)$. — $VT_m = 0$, -- $VT_m = VT_{crq}$, -·- $VT_m = VT_{crw}$, ··· $VT_m = 2VT_{crw}$.

Como se observa de las figuras 7 y 8, el flujo de calor por conducción en la dirección x es prácticamente cero, sin embargo, es importante en la dirección y . Por lo tanto, los efectos de \dot{q}_{hy} y \dot{q}_{cx} son despreciables.

g) RELACION ENTRE \dot{w}_2 , p' Y \dot{q}_{cy} .

Considérese el promedio temporal del producto $p' \cdot \dot{q}_{cy}$, (donde $p' = p_0 e^{i\omega t}$). Este promedio será positivo si el efecto que predomina en un ciclo es un flujo de calor en la dirección $+y$ (alejándose de la placa) cuando existe una compresión y un flujo de calor en dirección de la placa mientras el fluido está expandido. En cambio, si el promedio es negativo, predomina el flujo de calor en dirección de la placa cuando el fluido está comprimido, y un flujo de calor en sentido contrario mientras está expandido. En la figura 9, se ha graficado el promedio temporal de $p' \cdot \dot{q}_{cy}$ en función de la distancia a la placa. Se observa que los puntos máximos y los puntos mínimos locales de estas curvas coinciden con los cruces por cero de las curvas de \dot{w}_2 de la figura 4. Esto se debe a que en la región donde la pendiente es positiva en las curvas de la figura 9, el efecto neto es un incremento en el calor mientras el fluido está expandido y una disminución cuando está comprimido, perdiéndose energía acústica. En los puntos donde la pendiente es negativa se obtendrá el efecto contrario, es decir, se agrega calor en estado de compresión y se extrae durante la expansión. El efecto neto en esta zona es la generación de energía acústica.

3) CONCLUSIONES.

Los resultados de este capítulo muestran que la transferencia de calor por conducción paralelo a la placa producido por las oscilaciones de temperatura (\dot{q}_{cx}) y el calor hidrodinámico perpendicular a ella (\dot{q}_{hy}) son prácticamente despreciables.

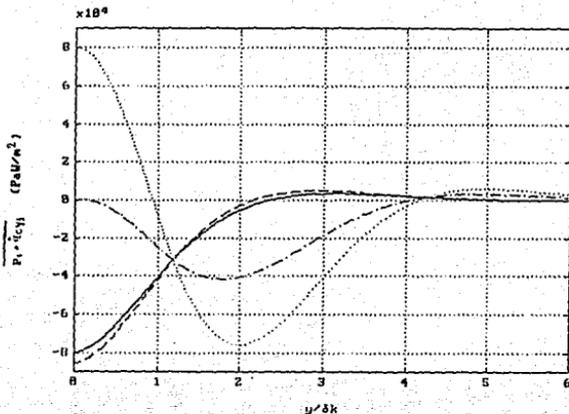


FIGURA 9: $p_1 \cdot \dot{q}_{cy}$, vs $y/\delta k$, para una posición de la placa $x = \pi/(4k)$. — $\nabla T_m = 0$, -- $\nabla T_m = \nabla T_{crq}$, ·-· $\nabla T_m = \nabla T_{crw}$, - - $\nabla T_m = 2\nabla T_{crw}$.

De los resultados se desprende que la energía acústica que se genera o que se absorbe en un ciclo depende de la distancia a la placa, y que existen regiones alternadas donde la energía acústica se absorbe y se genera. Este es un resultado que no se ha reportado en trabajos previos. El ancho de estas regiones y el efecto total de absorción o de generación de energía depende del valor del gradiente medio de temperatura en la dirección x . En la región más cercana a la placa siempre hay absorción de energía acústica y esta zona se hace más angosta al aumentar el gradiente medio de temperatura.

El mismo efecto ocurre con el flujo de calor hidrodinámico en la dirección x . En la región más cercana a la placa, el efecto neto es un flujo de calor en la dirección del gradiente medio de temperatura. El ancho de esta región disminuye al incrementarse ese gradiente. Se observan zonas donde simultáneamente se absorbe energía acústica y se bombea calor de la parte caliente a la fría.

En cada punto sobre el eje x , existe un valor del gradiente medio de temperatura para el cual el flujo neto de calor hidrodinámico a través del plano yz es cero y otro valor del mismo gradiente (mayor) en el cual no se absorbe ni se genera energía acústica sobre el mismo plano. Si el gradiente medio de temperatura está entre estos dos valores, entonces se tiene un efecto no deseado porque se absorbe energía de la onda sonora para bombear calor de la región caliente hacia la fría, pero el calor fluye en este mismo sentido de manera natural. Estos dos gradientes de temperatura son proporcionales a $\tan(kx)$.

La posición de la placa donde la potencia acústica producida es máxima varía en forma directa con el valor del gradiente medio de temperatura, entre el nodo de presión y el punto medio del nodo y el antinodo de presión. En cambio, para una gradiente medio de temperatura dado, conforme la placa se acerca al antinodo de presión, la energía acústica utilizada para bombear calor será mayor.

La posición de la placa respecto a la onda sonora donde el flujo de calor hidrodinámico total en la dirección x desplazado de la región fría a la caliente alcanza un valor máximo, varía con el valor del gradiente medio de temperatura. Este valor máximo corresponde al punto medio del nodo y el antinodo de presión cuando ∇T_m es igual a cero y se desplaza hacia el antinodo de presión (valor límite) conforme se incrementa el valor de ∇T_m .

Los resultados también comprueban explícitamente el criterio de Rayleigh en relación a la generación de energía acústica. Si se considera el semiciclo correspondiente al estado de compresión del fluido, en las regiones donde se absorbe energía acústica el fluido pierde calor, mientras que en las regiones donde se genera energía acústica, el fluido gana calor. Este calor ganado o perdido se debe al flujo de calor por conducción en la dirección y resultado de las oscilaciones de temperatura.

CAPITULO III

FENOMENO TERMOACUSTICO DE ONDA VIAJERA CON LA APROXIMACION DE "PLACA CORTA"

1) INTRODUCCION.

Se presenta el análisis del fenómeno termoacústico producido por una sola placa en un campo sonoro de una onda plana viajera. Se hacen las mismas aproximaciones que en el capítulo anterior con respecto a las dimensiones de la placa y a la temperatura media del fluido.

2) ANALISIS

a) HIPOTESIS.

Al igual que en el capítulo anterior, supóngase que el largo Δx de la placa es muy pequeño, respecto a la longitud de la onda sonora, que p_i se puede expresar como

$$p_i = P_s \cdot \exp(-ikx), \quad (37)$$

donde P_s es una constante real. Esta expresión multiplicada por el factor temporal $\exp(i\omega t)$, corresponde a una onda viajera que se propaga hacia la derecha, la cual no es afectada por la presencia de la placa ni por los cambios de temperatura en el medio (como Δx es muy pequeño, entonces $T_h - T_c \ll 1$).

Así, a pesar de que T_a no es constante en la región II, resulta una buena aproximación considerar que en cada punto de esa zona existe un gradiente medio de temperatura en la dirección x y tomar $T_m = (T_c + T_h)/2$. De esta manera, los parámetros y variables que dependen de T_a se les asignará un valor constante.

b) CONSIDERACIONES.

Por las mismas razones que se indicaron en el capítulo anterior, en las estimaciones numéricas se utilizó al He⁴ como fluido y al kapton como el material de la placa. Las variables tienen los mismos valores que los empleados en ese capítulo.

En el presente análisis $P_0 = 500$ Pa, es decir, es igual a la mitad del valor de P_A (amplitud de las oscilaciones de la presión sonora en el antinodo de la onda estacionaria analizada en el capítulo anterior). Se hizo esta consideración porque cuando una onda viajera choca contra una pared rígida perpendicular a la dirección de propagación, se forma una onda estacionaria donde la amplitud de la presión acústica en el antinodo de presión es el doble de la amplitud de la onda viajera. Este es un caso ideal en el que no existe una onda transmitida y tampoco disipación de la energía de la onda en el medio o en la pared. Sin embargo, en el caso real, si la pared es muy rígida se tendrá una buena aproximación a esta situación en las cercanías de la frontera.

c) GRADIENTES CRITICOS DE TEMPERATURA.

Con p_1 dada por la expresión 37, las ecuaciones (23) y (26) resultan ahora, respectivamente

$$\bar{W}_2 = - \frac{\delta k}{4} \frac{\gamma - 1}{\rho_m c^2} \frac{\omega P_B^2}{1 + c_s} \left[1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\sigma}} \frac{C_p k}{T_m \beta \omega^2} \nabla T_m \right], \quad (38)$$

$$\overline{\dot{Q}_{hx_2}} = \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta}{\rho_m \omega} \frac{1}{1+c_s} \frac{1}{1+\sigma} k P \beta^2 \left[-(1-\sqrt{\sigma}) - \frac{c_p k}{T_m \beta \omega^2} \frac{c_s \sigma + \sigma + \sqrt{\sigma} + 1}{1+\sqrt{\sigma}} \nabla T_m \right], \quad (39)$$

donde se ha usado la identidad $\gamma - 1 = T_m \beta^2 c^2 / c_p$.

Se observa que $\overline{\dot{W}_2}$ y $\overline{\dot{Q}_{hx_2}}$ no dependen de x como era de esperarse, ya que la amplitud de una onda plana viajera no varía en la dirección de propagación si se desprecian las disipaciones de energía en el medio (como se consideró desde el principio).

Puede verse también que $\overline{\dot{W}_2}$ y $\overline{\dot{Q}_{hx_2}}$ varían en forma directamente proporcional a ∇T_m y que si este gradiente es igual a

$$\nabla T_{crw} = \frac{T_m \beta \omega^2}{c_p k} (1 + \sqrt{\sigma}), \quad (40)$$

entonces $\overline{\dot{W}_2} = 0$. A diferencia del capítulo anterior, este gradiente crítico de temperatura no depende de la posición y corresponde al mismo valor para la onda estacionaria si $\tan(kx) = 1$.

Similarmente, $\overline{\dot{Q}_{hx_2}}$ es nulo si ∇T_m es igual a

$$\nabla T_{crq} = - \frac{1-\sigma}{c_s \sigma + \sigma + \sqrt{\sigma} + 1} \frac{T_m \beta \omega^2}{c_p k} \quad (41)$$

En la figura 10, se muestran las gráficas de $\overline{\dot{W}_2}$ y $\overline{\dot{Q}_{hx_2}}$ en función del gradiente medio de temperatura. Se aprecian cuatro comportamientos posibles dependiendo del valor de este gradiente: (i) si $\nabla T_m > \nabla T_{crw}$, se genera energía acústica utilizando el flujo de calor de la región caliente a la fría; (ii) si $0 < \nabla T_m < \nabla T_{crw}$, entonces se absorbe energía sonora y se bombea

calor de la parte caliente a la fría ("efecto nocivo"); (iii) para $V_{Terq} < VT_m < 0$ continúa el flujo de calor en la misma dirección que en el caso anterior pero ahora en contra del gradiente de temperatura, el ciclo corresponde al de un refrigerador o una bomba de calor; finalmente, (iv) si $VT_m < V_{Terq}$, entonces se tiene de nuevo un "efecto nocivo".

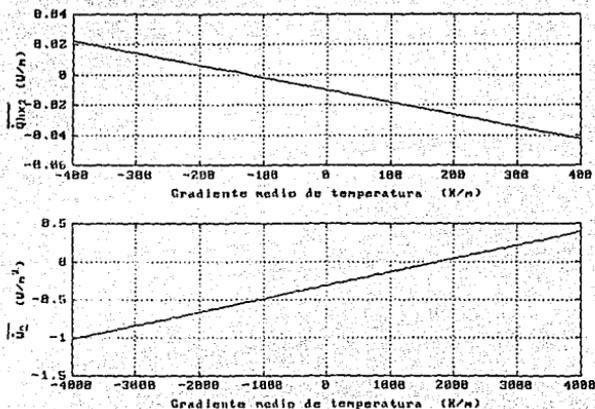


FIGURA 10: Gráficas de \overline{W}_2 y \overline{Q}_{hx2} vs. VT_m .

En su análisis, Ceperley [20], también concluye que para bombear calor de la región fría a la caliente, la onda viajera debe de propagarse en sentido contrario al gradiente de temperatura; sin embargo, considera que siempre que la onda se mueve de una región fría a otra caliente, ésta se amplifica debido a la generación de energía acústica.

Como se observa, el mayor gradiente medio de temperatura que

podría haber en una bomba de calor o en un refrigerador es $\nabla T_m = \nabla T_{crq}$ (no reportado en estudios previos). Si la viscosidad es cero entonces $\nabla T_{crq} = -\nabla T_{crw}$; además, el valor absoluto de ∇T_{crq} es máximo y el valor de ∇T_{crw} es mínimo. En consecuencia, entre menor sea el valor de σ mayor será la diferencia de temperatura que se obtendría en un refrigerador o en una bomba de calor termoacústicos y menor será la diferencia de temperatura necesaria para generar sonido. De esta manera, los fluidos de trabajo más adecuados para las máquinas termoacústicas de onda viajera son nuevamente aquellos con un número de Prandtl pequeño.

Con los valores mencionados en la sección b, se obtiene que los valores críticos del gradiente medio de temperatura son $\nabla T_{crq} = -121.62 \text{ K/m}$ y $\nabla T_{crw} = 2215.55 \text{ K/m}$.

d) DEPENDENCIA DE $\overline{\dot{w}_2}$ Y $\overline{\dot{q}_{hx2}}$ CON LA DISTANCIA DE SEPARACION DE LA PLACA.

Graficando $\overline{\dot{w}_2}$ (ecuación (22)) en función de la distancia a la placa (figura 11), se observa nuevamente que existen regiones en las que se absorbe energía acústica y otras en las que se genera, y también, que el ancho de estas zonas depende del gradiente medio de temperatura.

En la figura 12 se muestra la gráfica de $\overline{\dot{q}_{hx2}}$ (ecuación (25)), en función de la posición y . Se observa que en la región más cercana a la placa, este flujo de calor siempre es en sentido contrario a la dirección de propagación, y que el ancho de esta zona aumenta al incrementarse el gradiente medio de temperatura. Comparando esta gráfica con aquella de la figura 11, se observa, al igual que con la onda estacionaria, que existen zonas donde el flujo de calor hidrodinámico en la dirección x es de la parte caliente a la fría y simultáneamente se absorbe energía acústica.

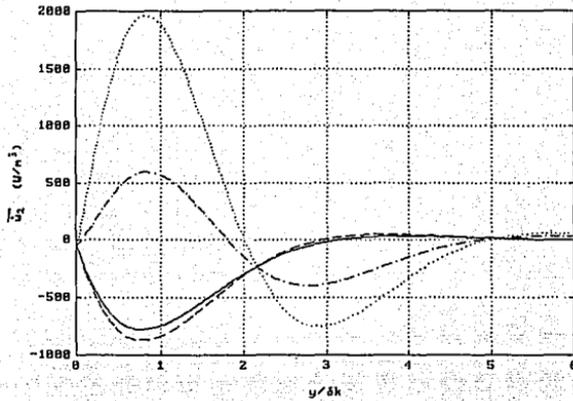


FIGURA 11: $\overline{w_2}$ vs. $y/\delta k$. — $VT_m = 0$, -- $VT_m = VT_{crq}$,
 -·- $VT_m = VT_{crw}$, ··· $VT_m = 2VT_{crw}$.

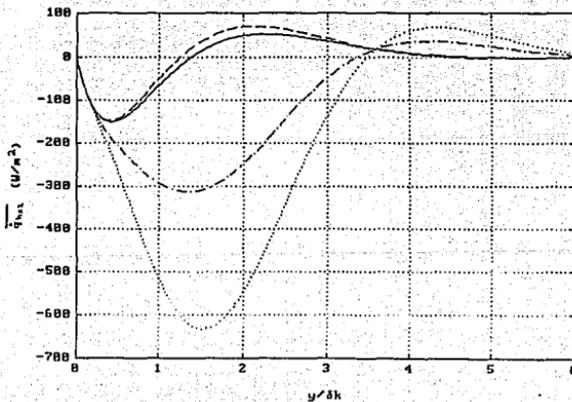


FIGURA 12: $\overline{q_{hx2}}$ vs. $y/\delta k$. — $VT_m = 0$, -- $VT_m = VT_{crq}$,
 -·- $VT_m = VT_{crw}$, ··· $VT_m = 2VT_{crw}$.

e) DEPENDENCIA DE \dot{q}_{hy2} , \dot{q}_{cx1} , \dot{q}_{cy1} CON RESPECTO A LA DISTANCIA DE SEPARACION DE LA PLACA

En la figura 13 se muestra la gráfica de $\overline{\dot{q}_{hy2}}$ como función de la posición y . Se observa que el flujo neto de calor es en dirección de la placa si el gradiente medio de temperatura es positivo. Al comparar esta gráfica con aquella de la figura 12, resulta que este flujo de calor es muy pequeño respecto al flujo de calor hidrodinámico en la dirección x .

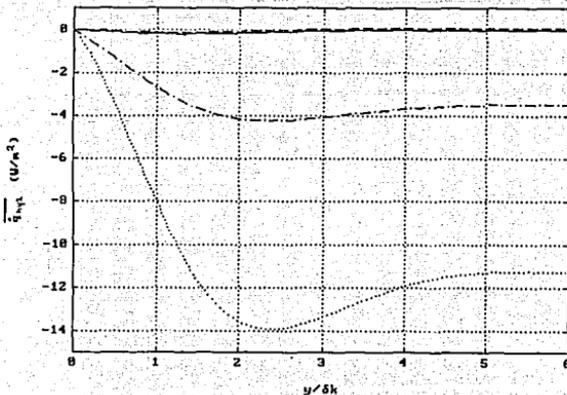


FIGURA 13: $\overline{\dot{q}_{hy2}}$ vs. y/δ_k . — $\nabla T_m = 0$, -- $\nabla T_m = \nabla T_{crq}$,
 - - $\nabla T_m = \nabla T_{crw}$, -- $\nabla T_m = 2\nabla T_{crw}$.

La amplitud de las oscilaciones de \dot{q}_{cx1} y \dot{q}_{cy1} (cuyos promedios en el tiempo son cero), en función de la distancia a la placa, se muestran respectivamente en las figuras 14 y 15. Este flujo de

calor en la dirección x es pequeño, sin embargo, es importante en la dirección y . Por lo tanto, los efectos de los flujos de calor \dot{q}_{hy2} y \dot{q}_{cx1} son despreciables también para el fenómeno termoacústico producido por una onda viajera.

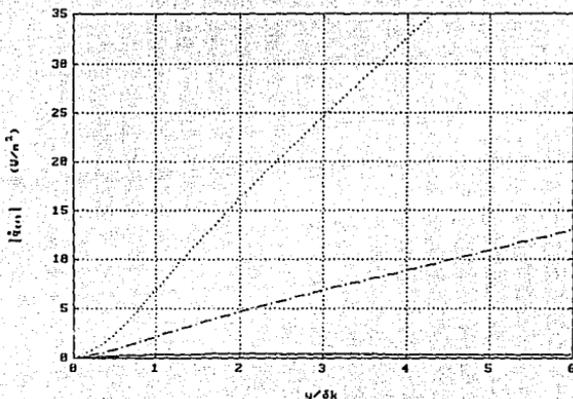


FIGURA 14: $|q_{cx1}|$ vs. y/δ_k . — $V_{Tn} = 0$, -- $V_{Tn} = V_{Tcrq}$,
 - - $V_{Tn} = V_{Tcrw}$, -- $V_{Tn} = 2V_{Tcrw}$.

f) RELACION ENTRE $\overline{w_2}$, p' Y \dot{q}_{cy1} .

La gráfica del promedio temporal del producto $p' \cdot \dot{q}_{cy1}$ en función de la distancia a la placa se muestra en la figura 16. Nuevamente, se observa que los puntos máximos y los puntos mínimos locales de estas curvas coinciden con los cruces por cero de las curvas de $\overline{w_2}$ en la figura 11. En las regiones donde la pendiente

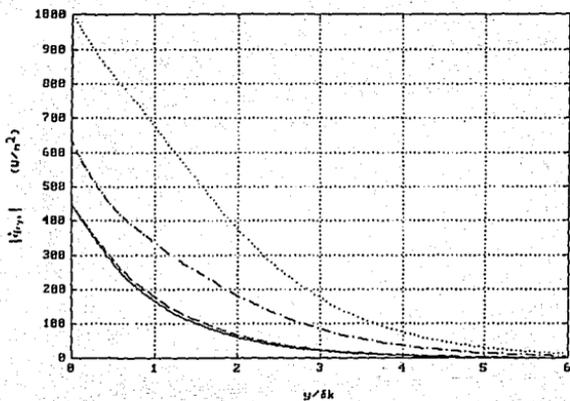


FIGURA 15: $|v'_{xy}|$ vs. $y/\delta k$. — $vT_m = 0$, — $vT_m = vT_{crq}$,
 -- $vT_m = vT_{crw}$, -- $vT_m = 2vT_{crw}$.

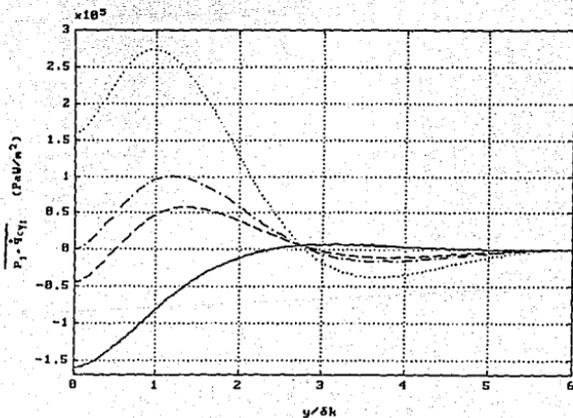


FIGURA 16: $p' \cdot \dot{q}_{cy1}$ vs. $y/\delta k$. — $vT_m = 0$, — $vT_m = vT_{crq}$,
 -- $vT_m = vT_{crw}$, -- $vT_m = 2vT_{crw}$.

es positiva, el efecto neto es un incremento en el calor mientras el fluido está expandido y una disminución cuando está comprimido, perdiéndose energía acústica. En los puntos donde la pendiente es negativa, se agrega calor en estado de compresión y se extrae durante la expansión, dando como resultado la generación de energía acústica.

3) CONCLUSIONES.

Del análisis anterior se concluye que el efecto termoacústico de onda viajera es independiente de la posición de la placa, lo que era de esperarse, ya que la amplitud de las oscilaciones sonoras en una onda viajera plana es constante a lo largo de la dirección de propagación (suponiendo que no existe disipación de energía en el medio).

Al igual que para una onda estacionaria, el flujo de calor por conducción paralelo a la placa producido por las oscilaciones de la temperatura (\dot{q}_{cx1}) y el flujo de calor hidrodinámico perpendicular a ella (\dot{q}_{hy2}) son poco importantes en el fenómeno termoacústico.

Los resultados muestran que la energía acústica que se genera o que se absorbe en un ciclo, depende de la distancia a la placa, y que existen regiones alternadas donde la energía acústica se absorbe y se genera. El ancho de estas regiones y el efecto total de absorción o de generación de energía depende del valor del gradiente medio de temperatura en la dirección x .

El mismo efecto ocurre con el flujo de calor hidrodinámico en la dirección x . En la región más cercana a la placa, el efecto neto es un flujo de calor en el sentido contrario a la dirección de propagación de la onda. El ancho de esta región aumenta al

incrementarse el gradiente medio de temperatura. También se observan zonas donde simultáneamente se absorbe energía acústica y se bombea calor de la parte caliente a la fría.

En cada punto sobre el eje x , existe un valor del gradiente medio de temperatura para el cual el flujo neto del calor hidrodinámico a través del plano yz es cero y, otro valor del mismo gradiente (mayor) en el cual no se genera o absorbe energía acústica en un ciclo sobre el mismo plano. Si el gradiente de temperatura es menor al primero de estos dos valores, entonces se tiene un efecto neto nocivo porque se absorbe energía de la onda sonora para bombear calor de la región caliente hacia la fría.

También se comprueba que si se agrega calor al fluido cuando está comprimido, entonces se produce energía acústica, y si por el contrario, se extrae calor del fluido mientras está comprimido, entonces se absorbe energía acústica. Los resultados muestran explícitamente que este calor ganado o perdido se debe al flujo de calor por conducción en la dirección y , confirmando la explicación cualitativa de Rayleigh. Este resultado se ha considerado como una hipótesis en estudios anteriores.

CAPITULO IV

COMPARACION DEL FENOMENO TERMOACUSTICO DE ONDA ESTACIONARIA CON EL DE ONDA VIAJERA EN LA APROXIMACION DE "PLACA CORTA"

1) INTRODUCCION.

En este capítulo se presenta un análisis del fenómeno termoacústico correspondiente al ciclo de un refrigerador y al de un generador de ondas sonoras. Se hace una comparación entre el fenómeno de onda estacionaria con el de onda viajera utilizando nuevamente las mismas consideraciones sobre la longitud de la placa de los capítulos anteriores.

2) CICLOS TERMOACUSTICOS.

A) REFRIGERADOR.

En el caso del refrigerador, se desea extraer calor de una región con el fin de disminuir su temperatura y entregarlo en otra cuya temperatura permanece prácticamente constante. Uno de los extremos de la placa está en contacto con la zona que se desea enfriar y el otro con la región donde se entrega el calor.

Una fracción de la energía de una onda sonora generada por un mecanismo externo al sistema se utiliza para bombear el calor de la parte fría a la caliente; otra se transforma en energía térmica por efectos viscosos cerca de la placa (en la capa límite), lo que significa una cantidad adicional de calor que debe de ser entregada a la región caliente.

El calor se mueve hacia la zona de temperatura más alta en forma hidrodinámica en dirección paralela al eje longitudinal de la placa; pero, debido a la diferencia de temperaturas entre las dos regiones, se produce un flujo de calor por conducción (no deseado) en sentido contrario. Estos dos flujos determinan el valor del gradiente medio de temperatura $\overline{VT_h}$.

En la figura 17(A) se muestra el diagrama del ciclo termoacústico correspondiente a un refrigerador. T_c y T_h son, respectivamente, la temperatura de las regiones fría y caliente. Si Π es el ancho de la placa, entonces $\Pi \cdot \dot{Q}_{cxi}$ es calor por unidad de tiempo que es entregado a la zona fría debido a la conducción a través de la placa y del fluido, y $\Pi \cdot \dot{Q}_c$ es el calor extraído por unidad de tiempo en forma hidrodinámica de la misma región. El promedio temporal de la potencia acústica absorbida al "bombear" el calor está dada por $\Pi \cdot \overline{\dot{W}}_2$, donde

$$\overline{\dot{W}}_2 = \int_{x_c}^{x_h} \overline{\dot{W}}_2 dx \quad (42)$$

y el promedio temporal de la potencia acústica disipada en la capa límite viscosa es $\Pi \cdot \overline{\dot{W}}_{v_2}$, con

$$\overline{\dot{W}}_{v_2} = \int_{x_c}^{x_h} \overline{\dot{W}}_{v_2} dx \quad (43)$$

$\Pi \cdot \dot{Q}_h$ es el calor hidrodinámico que se entrega por unidad de

tiempo en la región a mayor temperatura. Así, se tiene la siguiente relación

$$|\overline{\dot{Q}_h}| = |\overline{\dot{W}_2}| + |\overline{\dot{W}_{v_2}}| + |\overline{\dot{Q}_c}|, \quad (44)$$

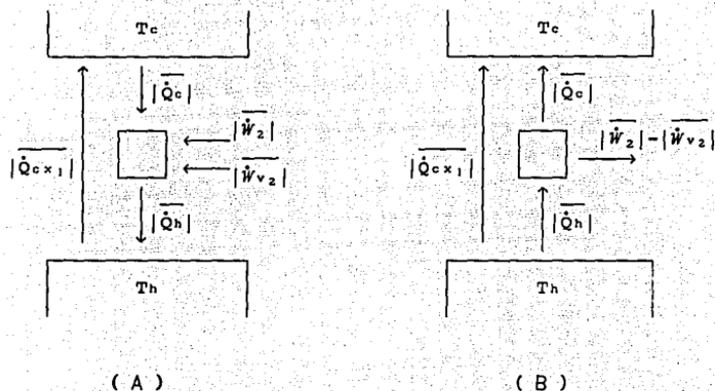


FIGURA 17. Esquemas del ciclo termoacústico correspondiente a un refrigerador (A) y a un generador (B).

En este ciclo se desea que

$$|\overline{\dot{Q}_c}| - |\overline{\dot{Q}_{c,x}}| > 0 \quad (45)$$

y también se busca un coeficiente de eficiencia grande, dado por

$$\text{COP} = \frac{|\overline{\dot{Q}_h}| - |\overline{\dot{Q}_{c,x}}| - |\overline{\dot{W}_2}| - |\overline{\dot{W}_{v_2}}|}{|\overline{\dot{W}_2}| + |\overline{\dot{W}_{v_2}}|} \quad (46)$$

B) GENERADOR

Como se mencionó anteriormente, para generar energía acústica es necesario que exista un gradiente de temperatura en la placa y en el fluido mayor que un cierto valor crítico. Para lograr esto, cada uno de los dos extremos de la placa se mantiene a una temperatura constante pero con una gran diferencia entre una y otra temperatura. Debido al flujo de calor (hidrodinámico y por conducción) se formará el gradiente de temperatura deseado. Bajo esta condición, puede ocurrir alguna de las dos situaciones siguientes: en la primera, una onda sonora es producida por un mecanismo externo al sistema y se propaga en la región donde se encuentra la placa en dirección paralela a su eje longitudinal, entonces, se genera energía acústica amplificando la onda sonora. En la segunda, las oscilaciones acústicas se producen y se mantienen por el propio fenómeno termoacústico cuando la placa es colocada dentro de un resonador acústico (por ejemplo un tubo cerrado en uno de sus extremos). En este último caso, la frecuencia de la onda sonora está determinada por las dimensiones del resonador.

La energía acústica se genera utilizando el flujo de calor hidrodinámico que ocurre de la región caliente a la fría; parte de ella se pierde por efectos viscosos cerca de la pared (en la capa límite). En este caso, el valor de V_{Tc} depende básicamente de la temperatura a la que se mantienen, por medios externos al sistema, los extremos de la placa.

En la figura 17(B) se muestra el diagrama del ciclo termoacústico correspondiente a un generador. T_c y T_h son las temperaturas de cada uno de los extremos de la placa ($T_h - T_c > 1$); $\Pi \cdot \dot{Q}_{ext}$ es calor por unidad de tiempo que es entregado a la zona fría debido a la conducción de la placa y del fluido (no deseado); $\Pi \cdot \dot{Q}_c$ es el calor por unidad de tiempo entregado en forma

hidrodinámica a la misma región. Con la ecuación (42) se calcula el promedio temporal de la potencia acústica generada, parte de la cual se transforma en calor por efectos viscosos en la capa límite; el promedio temporal de esta potencia acústica disipada se obtiene con la ecuación (43). $\Pi \cdot \dot{Q}_h$ es el calor hidrodinámico que se extrae por unidad de tiempo en la región caliente. Así, se tiene la siguiente relación

$$\overline{|\dot{Q}_h|} = \overline{|\dot{W}_2|} - \overline{|\dot{W}_{v2}|} + \overline{|\dot{Q}_c|} . \quad (47)$$

Debe observarse que para obtener oscilaciones acústicas es necesario que

$$\overline{|\dot{W}_2|} - \overline{|\dot{W}_{v2}|} > 0 . \quad (48)$$

El rendimiento del ciclo de un generador termoacústico es

$$\eta = \frac{\overline{|\dot{W}_2|} - \overline{|\dot{W}_{v2}|}}{\overline{|\dot{Q}_h|} + \overline{|\dot{Q}_{cx}|}} . \quad (49)$$

3) COMPARACION ENTRE EL CICLO DE UN REFRIGERADOR TERMOACUSTICO DE ONDA ESTACIONARIA CON EL DE ONDA VIAJERA.

En los capítulos anteriores se concluyó que el fenómeno termoacústico de onda estacionaria corresponde al ciclo de un refrigerador en el intervalo $0 \leq VT_m < VT_{Terq}$; mientras que en el caso de la onda viajera, el intervalo es $VT_{Terq} < VT_m \leq 0$.

Nuevamente, hagamos las mismas consideraciones de los dos capítulos anteriores de la aproximación de la "placa corta"; así,

en el caso de la onda estacionaria $p_1 = P_1 \cdot \sin(kx)$ y en el de la viajera $p_1 = (P_1/2) \cdot \exp(-ikx)$. Para esta dos ondas, el flujo de calor hidrodinámico en la dirección x , de la zona fría a la caliente, es máximo cuando $\nabla T_1 = 0$, y se va haciendo más pequeño conforme $|\nabla T_1|$ crece hasta llegar al valor $|\nabla T_{\text{Terq}}|$ cuando dicho flujo de calor es cero. Por otro lado, si $\nabla T_1 < \nabla T_{\text{Terq}}$, se absorberá energía sonora; conforme disminuye el valor de ∇T_1 , aumenta la potencia acústica absorbida (en ambos casos).

Por lo tanto, para el ciclo de refrigerador de onda viajera, el coeficiente de eficiencia disminuye rápidamente conforme crece la diferencia de temperatura entre las regiones fría y caliente, ya que se reduce el flujo de calor bombeado (\dot{Q}_{hk_2}) y aumenta la potencia acústica absorbida (\dot{W}_2). En cambio, para el ciclo de onda estacionaria, la potencia acústica absorbida y el flujo de calor hidrodinámico en la dirección x decrecen conforme el gradiente de temperatura media se aproxima a ∇T_{Terq} .

Otro resultado importante es el efecto del número de Prandtl (σ). De la ecuación (41) se observa que en el caso de la onda viajera, $|\nabla T_{\text{Terq}}|$ disminuye conforme σ aumenta; y si $\sigma = 1$, entonces $\nabla T_{\text{Terq}} = 0$ y en consecuencia no existe el ciclo termoacústico correspondiente a un refrigerador. Para la onda estacionaria, ∇T_{Terq} se reduce al aumentar σ sólo si $c_s > \sigma^{-1/2}$ (ecuación (33)); pero si $c_s < \sigma^{-1/2}$, entonces ∇T_{Terq} varía en forma directa con σ .

Para visualizar la diferencia de los ciclos termoacústicos de un refrigerador de onda estacionaria y de onda viajera, considérese la posición de la placa en la onda estacionaria $x = \pi/(4k)$ y $\nabla T_1 = 0$ en los dos casos. Para estos valores el flujo de calor hidrodinámico es máximo (en los dos ciclos) y además las expresiones se simplifican en gran medida.

Con los valores mencionados en el párrafo anterior, para la onda estacionaria se tiene

$$\overline{\dot{Q}_{hx_2}} = \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta}{\rho_m c} \frac{1}{1+\epsilon_s} \frac{1}{1+\sigma} P_A^2 / 2 \left(1 + \sqrt{\sigma} \right), \quad (50a)$$

$$\overline{\dot{W}_2} = - \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta^2 \omega}{\rho_m c_p} \frac{1}{1+\epsilon_s} P_A^2 / 2, \quad (50b)$$

$$\overline{\dot{W}_{v_2}} = - \frac{\delta k}{4} \sqrt{\sigma} \frac{\omega}{\rho_m c^2} P_A^2 / 2, \quad (50c)$$

y para la onda viajera plana que se propaga hacia la derecha

$$\overline{\dot{Q}_{hx_2}} = \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta}{\rho_m c} \frac{1}{1+\epsilon_s} \frac{1}{1+\sigma} (P_A/2)^2 \left(-(1-\sqrt{\sigma}) \right), \quad (51a)$$

$$\overline{\dot{W}_2} = - \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta^2 \omega}{\rho_m c_p} \frac{1}{1+\epsilon_s} (P_A/2)^2, \quad (51b)$$

$$\overline{\dot{W}_{v_2}} = - \frac{\delta k}{4} \sqrt{\sigma} \frac{\omega}{\rho_m c^2} (P_A/2)^2. \quad (51c)$$

Comparando las ecuaciones (50) y (51), resulta que para la onda viajera $\overline{\dot{W}_2}$ y $\overline{\dot{W}_{v_2}}$ tienen la mitad del valor que las cantidades correspondientes a la onda estacionaria. Sin embargo, la magnitud de $\overline{\dot{Q}_{hx_2}}$ es para la onda viajera $(1-\sqrt{\sigma})/(2(1+\sqrt{\sigma}))$ veces el valor correspondiente para la onda estacionaria. Se observa que si $\sigma = 0$, el factor es un medio y en consecuencia, se tiene el mismo

coeficiente de eficiencia para las dos ondas. En cambio, conforme σ aumenta de valor, el flujo de calor hidrodinámico y por lo tanto el coeficiente de eficiencia, resultan ser más pequeños para la onda viajera respecto a la onda estacionaria; es decir, la viscosidad afecta en mayor grado al fenómeno de onda viajera que al de onda estacionaria.

El efecto de la posición de la placa dentro de la onda estacionaria es más difícil de observar; sin embargo, puede verse que conforme la placa se acerca al antinodo de presión, crece el gradiente crítico de temperatura y disminuyen las pérdidas de energía acústica debidas a la viscosidad. Además, al aumentar el gradiente medio de temperatura, la posición de la placa donde el flujo de calor hidrodinámico es máximo se recorre hacia el antinodo de presión. Algunos otros efectos importantes de la posición de la placa respecto a la onda estacionaria se muestran por medio de un ejemplo en la sección 5 de este capítulo.

De lo mencionado anteriormente, se concluye que un refrigerador de onda estacionaria resulta más eficiente respecto al de onda viajera básicamente por los siguientes motivos: (i) Si $\sigma \neq 0$, la diferencia de temperatura que se puede alcanzar es menor para el de onda viajera ya que $|VT_{crq}|$ tiene un valor más pequeño en este caso; (ii) el flujo de calor hidrodinámico es mayor en el de onda estacionaria, aumentando la diferencia con el de onda viajera para valores grandes de σ ; (iii) en la onda viajera la potencia acústica absorbida para bombear calor es mayor conforme crece $|VT_n|$, en cambio, en la onda estacionaria, la potencia acústica absorbida disminuye al aumentar el valor de $|VT_n|$; y además, (iv) con la onda estacionaria, se obtienen mejores resultados si la placa se coloca más cerca del antinodo de presión que del nodo, ya que son menores las pérdidas de energía acústica debido a la viscosidad y es más grande el gradiente crítico de temperatura VT_{crw} .

4) COMPARACION ENTRE EL CICLO DE UN GENERADOR TERMOACUSTICO DE ONDA ESTACIONARIA CON EL DE ONDA VIAJERA.

Para que el fenómeno termoacústico corresponda al ciclo de un generador, es necesario que $\nabla T_m > \nabla T_{crw}$ y que se cumpla la ecuación (48). De las ecuaciones (32) y (40) se observa que conforme disminuye el valor de σ , también se reduce ∇T_{crw} , con lo cual son necesarias diferencias de temperatura menores.

El cumplimiento de la ecuación (48) depende de las propiedades del fluido y del sólido así como del valor del gradiente medio de temperatura. Nuevamente, es recomendable un fluido con número de Prandtl lo más pequeño posible para reducir las pérdidas viscosas y utilizar un valor no muy grande en el gradiente medio de temperatura, con lo cual, se reduce el flujo de calor por conducción de la parte caliente a la fría (\dot{Q}_{ck}), y en consecuencia, aumenta su rendimiento.

En el caso de la onda estacionaria, no resulta muy claro cuál es la posición más adecuada de la placa. Por un lado el gradiente crítico de temperatura es menor conforme la placa está más cerca del nodo de presión, sin embargo, las pérdidas viscosas son mayores. La dependencia de la posición de la placa en el funcionamiento del generador acústico podrá apreciarse más fácilmente mediante un ejemplo, el cual se presenta en la sección 6 de este capítulo.

Para comparar de una manera simple el ciclo producido por una onda estacionaria con el de una onda viajera, considérese como se hizo anteriormente, para la onda estacionaria $kx = \pi/4$ y $p_1 = P_1 \cdot \text{sen}(kx)$ y para la viajera $p_1 = (P_1/2) \cdot \exp(-ikx)$.

Con los valores mencionados en el párrafo anterior, en el caso de la onda estacionaria se tiene

$$\overline{\dot{Q}_{hx_2}} = \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} \frac{1}{1+c_s} \frac{1}{1+\sigma} (PA^2/2) \left[1+\sqrt{\sigma} - \frac{c_p}{T_m \beta \omega c} \sqrt{T_m} \frac{c_s \sigma + \sigma + \sqrt{\sigma} + 1}{1+\sqrt{\sigma}} \right], \quad (52a)$$

$$\overline{\dot{W}_2} = \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta^2 \omega}{\rho_m c_p} \frac{1}{1+c_s} (PA^2/2) \left[\frac{1}{1+\sqrt{\sigma}} \frac{c_p}{T_m \beta \omega c} \sqrt{T_m} - 1 \right], \quad (52b)$$

$$\overline{\dot{W}_{v_2}} = - \frac{\delta k}{4} \sqrt{\sigma} \frac{\omega}{\rho_m c^2} PA^2/2, \quad (52c)$$

y las ecuaciones correspondientes a la onda viajera plana que se propaga hacia la derecha, son

$$\overline{\dot{Q}_{hx_2}} = \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta}{\rho_m c} \frac{1}{1+c_s} \frac{1}{1+\sigma} (PA/2)^2 \left[-(1-\sqrt{\sigma}) - \frac{c_p}{T_m \beta \omega c} \sqrt{T_m} \frac{c_s \sigma + \sigma + \sqrt{\sigma} + 1}{1+\sqrt{\sigma}} \right], \quad (53a)$$

$$\overline{\dot{W}_2} = \frac{\delta k}{4} \frac{T_m \beta^2 \omega}{\rho_m c_p} \frac{1}{1+c_s} (PA/2)^2 \left[\frac{1}{1+\sqrt{\sigma}} \frac{c_p}{T_m \beta \omega c} \sqrt{T_m} - 1 \right], \quad (53b)$$

$$\overline{\dot{W}_{v_2}} = - \frac{\delta k}{4} \sqrt{\sigma} \frac{\omega}{\rho_m c^2} (PA/2)^2, \quad (53c)$$

De las ecuaciones (52) y (53), se puede ver que en el caso de la onda estacionaria los valores del promedio temporal de \dot{W}_2 y \dot{W}_{v_2} son el doble de los correspondientes a la onda viajera. El valor de \dot{Q}_{hx_2} es el mismo en ambos. Sin embargo, el promedio temporal de \dot{Q}_{hx_2} resulta ser menos del doble para la onda estacionaria

respecto a la onda viajera. Por lo tanto, en este caso el rendimiento de esta máquina termoacústica resulta ser mayor en el fenómeno de onda estacionaria que en el de onda viajera.

5) COMPARACION MEDIANTE UN EJEMPLO PARTICULAR, DEL CICLO DE REFRIGERADOR TERMOACUSTICO, PARA UNA ONDA ESTACIONARIA Y PARA UNA ONDA VIAJERA.

Utilizando como fluido de referencia al helio y una placa de kapton se presenta una comparación entre el ciclo de un refrigerador termoacústico producido por una onda estacionaria y por una onda viajera. Se determina el calor extraído de la zona fría y el coeficiente de eficiencia, ambos en función del gradiente medio de temperatura.

Como se ha visto, el fenómeno termoacústico debido a una onda estacionaria depende de la posición de la placa con respecto al antinodo de presión. Primero se elegirá el punto más adecuado para la ubicación de ésta de tal manera que el calor neto extraído de la región fría sea el mayor posible.

De la ecuación (44) se obtiene el flujo neto de calor extraído de la región fría, que está dado por

$$\overline{|\dot{Q}_c|} - \overline{|\dot{Q}_{cx}|} = \overline{|\dot{Q}_h|} - \overline{|\dot{Q}_{cx}|} - \overline{|\dot{W}_2|} - \overline{|\dot{W}_{v2}|}. \quad (54)$$

Con la aproximación de la "placa corta", Δx es tan pequeña respecto a la longitud de onda que $\Delta T = T_h - T_c$ es despreciable. Se pueden aproximar el promedio temporal de \dot{W}_2 y \dot{W}_{v2} (dados por las ecuaciones (42) y (43) respectivamente) por

$$\overline{\dot{W}_2} = \Delta x \cdot \overline{\dot{W}_2} \quad \text{y} \quad \overline{\dot{W}_{v2}} = \Delta x \cdot \overline{\dot{W}_{v2}}, \quad (55)$$

donde \overline{W}_2 y \overline{W}_{v_2} están evaluadas en la posición del centro de la placa.

Sin embargo, los valores de \overline{W}_2 y \overline{W}_{v_2} son muy pequeños debido a que $\Delta x \ll 1$ y en consecuencia no se apreciará su influencia en la ecuación (54). Así, para poder observar sus efectos, en adelante se sigue suponiendo que la placa es muy corta pero sólo en los cálculos numéricos del promedio temporal de \overline{W}_2 y \overline{W}_{v_2} (por medio de las expresiones 55) se tomó $\Delta x = \lambda/30$ (donde λ es la longitud de onda). Este número corresponde al valor experimental aproximado que se le ha dado en algunos refrigeradores termoacústicos. También, el valor de $\overline{Q_{cx}}$ se determinó considerando la mitad del espesor de la placa ($l/2$) y una capa de fluido con un ancho Π (igual al del sólido) y un grosor de $2\delta_k$ (dirección y). Se usó este último valor ya que en las máquinas construidas, se ha empleado un conjunto de placas paralelas entre sí con una separación entre una y otra de aproximadamente $4\delta_k$.

\dot{Q}_h es calor bombeado por unidad de tiempo que se entrega a la región de mayor temperatura, es decir, corresponde al valor de \dot{Q}_{hx_2} sobre el extremo caliente de la placa. Como Δx es muy pequeño, el valor de \dot{Q}_{hx_2} no es muy diferente entre un punto y otro del intervalo $x_c \leq x \leq x_h$. Así, \dot{Q}_h se tomará como el valor de \dot{Q}_{hx_2} evaluado en $x = (x_c + x_h)/2$. En la figura 18 se muestra una gráfica de la ecuación (54) en función de la posición del centro de la placa correspondiente a varios gradientes de temperatura. Se observa que el valor más grande del gradiente medio de temperatura que permite extraer calor de la fuente fría existe para kx aproximadamente igual a $\pi/3$.

En la figura 19 se muestra la gráfica de \overline{Q}_h , $\overline{Q_{cx}}$, \overline{W}_2 y \overline{W}_{v_2} en función de la posición de la placa correspondiente a $\nabla T_h = 750 \text{ K/m}$; y en la figura 20, se muestra el coeficiente de eficiencia en función de la posición de la placa para varios valores del gradiente medio de temperatura.

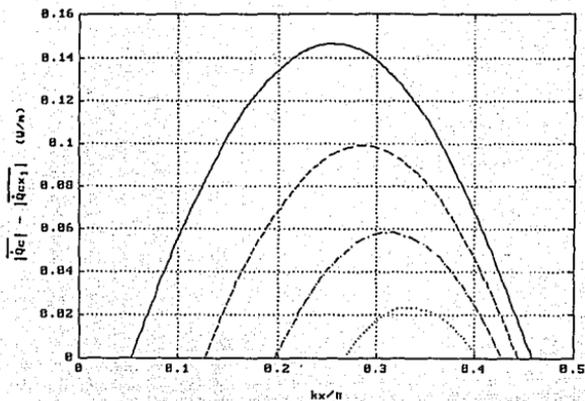


FIGURA 18: Gráfica del flujo neto de calor extraído de la región fría en función de la posición x de la placa. — $VT_m = 0$, -- $VT_m = 250$ K/m, - - $VT_m = 500$ K/m, - - $VT_m = 750$ K/m.

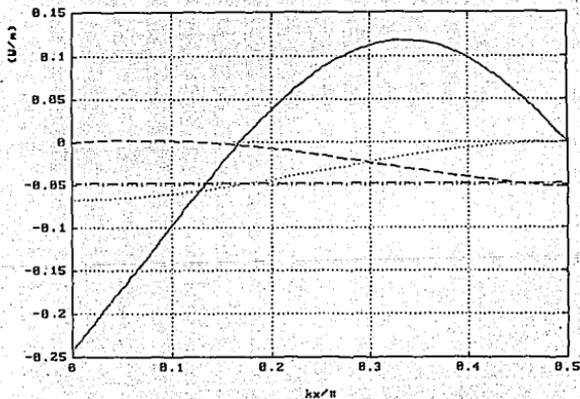


FIGURA 19: Gráfica de $\overline{Q_{hx2}}$ (—), $\overline{W_2}$ (---), $\overline{Q_{cx1}}$ (·-·), $\overline{W_{v2}}$ (- -), en función de la posición x de la placa.

En la figura 20 se aprecia que para un valor dado de ∇T_m , la posición de la placa para la cual el calor neto extraído de la parte fría es mayor, corresponde aproximadamente al mismo punto donde el coeficiente de eficiencia también es máximo. Así, para el análisis se eligió el valor $x = \pi/(3k)$ para la posición de la placa en la onda estacionaria.

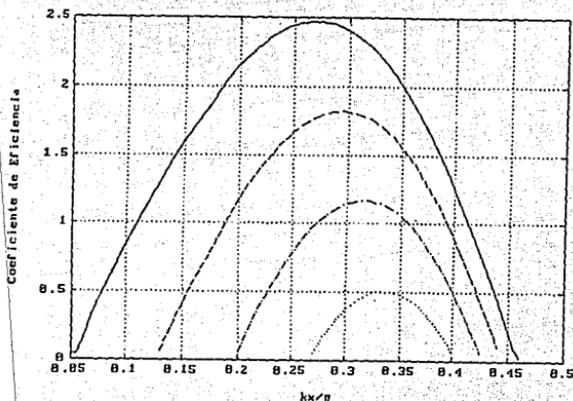


FIGURA 20: Gráfica del coeficiente de eficiencia en función de la posición x de la placa. — $\nabla T_m = 0$, -- $\nabla T_m = 250 \text{ K/m}$, ··· $\nabla T_m = 500 \text{ K/m}$, - · - $\nabla T_m = 750 \text{ K/m}$.

RESULTADOS

En la figura 21 se muestra una gráfica del flujo de calor extraído de la parte fría en función del gradiente medio de temperatura, y el coeficiente de eficiencia en función del mismo gradiente se presenta en la figura 22; ambos para el caso de la onda estacionaria.

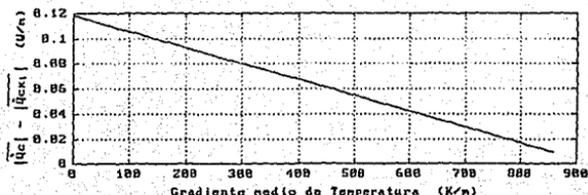


FIGURA 21: Gráfica del flujo neto de calor extraído de la región fría en función de VT_m para la onda estacionaria.

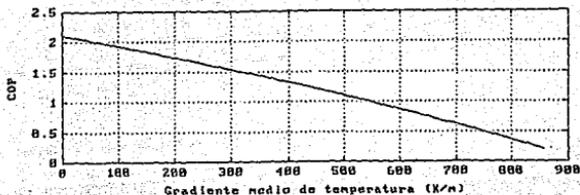


FIGURA 22: Gráfica del coeficiente de eficiencia en función de VT_m para la onda estacionaria.

En cambio, en el caso de la onda viajera, el flujo de calor hidrodinámico en la dirección x es tan pequeño que no existe un flujo de calor neto extraído de la región fría; las gráficas del promedio en el tiempo de \dot{Q}_{cx} , \dot{Q}_{hx2} , \dot{W}_2 y \dot{W}_{v2} , en función de VT_m , para la onda viajera, aparecen en la figura 23. Así, para este caso particular, no es posible construir un refrigerador termoacústico de onda viajera.

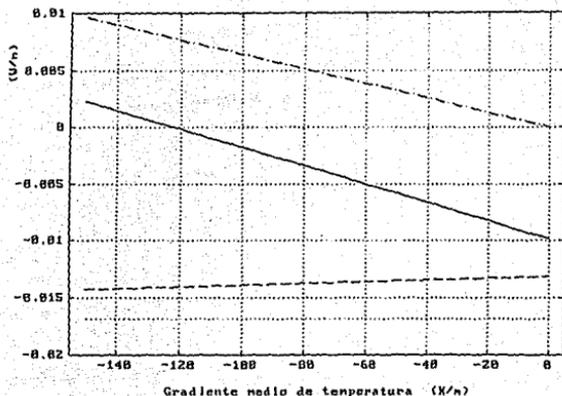


FIGURA 23: Gráfica de $\overline{Q_{hx_2}}$ (—), $\overline{W_2}$ (---), $\overline{Q_{cx_1}}$ (·-·), $\overline{W_{v_2}}$ (-·-·), en función de ∇T_0 para la onda viajera.

6) COMPARACION MEDIANTE UN EJEMPLO PARTICULAR, DEL CICLO DE GENERADOR TERMOACUSTICO, PARA UNA ONDA ESTACIONARIA Y PARA UNA ONDA VIAJERA.

En forma análoga al caso del refrigerador, primero se elegirá una posición para la placa respecto a la onda sonora estacionaria. Se desean los valores mayores posibles tanto de la potencia acústica generada como del rendimiento. La gráfica de estas dos cantidades en función de la posición de la placa se muestran respectivamente en las figuras 24 y 25 para varios valores de ∇T_0 . Se observa que la posición de la placa para la cual la potencia acústica es más grande, está muy cerca del punto medio del nodo y el antinodo de presión. En cambio, conforme aumenta el gradiente medio de temperatura, la posición de la placa donde se obtiene la mayor eficiencia está más cerca del antinodo de presión. Así, la posición elegida fue $x = 0.3\pi/k$.

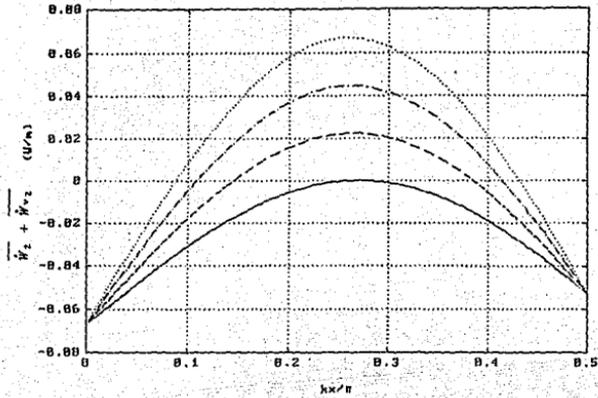


FIGURA 24: Gráfica de la potencia acústica neta producida en un ciclo en función de la posición x de la placa. — $VT_m = 4000$ K/m, -- $VT_m = 5500$ K/m, ·· $VT_m = 7000$ K/m, ··· $VT_m = 8500$ K/m.

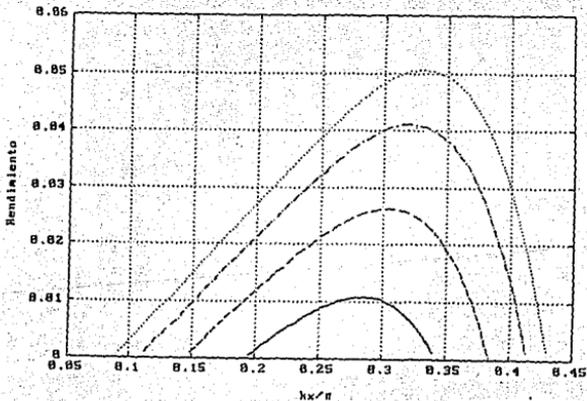
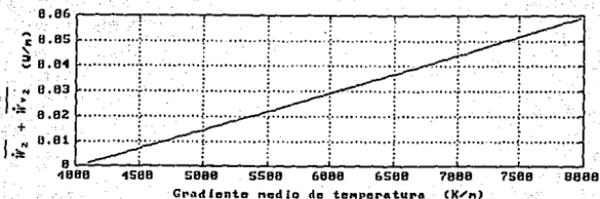
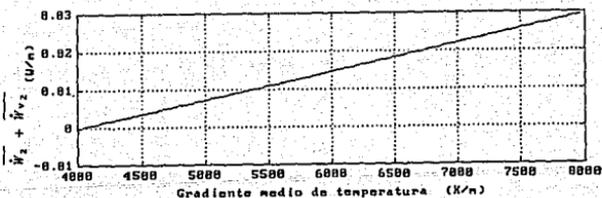


FIGURA 25: Gráfica del rendimiento del generador termoacústico en función de la posición x de la placa. — $VT_m = 4000$ K/m, -- $VT_m = 5500$ K/m, ·· $VT_m = 7000$ K/m, ··· $VT_m = 8500$ K/m.

Las gráficas de $\overline{\dot{W}}_2 + \overline{\dot{W}}_{v_2}$ correspondientes a las ondas viajera y estacionaria, se muestran en la figura 26. Se observa que esta potencia acústica es casi el doble para la onda estacionaria. Algo semejante ocurre con el rendimiento, como se aprecia en la figura 27.

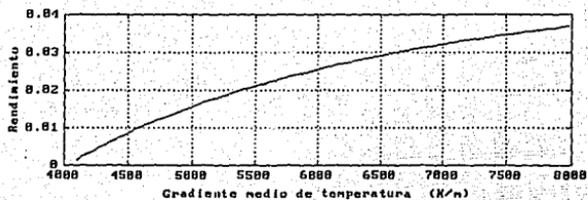


(A)

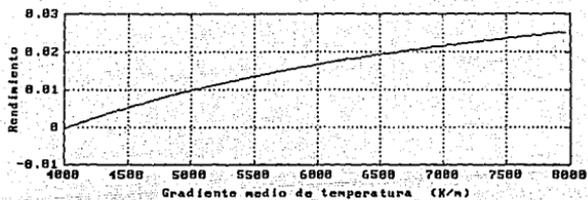


(B)

FIGURA 26: Gráfica de $\overline{\dot{W}}_2 + \overline{\dot{W}}_{v_2}$ en función de ∇T_m para el generador termoacústico. (A) de onda estacionaria, (B) de onda viajera.



(A)



(B)

FIGURA 27: Gráfica del rendimiento del generador termoacústico en función de ∇T_m . (A) de onda estacionaria, (B) de onda viajera.

7) CONCLUSIONES.

Los resultados muestran que la viscosidad del fluido de trabajo produce un efecto nocivo en el ciclo termoacústico y por lo tanto resulta conveniente elegir un fluido con un número de Prandtl pequeño (por ejemplo una mezcla de helio y xenón tiene un valor de σ aproximadamente igual a 0.20 y en una mezcla de helio y kriptón σ es aproximadamente igual a 0.26 [25]).

El ciclo termoacústico correspondiente a un refrigerador de onda estacionaria resulta más eficiente que el de onda viajera, debido básicamente, a que es relativamente más grande la energía acústica que se absorbe para producir trabajo y además, es más pequeño el flujo de calor hidrodinámico de la parte fría a la caliente, en el caso de la onda viajera.

Si el ciclo termoacústico corresponde al de un generador de ondas sonoras, entonces el rendimiento para el de onda estacionaria es un poco menor que el doble del rendimiento para el de onda viajera. Lo mismo ocurre con la potencia acústica generada. Sin embargo, hay que tener presente que se ha hecho la aproximación de que la placa tiene un largo muy pequeño. Resulta importante conocer como afecta el largo de la placa a un generador acústico, este problema se estudia en el siguiente capítulo.

CAPITULO V

FENOMENO TERMOACUSTICO PARA UNA PLACA DE LONGITUD FINITA

1) INTRODUCCION.

En este capítulo se presenta una comparación, entre el fenómeno termoacústico de onda estacionaria y el de onda viajera para una placa de longitud finita; es decir, ahora se analiza el caso en el cual $T_h - T_c$ ya no es despreciable respecto a T_m , debido a que el largo de la placa no es pequeño comparado con la longitud de onda como se consideró en los capítulos anteriores. Se estudia el ciclo de generador y se compara la potencia acústica neta generada en cada caso. Se considera que el comportamiento del fluido se puede aproximar al de un gas ideal y que el gradiente medio de temperatura (∇T_m) es constante.

2) ECUACION DE ONDA PARA p_1 EN UN GAS IDEAL CON UN GRADIENTE MEDIO DE TEMPERATURA CONSTANTE.

Si ∇T_m tiene un valor constante, entonces la ecuación de onda para p_1 (ecuación (17)) se puede resolver analíticamente para un gas ideal. En realidad, en un generador termoacústico, el gradiente medio de temperatura varía con la posición en x pues depende del flujo de calor hidrodinámico (que es función de x). Lo que no cambia es la temperatura en cada uno de los extremos de la placa. La diferencia entre éstas es grande (respecto a T_m) y por lo tanto, es importante el flujo de calor por conducción, lo que ayuda a disminuir los cambios de ∇T_m entre un punto y otro en el intervalo $x_c \leq x \leq x_h$

Resulta adecuado aproximar VT_m por un valor constante; así lo hace Raspert en su análisis del fenómeno termoacústico de onda viajera [21]. Atchley et al. [26, 27] determinan el factor de calidad Q ⁽²⁾ de un generador termoacústico y obtienen que es una buena hipótesis considerar el valor de VT_m igual a la diferencia de temperatura entre los extremos de las placas dividido por la longitud de éstas. La diferencia entre los valores teóricos de Q y los valores medidos es menor al 5%. En otros estudios, se ha determinado la diferencia de temperatura entre los extremos de las placas de un generador termoacústico que se necesita para producir oscilaciones sonoras [12, 13]. Se utilizaron distintos fluidos y se cambió la presión media. Los resultados experimentales y teóricos coincidieron muy bien suponiendo que VT_m es constante (la diferencia entre unos y otros es menor al 6 %).

En el presente trabajo no se analiza el ciclo de un refrigerador con una placa de longitud finita, ya que en este caso el gradiente de temperatura está determinado básicamente por el flujo de calor hidrodinámico, el cual depende de la posición x y por lo tanto no es obvio aproximar el gradiente medio de temperatura por un valor constante.

(2) El factor de calidad Q se define como $Q = \omega_0 / (\omega_2 - \omega_1)$, donde ω_0 es la frecuencia de resonancia del sistema, y ω_2 y ω_1 son las dos frecuencias respectivamente mayor y menor a ω_0 en las cuales la potencia promedio (en este caso acústica) es la mitad de su valor en resonancia, cuando el sistema se excita con la misma energía para cada una de las frecuencias [referencia 28, pág. 25]. Q es una medida de la disipación de energía de un sistema. Entre más grande sea Q , menor es la potencia disipada. Para una máquina termoacústica se desea que Q sea el mayor posible.

Considérese que

$$T_m = T_0[1 \pm \alpha(x-x_0)] \quad (56)$$

donde x_0 es la coordenada x del centro de la placa, T_0 es la temperatura en x_0 y α es una constante positiva. De esta manera, $\nabla T_m = \pm \alpha T_0$.

Con $\beta T_m = 1$ (gas ideal) y tomando $\alpha = [1 \pm \alpha(x-x_0)]/a$, la ecuación de onda para p_1 (ecuación (17)), toma la forma

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dp_1}{dx} + \frac{k_0}{\alpha a} p_1 = 0 \quad (57)$$

donde k_0 es el número de onda en $x = x_0$. Haciendo la sustitución $z = 2k_0 \sqrt{1 \pm \alpha(x-x_0)}/a$, resulta finalmente

$$z^2 \frac{d^2 p_1}{dz^2} + z \frac{dp_1}{dz} + z^2 p_1 = 0. \quad (58)$$

Esta es una ecuación de Bessel de orden cero, cuya solución es

$$p_1 = AH_0^{(2)}(z) + BH_0^{(1)}(z), \quad (59)$$

donde $H_0^{(1)}(z)$ y $H_0^{(2)}(z)$ son las funciones de Hankel, A y B son constantes complejas.

El primer término de la ecuación (59) corresponde a la amplitud de una onda que se propaga hacia la derecha y el segundo corresponde a la amplitud de una onda que viaja hacia la izquierda.

En este caso, los cambios de temperatura, y en consecuencia de densidad, producen modificaciones en la amplitud y en la fase de la onda sonora.

3) ONDA ESTACIONARIA.

Para una onda estacionaria, las oscilaciones de presión están dadas por las siguientes expresiones

$$\text{REGION I:} \quad p' = A_1 \cdot e^{i(\omega t - k_c x)} + B_1 \cdot e^{i(\omega t + k_c x)},$$

$$\text{REGION II:} \quad p' = \left[A_2 \cdot H_0^{(2)}(z) + B_2 \cdot H_0^{(1)}(z) \right] e^{i\omega t},$$

$$\text{REGION III:} \quad p' = A_3 \cdot e^{i(\omega t - k_h x)} + B_3 \cdot e^{i(\omega t + k_h x)},$$

(60)

donde A_l y B_l ($l = 1, 2, 3$) son constantes complejas a determinar de las condiciones de frontera (continuidad en la presión y en la flujo en volumen o gasto); k_c y k_h son el número de onda en las regiones I y III respectivamente. Obsérvese que en cada una de las tres regiones la onda estacionaria es la suma de una onda viajera a hacia la derecha y otra hacia la izquierda.

Las oscilaciones de la velocidad en la dirección x se obtienen (en ausencia de la placa) por medio de la ecuación $\rho_m (\partial u / \partial t) = -\nabla p'$ (ecuación linealizada de Euler), con lo cual

$$\text{REGION I:} \quad u = \frac{A_1}{\rho_c c_c} \cdot e^{i(\omega t - k_c x)} - \frac{B_1}{\rho_c c_c} \cdot e^{i(\omega t + k_c x)},$$

$$\text{REGION II:} \quad u = \tau \frac{i}{\rho_m c} \left[A_2 \cdot H_1^{(2)}(z) + B_2 \cdot H_1^{(1)}(z) \right] e^{i\omega t},$$

$$\text{REGION III:} \quad u = \frac{A_3}{\rho_h c_h} \cdot e^{i(\omega t - k_h x)} - \frac{B_3}{\rho_h c_h} \cdot e^{i(\omega t + k_h x)};$$

(61)

ρ_c y c_c son la densidad del fluido y la velocidad de propagación del sonido en la región I, ρ_h y c_h son las mismas variables pero en la región III.

Aplicando las condiciones de continuidad de la presión y de el flujo en volumen (gasto), en la unión de cada región, se obtienen los valores de las constantes. Partiendo de la condición de que existe un antinodo de presión en $x = \pi/(2kh)$ donde la amplitud es P_A , resulta

$$A_3 = iP_A/2, \quad B_3 = -iP_A/2,$$

$$A_2 = \frac{i\pi z_h}{4} P_A \left[\cos(kh x_h) \cdot H_0^{(1)}(z_h) + \operatorname{sen}(kh x_h) \cdot H_1^{(1)}(z_h) \right],$$

$$B_2 = -\frac{i\pi z_h}{4} P_A \left[\cos(kh x_h) \cdot H_0^{(2)}(z_h) + \operatorname{sen}(kh x_h) \cdot H_1^{(2)}(z_h) \right],$$

$$A_1 = \frac{1}{2} e^{ik_c x_c} \left[A_2 \left(H_0^{(2)}(z_c) - iH_1^{(2)}(z_c) \right) + B_2 \left(H_0^{(1)}(z_c) - iH_1^{(1)}(z_c) \right) \right],$$

$$B_1 = \frac{1}{2} e^{-ik_c x_c} \left[A_2 \left(H_0^{(2)}(z_c) + iH_1^{(2)}(z_c) \right) + B_2 \left(H_0^{(1)}(z_c) + iH_1^{(1)}(z_c) \right) \right],$$

(62)

donde $z_c = 2k_0 \sqrt{1 \pm a(x_c - x_0)}/a$ y $z_h = 2k_0 \sqrt{1 \pm a(x_h - x_0)}/a$ (los valores de z en cada una de las fronteras).

4) ONDA VIAJERA PROPAGANDOSE HACIA LA DERECHA.

En este caso, una onda sonora viajera plana se propaga hacia la derecha. Debido al gradiente medio de temperatura en la zona II,

parte de la energía de esta onda sonora se refleja, originando una onda viajera que se mueve hacia la izquierda en las regiones I y II. Siguiendo el mismo proceso usado por Raspet et al. [21], las oscilaciones de presión sonora tienen la forma

$$\text{REGION I:} \quad p' = P_B \cdot e^{i(\omega t - k_c x)} + R \cdot e^{i(\omega t + k_c x)},$$

$$\text{REGION II:} \quad p' = \left[A \cdot H_0^{(2)}(z) + B \cdot H_0^{(1)}(z) \right] e^{i\omega t},$$

$$\text{REGION III:} \quad p' = T \cdot e^{i(\omega t - k_h x)},$$

(63)

donde R, A, B y T son constantes complejas a determinar con las condiciones de frontera (continuidad en la presión y en el flujo en volumen o gasto). P_B es la amplitud de la onda incidente.

Análogamente al caso de la onda estacionaria, las oscilaciones de la velocidad en la dirección x están dadas por

$$\text{REGION I:} \quad u = \frac{P_B}{\rho_c c_c} \cdot e^{i(\omega t - k_c x)} - \frac{R}{\rho_c c_c} \cdot e^{i(\omega t + k_c x)},$$

$$\text{REGION II:} \quad u = \frac{i}{\rho_c c} \left[A \cdot H_1^{(2)}(z) + B \cdot H_1^{(1)}(z) \right] e^{i\omega t},$$

$$\text{REGION III:} \quad u = \frac{T}{\rho_h c_h} \cdot e^{i(\omega t - k_h x)}.$$

(64)

Aplicando las condiciones de continuidad de la presión y de la velocidad volumétrica en la frontera de cada región, se obtienen

los valores de las constantes, dados por

$$A = 2P_B e^{ik_c \Delta x / 2} \left\{ H_0^{(1)}(z_h) \pm i H_1^{(1)}(z_h) \right\} / D$$

$$B = -2P_B e^{ik_c \Delta x / 2} \left\{ H_0^{(2)}(z_h) \pm i H_1^{(2)}(z_h) \right\} / D,$$

$$T = \pm 8P_B e^{i(k_h + k_c) \Delta x / 2} / (D\pi z_h),$$

$$R = P_B e^{ik_c \Delta x} \left\{ 1 \pm \frac{2i}{D} \left[H_1^{(2)}(z_c) \left\{ H_0^{(1)}(z_h) \pm i H_1^{(1)}(z_h) \right\} - H_1^{(1)}(z_c) \left\{ H_0^{(2)}(z_h) \pm i H_1^{(2)}(z_h) \right\} \right] \right\},$$

(65)

donde

$$D = \left\{ H_0^{(1)}(z_h) \pm i H_1^{(1)}(z_h) \right\} \left\{ H_0^{(2)}(z_c) \mp i H_1^{(2)}(z_c) \right\} - \left\{ H_0^{(2)}(z_h) \pm i H_1^{(2)}(z_h) \right\} \left\{ H_0^{(1)}(z_c) \mp i H_1^{(1)}(z_c) \right\}$$

y se ha tomado por simplicidad $x_0 = 0$ (posición del centro de la placa).

5) VALORES NUMERICOS UTILIZADOS EN EL ANALISIS.

Por las mismas razones mencionadas anteriormente, en el análisis siguiente se tomó al helio como el fluido de trabajo y al kapton como el material de la placa. También se supuso que la

densidad de este gas es proporcional a la presión e inversamente proporcional a la temperatura y $\beta = 1/T_m$ (relaciones para un gas ideal). Se consideró $T_c = 20^\circ\text{C}$ (constante) y $f = 800$ hz.

Se obtuvo una expresión polinomial para la viscosidad dinámica del helio en función de la temperatura a partir de datos experimentales [referencia 29, páginas F42 y F43]. Un polinomio de tercer grado en T_m fue la curva que mejor se ajustó. El mismo proceso se hizo con la conductividad térmica del helio, los datos experimentales [referencia 29, página E3] se ajustaron con un polinomio de cuarto grado en T_m . En el análisis se tomó γ , σ , ρ_s , c_s y K_s como constantes. La posición de la placa en la onda estacionaria fue $x_0 = \pi/(3kh)$.

6) ENERGIA ACUSTICA REFLEJADA EN LA ONDA VIAJERA.

En la figura 28 se muestra la gráfica de la intensidad acústica⁽³⁾ de las ondas viajeras respecto a la intensidad de la onda incidente, en función de la longitud de la placa. La intensidad acústica en región II es calculada en $x = 0$ (centro de la placa). Se tomó $\nabla T_m = 8\ 000$ K/m. Se observa que al aumentar el largo de la placa, también aumenta la intensidad acústica de la onda reflejada de la región I, en consecuencia disminuye la energía de la onda transmitida. Puede verse también que si el largo de la placa es de 20 cm, entonces la energía de la onda transmitida es aproximadamente un 18% menor que la energía de la onda incidente.

(3) La intensidad acústica I se define como el promedio temporal del flujo de energía en la dirección de propagación de una onda sonora. Está dada por $I = \overline{p'v'}$, donde p' y v' son la presión y la velocidad acústicas [referencia 28, pág 121].

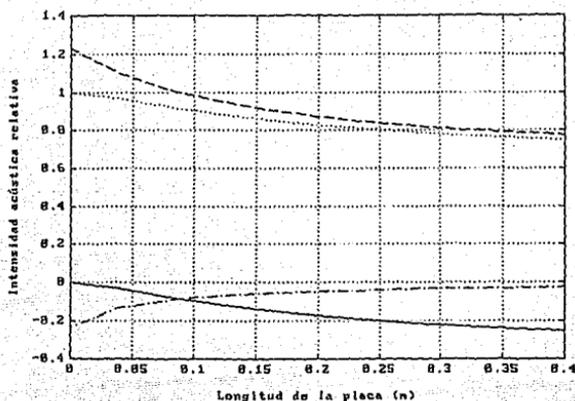


FIGURA 28: Gráfica de la intensidad acústica respecto a la intensidad de la onda incidente vs. la longitud de la placa. — onda reflejada de la región I, -- onda viajera derecha en la región II, - - onda viajera izquierda en la región II, -- onda transmitida en la región III.

En la figura 29 se muestra la gráfica de la intensidad acústica relativa en función de V_{Th} . En este caso el largo de la placa es de 10 cm. Se aprecia que al aumentar el valor de V_{Th} , también crece el flujo neto de energía acústica reflejada.

Se concluye que cuando aumenta la diferencia de temperatura $T_h - T_c$, disminuye la energía acústica transmitida de la región I a la III. En consecuencia, no resulta muy eficiente el fenómeno termoacústico para amplificar una onda sonora viajera.

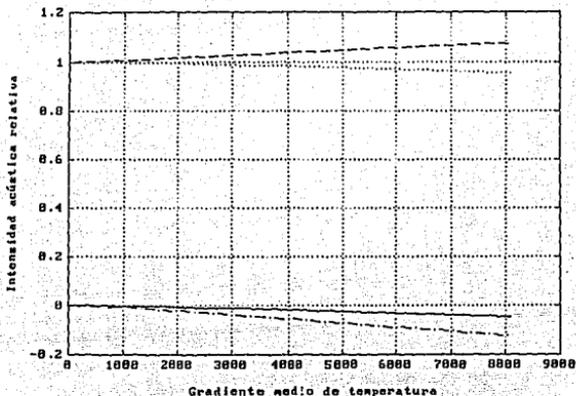


FIGURA 29. Gráfica de la intensidad acústica respecto a la intensidad de la onda incidente vs. V_{Tm} . — onda reflejada de la región I, -- onda viajera derecha en la región II, -- onda viajera izquierda en la región II, -- onda transmitida en la región III.

7).- POTENCIA ACUSTICA TOTAL.

Una vez conocida p_i , con las ecuaciones (23) y (28) se determinan, respectivamente, la potencia acústica generada (\dot{W}_2) y la potencia disipada debido a la viscosidad (\dot{W}_{v2}). La suma de éstas dos da como resultado la potencia acústica neta generada por unidad de área de la placa en cada punto x . Llamémos a la integral de esta cantidad, desde x_c hasta x_h , la potencia acústica total \dot{W}_{T2} ,

$$\dot{W}_{T2} = \int_{x_c}^{x_h} \left(\dot{W}_2 + \dot{W}_{v2} \right) dx . \quad (66)$$

Para determinar el valor de $\overline{\dot{W}}_{r2}$, se hizo una evaluación numérica de la integral anterior usando el método trapezoidal en un programa de cómputo en MatlabTM.

a) EFECTO DEL GRADIENTE MEDIO DE TEMPERATURA.

Las gráficas de $\overline{\dot{W}}_{r2}$ en función del gradiente medio de temperatura, para las ondas estacionaria y viajera, se muestran respectivamente en las figuras 30 y 31. Se aprecia que la variación es casi lineal; sin embargo, para la onda estacionaria la potencia acústica total es aproximadamente 2.5 veces mayor que para la onda viajera.

b) EFECTO DE LA LONGITUD DE LA PLACA.

En las figuras 32 y 33 se observa que tanto para la onda estacionaria como para la viajera, existe un valor óptimo en la longitud de la placa. El promedio temporal de \dot{W}_{r2} aumenta con la longitud de la placa hasta llegar a este valor óptimo y luego disminuye hasta cero, adquiriendo en adelante valores negativos lo que indica que el efecto total es la absorción de energía acústica. Se aprecia también, que la potencia acústica total es mayor en el caso de la onda estacionaria.

En las figuras 34 y 35 se muestra el promedio temporal de $\dot{W}_2 + \dot{W}_{v2}$ a lo largo de la placa, correspondiente a cinco longitudes de ésta. La potencia acústica disipada a lo largo de la placa es mostrada en las figuras 36 y 37. Comparando estas dos últimas gráficas, puede verse que cualitativamente el comportamiento es muy similar, sin embargo, cuantitativamente las pérdidas de potencia acústica debido a la viscosidad son mayores para la onda estacionaria.

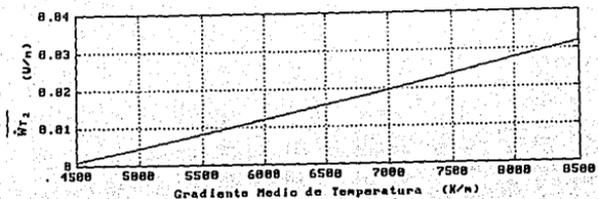


FIGURA 30: Gráfica de \bar{W}_{T_2} vs. gradiente medio de temperatura. La longitud de la placa es de 2 cm y la posición del centro de la placa respecto a la onda estacionaria es $x_0 = 0.3\pi/\lambda$.

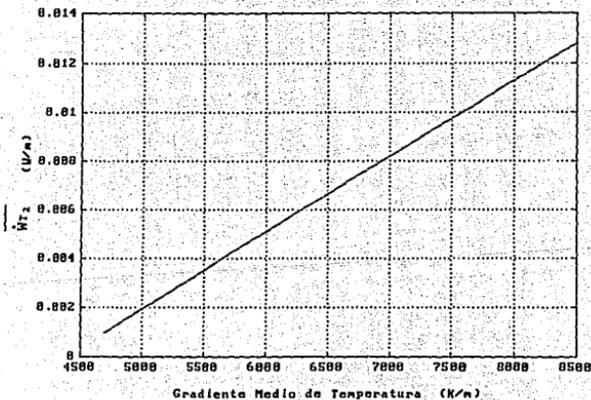


FIGURA 31: Gráfica de \bar{W}_{T_2} vs. gradiente medio de temperatura para la onda viajera.

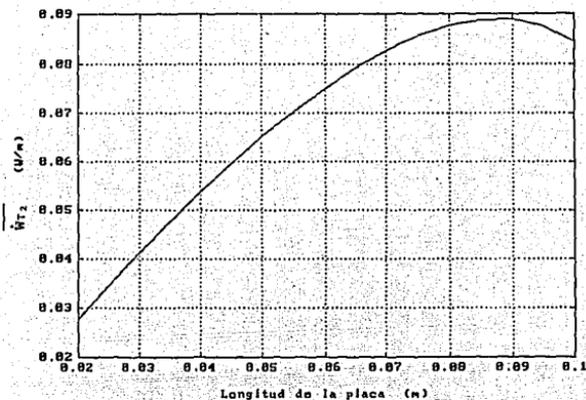


FIGURA 32: Gráfica de \bar{W}_{r2} vs. longitud de la placa para la onda estacionaria.

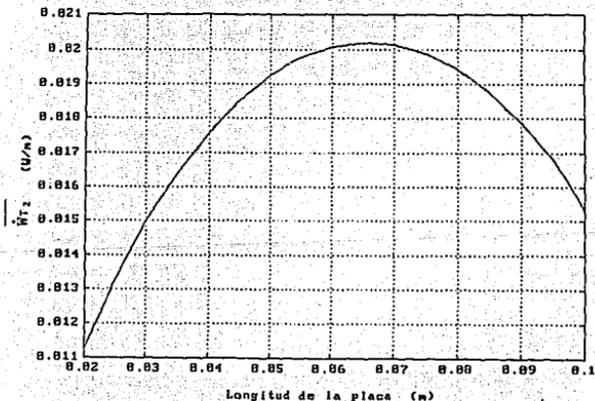


FIGURA 33: Gráfica de \bar{W}_{r2} vs. longitud de la placa para la onda viajera.

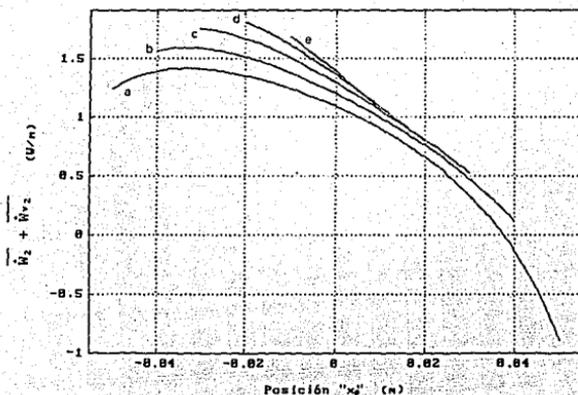


FIGURA 34: Gráficas de $\overline{W}_2 + \overline{W}_{v2}$ vs. la posición sobre la placa " x_p " (onda estacionaria), correspondientes a 5 longitudes de ésta: a) 10 cm, b) 8 cm, c) 6 cm, d) 4 cm, e) 2cm. El origen corresponde al centro de la placa.

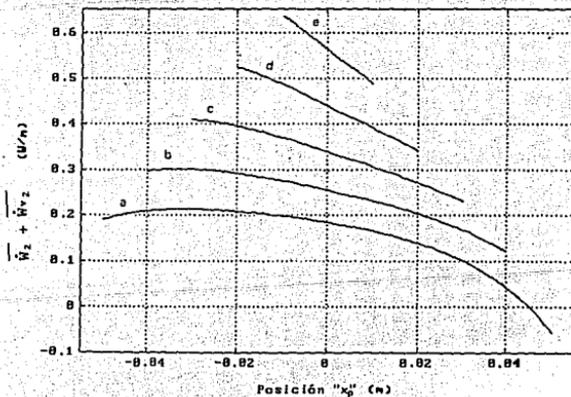


FIGURA 35: Gráficas de $\overline{W}_2 + \overline{W}_{v2}$ vs. la posición sobre la placa " x_p " (onda viajera), correspondientes a 5 longitudes de ésta: a) 10 cm, b) 8 cm, c) 6 cm, d) 4 cm, e) 2 cm. El origen corresponde al centro de la placa.

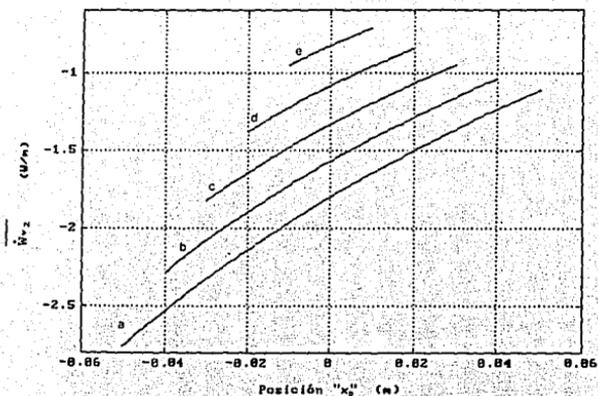


FIGURA 36: Gráficas de \dot{W}_{v2} vs. la posición sobre la placa " x_p " (onda estacionaria), correspondientes a 5 longitudes de ésta: a) 10 cm, b) 8 cm, c) 6 cm, d) 4 cm, e) 2cm. El origen corresponde al centro de la placa.

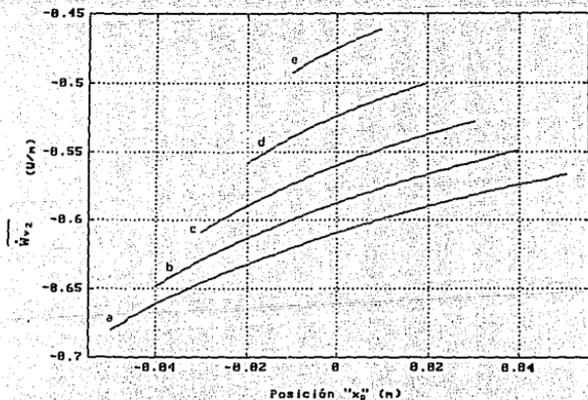


FIGURA 37: Gráficas de \dot{W}_{v2} vs. la posición sobre la placa " x_p " (onda viajera), correspondientes a 5 longitudes de ésta: a) 10 cm, b) 8 cm, c) 6 cm, d) 4 cm, e) 2cm. El origen corresponde al centro de la placa.

Como se mencionó anteriormente, en el caso de la onda viajera, la amplitud de la onda reflejada se incrementa a medida que aumenta la longitud de la placa; esto disminuye la amplitud de las oscilaciones de la presión y de la velocidad de partícula en las regiones II y III, haciendo menor la disipación de potencia acústica por viscosidad pero también la energía acústica generada.

8) CONCLUSIONES.

Los resultados muestran que la reflexión de la energía sonora en la zona de la placa disminuye la cantidad de potencia acústica generada por una onda viajera. Conforme aumenta la diferencia de temperatura entre las regiones fría y caliente, (ya sea por la longitud de la placa o por el incremento del gradiente medio de temperatura) también crece la intensidad acústica de la onda reflejada, disminuyendo así la intensidad de la onda transmitida.

Se concluye también que existe un valor óptimo para la longitud de la placa en el cual la potencia acústica generada es máxima. Esta longitud óptima y la potencia acústica que se genera son mayores para la onda estacionaria.

De los resultados anteriores se concluye que la generación de energía por medio del fenómeno termoacústico es más eficiente en el caso de una onda estacionaria que en el de onda viajera.

Por otra parte, es importante mencionar que se repitieron las gráficas de los capítulos II y III utilizando las expresiones correspondientes a p , y y u , deducidas en este capítulo. Se le dió un valor de 3 mm a la longitud de la placa mientras que λ tenía un valor de 1.26 m ($f = 800$ Hz). Se obtuvieron prácticamente los mismos resultados que aquellos que se determinaron con la aproximación de la "placa corta".

CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo de tesis que no han sido reportados en la literatura existente, son las siguientes:

- Se muestra que en el fenómeno termoacústico de onda viajera existen dos valores críticos del gradiente medio de temperatura, en uno de los cuales no se absorbe ni se genera energía acústica y, en el otro, el flujo de calor hidrodinámico paralelo a la placa es cero.

- Se demuestra que existe un intervalo de valores para el gradiente medio de temperatura en el cual el ciclo termoacústico de onda viajera corresponde al de un refrigerador y otro intervalo donde el ciclo es el de un generador. También se muestra que para valores de ese gradiente fuera de los dos rangos anteriores se absorbe energía acústica para bombear calor de la parte caliente a la fría (este flujo de calor ocurre de manera natural en ese sentido).

- Se muestra explícitamente que en el fenómeno termoacústico, tanto de onda estacionaria como de onda viajera, el calor por conducción paralelo a la placa producido por las oscilaciones de temperatura y el calor hidrodinámico perpendicular a ella son prácticamente despreciables.

- Tanto para el fenómeno termoacústico de onda estacionaria como para el de onda viajera, la energía acústica neta que se genera o que se absorbe en un ciclo depende de la distancia a la placa y existen regiones alternadas en donde la energía acústica se absorbe o se genera. El ancho de estas regiones depende del

valor del gradiente medio de temperatura en la dirección paralela a la placa.

- El mismo efecto ocurre con el flujo de calor hidrodinámico en la dirección x . También se demuestra que existen zonas donde simultáneamente se absorbe energía acústica y se bombea calor de la parte caliente a la fría ("efecto nocivo").

- Existe una relación entre el flujo de calor por conducción en la dirección perpendicular a la placa (debido a las oscilaciones de la temperatura y la presión de la onda sonora) y las zonas donde se absorbe y donde se genera energía acústica. Se comprobó que si el efecto neto es agregar calor al fluido cuando está comprimido y extraerlo mientras está expandido, entonces se produce energía acústica, y si por el contrario, se extrae calor del fluido mientras está comprimido y se agrega cuando está expandido, entonces se absorbe energía acústica, verificando explícitamente la hipótesis de Rayleigh en relación a la generación de energía acústica. Los resultados muestran que el calor ganado o perdido se debe al flujo de calor por conducción en la dirección perpendicular a la placa (este resultado se había considerado como una hipótesis de trabajo en estudios previos).

- Se concluye que para el ciclo termoacústico correspondiente al de un generador, existe un valor óptimo para la longitud de la placa en el cual la potencia acústica generada es máxima; mostrando, también, que esta longitud óptima y la potencia acústica generada son mayores para el caso de la onda estacionaria.

- De este trabajo se concluye que resulta mucho más eficiente el ciclo termoacústico de onda estacionaria que el de onda viajera. En el ciclo de un refrigerador esto se debe básicamente a que el flujo de calor hidrodinámico y $|VT_{erq}|$ son más grandes y a que la potencia acústica utilizada para bombear calor es menor, en

la onda estacionaria respecto a la viajera. Si el ciclo es el de un generador, en el fenómeno de onda estacionaria la potencia acústica generada y el largo óptimo de la placa son mayores que en el de onda viajera y además; en éste último, parte de la energía acústica se refleja debido a los cambios de temperatura en el medio.

- También se demuestra que para el fenómeno de onda viajera la viscosidad del fluido de trabajo disipa una cantidad no despreciable de energía sonora (contradiendo la hipótesis de Ceperley [18-20]).

Algunas de las aportaciones originales antes mencionadas dieron origen a un artículo que ha sido aceptado para su publicación [30].

Por otro lado, algunos de los resultados del presente trabajo contradicen las conclusiones de Ceperley [18-20], quien estableció que el ciclo termoacústico de onda viajera debe tener un rendimiento y un coeficiente de eficiencia mayores debido a que en una onda viajera la velocidad y la presión están en fase, lo que origina un ciclo de compresión, calentamiento, expansión y enfriamiento similar al que ocurre en una máquina de Stirling. En cambio, en una onda estacionaria la compresión y el calentamiento ocurren simultáneamente al igual que la expansión y el enfriamiento. Ceperley parte de la hipótesis de que cuando la onda sonora plana pasa a través de un conjunto de placas alineadas en la dirección de las oscilaciones acústicas, los procesos son prácticamente isotérmicos. Para lograr esta condición propone que las placas deben de estar muy próximas una con otra. También supone que cambiando la separación de las placas entre sí a lo largo de la dirección de propagación de la onda, es posible mantener constante la amplitud de la presión sonora y eliminar las reflexiones de la onda viajera incidente.

De este trabajo se concluye que la sola existencia del gradiente medio de temperatura da como resultado que parte de la energía de una onda sonora viajera incidente se refleje y que estas reflexiones varíen en forma directa con la diferencia de temperatura. Por otro lado, también origina que tanto la amplitud de la velocidad de partícula como la amplitud de la presión sonora cambien conforme la onda se desplaza a través de la región donde existe el gradiente medio de temperatura. Por lo tanto, parece que no es suficiente modificar la separación de las placas para que la presión permanezca constante y para eliminar las reflexiones de la onda viajera incidente, como lo consideró Ceperley.

Los resultados demuestran que los efectos del fenómeno termoacústico son importantes sólo en una región de fluido cercana a la placa, con un espesor aproximado de tres veces la profundidad de penetración térmica. El colocar una placa muy cerca de otra para lograr procesos prácticamente isotérmicos, daría como resultado un menor flujo de calor hidrodinámico paralelo a la placa y una potencia acústica generada o absorbida más pequeña.

Además, como se mencionó anteriormente, el fenómeno termoacústico depende del intercambio de calor por conducción entre el fluido y la placa en la dirección perpendicular a las caras de ésta. Para que la temperatura del fluido cercano a la placa se aproxime a la de ésta, es necesario que transcurra un cierto tiempo. Podría pensarse que es precisamente esta característica lo que hace más eficiente el fenómeno de onda estacionaria. Para este tipo de ondas, la diferencia de fase entre presión y velocidad produce, que para un punto dado, el máximo incremento de presión ocurra cuando la velocidad es cero, y en consecuencia existe un tiempo de espera en el que se lleva cabo el intercambio de calor. Sin embargo, en la onda viajera, la velocidad y la presión están en fase, es decir, el máximo cambio de presión es simultáneo con la mayor velocidad del fluido y, en consecuencia, no permite un adecuado intercambio calorífico entre el fluido y la placa.

Por otra parte, es importante agregar que el criterio de Rayleigh también se debe poder explicar en términos de la diferencia de fase entre la onda de presión y la onda térmica. En esta dirección han estado trabajado G. Huelsz y E. Ramos en el Laboratorio de Energía Solar IIM-UNAM [31].

APENDICE

A) PROFUNDIDAD DE PENETRACION TERMICA Y VISCOSA.

Cuando un fluido viscoso se mueve junto a una pared sólida, su velocidad se anula por completo sobre la superficie. La disminución de la velocidad hasta cero se realiza casi exclusivamente en una capa delgada que recibe el nombre de capa límite viscosa, caracterizada por la presencia de gradientes de velocidad considerables que dan como resultado una disipación importante de momento por efectos viscosos [referencia 32, páginas 163, 232].

Algo semejante ocurre si el fluido tiene una conductividad térmica diferente de cero y una temperatura distinta a la de la pared sólida. La temperatura de la frontera y la del fluido que está en contacto con ella deben ser iguales. Como resultado se produce un gradiente de temperatura en una capa angosta de fluido (capa límite térmica), en donde la temperatura varía rápidamente desde su valor en el fluido hasta su valor en la frontera. Esto origina un flujo de calor por conducción entre el fluido y la pared [referencia 32, páginas 163, 232].

Una onda sonora genera oscilaciones periódicas en el fluido (en la presión, la velocidad, la temperatura, etc.) alrededor de sus valores medios. Por lo tanto, cerca de una pared maciza existe una diferencia de temperatura con fluctuación periódica entre el fluido y la pared aunque la temperatura media de ambos sea la misma, apareciendo el efecto de la capa límite térmica. Algo análogo sucede con la velocidad del fluido debido a la perturbación acústica, presentándose también el efecto de la capa límite viscosa [referencia 32 página 341].

En una onda armónica simple de frecuencia angular ω , la escala de distancias dentro de un fluido sobre la cual las paredes lo afectan (espesor de las capas límite) como un resultado de los procesos irreversibles de la difusión del calor y del momento, está determinada por la ley de la difusión [15]. Para la difusión unidimensional en la dirección y , es dada por la bien conocida ecuación

$$\langle y^2 \rangle^{1/2} = (2Dt)^{1/2}, \quad (A1)$$

donde D es el coeficiente de difusión del medio y $\langle y^2 \rangle^{1/2}$ es el valor rms de la distancia en la que se difunde alguna cantidad en un tiempo t ($y = 0$ para $t = 0$). Así, la escala de distancias para la difusión del calor se obtiene al sustituir en la ecuación (A1) t por ω^{-1} y D por la difusividad térmica κ (o coeficiente de difusión térmica)

$$\kappa = K/(\rho_m c_p), \quad (A2)$$

donde K es la conductividad térmica del fluido, ρ_m su densidad y c_p el calor específico a presión constante; con lo que resulta

$$\delta_k = (2\kappa/\omega)^{1/2}; \quad (A3)$$

en este caso, a $\langle y^2 \rangle^{1/2}$ se le llama la profundidad de penetración térmica δ_k .

De la misma manera, la escala de distancias para la difusión de momento (vorticidad) se obtiene al sustituir en la ecuación (A1) t por ω^{-1} y D por la viscosidad cinemática ν (o coeficiente de difusión viscosa)

$$\nu = \eta/\rho_m, \quad (A4)$$

donde η es la viscosidad dinámica del medio; con lo que resulta

$$\delta_v = (2\nu/\omega)^{1/2}, \quad (A5)$$

ahora, a $\langle y^2 \rangle^{1/2}$ se le llama la profundidad de penetración viscosa δ_v .

δ_k y δ_v determinan el grueso de las capas límite térmica y viscosa respectivamente, para una onda sonora que se propaga junto a una pared. Fuera de estas capas límite, las pérdidas de energía acústica son despreciables [referencia 23, capítulo 4].

Como se menciono arriba, cuando una onda sonora se propaga junto a una pared se produce un intercambio de calor entre ésta y el fluido. Por lo tanto, en forma análoga, también se genera una capa límite térmica en el sólido, cuyo espesor δ_s (llamada también la profundidad de penetración térmica) está dado por

$$\delta_s = (2\kappa_s/\omega)^{1/2}, \quad (A6)$$

donde κ_s es la difusividad térmica (o coeficiente de difusión térmica) de la pared.

• B) DEDUCCION DE $\rho_1 = -\rho\beta T_1 + \gamma p_1/c^2$.

Con base en resultados empíricos, se conoce, que se puede describir con dos variables el estado termodinámico de un fluido simple [referencia 22, página 7] definido éste, como aquel sistema que es macroscópicamente homogéneo, y que no es afectado por campos eléctricos, magnéticos o gravitacionales.

Así, es posible expresar la densidad de un fluido simple, en estado de equilibrio, en función de la presión y la temperatura.

Si el fluido simple es perturbado y la presión y la temperatura cambian poco respecto a su valor en el estado de equilibrio, se puede aproximar la variación en la densidad con la siguiente ecuación

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp, \quad (A7)$$

donde ρ es la densidad del fluido, T su temperatura y p su presión.

Por otro lado, la razón (γ) entre los calores específicos a presión constante c_p y a volumen constante c_v , se puede expresar como

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{c_p}{c_v} &= \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_v = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v \\ &= \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \end{aligned} \quad (A8)$$

donde S es la entropía del sistema y V su volumen. De esta forma, se tiene

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \gamma \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S, \quad (A9)$$

y considerando que la masa es constante, resulta

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \gamma \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \quad (A10)$$

Utilizando la relación anterior y la definición de la compresibilidad isotérmica β

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (\text{A11})$$

para sustituir las derivadas parciales en la ecuación (A7), se obtiene

$$d\rho = -(\rho\beta) dT + \gamma \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S dp. \quad (\text{A12})$$

Finalmente, tomando una aproximación a primer orden en la ecuación (A12), considerando que la velocidad de propagación del sonido (c) está dada por

$$c^2 = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \right]_{\rho=\rho_m}, \quad (\text{A13})$$

se obtiene

$$\rho_1 = -\rho_m \beta T_1 + \gamma p_1 / c^2. \quad (\text{A14})$$

donde ρ_1 , T_1 y p_1 son respectivamente las variaciones de densidad, Temperatura y presión a partir de sus valores en el estado de equilibrio.

C) DEDUCCION DE $s_1 = c_p T_1 / T_m - \beta p_1 / \rho_m$.

Con base en lo mencionado en la sección anterior, es posible expresar la entropía de un fluido simple en función de la presión y la temperatura cuando existe un estado de equilibrio. Si el fluido es perturbado y estas dos variables cambian poco respecto su valor en el estado de equilibrio, se puede aproximar la

variación en la entropía por unidad de masa con la siguiente ecuación

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp . \quad (A15)$$

Empleando la relación de Maxwell

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial (1/\rho)}{\partial T} \right)_p \quad (A16)$$

y la ecuación (A11), se obtiene

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = - \frac{\beta}{\rho} . \quad (A17)$$

Utilizando la relación anterior y la definición del calor específico a presión constante

$$c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad (A18)$$

para sustituir las derivadas parciales de la ecuación (A15), resulta

$$ds = (c_p/T)dT - (\beta/\rho)dp . \quad (A19)$$

Si s_i , T_i y p_i representan respectivamente los cambios de la entropía por unidad de masa, de la temperatura y de la presión, a partir de sus valores en el estado de equilibrio, entonces, tomando

una aproximación a primer orden en la ecuación (A19), se obtiene finalmente

$$s_i = c_p T_i / T_m - \beta p_i / \rho_m \quad (A20)$$

donde T_m es la temperatura del fluido en el estado de equilibrio.

D) DECUACION DE $i\omega \rho_m u_i = -\partial p_i / \partial x + \eta \cdot \partial^2 u_i / \partial y^2$

La ecuación de movimiento de un fluido viscoso (despreciando las variaciones de la viscosidad dinámica η con la posición) es [referencia 32, ecuación (15.6)]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (A21)$$

donde \mathbf{v} es el vector velocidad y ζ la segunda viscosidad.

A primer orden y con las expresiones (1) de las variables y condiciones mencionadas en la sección 2 del capítulo I, la componente x de la ecuación (A21) es

$$i\omega \rho_m u_i = -\frac{\partial p_i}{\partial x} + \eta \nabla^2 u_i + (\zeta + \eta/3) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) \quad (A22)$$

La componente de la velocidad en la dirección y (perpendicular a la superficie de la placa) v_i , es resultado de los gradientes de velocidad dentro de la capa límite viscosa. En este caso, $\partial/\partial y$ es del orden de $1/\delta_v$, $\partial/\partial x$ es del orden de $k = \omega/c$ (ω es la frecuencia angular de la onda sonora y c la velocidad de propagación del sonido) y u_i/v_i es del orden de $(1/k)/\delta_v$ [3], con $\delta_v \ll 1/k$. Por lo tanto, todas las derivadas parciales de las componentes de la velocidad (u_i y v_i) de la ecuación (A22) pueden

ser despreciadas respecto a $\partial^2 u_i / \partial y^2$, y esa ecuación se reduce a

$$i\omega\rho_m u_i = -\frac{\partial p_i}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}. \quad (\text{A23})$$

E) DEDUCCION DE
$$\kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - i\omega T_1 = u_i \frac{\partial T_m}{\partial x} - i\omega \frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_i.$$

La ecuación general de transferencia de calor, está dada por [referencia 32, ecuación (49.4)]

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right] = \nabla \cdot (K \nabla T) + \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (\text{A24})$$

donde σ'_{ij} es el tensor de tensiones de la viscosidad.

Se desea linealizar la ecuación (A24). Así, eliminando el último término, que es de segundo orden en las velocidades, y utilizando la ecuación (A19) para escribir la entropía por unidad de masa en términos de la presión y la temperatura, se obtiene

$$\begin{aligned} \rho T \left[\frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + u \left(\frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \left(\frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial T}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

Tomando una expansión a primer orden en la ecuación anterior y sustituyendo las expresiones de las variables dadas por las

relaciones 1 del capítulo 1, considerando el espacio donde se encuentra el fluido, resulta

$$\rho_m T_m \left[i\omega \frac{c_p}{T_m} T_1 - i\omega \frac{\beta}{\rho_m} p_1 + u_1 \left(\frac{c_p}{T_m} \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right) . \quad (A26)$$

K es una función de la temperatura, la cual es constante en la dirección y.

Despreciando de nuevo $\partial T_1 / \partial x$ que es del orden de k comparada con $\partial T_1 / \partial y$ que es del orden de $1/\delta k$ (puesto que $1/k \gg \delta k$) [3], de la ecuación (A26) se obtiene

$$i\omega \rho_m c_p T_1 - i\omega T_m \beta p_1 + u_1 \rho_m c_p \frac{\partial T_m}{\partial x} = K \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} ; \quad (A27)$$

dividiendo entre $\rho_m c_p$ y usando la relación (A2), finalmente se llega a

$$\kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - i\omega T_1 = u_1 \frac{\partial T_m}{\partial x} - i\omega \frac{T_m \beta}{\rho_m c_p} p_1 . \quad (A28)$$

F) DEDUCCION DE $\kappa_s \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial y^2} - i\omega T_{s1} = 0 .$

Dentro del sólido la velocidad es cero y la presión puede considerarse como constante ya que la presión acústica en el

fluido (p_1) es mucho menor que el valor medio (p_m), así la ecuación (A25) toma la forma

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} . \quad (A29)$$

Tomando una expansión a primer orden en la ecuación anterior; utilizando las expresiones de las variables dadas por (1) y (2) en el capítulo 1, se obtiene

$$i\omega \rho_s c_s T_{s1} = \kappa_s \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial y^2} , \quad (A30)$$

donde se ha despreciado $\partial T_{s1}/\partial x$ que es del orden de k respecto a $\partial T_{s1}/\partial y$ que es del orden de $1/\delta_s$, puesto que $1/k \gg \delta_s$ (donde δ_s es la profundidad de penetración térmica en la placa). ρ_s , K_s y c_s son respectivamente la densidad media, la conductividad térmica y el calor específico a presión constante en la placa. Por último, dividiendo entre $\rho_s c_s$ y tomando en cuenta que $\kappa_s = K_s/(\rho_s c_s)$, se llega a

$$\kappa_s \frac{\partial^2 T_{s1}}{\partial y^2} - i\omega T_{s1} = 0 . \quad (A31)$$

donde κ_s es la difusividad térmica de la placa.

REFERENCIAS

- 1.- N. Rott, "Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes", *Zh. Angew. Math. phys.* 20, 1969, pág. 230.
- 2.- N. Rott, "Thermoacoustics", *Adv. Appl. Mech.* 20, 1980, pág. 135.
- 3.- G.W. Swift, "Thermoacoustic engines", *J. Acoust. Soc. Am.* 84 (4), 1988, pág. 1145.
- 4.- J. Wheatley, T. Hofler, G.W. Swift and A. Migliori, "An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine", *J. Acoust. Soc. Am.* 74 (1), 1983, pág. 153.
- 5.- W. P. Arnott, H. E. Bass, R. Raspet, "General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross sections", *J. Acoust. Soc. Am.* 90 (6), 1991, pág. 3228.
- 6.- G. W. Swift, R. M. Keolian, "Thermoacoustics in pin-array stacks", *J. Acoust. Soc. Am.* 94 (2), 1993, pág. 941.
- 7.- J. W. Strutt (Lord Rayleigh), "The Theory of Sound", Dover, New York, 1945, págs. 230-231.
- 8.- P. Merkli y H. Thomann, "Thermoacoustic effects in a resonance tube", *J. Fluid Mech.* 70, 1975, pág. 161.
- 9.- G. W. Swift, "A liquid-metal magnetohydrodynamic acoustic transducer", *J. Acoust. Soc. Am.* 83, 1988, pág. 350.

- 10.- J. R. Olson y G. W. Swift "Similitude in thermoacoustics", J. Acoust. Soc. Am. 95 (3), 1994, pág. 1405.
- 11.- G. W. Swift, "Analysis and performance of a large thermoacoustic engine", J. Acoust. Soc. Am. 92 (3), 1992, pág. 1551.
- 12.- A. A. Atchley y F. Kuo, "Stability curves for a thermoacoustic prime mover", J. Acoust. Soc. Am. 95 (3), 1994, pág. 1401.
- 13.- W. P. Arnott, J. R. Belcher R. Raspet y H. E. Bass, "Stability analysis of a helium-filled thermoacoustic engine", J. Acoust. Soc. Am. 96 (1), 1994, pág. 370.
- 14.- S. L. Garrett, "Thermoacoustic refrigerators", J. Acoust. Soc. Am. 91 (1), 1992, pág. 517.
- 15.- J. C. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori, "Understanding some simple phenomena in thermoacoustics with applications to acoustical heat engines", Am. J. Phys. 53 (2), 1985, pág. 147.
- 16.- T. B. Gabrielson, "Radiation from a submerged thermoacoustic source", J. Acoust. Soc. Am. 90 (5), 1991, pág. 2628.
- 17.- J. C. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift y A. Migliori, "Theory and calculations for an intrinsically irreversible acoustic prime mover using liquid sodium as primary working fluid", J. Acoust. Soc. Am. 78, 1985, pág. 767.
- 18.- P. H. Ceperley, "A pistonless Stirling engine - The traveling wave heat engine", J. Acoust. Soc. Am. 66 (5), 1979, pág. 1508.
- 19.- P. H. Ceperley, "Gain and efficiency of a traveling wave heat engine", J. Acoust. Soc. Am. 72 (6), 1982, pág. 1688.

- 20.- P. H. Ceperley, "Gain and efficiency of a short traveling wave heat engine", J. Acoust. Soc. Am. 77 (3), 1985, pág. 1239.
- 21.- R. Raspet, H.E. Bass and J. Kordomenos, "Thermoacoustics of traveling waves: Theoretical analysis for an inviscid ideal gas", J. Acoust. Soc. Am. 94 (4), 1993, pág. 2232.
- 22.- S. Temkin, "Elements of Acoustics", Ed. John Wiley and Sons, Estados Unidos de América, 1981.
- 23.- P. M. Morse and K. U. Ingard, "Theoretical Acoustic", McGraw-Hill, New York, 1968, reprinted by Princeton U. P., Princeton, Nj, 1987, págs. 270-292.
- 24.- P. Merkli and H. Thomann, "Transition to turbulence in oscillating pipe flow", J. Fluid Mech. 68, 1975, pág. 567.
- 25.- F. W. Giacobbe, "Estimation of Prandtl numbers in binary mixtures of helium and other noble gases", J. Acoust. Soc. Am. 96 (6), 1994, pág. 3568.
- 26.- A. A. Atchley, "Standing wave analysis of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation", J. Acoust. Soc. Am. 92 (5), 1992, pág. 2907.
- 27.- A. A. Atchley, H. E. Bass, T. J. Hofler, H. Lin, "Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation", J. Acoust. Soc. Am. 91 (2), 1992, pág. 734.
- 28.- L. E. Kinsler A. R. Frey, "Fundamentals of Acoustics", Ed. John Wiley & Sons, 2ª edición, Estados Unidos de América, 1962.
- 29.- "CRC Handbook of Chemistry and Physics", 66 edición, CRC Press inc. U.S.A. 1985-1986, pág. F42 - F43.

- 30.- A. O. Santillán y R. R. Boullosa, "Space dependence of acoustic power and heat flux in the thermoacoustic effect", aceptado para su publicación en International Communications in Heat and Mass Transfer el 13 de diciembre de 1994.
- 31.- G. Huelisz y E. Ramos, "On phase difference of the temperature and pressure wave in the thermoacoustic effect", aceptado para su publicación en International Communications in Heat and Mass Transfer (comunicación personal).
- 32.- L. D. Landau y E. M. Lifshitz, "Mecánica de fluidos", Ed. Reverté, S. A., España, 1986.