7

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACERCA DEL TEOREMA DE MILLER - TEPLY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RAQUEL BUENROSTRO SANCHEZ

MEXICO, D. F.

1995

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron la pasante(s) Raquel Buenrostro Sánchez

con número de cuenta 8608673-2 con el Título:

" ACERCA DEL TEOREMA DE MILLER-TEPLY "

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Dr.	Francisco Federico	Raggi Cárdenas	
Director de Tesis			
Dr.	José	Rios Montes	José Ríos M.
Mat.	Luis Ricardo	Colavita Ferreyra	
Dr.	Emilio	Lluis Riera	
Suplente			
Dr.	Hugo Alberto	Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Suplente			

QUIERO AGRADECER:

A mi familia. A mis papás, Alicia y Enrique, y a mis hermanos Lucía, Javier y Enrique. Por su cariño, apoyo y comprensión que siempre me han mostrado.

A Diana R. Díaz, por ser una gran y valiosa amiga. A Nittai Madrid, por su amistad y por querer tanto a mi hermana. A Raúl Juárez, a quien estimo mucho, aunque él no lo crea.

A mis amigos, Haydeé H., Luis V., Ricardo H., Rafael H. y César M. Por haberme hecho realmente agradable el tiempo durante el cual cursé mi licenciatura.

A todos y cada uno de mis maestros, especialmente a: Javier Fernández, a quien tuve la fortuna de conocer desde el inicio de mi carrera y a Luis Ricardo C., maestro por excelencia, por todo lo que de él he aprendido dentro y fuera del aula, y por darme la oportunidad de ir sembrando una firme y muy larga amistad.

A mi asesor, Dr. Francisco F. Raggi Cárdenas, quien hizo posible la realización de esta tesis. Así como a cada uno de mis sinodales: Dr. José Ríos M, Mat. Luis R. Colavita F, Dr. Emilio Lluis R, y Dr. Hugo A. Rincón M.

Finalmente a todas aquellas personas que me han estimulado a lo largo de mi vida y que han confiado en mí.

Indíce

Introducción

El propósito de este escrito es exponer y desarrollar conceptos y resultados básicos de las Teorías de Torsión.

El contenido de esta tesis se divide en tres partes. Primero, se introducen definiciones y resultados fundamentales, los cuales son ilustrados con algunos ejemplos. En la segunda parte se caracterizan ciertas teorías de torsión que satisfacen algunas condiciones adicionales. Y finalmente se presenta el Teorema de Miller-Teply, en la tercera parte.

El Teorema de Miller-Teply dice que si R es una anillo con elemento identidad y satisface la condición de cadena descendente, (ccd), sobre ideales izquierdos τ-puros, entonces satisface la condición de cadena ascendente, (cca), sobre ideales izquierdos τ- puros.

Este teorema es una generalización del teorema de Hopkins-Levitzki, que establece que todo anillo artiniano izquierdo, con elemento identidad, es neteriano izquierdo.

Capítulo 1

Prerradicales y Radicales

Sea R un anillo con uno, denotamos por $R-Mod$ a la categoría de todos los R-módulos izquierdos.

1 Prerradicales y Radicales

Definición. Un prerradical r de $R-Mod$ es un subfuntor del funtor identidad. Es decir, para cada $M \in R-Mod$, rM es un submódulo de M y si $\alpha : M \longrightarrow N$ entonces $\alpha[rM] \subseteq rN$ y $r(\alpha)$ es la restricción de α a rM.

La clase de todos los prerradicales tiene un orden parcial: $r \leq t \Leftrightarrow$ para cada $M \in R-Mod$, rM es un submódulo de tM, $(rM \leq tM)$.

Definición. Sean r y t prerradicales de $R-Mod$, definimos rt como $rt(M) = r(t(M))$.

Definición. Un prerradical r de $R-Mod$ se llama idempotente si para cada $M \in R-Mod$ $rrM = rM$.

Proposición 1.1 *Sean r y t prerradicales de $R-Mod$. Si $r \leq t$ y r es idempotente, entonces $rt = tr = r$.*

Demostración ·
$r \leq t$
$\Rightarrow rM \leq tM$ para toda $M \in R-Mod$
$\Rightarrow rrM \leq rtM$ para toda $M \in R-Mod$
$\Rightarrow rM \leq rtM$ para toda $M \in R-Mod$
y como $tM \leq M$ entonces $rtM \leq rM$ por lo tanto $rt = r$.
Por otra parte
$r \leq t$
$\Rightarrow r(rM) \leq t(rM)$ para toda $M \in R-Mod$
$\Rightarrow rM \leq trM$ para toda $M \in R-Mod$
y como t es prerradical, entonces $trM \leq rM$ por lo tanto $tr = r$. ■

Definición. Un prerradical r de $R-Mod$ se llama radical si para cada $M \in R-Mod \quad r(M/rM)=0$.

Observación. *Si r es un prerradical de $R-Mod$ y $D \leq rC$, entonces $r(C)/D \subseteq r(C/D)$.*
Ya que tenemos el epimorfismo canónico, $\psi : C \rightarrow C/D$, y el morfismo inducido por el prerradical de manera natural, $r\psi : rC \rightarrow r(C/D)$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi"] & C/D \\ r(C) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "r(\psi)"'] & r(C/D) \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, así
$Nuc(r\psi) \subseteq Nuc(\psi \circ i) = r(C) \cap Nuc(\psi) = r(C) \cap D = D$
Por consiguiente $r(C)/D \subseteq r(C/D)$.

Proposición 1.2 *Si r es un radical de $R-Mod$ y $D \leq rC$, entonces $r(C/D) = r(C)/D$.*

Demostración
Sea $\phi : C/D \rightarrow C/rC$ el epimorfismo canónico, r induce de manera natural el morfismo $r\phi : r(C/D) \rightarrow r(C/rC)$; pero $r(C/rC) = 0$ por ser r radical.
Así tenemos el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd} C/D \arrow[r, "\phi"] & C/rC \\ r(C/D) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "r\phi"'] & r(C/rC) \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

que es conmutativo, esto indica que
$r(C/D) = Nuc(r\phi) \subseteq Nuc(\phi \circ i) \subseteq Nuc(\phi) = r(C)/D$
Por lo tanto $r(C/D) \subseteq r(C)/D$.
Como de la observación anterior se tiene que $r(C)/D \subseteq r(C/D)$, la proposición queda demostrada. ■

Dado un prerradical r, podemos distinguir claramente a dos clases:
$\mathbf{T}_r = \{M \in R-Mod \mid rM = M\}$
$\mathbf{F}_r = \{M \in R-Mod \mid rM = 0\}$
Observemos que si $M \in \mathbf{T}_r, N \in \mathbf{F}_r$ y $f : M \rightarrow N$ como $r(f) = 0$, pues $r(f) : rM \rightarrow 0$; que es la restricción de f a rM entonces f es el morfismo cero.
En otras palabras $Hom(M, N) = 0$ para todo $M \in \mathbf{T}_r$ y $N \in \mathbf{F}_r$

Proposición 1.3 $\mathbf{T}_r$ *es cerrada bajo cocientes y sumas directas.*

Demostración

1) $\mathbf{T}_r$ es cerrada bajo cocientes.

Sea $M \in \mathbf{T}_r$ y $N \leq M$, entonces $N \leq rM = M \Rightarrow M/N = rM/N \leq r(M/N)$; por la observación, además como r es un prerradical $r(M/N) \leq M/N$.

Por consiguiente $r(M/N) = M/N$.

2) $\mathbf{T}_r$ es cerrada bajo sumas directas.

Sea $\{M_\alpha\}_\Lambda \subseteq \mathbf{T}_r$ entonces $r(M_\alpha) = M_\alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda$, tenemos la inclusión $i_\beta : M_\beta \to \oplus M_\alpha$ y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_\beta \arrow[r, "i_\beta"] & \oplus M_\alpha \\ M_\beta \arrow[u, "i"] \arrow[r, "r(i_\beta)"'] & r(\oplus M_\alpha) \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

la imagen de cada monomorfismo canónico i_β está contenido en $r(\oplus M_\alpha)$ y de la definición de suma directa, tenemos que $\oplus M_\alpha = r(\oplus M_\alpha)$. ■

Proposición 1.4 *$\mathbf{F}_r$ es cerrada bajo submódulos y productos directos.*

Demostración

1) $\mathbf{F}_r$ es cerrada bajo submódulos.

Sea $M \in \mathbf{F}_r$ y $0 \leq N \leq M$ entonces $0 \leq rN \leq rM = 0$. Por lo tanto $N \in \mathbf{F}_r$.

2) $\mathbf{F}_r$ es cerrada bajo productos.

Sea $\{M_\alpha\}_\Lambda \subseteq \mathbf{F}_r$ entonces $r(M_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \Lambda$, tenemos el diagrama :

$$\begin{tikzcd} \prod M_\alpha \arrow[r, "p_\beta"] & M_\beta \\ r(\prod M_\alpha) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "r(p_\beta)"'] & r(M_\beta) = 0 \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

que conmuta, de aquí sabemos que

$r(\prod M_\alpha) = Nuc(rp_\beta) \subseteq Nuc(p_\beta \circ i) \subseteq Nuc(p_\beta) \ \ \forall \beta \in \Lambda$.

$r(\prod M_\alpha) \subseteq Nuc(p_\beta) = 0$

Por lo tanto $\prod M_\alpha \in \mathbf{F}_r$. ■

Definición. Una clase de pretorsión es una clase de módulos cerrada bajo cocientes y sumas directas.

Una clase libre de pretorsión es una clase de módulos cerrada bajo submódulos y productos directos.

Ahora veamos que a cada clase de pretorsión le podemos asociar un prerradical idempotente y a cada clase libre de pretorsión un radical.

Proposición 1.5 *Una clase de pretorsión $\mathbf{T}$ induce un prerradical idempotente r_T.*

Demostración

Sea $M \in R-Mod$, definimos $r_T(M) = \sum\{T \in \mathbf{T} \mid T \leq M\}$.
Observaciones:
a) $r_t(M)$ es un cociente de $\oplus\{T \in \mathbf{T} \mid T \leq M\} \in \mathbf{T}$.
Entonces $r_T(M) \in \mathbf{T}$.
b) Sea $M \in \mathbf{T}$, entonces $M \leq r_T(M)$ por lo tanto $r_T(M) = M$.
1) $r_T(M) \leq M$ claramente.
2) Sea $f : M \to N$, $r_t(M) \leq M$ y $r_T(M) \in \mathbf{T}$, además
$f[r_T(M)] \cong r_T(M)/Nuc(f) \in \mathbf{T}$ y $f[r_T(M)] \leq f[M] \leq N$
entonces $f[r_T(M)] \leq r_T(N)$.
Por lo tanto $r_T(f)$ es la restricción de f a $r_T(M)$.
3) r_T es idempotente, pues $r_T(M) \in \mathbf{T}$ (obs. a) y
$r_T(r_T(M)) = r_T(M)$ (obs. b). ■

Proposición 1.6 *Una clase libre de pretorsión $\mathbf{F}$, induce un radical r_F.*

Demostración

Sea $M \in R-Mod$, definimos $r_F(M) = \cap\{F \leq M \mid M/F \in \mathbf{F}\}$
Observaciones:
a) Si $M \in \mathbf{F}$ entonces $r_F(M) = 0$ claramente.
b) $M/r_F(M) \in \mathbf{F}$; sea $L \in \{F \leq M \mid M/F \in \mathbf{F}\}$, de ésta manera
observamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \prod M/F \arrow[d, "p_L"] \\ & M/L \end{tikzcd}$$

como $f[M] \subseteq \prod M/F \Rightarrow f[M] \in \mathbf{F}$, además $f[M] \cong M/Nuc(f)$
y como $Nuc(f) = \cap Nuc(p_L) = r_F M$, por lo tanto $M/r_F(M) \in \mathbf{F}$.
c) Si $B = \{Nuc(\alpha) \mid \alpha : M \to K \text{ y } K \in \mathbf{F}\}$ y
$A = \{F \leq M \mid M/F \in \mathbf{F}\}$ entonces $A = B$.
$\subseteq]$ Sea $F \in A$ consideremos $\varphi : M \to M/F$ el epimorfismo canónico,
como $M/F \in \mathbf{F}$ y $Nuc(\varphi) = F$, entonces $F \in B$.
$\supseteq]$ Sea $F \in B$,
entonces $\exists K \in \mathbf{F}$ y $\alpha : M \to K$ tal que $Nuc(\alpha) = F \Rightarrow K \cong M/F$.
1) $r_F(M) \leq M$ claramente.
2) Sea $f : M \to N$; y sea $x \in r_F(M) \leq M$, si $\alpha : N \to K$ con $K \in \mathbf{F}$,
$x \in Nuc(\alpha \circ f)$ (obs. c).
entonces $f(x) \in Nuc(\alpha)$ para toda $\alpha \in \cup\{Hom(N, K) \mid K \in \mathbf{F}\}$ (obs. c).
entonces $f(x) \in r_F(N)$, por lo tanto $f[r_F(M)] \subseteq r_F(N)$.
3) r_F es radical, como $M/r_F(M) \in \mathbf{F}$ (obs. b)
entonces por la obs. a $r_F(M/r_F(M)) = 0$. ■

Entrelazando las últimas cuatro proposiciones llegamos a dos resultados importantes:

Proposición 1.7 *Existe una correspondencia biyectiva entre prerradicales idempotentes y clases de pretorsión.*

Demostración
Si r es prerradical idempotente. sea $\mathbf{T}_r$ como en prop. 1.3
Si $\mathbf{T}$ es una clase de pretorsión, sea r_T como en prop. 1.5
1) $\mathbf{T} \mapsto r_T \mapsto T_{r_T}$ es la identidad.
$T \in \mathbf{T} \Leftrightarrow r_T(T) = T \Leftrightarrow T \in \mathbf{T}_{r_T}$.
2) $r \mapsto \mathbf{T}_r \mapsto r_{T_r}$ es la identidad.
Sea $M \in R - Mod$
$\subseteq] r(rM) = rM \Rightarrow rM \in \mathbf{T}_r \Rightarrow rM = r_{T_r}(rM) \subseteq r_{T_r}(M)$.
Por lo tanto $rM \subseteq r_{T_r}(M)$.
$\supseteq] r_{T_r}(M) \in \mathbf{T}_r \Rightarrow r_{T_r}(M) = r(r_{T_r}(M)) \subseteq rM$.
Por lo tanto $r_{T_r}(M) \subseteq rM$. ■

Proposición 1.8 *Existe una correspondencia biyectiva entre radicales y clases libres de pretorsión.*

Demostración
Si r es un radical, sea $\mathbf{F}_r$ como en prop. 1.4
Si $\mathbf{F}$ es una clase libre de pretorsión, sea r_F como en prop. 1.6
1) $\mathbf{F} \mapsto r_F \mapsto \mathbf{F}_{r_F}$ es la identidad.
$F \in \mathbf{F} \Leftrightarrow r_F(F) = 0 \Leftrightarrow F \in \mathbf{F}_{r_F}$
2) $r \mapsto \mathbf{F}_r \mapsto r_{F_r}$ es la identidad.
Sea $M \in R - Mod$
$\supseteq] r_{F_r}(M) = \cap\{F \leq M \mid M/F \in \mathbf{F}_r\} = \cap\{F \leq M \mid r(M/F) = 0\} \subseteq rM$.
$\subseteq] r_{F_r}M \subseteq rM \Rightarrow r(M/r_{F_r}) = r(M)/r_{F_r}M$ (prop. 1.2) y
$r(M/r_{F_r}M) = 0$ (obs. 2 de la prop. 1.6) $\Rightarrow r(M)/r_{F_r}M = 0$.
Por lo tanto $rM \subseteq r_{F_r}M$. ■

Proposición 1.9 *Dado un prerradical r, existe un radical $\bar{r}$ tal que $r \leq \bar{r}$ y para todo t radical, $r \leq t$ se tiene $\bar{r} \leq t$.*

Demostración
Sean r un prerradical, $\mathbf{F}_r$ como en prop. 1.4 y $\bar{r}$ el radical correspondiente a $\mathbf{F}_r$ (prop. 1.8).
1) $r \leq \bar{r}$
Sean $M \in R - Mod$ y $f : M \to K$ con $K \in \mathbf{F}_r$
$\Rightarrow f[rM] \leq rK = 0$
$\Rightarrow rM \leq Nuc(f) \;\; \forall f \in \cup\{Hom(M, K) \mid K \in \mathbf{F}_r\}$
$\Rightarrow rM \leq \bar{r}M \;\; \forall M \in R - Mod$, por lo tanto $r \leq \bar{r}$.
2) Si t es radical y $r \leq t \Rightarrow \bar{r} \leq t$

Sea $M \in R-Mod$
$\bar{r}M = \cap\{F \leq M \mid M/F \in \mathbf{F}_r\}$ y $tM = \cap\{F \leq M \mid M/F \in \mathbf{F}_t\}$ (prop. 1.8)
como $r \leq t \Rightarrow \mathbf{F}_t \subseteq \mathbf{F}_r$
$\Rightarrow \{F \leq M \mid M/F \in \mathbf{F}_t\} \subseteq \{F \leq M \mid M/F \in \mathbf{F}_r\}$
$\Rightarrow \bar{r}M \leq tM \quad \forall M \in R-Mod$ por lo tanto $\bar{r} \leq t$. ■

Proposición 1.10 *Si r es idempotente, entonces $\bar{r}$ es idempotente.*

Demostración
Sea $M \in R-Mod$ y $L \in \{F \leq \bar{r}M \mid \bar{r}(M)/F \in \mathbf{F}_r\}$,
$r(M/L) = rr(M/L)$ (r idempotente)
$\leq r\bar{r}(M/L)$ (prop. 1.9)
$= r(\bar{r}(M/L)) = r(\bar{r}M/L) = 0$ (prop. 1.2 y $\bar{r}M/L \in \mathbf{F}_r$)
$\Rightarrow \{F \leq \bar{r}M \mid \bar{r}(M)/F \in \mathbf{F}_r\} \subseteq \{F \leq M \mid \bar{r}(M)/F \in \mathbf{F}_r\}$
$\Rightarrow \bar{r}M \leq \bar{r}\bar{r}M$ y como $\bar{r}\bar{r}M \leq \bar{r}M \quad \forall M \in R-Mod.$
Por lo tanto $\bar{r} = \bar{r}\bar{r}$. ■

Proposición 1.11 *Dado un prerradical r existe un $\hat{r}$ prerradical idempotente, tal que $\hat{r} \leq r$ y para todo prerradical idempotente t, $t \leq r$ se tiene $t \leq \hat{r}$.*

Demostración
Sea r un prerradical, $\mathbf{T}_r$ como en la prop. 1.3 y $\hat{r}$ el prerradical correspondiente a $\mathbf{T}_r$ (prop. 1.7).
Sea $M \in R-Mod$
1) $\hat{r} \leq r$
$\hat{r}M \in \mathbf{T}_r$ y $\hat{r}M \leq M \Rightarrow \hat{r}M = r\hat{r}M \leq rM \quad \forall M \in R-Mod.$
Por lo tanto $\hat{r} \leq r$.
2) Si t es un prerradical idempotente y $t \leq r \Rightarrow t \leq \hat{r}$
$r(tM) = tM$ (prop 1.1) entonces $tM \in \mathbf{T}_r$; es decir,
$tM \in \mathbf{T}_r ytM \leq M \Rightarrow tM = \hat{r}(tM) \leq \hat{r}M \quad \forall M \in R-Mod.$
Por lo tanto $t \leq \hat{r}$. ■

Proposición 1.12 *Si r es un radical, entonces $\hat{r}$ es radical.*

Demostración
$\hat{r}(M/\hat{r}M) = \sum\{T/\hat{r}M \leq M/\hat{r}M \mid T/\hat{r}M \in \mathbf{T}_r\}$
$= \sum\{T/\hat{r}M \mid T \leq M y r(T/\hat{r}M) = T/\hat{r}M\}$
Como $\hat{r}M \leq T$, $\hat{r}$ idempotente, $\hat{r} \leq r \Rightarrow \hat{r}M = r\hat{r}M \leq rT$ (prop. 1.1).
Además r es radical $\Rightarrow r(T/\hat{r}M) = rT/\hat{r}M$ (prop. 1.2)
Entonces $\hat{r}(M/\hat{r}M) = \sum\{T/\hat{r}M \mid T \leq M y T \in \mathbf{T}_r\}$
$= \sum\{T/\hat{r}M \mid T \leq \hat{r}M\} = 0.$ ■

Definición. Una clase de pretorsión es hereditaria si es cerrada bajo submódulos.

Proposición 1.13 *Sea r un prerradical. Son equivalentes :*
(a) r es un funtor exacto izquierdo.
(b) Si $D \leq C$ entonces $r(D) = r(C) \cap D$.
(c) r es idempotente y $\mathbf{T}_r$ es hereditaria.

Demostración
(a) $\Rightarrow$ (b)
Sea $D \leq C$ entonces la sucesión $0 \to D \to C \to C/D \to 0$ es exacta y como r es exacto izquierdo tenemos el diagrama :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] & C/D \\ rD \arrow[u, "i"] \arrow[r, "rf"'] & rC \arrow[u, "j"'] \arrow[r, "rg"'] & r(C/D) \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

que es conmutativo. Así:
$rD = Nuc(rg) = Nuc(k \circ rg) = Nuc(g \circ j) = Im(j) \cap Nuc(g) = rC \cap D$.
(b) $\Rightarrow$ (c)
1) Sea $M \in R-Mod$, $rM \leq M \Rightarrow r(rM) = rM \cap rM = rM$ así $rr = r$.
2) Sea $M \in \mathbf{T}_r$ y $N \leq M \Rightarrow rN = N \cap rM = N \cap M = N$.
Por lo tanto $\mathbf{T}_r$ es cerrada bajo submódulos.
(c) $\Rightarrow$ (a)
Sea $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M" \to 0$ exacta.
1) $Nuc(rf) = 0$
$Nuc(rf) \leq Nuc(f) = 0$
2) $Nuc(rg) = Im(rf)$
$Nuc(rg) \leq rM$ como r es idempotente $rM \in \mathbf{T}_r \Rightarrow Nuc(rg) \in \mathbf{T}_r$
$Nuc(rg) = rM \cap Nuc(g) = rM \cap Im(f) = Im(rf)$.
Hemos probado que r es un funtor exacto izquierdo. ■

Corolario 1.1 *Existe una correspondencia biyectiva entre prerradicales exactos izquierdos y clases de pretorsión hereditarias.*

Demostración
$\mathbf{T}$ es una clase de pretorsión hereditaria $\Leftrightarrow$ r_T es idempotente y $\mathbf{T}$ es cerrada bajo submódulos (prop. 1.7) $\Leftrightarrow$ r_T es un prerradical exacto izquierdo (prop. 1.13). ■

Proposición 1.14 *Si r es un prerradical idempotente entoces $\mathbf{F}_r$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración
Sean $M', M" \in \mathbf{F}_r$ tal que $0 \to M' \to M \to M" \to 0$ es exacta,
entonces $M/M' \cong M" \in \mathbf{F}_r \Rightarrow rM \leq M' \in \mathbf{F}_r \Rightarrow r(rM) = 0$
además $r = rr \Rightarrow rM = 0$, por lo tanto $M \in \mathbf{F}_r$. ■

Proposición 1.15 *Si r es radical entonces $\mathbf{T}_r$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración
Sean $M', M" \in \mathbf{T}_r$ tal que $0 \to M' \to M \to M" \to 0$ es exacta,
entonces $M/M' \cong M" \in \mathbf{T}_r$ y $M' \leq M \Rightarrow M/M' \in \mathbf{T}_r$ y $M' \leq rM$,
así, $M/M' = r(M/M') = r(M)/M'$ (prop 1.2). Por consiguiente $rM = M$.
■

2 Ejemplos

I. Grupos de Torsión. Si $R = \mathbb{Z}$ entonces definimos
$rM = \{x \in M \mid x \text{ es de orden finito}\} \quad \forall M \in \mathbb{Z} - Mod.$
r es un radical exacto izquierdo.

1) r es prerradical.
(a) $rM \leq M$
$rM \neq \emptyset$, pues $0 \in rM$. Sean $x, y \in rM$ y $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $mx = 0 = ny$ y $0 \neq mn \in \mathbb{Z}$
Por otro lado $mn(kx + y) = (mn)kx + (mn)y = (nk)mx + (m)ny = 0$,
tenemos que $(kx + y) \in rM$.
(b) Si $f : M \to N \Rightarrow f[rM] \subseteq rN$.
Sea $y \in f[rM] \subseteq N \Rightarrow \exists x \in rM$ tal que $f(x) = y$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $nx = 0$ y $n \neq 0 \Rightarrow ny = nf(x) = f(nx) = f(0) = 0$
$\Rightarrow y \in rN$; por lo tanto $f[rM] \subseteq rN$.
2) r es radical.
Sea $M \in R - Mod$ y $\bar{x} \in r(M/rM)$
$\Rightarrow \bar{x} \in M/rM$ y $\exists n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ tal que $n\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow nx \in rM$
$\Rightarrow nx \in M$ y $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $m(nx) = 0 \Rightarrow (mn)x = 0$ y $mn \neq 0$
$\Rightarrow x \in rM \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$; concluimos que $r(M/rM) = 0$.
3) r es exacto izquierdo.
(a) Sea $N \leq M \Rightarrow rN \leq rM$ y $rN \leq N \Rightarrow rN \leq rM \cap N$.
(b) Si $x \in rM \cap N \Rightarrow x \in N$ y $x \in rM$
$\Rightarrow x \in N$ y $\exists n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ tal que $nx = 0 \Rightarrow x \in rN \Rightarrow rM \cap N \leq rN$.
Por lo tanto $rN = rM \cap N$ y por prop. 1.13 r es exacto izquierdo. ■

II. p-Grupos. Si $R = \mathbb{Z}$ y p es un número primo, para todo $M \in R - Mod$,
definimos $t_pM = \{x \in M \mid p^n x = 0 \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$
t_p es radical exacto izquierdo.

1) t_p es prerradical.
(a) $t_pM \leq M$
$t_pM \neq \emptyset$, pues $0 \in t_pM$. Sean $x, y \in t_pM$ y $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \exists m, n \in \mathbf{N}$ tales que $p^m x = 0 = p^n y$
$\Rightarrow p^{m+n}(kx + y) = p^{m+n}kx + p^{m+n}y = (kp^n)p^m x + (p^m)p^n y = 0$ y $m + n \in \mathbf{N}$; esto muestra que $(kx + y) \in t_p M$.
(b) Si $f : M \to N \Rightarrow f[t_p M] \subseteq t_p N$.
Sea $y \in f[t_p M] \Rightarrow \exists x \in t_p M$ tal que $f(x) = y$
$\Rightarrow f(x) = y$ y $\exists n \in \mathbf{N}$ tal que $p^n x = 0$
$\Rightarrow p^n y = p^n f(x) = f(p^n x) = f(0) = 0 \Rightarrow y \in t_p N$.
2) t_p es radical.
Si $\bar{x} \in t_p(M/t_p M) \Rightarrow \bar{x} \in M/t_p M$ y $\exists n \in \mathbf{N}$ tal que $p^n \bar{x} = \bar{0}$
$\Rightarrow p^n x \in t_p M \Rightarrow p^n x \in M$ y $\exists m \in \mathbf{N}$ tal que $p^m(p^n x) = 0$
$\Rightarrow p^{m+n}x = 0$ y $m + n \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in t_p M \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$. Así que podemos concluir que $t_p(M/t_p M) = 0$.
3) t_p es exacto izquierdo.
(a) Sean $N \leq M \Rightarrow t_p N \leq t_p M$ y $t_p N \leq N \Rightarrow t_p N \leq t_p M \cap N$.
(b) Si $x \in t_p M \cap N \Rightarrow x \in N$ y $\exists n \in \mathbf{N}$ tal que $p^n x = 0$
$\Rightarrow x \in t_p N \Rightarrow x \in t_p M \cap N \leq t_p N$.
Con la ayuda de la proposición 1.13 podemos concluir que t_p es exacto izquierdo.
■

III. Zoclo. Para cualquier $M \in R - Mod$, definimos
$zM = \sum\{S \leq M \mid S \text{ es simple }\}$
z es prerradical exacto izquierdo, pero no es radical.

1) z es prerradical.
(a) $zM \leq M$ claramente.
(b) Si $f : M \to N$ y como zM es semisimple
$\Rightarrow f[zM]$ es semisimple y $f[zM] \leq N \Rightarrow f[zM] \leq zN$.
2) z es exacto izquierdo.
Notemos que si $M \in R - Mod$ y S es simple, entonces $M \cap S = 0$ ó $M \cap S = S$
Así $S \leq zN \Leftrightarrow S \leq zM \cap N$.
Por lo tanto $zN = zM \cap N$ y por prop. 1.13 z es exacto izquierdo.
3) z no es radical.
Si $R = \mathbf{Z}$ y $M = \mathbf{Z}_{p^2}$ con p un número primo, entonces $zM = p\mathbf{Z}_{p^2}$ y $M/zM = \mathbf{Z}_{p^2}/p\mathbf{Z}_{p^2} \cong \mathbf{Z}_p$, como $\mathbf{Z}_p$ es simple, entonces $z(M/zM) = \mathbf{Z}_p \neq 0$.
Por consiguiente, z no es radical. ■

IV. Radical de Jacobson. Para todo $M \in R - Mod$, definimos
$JM = \cap\{N < M \mid N \text{ es máximo }\}$
J es radical, pero no es idempotente.

Observación :
Si $A = \cap\{N < M \mid N \text{ es máximo en } M\}$
y $B = \sum\{L < M \mid L \text{ es superfluo en } M\} \Rightarrow A = B$

$\subseteq$] Sea $x \in A$, para demostrar que $x \in B$ es suficiente con probar que Rx es superfluo en M.
Supongamos que Rx no es superfluo en M, entonces existe $N < M$ tal que N es máximo en M y $N + Rx = M \Rightarrow x \notin N \Rightarrow x \notin A$!!.
Por lo tanto $A \subseteq B$.
$\supseteq$] Sea $x \in B \Rightarrow x \in L_x < M$ y L_x superfluo en M, supongamos que $x \notin N$ para algún $N < M$ máximo en M, entonces $N + L_x = M$ y $N \neq M$
$\Rightarrow L_x$ no es superfluo !!. Por lo tanto $B \subseteq A$.
1) J es prerradical.
(a) $JM \leq M$ claramente.
(b) Si $f : M \to N \Rightarrow f[JM]$
$= f[\sum\{L < M \mid L$ es superfluo en $M\}]$
$= \sum\{f[L] < N \mid L$ es superfluo en $M\}$
$\subseteq \sum\{K < N \mid K$ es superfluo en $N\} = JN$;
es decir, $f[JM] \subseteq JN$.
2) J es radical.
$J(M/JM) = \cap\{N' < M/JM \mid N'$ es máximo en $M/JM\}$
$= \cap\{N/JM < M/JM \mid N$ es máximo en $M\}$
$= \cap\{N < M \mid N$ es máximo en $M\}/JM$
$JM/JM = 0$.
3) J no es exacto izquierdo.
Sea $R = \mathbf{Z}$, considermos $M = \mathbf{Z}_{18}$ y $N = \mathbf{Z}_3$
$\Rightarrow JM \cong N$ y $JN = 0 \Rightarrow J(JM) = 0 \neq \mathbf{Z}_3 = JM$
Por lo tanto J no es idempotente. ■

Capítulo 2

Teorías de Torsión

1 Teorías de Torsión y Radicales

Definición. Una teoría de torsión para $R-Mod$, es una pareja $(\mathbf{T},\mathbf{F})$ de clases de R-módulos que satisface :
1) $Hom(T,F)=0 \quad \forall T \in \mathbf{T}, F \in \mathbf{F}$
2) $Hom(T,C)=0 \quad \forall T \in \mathbf{T} \Rightarrow C \in \mathbf{F}$
3) $Hom(C,F)=0 \quad \forall F \in \mathbf{F} \Rightarrow C \in \mathbf{T}$
$\mathbf{T}$ es llamada clase de torsión y sus módulos, módulos de torsión.
$\mathbf{F}$ es llamada clase libre de torsión y sus módulos, módulos libres de torsión.
Observemos que $\mathbf{T} \cap \mathbf{F} = \{0\}$.

Cualquier clase $\mathbf{C}$ de módulos genera una teoría de torsión, $\xi(\mathbf{C}) = (\mathbf{T},\mathbf{F})$, de la manera siguiente :

$$\mathbf{F} = \{F \mid Hom(C,F)=0 \ \forall C \in \mathbf{C}\}$$
$$\mathbf{T} = \{T \mid Hom(T,F)=0 \ \forall F \in \mathbf{F}\}$$

$\mathbf{T}$ es la clase de torsión más pequeña que contiene a $\mathbf{C}$.
Análogamente $\mathbf{C}$ cogenera una teoría de torsión, $\chi(\mathbf{C}) = (\mathbf{T},\mathbf{F})$:

$$\mathbf{T} = \{T \mid Hom(T,C)=0 \ \forall C \in \mathbf{C}\}$$
$$\mathbf{F} = \{F \mid Hom(T,F)=0 \ \forall T \in \mathbf{T}\}$$

donde $\mathbf{F}$ es la clase libre de torsión más pequeña que contiene a $\mathbf{C}$.

Proposición 1.1 *Son equivalentes :*
(a) $\mathbf{T}$ *es una clase de torsión para alguna teoría de torsión.*
(b) $\mathbf{T}$ *es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.*

Demostración
(a) $\Rightarrow$ (b)
Sea $(\mathbf{T},\mathbf{F})$ una teoría de torsión.
1) $\mathbf{T}$ cerrada bajo objetos cocientes.

Sea $N \leq M \in \mathbf{T}$, supongamos que $M/N \notin \mathbf{T}$,
entonces existe $F \in \mathbf{F}$ y $f : M/N \to F$ con $f \neq 0$, así $M/N \neq 0$.
Si $\psi : M \to M/N$ es el epimorfismo canónico, $\psi \neq 0$,
entonces $g = f \circ \psi \neq 0$ está en $Hom(M,F)$!!, pues $M \in \mathbf{T}$.
Por lo tanto $M/N \in \mathbf{T}$.
2) $\mathbf{T}$ es cerrada bajo sumas directas.
Sea $\{T_\alpha\}_\Lambda \subseteq \mathbf{T}$, entonces
$Hom(\oplus T_\alpha, F) = \prod Hom(T_\alpha, F) = \prod\{0\} = 0 \quad \forall F \in \mathbf{F}$.
Por lo tanto $\oplus T_\alpha \in \mathbf{T}$.
3) $\mathbf{T}$ es cerrado bajo extensiones.
Sean T' y $T" \in \mathbf{T}$ tal que $0 \to T' \to T \to T" \to 0$ es exacta
$\Rightarrow 0 \to Hom(T", F) \to Hom(T, F) \to Hom(T', F)$ es exacta $\forall F \in \mathbf{F}$
además $Hom(T", F) = Hom(T', F) = 0 \;\; \forall F \in \mathbf{F} \Rightarrow Hom(T, F) = 0$.
Por lo tanto $T \in \mathbf{T}$.
(b) $\Rightarrow$ (a)
Sea $\mathbf{T}$ una clase cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones,
definimos $\mathbf{F} = \{F \in R-Mod \mid Hom(T,F) = 0 \;\; \forall T \in \mathbf{T}\}$
1) $Hom(T,F) = 0 \;\; \forall T \in \mathbf{T}$ y $F \in \mathbf{F}$ es obvio.
2) $Hom(T,C) = 0 \;\; \forall T \in \mathbf{T} \Rightarrow C \in \mathbf{F}$ es claro.
3) $Hom(C,F) = 0 \;\; \forall F \in \mathbf{F} \Rightarrow C \in \mathbf{T}$
Sea $C' = \sum\{T \leq C \mid T \in \mathbf{T}\} \in \mathbf{T}$, notemos que C' es el submódulo máximo de $\mathbf{T}$ contenido en C.
Sea $T \in \mathbf{T}$ y $f \in Hom(T, C/C')$,
$Im(f) \cong T/Nuc(f) \in \mathbf{T}$ entonces $Im(f) = 0$ por lo tanto $f = 0$
(pues si $f \neq 0 \Rightarrow \exists D \subseteq C$ tal que $C' \subset D$ y como $\mathbf{T}$ es cerrada bajo extensiones, tendríamos que $D \in \mathbf{T}$!!); así $C/C' \in \mathbf{F} \Rightarrow Hom(C, C/C') = 0 \Rightarrow C = C'$.
Consecuentemente $C \in \mathbf{T}$. ■

Proposición 1.2 *Son equivalentes :*
(a) $\mathbf{F}$ *es una clase libre de torsión para alguna teoría de torsión.*
(b) $\mathbf{F}$ *es cerrada bajo submódulos, productos y extensiones.*

Demostración
(a) $\Rightarrow$ (b)
Sea $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$ una teoría de torsión.
1) $\mathbf{F}$ es cerrada bajo submódulos.
Sea $N \leq F \in \mathbf{F}$, supongamos que $N \notin \mathbf{F}$,
entonces existe algún $T \in \mathbf{T}$ y un $T \xrightarrow{f} N$, $f \neq 0$.
Sí $N \xhookrightarrow{i} F \Rightarrow i \circ f \neq 0$ y además $i \circ f \in Hom(T,F)$!! Por lo tanto $N \in \mathbf{F}$.
2) $\mathbf{F}$ es cerrada bajo productos.
Sea $\{F_\alpha\}_\Lambda \subseteq \mathbf{F}$ entonces

$$Hom(T, \prod_\Lambda F_\alpha) \cong \prod_\Lambda Hom(T, F_\alpha) = \prod_\Lambda \{0\} = 0 \;\; \forall T \in \mathbf{T}$$

tenemos entonces que $\prod_\Lambda F_\alpha \in \mathbf{F}$.
3) $\mathbf{F}$ es cerrada bajo extensiones.
Sea $0 \to F' \to F \to F" \to 0$ exacta, con $F', F" \in \mathbf{F}$
$\Rightarrow 0 \to Hom(T, F') \to Hom(T, F) \to Hom(T, F")$ es exacta $\forall T \in \mathbf{T}$
como $Hom(T, F') = Hom(T, F") = 0 \Rightarrow Hom(T, F) = 0 \ \ \forall T \in \mathbf{T}$
por lo tanto $F \in \mathbf{F}$.
(b) $\Rightarrow$ (a)
Sea $\mathbf{F}$ una clase cerrada bajo submódulos, productos y extensiones, definimos $\mathbf{T} = \{T \in R - Mod \ \mid \ Hom(T, F) = 0 \ \ \forall F \in \mathbf{F}\}$
1) $Hom(T, F) = 0 \ \ \forall T \in \mathbf{T}$ y $F \in \mathbf{F}$. Es claro de la definición de $\mathbf{T}$.
2) $Hom(C, F) = 0 \ \ \forall F \in \mathbf{F} \Rightarrow C \in \mathbf{T}$. Inmediato.
3) $Hom(T, C) = 0 \ \ \forall T \in \mathbf{T} \Rightarrow C \in \mathbf{F}$
Observaciones:
Definamos $C' = \cap\{F \leq C \ \mid \ C/F \in \mathbf{F}\}$
a) $C/C' \in \mathbf{F}$
Usando la propiedad universal del producto directo, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod C/F \arrow[r, "\rho"] & C/F \\
C \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutativo. De tal forma que $Nucf = \cap Nuc\rho = C'$
$\Rightarrow C/C' = C/Nucf \cong f[C] \leq \prod C/F \in \mathbf{F}$. Por lo tanto $C/C' \in \mathbf{F}$.
b) $C' \in \mathbf{T}$.
Sean $F \in \mathbf{F}$ y $\alpha : C' \to F$ **PD.** $\alpha = 0$
Consideremos la sucesión exacta :

$$0 \to C'/Nuc\alpha \to C/Nuc\alpha \to C/C' \to 0$$

$C'/Nuc\alpha \cong \alpha[C'] \leq F \in \mathbf{F} \Rightarrow C'/Nuc\alpha \in \mathbf{F}$.
Además, ya probamos que $C/C' \in \mathbf{F}$ y como $\mathbf{F}$ es cerrada bajo extensiones podemos concluir que $C/Nuc\alpha \in \mathbf{F}$.
De la forma en que fue definido C', tenemos también que $Nuc\alpha \geq C'$
$\Rightarrow C' = Nuc\alpha \Rightarrow \alpha = 0$. Por lo tanto $C' \in \mathbf{T}$.

Si $Hom(T, C) = 0 \ \ \forall T \in \mathbf{T}$; particularmente $Hom(C', C) = 0$, pues $C' \in \mathbf{T}$ (obs.b), lo cual implica que $C' = 0$. Además $C \cong C/C' \in \mathbf{F}$ (obs.a). Por lo tanto $C \in \mathbf{F}$. ■

Lema 1.1 *Una teoría de torsión* $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$ *induce un radical idempotente*

Demostración
Definimos $r_T M = \sum\{T \leq M \ \mid \ T \in \mathbf{T}\}$
1) r_T es prerradical idempotente.

Por prop. 1.1.5 ya que $\mathbf{T}$ es una clase de pretorsión.
2) r_T es radical.
Notemos que $M/r_T M \in \mathbf{F}$,
supongamos que existe $f \in Hom(T, M/r_T M)$ $f \neq 0$ para alguna $T \in \mathbf{T}$
$\Rightarrow f[T] \in \mathbf{T} \Rightarrow$ existe $T' \leq M$ tal que $T'/r_T M \cong f[T] \Rightarrow r_T M < T' \in \mathbf{T}$!!
Por lo tanto $M/r_T M \in \mathbf{F}$.
Como $r_T(M/r_T M) \in \mathbf{T}$ y $M/r_T M \in \mathbf{F}$
entonces $Hom(r_T(M/r_T M), M/r_T M) = 0 \Rightarrow r_T(M/r_T M) = 0$
Por lo tanto r_T es radical. ■

Lema 1.2 *Un radical idempotente r, define una teoría de torsión $(\mathbf{T}_r, \mathbf{F}_r)$.*

Demostración
Sean $\mathbf{T}_r$ y $\mathbf{F}_r$ como en el primer capítulo.
1) $Hom(T, F) = 0$ $\forall T \in \mathbf{T}_r$ y $F \in \mathbf{F}_r$ es claro
2) $Hom(T, C) = 0$ $\forall T \in \mathbf{T}_r \Rightarrow C \in \mathbf{F}_r$
Sea $i : rC \to C$, como r es idempotente $rC \in \mathbf{T}_r \Rightarrow i = 0$ entonces $rC = 0$
Por lo tanto $C \in \mathbf{F}_r$.
3) $Hom(C, F) = 0$ $\forall F \in \mathbf{F}_r \Rightarrow C \in \mathbf{T}_r$
Como r es radical, entonces $C/rC \in \mathbf{F}_r$
$\Rightarrow \psi : C \to C/rC$ el epimorfismo canónico es cero $\Rightarrow rC = C$
Por lo tanto $C \in \mathbf{T}_r$. ■

Teorema 1.1 *Existe una correspondencia biyectiva entre teorías de torsión y radicales idempotentes.*

Demostración
Si $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$ una teoría de torsión, r_T como en lema 1.1 y si r es radical idempotente, $(\mathbf{T}_r, \mathbf{F}_r)$ como el 1.2
1) $(\mathbf{T}, \mathbf{F}) \mapsto r_T \mapsto (\mathbf{T}_{r_T}, \mathbf{F}_{r_T})$ es la identidad.
$T \in \mathbf{T} \Leftrightarrow r_T T = T \Leftrightarrow T \in \mathbf{T}_{r_T}$.
$F \in \mathbf{F} \Leftrightarrow r_F F = 0 \Leftrightarrow F \in \mathbf{F}_{r_T}$.
por lo tanto $(\mathbf{T}, \mathbf{F}) = (\mathbf{T}_{r_T}, \mathbf{F}_{r_T})$.
2) $r \mapsto (\mathbf{T}_r, \mathbf{F}_r) \mapsto r_{T_r}$ es la identidad.
es inmediato de la demostración de la prop. 1.1.7 ■

Corolario 1.1 *Si r es un prerradical idempotente entonces $\bar{r}$ es el radical idempotente correspondiente a la teoría de torsión generada por $\mathbf{T}_r$.*

Demostración
Sea r un prerradical idempotente, entonces por la demostración de la prop. 1.1.9 $\bar{r}$ es el radical asociado a $\mathbf{F}_r$, además $\mathbf{F}_r$ es cerrada bajo extensiones por ser r idempotente (prop 1.1.14) y $\bar{r}$ es idempotente (prop. 1.1.10), así tenemos $\bar{r}$ un radical idempotente y $\mathbf{F}_r$ una clase libre de torsión, donde $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{\bar{r}}$, entonces por teo. 1.1. $(\mathbf{T}_{\bar{r}}, \mathbf{F}_{\bar{r}}) = (\mathbf{T}_{\bar{r}}, \mathbf{F}_r) = \xi(\mathbf{T}_r)$. Demostrando así que $\bar{r}$ es el radical idempotente correspondiente a $\xi(\mathbf{T}_r)$. ■

Teorema 1.2 *La pareja* $(\mathbf{T},\mathbf{F})$ *es una teoría de torsión* $\Longleftrightarrow$
1) $\mathbf{T}\cap\mathbf{F}=0$.
2) $\mathbf{T}$ *es cerrada bajo objetos cociente.*
3) $\mathbf{F}$ *es cerrada bajo submódulos.*
4) $\forall M\in R-Mod$ *existe una sucesión exacta* $0\to T\to M\to F\to 0$ *con* $T\in\mathbf{T}$ *y* $F\in\mathbf{F}$.

Demostración
$\Longrightarrow]$
1) Sea $M\in\mathbf{T}\cap\mathbf{F}\Rightarrow Hom(M,M)=0\Rightarrow M=0$
2) Inmediato de prop. 1.1
3) Directo de prop. 1.2
4) Sea $M\in R-Mod$ y sea r el radical idempotente correspondiente a $(\mathbf{T},\mathbf{F})$ entonces $rM\in\mathbf{T}$ y $M/rM\in\mathbf{F}$ claramente.
Por lo tanto existe $0\to rM\to M\to M/rM\to 0$ exacta.
$\Longleftarrow]$
1) Sea $T\in\mathbf{T}$ y $F\in\mathbf{F}$, si $f\in Hom(T,F)$,
$T'=T/Nuc(f)$ y $f':T'\to F$ el monomorfismo inducido por f
$\Rightarrow T'\in\mathbf{T}$ y $T'\cong f'[T']\leq F\in\mathbf{F}\Rightarrow T'=0\Rightarrow Nuc(f)=T\Rightarrow f=0$.
Por lo tanto $Hom(T,F)=0\ \ \forall T\in\mathbf{T}$ y $F\in\mathbf{F}$.
2) $Hom(C,F)=0\ \ \forall F\in\mathbf{F}\Rightarrow C\in\mathbf{T}$
Sea $0\to T\xrightarrow{f}C\xrightarrow{g}F\to 0$ exacta, tal que $T\in\mathbf{T}$ y $F\in\mathbf{F}$
entonces $g=0\Rightarrow Im(f)=Nuc(g)=C\Rightarrow T\cong C$.
Por lo tanto $C\in\mathbf{T}$.
3) $Hom(T,C)=0\ \ \forall T\in\mathbf{T}\Rightarrow C\in\mathbf{F}$
Sea $0\to T\xrightarrow{f}C\xrightarrow{g}F\to 0$ exacta, tal que $T\in\mathbf{T}$ y $F\in\mathbf{F}$ entonces $f=0$
$\Rightarrow 0=Im(f)=Nuc(g)\Rightarrow C\cong F'\leq F\in\mathbf{F}$.
Por lo tanto $C\in\mathbf{F}$. ∎

Proposición 1.3 *Sea* $\mathbf{C}$ *una clase cerrada bajo cocientes. La clase de torsión generada por* $\mathbf{C}$ *consiste de todos los módulos* T, *tales que cada cociente de* T *diferente de cero, tiene un submódulo distinto de cero que está en* $\mathbf{C}$.

Demostración
Sea $\xi(\mathbf{C})=(\mathbf{T},\mathbf{F})=$ teoría de torsión generada por $\mathbf{C}$.
Notemos que $F\in\mathbf{F}$
$\Leftrightarrow Hom(C,F)=0\ \ \forall C\in\mathbf{C}\Leftrightarrow\forall 0\neq L\leq F,\quad L\notin\mathbf{C}$
$\Leftrightarrow F$ no tiene submódulos distintos de cero en $\mathbf{C}$.
$M\in\mathbf{T}$
$\Leftrightarrow Hom(M,F)=0\ \ \forall F\in\mathbf{F}\Leftrightarrow\forall 0\neq M/N,\quad M/N\notin\mathbf{F}$
$\Leftrightarrow\forall 0\neq M/N$ existe $0\neq C\in\mathbf{C},\quad C\leq M/N$. ∎

2 Teorías de Torsión Hereditarias

Definición. Una teoría de torsión $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$ se llama hereditaria si $\mathbf{T}$ es hereditaria; es decir, si $\mathbf{T}$ es cerrada bajo submódulos.

Proposición 2.1 *Existe una correspondencia biyectiva entre teorías de torsión hereditarias y radicales exactos izquierdos.*

Demostración
Es inmediato de teo. 1.1. y cor. 1.1.1 ■

Proposición 2.2 *Una teoría de torsión* $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$ *es hereditaria si y sólo si* $\mathbf{F}$ *es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Demostración
$\Longrightarrow$] Si t es el radical exacto izquierdo correspondiente y $F \in \mathbf{F}$ entonces $tE(F) \cap F = tF = 0$ y como F es esencial en $E(F)$ entonces $tE(F) = 0$.
Por lo tanto $E(F) \in \mathbf{F}$.
$\Longleftarrow$] Si $T \in \mathbf{T}$ y $C \leq T$ consideramos $\alpha : C \to C/tC$ el epimorfismo canónico, y los monomorfismos $j : C/tC \to E(C/tC)$, $i : C \to T$, entonces existe un morfismo $\beta : T \to E(C/tC)$ tal que

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & T \arrow[d, "\beta"] \\
C/tC \arrow[r, "j"'] & E(C/tC)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como $\mathbf{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas $\Rightarrow \beta = 0$.
Esto implica que $j \circ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ y de aquí que $C = tC$.
Por lo tanto $C \in \mathbf{T}$. ■

Proposición 2.3 *Sea* $\mathbf{C}$ *es una clase de módulos cerrada bajo cocientes y submódulos. La teoría de torsión generada por* $\mathbf{C}$ *es hereditaria.*

Demostración
Sea $\xi(\mathbf{C}) = (\mathbf{T}, \mathbf{F})$. Basta demostrar que $\mathbf{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas (prop. 2.2).
Sea $F \in \mathbf{F}$, para todo $C \in \mathbf{C}$ y $\alpha : C \to E(F)$ se tiene que $\alpha[C] \in \mathbf{T}$ y $\alpha[C] \leq E(F) \Rightarrow F \cap \alpha[C] = 0$ y como $F \leq_e E(F) \Rightarrow \alpha[C] = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$\Rightarrow E(F) \in \mathbf{F}$; es decir, $\mathbf{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. ■

Corolario 2.1 *Si* r *es un prerradical exacto izquierdo entonces* $\bar{r}$ *también es exacto izquierdo.*

Demostración
Como r es exacto izquierdo se tiene que $\mathbf{T}_r$ es una clase de pretorsión hereditaria y de la proposición anterior y el corolario 1.1 se sigue que $\bar{r}$ es exacto izquierdo.
■

Corolario 2.2 *Si r es un prerradical exacto izquierdo y M es un módulo, entonces rM es un submódulo esencial de $\bar{r}M$.*

Demostración
Sea $L \leq \bar{r}M$ y $rM \cap L = 0$, como r es exacto izquierdo $rL = rM \cap L = 0$ y por prop. 1.1.8 y la demostración de 1.1.9 tenemos que $L \in \mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{\bar{r}} \Rightarrow \bar{r}L = 0$. Además $\bar{r}$ es radical exacto izquierdo, lo cual implica que $0 = \bar{r}L = \bar{r}M \cap L = L$. Por lo tanto $L = 0$. ∎

Lema 2.1 *Sea $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$ una teoría de torsión hereditaria. Un módulo M es un módulo de torsión si y sólo si cada submódulo cíclico de M, es de torsión.*

Demostración
$\Rightarrow$] Inmediato.
$\Leftarrow$] $M = \sum_{x \in M} Rx$ que es un cociente de $\bigoplus_{x \in M} Rx \in \mathbf{T}$. ∎

Proposición 2.4 *Una teoría de torsión hereditaria es generada por la familia de aquellos módulos cíclicos R/I que son módulos de torsión.*

Demostración
Inmediata del lema anterior. ∎

Proposición 2.5 *Una teoría de torsión es hereditaria si y sólo si puede ser cogenerada por un módulo inyectivo.*

Demostración
Sea $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$ una teoría de torsión hereditaria.
Consideramos todos los ideales izquierdos de R tales que $R/I \in \mathbf{F}$,
$\mathbf{F}$ es cerrado bajo cápsulas inyectivas y productos $\Rightarrow E = \prod E(R/I) \in \mathbf{F}$.
Por ser E libre de torsión $Hom(M, E) = 0$ para todo $M \in \mathbf{T}$.
Por otro lado sabemos que $M \notin \mathbf{T}$ si y sólo si existe un morfismo de M en F distinto de cero para algún $F \in \mathbf{F}$; esto es, si y sólo si existe $x \in M$ y un morfismo $0 \neq f : Rx \to F$, como $Im(f)$ es un cíclico libre de torsión existe $j : Im(f) \to E$, entonces f se puede extender a un morfismo $Rx \to E$ distinto de cero que se puede extender a un morfismo $M \to E$ (E inyectivo),lo cual quiere decir $Hom(M, E) \neq 0$. Hemos probado que $M \in \mathbf{T} \Leftrightarrow Hom(M, E) = 0$, lo que significa que E cogenera la teoría de torsión.
Inversamente, sea E es un módulo inyectivo entonces la clase de torsión cogenerada por E es $\mathbf{T} = \{M \in R-Mod \mid Hom(M, E) = 0\}$ Si $M \in \mathbf{T}$, $N \leq M$ y cualquier morfismo $\alpha : N \to E$. Por ser E inyectivo éste morfismo se puede extender a $\beta : M \to E$, de tal forma que $\beta \circ i = \alpha$, como $M \in \mathbf{T}$, se tiene que $\alpha = 0$. Así probamos que todo submódulo de un módulo de torsión es de torsión. ∎

Lema 2.2 *Si L y M son módulos, entonces $Hom(L, E(M)) = 0$ si y solo si $Hom(C, M) = 0$ para cada submódulo cíclico C de L.*

Demostración

$\Longrightarrow$] Sea $C \leq L$ cíclico y $j : C \to L$ la inclusión, cualquier morfismo $C \to M$ se puede componer con la inclusión, $M \overset{i}{\hookrightarrow} E(M)$, obteniendo así un morfismo $f : C \to E(M)$, dado f existe $\beta : L \to E(M)$ (ya que $E(M)$ es inyectivo) tal que $f = j \circ \beta = j \circ 0 \Rightarrow 0 : C \to M$.

$\Longleftarrow$] Supongamos que existe $0 \neq \alpha : L \to E(M)$ entonces $0 \neq \alpha[L] \leq E(M)$ $\Rightarrow$ existe $0 \neq y \in \alpha[L] \cap M$.

Sea $x \in L$ tal que $\alpha(x) = y$ entonces tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] & E(M) \\ Rx \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\alpha|_{Rx}"'] & Ry \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

que conmuta,

entonces existe un morfismo distinto de cero de $Rx \leq L$ en $E(M)$!!. ■

Proposición 2.6 *Si* $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$ *es un teoría de torsión hereditaria cogenerada por el módulo inyectivo* E. *Un módulo* M *es libre de torsión si y sólo si es submódulo de un producto directo de copias de* E.

Demostración

Todo submódulo de un producto directo de copias de E es libre de torsión claramente.

Inversamente si M es un módulo libre de torsión distinto de cero tenemos:

1) Para toda $0 \neq x \in M$ existe $\mu_x \in Hom(M, E)$ tal que $\mu_x(x) \neq 0$.

Sea $0 \neq x \in M$, Rx es un submódulo de $M \in \mathbf{F} \Rightarrow Rx$ es libre de torsión. Como la teoría de torsión está cogenerada por el módulo inyectivo E, existe un morfismo $\alpha : Rx \to E$, distinto de cero. Además como E es inyectivo, existe un morfismo μ_x que extiende a α. Si denotamos como $\mu_o : Rx \to M$ al morfismo cero, tenemos que $\forall x \in M, x \neq 0$, existe $\mu_x : M \to E$, tales que $\mu_x(x) \neq 0$.

Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Nuc\eta \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[r, "\mu_x"] \arrow[d, "\eta"] & E \\ & E^M \arrow[ur, "\rho\mu_x"'] & \end{tikzcd}$$

conmutativo.

Así $Nuc(\eta) = \cap Nuc(\mu_x) = 0$, ya que por *(1)* sabemos que para cada $0 \neq x \in M$ existe $\mu_x \in Hom(M, E)$ tal que $\mu_x(x) \neq 0$. Hemos concluido que η es un monomorfismo.

Por lo tanto, todo módulo libre de torsión es submódulo de un producto directo de copias de E. ■

3 Topologías Lineales

A continuación daremos algunas definiciones necesarias para llegar a comprender lo que es una *Topología Lineal.*

Un *grupo topológico* es un grupo abeliano G, con una topología donde $+ : GxG \to G$ y $- : G \to G$ (la adición y el inverso) son funciones continuas. Observemos que por la continuidad de éstas operaciones en un grupo topológico las traslaciones son homeomorfismos; si $a \in G$ fijo y $\mathcal{U}$ es una vecindad de a, entonces $\mathcal{U} - a$ es una vecindad del cero. La topología queda determinada completamente por el filtro de vecindades del cero.

Un *anillo topológico* R, es un anillo dotado de una topología con la cual es un grupo topológico y además la multiplicación, $\cdot : RxR \to R$, es continua.

Si tenemos un anillo topológico R, un *módulo topológico izquierdo (derecho), M,* es un R-módulo izquierdo (derecho) con una topología con la cual M es un grupo topológico y el mapeo $M \times R \to M$ $((x, a) \mapsto ax)$ es continuo.

Cabe mencionar que las únicas topologías que son de nuestro interés, son aquellas que están definidas por ideales y submódulos, respectivamente.

Un anillo topológico R, es un *anillo topológico lineal izquierdo (derecho)* si existe un sistema fundamental de vecindades del cero que consista sólo de ideales izquierdos (derechos). La clase, F, de todos los ideales abiertos satisface:
T1) $J \in \mathcal{F}$ y $J \leq I \Rightarrow I \in \mathcal{F}$.
T2) $I, J \in \mathcal{F} \Rightarrow I \cap J \in \mathcal{F}$.
T3) $I \in \mathcal{F} \Rightarrow (I : a) \in \mathcal{F} \ \ \forall a \in R$.

Si R es un anillo topológico lineal izquierdo con $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los ideales izquierdos abiertos; un R-módulo es llamado *módulo topológico lineal* si tiene un sistema fundamental de vecindades de cero que conste de submódulos. Los submódulos abiertos satisfacen las siguientes condiciones:
TM1) $N \leq K$ y N es abierto $\Rightarrow K$ es abierto.
TM2) N y K son abiertos $\Rightarrow N \cap K$ es abierto.
TM3) N es abierto $\Rightarrow (N : x) \in \mathcal{F} \ \ \forall x \in M$.

Un anillo topológico lineal con su conjunto $\mathcal{F}$ de ideales abiertos induce una topología lineal sobre cualquier $M \in R - Mod$.
Nos interesa particularmente, la topología en la cual el conjunto de módulos abiertos es :

$$\mathcal{F}(M) = \{L \leq M \mid (L : x) \in \mathcal{F} \ \ \forall x \in M\}$$

Esta topología es llamada la $\mathcal{F}$-topología sobre M. Diremos que un módulo, M, es $\mathcal{F}$-discreto si la $\mathcal{F}$-topología sobre M es discreta.

Proposición 3.1 *La $\mathcal{F}$-topología sobre M es discreta si y sólo si $An(x) \in \mathcal{F} \ \ \forall x \in M$.*

Demostración
$An(x) \in \mathcal{F} \ \ \forall x \in M \Leftrightarrow (\{0\} : x) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \{0\} \in \mathcal{F}(M) \Leftrightarrow$ la $\mathcal{F}$-topología es discreta. ∎

Lema 3.1 *La clase de los módulos $\mathcal{F}$-discretos es una clase de pretorsión hereditaria.*

Demostración
Sea **C** la clase de todos los módulos $\mathcal{F}$-discretos.
1) **C** es cerrada bajo submódulos.
Si $M \in \mathbf{C}$ y $N \leq M \Rightarrow An(x) \in \mathcal{F} \ \ \forall x \in N$ (prop. 3.1) $\Rightarrow N \in \mathbf{C}$.
2) **C** es cerrada bajo cocientes.
Si $M \in \mathbf{C}$, $N \leq M$ y $\bar{x} \in M/N \Rightarrow An(\bar{x}) = An(x+N) \supseteq An(x) \in \mathcal{F}$ entonces por (T1) $An(\bar{x}) \in \mathcal{F} \ \ \forall \bar{x} \in M/N$. Por lo tanto $M/N \in \mathbf{C}$.
3) **C** es cerrada bajo sumas directas.
Si $\{M_\alpha\}_\Lambda \subseteq \mathbf{C}$ y $\varphi \in \oplus M_\alpha$, entonces $An(\varphi) = \cap An(\varphi(\alpha))$ y como $An(\varphi(\alpha)) \in \mathcal{F} \ \ \forall \alpha \in \Lambda$ entonces por (T2) $An(\varphi) \in \mathcal{F}$. ∎

Lema 3.2 *Cada clase de pretorsión hereditaria induce una topología lineal.*

Demostración
Sea **C** una clase de pretorsión hereditaria definimos:

$$\mathcal{F}_c = \{I \leq R \mid R/I \in \mathbf{C}\}$$

T1) Sea $J \in \mathcal{F}_c$ y $J \leq I \Rightarrow I \in \mathcal{F}_c$
Consideramos el epimorfismo canónico $\psi : R/J \to R/I$
entonces $R/I \cong (R/J)/Nuc(\psi) \in \mathbf{C} \Rightarrow R/I \in \mathbf{C}$. Por lo tanto $I \in \mathcal{F}_c$.
T2) $I, J \in \mathcal{F}_c \Rightarrow I \cap J \in \mathcal{F}_c$
Sea $f : R/(I \cap J) \to R/I \oplus R/J$ tal que $f(m + I \cap J) = (m+I, m+J)$,
es un monomorfismo $\Rightarrow R/(I \cap J) \cong f[R/(I \cap J)] \leq R/I \oplus R/J \in \mathbf{C}$.
Por lo tanto $I \cap J \in \mathcal{F}_c$.
T3) $I \in \mathcal{F}_c \Rightarrow (I : a) \in \mathcal{F}_c \ \ \forall a \in R$
Sea $a \in R$ consideremos: el morfismo $\mu_a : R \to R$ (multiplicar por a), el epimorfismo canónico $\psi : R \to R/I$ y la composición $f = \psi \circ \mu_a$.
Así tenemos que $R/Nuc(f) \cong f[R] \leq R/I \in \mathbf{C} \Rightarrow R/Nuc(f) \in \mathbf{C}$
y como $Nuc(f) = (I : a) \Rightarrow (I : a) \in \mathcal{F}_c \ \ \forall a \in R$. ∎

Proposición 3.2 *Existe una correspondencia biyectiva entre :*
(1) Topologías lineales sobre R.
(2) Clases de pretorsión hereditarias de R-módulos.
(3) Prerradicales exactos izquierdos.

Demostración
Si $\mathcal{F}$ es una topología lineal le asociamos $\mathbf{C}$ como en lema 3.1
Si $\mathbf{T}$ es una clase de pretorsión hereditaria le asociamos $\mathcal{F}_T$ como en lema 3.2
1) $\mathbf{T} \mapsto \mathcal{F}_T \mapsto \mathbf{C}$ es la identidad.
$\subseteq$] Sea $M \in \mathbf{T}$
$\Rightarrow R/An(x) \cong Rx \leq M \in \mathbf{T} \ \ \forall x \in M$
$\Rightarrow R/An(x) \in \mathbf{T} \ \ \forall x \in M \Rightarrow An(x) \in \mathcal{F}_T \ \ \forall x \in M$
Por lo tanto $M \in \mathbf{C}$.
$\supseteq$] Sea $M \in \mathbf{C}$
$\Rightarrow An(x) \in \mathcal{F}_T \ \ \forall x \in M \Rightarrow Rx \cong R/An(x) \in T \ \ \forall x \in M$
como $M = \sum Rx$ y $\sum Rx$ es un cociente de $\oplus Rx$ entonces $M \in \mathcal{F}_T$.
2) $\mathcal{F} \mapsto \mathbf{C} \mapsto \mathcal{F}_c$ es la identidad.
$\subseteq$] Sea $I \in \mathcal{F}$ y $\bar{x} \in R/I \Rightarrow An(\bar{x}) = An(x+I) = (I:x) \in \mathcal{F} \ \ \forall x \in R$ (T3)
$\Rightarrow R/I \in \mathbf{C} \Rightarrow I \in \mathcal{F}_c$
$\supseteq$] Sea $I \in \mathcal{F}_c \Rightarrow R/I \in \mathbf{C} \Rightarrow An(\bar{x}) \in \mathcal{F} \ \ \forall \bar{x} \in R/I$
$\Rightarrow (I:x) \in \mathcal{F} \ \ \forall x \in R$ en particular para cuando $x = 1$ entonces $I \in \mathcal{F}$.
Hasta aquí tenemos la equivalencia de (1) y (2). Como la equivalencia de (2) y (3) es el corolario 1.1.1, la proposición ha sido demostrada. ■

4 Topologías de Gabriel

Definición Una familia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de ideales izquierdos que satisface:
T3) $I \in \mathcal{F} \Rightarrow (I:a) \in \mathcal{F} \ \ \forall a \in R$.
T4) $I \leq R$ y $\exists J \in \mathcal{F}$ tal que $(I:b) \in \mathcal{F} \ \ \forall b \in J \Rightarrow I \in \mathcal{F}$.
es llamada una topología de Gabriel.

Una topología de Gabriel es una topología lineal para ello veamos que cumple con la definición dada en la sección anterior.

Proposición 4.1 *Si $\mathcal{F}$ es una topología de Gabriel entonces $\mathcal{F}$ satisface (T1) y (T2).*

Demostración
Sea $I \in \mathcal{F}$ y por (T3) si $a \in I$ entonces $R = (I:a) \in \mathcal{F}$.
T1) $J \in \mathcal{F}$ y $J \leq I \Rightarrow I \in \mathcal{F}$
$(I:a) = R \in \mathcal{F} \ \ \forall a \in J$ entonces por (T4) $I \in \mathcal{F}$.
T2) $I, J \in \mathcal{F} \Rightarrow I \cap J \in \mathcal{F}$
Si $a \in J \Rightarrow (I \cap J : a) = (I:a) \cap (J:a) = (I:a) \in \mathcal{F}$
entonces por (T4) $I \cap J \in \mathcal{F}$. ■

Proposición 4.2 *Si F es una topología de Gabriel y $J, I \in \mathcal{F}$ entonces $IJ \in \mathcal{F}$*

Demostración
Sea $b \in J \Rightarrow I \leq (IJ : b)$ por prop. anterior $(IJ : b) \in \mathcal{F}$ $\forall b \in J$ entonces por (T4) $IJ \in \mathcal{F}$. ■

Teorema 4.1 *Existe una correspondencia biyectiva entre:*
(1) Topologías de Gabriel.
(2) Teorías de Torsión Hereditarias.
(3) Radicales exactos izquierdo de $R - Mod$.

Demostración
La correspondencia entre (2) y (3) está probada en la prop. 2.1, entonces basta exhibir la correspondencia entre (1) y (2).
Si $\mathcal{F}$ es una topología de Gabriel entonces es una topología lineal (prop. 4.1) le asociamos una clase de pretorsión hereditaria $\mathbf{C}$, (prop. 3.2).
(a) Si $\mathcal{F}$ es una topología de Gabriel y $\mathbf{C}$ su clase de pretorsión hereditaria correspondiente, entonces $\mathbf{C}$ es cerrada bajo extensiones.
Si $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M" \to 0$ es exacta y $M', M" \in \mathbf{C}$ entonces
para cada $x \in M, g(x) \in M" \Rightarrow J_x = An(g(x)) \in \mathcal{F}$ como
$g(J_x x) = J_x g(x) = 0 \Rightarrow J_x x \leq Nuc(g) = Im(f) \cong M' \in \mathbf{C} \Rightarrow J_x x \in \mathbf{C}$.
Por otro lado $An(bx) = (An(x) : b) \in \mathcal{F}$ $\forall b \in J_x$ entonces por (T4)
$An(x) \in \mathcal{F}$ $\forall x \in M$. Por lo tanto $M \in \mathbf{C}$.
(b) Si $\mathbf{T}$ es una clase de torsión hereditaria y $\mathcal{F}_T$ su topología lineal correspondiente, entonces $\mathcal{F}_T$ satisface (T4).
Sea $I \leq R$ y $J \in \mathcal{F}_T$ tal que $(I : b) \in \mathcal{F}_T$ para cada $b \in J$
Sea $0 \to J/(I \cap J) \to R/I \to R/(I + J) \to 0$ exacta.
a) Como $R/J \in \mathbf{T}$ y $R/(I + J)$ es un cociente de $R/J \Rightarrow R/(I + J) \in \mathbf{T}$
b) Si $b \in J \Rightarrow An(b + I \cap J) = (I \cap J : b) = (I : b) \in \mathcal{F}_T$ (por T3).
$\Rightarrow J/(I \cap J)$ es $\mathcal{F}_T$-discreto $\Rightarrow J/(I \cap J) \in \mathbf{T}$.
$\mathbf{T}$ cerrada bajo extensiones entonces $R/I \in \mathbf{T}$ por lo tanto $I \in \mathcal{F}$. ■

Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son topologías sobre R, decimos que $\mathcal{F}_1$ es más débil que $\mathcal{F}_2$ (y $\mathcal{F}_2$ es más fuerte que $\mathcal{F}_1$) si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Con ésta relación tenemos un orden parcial en $\mathbf{Top}(R)$. A cada topología $\mathcal{F}$ le podemos asociar la más débil topología de Gabriel $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ que es más fuerte que $\mathcal{F}$.

Proposición 4.3 *Sea $\mathcal{F}$ la topología de Gabriel correspondiente a la teoría de torsión cogenerada por $E(M)$.*
Entonces $\mathcal{F} = \{I \leq R \mid (I : a)x \neq 0$ para cada $a \in R$ y $0 \neq x \in M\}$.

Demostración
Sea $A = \{I \leq R \mid (I : a)x \neq 0$ para cada $a \in R$ y $0 \neq x \in M\}$.
$\subseteq]$ Supongamos que $I \notin A \Rightarrow \exists a \in R$ y $0 \neq x \in M$ tal que $(I : a)x = 0$. Sea $\alpha : R/(I : a) \to M$ tal que $\alpha(\bar{1}) = x$; α es un morfismo distinto de cero $\Rightarrow R/(I : a) \notin \mathbf{T} \Rightarrow (I : a) \notin \mathcal{F}$.
$\supseteq]$ Supongamos que $I \notin \mathcal{F} \Rightarrow \exists \alpha : R/I \to M$ distinto de cero. Sea $0 \neq x = \alpha(\bar{1})$,

entonces para cada $a \in I$ tenemos que $\alpha(\bar{a}) = a\alpha(\bar{1}) = 0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow I \notin A$.
■

Proposición 4.4 *La topología de Gabriel correspondiente a la teoría de torsión cogenerada por $E(M)$ es la topología de Gabriel más fuerte para la cual M es libre de torsión.*

Demostración
Sea $(\mathbf{T},\mathbf{F})$ una teoría de torsión hereditaria donde M es libre de torsión, y sea $\mathcal{F}$ la topología de Gabriel correspondiente.
$I \in \mathcal{F} \Leftrightarrow R/(I:a) \in \mathbf{T} \;\; \forall a \in R \Rightarrow Hom(R/(I:a), M) = 0 \;\; \forall a \in R$,
entonces por lema 2.2 $I \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$. ■

5 Ejemplos de Topologías de Gabriel

I. 1-Topologías. Una 1-Topología sobre R es una topología de Gabriel con una base que consiste de ideales principales (izquierdos). Una 1-Topología $\mathcal{F}$ está determinada por el conjunto $\sum(\mathcal{F}) = \{a \in R \mid Ra \in \mathcal{F}\}$.

Proposición 5.1 *La función $\mathcal{F} \mapsto \sum(\mathcal{F})$ define una correspondencia biyectiva entre 1-Topologías y conjuntos, S de R, cerrados multiplicativamente que satisfacen:*
S1) $ba \in S \Longrightarrow a \in S$.
S2) $s \in S$ y $a \in R \Longrightarrow \exists t \in S$ y $b \in R$ tales que $ta = bs$.

Demostración
1) $\sum(\mathcal{F})$ es cerrado multiplicativamente y satisface (S1) y (S2).
(a) Sean $s,t \in \sum(\mathcal{F}) \Rightarrow (Rt:a) \in \mathcal{F}$ y $(Rt:a) \subseteq (Rts:as) \;\; \forall a \in R$
$\Rightarrow Rts \in \mathcal{F} \Rightarrow ts \in \sum(\mathcal{F})$
Por lo tanto $\sum(\mathcal{F})$ es multiplicativamente cerrado.
(b) $ba \in \sum(\mathcal{F}) \Rightarrow Rba \in \mathcal{F}$ y $Rba \subseteq Ra \Rightarrow a \in \sum(\mathcal{F})$
(c) Sean $s \in \sum(\mathcal{F})$ y $a \in R \Rightarrow (Rs:a) \in \mathcal{F}$ y como $\mathcal{F}$ es una 1-Topología existe $t \in \sum(\mathcal{F})$ tal que $Rt \subseteq (Rs:a) \Rightarrow t \in (Rs:a)$; es decir, $ta = bs$ para alguna $b \in R$.
2) Si S es un conjunto cerrado multiplicativamente que satisface (S1) y (S2) entonces definimos: $\mathcal{F}_s = \{I \leq R \mid I \cap S \neq \emptyset\}$; es una 1-Topología.
(a) Sea $I \in \mathcal{F}_s$ y $a \in R \Rightarrow \exists s \in I \cap S$ y por (S2) también existe $t \in S$ y $b \in R$ tales que $ta = bs \in I \Rightarrow t \in (I:a) \cap S$. Por lo tanto $(I:a) \in \mathcal{F}_s \;\; \forall a \in R$.
(b) Sea $I \leq R$ y $J \in \mathcal{F}_s$ tal que $(I:b) \in \mathcal{F}_s \;\; \forall b \in J \Rightarrow \exists s \in S \cap J$
$\Rightarrow (I:s) \in \mathcal{F}_s$, esto es, $(I:s) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in S$ tal que $bs \in I$, además $bs \in S \Rightarrow bs \in I \cap S$. Por lo tanto $I \in \mathcal{F}_s$.
(c) $\mathcal{F}_s$ tiene una base de ideales principales.

Sea $I \in \mathcal{F}_s \Rightarrow I \cap S \neq \emptyset$. Sabemos que $\forall a \in I \leq R$ y $s \in I \cap S, \exists t \in S$ y $b \in R$ tales que $ta = bs$. Esto implica que $\exists t \in (Rs : a)$
$\forall a \in I \Rightarrow (Rs : a) \cap S \neq \emptyset \quad \forall a \in I \Rightarrow (Rs : a) \in \mathcal{F}_s \quad \forall a \in I \Rightarrow Rs \in \mathcal{F}_s$. Y como $Rs \leq I$, hemos probado que $\mathcal{F}_s$ tiene una base de ideales principales.
3) $\mathcal{F} \mapsto \sum(\mathcal{F}) \mapsto \mathcal{F}_S$ es la identidad.
$Rs \in \mathcal{F} \Leftrightarrow s \in \sum(\mathcal{F}) \Leftrightarrow Rs \cap \sum(\mathcal{F}) \neq \emptyset \Leftrightarrow Rs \in \mathcal{F}_S$.
4) $S \mapsto \mathcal{F}_s \mapsto \sum(\mathcal{F}_s)$ es la identidad.
$s \in S \Leftrightarrow Rs \in \mathcal{F}_s \Leftrightarrow s \in \sum(\mathcal{F})$. ■

Para una 1-Topología $\mathcal{F}$, los módulos M de $\mathcal{F}$-torsión están caracterizados por la propiedad de que para cada $x \in M, \exists s \in \sum(\mathcal{F})$ tal que $sx = 0$.

II. La Teoría de Torsión de Goldie. La familia $\mathcal{F}$ de todos los ideales esenciales en R es una topología, pero no siempre cumple T4. El prerradical exacto izquierdo correspondiente lo denotamos por Z. A ZM le decimos el submódulo singular de M y a $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ se le llama la Topología de Goldie y G es el radical correspondiente a $\mathcal{G}(\mathcal{F})$.

Proposición 5.2 $G(M)/Z(M) = Z(M/ZM)$.

Demostración
$\subseteq]$ Por el corolario 2.2 tenemos que $ZM \leq_e GM \quad \forall M \in R-Mod$.
Si $\bar{x} \in G(M/ZM) = GM/ZM \Rightarrow An(\bar{x}) = (ZM : x) \leq_e R \Rightarrow An(\bar{x}) \in \mathcal{F} \Rightarrow GM/ZM \leq Z(M/ZM)$.
$\supseteq]$ inmediato. ■

Proposición 5.3 *Si $\mathcal{F}$ es la familia de los ideales esenciales entonces* $\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \{I \leq R \mid \exists J \in \mathcal{F}$ *tal que* $I \leq J$ *y* $(I : b) =\in \mathcal{F} \quad \forall b \in J\}$

Demostración
$\subseteq] I \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$ entonces tenemos que $G(R/I) = R/I, Z(R/I) = J/I$
y como $Z((R/I)/Z(R/I)) = G(R/I)/Z(R/I) = (R/I)/(J/I) = R/J$
entonces $Z(R/J) = R/J$ la última igualdad indica que $J \in \mathcal{F}, I \leq J$
y como $Z(J/I) = J/I$ entonces $An(\bar{b}) = An(b + I) = (I : b) \in \mathcal{F} \quad \forall b \in J$.
$\supseteq] I \leq R, I \leq J \in \mathcal{F}$ y $(I : b) \in \mathcal{F} \quad \forall b \in J \Rightarrow J, (I : b) \in \mathcal{G}(\mathcal{F}) \quad \forall b \in J$
entonces por (T4) $I \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$. ■

Notemos que un módulo, en la Teoría de Torsión de Goldie, es libre de torsión si y sólo si su submódulo singular es cero (*i.e.* es no singular).

La Topología Densa. Los ideales izquierdos que pertenecen a la Topología de Gabriel, $\mathcal{D}$, correspondiente a la teoría de torsión hereditaria cogenerada por el módulo inyectivo $E(R)$ son llamados densos.
Reinterpretando la prop. 5.5 tenemos:

Proposición 5.4 *$I \in \mathcal{D} \iff (I : a)$ no tiene anuladores derechos para cada $a \in R$*

Corolario 5.1 *Todo ideal izquierdo denso es esencial en R.*

Corolario 5.2 *Un ideal bilateral es denso como ideal izquierdo si y sólo si I no tiene anuladores derechos distintos de cero.*

$\mathcal{D}$ es la Topología de Gabriel más fuerte en la cual R es libre de torsión. En general es más débil que la Topología de Goldie.

Capítulo 3

El Teorema de Miller-Teply

Un conocido teorema de Hopkins y Levitzki dice que todo anillo con uno, sí es artiniano izquierdo, es neteriano izquierdo. El principal teorema de este capítulo generaliza el resultado a teorías de torsión hereditarias.

Las teorías de torsión con las que trabajaremos en este capítulo son hereditarias y denotaremos como τ al radical exacto izquierdo asociado .

1 Condiciones de Cadena en Teorías de Torsión

Definición. Un submódulo $N \leq M$ es τ-puro en M si $M/N \in \mathbf{F}_\tau$.

Proposición 1.1 *Si $N \leq M \in \mathbf{F}_\tau$ y $M/N \in \mathbf{T}_\tau$ entonces $N \leq_e M$*

Demostración
Sea $K \leq M$ tal que $K \cap N = 0$ como $M \in \mathbf{F}_\tau$, tenemos que $K \in \mathbf{F}_\tau$. Ahora consideremos el epimorfismo $\varphi : M \to M/N$ observemos que
$K \cong \varphi(K) \leq M/N \in$ entonces $K \in \mathbf{T}_\tau$. Así concluimos que $K = 0$. ■

Proposición 1.2 *Si $\{N_i\}_I$ es una familia de submódulos de M τ-puros en M entonces $\cap N_i$ es τ-puro en M.*

Demostración
Dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\pi_i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & & M/N_i \\ & & \prod M/N_i \arrow[u, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

sabemos que $\cap N_i = \cap Nuc(f_i) = Nuc(\alpha)$,
entonces $M/\cap N_i \cong Im(\alpha) \leq \prod M/N_i \in \mathbf{F}_\tau$.
Por lo tanto $\cap N_i$ es τ-puro. ■

Definición Un R-módulo $M \neq 0$ es τ-cocrítico si $M \in \mathbf{F}_\tau$ y cada cociente distinto de M está en $\mathbf{T}_\tau$.

Proposición 1.3 *Submódulos distintos de cero de τ-cocríticos son módulos τ-cocríticos.*

Demostración
Sea M un módulo τ-cocrítico y $0 \neq N \leq M$
1) $M \in \mathbf{F}_\tau \Rightarrow N \in \mathbf{F}_\tau$
2) Sea $0 \neq K \leq N \leq M \Rightarrow N/K \leq M/K \in \mathbf{T}_\tau \Rightarrow N/K \in \mathbf{T}_\tau$.
Por lo tanto N es τ-cocrítico. ∎

Proposición 1.4 $0 \neq M \in \mathbf{F}_\tau$, *Si M satisface la condición de cadena descendente sobre submódulos τ-puros entonces M tiene un submódulo τ-cocrítico.*

Demostración
Sea $\mathcal{A} = \{N \leq M \mid N$ es τ-puro $\}$; con la contención $\mathcal{A}$ está parcialmente ordenado, además si $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_k \supseteq \cdots$ es una cadena descendente de $\mathcal{A}$, entonces $\cap N_i \in \mathcal{A}$ (prop. 1.2), por consiguiente $\mathcal{A}$ satisface las hipótesis del lema de Zorn, entonces $\mathcal{A}$ tiene elementos mínimos. Sea $K \leq M$ un elemento mínimo en $\mathcal{A}$
1) $K \in \mathbf{F}_\tau$ (pues $K \leq M \in \mathbf{F}_\tau$).
2) Si $0 \neq N \leq K \Rightarrow K/N \in \mathbf{T}_\tau$
Si $\tau(K/N) = K'/N \quad (N \leq K' \leq K)$ entonces $(K/N)/\tau(K/N) \cong K/K' \in \mathbf{F}_\tau$ y $M/K \in \mathbf{F}_\tau$ (pues K es τ-puro). Y como la sucesión

$$0 \to K/K' \to M/K' \to M/K \to 0$$

es exacta $\Rightarrow M/K' \in \mathbf{F}_\tau$, pero como K era mínimo respecto a esta propiedad entonces $K' = K$. Por lo tanto $K/N \in \mathbf{T}_\tau$. ∎

Definición $N \leq M$ es llamado τ-crítico en M si M/N es τ-cocrítico.

Proposición 1.5 *N es τ-crítico en $M \Longleftrightarrow N$ es máximo entre los submódulos propios τ-puros en M.*

Demostración
$\Longrightarrow$] Supongamos que N no es máximo entre los submódulos propios τ-puros en M, entonces existe $K \leq M$ tal que $N < K < M$ y $M/N, M/K \in \mathbf{F}_\tau$
$\Rightarrow 0 \neq K/N < M/N$ y como $0 \neq M/K \cong (M/N)/(K/N)$
$\Rightarrow M/N$ no es τ-cocrítico $\Rightarrow N$ no es τ-crítico !!.
$\Longleftarrow$]N es máximo entre los submódulos propios τ-puros en M entonces:
1) $M/N \in \mathbf{F}_\tau$.
2) Todo cociente distinto de M/N es de τ-torsión.
Sea $K \leq M$ y $N < K$ entonces $0 \neq K/N \leq M/N$ y $(M/N)/(K/N) \cong M/K$.
Demostraremos que $M/K \in \mathbf{T}_\tau$.
1) Si $K = M$ inmediato.
2) Si $K < M$ consideramos $\tau(M/K) = M'/K$

$\Rightarrow M/M' \cong (M/K)/\tau(M/K) \in \mathbf{F}_\tau$

$\Rightarrow M'$ es τ-puro en M y como N era máximo respecto a ésta propiedad entre los submódulos propios entonces $M' = M$. Por lo tanto $M/K \in \mathbf{T}_\tau$. ■

Definición Una τ-cadena en M es una sucesión de submódulos $0 = M_0 \leq M_1 \leq \cdots \leq M_n = M$ con la propiedad de que M_{i+1}/M_i es τ-cocrítico para toda $0 \leq i \leq n-1$. Si tal τ-cadena existe, diremos que M tiene τ-longitud finita; además el entero n será llamado la τ-longitud de M.

La τ-longitud de M está bien definida, pues se puede probar que todas las τ-cadenas tienen la misma longitud. Aunque esta demostración no se hará aquí. (Vease [3]).

En caso de tener la teoría de torsión, $\tau = 0$, en la cual todos los módulos son libres de torsión, los módulos τ-cocríticos son precisamente los módulos simples. Una 0-cadena en M no es otra cosa que la serie de descomposición de M.

Proposición 1.6 *Si M tiene τ-longitud finita entonces $M \in \mathbf{F}_\tau$.*

Demostración

Sea M un módulo de τ-longitud n. Procederemos por inducción sobre la longitud de la cadena.

Si $n = 0$, significa que $M = 0 \in \mathbf{F}_\tau$

Supongamos que todo módulo que tenga τ-longitud menor que n es libre de torsión.

Como $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M/M_1 \rightarrow 0$ es exacta, $M_1 \in \mathbf{F}_\tau$ por ser τ-cocrítico y $M/M_1 \in \mathbf{F}_\tau$ por hipótesis de inducción, pues tiene τ-longitud $n-1$.

Podemos concluir que $M \in \mathbf{F}_\tau$. ■

Proposición 1.7 *Sea $M \in R-Mod$ libre de torsión. Entonces son equivalentes:*

(1) M tiene τ-longitud finita, n.

(2) M satisface ambas condiciones de cadena, descendente (ccd) y ascendente (cca), sobre submódulos τ-puros.

Demostración

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Lo probaremos por inducción sobre la longitud de la cadena.

Como ya vimos si $n = 0, M = 0$ y se satisface (2) claramente.

Supongamos ahora que todo módulo de longitud menor que n satisface ambas condiciones de cadena.

Sea $\mathcal{P}$ la familia de todos los submódulos τ-puros en M. Para cada $N \in \mathcal{P}$ tenemos que $M_1/(M_1 \cap N) \cong (M_1 + N)/N \leq M/N \in \mathbf{F}_\tau$ y como M_1 es τ-cocrítico, entonces $M_1 \cap N = 0$ ó $M_1 \leq N$. Denotemos por $\mathcal{P}'$ la familia de los τ-puros que contienen a M_1 y por $\varphi : M \to M/M_1$ el epimorfismo canónico. Claramente la imagen de un τ-puro en M es τ-puro en M/M_1.

Si $\mathcal{P}' \neq \emptyset$, toda cadena ascendente con al menos un τ-puro que contenga a M_1 induce una cadena en $\varphi[\mathcal{P}']$, por hipótesis de inducción la cadena en M/M_1 se estaciona; es decir, existe $n \in \mathbf{Z}^+$ tal que N_n/M_1 es máximo en la cadena, que proviene de un elemento máximo en $\mathcal{P}$. Por consiguiente la cadena en M se estaciona en N_n.

Si $\mathcal{P}' = \emptyset$, como $M_1 \cap N = 0$ para cada $N \in \mathcal{P}$ tenemos que $\varphi[N] \cong N$ entonces toda cadena ascendente en M es isomorfa a una cadena en M/M_1 y otra vez por hipótesis de inducción la cadena en $\varphi[\mathcal{P}]$ se estaciona; es decir tiene un elemento máximo. Por consiguiente la cadena en $\mathcal{P}$ tiene un elemento máximo, en el cual se estaciona. Y de la misma manera se prueba que $\mathcal{P}$ satisface la ccd, probando que cada cadena tiene un elemento mínimo.
(2) $\Longrightarrow$ (1)
Si $M = 0$ no hay nada que probar.
Si $M \neq 0$, por prop. 1.4, existe $M_1 \leq M$ mínimo τ-puro que es τ-cocrítico. Inductivamente para cada $j > 1$, tenemos que si $0 \neq M/M_{j-1} \in \mathbf{F}_\tau$ y escogemos a $M_j \leq M$ de tal forma que M_j/M_{j-1} es τ-cocrítico. Hemos construido una cadena $0 \leq M_1 \leq \cdots$ ascendente de τ-puros, que por hipótesis sabemos que se estaciona; es decir, existe un M_n máximo en la cadena.
Además M_n es igual a M. Pues si $0 \neq M/M_n \in \mathbf{F}_\tau$, por prop. 1.4 existe un $M_{n+1} \leq M$ tal que M_{n+1}/M_n es τ-cocrítico, $M_n < M_{n+1}$!!
Por lo tanto M tiene τ-longitud finita. ■

Corolario 1.1 *Sean σ y τ radicales exactos izquierdos tales que $\sigma \leq \tau$. Si $M \in \mathbf{F}_\tau$ tiene σ-longitud finita, entonces M tiene τ-longitud finita.*

Demostración
Notemos que todos los módulos libres de τ-torsión son automáticamente libres de σ-torsión.
Si $N_0 \leq N_1 \leq \cdots$ es una cadena ascendente de τ-puros, también es una cadena ascendente de σ-puros y por hipótesis sabemos que existe $n \in \mathbf{Z}^+$ tal que N_n es máximo en la cadena; es decir, la cadena se estaciona. De la misma manera se prueba que toda cadena descendente de τ-puros tiene un mínimo. Así y con la ayuda de prop. 1.7 concluimos que M tiene τ-longitud finita. ■

Corolario 1.2 *Sean α y β radicales exactos izquierdos, $\tau = inf(\alpha, \beta)$ y $M \in \mathbf{T}_\beta$. Entonces M tiene τ-longitud finita si, y solo si, M tiene α-longitud finita.*

Demostración
Observemos que para cada $T \in \mathbf{T}_\beta$ se tiene que $\tau T = \alpha T \cap \beta T = \alpha T$.
En particular cada cociente de M es de β-torsión, de lo cual concluimos que $N \leq M$ es τ-puro si y solo si es α-puro. ■

Corolario 1.3 *Si M tiene τ-longitud finita y N es un submódulo de M. entonces N tiene τ-longitud finita.*
Además, si $M/N \in \mathbf{F}_\tau$, entonces M/N tiene τ-longitud finita.

Demostración
Primero haremos algunas observaciones.

Para cada L τ-puro en N definimos $f(L) \leq M$ de tal forma que $f(L)/L = \tau(M/L)$. Como

$$\frac{f(L)\cap N}{L} \leq N/L \in \mathbf{F}_\tau \;\text{ y }\; \frac{f(L)\cap N}{L} \leq f(L)/L \in \mathbf{T}_\tau$$

y además

$$M/f(L) \cong \frac{M/L}{\tau(M/L)} \in \mathbf{F}_\tau,$$

tenemos que $f(L)\cap N = L$ y $f(L)$ es τ-puro.

Por otra parte, si $L_1 \leq L_2$ y considerando el epimorfismo natural $M/L_1 \to M/L_2$ que por ser epimorfismo manda submódulos de τ-torsión de M/L_1 en submódulos de τ-torsión en M/L_2.
Y como $\tau(M/L_1) = f(L_1)/L_1 \mapsto (f(L_1)+L_2)/L_2 \leq f(L_2)/L_2$. concluimos que $f(L_1) \leq f(L_2)$.

Dada cualquier cadena ascendente $L_1 \leq L_2 \leq \cdots$ de τ-puros en N, ésta induce una cadena ascendente $f(L_1) \leq f(L_2) \leq \cdots$ de τ puros en M.
Por hipótesis la cadena en M se estaciona en $f(L_n)$ para algún $n \in \mathbf{Z}^+$.
Si $L_n \leq L_k \Rightarrow f(L_n) \leq f(L_k)$ como la cadena se estaciona en $f(L_n)$ $\Rightarrow f(L_n) = f(L_k)$.
Por otro lado $L_k = f(L_k)\cap N = f(L_n)\cap N = L_n$, por consiguiente la cadena en N se estaciona.
Se prueba de igual manera para cadenas descendentes. Entonces por prop. 1.7 N tiene τ-longitud finita.

La segunda parte del corolario es una consecuencia inmediata de la prop. 1.7 ∎

Corolario 1.4 *Sean $N \leq M$ módulos tales que $M \in \mathbf{F}_\tau$ y $M/N \in \mathbf{T}_\tau$. Si N tiene τ-longitud finita, entonces M también tiene τ-longitud finita.*

Demostración
Sea $L_1 \leq L_2 \leq \cdots$ una cadena ascendente de τ-puros en M, $L_1\cap N \leq L_2 \cap N \leq \cdots$ es una cadena ascendente de τ-puros en N (porque $N/(N\cap L_i) \cong (N+L_i)/L_i \leq M/L_i \in \mathbf{F}_\tau \quad \forall i$).
Por hipótesis existe $n \in \mathbf{Z}^+$ tal que $N\cap L_n = N\cap L_k \quad \forall k \geq n$. Sea $k \geq n$ y $C = N\cap L_n = N \cap L_k$, tenemos que $L_k/L_n \leq M/L_n \in \mathbf{F}_\tau$. Por otro lado $L_k/L_n \cong \frac{L_k/C}{L_n/C} \in \mathbf{T}_\tau$, pues $L_k/C \cong (L_k+N)/N \leq M/N$ que es de τ-torsión

por hipótesis. Concluimos que $L_k = L_n \quad \forall k \geq n$; es decir, M satisface cca. De la misma manera se prueba que M satisface ccd y con lo ayuda de la prop. 1.7 tenemos que M tiene τ-longitud finita. ■

Proposición 1.8 *Sea $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \to 0$ tal que N y K tienen τ-longitud finita, entonces M también tiene τ-longitud finita.*

Demostración
Elegimos una τ-cadena $0 = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_r = N$ en N y otra τ-cadena $0 = K_0 \leq K_1 \leq \cdots \leq K_s = K$ en K. Definimos $M_i = N_i \quad 0 \leq i \leq r$ y $M_{i+r} = g^{-1}(K_i) \quad 1 \leq i \leq s$. Entonces tenemos que

$$0 = M_0 \leq M_1 \leq \cdots \leq M_{r+s} = M$$

claramente es una τ-cadena. ■

Corolario 1.5 *La suma directa de un número finito de submódulos que tienen τ-longitud finita, también tiene τ-longitud finita.*

Demostración
Procediendo por inducción sobre el número de sumandos en la suma directa y con la ayuda de la proposición anterior se verifica fácilmente. ■

Proposición 1.9 *Sea M un módulo libre de torsión y sea F la suma de todos los submódulos de M los cuales tiene τ-longitud finita. Entonces todo submódulo finitamente generado de F tiene τ-longitud finita.*

Demostración
Sea $\{F_\alpha\}_\Lambda$ la familia de todos los submódulos de M que tienen τ-longitud finita y sea $G = \bigoplus_\Lambda F_\alpha$ la suma directa. Se tiene un epimorfismo natural $G \xrightarrow{\varphi} F$. Si N es un submódulo de F finitamente generado, usando los generadores podemos encontrar un $K \leq G$ finitamente generado, $K \leq \bigoplus_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$, que bajo el epimorfismo antes mencionado cubre a N. Por el corolario anterior y con ayuda de la primera parte del cor. 1.3 sabemos que K tiene τ-longitud finita. Además $N \cong K/Nuc(\varphi)$ y es libre de τ-tosión (porque M lo es), así que aprovechando la segunda parte de cor. 1.3 concluimos que N tiene τ-longitud finita. ■

2 El Teorema de Miller-Teply

Lo que probaremos es que si R satisface la condición de cadena descendente (ccd) sobre ideales izquierdos τ-puros entonces R satisface la condición de cadena ascendente (cca) sobre ideales izquierdo τ-puros.

Ahora estudiaremos algunas propiedades de un ideal que será particularmente de nuestro interés.

Proposición 2.1 *Son iguales los siguientes ideales :*
$\mathbf{A} = \cap\left(\mathcal{A} = \{I \leq R \mid I \text{ es } \tau\text{-crítico }\}\right)$
$\mathbf{B} = \cap\left(\mathcal{B} = \{Nuc(f) \mid f : R \to S \text{ y } S \text{ es } \tau\text{-cocrítico }\}\right)$
$\mathbf{C} = \cap\left(\mathcal{C} = \{An(S) \mid S \text{ es } \tau\text{-cocrítico }\}\right)$

Demostración
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$] Sea $I \leq R$ τ-crítico, entonces si $\pi : R \to R/I$ es el epimorfismo canónico tenemos que $I = Nuc(\pi)$ y R/I es τ-cocrítico.
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$] Sea $f : R \to S$ y S τ-cocrítico entonces $R/Nuc(f) \cong f[R] \leq S$ y por prop. 1.3 $R/Nuc(f)$ es τ-cocrítico $\Rightarrow Nuc(f)$ es τ-crítico.
Hasta aquí tenemos $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.
$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ Sea S un ideal τ-cocrítico y sea $f_s : R \to S$ tal que $f_s(r) = rs$ entonces $\bigcap_{s \in S} Nuc(f_s) = An(S)$.
Así tenemos que $\mathcal{C} = \{f_s : R \to S \mid s \in S \text{ y } S \;\; \tau\text{-cocrítico}\} \subseteq \mathcal{B}$
$\Rightarrow \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$.
$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A} \Rightarrow$] Sea $I \in \mathcal{A} \Rightarrow R/I$ es τ-cocrítico y como $An(R/I) = I \Rightarrow I \in \mathcal{C}$
$\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}$. ■

A partir de este momento, el ideal caracterizado en la proposición anterior lo denotaremos como V.

Lema 2.1 *Si R satisface ccd sobre ideales izquierdos τ-puros entonces existe un entero positivo n tal que $V^{n+q}/V^{n+q+1} \in \mathbf{T}_\tau$ $\forall q \geq 0$.*

Demostración
(Contrapositiva)
Supongamos que existe una sucesión $\{n_i\}$ tal que $V^{n_i}/V^{n_i+1} \notin \mathbf{T}_\tau$,
entonces tenemos las siguientes observaciones:
1) $\tau(V^{n_i}/V^{n_i+1}) = T_{n_i}/V^{n_i+1}$ así que $V^{n_i+1} \leq T_{n_i} < V^{n_i}$
lo cual indica que $\{T_{n_i}\}$ es una cadena descendente.
2) Además sabemos que :

$$\left(\frac{V^{n_i}/V^{n_i+1}}{\tau(V^{n_i}/V^{n_i+1})}\right) \cong \left(\frac{V^{n_i}}{T_{n_i}}\right) \in \mathbf{F}_\tau$$

Por otro lado si consideramos el conjunto $\mathcal{A}_i = \{I \leq R \mid I \cap V^{n_i} = T_{n_i}\}$ $\forall i$, que es parcialmente ordenado por la contención , además toda cadena ascendente tiene una cota superior que pertenece a $\mathcal{A}_i$. Como satisface las condiciones del lema de Zorn $\mathcal{A}$ tiene elementos máximos. Para cada i, sea M_i un elemento máximo en $\mathcal{A}$. Sea $\varphi : R/T_{n_i} \to R/M_i$ el epimorfismo natural entonces:

3) $\varphi(V^{n_i}/T_{n_i}) \cong V^{n_i}/T_{n_i}$

$$\varphi(V^{n_i}/T_{n_i}) = (V^{n_i} + M_i)/M_i \cong V^{n_i}/V^{n_i} \cap M_i = V^{n_i}/T_{n_i} \in \mathbf{F}_\tau$$

4) $\varphi(V^{n_i}/T_{n_i})$ es esencial en R/M_i
Sea $K \geq M_i$ tal que $\varphi(V^{n_i}/T_{n_i}) \cap (K/M_i) = 0$ entonces, por la ley modular

$$\Big((V^{n_i} + M_i)/M_i\Big) \cap K/M_i \cong \Big((V^{n_i} \cap K)/M_i\Big) + \Big((M_i \cap K)/M_i\Big) = 0$$

$\Rightarrow (V^{n_i} \cap K)/M_i = 0 \Rightarrow T_{n_i} \leq V^{n_i} \cap K \leq M_i$
$\Rightarrow T_{n_i} \cap V^{n_i} \leq V^{n_i} \cap K \leq M_i \cap V^{n_i}$
$\Rightarrow T_{n_i} \leq V^{n_i} \cap K \leq T_{n_i} \Rightarrow K = M_i \Rightarrow K/M_i = 0.$
5) Cada M_i es τ-puro
Como $\tau(R/M_i) \in \mathbf{T}_\tau$ y $\varphi(V^{n_i}/T_{n_i}) \in \mathbf{F}_\tau$ tenemos que:
$\tau(R/M_i) \cap \varphi(V^{n_i}/T_{n_i}) = 0$ y por el inciso anterior $\tau(R/M_i) = 0$.
Por lo tanto M_i es τ-puro.
Sea

$$N_j = \bigcap_{i=1}^{i=j} M_i$$

N_j es τ-puro pues es intersección de τ-puros y además $T_{n_i} \leq N_i \ \ \forall i$ (se verifica fácilmente por inducción/i y por obs.1). Así tenemos la siguiente relación:

$$V^{n_{i+1}} \leq V^{n_i+1} \leq T_{n_i} \leq N_i \tag{$*$}$$

Y por construcción $N_{i+1} \leq N_i \ \ \forall i \in \mathbb{Z}^+$
6) $N_i \neq N_{i+1} \ \ \forall i \in \mathbb{Z}^+$
Si $N_i = N_{i+1}$ para algún número positivo i, de la relación ($*$) y de la construcción de N_i se tiene que $V^{n_{i+1}} \leq N_{i+1} \leq M_{i+1}$
$\Rightarrow V^{n_{i+1}}/V^{n_{i+1}+1} = (V^{n_{i+1}} \cap M_{i+1})/V^{n_{i+1}+1} = T_{n_{i+1}}/V^{n_{i+1}+1}$
$\Rightarrow T_{n_{i+1}} = V^{n_{i+1}}$ que contradice la obs.1.
Así que hemos construido una cadena estrictamente descendente, $\{N_i\}$ de ideales τ-puros que no se estaciona. Por consiguiente R no satisface la ccd. ∎

Lema 2.2 *Sea $M \in R$-Mod. Si existen $K_1, ..., K_r \leq M$ τ-críticos cuya intersección es 0. Entonces existen $N_1, ..., N_k \leq M$ τ-cocríticos tales que la suma $\sum_{i=1}^k N_i \leq M$ es directa y $\frac{M}{(\sum_{i=1}^k N_i)} \in \mathbf{T}_\tau$.*

Demostración
Observemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & M/K_i \\ & \prod M/K_i = \oplus M/K_i \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Como $Nuc(\alpha) = \cap Nuc(f_i) = \cap K_i = 0$, por hipótesis, α es monomorfismo.
Es decir M es libre de torsión, ya que $M \cong M' \leq \oplus M/K_i \in \mathbf{F}_\tau$, porque cada M/K_i es τ-cocrítico.
Además tenemos que $0 \leq M/K_1 \leq M/K_1 \oplus M/K_2 \leq \cdots \leq \bigoplus M/K_t$ es una τ-cadena, esto indica que $\bigoplus M/K_i$ tiene longitud finita; por cor.1.3 M también es de longitud τ-finita y por prop. 1.7, sabemos que M satisface ccd y cca sobre submódulos τ-puros.

Procedamos a elegir los submódulos de M τ-cocríticos mediante un proceso inductivo.
I. Tenemos que $0 \neq M \in \mathbf{F}_\tau$ y M satisface ccd sobre submódulos τ-puros, por prop. 1.4, M tiene un submódulo τ-cocrítico. Sea $N_1 \leq M$ τ-cocrítico y $0 \neq x \in N_1$, existe un τ-crítico K_1 tal que $x \notin K_1$ (K_1 existe ya que $\cap K_i = 0$).
Ob.1 $N_1/(N_1 \cap K_1) \cong (K_1 + N_1)/K_1 \leq M/K_1 \in \mathbf{F}_\tau$ y como N_1 es τ-cocrítico se tiene que $N_1 \cap K_1 = 0$.
II. Supongamos ahora que $N_1, ..., N_{t-1}$ y $K_1, ..., K_{t-1}$ han sido elegidos de tal forma que $\forall i < t$ se tiene:
(a) N_i es τ-cocrítico.
(b) $N_i \leq \bigcap_{j=1}^{i-1} K_j$.
(c) $N_i \cap K_i = 0$.
Si $\bigcap_{j=1}^{t-1} K_j \neq 0$ entonces elegimos $N_t \leq \bigcap_{j=1}^{t-1} K_j$ τ-cocrítico, y si $0 \neq x \in N_t$ elegimos K_t de tal forma que $x \notin K_t$. Además por el mismo razonamiento que en **Ob.1** sabemos que $N_t \cap K_t = 0$.
III. Observemos que

$$\frac{\cap_{j=1}^{i-1} K_j}{\cap_{j=1}^{i} K_j} = \frac{\cap_{j=1}^{i-1} K_j}{(\cap_{j=1}^{i-1} K_j) \cap K_i} \cong \frac{(\cap_{j=1}^{i-1} K_j) + K_i}{K_i} \leq M/K_i$$

y como M/K_i es τ-cocrítico, $\dfrac{\cap_{j=1}^{i-1} K_j}{\cap_{j=1}^{i} K_j}$ también lo es. Así tenemos la siguiente cadena $M \geq K_1 \geq K_1 \cap K_2 \geq \cdots \geq \cdots$ que es de longitud τ-finita, por hipótesis sabemos que existe $n \in \mathbf{Z}^+$ tal que $\cap_{j=1}^{n} K_j = 0$, esto indica que el proceso inductivo se detiene despues de un número finito de pasos.

Una vez elegidos los submódulos τ-cocríticos probaremos que $\sum_{i=1}^{n} N_i$ es directa.
Basta probar que $(\sum_{i=1}^{t-1} N_i) \cap N_t = 0 \quad \forall 1 \leq t \leq n$.
Además, por construcción tenemos que $N_t \leq \cap_{i=1}^{t-1} K_i$, entonces

$$(\sum_{i=1}^{t-1} N_i) \cap N_t \leq (\sum_{i=1}^{t-1} N_i) \bigcap (\cap_{i=1}^{t-1} K_i)$$

Lo que haremos es probar por inducción sobre t que

$$(\sum_{i=1}^{t} N_i) \bigcap (\cap_{i=1}^{t} K_i) = 0 \quad \forall 1 \leq t \leq n$$

Si $t = 1$ claramente $N_1 \cap K_1 = 0$, por construcción.
Supongamos que $(\sum_{i=1}^{r} N_i) \bigcap (\cap_{i=1}^{r} K_i) = 0 \quad \forall 1 \leq r < t$

$(\sum_{i=1}^{t} N_i)\bigcap(\cap_{i=1}^{t} K_i)$
$= (\sum_{i=1}^{t-1} N_i + N_t)\bigcap(\cap_{i=1}^{t-1} K_i \cap K_t)$
$= ((\sum_{i=1}^{t-1} N_i + N_t)\bigcap(\cap_{i=1}^{t-1} K_i)) \cap K_t$ **Como** $N_t \leq \cap_{i=1}^{t-1} K_i$
$= \left(((\sum_{i=1}^{t-1} N_i)\bigcap(\cap_{i=1}^{t-1} K_i)) + N_t\right) \cap K_t$ **Usando la ley modular**
$= N_t \cap K_t = 0$ **Por hipótesis de indución y por construcción.**
Esto prueba que la suma es directa.

Ahora probaremos por inducción que

$$\frac{M}{\sum_{i=1}^{t} N_i + \cap_{i=1}^{t} K_i} \in \mathbf{T}_\tau \qquad \forall t \leq n$$

Como M/K_1 **es** τ**-cocrítico y** $(N_1 + K_1)/K_1 \neq 0$**, entonces**

$$M/(N_1 + K_1) \cong \frac{M/K_1}{(N_1 + K_1)/K_1} \in \mathbf{T}_\tau$$

Supongamos que

$$\frac{M}{\sum_{i=1}^{r} N_i + \cap_{i=1}^{r} K_j} \in \mathbf{T}_\tau \qquad \forall r < t$$

Dada lo sucesión

$$0 \to \frac{\sum_{i=1}^{t-1} N_i + \cap_{j=1}^{t-1} K_j}{\sum_{i=1}^{t} N_i + \cap_{j=1}^{t} K_j} \to \frac{M}{\sum_{i=1}^{t} N_i + \cap_{j=1}^{t} K_j} \to \frac{M}{\sum_{i=1}^{t-1} N_i + \cap_{j=1}^{t-1} K_j} \to 0$$

exacta. Basta con demostrar que :

$$\frac{\sum_{i=1}^{t-1} N_i + \cap_{j=1}^{t-1} K_j}{\sum_{i=1}^{t} N_i + \cap_{j=1}^{t} K_j} \in \mathbf{T}_\tau$$

Sea $\mathcal{F}$ **el filtro de Gabriel asociado a** τ **y sea** $\bar{z} \in \dfrac{\sum_{i=1}^{t-1} N_i + \cap_{j=1}^{t-1} K_j}{\sum_{i=1}^{t} N_i + \cap_{j=1}^{t} K_j}$.
Entonces $z = n + x$**, donde** $n \in \sum_{i=1}^{t-1} N_i$ **y** $x \in \cap_{j=1}^{t-1} K_j$.

(a) $An(\bar{z}) \geq An(x + (N_t + K_t))$
Sea $r \in (K_t + N_t : x) \Rightarrow rx = k' + n' \in \cap_{j=1}^{t-1} K_j$ **y** $n' \in N_t \leq \cap_{j=1}^{t-1} K_j$
$\Rightarrow k' \in \cap_{j=1}^{t} K_j$
De donde concluimos que $rz = rn + rx = (rn + n') + k' \in \sum_{i=1}^{t} N_i + \cap_{j=1}^{t} K_j$

(b) $\dfrac{(\cap_{j=1}^{t-1} K_j) + K_t}{N_t + K_t} \in \mathbf{T}_\tau$
$(\cap_{j=1}^{t-1} K_j) + K_t \leq M/K_t$ que es τ-cocrítico, y

$$0 \neq (N_t + K_t)/K_t \leq \left((\cap_{j=1}^{t-1} K_j) + K_t\right)/K_t$$

entonces

$$\frac{(\bigcap_{j=1}^{t-1} K_j) + K_t}{N_t + K_t} \in \mathbf{T}_\tau$$

Notemos que $An(\bar{z}) \geq (K_t + N_t : x)$ Vease (a).
$= ((K_t + N_t) \bigcap \bigcap_{j=1}^{t-1} K_j : x)$ y por la ley modular.
$= (\bigcap_{j=1}^{t} K_j + N_t : x) \in \mathcal{F}$ Por (b)
Entonces tenemos que :

$$An(\bar{z}) \in \mathcal{F} \quad \forall \bar{z} \in \frac{\sum_{i=1}^{t-1} N_i + \bigcap_{j=1}^{t-1} K_j}{\sum_{i=1}^{t} N_i + \bigcap_{j=1}^{t} K_j}$$

entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{t-1} N_i + \bigcap_{j=1}^{t-1} K_j}{\sum_{i=1}^{t} N_i + \bigcap_{j=1}^{t} K_j} \in \mathbf{T}_\tau$$

Así, con la ayuda de la sucesión exacta hemos terminado la prueba de que

$$\frac{M}{\sum_{i=1}^{t} N_i + \bigcap_{i=1}^{t} K_i} \in \mathbf{T}_\tau \qquad \forall t \leq n$$

■

Corolario 2.1 *Si R satisface la ccd sobre ideales τ-puros, entonces existen $A_1, ..., A_k \leq R/V$ τ-cocríticos tales que la suma $\sum_{i=1}^{k}(A_i/V) \leq R/V$ es directa y además $\frac{(R/V)}{\oplus(A_i/V)} \in \mathbf{T}_\tau$.*

Demostración
Basta mostrar que existe un número finito de submódulos τ-críticos en R/V cuya intersección es 0. Consideremos la familia :
$\mathcal{A} = \{\bigcap_{i=1}^{r} K_i \mid K_i \leq R \ \ \tau\text{-crítico y } r \text{ algún natural}\}$. Como R satisface la ccd sobre τ-puros, $\mathcal{A}$ tiene mínimos. Sea $K_1 \cap ... \cap K_n$ mínimo en $\mathcal{A}$, es fácil observar que $K_1 \cap ... \cap K_n = V$. Así tenemos que $K_1/V, ..., K_n/V \leq R/V$ son τ-críticos y $\bigcap_{i=1}^{n} K_i/V = 0$. ■

Teorema 2.1 *(***de Miller y Teply***) R satisface la ccd sobre ideales τ-puros. Si $M \in R$-mod satisface la ccd sobre submódulos τ-puros, entonces M también satisface la cca sobre τ-puros. En particular R satisface la cca sobre ideales τ-puros.*

Demostración
Sea $M \in R - Mod$ que satisface la ccd sobre τ-puros. Sea $I_0 = \tau(M)$. Recursivamente seleccionamos para todo $j \geq 1$ y $M/I_{j-1} \neq 0$ un submódulo τ-cocrítico (existe con la ayuda de prop. 1.4 pues $0 \neq M/I_{j-1} \in \mathbf{F}_\tau$ satisface la ccd). *Es suficiente probar que* $I_s = M$ para alguna $s \in \mathbf{Z}^+$, porque así tendríamos que $0 \leq I_1/I_0 \leq \cdots \leq I_s/I_0 = M/I_0$ es una τ-cadena de longitud finita y $M/I_0 \in \mathbf{F}_\tau$

y por la proposición 1.2 M/I_0 satisface la cca sobre submódulos τ-puros y por lo tanto M también satisface la cca sobre submódulos τ-puros.

Supongamos que $I_j \neq M \quad \forall j \in Z^+$.
Definimos $m_0 = 0$ y $m_{t+1} = max\Gamma_t$, donde

$$\Gamma_t = \{j \in \mathbf{Z}^+ \ \mid \ Vx \leq I_{m_t} p.a. x \in I_j - I_{j-1}\}$$

Supongamos que m_t existe $\forall t \in \mathbf{Z}^+$. Entonces $\forall t \in \mathbf{Z}^+$ tenemos las siguientes observaciones :
Ob.1 $m_t + 1 \in \Gamma_t$
Como I_{m_t+1}/I_{m_t} es τ-cocrítico, entonces $V(I_{m_t+1}/I_{m_t}) = 0$.
Por lo tanto $\forall x \in I_{m_t+1} - I_{m_t} \quad Vx \leq I_{m_t}$.
Ob.2 Si $x \in I_{m_t+1} \Rightarrow V^k x \leq I_{m_t+1-k} \qquad \forall k, 1 \leq k \leq m_t + 1$
Se verifica fácilmente por inducción y apoyándonos en la manera en que fue seleccionada a cada m_t.
Ob.3 Para todo $x \in I_{m_t+1} - I_{m_t}$ se tiene que $Vx \not\leq I_{m_{t-1}}$.
Supongamos que existe algún $x \in I_{m_t+1} - I_{m_t}$ tal que $Vx \leq I_{m_{t-1}}$
$\Rightarrow m_t + 1 \in \Gamma_{t-1}$ y por definición de m_t tenemos que $m_t + 1 \leq m_t$!!.
Ob.4 Si $x \in I_{m_t+1} - I_{m_t} \Rightarrow V^k x \not\leq I_{m_{t-k}} \qquad \forall k, 1 \leq k \leq t$
(Se comprueba por inducción sobre k y con ayuda de **Ob.3**)

Tenemos entonces la sucesión $\{m_t\}_{t=1}^{\infty}$ que es estrictamente creciente. Por el lema 2.1 existe un $n \in \mathbf{Z}^+$ tal que $V^{n+q}/V^{n+q+1} \in \mathbf{T}_\tau \qquad \forall q \geq 0$.
Sea $x \in I_{m_n+1} - I_{m_n}$, por **Ob.2** y **Ob.4** sabemos que

$$V^{m_n+1}x \leq I_0 \qquad y \qquad V^n x \not\leq I_0$$

lo cual indica que existe un $d \in \mathbf{Z}^+$, $n \leq d < m_n + 1$ tal que

$$V^d x \not\leq I_0 \qquad y \qquad V^{d+1}x \leq I_0$$

Sea $\varphi : R/V^{d+1} \longrightarrow (Rx + I_0)/I_0$ tal que $r + V^{d+1} \mapsto rx + I_0$.
Claramente es epimorfismo, además $0 \neq \varphi(V^d/V^{d+1}) \leq M/I_0 \in \mathbf{F}_\tau$
y como $d \geq n$, $\varphi(V^d/V^{d+1})$ es un cociente de $V^d/V^{d+1} \in \mathbf{T}_\tau$.
Esto implica que $0 \neq \varphi(V^d/V^{d+1}) \in \mathbf{T}_\tau \cap \mathbf{F}_\tau$!!.
Por lo tanto existe algún $s \in \mathbf{Z}^+, I_s = M$

Probemos entonces que m_t existe $\forall t \in \mathbf{Z}^+$ y así estará completa nuestra demostración.
La demostración se hará por inducción sobre t.
La base de inducción ya la tenemos, $m_0 = 0$.
Supongamos que m_t existe, por demostrar que m_{t+1} existe.

Supongamos que m_{t+1} no existe.
Entonces existe un conjunto infinito, Ω, de índices $j > m_t + 1$, elegimos $x_j \in I_j - I_{j-1}$ tal que $Vx_j \leq I_{m_t}$, por el corolario anterior existen $A_1/V, ..., A_k/V \leq R/V$ τ-cocríticos tal que $\sum_{i=1}^k A_i/V$ es directa y

$(R/V)/\oplus A_i/V \in \mathbf{T}_\tau$. Afirmamos:

(1) Existe al menos un $A_i/V, A_ix_j \not\leq I_{m_t}$.
Supongamos que $A_ix_j \leq I_{m_t} \ \ \forall i \Rightarrow (\sum A_i)x_j \leq I_{m_t}$.
Consideramos el morfismo:

$$\varphi : R/V \longrightarrow \frac{Rx_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}, \qquad 1 + V \mapsto x_j + I_{m_t}.$$

Como $\oplus A_i/V \leq Nuc(\varphi)$, entonces existe un epimorfismo

$$\bar{\varphi} : \frac{R/V}{\oplus A_i/V} \longrightarrow \frac{Rx_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}$$

Lo que implica que $0 \neq \frac{Rx_j + I_{m_t}}{I_{m_t}} \in \mathbf{T}_\tau$. Además $\frac{Rx_j + I_{m_t}}{I_{m_t}} \leq \frac{M}{I_{m_t}} \in \mathbf{F}_\tau$!!.
Por lo tanto existe al menos un $A_i/V, A_ix_j \not\leq I_{m_t}$.

(2) Si $A_ix_j \not\leq I_{m_t}$, entonces $(A_ix_j + I_{m_t}) \cap I_{j-1} = I_{m_t}$.
Es claro que $I_{m_t} \leq (A_ix_j + I_{m_t}) \cap I_{j-1}$ y que $0 \neq \frac{A_ix_j + I_{m_t}}{I_{m_t}} \in \mathbf{F}_\tau$,
pues es submódulo de M/I_{m_t}.
Además $\frac{A_ix_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}$ es τ-cocrítico.
Nos fijamos en la restricción de φ a A_i/V, notemos que:

$$\varphi(A_i/V) = \frac{A_ix_j + I_{m_t}}{I_{m_t}} \cong \frac{A_i/V}{K/V} \in \mathbf{F}_\tau.$$

Y como A_i/V es τ-cocrítico, $K/V = 0$. Se tiene entonces que

$$\frac{A_ix_j + I_{m_t}}{I_{m_t}} \cong A_i/V.$$

Supongamos que $(A_ix_j + I_{m_t}) \cap I_{j-1} > I_{m_t}$ entonces
$(A_ix_j + I_{m_t}) \cap I_{j-1}/I_{m_t} \neq 0$ y como $\frac{A_ix_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}$ es τ-cocrítico,

$$\frac{(A_ix_j + I_{m_t})/I_{m_t}}{(A_ix_j + I_{m_t}) \cap I_{j-1}/I_{m_t}} \cong \frac{A_ix_j + I_{m_t}}{(A_ix_j + I_{m_t}) \cap I_{j-1}} \in \mathbf{T}_\tau$$

y

$$\frac{A_ix_j + I_{m_t}}{(A_ix_j + I_{m_t}) \cap I_{j-1}} \cong \frac{(A_ix_j + I_{m_t}) + I_{j-1}}{I_{j-1}} \cong \frac{A_ix_j + I_{j-1}}{I_{j-1}} \leq \frac{M}{I_{j-1}} \in \mathbf{F}_\tau$$

$A_ix_j \leq I_{j-1} \ \ \forall A_i/V, A_ix_j \not\leq I_{m_t}$ y como las restantes $A_ix_j \leq I_{m_t} \leq I_{j-1}$, se tiene que $A_ix_j \leq I_{j-1} \ \ \forall i \Rightarrow (\sum A_i)x_j \leq I_{j-1}$ y con el razonamiento hecho en **(1)** llegamos a que

$$0 \neq \frac{Rx_j + I_{j1}}{I_{j-1}} \in \mathbf{T}_\tau \cap \mathbf{F}_\tau !!.$$

Por lo tanto $(A_i x_j + I_{m_t}) \cap I_{j-1} = I_{m_t}$.

De lo anterior también concluimos que para cada $j \in \Omega$ existen $A_j \leq R$ y $x_j \in I_j - I_{j-1}$ tales que $A_j x_j \not\leq I_{m_t}$.

(3) $\sum_{j\in\Omega}\left(\frac{A_j x_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right) \leq \frac{M}{I_{m_t}}$ es suma directa.

Como $\Omega = \{j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots\}$ $(j_k < j_{k+1})$ es suficiente probar que para cada $i \in \Omega$ que $\left(\frac{A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right) \bigcap \sum_{i>j\in\Omega}\left(\frac{A_j x_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right) = 0.$

$$\left(\frac{A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right) \bigcap \sum_{j_i>j\in\Omega}\left(\frac{A_j x_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right)$$
$$\leq \left(\frac{A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right) \bigcap \sum_{j_i>j\in\Omega}\left(\frac{R x_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right)$$
$$\leq \left(\frac{A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right) \bigcap \sum_{j_i>j\in\Omega}\left(\frac{I_j + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right)$$
$$= \left(\frac{A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right) \bigcap \left(\frac{I_{j_{i-1}}}{I_{m_t}}\right)$$
$$= \frac{(A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}) \bigcap I_{j_{i-1}}}{I_{m_t}}$$
$$\leq \frac{(A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}) \bigcap I_{j_i - 1}}{I_{m_t}}$$

y por (2) tenemos que $\frac{(A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}) \bigcap I_{j_i-1}}{I_{m_t}} = 0$

A partir de este momento construiremos una cadena infinita, $\{M_\alpha\}$, estrictamente descendente de submódulos de M τ-puros.

Definiremos M_α de manera recursiva. Sea $M_1 = M$ consideremos la familia $A_\alpha = \{K < M_{\alpha-1} \mid K \cap \sum_{i=1}^{\alpha-1}(A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}) = I_{m_t}$ y $\sum_{i=\alpha}^{\infty}(A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}) \leq K\}$ como A_α está ordenado bajo la contención, satisface las condiciones del lema de Zorn para cadenas ascendentes, A_α tiene máximos, elegimos a $M_\alpha \in A_\alpha$ máximo.

(4) $\frac{M_\alpha}{I_{m_t}} \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^{i=\alpha-1} \frac{A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}}{I_{m_t}}\right) \leq_e \frac{M}{I_{m_t}}$.

Basta demostrar que es submódulo esencial en M/I_{m_t}, pues que la suma sea directa es inmediato de la construcción.

Llamemos $N = \oplus_{i=1}^{i=\alpha-1} A_{j_i} x_{j_i} + I_{m_t}$ y sea $I_{m_t} \leq K \leq M$ tal que

$K \cap (M_\alpha + N) = I_{m_t}$

$(M_\alpha + K) \cap N \leq (N + M_\alpha) \cap (M_\alpha + K)$

$= ((N + M_\alpha) \cap K) + M_\alpha$ $\quad (M_\alpha \leq M_\alpha + N$ y por la ley modular)

$= M_\alpha$

$\Longrightarrow N \cap (M_\alpha + K) \leq M_\alpha \cap N = I_{m_t}$ pero como M_α es máximo respecto a ésta

propiedad, $K \leq M_\alpha$. Así tenemos que
$K = K \cap (M_\alpha \leq K \cap (N + M_\alpha) = I_{m_t}$. Por lo tanto $K/I_{m_t} = 0$.

(5) N como antes. $N/I_{m_t} \cong (N + M_\alpha)/M_\alpha \leq_e M/M_\alpha$.
Sea $M_\alpha \leq K \leq M$ tal que $K \cap (N + M_\alpha) = M_\alpha$ entonces usando la ley modular $K \cap (N + M_\alpha) = (K \cap N) + M_\alpha = M_\alpha \Rightarrow K \cap N \leq M_\alpha \Rightarrow K \cap N \leq M_\alpha \cap N = I_{m_t}$ y como M_α es máximo respecto a ésta propiedad, $K = M_\alpha$.
Por lo tanto $N \leq_e M/M_\alpha$.

(6) M_α es τ-puro.

$$N/I_{m_t} \leq M/I_{m_t} \in \mathbf{F}_\tau \Rightarrow \frac{N + M_\alpha}{M_\alpha} \bigcap \tau\left(\frac{M}{M_\alpha}\right) = 0 \text{ y por (5) } \tau\left(\frac{M}{M_\alpha}\right) = 0.$$

Consecuentemente tenemos una cadena infinita $\{M_\alpha\}$ estrictamente decreciente de submódulos τ-puros, lo cual contradice el hecho de que M satisface ccd sobre τ-puros. Hemos probado la existencia de m_t y la demostración del teorema se ha concluido. ■

Bibliografía

ANDERSON F.W. y FULLER K.R.
RINGS AND CATEGORIES OF MODULES
Graduate Text in Mathematics; No.13, Springer-Verlang,
Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

GOLAN, Jonathan
TORSION THEORIES
Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics; No.29,
Longman Scientific and Technical, New York, 1986.

GOLDMAN, Oscar
ELEMENTS OF NONCONCONMUTATIVE ARITHMETIC I
Journal of Algebra; 35, 1975.

KASH, Friedrich
MODULES AND RINGS
L.M.S. Monographs; No.17, London:Academic, 1982.

MILLER R. y TEPLY M.
THE DESCENDING CHAIN CONDITION RELATIVE TO TORSION THEORY
Pacific Journal of Mathematics; vol. 83; No.1, 1979.

STENSTRÖM, Bo
RINGS OF QUOTIENTS
Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldartellungen;
No.217, Springer-Verlang, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.