



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MÉXICO

01162

17
205

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

"DISTRIBUCION EXPONENCIAL DE VELOCIDADES
Y CONCENTRACIONES EN FLUJO TURBULENTO
CON PARED HIDRAULICAMENTE RUGOSA"

TESIS

Como requisito para obtener el grado de
Maestro en Ingeniería
(Hidráulica)

Presenta

RAFAEL VAL SEGURA

DIRECTOR DE TESIS

M EN I. JOSE A. MAZA ALVAREZ



MÉXICO, D.F.

junio 1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

**A la Universidad Nacional Autónoma de México;
por la oportunidad que me brindó de
alcanzar una formación profesional.**

**A mis amigos y compañeros;
que me han brindado su amistad y apoyo
incondicional durante todo este tiempo.**

**A todos los ingenieros;
que me han transmitido sus experiencias
y conocimientos durante esta etapa tan
importante en mi vida y para el futuro.**

**Al M. en I. José Antonio Maza Alvarez;
por su interés, dedicación y el tiempo
prestado durante la elaboración de
este trabajo tan importante para mí.**

DEDICATORIA

A mis padres;
quienes siempre me brindan su infinito cariño,
y que han dedicado gran parte de su vida en
guiarme y apoyarme dejándome la mejor herencia
que pueda existir, una preparación profesional
con la cual podré seguir adelante en mi vida.

A mis hermanas;
quienes siempre me dan una palabra de aliento
y contribuyen a que siga adelante apoyándome
en todo aquello que quiera realizar, gracias .

INDICE

	PAGINA
1.- INTRODUCCION	1
2.- DISTRIBUCION DE CONCENTRACIONES DE SEDIMENTOS	5
2.1- Fórmula de Rouse	7
2.2- Método de Lane-Kalinske	14
2.3- Método de Einstein y Chien	16
2.4- Método de Hunt	20
2.5- Método de Velikanov	24
2.6- Método de Chang, Simons y Richardson	27
2.7- Método de Zagustin	31
2.8- Método de Toffaleti	34
2.8.1 Distribución de las concentraciones de sedimentos	36
2.8.2 Distribución de concentraciones a partir de una concentración conocida	38
2.9- Método de Antsyferov y Kos'yan	41
2.10- Método de Ippen	43

2.11- Método de Itakura y Kishi	47
2.11.1 Distribución de velocidades y velocidad media	47
2.11.2 Distribución de concentraciones a partir de una concentración conocida	51
2.12- Método de Van Rijn	52
2.13- Ejemplo numérico	58
2.13.1 Problema	58
2.13.2 Parámetros requeridos en la mayoría de los métodos	61
2.13.3 Fórmula de Rouse	63
2.13.4 Método de Lane-Kalinske	65
2.13.5 Método de Einstein y Chien	66
2.13.6 Método de Hunt	68
2.13.7 Método de Velikanov	71
2.13.8 Método de Chang, Simons y Richardson	72
2.13.9 Método de Zagustin	74
2.13.10 Método de Toffaleti	75
2.13.11 Método de Antsyferov y Kos'yan	78
2.13.12 Método de Ippen	80
2.13.13 Método de Itakura y Kishi	82
2.13.14 Método de Van Rijn	87

3.- DISTRIBUCION DE POTENCIA O EXPONENCIAL DE VELOCIDADES PARA FLUJO TURBULENTO CON PARED HIDRAULICAMENTE RUGOSA	97
3.1- Distribución logarítmica de velocidades	99
3.2- Esgurrimiento turbulento con pared hidráulicamente lisa	100
3.2.1 Distribución de velocidades	102
3.2.2 Velocidad media	105
3.3- Esgurrimiento turbulento con pared hidráulicamente rugosa	106
3.3.1 Distribución de velocidades	107
3.3.2 Velocidad media	108
3.4- Esgurrimiento turbulento con pared hidráulicamente de transición	109
3.4.1 Distribución de velocidades	109
3.4.2 Velocidad media	110
3.5- Propuesta para mejorar los resultados para pared de transición	110
3.6- Distribución de potencia o exponencial de velocidades	112
3.7- Distribución exponencial en cauces arenosos	120

4.- DISTRIBUCION EXPONENCIAL DE CONCENTRACION DE SEDIMENTOS	132
4.1- Ecuación exponencial de concentración de sedimentos	133
4.1.1 Distribución de las concentraciones de sedimentos	136
4.1.2 Ecuaciones de distribución de concentraciones cuando C_a es conocida y obtenida a una distancia a_b sobre el fondo, tal que $k_s \leq a_b \leq 0.2d$	139
4.1.3 Ecuaciones de distribución de concentraciones cuando C_a es conocida y obtenida a una distancia sobre el fondo igual a a_c , tal que $0.2d \leq a_c \leq 0.6d$	142
4.1.4 Ecuaciones de distribución de concentraciones cuando C_a conocida y obtenida a una distancia a_u sobre el fondo, tal que $0.6d \leq a_u \leq d$	145
4.2- Resumen	149
4.3- Ejemplo numérico	152
4.3.1 Granulometría y puntos de interés en estudio	152
4.3.2 Parámetros requeridos en la mayoría de las ecuaciones	153
4.3.3 Distribución de concentraciones	156
5.- TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN SUSPENSION	165
5.1- Zona inferior	167
5.2- Zona intermedia	173
5.3- Zona superior	180

5.4- Resumen	186
5.4.1 Ecuaciones de transporte de sedimentos en suspensión	187
5.5- Ejemplo numérico	191
6.- CONCLUSIONES	205

BIBLIOGRAFIA

CAPITULO 1

INTRODUCCION

La Hidráulica Fluvial es la ciencia que estudia las interacciones entre sedimentos y flujos en ríos y canales, entendiéndose por sedimentos todas las partículas provenientes de los suelos y rocas de una cuenca, que llega a las corrientes superficiales, donde son arrastradas en el fondo o transportadas en suspensión, así como las que forman las paredes y lechos de cauces naturales.

Al respecto, la Hidráulica Fluvial está relacionada con fenómenos tales como: el inicio y transporte de sedimentos; la aparición y desarrollo de ondulaciones en el lecho y la resistencia al flujo que ofrecen tales configuraciones; todas las condiciones bajo las cuales se produce transporte de sedimentos, así como erosión o depósito de sedimentos tanto en las márgenes como en el lecho, por citar algunos de ellos.

Según su comportamiento, al ser transportado por el flujo, el sedimento se puede diferenciar en dos grandes grupos: el del fondo y el de lavado. Al estudiar un tramo de río, el primero es el material que forma el fondo y el segundo el que no se encuentra dentro de ese material. Este último está formado por partículas muy finas como limos y arcillas transportadas en suspensión.

La diferencia principal en el comportamiento entre el material del fondo y el material de lavado consiste en que el transporte de material del fondo depende de las características hidráulicas de la corriente y de las propiedades físicas del material; por tanto si en dos ríos se tienen tramos

semejantes y con idéntico material en el fondo, se transportarán las mismas cantidades de material del fondo bajo iguales condiciones hidráulicas. Lo anterior no ocurre con el material de lavado; en forma general, un río puede transportar tanto material de lavado como llegue a él, cuando las concentraciones no sean muy grandes, casi independientemente de las características hidráulicas de la corriente.

El transporte unitario de sedimentos se expresa en peso o en volumen. Si se expresa en peso se designa como " g_x " cuyas unidades serán kgf/s m ó N/s m y si se expresa en volumen, se designa como " q_x " y sus unidades son m³/s m. Por tanto, la relación entre g_x y q_x está dado por

$$g_x = \gamma_s q_x \quad (1.1)$$

El subíndice x depende del tipo de transporte: en la capa de fondo, del fondo en suspensión, total del lecho, en suspensión y total.

A la totalidad de las partículas que se encuentran en suspensión, se les denomina transporte en suspensión y se designa con el subíndice S. Así, cuando se toma una muestra de agua en una corriente natural, se obtiene siempre la concentración relacionada con el transporte en suspensión. La distribución de la concentración es más uniforme cuanto más fino es el material y mayor la turbulencia de la corriente. Cuando el material es grueso o la turbulencia es menor, se tiene muy poco material en suspensión cerca de la superficie y concentraciones mayores cerca del fondo.

El transporte de fondo en suspensión se calcula en función de las características hidráulicas de la corriente, la geometría del cauce y las propiedades físicas del material del fondo. También se puede obtener en función de los primeros dos aspectos señalados y de una muestra de agua-sedimentos tomada en un punto conocido de la sección. De las muestras también se puede conocer el transporte de lavado y es la única forma de calcular el transporte en suspensión g_s .

Para obtener la cantidad de partículas que una corriente transporta en suspensión se requiere determinar, a lo largo de una vertical, tanto la distribución de las concentraciones C , como la distribución de velocidades u . Se cumple así que la relación del transporte en suspensión es

$$g_s = \int_a^d uC \, dy \quad (1.2)$$

En la ec 1.2 a es una distancia medida sobre el fondo y d es el tirante de la corriente, además intervienen una ecuación para la distribución de concentraciones y otra para la distribución de velocidades. Para calcular la concentración de sedimentos es posible aplicar la ecuación de distribución de concentraciones de Rouse o de algún otro autor, las cuales se presentan en el capítulo dos. Para valuar la velocidad en cada punto se utiliza una ecuación de tipo logarítmico, presentadas en el capítulo tercero.

Al tratar de resolver la ec 1.2, se obtienen integrales que no tienen una solución sencilla o explícita, y por tanto, es necesario el uso de tablas, gráficas o métodos numéricos para resolverlas. Con el objeto de facilitar la solución de las integrales que se plantean en la cuantificación del transporte de sedimentos en suspensión, en este trabajo se presentan ecuaciones de potencia o exponenciales para la obtención de la distribución de velocidades, ver capítulo tercero, y para la distribución de concentración de sedimentos, capítulo cuarto. Con ellas se proponen fórmulas para valuar el transporte de sedimento en suspensión, que se incluyen en el capítulo quinto.

Para disponer de una mayor precisión con las ecuaciones exponenciales fue necesario dividir la profundidad del flujo en zonas. Así, la distribución de velocidades del flujo se dividió en dos zonas; una superior, que abarca de 94 a 99% del total, y una inferior. Por otro lado, al analizar la distribución de concentración de sedimentos se tuvo que dividir la profundidad del flujo en tres zonas; una inferior, una intermedia y una superior. Por último para obtener el transporte en suspensión, el tirante se tuvo que dividir en cuatro zonas; que son: inferior I, inferior II, intermedia y superior.

El objetivo de este trabajo es mostrar las ecuaciones completas antes mencionadas, para cada una de las zonas, lo que facilita la integración de las ecuaciones de distribución de velocidades y de distribución de concentraciones de sedimentos que se utilizan para calcular el transporte en suspensión (ec 1.2), cuando el flujo es turbulento con pared hidráulicamente rugosa, y además la forma de determinar la frontera entre las zonas indicadas en el párrafo anterior.

Por último, en las conclusiones se comenta la conveniencia de utilizar las ecuaciones exponenciales, y se comparan sus resultados con los obtenidos con métodos tradicionales.

En algunos tramos de ríos las partículas del fondo son transportadas en suspensión principalmente; en este trabajo se muestra la forma de valorar dicho transporte tanto con los principales métodos que aparecen en la literatura como uno original obtenido en el Instituto de Ingeniería.

El conocimiento de la distribución de concentraciones en una vertical y el transporte de sedimento en suspensión sirve para valorar la capacidad muerta de las presas, diseñar tanques de sedimentación, disponer de los parámetros necesarios para diseñar cauces o canales estables, determinar el tiempo de llenado de presas de derivación y conocer los volúmenes de material que pueden ser bombeados o introducidos al canal principal de un distrito de riego; por solo mencionar algunos problemas.

La utilidad del método propuesto consiste en evitar la necesidad de valorar integrales complicadas o el uso de gráficas y tablas que no siempre están disponibles para todos los ingenieros en nuestro medio. La forma de las ecuaciones propuestas parece compleja a simple vista pero pueden ser resueltas y programadas muy fácilmente con las calculadoras y computadoras más sencillas.

CAPITULO 2

DISTRIBUCION DE CONCENTRACIONES DE SEDIMENTOS

Como se ha mencionado anteriormente, para valuar el transporte de sedimento en suspensión se requiere del conocimiento de la distribución de concentración de esos sedimentos a lo largo de una vertical, así como la distribución de velocidades a lo largo de la misma línea. En este capítulo se presentan en forma sucinta algunos de los principales métodos para valuar la concentración de sedimentos.

El transporte de partículas en suspensión que tiene lugar en una región $\Delta y \Delta z$ cualquiera de una corriente se puede expresar como

$$\Delta g_s = u C \Delta y \Delta z \quad (2.1)$$

donde u es la velocidad del flujo en el punto en estudio y C es la concentración de partículas en ese mismo punto. Δy y Δz son distancias medidas vertical y horizontalmente en dirección perpendicular al flujo.

Para conocer el transporte de sedimentos en suspensión a lo largo de una vertical dentro de un ancho unitario, es necesario conocer tanto la distribución de las velocidades como la distribución de concentraciones a lo largo de esa vertical. Así, si en la ecuación 2.1 se considera Δz como ancho unitario se cumple, al integrar entre dos límites conocidos, que

$$g_s \Big|_a^d = \int_a^d u C dy \quad (2.2)$$

En Hidráulica Fluvial, se considera usualmente como límite superior a la superficie del flujo, por ello se considera la profundidad del flujo, d . El límite inferior a se fija según sea el problema por resolver; para el transporte del fondo en suspensión, en toda la profundidad de la sección, el límite inferior necesariamente deberá ser la frontera superior de la capa de fondo.

Las partículas que se encuentran en la capa de fondo viajan rodando y deslizando sobre otras partículas o saltando sobre la superficie de fondo. Esos desplazamientos se cuantifican como el arrastre en la capa de fondo, g_B . Las partículas del fondo, también pueden viajar en suspensión y se pueden cuantificar; a dicho transporte se le denomina "del fondo en suspensión" y se designa como g_{BS} , ver fig 2.1.

El sedimento que es transportado en el fondo por saltación, puede ser atrapado por el flujo turbulento y ser transportado en suspensión; también puede ocurrir el caso contrario, el sedimento que viaja en suspensión puede caer y ser arrastrado dentro de la capa de fondo, o detenerse en el fondo.

La distribución vertical de la velocidad u varía de acuerdo con la energía del flujo y la rugosidad del fondo, mientras que la distribución de la concentración C depende, además de los factores mencionados, del diámetro y densidad o peso específico de las partículas. La concentración del material es expresado en peso, en kg/m^3 o en volumen, m^3/m^3 .

Es sabido que la velocidad es máxima cerca de la superficie del agua y decrece conforme se acerca a la vecindad del fondo. Por el contrario, la concentración es máxima en la frontera superior de la capa de fondo y disminuye hacia la superficie. Esto último se debe a que las partículas en suspensión están sujetas a la acción de la gravedad y por tanto tienden a descender.

Para las demostraciones que se presentarán en este trabajo, se seleccionará un sistema coordenado derecho de ejes ortogonales x, y, z , y se hará coincidir el eje x con la dirección del flujo y el y con la dirección vertical, como se muestra en la fig 2.2. Además la concentración se supone que varía, únicamente a lo largo de la vertical, y por tanto, se mantiene constante en planos horizontales; es decir, en las direcciones x y z .

Si se designa con la letra C a la concentración instantánea en un punto situado a una distancia y sobre el fondo, se cumple

$$C = \bar{C} + C' \quad (2.3)$$

En que \bar{C} es la concentración media en el punto y la C' es la variación de la concentración sobre el valor medio, en el tiempo. Como la variación de la concentración C se presenta a lo largo del eje y , por tanto solo existirá difusión de la concentración en dicha dirección.

En este trabajo se presentaran los mejores métodos para calcular la distribución de concentración de partículas en suspensión; indicando algunas consideraciones o hipótesis de importancia que ellos hayan establecido, y se mostrará la ecuación que proponen para determinar la distribución de concentraciones correspondiente.

2.1 Fórmula de Rouse

Rouse propone su fórmula en 1937. Sus deducciones se basaron en la teoría de la difusión y en la ecuación obtenida por Schmidt en 1925 y O'Brien en 1937.

Se considerará que el flujo pasa por un canal muy ancho, el cuál no se ve afectado por la presencia de las paredes, con una profundidad d . A partir del fondo, a una distancia y , se supone una área unitaria horizontal y paralela a la dirección del flujo. En esa área unitaria se supone que la concentración es C , y puesto que las partículas tienden a caer por la acción de

la gravedad, se acepta que la concentración tiene su valor mínimo en la superficie y máximo en el fondo.

La hipótesis más importante que se llega a aceptar establece que una partícula fluida al desplazarse verticalmente conserva su cantidad de movimiento, esto es su velocidad, mientras recorre una distancia vertical l , que Prandtl denominó como longitud de mezclado.

Si se tiene un flujo turbulento, bidimensional y uniforme, en una área horizontal cuyas dimensiones son dx y dz , la difusión sólo podrá ocurrir en la dirección y , por tanto, la concentración promedio de sedimentos en el flujo, como ya se indicó no cambiará ni en la dirección x ni en la z . En un instante cualquiera, existen fluctuaciones de la velocidad en la dirección y debido a la turbulencia, aunque la velocidad media en esa dirección sea nula. Dichas fluctuaciones V' , varían en magnitud y dirección; con ello el gasto instantáneo del flujo que pasa por el área horizontal $dx dz$, es

$$\Delta q_v = V' dx dz \quad (2.4)$$

Como la concentración de sedimentos C a la altura y puede fluctuar con el tiempo al igual que la velocidad, si se divide entre $dx dz$ se llega a obtener el gasto vertical instantáneo de sedimentos por unidad de área; el cual queda expresado como

$$q_{sv} = \overline{V' C'} \quad (2.5)$$

Se considerará que la concentración media de sedimentos a la altura $(y - l_1)$ vale $\overline{C}_{(y-l_1)}$, como se puede observar en la fig 2.3. Comparando ésta concentración con la concentración media \overline{C} que se tiene en un nivel y , se determina la diferencia de concentración, ΔC_1 , que vale

$$\Delta C_1 = \bar{C}_{(y-l_1)} - \bar{C} \quad (2.6)$$

Al expresar $\bar{C}_{(y-l_1)}$ por medio de una serie de Taylor, y despreciar los términos de segundo orden en adelante, se obtiene

$$\bar{C}_{(y-l_1)} = \bar{C} - l_1 \frac{d\bar{C}}{dy} \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ec 2.7 en la 2.6, se llega a

$$\Delta C_1 = -l_1 \frac{d\bar{C}}{dy} \quad (2.8)$$

Al establecer las mismas consideraciones entre el plano situado a la altura $(y + l_1)$ y el plano localizado en y , la diferencia de la concentración de sedimentos por turbulencia vale

$$\Delta C_2 = \bar{C} - \bar{C}_{(y+l_1)} \quad (2.9)$$

Al seguir el mismo procedimiento que para el caso anterior, se obtiene que

$$\Delta C_2 = l_1 \frac{d\bar{C}}{dy} \quad (2.10)$$

y por tanto el valor medio de la fluctuación de la concentración de sedimentos vale

$$\bar{C}^2 = \frac{1}{2} [\Delta C_1 + \Delta C_2] = l_1 \left| \frac{d\bar{C}}{dy} \right| \quad (2.11)$$

El grado de relación lineal entre V' y C' se puede expresar mediante el coeficiente de correlación β_1 , siendo

$$\beta_1 = \frac{\overline{V'C'}}{\sqrt{(\overline{C'^2})(\overline{V'^2})}} \quad (2.12)$$

Sustituyendo las ecs 2.11 y 2.12 en la 2.5 resulta

$$q_{sv} = -\beta_1 \sqrt{(\overline{V'^2})} l_1 \frac{d\bar{C}}{dy} \quad (2.13)$$

donde el signo menos se introduce al considerar que el transporte vertical se está realizando en el sentido en que decrece la concentración.

El producto $\beta_1 \sqrt{(\overline{V'^2})} l_1$, es conocido como el coeficiente de difusión para sedimentos ϵ_s , así

$$\epsilon_s = \beta_1 \sqrt{(\overline{V'^2})} l_1 \quad (2.14)$$

De tal manera que el gasto de sedimentos ascendente por unidad de área queda representado finalmente por

$$q_{sv} = \epsilon_s \frac{dC}{dy} \quad (2.15)$$

Sí se toma en cuenta que la concentración de sedimentos promedio en un punto es constante y el flujo neto de sedimentos a través del área horizontal es cero, el flujo ascendente de

sedimentos es balanceado por la caída de sedimentos a causa de su propio peso. Si ω es la velocidad final de caída de los sedimentos, entonces el transporte vale ωC y por tanto se cumple que

$$\omega C + \epsilon_s \frac{dC}{dy} = 0 \quad (2.16)$$

Separando las variables de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{dC}{C} = - \omega \frac{dy}{\epsilon_s} \quad (2.17)$$

Al integrar la ec. 2.17 entre un punto situado a una distancia a sobre el fondo, donde la concentración de sedimentos en suspensión C_a es conocida, y un punto y cualquiera donde se desea conocer la concentración de sedimento C , se obtiene la ecuación siguiente

$$\text{Ln } C - \text{Ln } C_a = - \omega \int_a^y \frac{dy}{\epsilon_s} \quad (2.18a)$$

O bien

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[- \omega \int_a^y \frac{dy}{\epsilon_s} \right] \quad (2.18b)$$

Se ha encontrado que el coeficiente de difusión para sedimentos ϵ_s no es constante y que varía con la altura sobre el fondo del cauce; por este motivo, Rouse optó por considerar que es igual al coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento ϵ_m , que ha sido ampliamente estudiado (ref 1), el cual vale

$$\epsilon_m = U_*^2 \frac{\left(\frac{d-y}{d}\right)}{\frac{dU}{dy}} \quad (2.19)$$

en donde U_* es la velocidad al cortante y se expresa, para canales muy anchos $B \geq 40d$

$$U_* = \sqrt{g d S} \quad (2.20)$$

Como se ha considerado que $\epsilon_s = \epsilon_m$, se obtiene

$$\epsilon_s = U_*^2 \frac{\left(\frac{d-y}{d}\right)}{\frac{dU}{dy}} \quad (2.21)$$

Así, si la distribución de velocidades es conocida, ϵ_s puede expresarse como una función de y .

Para obtener la velocidad en cualquier punto de una vertical, se puede utilizar la fórmula universal de velocidades de Prandtl-von Karman.

$$\frac{u}{U_*} = \frac{2.3}{\kappa} \log \frac{y}{y_0} = \frac{1}{\kappa} \text{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (2.22)$$

donde κ es la constante universal de von-Karman, cuyo valor es de 0.4, y y_0 la distancia sobre el fondo donde $u=0$. Derivando la ecuación anterior con respecto a y se obtiene

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\kappa y} \quad (2.23)$$

Al sustituir la ec 2.23 en la 2.21 y simplificando se llega a

$$e_s = \kappa U_* \frac{y}{d} (d-y) \quad (2.24)$$

Sustituyendo e_s en la ec 2.18b, se tiene

$$\ln C - \ln C_a = - \frac{\omega}{\kappa U_*} \int_a^y \frac{d}{y(d-y)} dy \quad (2.25)$$

Efectuando la integración y tomando los límites indicados, finalmente se llega a

$$\frac{C}{C_a} = \left[\left(\frac{d-y}{y} \right) \left(\frac{a}{d-a} \right) \right]^2 \quad (2.26)$$

En donde z es igual a

$$z = \frac{\omega}{\kappa U_*} \quad (2.27)$$

La ec 2.26 es la propuesta por Rouse en 1937 y con ella es posible conocer la concentración de sedimentos en suspensión en cualquier punto de la vertical, si se cuenta con la concentración de sedimentos C_a , a una distancia a sobre el fondo.

Para obtener el valor de z en la ec 2.27, la constante de von-Karman se considera igual a 0.4 y la velocidad de caída de las partículas ω , se obtiene con la fórmula de Rubey, la cual establece que

$$\omega = F_1 (g \Delta D)^{0.5} \quad (2.28)$$

siendo

$$F_1 = \left(\frac{2}{3} + \frac{36 v^2}{g \Delta D^3} \right)^{0.5} - \left(\frac{36 v^2}{g \Delta D^3} \right)^{0.5} \quad (2.29)$$

$$\Delta = \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \quad (2.30)$$

donde

v viscosidad cinemática del agua y se obtiene en función de la temperatura.

Δ densidad relativa de las partículas sumergidas

γ_s peso específico de las partículas

γ peso específico del agua

El inconveniente de la fórmula de Rouse es que no es válida en sus extremos, $y=d$ y $y=0$, ya que en ellos se obtiene una concentración $C=0$; lo cual es falso. En $y=0$ no se requiere valuar la concentración, pero si cuando $y=d$. A pesar de la falta indicada, la fórmula de Rouse no pierde su utilidad.

2.2 Método de Lane-Kalinske

Lane y Kalinske en 1941 presentaron otro método para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión. Para ello consideraron que el coeficiente de difusión para sedimentos e_s era constante en la vertical, con valor medio \bar{e}_s .

El valor medio del coeficiente de difusión para sedimentos a lo largo de la vertical se expresa por

$$\bar{\epsilon}_s = \frac{1}{d} \int_0^d \epsilon_s dy \quad (2.31)$$

si se sustituye el valor de ϵ_s , dado por la ec 2.24 se tiene que

$$\bar{\epsilon}_s = \frac{\kappa U_*'}{d^2} \int_0^d (y d - y^2) dy \quad (2.32)$$

Integrando y reemplazando los límites y aceptando que $\kappa = 0.4$, se llega a

$$\bar{\epsilon}_s = \frac{1}{15} U_*' d \quad (2.33)$$

Como ya se indicó, Lane y Kalinske consideraron que ϵ_s es constante e igual a $\bar{\epsilon}_s$. Al sustituir este valor en la ec 2.18a, la distribución de la concentración de sedimentos está dada por

$$C = C_a \exp\left(-\frac{15 \omega}{U_*' d} \int_a^y dy\right) \quad (2.34)$$

Integrando y tomando límites se llega finalmente a

$$C = C_a \exp\left(-\frac{15 \omega}{U_*' d} \left(\frac{y-a}{d}\right)\right) \quad (2.35)$$

Para la aplicación del método es necesario conocer las características tanto hidráulicas de la corriente como las propiedades de los sedimentos, así como la concentración C_a medida a una distancia a sobre el fondo. En los puntos extremos cuando $y=0$ $y=d$ esta ecuación no da valores absurdos.

2.3 Método de Einstein y Chien

Einstein y Chien en 1952 proponen algunas modificaciones a la teoría en que se basa la ecuación de Rouse; estas se plantean para corregir la discrepancia entre los datos obtenidos y la teoría.

La propuesta de estos autores se apoya principalmente en estas hipótesis.

- 1) El flujo ascendente de sedimentos atravesando una área unitaria horizontal en un nivel y , proviene de un nivel $[y - A_1 l]$; mientras que el flujo descendente atravesando la misma área proviene de un nivel $[y + (1 - A_1) l]$; en donde l es la longitud de mezclado del flujo propuesta por Prandtl y A_1 es un factor numérico con valor menor que 1, véase la fig 2.4
- 2) Las velocidades medias del flujo de sedimentos en suspensión ascendiendo y descendiendo son $(v' - \omega)$ y $(v' + \omega)$, respectivamente.
- 3) La concentración promedio de sedimentos en el flujo ascendente es $\left[C - A_1 l \left(\frac{dC}{dy} \right) \right]$ y en el flujo descendente $\left[C + (1 - A_1) l \left(\frac{dC}{dy} \right) \right]$, donde C es la concentración en el nivel y .

El caudal de sedimentos por unidad de área horizontal es igual al producto de la concentración por la velocidad. El flujo de sedimentos ascendentes y descendentes debe encontrarse en equilibrio ya que se considera que la concentración media permanece constante en cada punto de la vertical, lo cual queda expresado por la relación

$$\left[C - A_1 l \left(\frac{dC}{dy} \right) \right] (v' - \omega) = \left[C + (1 - A_1) l \left(\frac{dC}{dy} \right) \right] (v' + \omega) \quad (2.36)$$

Desarrollando y simplificando la ecuación anterior queda de la forma siguiente

$$2 \omega C - 2 A_1 \omega l \frac{dC}{dy} + v' l \frac{dC}{dy} + \omega l \frac{dC}{dy} = 0 \quad (2.37)$$

Según Einstein $v'l$, es igual a dos veces el coeficiente de difusión para sedimentos, ϵ_s ; por tanto

$$v'l = 2 \kappa U_* \left(\frac{d-y}{d} \right) y \quad (2.38)$$

Por otro lado la longitud de mezclado del flujo propuesta por Prandtl, es igual a

$$l = B_1 \kappa y \left(\frac{d-y}{d} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

Donde B_1 es un factor adimensional introducido por Einstein y Chien.

Sustituyendo las ecs 2.38 y 2.39 en la 2.37 y dividiendo entre 2, se obtiene

$$\omega C + \kappa U_* y \left(\frac{d-y}{d} \right) \frac{dC}{dy} + \kappa y \omega \sqrt{\frac{d-y}{d}} B_1 \left(\frac{1}{2} - A_1 \right) \frac{dC}{dy} = 0 \quad (2.40)$$

Separando variables se llega a

$$\frac{dC}{C} = \frac{\omega dy}{\kappa y U \left(\frac{d-y}{d} \right) + N \omega \kappa y \left(\frac{d-y}{d} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.41)$$

donde

$$N = B_1 \left(\frac{1}{2} - A_1 \right) \quad (2.42)$$

Al integrar la ec 2.40 entre una distancia a sobre el fondo y otra distancia y cualquiera, se obtiene la ecuación propuesta por Einstein y Chien.

$$\frac{C}{C_a} = \frac{\left[1 - \sqrt{\frac{d-a}{d}} \right]^{1-N\kappa z} \left[1 + \frac{\sqrt{d-a}}{d} \right]^{1-N\kappa z} \left[\frac{\sqrt{d-a}}{d} + N\kappa z \right]^{\frac{2z}{N^2 \kappa^2 z^2 - 1}}}{\left[1 - \sqrt{\frac{d-y}{d}} \right] \left[1 + \frac{\sqrt{d-y}}{d} \right] \left[\frac{\sqrt{d-y}}{d} + N\kappa z \right]} \quad (2.43)$$

donde

$$z = \frac{\omega}{\kappa U} \quad (2.44)$$

Para conocer la concentración de sedimentos C es necesario, por medio de mediciones en el lugar, obtener los valores de las constantes N y κ , lo que complica la aplicación del método; ello obliga a conocer la concentración en tres puntos de una vertical, como mínimo.

La obtención de N y κ se facilita al agrupar los coeficientes desconocidos, de tal forma que

$$M = N \kappa z \quad (2.45)$$

Con ello la ec 2.43 se escribe como

$$\frac{C}{C_a} = \left[\frac{1 - \sqrt{\frac{d-a}{d}}}{1 - \sqrt{\frac{d-y}{d}}} \right]^{1+M} \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{d-a}{d}}}{1 + \sqrt{\frac{d-y}{d}}} \right]^{1-M} \left[\frac{\sqrt{d-a} + M}{d} \right]^{\frac{2z}{M^2-1}} \left[\frac{\sqrt{d-y} + M}{d} \right]^{\frac{2z}{M^2-1}} \quad (2.46)$$

Conocida la concentración en tres puntos de una vertical; es decir, conocida la concentración C_{a1} en $a1$, C_{a2} en $a2$ y C_{a3} en $a3$ se obtienen dos ecuaciones para valuar las dos incógnitas z y M . La primera ecuación relaciona C_{a2}/C_{a1} y en ella $a=a1$ $y=a2$; la segunda, que es semejante, relaciona C_{a3}/C_{a1} y en ella $a=a1$ $y=a3$. Así, por medio de iteraciones se resuelven ambas ecuaciones simultáneamente dando valores a las incógnitas z y M . Conocida z y con la ec 2.44 se obtiene κ .

$$\kappa = \frac{\omega}{z U_s} \quad (2.47)$$

valuada κ se calcula el valor de N con ayuda de la ec 2.45

$$N = \frac{M}{\kappa z} \quad (2.48)$$

No se requiere conocer explícitamente a κ y N , ya que obtenidos z y M , la distribución de concentraciones es conocida utilizando la ec 2.46. Cuando $M=0$, la ecuación de Einstein y Chien se reduce exactamente a la ecuación de Rouse.

2.4 Método de Hunt

Hunt en 1954 presenta una nueva expresión para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en un flujo a superficie libre. Su método toma en cuenta el volumen ocupado por los sedimentos dentro del flujo y la distribución de velocidades obtenida por von-Karman.

La distribución de velocidades para el flujo queda expresada por la ecuación

$$u = \frac{U_*}{\kappa} \left(\left(1 - \frac{y}{d} \right)^{\frac{1}{2}} + B_2 L\eta \left[\frac{B_2 - \left(1 - \frac{y}{d} \right)^{\frac{1}{2}}}{B_2} \right] \right) + \text{constante} \quad (2.49)$$

Cuando $y=d$ se obtiene la velocidad máxima, U_{mdx} y la distribución de velocidades queda finalmente como

$$\frac{U_{mdx} - u}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\left(1 - \frac{y}{d} \right)^{\frac{1}{2}} + B_2 L\eta \left[\frac{B_2 - \left(1 - \frac{y}{d} \right)^{\frac{1}{2}}}{B_2} \right] \right) \quad (2.50)$$

Por otra parte al considerar que el flujo es uniforme, que la velocidad y concentración en cada punto son constantes en el tiempo y que la velocidad ascendente de las partículas es igual a $v_s = (v - \omega)$, Hunt obtuvo finalmente la siguiente ecuación

$$e_s \frac{\partial C}{\partial y} + C \frac{\partial C}{\partial y} (e_m - e_s) + (1 - C) C \omega = 0 \quad (2.51)$$

Según Hunt, la ecuación anterior describe la distribución vertical de sedimentos en suspensión en el flujo. Este autor consideró que no se introduce error al aceptar el coeficiente de difusión de sedimentos ϵ_s igual a ϵ_m , siempre y cuando los sedimentos sean finos. Con esta simplificación, la ec 2.51 se reduce a

$$\epsilon_s \frac{\partial C}{\partial y} + (1 - C) C \omega = 0 \quad (2.52)$$

Teniendo en mente que la concentración sólo varía con la profundidad, se cumple que

$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{dC}{dy}$. Separando variables en la ec 2.52 queda

$$\frac{dC}{(1 - C) C} = - \omega \frac{dy}{\epsilon_s} \quad (2.53)$$

Sin embargo Hunt añade que aunque $\epsilon_s = \epsilon_m$, la distribución de velocidades del agua puede ser diferente de la de los sedimentos en suspensión cuando el material es grueso; por tanto, el coeficiente de difusión de sedimentos lo expresó como

$$\epsilon_s = \frac{U_*^2 \left(\frac{d - y}{d} \right)}{\frac{du_s}{dy}} \quad (2.54)$$

Donde $\left(\frac{du_s}{dy}\right)$ es el gradiente de velocidades de los sedimentos en suspensión y está dado por

$$\frac{du_s}{dy} = \frac{U_*}{2k_s d \left[B_s - \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (2.55)$$

Donde k_s es la constante universal de von-Karman para los sedimentos y B_s es una constante a evaluarse con base a la distribución de velocidades del flujo.

Sustituyendo la ec 2.55 en la 2.54, se obtiene que

$$e_s = 2k_s U_* d \left(1 - \frac{y}{d}\right) \left[B_s - \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.56)$$

Si la ec 2.53 se integra entre el nivel a donde la concentración C_a es conocida y un nivel y cualquiera donde se desea conocer la concentración de sedimentos C se obtiene

$$\left[\text{Ln} \left(\frac{C}{1-C} \right) \right]_a^y = -\omega \int_a^y \frac{dy}{e_s} \quad (2.57)$$

Reemplazando la ec 2.56 en esta última expresión resulta

$$\left[\text{Ln} \left(\frac{C}{1-C} \right) \right]_a^y = -\frac{\omega}{2k_s U_* d} \int_a^y \frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{d}\right) \left[B_s - \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (2.58)$$

Integrando y reemplazando los límites indicados se llega finalmente a

$$\left(\frac{C}{1-C} \right) \left(\frac{1-C_a}{C_a} \right) = \left[\left(\frac{1-y/d}{1-a/d} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B_s - \left(1 - \frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{2}}}{B_s - \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]^{k_s} \quad (2.59)$$

Si la concentración volumétrica de sedimentos es muy pequeña, los términos $(1-C)$ y $(1-C_a)$ se consideran prácticamente iguales, la ec 2.59 se reduce a

$$\frac{C}{C_a} = \left[\left(\frac{1-y/d}{1-a/d} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B_s - \left(1 - \frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{2}}}{B_s - \left(1 - \frac{y}{d}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]^{k_s} \quad (2.60)$$

donde

$$z_s = \frac{\omega}{k_s B_s U_*} \quad (2.61)$$

Como ya se indicó anteriormente k_s y B_s son constantes, y se determinan con base en mediciones de la concentración de sedimentos en varios puntos de una misma vertical. A partir de experimentos realizados por Vanoni, Hunt encontró los valores siguientes, $B_s = 0.99$ y $k_s = 0.36$; sin embargo, se han realizado pruebas en donde se considera $B_s = 1$, obteniendo mejores resultados que con el valor anterior.

2.5 Método de Velikanov

En 1955 Velikanov desarrolla una expresión para calcular la distribución de concentraciones de sedimentos en suspensión en un flujo a superficie libre, basándose en la distribución de velocidades del flujo según Nikuradse, la cual está dada por la expresión

$$u = \frac{U_*}{\kappa} \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{30y}{D} \right) \quad (2.62)$$

Donde D es el diámetro de las partículas y κ es la constante de von-Karman cuyo valor se considera igual a 0.4.

Si en la ecuación anterior, el segundo término del paréntesis se multiplica y divide por d y además se efectúa el cambio de variables siguientes

$$E = \frac{y}{d} \quad ; \quad \alpha = \frac{D}{30d} \quad (2.63)$$

dicha ecuación se escribe como

$$u = \frac{U_*}{\kappa} \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{E}{\alpha} \right) \quad (2.64)$$

Al derivarla con respecto a E , se obtiene

$$\frac{du}{dE} = \frac{U_*}{\kappa} \frac{1}{\alpha + E} \quad (2.65)$$

Introduciendo la nueva variable E en la ecuación del coeficiente de difusión de los sedimentos, e_s , ver ec 2.21, esta se expresa como

$$e_s = \frac{U_*^2 d (1 - E)}{\frac{du}{dE}} \quad (2.66)$$

Al sustituir la ec 2.65 en la ec 2.66, se obtiene

$$e_s = \kappa U_* d (1 - E) (\alpha + E) \quad (2.67)$$

Por otra parte, la distribución de concentración de sedimentos utilizada por Velikanov está dada por la ec 2.18a, la cual con el cambio de variables indicado queda como

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[- \omega d \int_A^E \frac{dE}{e_s} \right] \quad (2.68)$$

Siendo

$$A = \frac{a}{d} \quad ; \quad dE = \frac{dy}{d} \quad (2.69)$$

Sustituyendo la ec 2.67 en la 2.68, queda

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[- \frac{\omega}{\kappa U_*} \int_A^E \frac{dE}{(1 - E)(\alpha + E)} \right] \quad (2.70)$$

Integrando y agrupando convenientemente se llega a

$$\frac{C}{C_a} = \left| \exp \left[- \frac{\omega}{\kappa U_*} \frac{1}{1 + \alpha} \left(L n \frac{\alpha + E}{1 - E} \right) \right] \right|_a^E \quad (2.71)$$

Tomando límites y teniendo en cuenta el signo negativo, finalmente se llega a

$$\frac{C}{C_a} = \left[\frac{(1 - E)}{(\alpha + E)} \cdot \frac{(\alpha + A)}{(1 - A)} \right]^{z_a} \quad (2.72a)$$

o bien

$$\frac{C}{C_a} = \left[\frac{d - y}{\alpha d + y} \cdot \frac{\alpha d + a}{d - a} \right]^{z_a} \quad (2.72b)$$

donde

$$z_a = \frac{\omega}{\kappa U_* (1 + \alpha)} \quad (2.73)$$

La ec 2.73 es la propuesta por Velikanov para valuar la distribución de concentración de sedimentos transportados en suspensión. Para aplicarla es necesario conocer la concentración C_a en un punto situado a una distancia a y con ello se obtiene la concentración C en cualquier nivel y .

Para Velikanov, a_b es la frontera entre el arrastre de fondo y la zona con transporte en suspensión, es decir, el ancho de la capa de fondo, la cuál es

$$a_b = 0.002 d \quad (2.74)$$

2.6 Método de Chang, Simons y Richardson

Una nueva expresión para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión en el flujo fue obtenida a partir de una nueva ecuación para el coeficiente de difusión de sedimentos en un flujo turbulento, obtenida por Chang en 1967.

Teniendo en cuenta la teoría turbulenta de Prandtl, el esfuerzo cortante está dado por

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (2.75)$$

También se sabe que el esfuerzo cortante para un flujo uniforme se expresa por la relación

$$\tau = \rho U_*^2 \left(\frac{d-y}{d} \right) \quad (2.76)$$

Sustituyendo la ec 2.75 en la 2.76, se llega

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{l} \left(\frac{d-y}{d} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.77)$$

Según von-Karman, la longitud de mezclado l es función de y , e igual a

$$l = \kappa y \quad (2.78)$$

Por tanto

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\kappa y} \sqrt{\frac{d-y}{d}} \quad (2.79)$$

En donde κ se obtiene de una gráfica elaborada por Chang, Simons y Richardson, en función del número de Reynolds, la cual se muestra en la fig 2.5. Como se observa κ varía entre 0.22 y 0.32. Nótese que si $\frac{U_s D}{\nu} > 40$ adquiere un valor constante e igual a 0.22.

Según Chang et al la relación entre el coeficiente de difusión de los sedimentos ϵ_s y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento ϵ_m se expresa

$$\epsilon_s = \beta \epsilon_m \quad (2.80)$$

donde β es una constante de proporcionalidad. Los autores obtuvieron que β es mayor que 1 y propusieron $\beta = 1.5$, la expresión para el coeficiente de difusión de los sedimentos queda entonces como

$$\epsilon_s = \frac{\beta U_s^2 \left(\frac{d-y}{d} \right)}{\frac{du}{dy}} \quad (2.81)$$

Reemplazando la ec 2.79 en la 2.81 se obtiene

$$\epsilon_s = \beta \kappa U_s y \sqrt{\frac{d-y}{d}} = \beta \kappa U_s E d \sqrt{1-E} \quad (2.82)$$

donde

$$E = \frac{y}{d} \quad (2.83)$$

Aceptando el cambio de variable, expresado por la ec 2.83 se cumple que

$$dy = d \cdot dE \quad (2.84)$$

La distribución de concentración de sedimentos en suspensión es considerada por Chang et al a partir de la teoría de difusión, ec 2.18a, esto es

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[- \omega \int_a^y \frac{dy}{e_s} \right] \quad (2.85)$$

Con las nuevas variables propuestas, expresadas en las ecs 2.83 y 2.84, queda como

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[- \omega d \int_A^E \frac{dE}{e_s} \right] \quad (2.86)$$

donde

$$A = \frac{a}{d} \quad (2.87)$$

Sustituyendo la ec 2.82 en la 2.86 se obtiene

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[\frac{-\omega}{\beta \kappa U_*} \int_A^E \frac{dE}{E \sqrt{1-E}} \right] \quad (2.88)$$

Al integrar esta última ecuación y reemplazando sus límites, se llega finalmente a

$$\frac{C}{C_a} = \left[\frac{(1 - \sqrt{1-A})}{\sqrt{A}} \frac{\sqrt{E}}{(1 - \sqrt{1-E})} \right]^{F_2} \quad (2.89a)$$

o bien

$$\frac{C}{C_a} = \left[\frac{\sqrt{d} - \sqrt{d-a}}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{d} - \sqrt{d-y}} \right]^{z_2} \quad (2.89b)$$

donde

$$z_2 = \frac{2 \omega_e}{\beta \kappa U_s} \quad (2.90)$$

Siendo las ecs 2.89 a y b las propuestas por Chang et al para obtener la distribución de concentraciones para los sedimentos transportados en suspensión. En la ec 2.90, ω_e es la velocidad de caída del diámetro equivalente D_e , la cual se obtiene de la expresión

$$\omega_e = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^N p_i \omega_i \quad (2.91)$$

donde

ω_i es la velocidad de caída de cada diámetro medio de las fracciones en que se haya dividido la muestra de sedimentos

p_i porcentaje en peso, con respecto al total de la muestra, de cada fracción

N número de fracciones en que se divide la muestra

Una vez que ω_e es conocida se obtiene el diámetro equivalente, el cual se obtiene con la relación

$$D_e = \left[\frac{\sum_{i=1}^N D_i^3 \omega_i}{N \omega_e} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.92)$$

2.7 Método de Zagustin

Este método fue propuesto en 1969 por Zagustin, expresando a la distribución de velocidades como

$$\frac{U_{máx} - U}{U_*} = \frac{2}{\kappa} \tan^{-1} \left(\frac{d-y}{d} \right)^{1.5} \quad (2.93)$$

donde

$U_{máx}$ velocidad máxima del flujo

κ constante universal de von-Karman con valor aproximado de 0.4

U_* velocidad al cortante

el ángulo dado por \tan^{-1} se expresa en radianes

Se considera al coeficiente de sedimentos e_s igual a e_m y expresado por

$$e_s = \frac{U_*^2 \left(\frac{d-y}{d} \right)}{\frac{du}{dy}} \quad (2.94)$$

Al derivar la ecuación de la distribución de velocidades, ec 2.93, se obtiene

$$\frac{du}{dy} = - \frac{3 U_*}{\kappa d} \frac{\left(\frac{d-y}{d} \right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{d-y}{d} \right)^3} \quad (2.95)$$

Si se sustituye la ec 2.95 en la 2.94, se tiene

$$\epsilon_s = - \frac{U_*^2 \left(\frac{d-y}{d} \right)}{\frac{3 U_*}{\kappa d} \frac{\left(\frac{d-y}{d} \right)^{1/2}}{1 - \left(\frac{d-y}{d} \right)^3}} \quad (2.96)$$

y simplificando se llega a

$$\epsilon_s = \frac{\kappa U_* d}{3} \left(\frac{d-y}{d} \right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{d-y}{d} \right)^3 \right] \quad (2.97)$$

Por otra parte, la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión a lo largo de la vertical, esta expresada por

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[- \omega \int_a^y \frac{dy}{\epsilon_s} \right] \quad (2.98)$$

Sustituyendo la ec 2.97 en la 2.98 se obtiene

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left(\frac{-3\omega \int_a^y dy}{\kappa U_* d^{1/2} \left(\frac{d-y}{d} \right)^{1/2} \left(1 - \left(\frac{d-y}{d} \right)^3 \right)} \right) \quad (2.100)$$

Integrando y reemplazando sus límites, finalmente llega a

$$\frac{C}{C_a} = \exp(-z \phi_2) \quad (2.100)$$

donde

$$z = \frac{\omega}{\kappa U_s} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 = & \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{\left(\frac{d-y}{d} \right)^{\frac{3}{2}+1} \left[\left(\frac{d-y}{d} \right)^{\frac{1}{2}-1} \right]^3}{\left(\frac{d-y}{d} \right)^{\frac{3}{2}-1} \left[\left(\frac{d-y}{d} \right)^{\frac{1}{2}+1} \right]} + \sqrt{3} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{3} \left(\frac{d-y}{d} \right)}{\left(\frac{d-y}{d} \right) - 1} \right] \right] - \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{\left(\frac{d-a}{d} \right)^{\frac{3}{2}+1} \left[\left(\frac{d-a}{d} \right)^{\frac{1}{2}-1} \right]}{\left(\frac{d-a}{d} \right)^{\frac{3}{2}-1} \left[\left(\frac{d-a}{d} \right)^{\frac{1}{2}+1} \right]} + \sqrt{3} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{3} \left(\frac{d-a}{d} \right)}{\left(\frac{d-a}{d} \right) - 1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.102)$$

la ec 2.100 es la propuesta por Zagustin para valuar la distribución de concentraciones C en cualquier punto situado a una distancia y sobre el fondo, cuando se conoce la concentración C_a en un punto situado a una distancia a sobre el fondo.

2.8 Método de Toffaleti

En 1969 Toffaleti presentó un método para valuar el transporte de sedimentos total del fondo, con el que es posible separar el que es arrastrado en la capa de fondo del que es transportado en suspensión.

Lo que en este apartado se explica no fue presentado por Toffaleti; sino fue una deducción que se muestra en la ref 2 y en la que el autor trabajó en su aplicación práctica. En la deducción se utilizan las tres ecuaciones propuestas por Toffaleti para obtener la distribución de concentraciones a lo largo de una vertical, en función de una concentración conocida C_a obtenida de una muestra tomada a una distancia a , sobre el fondo.

Toffaleti dividió la profundidad del flujo en 4 zonas tal como se muestra en la fig 2.6. El espesor de cada zona se muestra a continuación.

ZONA O CAPA	ESPESOR	
De fondo	$0 \leq y \leq y_{B_i}$	Arrastre en la capa de fondo
Baja o inferior	$y_{B_i} \leq y \leq y_b$	Transporte
Media o intermedia	$y_b \leq y \leq y_m$	del fondo en
Alta o superior	$y_m \leq y \leq R$	suspensión

donde

$$y_{B_i} = 2 D_i \quad ; \quad y_b = \frac{R}{11.24} \quad ; \quad y_m = \frac{R}{2.5} \quad (2.103)$$

En las expresiones anteriores R es el radio hidráulico del escurrimiento, en m . Cuando el cauce es muy ancho tal que $B > 40d$, se acepta que $R=d$, donde B es el ancho de la superficie libre y d es el tirante del escurrimiento.

Para evaluar la distribución de concentraciones en la vertical, Toffaleti escogió una distribución logarítmica, parecida a la propuesta por Rouse, igual a

$$C = C_d \left(\frac{R}{y} \right)^{\alpha z} \quad (2.104)$$

donde

C_d concentración teórica que se tendría en la altura $y=d$ si la curva de distribución se prolongara hasta la superficie del agua.

y distancia medida desde el fondo, donde se desea evaluar C

α factor que depende de la zona o capa en la que se está valuando la distribución de concentraciones. Sus valores, obtenidos experimentalmente, y propuestos por Toffaleti son

Capa inferior $\alpha = 0.756$

Capa intermedia $\alpha = 1.0$

Capa superior $\alpha = 1.5$

z Exponente propuesto por Rouse en su distribución de concentraciones. En ella Toffaleti propone un valor para κ , lo que finalmente conduce a que

$$z = \frac{3.2808 \omega U}{T_c R S} \quad (2.105)$$

donde

- ω velocidad de caída de las partículas en estudio, en m/s
 U velocidad media de la corriente, en m/s
 S pendiente hidráulica, adimensional
 T_z coeficiente que depende de la temperatura del agua T expresada en grados centígrados

$$T_z = 239.326 - 1.20067 T \quad (2.106)$$

η_v factor que depende de la temperatura T del agua expresada en grados centígrados.

$$\eta_v = 0.13516 + 0.000864 T \quad (2.107)$$

El valor mínimo de z es función de η_v . Si $z_i < \eta_v$, se debe tomar arbitrariamente el valor de $z_i = 1.5 \eta_v$; donde z_i es el valor obtenido para ω_i (ec 2.105), en que $\omega_i = f(D_i)$.

2.8.1 Distribución de las concentraciones de sedimentos

Como no es práctico trabajar con un diámetro representativo de todos los diámetros de las partículas del fondo, se acostumbra dividir la curva granulométrica en fracciones y trabajar con el diámetro medio D_i de cada una.

Las ecuaciones para valuar la distribución de concentraciones, para cada fracción de la curva granulométrica de tamaño p_i y con diámetro medio D_i , toman la forma:

a) Para la zona inferior comprendida entre los niveles y_{b_i} y y_b se tiene

$$C_i = C_{L_i} \left(\frac{R}{y} \right)^{0.756 z_i} \quad (2.108)$$

donde

C_{L_i} valor teórico de la concentración cuando $y = R$

z_i se calcula con la ec. 2.105, en donde la velocidad de caída ω_i es función del D_i de cada fracción en que se divide la curva granulométrica.

b) En la zona media comprendida entre los niveles y_b y y_m se cumple

$$C_i = C_{m_i} \left(\frac{R}{y} \right)^{z_i} \quad (2.109)$$

donde

C_{m_i} valor teórico de la concentración cuando $y=R$ ó $y=d$ si el canal es muy ancho.

c) En la zona superior comprendida entre los niveles y_m y R se cumple

$$C_i = C_{u_i} \left(\frac{R}{y} \right)^{1.5z_i} \quad (2.110)$$

donde

C_{u_i} concentración mínima que existe en la superficie del escurrimiento cuando $y=R$ ó $y=d$ si el canal es muy ancho

donde

C_L valor teórico de la concentración cuando $y = R$

z_i se calcula con la ec 2.105, en donde la velocidad de caída ω_i es función del D_i de cada fracción en que se divide la curva granulométrica.

b) En la zona media comprendida entre los niveles y_b y y_m se cumple

$$C_i = C_{m_i} \left(\frac{R}{y} \right)^{2z_i} \quad (2.109)$$

donde

C_{m_i} valor teórico de la concentración cuando $y=R$ ó $y=d$ si el canal es muy ancho.

c) En la zona superior comprendida entre los niveles y_m y R se cumple

$$C_i = C_{u_i} \left(\frac{R}{y} \right)^{1.5z_i} \quad (2.110)$$

donde

C_{u_i} concentración mínima que existe en la superficie del escurrimiento cuando $y=R$ ó $y=d$ si el canal es muy ancho

2.8.2 Distribución de concentraciones a partir de una concentración conocida

Aquí se presentarán las ecuaciones para valuar la concentración de sedimentos por zonas. Estas zonas se plantean al dividir en tres partes el radio hidráulico. Se establece esta condición en función de una concentración conocida C_a , obtenida a una distancia a medida sobre el fondo. Se mostrarán las ecuaciones de distribución de concentración, una para cada zona. Como fue indicado, esto no fue propuesto explícitamente por Toffaleti, se tomó de la ref 2.

Téngase en cuenta que la concentración medida C_a deberá dividirse en varias concentraciones C_{ai} , cuando la curva granulométrica de la muestra de C_a es conocida. Para cada C_{ai} habrá asociado un diámetro medio representativo D_i . Si al obtener C_a no se dispusiera de una muestra grande de material, se obtendrá un diámetro representativo, y entonces se trabajaría únicamente con el valor de C_a .

1) Si la toma de la muestra se efectúa a una distancia a_L , sobre el fondo tal que $y_{b_i} < a_L \leq y_b$, se procede como sigue

1.1) A una distancia medida desde el fondo y , que se encuentra en la zona inferior, la distribución de concentraciones se expresa como

$$C_i = C_{ai} \left(\frac{a_L}{y} \right)^{0.756 z_i} \quad (2.111)$$

1.2) Si la distancia y medida desde el fondo se encuentra en la zona media, la distribución de concentraciones se obtiene por medio de la ecuación

$$C_i = C_{ai} \left(\frac{11.24 a_L}{R} \right)^{0.756 z_i} \left(\frac{R}{11.24 y} \right)^{z_i} \quad (2.112)$$

1.3) Para una distancia y medida desde el fondo dentro de la zona superior, la distribución de concentraciones se obtiene como

$$C_i = C_{ai} \left(\frac{1}{4.5} \right)^{z_i} \left(\frac{11.24 a_L}{R} \right)^{0.756 z_i} \left(\frac{R}{2.5 y} \right)^{1.5 z_i} \quad (2.113)$$

2) Si la muestra se toma a una distancia sobre el fondo igual a_m , tal que $y_b < a_m < y_m$, las ecuaciones para valorar la distribución de concentraciones, en cada zona, se obtienen en la forma siguiente.

2.1) Para la zona media la distribución de concentraciones vale

$$C_i = C_{ai} \left(\frac{a_m}{y} \right)^{z_i} \quad (2.114)$$

2.2) En la zona superior la distribución de concentraciones esta dada por

$$C_i = C_{ai} \left(\frac{2.5 a_m}{R} \right)^{z_i} \left(\frac{R}{2.5 y} \right)^{1.5 z_i} \quad (2.115)$$

2.3) En la zona inferior la distribución de concentraciones se valúa por medio de

$$C_i = C_{ai} \left(\frac{11.24 a_m}{R} \right)^{z_i} \left(\frac{R}{11.24 y} \right)^{0.756 z_i} \quad (2.116)$$

3) Por último, si la muestra se toma dentro de la zona superior; esto es, a una distancia a_u sobre el fondo tal que $y_m \leq a_u \leq R$, las ecuaciones para cada zona son las siguientes

3.1) Si se desea obtener la distribución de concentraciones a una distancia y medida desde el fondo tal que se encuentre en la zona superior, dicha distribución se expresa de la forma

$$C_i = C_{ai} \left(\frac{a_u}{y} \right)^{1.5 z_i} \quad (2.117)$$

3.2) Para obtener la distribución de concentraciones en la zona media se utiliza la relación

$$C_i = C_{ai} \left(\frac{2.5 a_u}{R} \right)^{1.5 z_i} \left(\frac{R}{2.5 y} \right)^{z_i} \quad (2.118)$$

3.3) La distribución de concentraciones para la zona inferior se valúa con la ecuación

$$C_i = 4.5^{z_i} C_{ai} \left(\frac{2.5 a_u}{R} \right)^{1.5 z_i} \left(\frac{R}{11.24 y} \right)^{0.756 z_i} \quad (2.119)$$

Se han mostrado las ecuaciones para obtener de la distribución de concentración en una vertical bajo tres condiciones diferentes. Todas ellas están en función de la concentración medida C_a o C_{ai} y de la distancia a donde se toma la muestra, medida sobre el fondo.

La muestra de sedimentos en suspensión se debe analizar para obtener el peso específico de las partículas y su curva granulométrica. Para calcular la distribución de concentraciones es conveniente dividir en diez fracciones la curva granulométrica, y obtener la C_i en diferentes puntos de la vertical. En cada uno de ellos, la concentración total se obtiene con la relación

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.120)$$

Donde n es el número de fracciones consideradas.

2.9 Método de Antsyferov y Kos'yan

En 1972 Antsyferov y Kos'yan publicaron un método para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión, basándose en la distribución empírica de velocidades desarrollada por I. I. Nikitin en 1963; la cual toma en cuenta los efectos del fondo del cauce sobre el flujo.

La distribución de velocidades encontrada por Nikitin indica que

$$u = 2.8 U_* \ln \frac{U_* y}{v} + 3.55 U_* - \frac{15.7 v}{y} \quad (2.121)$$

Ecuación que aparentemente sirve para flujo turbulento con pared hidráulicamente lisa, ver subcapítulo 3.2, ya que en ella no interviene la altura k de las protuberancias o rugosidad del fondo.

El gradiente transversal de velocidades se obtiene al derivar la ecuación anterior con respecto a y

$$\frac{du}{dy} = \frac{2.8 U_*}{y} + \frac{15.7 v}{y^2} = \frac{2.8 y U_* + 15.7 v}{y^2} \quad (2.122)$$

De acuerdo con la teoría de difusión y utilizando la ec 2.122, el coeficiente de difusión para sedimentos e_s está dado por

$$e_s = \frac{U_*^2 y^2 \left(\frac{d-y}{d} \right)}{2.8 y U_* + 15.7 v} \quad (2.123)$$

Por otra parte, la distribución de las concentraciones de sedimentos en suspensión en la vertical del flujo se expresa como, ec 2.98.

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[-\omega \int_a^y \frac{dy}{e_s} \right] \quad (2.124)$$

Sustituyendo la ec 2.123 en la ec 2.124, se tiene

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left\{ -\omega d \left[\frac{2.8}{U_*} \int_a^y \frac{dy}{y(d-y)} + \frac{15.7 v}{U_*^2} \int_a^y \frac{dy}{y^2(d-y)} \right] \right\} \quad (2.125)$$

Al integrar se obtiene

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left\{ -\omega d \left[\frac{2.8}{U_*} \left(-\frac{1}{d} \operatorname{Ln} \frac{d-y}{d} \right) + \frac{15.7 v}{U_*^2} \left(-\frac{1}{yd} - \frac{1}{d^2} \operatorname{Ln} \frac{d-y}{y} \right) \right] \right\} \quad (2.126)$$

Agrupando convenientemente los términos de esta última ecuación y tomando límites se llega finalmente a

$$\frac{C}{C_a} = \exp (\phi_1) \quad (2.127)$$

donde

$$\phi_1 = \left[\left(\frac{2.8 \omega}{U_*} + \frac{15.7 v \omega}{U_*^2 d} \right) \operatorname{Ln} \left(\frac{d-y}{d} \frac{a}{d-a} \right) + \frac{15.7 v \omega}{U_*^2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{a} \right) \right] \quad (2.128)$$

La ec 2.127 es la expresión propuesta por Antsyferov y Kos'yan para obtener la distribución de concentraciones a lo largo de una vertical.

Estos autores mostraron que con su método obtienen buenos resultados para la distribución de concentraciones de sedimentos en suspensión, siempre y cuando $y > 0.1d$, ya que consideran que en la capa inferior del flujo se presentan fenómenos diferentes a los de difusión que no han sido tomados en cuenta. Por otra parte, en la ec 2.121 no intervienen las asperezas de la pared k y por tanto es válida únicamente para flujo turbulento con pared hidráulicamente lisa, ver subcapítulo 3.2. En los datos utilizados por Antsyferov y Kos'yan la condición de la pared fue hidráulicamente de transición, ver subcapítulo 3.4. Por tanto, el método mostrado debe aplicarse con reservas para flujo turbulento con pared hidráulicamente rugosa, ver subcapítulo 3.3.

2.10 Método de Ippen

En 1971, A. T. Ippen publicó una nueva ecuación para calcular la distribución de concentraciones de sedimentos que ya había obtenido, pero no publicado, en 1934. En su desarrollo utilizó la distribución de velocidades presentada por Krey en 1927, la cual expresa que

$$\frac{u}{U_{mdx}} = \frac{\text{Ln} \left(1 + \frac{y}{A} \right)}{\text{Ln} \left(1 + \frac{d}{A} \right)} \quad (2.129)$$

donde A es una distancia medida sobre el fondo. Para valuarla se debe conocer la velocidad u en un punto situado a una distancia y sobre el fondo. Si u y y son conocidas, la ec 2.129 se resuelve por tanteos; el punto A se encuentra muy cerca del fondo.

La distancia A se puede obtener también mediante otra relación propuesta por Krey, y es

$$\frac{U_{mdx}}{U_*} = \frac{U_* A}{\nu} \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{d}{A} \right) \quad (2.130)$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido para agua clara. Se considera constante aunque varíe la concentración de sedimentos.

Al reemplazar U_{mdx} en la ec. 2.129, se llega a

$$\frac{u}{U_*} = \frac{U_* A}{\nu} \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{y}{A} \right) \quad (2.131)$$

Al comparar la ec. 2.131 con la ecuación universal de distribución de velocidades de Prandtl-von-Karman, se puede establecer que

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{U_* A}{\nu} \quad (2.132)$$

Así, para agua clara, en que $\kappa = 0.4$

$$A = \frac{\nu}{\kappa U_*} = \frac{2.5 \nu}{U_*} \quad (2.133)$$

Se obtiene el gradiente transversal de velocidades al derivar la ec. 2.131 y se llega a

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*^2 A}{\nu} \frac{1}{(y + A)} \quad (2.134)$$

Ippen considera que el coeficiente de difusión para sedimentos y el coeficiente de transferencia de cantidad de movimiento se relacionan mediante la expresión

$$e_s = \beta e_m \quad (2.135)$$

donde β es una constante

De acuerdo a la teoría de difusión

$$e_s = \beta U_*^2 \frac{\left(\frac{d-y}{d}\right)}{\frac{du}{dy}} \quad (2.136)$$

Sustituyendo en esta ecuación el gradiente de velocidades dado por la ec 2.134, se llega a

$$e_s = \frac{\beta v}{A} \left(\frac{d-y}{d}\right) (y+A) \quad (2.137)$$

La distribución de la concentración de sedimentos en suspensión a lo largo de la vertical está dada por la ec 2.18a, por lo que al sustituir en ella lo expresado por la ec 2.137 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{C}{C_a} &= \exp \left[-\frac{\omega A}{\beta v} \int_a^y \frac{dy}{\left(\frac{d-y}{d}\right) (y+A)} \right] = \\ &= \exp \left[\frac{\omega A d}{\beta v} \int_a^y \frac{dy}{(y-d)(y+A)} \right] \end{aligned} \quad (2.138)$$

donde C_a es una concentración conocida en un punto situado a una distancia a sobre el fondo.

Al integrar esta ecuación se obtiene

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[\frac{\omega A d}{\beta v (d+A)} \operatorname{Ln} \left(\frac{d-y}{A+y} \right) \right] \quad (2.139)$$

Tomando límites se llega a

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[\frac{\omega A d}{\beta v (d+A)} \operatorname{Ln} \left(\frac{d-y}{d-a} \frac{A+a}{A+y} \right) \right] \quad (2.140)$$

Puesto que A es una cantidad muy pequeña se puede eliminar y se obtiene finalmente

$$\frac{C}{C_a} = \left(\frac{d-y}{d-a} \frac{a}{y} \right)^{z_3} \quad (2.141)$$

donde

$$z_3 = \frac{\omega A}{\beta v} = \frac{\omega}{\beta \kappa U} \quad (2.142)$$

Conocido lo anterior y con ayuda de la ec 2.141 se conocerá la concentración de sedimentos en cualquier punto a lo largo de la vertical. En la ref 2 se indica que β se debe valuar en el sitio en estudio; por lo cual se debe obtener otra concentración C_b a una distancia b sobre el fondo además de C_a una distancia a sobre el fondo. Con ello se logra obtener β de la ec 2.133 ya que son conocidas todas las variables; su valor queda expresado por

$$\beta = \frac{\omega A}{v} \frac{\text{Ln} \left(\frac{d-b}{d-a} \frac{a}{b} \right)}{\text{Ln} \frac{C_b}{C_a}} \quad (2.143)$$

2.11 Método de Itakura y Kishi

Itakura y Kishi proponen en 1980 una nueva función para calcular el perfil de velocidades del flujo con sedimentos en suspensión. Obtuvieron una nueva ecuación para el coeficiente de difusión para sedimentos, y por tanto, una nueva relación para calcular la distribución de la concentración de sedimentos en suspensión. Además el método permite calcular la concentración C_a para $a=0.05d$, en función de las características del flujo y de las propiedades del material del fondo, lo que evita hacer mediciones en campo para disponer de una concentración conocida.

2.11.1 Distribución de velocidades y velocidad media

De acuerdo a sus estudios, Itakura y Kishi consideraron que la energía por unidad de masa para un flujo con sedimentos en suspensión está dada por

$$\tau \frac{du}{dy} = \alpha \frac{\rho_m U^3}{\kappa L} + \frac{\rho_m U^3}{\kappa y} \quad (2.144)$$

donde

- α coeficiente de Monin-Obuklov. Vale 7 para agua con sedimentos y 5 para viento.
- ρ_m densidad de la mezcla agua-sedimento.
- κ constante universal de von-Karman, la cual, según Itakura y Kishi, conserva el valor de 0.4 para agua con sedimento.
- L longitud característica de Monin-Obuklov, definida por

$$L = \frac{U_*^3}{\Delta m \kappa g \omega \bar{C}} \quad (2.145)$$

$$\Delta m = \frac{\gamma_s - \gamma_m}{\gamma_m} \quad (2.146)$$

donde

\bar{C} concentración media de sedimentos en suspensión, se expresa en volumen, m^3/m^3 .

Δm densidad relativa de las partículas sumergidas

γ_s peso específico de las partículas de los sedimentos.

γ_m peso específico de la mezcla agua-sedimento.

Las variables restantes ya han sido definidas a lo largo de este trabajo.

Teniendo en cuenta que para secciones muy anchas, $R \approx d$

$$\tau = \rho_m g d S = \gamma_m d S \quad (2.147)$$

y aceptando que

$$U_*^2 = \frac{\tau}{\rho_m} = g d S \quad (2.148)$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la ec 2.144, ella queda como

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\kappa y} \left(1 + \alpha \frac{y}{L} \right) \quad (2.149)$$

A partir de ésta ecuación, los autores del método proponen como expresión general para la distribución de velocidades a

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \left(\frac{y}{k_s} \right) + \frac{U_* y}{v_m} \left(\frac{\phi}{\kappa} + B \right) \quad (2.150)$$

$$\phi = 7 \frac{v_m}{U_* L}$$

donde

$\kappa = 0.4$ constante universal de von-Karman
 v_m viscosidad cinemática de la mezcla agua-sedimento que según Einstein (Elata e Ippen, 1961) vale

$$v_m = \nu (1 + 2.5 C_0) \quad (2.151)$$

donde ν es la viscosidad cinemática para agua clara y C_0 la concentración en volumen de sedimentos expresada en fracción, (m^3/m^3).

En la ec 2.150, k_s es la altura de la rugosidad del fondo, B es un coeficiente que cumple la ecuación de la energía para una unidad de masa de la mezcla agua-sedimento.

A partir de la ec 2.150 se obtuvo la distribución de velocidades para condiciones de pared hidráulicamente lisa o rugosa. Si se integran estas ecuaciones dentro de los límites y_0 y d , en que y_0 es un valor muy pequeño, se obtienen las velocidades medias, cuyas expresiones se muestran a continuación.

a) Si $\frac{U_* k_s}{v_m} < 5$, la frontera es hidráulicamente lisa y se cumple que

$$\frac{U}{U_*} = 3 + \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \left(\frac{U_* d}{v_m} \right) + \frac{\phi_2}{2 \kappa} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \left(3.22 \frac{U_* d}{v_m} \right) + \frac{\phi_2}{2 \kappa} \quad (2.152)$$

b) Si $\frac{U_* k_s}{v_m} > 70$, la pared es hidráulicamente rugosa y se llega a

$$\frac{U}{U_*} = 6 + \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \left(\frac{d}{k_s} \right) + \frac{\phi_2}{2 \kappa} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \left(\frac{11.02 d}{k_s} \right) + \frac{\phi_2}{2 \kappa} \quad (2.153)$$

c) De la ec 2.150, se puede obtener la distribución de velocidades para flujo con sedimentos en suspensión

$$\frac{u - U_{mdx}}{U_*} = \left[\operatorname{Ln} \left(\frac{y}{d} \right) + \phi_2 \left(\frac{y}{d} - 1 \right) \right] \quad (2.154)$$

donde

$$\phi_2 = 7 \frac{d}{L} \quad (2.155)$$

Lo antes propuesto por estos autores sirvió para el cálculo del coeficiente de difusión para sedimentos, e_s . Las velocidades medias les sirvieron para valuar el transporte de sedimentos en suspensión.

2.11.2 Distribución de concentraciones a partir de una concentración conocida

El coeficiente de difusión para sedimentos e_s , esta dado por

$$e_s = \kappa y U_* \left(\frac{d-y}{d} \right) \left(1 + \alpha \frac{y}{L} \right)^{-1} \quad (2.156)$$

La distribución de la concentración de sedimentos de acuerdo con la teoría de difusión está dada por la ec 2.18a

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left(- \omega \int_a^y \frac{dy}{e_s} \right) \quad (2.157)$$

Sustituyendo la ec 2.156 en la 2.157, se tiene

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left\{ \frac{-\omega}{\kappa U_*} \int_a^y \left[\frac{\left(1 + \alpha \frac{y}{L} \right)}{y \left(\frac{d-y}{d} \right)} \right] dy \right\} \quad (2.158)$$

Efectuando la integración y reemplazando los límites resulta

$$\frac{C}{C_a} = \left[\left(\frac{d-y}{d-a} \right)^{1+\Phi_1} \left(\frac{a}{y} \right)^z \right] \quad (2.159)$$

donde

$$z = \frac{\omega}{\kappa U_*} = \frac{\omega}{0.4 U_*} = \frac{2.5 \omega}{U_*} \quad (2.160)$$

La ec 2.159 permite obtener la distribución de concentraciones en la vertical, cuando a una distancia a , sobre el fondo, la concentración C_a es conocida. Dicha ecuación fue probada con

datos experimentales suministrados de Vanoni y Nomicos mostrando bastante concordancia. Para que este método se pueda aplicar es necesario conocer C_a , a y \bar{C} . Si no se conoce \bar{C} se debe proceder por tanteos, suponiendo un valor de \bar{C} ; a continuación se calcula toda la distribución teórica de concentraciones y de ella se obtiene \bar{C} . Con ese nuevo valor de \bar{C} se obtiene nuevamente la curva de distribución de concentraciones. El procedimiento se repite hasta que la \bar{C} supuesta sea igual a la \bar{C} calculada. Téngase en cuenta que \bar{C}

$$\bar{C} = \frac{1}{d} \int_{z_D}^d C dy = \sum_{j=1}^n C_j p_j \quad (2.161)$$

En que C_j es la concentración media de cada fracción Δd en que se divide el tirante y por tanto la curva de distribución de concentraciones, y p_j el valor de cada fracción de la vertical, tal que

$$p_j = \frac{(\Delta d)_j}{d} \quad (2.162)$$

2.12 Método de Van Rijn

En 1982, después de analizar varios coeficientes de difusión del fluido, Van Rijn publica un método en donde acepta como más satisfactorio aquel cuya distribución es parabólica hasta la mitad del tirante y constante de ahí a la superficie.

Si se considera que el flujo es uniforme, la distribución vertical de sedimentos en suspensión puede ser descrita por

$$(1 - C) C \omega_{sm} + e_s \frac{dc}{dz} = 0 \quad (2.163)$$

donde

C concentración de sedimentos

$\omega_{s,m}$ velocidad de caída de las partículas de la mezcla agua-sedimento

$$\omega_{s,m} = (1 - C)^4 \omega_s \quad (2.164)$$

e_s coeficiente de difusión del sedimento, esta dado por la relación

$$e_s = \beta \phi e_F \quad (2.165)$$

ω_s velocidad de caída del diámetro representativo de la mezcla, la que debe valuarse con las relaciones

a) Para $D_s \leq 0.0001 \text{ m.}$, según Stokes

$$\omega_s = \frac{g \Delta D_s^3}{18 \nu} \quad (2.166a)$$

b) Para $0.0001 \leq D_s \leq 0.001 \text{ m.}$, según Zanke

$$\omega_s = 10 \frac{\nu}{D_s} \left[\left(1 + \frac{0.01 g \Delta D_s^3}{\nu^2} \right)^{0.5} - 1 \right] \quad (2.166b)$$

c) Para $D_s \geq 0.001 \text{ m.}$

$$\omega_s = 1.1 (g \Delta D_s)^{0.5} \quad (2.166c)$$

β coeficiente relativo a la difusión de las partículas del sedimento, expresado por

$$\beta = 1 + 2 \left(\frac{\omega_s}{U_*} \right)^2 \quad \text{si} \quad 0.1 < \frac{\omega_s}{U_*} < 0.707 \quad (2.167)$$

Se recomienda que β no sea mayor que 2. Por tanto, si $\frac{\omega_s}{U_*} > 0.707$ se considerará $\beta = 2$.

El factor β es siempre mayor que 1, lo que indica una influencia de las fuerzas centrífugas.

ϕ factor de amortiguamiento de las partículas del sedimento, se obtiene como

$$\phi = 1 + \left[\frac{C}{C_0} \right]^{0.8} - 2 \left[\frac{C}{C_0} \right]^{0.4} \quad (2.168)$$

donde C_0 es la máxima concentración posible en la capa de fondo y vale $C_0 = 0.65 \frac{m^3}{m^3}$. Si

se considera que no hay amortiguamiento debido a las partículas del sedimento, $\phi = 1$.

La ec 2.168 se muestra en la fig 2.7.

e_F coeficiente de difusión del flujo

Para la zona parabólica (hasta la mitad del tirante) se obtiene con la relación siguiente

$$e_F = \frac{y}{d} \left(1 - \frac{y}{d} \right) \kappa U_* d \quad (2.169)$$

Para la zona constante (de la mitad del tirante a la superficie) se tiene que

$$e_F = 0.25 \kappa U_* d \quad (2.170)$$

Las ecs 2.169 y 2.170 se muestran en la fig 2.8

En las ecs 2.166 a, b y c, el significado de las variables es

Δ densidad relativa de las partículas

$$\Delta = \frac{Y_s - Y}{Y} \quad (2.171)$$

D_s diámetro representativo de las partículas en suspensión. Se obtiene con la relación

$$D_s = D_{30} [1 + 0.011 (\sigma_g - 1) (T - 25)] \quad (2.172)$$

ν viscosidad cinemática

U_c velocidad al cortante, se obtiene de

$$U_c = \sqrt{g d S} \quad (2.173)$$

σ_g desviación estándar geométrica de la mezcla

$$\sigma_g = \frac{1}{2} \left(\frac{D_{84}}{D_{30}} + \frac{D_{30}}{D_{16}} \right) = \left(\frac{D_{84}}{D_{16}} \right)^{0.5} \quad (2.174)$$

T parámetro de condición de transporte

$$T = \frac{\tau'_0 - \tau_c}{\tau_c} \quad (2.175)$$

τ'_0 esfuerzo cortante que el flujo ejerce en el fondo, asociado a las partículas. Se obtiene de la relación

$$\tau'_0 = \gamma \left(\frac{U}{C'} \right)^2 \quad (2.176)$$

τ_c esfuerzo cortante crítico para iniciar el movimiento de las partículas, según Shields, se puede evaluar con la ecuación propuesta por Maza, que vale

$$\tau_c = (\gamma_s - \gamma) D_{50} \left[\frac{0.2916}{D_*} + 0.077 \exp \left\{ - \left(\frac{30.35}{D_*} \right)^{0.563} \right\} \right] \quad (2.177a)$$

La ec 2.177a puede aplicarse en el intervalo $1 \leq D_* \leq 180$. Para valores mayores Van Rijn considera que

$$\tau_c = 0.055 \quad (2.177b)$$

C' coeficiente de rugosidad de Chezy asociado a las partículas. Se obtiene de

$$C' = 7.82 \operatorname{Ln} \frac{12d}{3D_{90}} \quad (2.178)$$

D_* parámetro de la partícula o número de Yalin

$$D_* = D_{50} \left(\frac{\Delta g}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.179)$$

Usando una distribución parabólica-constante de acuerdo con las ecs 2.164 y 2.168 y $\phi = 1$ (sin amortiguamiento) y con una concentración dada que depende de la velocidad de caída de las partículas de acuerdo con la ec 2.169, el perfil de la concentración de sedimento puede ser obtenida al integrar la ec 2.163, de la cuál resulta

$$\frac{C}{C_a} = \left[\left(\frac{a}{d-a} \right) \left(\frac{d-y}{y} \right) \right]^2 \quad \text{si } \frac{y}{d} < 0.5 \quad (2.180a)$$

y

$$\frac{C}{C_a} = \left(\frac{a}{d-a} \right)^2 e^{-4z \left(\frac{y}{d} - 0.5 \right)} \quad \text{si } \frac{y}{d} \geq 0.5 \quad (2.180b)$$

donde

a nivel de referencia

C_a concentración en el nivel de referencia, expresado en volumen, en $\frac{m^3}{m^3}$

$$C_a = 0.015 \frac{D_{30} T^{1.5}}{a D_*^{0.3}} \quad (2.181)$$

z parámetro de suspensión que se expresa como

$$z = \frac{\omega_s}{\beta \kappa U_*} \quad (2.182)$$

La ec 2.180 es la propuesta por Van Rijn, para valuar la distribución de la concentración de sedimentos transportados en suspensión. Es necesario conocer la concentración C_a , en un punto situado a una distancia a , para poder obtener la concentración C en cualquier nivel y .

2.13 Ejemplo numérico

Los datos de este problema se utilizarán para mostrar la aplicación de los métodos mencionado en este capítulo. Requieren del conocimiento de la concentración de sedimentos en un punto dentro del flujo. El problema fue tomado del artículo de Einstein (1950), aunque tiene algunas ligeras variantes debido al cambio de unidades y a la incorporación de algunos datos faltantes necesarios en la aplicación de los métodos.

2.13.1 Problema

En un río muy ancho con una profundidad de flujo de 4.60 m y pendiente de 0.00038, se tomó una muestra de agua-sedimento a 30 cm del fondo. Al analizar la muestra se obtuvo que la concentración de C_a era de 1000 ppm, así como su curva granulométrica, la cual se muestra más adelante en la tabla del inciso e.

Para obtener la rugosidad representativa del fondo se determinó que $D_{65} = 0.000935$ m y $D_{15} = 0.000504$ m y que el peso específico de las partículas es de 2 680 kgf/m³. La temperatura del agua es de 20°C. Se calculará la concentración de sedimentos con cada uno de los métodos antes explicados para diferentes alturas a lo largo del tirante.

a) Datos del cauce

Pendiente hidráulica, $S = 0.00038$

Profundidad del flujo, $d = 4.60$ m

Concentración de sedimentos, $C_a = 1000$ ppm

Distancia a partir del fondo del río, $a = 0.30$ m

Si se expresa la concentración en

$$\text{unidades de peso, } C_g = 1000 \times 10^{-3} \text{ kgf/m}^3 = 1 \text{ kgf/m}^3$$

b) Propiedades del agua

Temperatura,

$$T = 20^\circ\text{C}$$

Peso específico,

$$\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$$

Densidad,

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 = 9810 \text{ N/m}^3$$

Viscosidad cinemática,

$$\nu = 0.000010066 \text{ m}^2/\text{s}$$

c) Propiedades del material

Peso específico de las partículas,

$$\gamma_s = 2680 \text{ kgf/m}^3$$

Densidad de las partículas,

$$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3 = 26291 \text{ N/m}^3$$

d) Considerando que el material del fondo del cauce se ajusta a una función de distribución de probabilidad de tipo Log-Normal; y aceptando que los diámetros dados son D_{10} y D_{20} ; es decir, $D_{10} = 0.000246 \text{ m}$ y $D_{20} = 0.00035 \text{ m}$, se obtienen los datos siguientes:

Desviación estándar,

$$\sigma_g = 2.2287$$

Diámetros más representativos, en metros (m)

$$D_m = 0.000947$$

$$D_{16} = 0.000309$$

$$D_{40} = 0.000560$$

$$D_{50} = 0.000687$$

$$D_{80} = 0.001348$$

$$D_{84} = 0.001524$$

$$D_{90} = 0.001919$$

- e) La curva granulométrica se dividirá en 10 partes iguales; por tanto $p_i = 0.1$ y $C_{ai} = 0.1 \text{ kgf/m}^3$ para cada fracción. El diámetro D_i correspondiente a cada rango, se muestra a continuación

Fracción	l	p_i	D_i (m)	C_{ai} (kgf/m^3)
0 - 10	5	0.1	0.000183	0.1
10 - 20	15	0.1	0.000299	0.1
20 - 30	25	0.1	0.000400	0.1
30 - 40	35	0.1	0.000504	0.1
40 - 50	45	0.1	0.000621	0.1
50 - 60	55	0.1	0.000759	0.1
60 - 70	65	0.1	0.000935	0.1
70 - 80	75	0.1	0.001179	0.1
80 - 90	85	0.1	0.001576	0.1
90 - 100	95	0.1	0.002567	0.1

- f) Para obtener la distribución de la concentración de sedimentos en todo el tirante se dividirá en 10 partes iguales.

SECCION j	RANGO DE TIRANTE	PUNTO EN ESTUDIO y_j en m
1	0 - 0.46	0.23
2	0.46 - 0.92	0.69
3	0.92 - 1.38	1.15
4	1.38 - 1.84	1.61
5	1.84 - 2.30	2.07
6	2.30 - 2.76	2.53
7	2.76 - 3.22	2.99
8	3.22 - 3.68	3.45
9	3.68 - 4.14	3.91
10	4.14 - 4.60	4.37

Para obtener la concentración de sedimentos en cada uno de los puntos en estudio (y_j) es necesario realizarlo para los 10 diámetros de interés (D_i) antes mencionados, obtenidos de la curva granulométrica.

2.13.2 Parámetros requeridos en la mayoría de los métodos

De la ec 2.30

$$\Delta = \frac{2680 - 1000}{1000} \quad \Delta = 1.68$$

De la ec 2.20

$$U_* = \sqrt{(9.81) (4.6) (0.00038)} \quad U_* = 0.13095 \text{ m/s}$$

La constante universal de von-Karman $\kappa = 0.4$

De la ec 2.29

$$F_{1i} = \left(\frac{2}{3} + \frac{(36) (0.0000010066^2)}{(9.81) (1.68) D_i^3} \right)^{0.5} - \left(\frac{(36) (0.0000010066^2)}{(9.81) (1.68) D_i^3} \right)^{0.5}$$

De la ec 2.28

$$\omega_i = F_{1i} ((9.81) (1.68) D_i)^{0.5}$$

De la ec 2.27

$$z_i = \frac{\omega_i}{(0.4) (0.13095)}$$

Por ejemplo, para $i = 5$ y $D_5 = 0.000183$ m se tiene

De la ec 2.29

$$F_{1,5} = \left(\frac{2}{3} + \frac{(36) (0.0000010066^2)}{(9.81) (1.68) (0.000183^3)} \right)^{0.5} - \left(\frac{(36) (0.0000010066^2)}{(9.81) 1.68 (0.000183^3)} \right)^{0.5}$$
$$F_{1,5} = 0.41286$$

De la ec 2.28

$$\omega_5 = 0.41286 [(9.81) (1.68) (0.000183)]^{0.5}$$

$$\omega_5 = 0.02267 \text{ m/s}$$

De la ec 2.27

$$z_5 = \frac{0.02267}{(0.4) (0.13095)} \quad z_5 = 0.43286$$

Se procede de igual manera para los demás diámetros, los resultados se encuentran en la tabla siguiente

i	D_i (m)	F_{ii}	ω_i (m/s)	z_i
5	0.000183	0.41286	0.02267	0.43286
15	0.000299	0.57797	0.04057	0.77458
25	0.000400	0.65144	0.05289	1.00979
35	0.000504	0.69553	0.06339	1.21020
45	0.000621	0.72600	0.07345	1.40219
55	0.000759	0.74844	0.08371	1.59810
65	0.000935	0.76612	0.09510	1.81562
75	0.001179	0.78057	0.10881	2.07728
85	0.001576	0.79306	0.12781	2.44012
95	0.002567	0.80514	0.16560	3.16160

2.13.3 *Fórmula de Rouse*

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

Se presenta a continuación la tabla correspondiente al punto 0.23 para de ejemplificar la obtención de la concentración de cada una de las fracciones de la curva granulométrica y después se muestra la tabla de concentración para cada uno de los puntos seleccionados en el tirante.

De la ec 2.26

$$C_i = 0.1 \left[\left(\frac{4.6 - 0.23}{0.23} \right) \left(\frac{0.3}{4.6 - 0.3} \right) \right]^2$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA EL PUNTO 0.23

i	z_i	C_i (kgf/m ³)
5	0.43286	0.11298
15	0.77458	0.12440
25	1.00979	0.13292
35	1.21020	0.14065
45	1.40219	0.14847
55	1.59810	0.15690
65	1.81562	0.16682
75	2.07728	0.17959
85	2.44012	0.19892
95	3.16160	0.24378

$$C_{0.23} = \sum_i C_i \quad C_{0.23} = 1.60542 \text{ kgf/m}^3$$

Se procede de igual manera para los demás z_i . Los resultados de la concentración para cada uno de los puntos de estudio se muestran en la tabla siguiente.

De la ec 2.26

$$C_i = 0.1 \left[\left(\frac{4.6 - y_j}{y_j} \right) \left(\frac{0.3}{4.6 - 0.3} \right) \right]^{2.7}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTOS PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio j	Tirante y_j en m	Concentración C_j en kgf/m ³
1	0.23	1.60452
2	0.69	0.28608
3	1.15	0.14828
4	1.61	0.09719
5	2.07	0.06987
6	2.53	0.05227
7	2.99	0.03949
8	3.45	0.02927
9	3.91	0.02024
10	4.37	0.01065

2.13.4 Método de Lane-Kalinske

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

De la ec 2.35

$$C_i = 0.1 \exp \left\{ \left(- \frac{15 \omega_i}{0.13095} \right) \left(\frac{y_j - 0.3}{4.6} \right) \right\}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante <i>y_j</i> en m	Concentración <i>C_j</i> en kgf/m ³
1	0.23	1.15941
2	0.69	0.47828
3	1.15	0.23421
4	1.61	0.12980
5	2.07	0.07856
6	2.53	0.05065
7	2.99	0.03418
8	3.45	0.02385
9	3.91	0.01704
10	4.37	0.01240

Los resultados que se obtuvieron con este método se encuentran bastante alejados a los que se calcularon con el método de Rouse.

2.13.5 Método de Einstein y Chien

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

Para obtener z y M se requiere conocer la concentración en 3 puntos. Ya se conoce que $C_{11} = 0.1 \text{ kgf/m}^3$ para $y_{11} = 0.3 \text{ m}$. Como no se dispone de más datos, se obtienen otras dos concentraciones, por ejemplo con la ecuación de Rouse, para $y_{12} = 1.50 \text{ m}$ y $y_{13} = 3.50 \text{ m}$, en la forma indicada en el ejemplo numérico que se muestra en el inciso 2.13.3. Para obtener las concentraciones C_{12} y C_{13} en los puntos y_{12} y y_{13} , es recomendable que se trabaje con una fracción de la curva granulométrica (ver ref 2).

Así, para $y_{12} = 1.50 \text{ m}$; $C_{12} = 0.02231 \text{ kgf/m}^3$
 para $y_{13} = 3.50 \text{ m}$; $C_{13} = 0.00519 \text{ kgf/m}^3$

Con los datos anteriores se obtiene C/C_0 , que se utilizará en la ec 2.46

$$\frac{C_{12}}{C_{11}} = \frac{0.02231}{0.1} = 0.2231$$

$$\frac{C_{13}}{C_{11}} = \frac{0.00519}{0.1} = 0.0519$$

Para obtener M y z , la ec 2.46 se aplica a y_{12} y y_{13} contra y_{11} , esto es

$$0.2231 = \frac{\left[1 - \sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} \right]^{\frac{z}{1-M}}}{\left[1 - \sqrt{\frac{4.6 - 1.5}{4.6}} \right]^{\frac{z}{1-M}}} \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} \right]^{\frac{z}{1-M}}}{\left[1 + \sqrt{\frac{4.6 - 1.5}{4.6}} \right]^{\frac{z}{1-M}}} \left[\frac{\sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} + M}{\sqrt{\frac{4.6 - 1.5}{4.6}} + M} \right]^{\frac{2z}{M^2 - 1}}$$

$$0.0519 = \frac{\left[1 - \sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} \right]^{\frac{z}{1-M}} \left[1 + \sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} \right]^{\frac{z}{1-M}} \left[\sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} + M \right]^{\frac{2z}{M^2-1}}}{\left[1 - \sqrt{\frac{4.6 - 3.5}{4.6}} \right]^{\frac{z}{1-M}} \left[1 + \sqrt{\frac{4.6 - 3.5}{4.6}} \right]^{\frac{z}{1-M}} \left[\sqrt{\frac{4.6 - 3.5}{4.6}} + M \right]^{\frac{2z}{M^2-1}}}$$

Procediendo por tanteos y a que se ajustaron los resultados a los datos de Rouse, se obtuvo

$$z = 0.7746 \quad M = 0.0$$

De la ec 2.46

$$C_j = \frac{\left[1 - \sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} \right]^{\frac{0.7746}{1-0}} \left[1 + \sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} \right]^{\frac{0.7746}{1-0}} \left[\sqrt{\frac{4.6 - 0.3}{4.6}} + 0 \right]^{\frac{(2)(0.7746)}{0^2-1}}}{\left[1 - \sqrt{\frac{4.6 - y_j}{4.6}} \right]^{\frac{0.7746}{1-0}} \left[1 + \sqrt{\frac{4.6 - y_j}{4.6}} \right]^{\frac{0.7746}{1-0}} \left[\sqrt{\frac{4.6 - y_j}{4.6}} + 0 \right]^{\frac{(2)(0.7746)}{0^2-1}}}$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante <i>y_j</i> , en m	Concentración <i>C_p</i> , en kgf/m ³
1	0.23	1.24399
2	0.69	0.48733
3	1.15	0.29776
4	1.61	0.20537
5	2.07	0.14853
6	2.53	0.10884
7	2.99	0.07871
8	3.45	0.05429
9	3.91	0.03317
10	4.37	0.01299

Este método es un poco difícil de aplicar debido a que hay que realizar una serie de tanteos para obtener *z* y *M* y después aplicarlo para obtener la concentración de sedimento, sin embargo, los resultados obtenidos para este ejemplo se encuentran por arriba de los que se calcularon con Rouse.

2.13.6 Método de Hunt

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

Hunt encontró los valores siguientes, $B_s = 0.99$ y $k_s = 0.36$; sin embargo, se han realizado pruebas en donde se consideran $B_s = 1$, obteniendo mejores resultados. Para el ejemplo se trabajará con los dos valores; por lo cual, primero se aceptará que

$$B_s = 0.99 \quad \text{y} \quad k_s = 0.36$$

De la ec 2.61

$$z_{s_i} = \frac{\omega_i}{(0.36) (0.99) (0.13095)}$$

D_i (m)	z_{s_i}
0.000183	0.48581
0.000299	0.86933
0.000400	1.13332
0.000504	1.35825
0.000621	1.57373
0.000759	1.79360
0.000935	2.03773
0.001179	2.33140
0.001576	2.73863
0.002567	3.54837

De la ec 2.60

$$C_i = 0.1 \left\{ \frac{\left(1 - \frac{y_j}{4.6}\right)^{0.5}}{\left(1 - \frac{0.3}{4.6}\right)} \left[\frac{0.99 - \left(1 - \frac{0.3}{4.6}\right)^{0.5}}{0.99 - \left(1 - \frac{y_j}{4.6}\right)^{0.5}} \right]^{z_{s_i}} \right\}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante <i>y_j</i> en m	Concentración <i>C_j</i> en kg/m ³
1	0.23	2.27794
2	0.69	0.19918
3	1.15	0.10023
4	1.61	0.06647
5	2.07	0.04888
6	2.53	0.03768
7	2.99	0.02957
8	3.45	0.02308
9	3.91	0.01727
10	4.37	0.01084

Ahora se tomara el valor siguiente, aceptando que

$$B_s = 1.00 \quad y \quad k_s = 0.36$$

De la ec 2.61

$$z_{s_i} = \frac{\omega_i}{(0.36) (1.0) (0.13095)}$$

D_i (m)	z_{s_i}
0.000183	0.48096
0.000299	0.86064
0.000400	1.12199
0.000504	1.34466
0.000621	1.55799
0.000759	1.77567
0.000935	2.01736
0.001179	2.30809
0.001576	2.71124
0.002567	3.51289

De la ec 2.60

$$C_i = 0.1 \left\{ \frac{\left(1 - \frac{y_j}{4.6} \right)^{0.5}}{\left(1 - \frac{0.3}{4.6} \right)^{0.5}} \right\}^{z_{s_i}}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio j	Tirante y_p en m	Concentración C_p en kgf/m^3
1	0.23	1.68368
2	0.69	0.26263
3	1.15	0.13396
4	1.61	0.08813
5	2.07	0.06419
6	2.53	0.04902
7	2.99	0.03814
8	3.45	0.02952
9	3.91	0.02190
10	4.37	0.01361

De las tablas anteriores presentadas para cada uno de los B_i , se observa que con $B_i = 1$ se obtienen mejores resultados que con $B_i = 0.99$, al hacer una comparación de ellos con los que se tienen con el método de Rouse.

2.13.7 Método de Velikanov

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

De la ec 2.63

$$\alpha_i = \frac{D_i}{30 (4.6)}$$

De la ec 2.73

$$z_{\alpha_i} = \frac{\omega_i}{0.4 (0.13095) (1 + \alpha_i)}$$

i	D_i	α_i	z_{α_i}
5	0.000183	0.0000013	0.43286
15	0.000299	0.0000022	0.77457
25	0.000400	0.0000029	1.00978
35	0.000504	0.0000037	1.21019
45	0.000621	0.0000045	1.40219
55	0.000759	0.0000055	1.59809
65	0.000935	0.0000068	1.81561
75	0.001179	0.0000085	2.07726
85	0.001576	0.0000114	2.44009
95	0.002567	0.0000186	3.16154

De la ec 2.72b

$$C_i = 0.1 \left[\frac{4.6 - y_j}{\alpha_i (4.6) + y_j} \frac{\alpha_i (4.6) + 0.3}{4.6 - 0.3} \right]^{2.4}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio j	Tirante y_p en m	Concentración C_p en kgf/m^3
1	0.23	1.60528
2	0.69	0.28610
3	1.15	0.14829
4	1.61	0.09720
5	2.07	0.06987
6	2.53	0.05227
7	2.99	0.03949
8	3.45	0.02927
9	3.91	0.02024
10	4.37	0.01065

Como se observa, los resultados de este método para cada uno de los puntos de estudio son iguales a los que se obtienen con el método de Rouse.

2.13.8 Método de Chang, Simons y Richardson

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

De la ec 2.91

$$\omega_e = \sum_i 0.1 \omega_i$$

$$\omega_e = 0.0834 \text{ m/s}$$

De la ec 2.92

$$D_e = \left[\frac{\sum_i D_i^3 \omega_i}{(10) (0.0834)} \right]^{1/3} \quad D_e = 0.00163 \text{ m}$$

Como

$$\frac{(0.13095) (0.00163)}{0.0000010066} > 40 \quad \text{entonces} \quad \kappa = 0.22$$

De la ec 2.90

$$z_2 = \frac{2 (0.0834)}{(1.5) (0.22) (0.13095)}$$

$$z_2 = 3.8599$$

De la ec 2.89b

$$C_j = \left[\frac{\sqrt{4.6} - \sqrt{4.6 - 0.3}}{\sqrt{0.3}} \frac{\sqrt{y_j}}{\sqrt{4.6} - \sqrt{4.6 - y_j}} \right]^{3.8599}$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante <i>y_p</i> en m	Concentración <i>C_p</i> en kgf/m ³
1	0.23	1.69578
2	0.69	0.18331
3	1.15	0.06103
4	1.61	0.02811
5	2.07	0.01504
6	2.53	0.00869
7	2.99	0.00522
8	3.45	0.00315
9	3.91	0.00183
10	4.37	0.00091

Este método es fácil de aplicar ya que se tienen los parámetros requeridos, sin embargo, sus resultados para este ejemplo son inferiores a los obtenidos con el método de Rouse.

2.13.9 Método de Zagustin

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

De la ec 2.98

$$C_i = 0.1 \left[\exp \left\{ - \frac{3 \omega_i}{(0.4) (0.13094) (4.6)} \int_{0.3}^{y_i} \frac{dy}{\left(\frac{4.6 - y}{4.6} \right)^{0.5} \left[1 - \left(\frac{4.6 - y}{4.6} \right)^3 \right]} \right\} \right]$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante y_p en mm	Concentración C_p en kgf/m ³
1	0.23	1.62864
2	0.69	0.27105
3	1.15	0.13394
4	1.61	0.08402
5	2.07	0.05787
6	2.53	0.04151
7	2.99	0.03014
8	3.45	0.02164
9	3.91	0.01489
10	4.37	0.00899

El usar este método resulta fácil, ya que únicamente hay que aplicar la ec 2.98 y se obtiene la concentración de sedimentos. Los resultados obtenidos se asemejan a los que se tienen con el método de Rouse.

2.13.10 Método de Toffaleti

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

De la ec 2.103

<i>i</i>	D_i m	$y_{b_i} = 2D_i$ m
5	0.000183	0.000366
15	0.000299	0.000598
25	0.000400	0.000800
35	0.000504	0.001008
45	0.000621	0.001242
55	0.000759	0.001518
65	0.000935	0.001870
75	0.001179	0.002358
85	0.001576	0.003152
95	0.002567	0.005134

$$y_b = \frac{4.6}{11.24} \quad y_b = 0.40925 \text{ m}$$

$$y_m = \frac{4.6}{2.5} \quad y_m = 1.84 \text{ m}$$

Como la muestra se obtuvo en $y = 0.30$ m, se localiza entre y_B y y_c , es decir en la zona inferior; por tanto se utilizarán las fórmulas del apartado 1 del inciso 2.8.2. En ellas $a_L = 0.3$ m, $C_a = 1$ kgf/m³ y $R = 4.6$ m.

De la ec. 2.106

$$T_z = 239.326 - 1.2006 (20)$$

$$T_z = 215.314$$

De la ec. 2.107

$$n_v = 0.13516 + 0.000864 (20)$$

$$n_v = 0.15244$$

El valor mínimo de z debe ser

$$z_{min} = 1.5 n_v = 1.5 (0.15244)$$

$$z_m = 0.22866$$

Se debe conocer o calcular U . Con los datos disponibles se aplicará el método de Cruickshank-Maza.

Como se cumple que

$$\frac{1}{S} \geq 83.5 \left(\frac{d}{\Delta D_{84}} \right)^{0.35}$$

por tanto la velocidad media es

$$U = (7.58) (0.08001) \left(\frac{4.6}{0.001524} \right)^{0.634} \left(\frac{0.00038}{1.68} \right)^{0.456}$$

$$U = 1.97071 \text{ m/s}$$

De la ec 2.105

$$z_i = \frac{3.2808 \omega_i 1.97071}{(215.314) (4.6) (0.00038)}$$

i	D_p m	ω_p m/s	z_i
5	0.000183	0.02267	0.38950
15	0.000299	0.04057	0.69698
25	0.000400	0.05289	0.90862
35	0.000504	0.06339	1.08896
45	0.000621	0.07345	1.26172
55	0.000759	0.08371	1.43800
65	0.000935	0.09510	1.63373
75	0.001179	0.10881	1.86917
85	0.001576	0.12781	2.19566
95	0.002567	0.16560	2.84486

Para obtener la concentración de sedimento a lo largo del tirante se usarán las ecuaciones 2.111, 2.112 y 2.113, respectivamente, dependiendo de la distancia y , medida desde el fondo.

Zona inferior

$$y_{B_i} \leq y_j \leq 0.40925$$

$$C_i = 0.1 \left(\frac{0.3}{y_j} \right)^{0.756 z_i}$$

Zona intermedia

$$0.40925 \leq y_j \leq 1.84$$

$$C_i = 0.1 \left(\frac{11.24 (0.3)}{4.6} \right)^{0.756 z_i} \left(\frac{4.6}{11.24 y_j} \right)^{z_i}$$

Zona superior

$$1.84 \leq y_j \leq 4.6$$

$$C_i = 0.1 \left(\frac{1}{4.5} \right)^4 \left(\frac{11.24 (0.3)}{4.6} \right)^{0.756 \times z_i} \left(\frac{4.6}{2.5 y_j} \right)^{1.5 z_i}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio j	Tirante y_p en m	Concentración C_p en kg/m^3
1	0.23	1.34690
2	0.69	0.38358
3	1.15	0.22627
4	1.61	0.16633
5	2.07	0.12806
6	2.53	0.10125
7	2.99	0.08424
8	3.45	0.07250
9	3.91	0.06390
10	4.37	0.05732

De la tabla anterior se aprecia que este método presenta una diferencia muy grande con respecto a los resultados obtenidos con el método de Rouse.

2.13.11 Método de Antsyferov y Kos'yan

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

De la ec 2.128

$$\phi_{11} = \left[\left(\frac{2.8 \omega_i}{0.13095} + \frac{(15.7) (0.0000010066) \omega_i}{(0.13095)^2 (4.6)} \right) \text{Ln} \left(\frac{4.6 - y_i}{4.6} \frac{0.3}{4.6 - 0.3} \right) \right. \\ \left. + \frac{(15.7) (0.0000010066) \omega_i}{(0.13095)^2} \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{0.30} \right) \right]$$

De la ec 2.127

$$C_i = 0.1 [\exp(\phi_{11})]$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante <i>y_p</i> en m	Concentración <i>C_p</i> en kgf/m ³
1	0.23	1.70523
2	0.69	0.25252
3	1.15	0.12488
4	1.61	0.07978
5	2.07	0.05630
6	2.53	0.04145
7	2.99	0.03083
8	3.45	0.02246
9	3.91	0.01517
10	4.37	0.00762

Como se observa, los resultados de este método para cada uno de los puntos en estudio, se asemejan a los obtenidos con el método de Rouse.

2.13.12 Método de Ippen

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

Para aplicar el método se requiere conocer otra concentración, para esto último se usará lo calculado con el método de Rouse para $y = 1.5$ m.

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA EL PUNTO 1.5 m

i	D_p m	z_i	C_{si} (kgf/m ³)
5	0.000183	0.43286	0.04324
15	0.000299	0.77458	0.02231
25	0.000400	1.00979	0.01415
35	0.000504	1.21020	0.00960
45	0.000621	1.40219	0.00662
55	0.000759	1.59810	0.00453
65	0.000935	1.81562	0.00297
75	0.001179	2.07728	0.00179
85	0.001576	2.44012	0.00088
95	0.002567	3.16160	0.00022

De la ec 2.133

$$A = \frac{0.0000010066}{0.4 (0.13095)}$$

$$A = 0.0000192$$

De la ec 2.143

$$\beta_i = \left(\frac{\omega_i \cdot 0.00000192}{0.0000010066} \right) \left[\frac{\text{Ln} \left[\left(\frac{4.6 - 1.5}{4.6 - 0.3} \right) \left(\frac{0.3}{1.5} \right) \right]}{\text{Ln} \left(\frac{Cb_i}{0.1} \right)} \right]$$

De la ec 2.142

$$z_{3i} = \frac{\omega_i \cdot 0.00000192}{\beta_i \cdot 0.0000010066}$$

i	D_i, m	$\omega_i, (m/s)$	β_i	z_{3i}
5	0.000183	0.02267	0.99988	0.43291
15	0.000299	0.04057	0.99997	0.77460
25	0.000400	0.05289	1.00008	1.00971
35	0.000504	0.06339	1.00014	1.21003
45	0.000621	0.07345	1.00018	1.40194
55	0.000759	0.08371	1.00017	1.59783
65	0.000935	0.09510	0.99989	1.81582
75	0.001179	0.10881	1.00000	2.07727
85	0.001576	0.12781	0.99845	2.44391
95	0.002567	0.16560	1.00059	3.15973

De la ec 2.141

$$C_i = 0.1 \left(\frac{4.6 - y_j}{4.6 - 0.3} \frac{0.3}{y_j} \right)^{5.75}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante y_p en m	Concentración C_p en kg/m ³
1	0.23	1.60549
2	0.69	0.28606
3	1.15	0.14828
4	1.61	0.09719
5	2.07	0.06987
6	2.53	0.05227
7	2.99	0.03949
8	3.45	0.02927
9	3.91	0.02023
10	4.37	0.01064

Como se observa, los resultados de este método para cada uno de los puntos de estudio son iguales a los que se obtienen, por ejemplo con el método de Rouse.

2.13.13 Método de Itakura y Kishi

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

Se aplicará lo indicado en los incisos 2.11.1 y 2.11.2. En la ec 2.145 se debe operar con la concentración media; la cual se obtiene de la manera siguiente.

Si C_a se expresa en volumen se obtiene

$$C_a = (\text{en volumen}) = \frac{C_a (\text{en peso})}{\gamma_s}$$

Por tanto

$$C_a = \frac{1}{2680} \quad C_a = 0.000373 \text{ m}^3/\text{m}^3$$

Para obtener la concentración media se puede utilizar la expresión

$$\bar{C} = \frac{C_a}{(d - a_b)} \int_{a_b}^d C \, dy$$

donde

$$a_b = 2 \text{ (0.000183)} \quad a_b = 0.000366$$

Al sustituir C dado por la expresión de Rouse, la ecuación anterior toma la forma

$$\bar{C} = \frac{C_a}{(d - a_b)} \int_{a_b}^d \left(\frac{d - y}{y} \frac{a}{d - a} \right)^z \, dy$$

Sustituyendo valores, tenemos

$$\bar{C} = \frac{0.000373}{(4.6 - 0.000361)} \int_{0.000366}^{4.6} \left[\frac{4.6 - y}{y} \frac{0.3}{4.6 - 0.3} \right]^{0.43286} \, dy$$

Aproximadamente $\bar{C} = 0.0001629 \text{ m}^3/\text{m}^3$

El peso específico de la muestra se obtiene de la relación

$$\gamma_m = \gamma + \frac{\bar{C} \text{ (en peso)}}{\gamma_s} (\gamma_s - \gamma)$$

o bien de

$$\gamma_m = \gamma + \bar{C} \text{ (en volumen)} (\gamma_s - \gamma)$$

sustituyendo valores

$$\gamma_m = 1000 + 0.0001629 (2680 - 1000)$$

$$\gamma_m = 1000.27367 \text{ kgf/m}^3$$

De la ec 2.146

$$\Delta_m = \frac{2680 - 1000.27367}{1000.27367} \quad \Delta_m = 1.67927$$

De la ec 2.145

$$L = \frac{(0.13095)^3}{(1.67927) (0.4) (9.81) (0.02267) (0.0001629)}$$

$$L = 92.27719 \text{ m}$$

De la ec 2.155

$$\phi_2 = \frac{7 \times 4.6}{92.27719} \quad \phi_2 = 0.34895$$

sustituyendo la ec 2.159 expresión dada por Itakura y Kishi en la ec 2.161, se tiene

$$\bar{C} = \frac{0.000373}{4.6 - 0.000366} \int_{0.000366}^{4.6} \left[\left(\frac{4.6 - y}{4.6 - 0.3} \right)^{1 + 0.34895} \left(\frac{0.3}{y} \right)^{10.43286} \right] dy$$

Aproximadamente $\bar{C} = 0.00015 \text{ kgf/m}^3$

Como las \bar{C} no son iguales se realiza otra iteración

$$\gamma_m = 1000 + 0.00015 (2680 - 1000) \quad \gamma_m = 1000.252 \text{ kgf/m}^3$$

De la ec 2.146

$$\Delta_m = \frac{2680 - 1000.52}{1000.252} \quad \Delta_m = 1.67932$$

De la ec 2.145

$$L = \frac{(0.13095)^3}{(1.67932) (0.4) (9.81) (0.02267) (0.00015)}$$

$$L = 100.21005 \text{ m}$$

De la ec 2.155

$$\phi_2 = \frac{(7) (4.6)}{100.21005} \quad \phi_2 = 0.32133$$

$$\bar{c} = \frac{0.000373}{4.6 - 0.000366} \int_{0.000366}^{4.6} \left[\left(\frac{4.6 - y}{4.6 - 0.3} \right)^{1 - 0.32133} \left(\frac{0.3}{y} \right)^{0.43286} \right] dy$$

Aproximadamente $\bar{c} = 0.0001548 \text{ kgf/m}^3$

Como es igual a la obtenida previamente en la iteración anterior, ya no se requiere de tanteos adicionales y se aceptará el último valor obtenido.

$$\gamma_m = 1000 + 0.0001548 (2680 - 1000)$$

$$\gamma_m = 1000.26006 \text{ kgf/m}^3$$

De la ec 2.146

$$\Delta_m = \frac{2680 - 1000.26006}{1000.26006}$$

$$\Delta_m = 1.6793$$

De la ec 2.145

$$L = \frac{(0.13095)^3}{(1.6793) (0.4) (9.81) (0.02267) (0.0001548)}$$

$$L = 97.10392 \text{ m}$$

De la ec 2.155

$$\phi_2 = \frac{7 (4.6)}{97.10392}$$

$$\phi_2 = 0.3316$$

De la ec 2.159

$$C_i = 0.1 \left[\left(\frac{4.6 - y_i}{4.6 - 0.3} \right)^{1 - 0.3316} \left(\frac{0.3}{y_i} \right) \right]^{2.7}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante <i>y_p</i> en m	Concentración <i>C_p</i> en kgf/m ³
1	0.23	1.62072
2	0.69	0.27603
3	1.15	0.13855
4	1.61	0.08809
5	2.07	0.06135
6	2.53	0.04432
7	2.99	0.03215
8	3.45	0.02265
9	3.91	0.01455
10	4.37	0.00659

Como se observa, el aplicar el método de Itakura y Kishi resulta laborioso por la iteraciones que se tienen que realizar pero los resultados que se tienen se acercan a los que se obtuvieron con el método de Rouse.

2.13.14 Método de Van Rijn

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 2.13.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

De la ec 2.173

$$\sigma_g = \left(\frac{0.001524}{0.000309} \right)^{0.5} \quad \sigma_g = 2.22082$$

De la ec 2.175

$$D_s = 0.000687 \left[\frac{1.68 (9.81)}{(0.0000010066)^2} \right]^{1/3} \quad D_s = 17.4065$$

De la ec 2.176

$$\tau_c = (2680 - 1000) (0.000687) \left[\frac{0.2916}{17.4065} + 0.077 \exp \left\{ - \left(\frac{30.35}{17.4065} \right)^{0.563} \right\} \right]$$

$$\tau_c = 0.04197 \text{ kgf/m}^2$$

De la ec 2.177

$$C' = 7.82 \text{ Ln} \frac{12 \times 4.6}{3 (0.001919)}$$

$$C' = 71.69612 \frac{\text{m}^{1/2}}{\text{s}}$$

La velocidad media se obtiene con el método de Cruickshank-Maza

Como se cumple que

$$\frac{1}{S} \geq 83.5 \left(\frac{d}{\Delta D_{84}} \right)^{0.35}$$

por tanto la velocidad media es

$$U = (7.58) (0.08001) \left(\frac{4.6}{0.001524} \right)^{0.634} \left(\frac{0.00038}{1.68} \right)^{0.456}$$

$$U = 1.97071 \text{ m/s}$$

De la ec 2.178

$$\tau_o' = 1000 \left(\frac{1.97071}{71.69612} \right)^2$$

$$\tau_o' = 0.75553 \text{ kgf/m}^2$$

De la ec 2.179

$$T = \frac{0.75553 - 0.04197}{0.04197} \quad T = 17.00167$$

De la ec 2.172

$$D_s = 0.000687 [1 + 0.011 (2.22082 - 1) (17.00167 - 25)]$$

$$D_s = 0.00061321 \text{ m}$$

De la ec 2.170 para $0.0001 \leq D_s \leq 0.001$ m, según Zanke

$$\omega_s = 10 \left(\frac{0.0000010066}{0.00061321} \right) \left[\left(1 + \frac{(0.01)(1.68)(9.81)(0.00061321)^2}{0.0000010066^2} \right)^{0.5} - 1 \right]$$

$$\omega_s = 0.08545 \text{ m/s}$$

Como se cumple que $0.1 < \frac{\omega_s}{U} < 0.707$, ver ec 2.165, se puede obtener β de dicha ecuación, por tanto

$$\beta = 1 + 2 \left(\frac{0.08545}{0.13095} \right)^2 \quad \beta = 1.85161$$

De la ec 2.182

$$z = \frac{0.08545}{(1.85161)(0.4)(0.13095)} \quad z = 0.88104$$

De la ec 2.180

$$C_f = \left[\left(\frac{0.3}{4.6 - 0.3} \right) \left(\frac{4.6 - y_j}{y_j} \right) \right]^{0.88104} \quad \text{si} \quad \frac{y_j}{d} < 0.5$$

$$C_f = \left(\frac{0.3}{4.6 - 0.3} \right)^{0.88104} e^{-4 \times 0.88104 \left(\frac{y_j}{d} - 0.5 \right)} \quad \text{si} \quad \frac{y_j}{d} \geq 0.5$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de Estudio <i>j</i>	Tirante <i>y_p</i> , en m	Concentración <i>C_p</i> , en kg/m ³
1	0.23	1.28187
2	0.69	0.44149
3	1.15	0.25210
4	1.61	0.16522
5	2.07	0.11429
6	2.53	0.08029
7	2.99	0.05645
8	3.45	0.03968
9	3.91	0.02790
10	4.37	0.01961

Como se observa, con este método los resultados están por abajo de los obtenidos con el método de Rouse, por lo cual no se recomienda aplicarlo como único método para la determinación de la concentración de sedimentos.

A continuación se presenta la tabla 2.1 en donde se muestra una comparación de los resultados obtenidos con cada uno de los métodos presentados. Así con los métodos de Rouse, Velikanov e Ippen se obtienen resultados idénticos, los de Hunt ($B_s=1$) y Zagustín dan resultados casi similares a los obtenidos con los tres métodos antes indicados, y los de Lane-Kalinske, Einstein y Chien, Antsyferov y van Rijn dan resultados que se encuentran entre el doble y la mitad del obtenido con el método de Rouse, lo que es aceptable dentro de los límites que se tienen en Hidráulica Fluvial. Sin embargo el método de Rouse es el más aplicado debido a la sencillez de su ecuación, aunque debe tomarse en cuenta que conduce a resultados absurdos en los puntos extremos, es decir en $y = d$ y $y = 0$.

Tabla 2.1
Concentración de sedimentos
Resultados acumulados

y m	Rouse kgf/m ³	Lane-Kalinske kgf/m ³	Einstein y Chien kgf/m ³	Hunt , Bs=0.99 kgf/m ³	Hunt , Bs=1.0 kgf/m ³	Velikanov kgf/m ³	Chang kgf/m ³
0.23	1.60542	1.15941	1.24399	2.27794	1.68368	1.60528	1.69578
0.69	0.28608	0.47828	0.48733	0.19918	0.26263	0.28610	0.18331
1.15	0.14828	0.23421	0.29776	0.10023	0.13396	0.14829	0.06103
1.61	0.09719	0.12980	0.20537	0.06647	0.08813	0.09720	0.02811
2.07	0.06987	0.07856	0.14853	0.04888	0.06419	0.06987	0.01504
2.53	0.05227	0.05065	0.10884	0.03768	0.04902	0.05227	0.00869
2.99	0.03949	0.03418	0.07871	0.02957	0.03814	0.03949	0.00522
3.45	0.02927	0.02385	0.05429	0.02308	0.02952	0.02927	0.00315
3.91	0.02024	0.01704	0.03317	0.01727	0.02190	0.02024	0.00183
4.37	0.01065	0.01240	0.01299	0.01084	0.01361	0.01065	0.00091

y m	Rouse kgf/m ³	Zagustin kgf/m ³	Toffaleti kgf/m ³	Antsyferov kgf/m ³	Ippen kgf/m ³	Itakura y Kishi kgf/m ³	van Rijn kgf/m ³
0.23	1.60542	1.62864	1.34690	1.70523	1.60549	1.62072	1.28187
0.69	0.28608	0.27105	0.38358	0.25252	0.28606	0.27603	0.44140
1.15	0.14828	0.13394	0.22627	0.12488	0.14828	0.13855	0.25210
1.61	0.09719	0.08402	0.16633	0.07978	0.09719	0.08809	0.16522
2.07	0.06987	0.05787	0.12806	0.05630	0.06987	0.06130	0.11429
2.53	0.05227	0.04151	0.10125	0.04145	0.05227	0.04432	0.08029
2.99	0.03949	0.03014	0.08424	0.03083	0.03949	0.03215	0.05645
3.45	0.02927	0.02164	0.07250	0.02246	0.02927	0.02265	0.03968
3.91	0.02024	0.01489	0.06390	0.01517	0.02023	0.01455	0.02790
4.37	0.01065	0.00899	0.05732	0.00762	0.01064	0.00659	0.01961

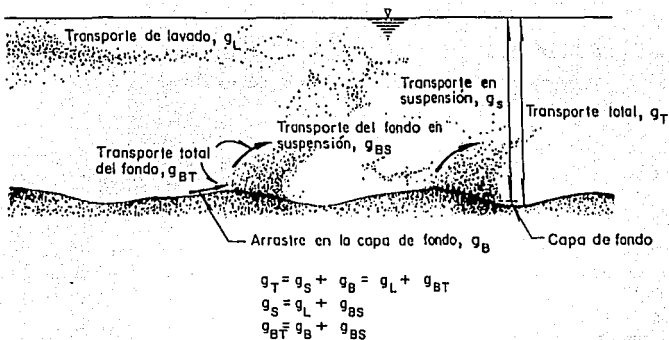


Fig 2.1 Diferentes formas de transporte de sedimentos, ref 2.

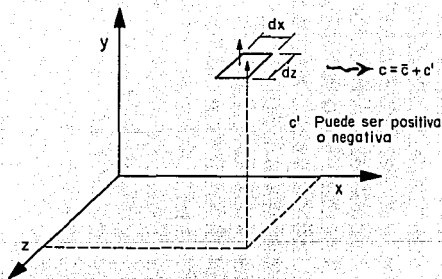


Fig 2.2 Transporte ascendente de sedimentos por difusión, ref 2.

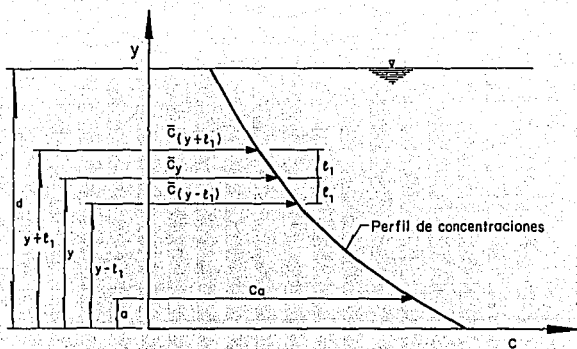


Fig 2.3 Concentración de sedimentos definida en términos de la longitud de mezcla, según Rouse.

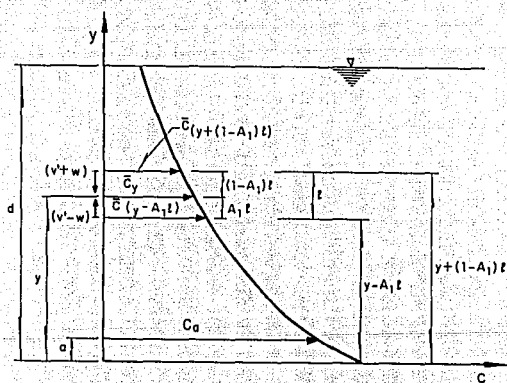


Fig 2.4 Variaciones de la concentración de sedimentos definida en términos de la longitud de mezcla, según Einstein y Chien.

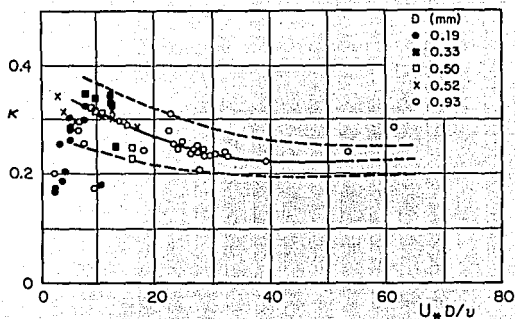


Fig 2.5 Valores de la constante de von Karman, κ en función de $\frac{U_* D}{\nu}$; según Chang, Simons y Richardson.

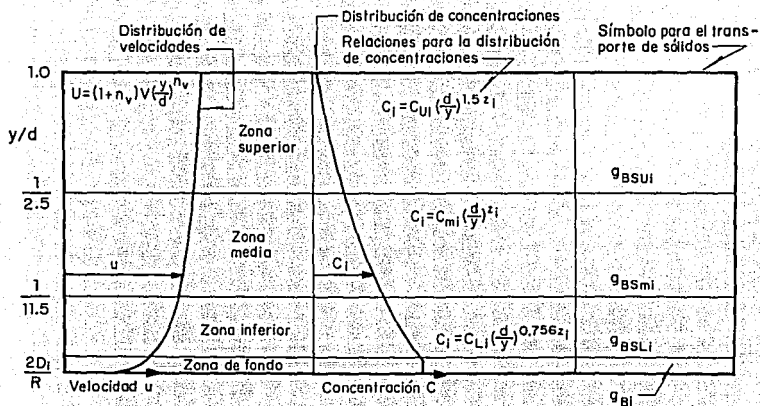


Fig 2.6 Zonas propuestas por Toffaleti y ecuaciones para las distribuciones de velocidades y concentraciones.

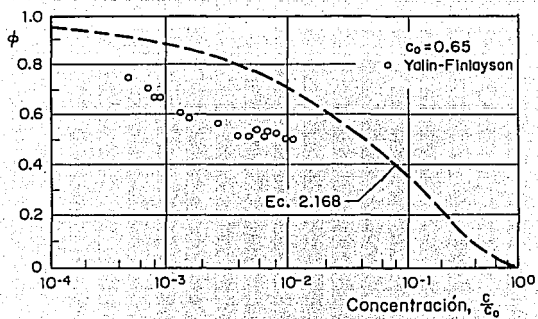


Fig 2.7 Factor ϕ , según Van Rijn.

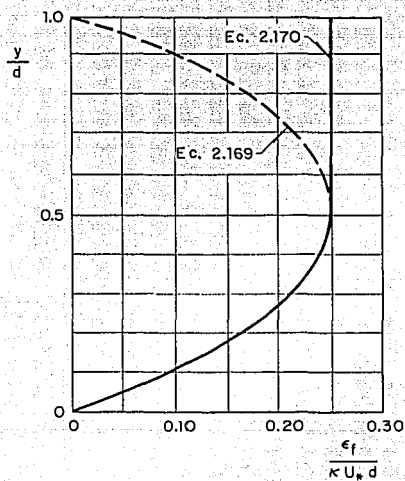


Fig 2.8 Coeficiente de difusión del fluido, según Van Rijn.

CAPITULO 3

DISTRIBUCION DE POTENCIA O EXPONENCIAL DE VELOCIDADES PARA FLUJO TURBULENTO CON PARED HIDRAULICAMENTE RUGOSA

Desde el punto de vista de la distribución en la vertical de las velocidades de la corriente a superficie libre, para un flujo turbulento se consideran tres zonas: una subcapa viscosa, una región de amortiguamiento y la zona propiamente turbulenta, cuyas diferencias más importantes se expondrán a continuación.

Se tendrá un escurrimiento de tipo turbulento hidráulicamente liso si el espesor de la subcapa viscosa es mayor que el tamaño de las protuberancias de la pared; hidráulicamente rugoso si las protuberancias de la pared son mucho mayores que el espesor teórico de la subcapa viscosa y, por último, flujo turbulento hidráulicamente de transición si el espesor de la subcapa viscosa y el tamaño de las protuberancias poseen el mismo orden de magnitud.

El inicio de la capa límite se encuentra a una gran distancia del tramo en estudio, por tanto, se acepta que existe una distancia x hipotética muy grande desde el inicio del canal. Además que, el espesor δ de la capa límite llega a ser muy grande y por tanto mucho mayor que el tirante. En consecuencia, la distribución de velocidades en la zona turbulenta se puede expresar mediante una única relación del tipo logarítmico, independientemente de la condición hidráulica de el fondo o frontera, fig 3.1.

Los límites de las condiciones de frontera para flujo turbulento, se pueden expresar de la forma siguiente

$$\text{Hidráulicamente liso} \quad \frac{U_* k_s}{\nu} \leq 5$$

$$\text{Hidráulicamente de transición} \quad 5 < \frac{U_* k_s}{\nu} \leq 70$$

$$\text{Hidráulicamente rugosa} \quad \frac{U_* k_s}{\nu} > 70$$

El significado de las nuevas variables es: U_* , velocidad al cortante o de corte, que vale $U_* = (g R S)^{1/2}$, en donde R es el radio hidráulico, S la pendiente de la pérdida de carga debida a la fricción y g la aceleración debida a la gravedad; ν , viscosidad cinemática del agua, (es función de la temperatura del líquido); k_s , tamaño de las asperezas de la pared equivalente a las experimentadas por Nikuradse.

En ríos y canales con materiales graduados $k_s = 2 D_{84}$. En canales de laboratorio con sedimento uniforme en el fondo se cumple que $k_s = D_m$; donde D_m es el diámetro medio de las partículas y D_{84} diámetro de las partículas de una muestra, en que el 84 por ciento de ellas, en peso, es menor que ese tamaño.

Ha sido demostrado que el espesor de la subcapa viscosa es aproximadamente igual a

$$\delta = \frac{5 \cdot \nu}{U_*} \quad (3.1)$$

3.1 Distribución logarítmica de velocidades

La ley de distribución de velocidades de Prandtl-von-Karman para flujo turbulento en escurrimientos a superficie libre en canales o cauces prismáticos está dada por

$$u = \frac{U_*}{\kappa} \operatorname{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (3.2)$$

donde

u velocidad media de un punto situado a una distancia y medida a partir de el fondo

κ constante von-Karman que para agua clara es igual a 0.4

y altura sobre el fondo donde se desea valuar la velocidad u

y_0 ordenada al origen de la ec 3.2, es decir la distancia sobre el fondo donde

$u = 0$.

La velocidad media del escurrimiento en un canal con tirante d , y suficientemente ancho, al considerar una franja de ancho unitario, la velocidad media se puede expresar por

$$U = \frac{1}{d} \int_{y_0}^d u \, dy \quad (3.3)$$

integrando y tomando límites, se llega a

$$U = \frac{U_*}{\kappa} \operatorname{Ln} \frac{d}{e y_0} \quad (3.4)$$

donde

U velocidad media, en m/s

e base de los logaritmos neperianos, $e = 2.718281828$

d tirante del canal, en m/s

Para obtener la distancia \bar{y} sobre el fondo, en la cual se cumple que la velocidad en ese punto sea igual a la velocidad media, esto es

$$\frac{U}{\kappa} \cdot \text{Ln} \left(\frac{d}{e y_0} \right) = \frac{U}{\kappa} \cdot \text{Ln} \left(\frac{\bar{y}}{y_0} \right) \quad (3.5)$$

simplificando queda

$$\bar{y} = \frac{d}{e} = 0.36788 d \quad (3.6)$$

Es decir, en un canal suficientemente ancho, la velocidad media del flujo es igual a la que hay a 0.37 del tirante, medido a partir del fondo, fig 3.2.

Cuando se desea medir la velocidad media en canales donde las paredes laterales influyen, se utilizará el radio hidráulico en lugar del tirante.

3.2 *Escurrencimiento turbulento con pared hidráulicamente lisa*

Este tipo de flujo se caracteriza porque el espesor de la subcapa viscosa es mayor que el tamaño de las asperezas o protuberancias del fondo, con lo que quedan dentro de dicha subcapa y no participan en el escurrencimiento turbulento.

Un flujo a superficie libre es turbulento con pared hidráulicamente lisa cuando se cumplen dos condiciones

$$R = \frac{4U R}{\nu} \geq 2000 \text{ garantiza flujo turbulento}$$

$$R_s = \frac{U_* k_s}{\nu} \geq 5 \text{ garantiza pared hidráulicamente lisa}$$

Como ya se mencionó, en este tipo de escurrimientos se distinguen tres zonas; en cada una se necesita una ecuación diferente para determinar las correspondientes distribuciones de velocidades.

Los espesores de estas tres zonas se indican a continuación

Zona o Región	Límite
) Subcapa viscosa	$0 < y \leq \frac{5 \nu}{U_}$
) Amortiguamiento	$\frac{5 \nu}{U_} < y \leq \frac{30 \nu}{U_*}$
) Turbulenta	$\frac{30 \nu}{U_} < y \leq d$

A continuación se presentarán las ecuaciones que permiten obtener la distribución de velocidades dentro de cada zona.

3.2.1 Distribución de velocidades

a) subcapa viscosa

La expresión que permite obtener la velocidad en cualquier punto dentro de la subcapa viscosa, es

$$u = \frac{U_*^2 y}{\nu} \quad (3.7)$$

Como se observa, la distribución de las velocidades es lineal, fig 3.3.

b) zona turbulenta

La expresión general para la distribución de velocidades dentro de esta zona está dada por la ecuación siguiente

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (3.8)$$

Para encontrar el valor de y_0 , que es el único parámetro desconocido, según los resultados obtenidos por Maza y García (ref 1), la distribución de velocidades se puede representar de la forma siguiente:

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \frac{y}{\kappa_s} + B \quad (3.9)$$

donde

$$B = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \frac{U_* k_s}{\nu} + A \quad (3.10)$$

En la que el parámetro A es una constante; obteniendo así la curva de la fig 3.4, en la cual se utilizaron los parámetros B contra $Ln \frac{U_* k_s}{v}$.

En la fig 3.4 se observa que si $\frac{U_* k_s}{v} < 5$, condición que se acepta para pared

hidráulicamente lisa, los puntos que se obtuvieron experimentalmente se ajustan a una recta cuya ecuación está dada por la ec 3.10. Aceptando el valor de $\kappa = 0.4$, y trazando la línea con una pendiente $\frac{1}{\kappa} = 2.5$, la ordenada al origen es 5.5, o sea, $A = 5.5$; por tanto, la ec 3.10

queda

$$B = 2.5 Ln \frac{U_* k_s}{v} + 5.5 \quad (3.11)$$

Por otra parte, se sabe que

$$A = \frac{U_* y_a}{v} - \frac{1}{\kappa} Ln \frac{U_* y_a}{v} \quad (3.12)$$

Sustituyendo el valor de $A = 5.5$ y $\kappa = 0.4$ en la ec 3.12, se obtiene que

$$\frac{U_* y_a}{v} = 11.635 \quad (3.13)$$

despejando la variable y_a se tiene

$$y_a = \frac{11.64 v}{U_*} \quad (3.14)$$

que es la distancia medida sobre el fondo a la cual se corta la curva de distribución logarítmica de velocidades de la zona turbulenta con la recta de distribución lineal de velocidades de la subcapa viscosa.

Obtenido el valor de A , se puede observar que la velocidad u no depende del tamaño k , de las asperezas, independientemente de cuál sea su valor; así finalmente se tiene la expresión con la cual se puede obtener la distribución de velocidades sustituyendo la ec 3.14 en la ec 3.8.

$$u = 2.5 U_* \ln 9.025 \frac{U_* y}{v} \quad (3.15)$$

Además, al igualar la ec 3.15 con la ec 3.8, se logra obtener el valor del parámetro y_0 .

$$y_0 = \frac{v}{9.025 U_*} \quad (3.16)$$

lo cual indica que la distribución logarítmica corta al eje y , y por tanto la velocidad es igual a cero en

$$y = \frac{v}{9.025 U_*} \quad (3.17)$$

c) Zona de amortiguamiento

La distribución de velocidades del flujo dentro de esta zona, se puede obtener mediante la expresión siguiente

$$u = 5 U_* \ln \frac{U_* y}{v} - 3.05 \quad (3.18)$$

La ec 3.18 se intersecta con la ec 3.7 en

$$\frac{U \cdot y}{v} = 5.18 \quad (3.19)$$

y con la ec 3.15 en

$$\frac{U \cdot y}{v} = 30.5 \quad (3.20)$$

Valores que son aceptables.

En Hidráulica Fluvial no se tiene en cuenta la zona de amortiguamiento y solo se consideran dos zonas: la subcapa viscosa y la zona turbulenta propiamente dicha. Como se ha mostrado en la ec 3.14, el punto donde se cortan las distribuciones de velocidades de las zonas consideradas es

$$y = \frac{11.64}{U_*}$$

por tanto la zona inferior o subcapa viscosa se considera entre los límites

$$0 \leq y \leq \frac{11.64}{U_*}$$

y la zona turbulenta entre

$$\frac{11.64v}{U_*} < y \leq d$$

3.2.2 *Velocidad media*

En la práctica, un canal es muy ancho cuando

$$B \geq 40 d \quad (3.21)$$

se debe cumplir la igualdad anterior, para considerar que el radio hidráulico sea aproximadamente igual a

$$R = d \quad (3.22)$$

A partir de la ec 3.15 se obtiene la velocidad media si se acepta el resultado dado por la ec 3.6, esto es

$$u = U, \quad \text{cuando} \quad y = \frac{d}{e}$$

Por tanto

a) Para canales muy anchos, la ecuación para obtener la velocidad media es

$$U = 2.5 U_c \cdot \text{Ln} \frac{3.32 U_c d}{\nu} \quad (3.23)$$

b) Para canales trapeziales, la ecuación para obtener la velocidad media es

$$U = 2.5 U_c \cdot \text{Ln} \frac{3.67 U_c R}{\nu} \quad (3.24)$$

Como puede observarse, la velocidad media obtenida no depende de las asperezas de la pared, si no únicamente de la viscosidad del fluido.

3.3 *Escurrencimiento turbulento con pared hidráulicamente rugosa*

Este tipo de flujo se presenta cuando el tamaño de las asperezas del fondo es mucho mayor que el espesor de la subcapa viscosa. Debido a esto, la subcapa no llega a formarse y las protuberancias quedan dentro de la zona turbulenta influyendo directamente en el flujo turbulento.

Un flujo a superficie libre es turbulento con pared hidráulicamente rugosa si se cumple

$$\frac{U_* k_s}{\nu} > 70 \quad (3.25)$$

3.3.1 Distribución de velocidades

En este flujo, únicamente se distingue una zona, toda con flujo turbulento, en la que las velocidades siguen una distribución logarítmica, la que se expresa como

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Ln} \frac{y}{k_s} + B \quad (3.26)$$

En la fig 3.4 se observa que si $\frac{U_* k_s}{\nu} > 70$, B toma un valor constante aproximadamente

igual a 8.5, el cual es independiente de $\frac{U_* k_s}{\nu}$, o sea de la viscosidad del líquido.

Sustituyendo el valor de $B = 8.5$ en la ec 3.26 y aceptando que $\kappa = 0.4$, dicha expresión toma la forma

$$\frac{u}{U_*} = 2.5 \operatorname{Ln} \frac{y}{k_s} + 8.5 \quad (3.27a)$$

o bien

$$u = 2.5 U_* \operatorname{Ln} \frac{30 y}{k_s} \quad (3.27b)$$

Se observa que, la velocidad u en cualquier punto de la vertical depende únicamente del tamaño de las asperezas de la pared y no de la viscosidad.

Al igualar la ec 3.27b con la 3.2, se obtiene el parámetro y_o para pared hidráulicamente rugosa, o sea

$$y_o = \frac{k_s}{30} \quad (3.28)$$

valor que también puede ser deducido de la fig 3.5, donde se trazaron los valores obtenidos por Nikuradse de u/U , contra y/k_s ,

3.3.2 Velocidad media

La velocidad media se alcanza al sustituir la condición $y = d/e$ en la ec 3.27b, es decir

$$u = U, \quad \text{cuando} \quad y = \frac{d}{e}$$

Así se obtiene que la velocidad media para canales muy anchos queda expresada por la ecuación siguiente

$$U = 2.5 U_* \ln \frac{11.04 d}{k_s} \quad (3.29)$$

Para canales con sección trapecial, es

$$U = 2.5 U_* \ln \frac{12.27 R}{k_s} \quad (3.30)$$

3.4 Escorrimento turbulento con pared hidráulicamente de transición

En un canal es posible que se presente este tipo de flujo cuando las asperezas de la pared son casi iguales o ligeramente mayores, y quedar así dentro del flujo turbulento. Por lo que la subcapa viscosa es alterada continuamente por la presencia de esas protuberancias; por tal motivo se considera también únicamente una distribución de velocidades.

Un flujo a superficie libre es turbulento con fondo hidráulicamente de transición si se cumple

$$5 < \frac{U_* k_s}{\nu} \leq 70$$

3.4.1 Distribución de velocidades

La ecuación siguiente permite obtener la distribución de velocidades dentro de la zona turbulenta, que será la única condición considerada

$$\frac{u}{U_*} = 2.5 \operatorname{Ln} \frac{y}{k_s} + B \quad (3.31)$$

Para obtener el parámetro B , en flujos turbulentos con pared hidráulicamente de transición, se puede utilizar la ecuación propuesta por Fuentes-Carrasquel, la cual se expresa a continuación y puede verse dibujada en la fig 3.4.

$$B = -2.5 \operatorname{Ln} \left[\frac{1}{9.025 R_*} + \frac{1}{30} e^{\left(-\frac{10.78}{R_*} \right)} \right] \quad (3.32)$$

donde

$$R_* = \frac{U_* k_s}{\nu}$$

Si en la ec 3.31 se introduce B en el logaritmo, resulta

$$u = 2.5 U_* \operatorname{Ln} \frac{e^{0.4B}}{k_s} y \quad (3.33)$$

Al igualar la ec 3.33 con la 3.2 se llega a una expresión para y_o , esto es

$$y_o = \frac{k_s}{e^{0.4B}} \quad (3.34)$$

La expresión propuesta por Fuentes-Carrasquel (ec 3.32) sirve también para paredes hidráulicamente lisa y rugosa: La mayor discrepancia se presenta en la frontera hacia flujo con pared hidráulicamente rugosa; el error detectado es de 0.9 por ciento; como se muestra en la fig. 3.4.

3.4.2 Velocidad media

Para obtener la velocidad media únicamente se requiere sustituir en la ec 3.31a $y = d/e$, así

$$\frac{U}{U_*} = 2.5 \operatorname{Ln} \frac{d}{e k_s} + B \quad (3.35)$$

O bien, si en la ec 3.35 se introduce B en el logaritmo, resulta

$$U = 2.5 U_* \operatorname{Ln} \frac{d}{k_s} e^{(0.4B-1)} \quad (3.36)$$

3.5 Propuesta para mejorar los resultados para pared de transición

Algunas ecuaciones que se han obtenido para esta condición son de carácter general y sirven también para valuar las velocidades cuando las condiciones hidráulicas de la pared son lisas y rugosas; entre ellas se pueden citar las de Einstein, Colebrook y White, y Fuentes y Carrasquel.

Siguiendo las ideas de Fuentes (ref 7), Maza obtuvo una ecuación más precisa para la velocidad media y de ella obtuvo la distribución de velocidades (ref 4). Ellas son

Para la distribución de velocidades

$$u = \frac{U_*}{\kappa} \operatorname{Ln} \frac{e^{0.4B}}{k_s} \quad \text{y} \quad (3.37)$$

Para la velocidad media

$$U = \frac{U_*}{\kappa} \operatorname{Ln} \frac{d}{k_s} e^{(0.4B-1)} \quad (3.38)$$

donde

$$B = -2.5 \operatorname{Ln} \left[\frac{1}{9.08 R_*} + \frac{1}{30} \exp \left\{ \frac{-43.8}{10 + R_*^{1.406}} \right\} \right] \quad (3.39)$$

Siendo la ec 3.39 la que propone Maza para obtener un mejor resultado en las ecuaciones 3.37 y 3.38.

De los resultados obtenidos se puede observar que los errores que se generan para pared hidráulicamente rugosa son menores cuando se utiliza la ecuación propuesta por Maza, sobre todo cuando R_* es mayor de 70. Sin embargo, para la pared hidráulicamente lisa los errores son menores cuando $R_* = 5$ y no cuando es menor de éste valor, pero aún así la diferencia que se tiene es mínima; por lo cual es factible aplicar la ec 3.39 sin que se lleguen a afectar los resultados para pared lisa.

En la fig 3.6 se muestran gráficamente las ecuaciones propuestas por Maza (ec 3.39) y Fuentes-Carrasquel (ec 3.32); en ella se observan las diferencias que se llegan a tener para diferentes R_* .

3.6 Distribución de potencia o exponencial de velocidades

La distribución de velocidades dentro de la capa límite turbulenta se puede expresar por medio de la relación

$$u = U_o \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/m} \quad (3.40)$$

donde U_o es la velocidad de fluido fuera de la capa límite o velocidad de la corriente libre y δ es el espesor de dicha capa.

Si se utiliza una expresión de la forma de la ec 3.40 para valuar la distribución de velocidades en un escurrimiento a superficie libre, se puede escribir

$$u = U_{máx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} \quad (3.41)$$

donde $U_{máx}$ es la velocidad del fluido en la superficie, lo cual se cumple cuando $y = d$. Para algunos autores m vale 7 y 8, pero utilizar estos valores conduce a errores, por lo que Maza y Val (ref 4) proponen valuarlo en forma más precisa como se indica adelante.

De la ec 3.41 se desconoce $U_{máx}$ y m . Los valores de estos términos se obtienen a partir de las ecuaciones logarítmicas para pared hidráulicamente rugosa.

Para obtener la velocidad máxima $U_{máx}$ se utiliza la ec 3.27, cumpliendo con la relación

$$u = U_{máx} \quad \text{cuando} \quad y = d \quad (3.42)$$

resulta así que

$$U_{m\acute{a}x} = \frac{U_*}{\kappa} \text{Ln} \frac{30}{k_s} \frac{d}{k_s} = 2.5 U_* \text{Ln} \frac{30}{k_s} \frac{d}{k_s} \quad (3.43)$$

Es necesario que primero se obtenga la velocidad media a partir de la ec 3.41 para conocer el valor de m . Se sabe que

$$U = \frac{1}{d} \int_0^d u \, dy \quad (3.44)$$

Sustituyendo la ec 3.41 en la ec 3.44 se tiene

$$U = \frac{1}{d} \int_0^d U_{m\acute{a}x} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} dy \quad (3.45a)$$

o bien

$$U = \frac{U_{m\acute{a}x}}{d^{\frac{m+1}{m}}} \int_0^d y^{1/m} dy \quad (3.45b)$$

Desarrollando la integral de la ec 3.45b

$$U = \frac{U_{m\acute{a}x}}{d^{\frac{m+1}{m}}} \left[\frac{y^{\frac{m+1}{m}}}{\frac{m+1}{m}} \right]_0^d \quad (3.46)$$

Al tomar límites queda

$$U = \frac{U_{m\acute{a}x}}{d^{\frac{m+1}{m}}} \frac{d^{\frac{m+1}{m}}}{\frac{m+1}{m}} \quad (3.47)$$

Simplificando la ec 3.47 se obtiene finalmente la expresión para obtener la velocidad media en flujo turbulento con pared hidráulicamente rugosa.

$$U = \frac{m}{m+1} U_{mdx} \quad (3.48)$$

Sustituyendo la ec 3.43 en la ec 3.48

$$U = \frac{m}{m+1} \frac{U_*}{\kappa} Ln \frac{30 d}{k_s} \quad (3.49)$$

Por otro lado, se sabe que la velocidad media es

$$U = 2.5 U_* Ln \frac{11,036 d}{k_s} \quad (3.50a)$$

o bien

$$U = \frac{U_*}{\kappa} Ln \frac{30 d}{e k_s} \quad (3.50b)$$

Al igualar la ec 3.49 con la ec 3.50b se obtiene

$$\frac{m}{m+1} \frac{U_*}{\kappa} Ln \frac{30 d}{k_s} = \frac{U_*}{\kappa} Ln \frac{30 d}{e k_s} \quad (3.51)$$

Desarrollando la ec 3.51

$$m Ln \frac{30 d}{k_s} = m Ln \frac{30 d}{e k_s} + Ln \frac{30 d}{e_s} \quad (3.52)$$

Agrupando convenientemente

$$m \left(L_n \frac{30 d}{k_s} - L_n \frac{30 d}{e k_s} \right) = L_n \frac{30 d}{e k_s} \quad (3.53)$$

$$m L_n \frac{30 d}{k_s} \frac{e k_s}{30 d} = L_n \frac{30 d}{e k_s} \quad (3.54)$$

Por tanto m vale

$$m = L_n \frac{30 d}{e k_s} \quad (3.55a)$$

o bien

$$m = L_n \frac{11.036 d}{k_s} = L_n \frac{d}{k_s} e^{(0.4B-1)} \quad (3.55b)$$

al sustituir la ec 3.55 en la ec 3.41 queda

$$u = U_{máx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/L_n} \left(\frac{30 d}{e k_s} \right) \quad (3.56a)$$

o bien

$$u = \frac{U_s}{\kappa} L_n \frac{30 d}{k_s} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/L_n} \left(\frac{30 d}{e k_s} \right) \quad (3.56b)$$

Al efectuar la comparación entre las ecs 3.27 y 3.56 se observó una concordancia casi perfecta en la parte superior de la curva; sin embargo, en lo que respecta a la zona cercana al fondo las diferencias que se obtienen se van acentuando (zona que aproximadamente es menor al 6% de la profundidad). Para visualizar las diferencias se dibujaron en el papel logarítmico las

ecuaciones logarítmicas y exponenciales para $d = 5$ m, $k_s = 0.0015$ m y $S = 0.005$; como se muestra en la fig 3.7. Como se observa, ambas curvas resultan casi idénticas en el intervalo $0.2 \leq y \leq 5.0$ m; mientras que en la zona $y \leq 0.20$ m las diferencias aumentan al disminuir el tirante.

Para valuar la velocidad en cualquier punto de la zona inferior se utiliza otra ecuación exponencial que debe pasar necesariamente por los dos puntos siguientes: El primero es $y = y_k = k_s$ y el segundo es $y = y_a$, ver fig 3.7. La distancia a la que se encuentra el punto y_a se seleccionó de tal forma que las diferencias entre la nueva ecuación y la ec 3.27 fueran mínimas, lo cual se realizó por medio de tanteos, ver Tabla 3.1, obligando que fueran iguales las diferencias 1 y 2, como se muestra en la fig 3.7.

Los resultados antes mencionados se obtuvieron para tirantes entre 0.1 y 10 m y k_s entre 0.0002 y 0.008 m; para cada una de estas combinaciones analizadas entre k_s y d , se obtuvo su respectivo valor de y_a . Finalmente la ecuación con que se puede expresar el valor de y_a es la siguiente.

$$y_a = d \left[\frac{0.9432}{\sqrt{d/k_s}} - \frac{1.28}{d/k_s} - 0.015 \left(-0.0135 \frac{d}{k_s} \right) \right] \quad (3.57)$$

la cual fue probada y es válida en el intervalo de $25 \leq d/k_s \leq 10\,000$. El error que se llega a cometer al obtener y_a con la ecuación anterior y con el valor de y_a obtenido por medio de iteraciones es menor que 1.2% (ref 4). Otra relación que permite llegar a obtener el valor de y_a cuando $d/k_s < 25$, y que es ligeramente mejor que la ec 3.57, se presenta a continuación. Ella sólo es válida si $10 \leq d/k_s \leq 250$.

$$y_a = d \left(\frac{1}{1.055 \left(\frac{d}{k_s} \right)^{0.5} + 1.925} - \frac{0.424}{d/k_s} + 0.0021 \right) \quad (3.58)$$

El error que se obtiene entre la y_a , mediante iteraciones y el dado por la ec 3.58 es menor o igual que 0.55 %.

Por lo que se ha indicado las ecs 3.56 son valuadas únicamente entre los límites $y_a \leq y \leq d$.

La curva que debe utilizarse entre y_a y el fondo se expresa mediante una relación semejante a la de la ec 3.41 y debe pasar por los puntos (y_a, u_a) y (y_k, u_k) .

La velocidad u_k se obtiene de sustituir $y = y_k$ en la ec 3.27

$$u_k = \frac{U_*}{k} \operatorname{Ln}(30) \quad (3.59a)$$

o bien

$$u_k = \frac{3.40}{k} U_* = 8.5 U_* \quad (3.59b)$$

La velocidad u_a se obtiene de sustituir $y = y_a$

$$u_a = U_{\text{máx}} \left(\frac{y_a}{d} \right)^{1/m} \quad (3.60)$$

Como la nueva curva es una línea recta, en papel logarítmico, entre el punto (y_k, u_k) y el punto (y_a, u_a) ; se obtiene su ecuación a partir de

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \quad (3.61)$$

sustituyendo valores

$$\ln y - \ln y_a = \frac{\ln u_a - \ln u_k}{\ln u_a - \ln u_k} (\ln u - \ln u_a) \quad (3.62)$$

Simplificando

$$\left[\frac{\ln \frac{u_a}{u_k}}{\ln \frac{y_a}{y_k}} \right] \ln \frac{y}{y_a} = \ln \frac{u}{u_a} \quad (3.63)$$

Por tanto

$$\ln \left(\frac{y}{y_a} \right)^{\left(\frac{\ln \frac{u_a}{u_k}}{\ln \frac{y_a}{y_k}} \right)} = \ln \frac{u}{u_a} \quad (3.64)$$

Despejando el valor de u de la ec 3.64, se obtiene la ecuación de distribución de velocidades que pasa por los puntos antes mencionados, la cuál es

$$u = u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/m_1} \quad (3.65)$$

donde

$$m_1 = \frac{\ln \left(\frac{y_a}{y_k} \right)}{\ln \left(\frac{u_a}{u_k} \right)} \quad (3.66)$$

La ec 3.65 es válida solamente en el intervalo $y_k \leq y \leq y_a$; donde $y_k = k_s$.

Para obtener el tirante medio y_m , se procede de la manera siguiente.

De la ec 3.45 se obtiene la velocidad media

$$U = \frac{m}{m+1} \frac{U_*}{k} L_n \frac{30d}{k_s} \quad (3.67)$$

Pero de la ec 3.56 se tiene que

$$u = \frac{U_*}{k} L_n \frac{30d}{k_s} \left(\frac{y}{d}\right)^{1/m} \quad (3.68)$$

Igualando 3.67 y 3.68

$$\frac{m}{m+1} = \left(\frac{y_m}{d}\right)^{1/m} \quad (3.69)$$

Por tanto el tirante medio es

$$y_m = d \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \quad (3.70)$$

como se sabe

$$m = L_n \frac{30d}{e k_s}$$

otra ecuación para valorar y_m se obtiene de la ec 3.70

$$y_m = d \left[\frac{\text{Ln} \frac{30d}{ek_s}}{\text{Ln} \frac{30d}{ek_s} + \text{Ln} e} \right] \text{Ln} \frac{30d}{ek_s} \quad (3.71)$$

Simplificando, queda finalmente

$$y_m = d \left[\frac{\text{Ln} \frac{30d}{ek_s}}{\text{Ln} \frac{30d}{k_s}} \right] \text{Ln} \frac{30d}{ek_s} \quad (3.72)$$

En la tabla 3.2 se observa, la diferencia que se tiene al calcular la velocidad puntual con las ecuaciones logarítmica y exponencial.

3.7 Distribución exponencial en cauces arenosos

Cuando en un cauce arenoso existe transporte de sedimentos, se forman ondulaciones en el fondo. Dependiendo de las características del flujo y de las propiedades físicas del material del fondo, las configuraciones que pueden presentarse son: fondo plano, rizos, dunas, dunas con rizos, fondo plano o desvanecimiento de las dunas, ondas estacionarias y antidunas.

Las configuraciones más usuales en ríos son los rizos y sobre todo las dunas. Dichas ondulaciones incrementan la rugosidad del fondo y en consecuencia el valor de k_s . En este parámetro debe tomarse en cuenta tanto la rugosidad debida a las partículas del fondo como a las ondulaciones. Por tanto, las ecuaciones hasta aquí presentadas se pueden aplicar y son válidas en cauces naturales si se conoce o calcula el verdadero k_s que se denominará k_{sn} y la forma más simple de hacerlo es a través de la velocidad media medida en el cauce que se desea estudiar,

U es obtenida con algún método que tome en cuenta también a las ondulaciones antes mencionadas.

Conocida la velocidad media es posible obtener la distribución de velocidades tanto mediante una ecuación logarítmica como exponencial, como se indica a continuación.

- a. Ecuación logarítmica. De las ecs 3.29 o 3.36 se despeja k , en función de la U conocida y se obtiene

$$k_m = \frac{30 d}{e \exp\left(\frac{\kappa U}{U_*}\right)} \quad (3.73)$$

este nuevo valor de k_m se sustituye en las ecs 3.27b o 3.33.

- b. Ecuación exponencial. El valor de m_n está dado por la ec 3.55. Si se compara esa ecuación con las ecs 3.29 o 3.36 se obtiene que

$$m_n = \frac{\kappa U}{U_*} \quad (3.74)$$

El subíndice n indica, en todas las variables que en el fondo hay ondulaciones.

El valor de $U_{máx}$, en función de la velocidad media, está dado por la ec 3.74, se obtiene

$$U_{máx} = \frac{(m_n + 1)}{m_n} U = U + \frac{U_*}{\kappa} \quad (3.75)$$

Por último, al sustituir las ec 3.74 y 3.75 en la ec. 3.41 se obtiene la distribución de velocidades dada por una ecuación exponencial teniendo en cuenta la velocidad media real de la corriente.

$$u = \left(U + \frac{U_*}{\kappa} \right) \left(\frac{y}{d} \right)^{\frac{U_*}{\kappa U}} \quad (3.76)$$

Los valores obtenidos con esta última ecuación son idénticos a los que se calculan con las ecs 3.27 o 3.33 al sustituir en ellas a k_{zn} . Si se desea una mayor precisión se deberá obtener y_{an} mediante la ec 3.57 sustituyendo en ella a $k_s = k_{zn}$. Por su parte, $y_{kn} = k_{zn}$. La velocidad u_{an} se obtiene con la ec 3.76 al sustituir $y = y_{an}$ y u_{kn} con la ec 3.27 o 3.33, utilizando k_{zn} .

Posteriormente para obtener la distribución de concentraciones en la zona inferior se utiliza la ec 3.36 en donde m_{1n} vale

$$m_{1n} = \frac{Ln y_{an} - Ln y_{kn}}{Ln u_{an} - Ln u_{kn}} \quad (3.77)$$

y por tanto

$$u = u_{an} \left(\frac{y}{y_{an}} \right)^{1/m_{1n}} \quad (3.78)$$

Los resultados de la ec 3.78 se ajustan mejor a la ecuación logarítmica que los obtenidos para fondo plano con la ec 3.65.

Debido a que en muchos de los cauces naturales las ondulaciones que se tienen en el fondo son considerables, es posible que se incremente la rugosidad de fondo, aumentando así el valor de k_{zn} , habiendo casos en donde el valor de y_{an} es similar al de k_{zn} y por tanto se puede solo trabajar con la ec 3.76.

En conclusión, se puede decir que la distribución de velocidades en una vertical de un canal muy ancho y plano para flujo turbulento con pared hidráulicamente rugosa, se puede calcular con dos ecuaciones exponenciales que se cruzan en la ordenada y_a . Para la zona superior, en que $y_a \leq y \leq d$, se usa la ec 3.56. Para la zona inferior, en que $k_s \leq y \leq y_a$, se utiliza la ec 3.65 completada con las ecs 3.59, 3.60 y 3.66. Estas últimas ecuaciones requieren del conocimiento de y_a , frontera entre las dos zonas, la cuál se determina con las ecs 3.57 y 3.58.

Tabla 3.1

Resultados iterados y con ecuación para obtener y_a

d m	k_s m	R.	y_{a1} m	d/ k_s	y_{a2} m	y_{a3} m
0.1	0.001	70.036	0.0078	100	0.00776	0.0078
	0.002	140.071	0.01007	50	0.01002	0.01002
	0.004	280.143	0.01245	25	0.01267	0.0124
	0.008	560.286	0.01452	12.5	0.01517	0.0145
0.3	0.0006	72.783	0.01191	500	0.01188	0.01213
	0.0008	97.044	0.01355	375	0.01356	0.01371
	0.001	121.305	0.01494	300	0.01498	0.01506
	0.004	485.222	0.02618	75	0.02592	0.02605
0.5	0.008	970.443	0.0332	37.5	0.03325	0.03301
	0.0006	93.963	0.01571	833.333	0.01557	0.01624
	0.0008	125.284	0.01794	625	0.01784	0.01838
	0.001	156.605	0.01985	500	0.0198	0.02022
1	0.002	313.209	0.02695	250	0.02701	0.02708
	0.004	626.418	0.03586	125	0.03567	0.0358
	0.008	1253	0.0466	62.5	0.04619	0.04656
	0.0004	88.589	0.01856	2500	0.01835	0.02022
1	0.0006	132.883	0.02261	1666.66	0.02234	0.02407
	0.0008	177.178	0.02595	1250	0.02565	0.02725
	0.001	221.472	0.02885	1000	0.02855	0.03002
	0.002	442.945	0.0397	500	0.0396	0.04044
1	0.004	885.889	0.0539	250	0.05402	0.05415
	0.008	1772	0.07175	125	0.07135	0.07159
	0.0004	125.284	0.02629	5000	0.02617	0.03017
	0.0006	187.926	0.0322	3333.33	0.03191	0.03577
2	0.0008	250.567	0.03715	2500	0.0367	0.04044
	0.001	313.209	0.0414	2000	0.0409	0.0445
	0.002	626.418	0.0577	1000	0.05709	0.06003
	0.004	1253	0.0794	500	0.07921	0.08089
2	0.008	2506	0.1077	250	0.10804	0.1083

donde d es el tirante del escurrimiento, k_s es el espesor de la capa de fondo, $R_s = [9.81 \cdot d^3 / (0.005 \cdot k_s)]^{1/3}$; y_{a1} es el resultado obtenido de iteraciones; y_{a2} son los resultados de la ec 3.57 y y_{a3} son los resultados obtenidos con la ec 3.58

Continuación Tabla 3.1

d m	k _s m	R.	y _{a1} m	d/k _s	y _{a2} m	y _{a3} m
3	0.0002	76.72	0.02246	15000	0.02285	0.02909
	0.0004	153.441	0.03211	7500	0.03216	0.03829
	0.0006	230.161	0.03944	5000	0.03925	0.04525
	0.0008	306.881	0.0457	3750	0.04518	0.05105
	0.001	383.601	0.0509	3000	0.05038	0.05612
	0.002	767.203	0.0714	1500	0.0705	0.07557
	0.004	1534.5	0.099	750	0.0982	0.10195
	0.008	3069	0.1355	375	0.1356	0.13711
5	0.0002	99.045	0.02863	25000	0.02957	0.0405
	0.0004	198.091	0.04114	12500	0.04167	0.05204
	0.0006	297.136	0.05072	8333.33	0.05089	0.06115
	0.0008	396.182	0.0588	6250	0.05863	0.06876
	0.001	495.227	0.06587	5000	0.06541	0.07541
	0.002	990.454	0.0928	2500	0.09176	0.1011
	0.004	1981	0.1298	1250	0.12827	0.13627
	0.008	3962	0.17937	625	0.17838	0.18379
7	0.0002	117.192	0.03352	35000	0.03504	0.04974
	0.0004	234.384	0.04833	17500	0.0494	0.064
	0.0006	351.576	0.05972	11666.7	0.06036	0.07485
	0.0008	468.769	0.06925	8750	0.06956	0.08394
	0.001	585.961	0.0777	7000	0.07763	0.09189
	0.002	1172	0.1101	3500	0.10904	0.12265
	0.004	2344	0.1545	1750	0.15271	0.16498
	0.008	4688	0.215	875	0.21296	0.22258
10	0.0002	140.071	0.03962	50000	0.04193	0.06296
	0.0004	280.143	0.05726	25000	0.05914	0.08009
	0.0006	420.214	0.07087	16666.7	0.07229	0.09314
	0.0008	560.286	0.0823	12500	0.08334	0.10408
	0.001	700.357	0.09235	10000	0.09304	0.11366
	0.002	1401	0.1315	5000	0.13083	0.15083
	0.004	2801	0.1855	2500	0.18352	0.2022
	0.008	5603	0.2595	1250	0.25654	0.27654

donde d es el tirante del escurrimiento, k_s es el espesor de la capa de fondo, $R_s = [9.81 \cdot d^3 / (0.005 \cdot k_s)]^{1/3}$; y_{a1} es el resultado obtenido de iteraciones; y_{a2} son los resultados de la ec 3.57 y y_{a3} son los resultados obtenidos con la ec 3.58

Distribución de velocidades

Tabla 3.2a
Zona Superior

Tirante y m	Ec. log. u (ec 3.27) m/s	Ec. exp. u (ec 3.56) m/s	Error e %
4.60000	3.66957	3.66957	0.00000
4.14000	3.63507	3.63189	0.08759
3.68000	3.59652	3.59023	0.17476
3.22000	3.55280	3.54358	0.25962
2.76000	3.50234	3.49047	0.33871
2.30000	3.44265	3.42869	0.40543
1.84000	3.36960	3.35456	0.44620
1.38000	3.27542	3.26135	0.42938
0.92000	3.14268	3.13436	0.26458
0.46000	2.91576	2.92862	0.44102
0.09200	2.38887	2.50148	4.71400
0.08509	2.36330	2.48241	5.04028

Tabla 3.2b
Zona Inferior

Tirante y m	Ec. log. u (ec 3.27) m/s	Ec. exp. u (ec 3.65) m/s	Error e %
0.08509	2.36330	2.48242	5.0405
0.08280	2.35438	2.46826	4.8369
0.07360	2.31582	2.40795	3.9784
0.06440	2.27210	2.34136	3.0483
0.05520	2.22164	2.26678	2.0320
0.04600	2.16195	2.18163	0.9102
0.03680	2.08890	2.08175	0.3422
0.02760	1.99472	1.95971	1.7553
0.01840	1.86198	1.79974	3.3426
0.00920	1.63506	1.55593	4.8393
0.00378	1.34401	1.29094	3.9487
0.00189	1.11709	1.11606	0.0925

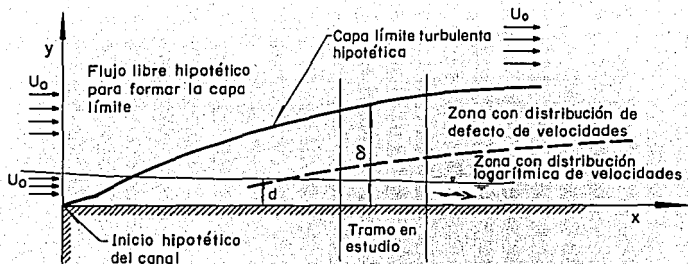


Fig 3.1 Comparación entre la capa límite y el flujo a superficie libre, ref 2.

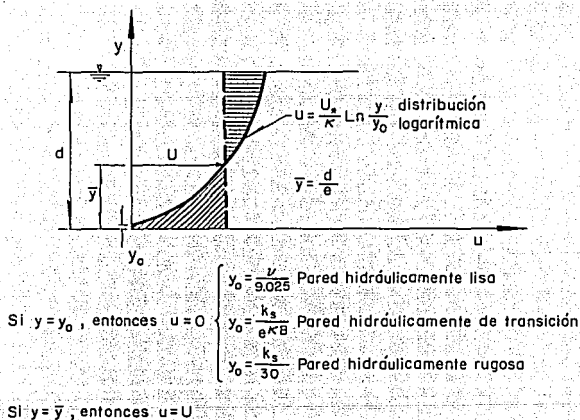


Fig 3.2 Velocidad media en flujo turbulento, para cualquier condición de pared, en un canal rectangular muy ancho, ref 2.

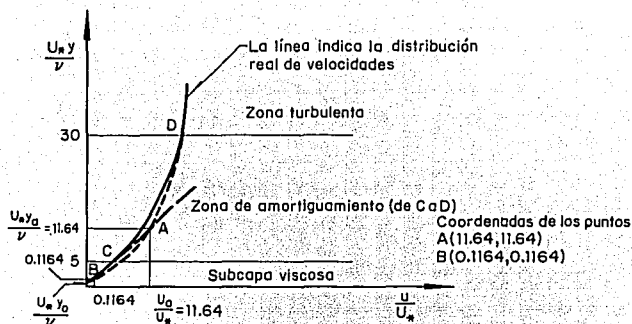


Fig 3.3 Intersección de las distribuciones teóricas lineal y logarítmica de velocidades, en flujo turbulento con pared hidráulicamente lisa, ref 2.

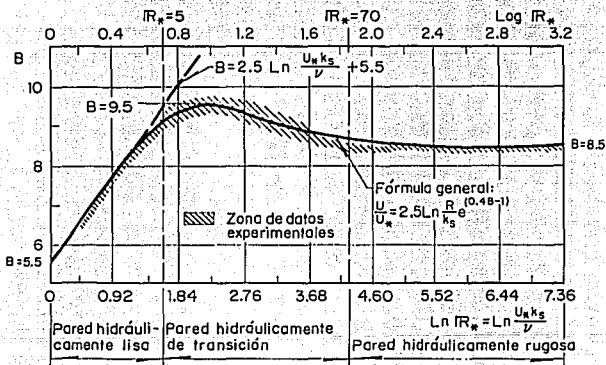


Fig 3.4 Coeficiente B en función de IR_* . Ecuación de Fuentes - Carrasquel, ref 7

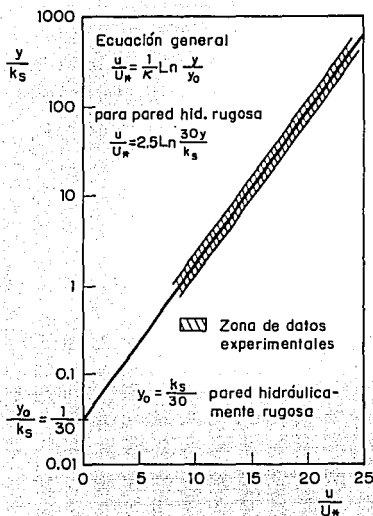


Fig 3.5. Obtención experimental de y_0 para paredes hidráulicamente rugosas, ref 2.

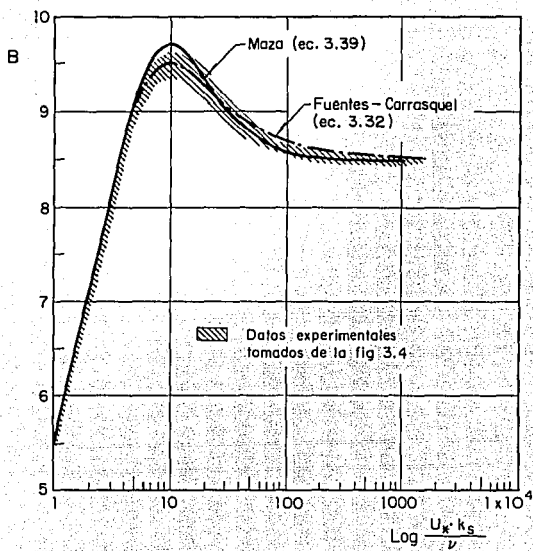


Fig 3.6 Comparación entre el coeficiente B por Maza y por Fuentes - Carrasquel

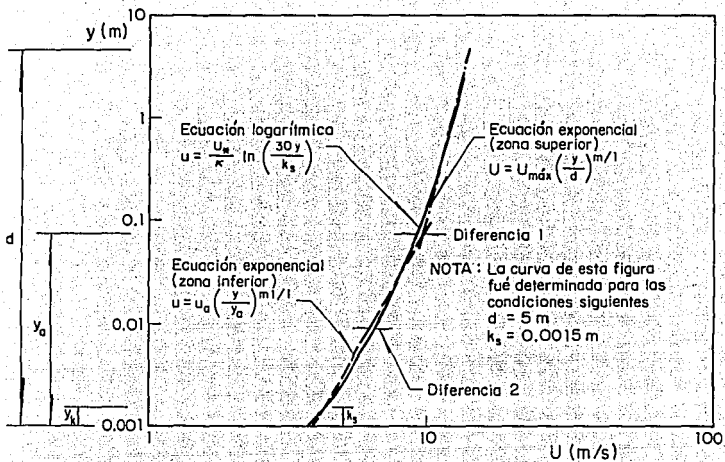


Fig 3.7 Distribución de velocidades con ecuaciones logarítmicas y exponenciales, ref. 4.

CAPITULO 4

DISTRIBUCION EXPONENCIAL DE CONCENTRACION DE SEDIMENTOS

Para valuar el transporte de sedimento en suspensión se requiere conocer, a lo largo de una vertical, tanto la distribución de las concentraciones como la distribución de velocidades, ya que

$$g_s \int_{k_1}^d u C dy \quad (4.1)$$

donde $g_s \int_{k_1}^d$ es el transporte de sedimento en suspensión entre k_1 y d ; C la concentración en cada punto; u la velocidad media en cada punto; k_1 y d distancias medidas sobre el fondo entre las que se desea valuar g_s , siendo d el tirante. Si se desea obtener el transporte de sedimentos en toda la vertical, k_1 es el espesor de la capa de fondo, según van Rijn.

Cuando se utiliza la ecuación universal de distribución de velocidades de Prandtl-von Karman, que es logarítmica y las ecuaciones de concentración de sedimentos de los diferentes autores antes mencionados, se dificulta la integración de las expresiones que permiten valuar el transporte de sedimento en suspensión.

Para facilitar la integración antes mencionada se pensó en utilizar ecuaciones de potencia o exponenciales para obtener la distribución de velocidades y la de concentración de sedimentos; habiéndose ya presentado las ecuaciones exponenciales para valuar la distribución de velocidades en el capítulo anterior.

En este capítulo se presentarán las ecuaciones de tipo exponencial para valuar la concentración de sedimento a lo largo de una vertical, para lo que fue necesario dividir dicha vertical en tres partes (zona inferior, intermedia y superior). En el capítulo quinto se muestran las ecuaciones para obtener el transporte de sedimentos en suspensión para cada una de las zonas, utilizando las ecuaciones exponenciales de velocidad y concentración de sedimentos expuestas en este trabajo.

4.1 Ecuación exponencial de concentración de sedimentos

En este subcapítulo se presentan las ecuaciones exponenciales, propuestas en este trabajo para obtener la distribución de concentraciones a lo largo de una vertical, en función de una concentración conocida C_0 obtenida de una muestra tomada a una distancia a , sobre el fondo.

Del análisis de los métodos para valuar la concentración de sedimentos en suspensión se observó que la mayoría de las distribuciones no difieren sustancialmente entre sí, excepción hecha de las de Lane-Kaliske, Toffaleti y en ocasiones la de Zagustin. Así mismo, se obtuvo que las de Rouse, Valikanov e Ippen dan resultados casi idénticos entre sí.

En este trabajo se pretendió obtener una distribución de concentraciones con una ecuación de potencia (fórmula exponencial) que al combinarse con otra del mismo tipo para la distribución de velocidades permitiera la integración inmediata y explícita de la ec 4.1. La distribución de concentraciones dada por Rouse se aceptó como modelo para obtener la ecuación de potencia.

Al intentar lo anterior se concluyó que no era posible ajustar la distribución de Rouse a una sola ecuación de potencia. Lo mismo ocurrió al tratar de ajustarla a dos ecuaciones. El mejor ajuste se logró utilizando tres ecuaciones de potencia y después de varios tanteos se encontraron los mínimos errores posibles y por tanto, la mejor concordancia se obtuvo al considerar tres zonas cuyos límites son

Zona	Espesor
Inferior	$k_s \leq y \leq 0.2d$
Intermedia	$0.2d \leq y \leq 0.6d$
Superior	$0.6d \leq y \leq d$

En donde y es la distancia, medida desde el fondo, donde se desea valorar C , d es el tirante del escurrimiento y k_s es el tamaño de las asperezas de la pared equivalente a las experimentadas por Nikuradse; en ríos y canales con material graduado y fondo plano $k_s = 2 D_{84}$ y en canales de laboratorio con sedimento uniforme en el fondo $k_s = D_m$. Cuando hay ondulaciones en el fondo k_s debe valorarse como se indica en las ecs 3.76 y 3.78 y se considera como el espesor de la capa de fondo.

Las ecuaciones de potencia que fueron obtenidas tiene la forma

$$C = C_a \left(\frac{a}{y} \right)^{\alpha} \quad (4.2)$$

donde

- C_a concentración teórica que se tendría a una distancia a sobre el fondo.
- a distancia sobre el fondo donde se conoce la concentración C_a .
- y distancia medida desde el fondo, donde se desea valorar la concentración C .
- α factor que depende de la zona en la que se está valuando la distribución de concentraciones, se tiene que

Zona inferior	$\alpha = 1.0677$
Zona intermedia	$\alpha = 1.6$
Zona superior	$\alpha = 4.327$

- 2 exponente propuesto por Rouse en su distribución de concentraciones, la cual se valúa con la ecuación

$$z = \frac{\omega}{\kappa U_s} \quad (4.3)$$

Para obtener el valor de z con la ec 4.3, la constante de von-Karman se considera igual a 0.4 y la velocidad de caída de las partículas ω se obtiene con la fórmula de Rubey, la cual establece que

$$\omega = F_1 (g\Delta D)^{0.5} \quad (4.4)$$

en que

$$F_1 = \left(\frac{2}{3} + \frac{36v^2}{g\Delta D^3} \right)^{0.5} - \left(\frac{36v^2}{g\Delta D^3} \right)^{0.5} \quad (4.5)$$

v viscosidad cinemática del agua y se obtiene en función de la temperatura

Δ densidad relativa de las partículas sumergidas

$$\Delta = \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \quad (4.6)$$

γ_s peso específico de las partículas

γ peso específico del agua

Al dividir a y y entre d ; en la ec 4.2, se obtiene

$$C = C_a \left(\frac{A}{E} \right)^{az} \quad (4.7)$$

tal que

$$A = \frac{a}{d} \quad E = \frac{y}{d} \quad (4.8)$$

Al representar en ejes coordenados las concentraciones contra los tirantes, la curva que se define no pudo ser descrita con una sola ecuación, como ya se ha mencionado por lo que finalmente se propusieron tres curvas que definieran la distribución a lo largo de todo el tirante.

Se observó que, en las fronteras propuestas, las curvas definían con bastante precisión la forma de la distribución de concentraciones de Rouse, por lo que se aceptaron dichos límites para establecer las tres zonas de estudio en que se dividió el tirante.

Como dichas curvas siguen una función exponencial, se trató de conseguir, mediante un proceso iterativo, que los valores de α propuestos dieran como resultado el mínimo error posible; los valores antes presentados son los que mejor cumplieron dicha condición.

4.1.1 Distribución de las concentraciones de sedimentos

Para tomar en cuenta todos los diámetros del material del fondo, es conveniente dividir la muestra, o su curva granulométrica en fracciones y trabajar con el diámetro medio D_i de cada una.

Las ecuaciones generales para valuar la distribución de concentraciones en cada una de las zonas, para cada fracción de la curva granulométrica con el diámetro medio D_i , son las que a continuación se indican:

a) Para la zona inferior comprendida entre $k_s \leq y \leq 0.2d$, se tiene

$$C_i = C_{abi} \left(\frac{a_b}{y} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.9)$$

donde C_{abi} es la concentración conocida obtenida de una muestra tomada a una distancia a_b

medida sobre el fondo, tal que $k_i \leq a_b \leq 0.2d$, como se muestra en la fig 4.2; C_{ab_i} es la concentración conocida de partículas con diámetro D_i . Se obtiene de C_{ab} conocida y p_i , siendo p_i la fracción del peso de partículas con diámetro con respecto al peso total de la muestra; z_i se calcula con la ec 4.3 en donde la velocidad de caída ω_i es función del D_i de cada fracción en que se divide la curva granulométrica.

b) En la zona intermedia comprendida entre $0.2d \leq y \leq 0.6d$, se cumple

$$C_i = C_{ac_i} \left(\frac{a_c}{y} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.10)$$

donde C_{ac_i} es la concentración conocida obtenida de una muestra tomada a una distancia a_c medida sobre el fondo que cumple con la condición $0.2d \leq a_c \leq 0.6d$, como se muestra en la fig 4.3. De ella se obtienen las diferentes C_{ac_i} .

c) En la zona superior comprendida entre $0.6d \leq y \leq d$, se tiene

$$C_i = C_{au_i} \left(\frac{a_u}{y} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.11)$$

donde C_{au_i} es la concentración conocida obtenida de una muestra tomada a una distancia a_u medida sobre el fondo, tal que $0.6d \leq a_u \leq d$, como se muestra en la fig 4.4. De ella se obtienen las diferentes C_{au_i} .

A continuación se presentan las ecuaciones para valuar la concentración de sedimentos en cada zona, en función de una concentración C_a obtenida a una distancia a y medida sobre el fondo.

Se mostrarán las tres ecuaciones de distribución de concentración, una para cada zona, cuando la muestra es tomada en una de las tres zonas indicadas, ver fig 4.1. Por tanto se mostrarán tres conjuntos de tres ecuaciones, según sea la distancia a donde C_a es conocida.

Se debe tener en cuenta que la concentración medida C_a deberá subdividirse en varias C_{ai} , cuando la curva granulométrica de la muestra C_a es conocida. Para cada C_{ai} habrá asociado un diámetro medio representativo D_i . Si al obtener C_a no se dispusiera de una muestra grande de material, se obtendría un diámetro representativo, y entonces no se trabajaría con cada C_{ai} , si no únicamente con un solo valor de C_a y sedimento representativo D_r .

Para valuar la concentración C en algún punto fuera de la zona en la cual se localiza la concentración conocida C_a es necesario primero obtener la concentración en la frontera entre las dos zonas vecinas; así las dos fronteras que se tiene son la frontera inferior-intermedia y la frontera intermedia-superior.

En la frontera inferior-intermedia se obtiene la concentración de frontera llamada C_{bc} localizada a una distancia de $0.2d$ y en la frontera intermedia-superior se encuentra la concentración de frontera denominada C_{ca} que se encuentra a una distancia de $0.6d$; como se muestra en la fig 4.5. Por ejemplo, si la concentración conocida C_a se encuentra en la zona inferior y se requiere conocer la concentración C en cualquier punto de la zona superior; primero se obtiene la concentración C_{bc} en la frontera inferior-intermedia, después se valúa la concentración C_{ca} en la frontera intermedia-superior y por último se obtiene la concentración C a cualquier distancia y medida desde el fondo dentro de la zona superior.

A continuación se presenta el desarrollo para obtener la concentración C en cualquiera de las tres zonas en que se divide el tirante d del flujo, teniendo en cuenta la zona en la que la concentración C_a y por ende la distancia a son conocidas.

4.1.2 Ecuaciones de distribución de concentraciones cuando C_a es conocida y obtenida a una distancia a_b sobre el fondo, tal que $k_s \leq a_b \leq 0.2d$

- 1) Distribución en la zona inferior a una distancia medida desde el fondo y_b que se encuentra en la zona inferior (como se muestra en la fig 4.6). La distribución de concentraciones se expresa como

$$C_{b_i} = C_{ab_i} \left(\frac{a_b}{y_b} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.12)$$

y es válida en el rango $k_s \leq y_b \leq 0.2d$

- 2) Distribución en la zona intermedia. Esto se cumple cuando la distancia y_c donde se desea valuar la concentración y medida desde el fondo se encuentra dentro de los límites $0.2d \leq y_c \leq 0.6d$ (como se muestra en la fig 4.6). Para obtener la distribución de concentraciones se procede como sigue

- a) se obtiene la concentración en la frontera inferior-intermedia (ver fig 4.6), al sustituir en la ec 4.12, $C_{b_i} = C_{bc_i}$, $y_b = 0.2d$

$$C_{bc_i} = C_{ab_i} \left(\frac{a_b}{0.2d} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.13)$$

- b) obtenida C_{bc_i} , se procede a obtener la concentración C_{c_i} en la zona intermedia, a la distancia y_c medida desde el fondo, con la ayuda de la ec 4.10.

$$C_{c_i} = C_{bc_i} \left(\frac{a_c}{y_c} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.14)$$

Como la ec 4.14 es la ecuación general para obtener la concentración en cualquier punto de la zona intermedia, se sustituyen los valores para la frontera inferior-intermedia en dicha ecuación, ya que $a_c = 0.2d$ se tiene que

$$C_{c_i} = C_{bc_i} \left(\frac{0.2d}{y_c} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.15)$$

sustituyendo la ec 4.13 en la 4.15

$$C_{c_i} = C_{ab_i} \left(\frac{a_b}{0.2d} \right)^{1.0677 z_i} \left(\frac{0.2d}{y_c} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.16)$$

Con la ec 4.16 se puede obtener la concentración C_c en cualquier punto de la zona intermedia; desarrollando la ec 4.16

$$C_{c_i} = C_{ab_i} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y_c^{1.6}} (0.2 d)^{0.5323} \right]^{z_i} \quad (4.17)$$

Finalmente se llega a

$$C_{c_i} = C_{ab_i} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y_c^{1.6}} 0.4246 d^{0.5323} \right]^{z_i} \quad (4.18)$$

la ec 4.18 es válida en el rango $0.2 d \leq y_c \leq 0.6 d$

- 3) Distribución en la zona superior. Esto se cumple cuando la distancia y_u donde se desea valuar la concentración y medida desde el fondo se encuentra dentro de los límites $0.6d \leq y_u \leq d$ (como se muestra en la fig 4.6). Para obtener la distribución de concentraciones se procede de la manera siguiente

- a) se obtiene la concentración en la frontera intermedia-superior (ver fig 4.6) al sustituir en la ec 4.16 $C_c = C_{cu}$, $y_c = 0.6d$

$$C_{cu} = C_{ab} \left(\frac{a_b}{0.2d} \right)^{1.0677 z_i} \left(\frac{0.2d}{0.6d} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.19)$$

- b) obtenida C_{cu} , se procede a obtener la concentración C_u en la zona superior, a la distancia y_u medida desde el fondo, con la ayuda de la ec 4.11

$$C_u = C_{cu} \left(\frac{a_u}{y_u} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.20)$$

con la ec 4.20 se obtiene la concentración en cualquier punto de la zona superior, sustituyendo los valores para la frontera intermedia-superior en la ec 4.20, donde $a_u = 0.6d$ se tiene que

$$C_{u_i} = C_{cu} \left(\frac{0.6d}{y_u} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.21)$$

sustituyendo la ec 4.19 en la ec 4.21

$$C_{u_i} = C_{ab} \left(\frac{a_b}{0.2d} \right)^{1.0677 z_i} \left(\frac{0.2d}{0.6d} \right)^{1.6 z_i} \left(\frac{0.6d}{y_u} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.22)$$

Con la ec 4.22 se puede obtener la concentración C_u en cualquier punto de la zona superior; desarrollando la ec 4.22

$$C_{u_i} = C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{(0.2d)^{1.0677}} \frac{1}{5.7995} \frac{(0.6d)^{4.327}}{y_u^{4.327}} \right]^{z_i} \quad (4.23)$$

finalmente se llega a

$$C_{u_i} = C_{ab_i} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y_u^{4.327}} 0.1054 d^{3.2593} \right]^{z_i} \quad (4.24)$$

la ec 4.24 es válida en el rango $0.6 d \leq y_u \leq d$

4.1.3. Ecuaciones de distribución de concentraciones cuando C_a es conocida y obtenida a una distancia sobre el fondo igual a_c , tal que $0.2 d \leq a_c \leq 0.6 d$

- 1) A una distancia medida desde el fondo y_c que se encuentra en la zona intermedia (como se muestra en la fig 4.7) la distribución de concentraciones se expresa como

$$C_{c_i} = C_{ac_i} \left(\frac{a_c}{y_c} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.25)$$

y es válida en el rango $0.2 d \leq y_c \leq 0.6 d$

- 2) Si la distancia y_b donde se desea valuar la concentración y medida desde el fondo se encuentra dentro de los límites $k_s \leq y_b \leq 0.2d$ (como se muestra en la fig 4.7). Para obtener la distribución de concentraciones se procede de la manera siguiente
 - a) Se obtiene la concentración en la frontera inferior-intermedia (ver fig 4.7) al sustituir en la ec 4.25 $C_{c_i} = C_{bc_i}$, $y_c = 0.2d$

$$C_{bc_i} = C_{ac_i} \left(\frac{a_c}{0.2 d} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.26)$$

- b) obtenida C_{bc_i} , se procede a obtener la concentración C_b , en la zona inferior, a la distancia y_b medida desde el fondo, con la ayuda de la ec 4.9

$$C_{b_i} = C_{bc_i} \left(\frac{a_b}{y_b} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.27)$$

la ec 4.27 sirve para obtener la concentración en cualquier punto de la zona inferior; sustituyendo en ella los valores para la frontera inferior-intermedia se tiene

$$C_{b_i} = C_{bc_i} \left(\frac{0.2 d}{y_b} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.28)$$

si ahora se sustituye la ec 4.26 en la 4.28

$$C_{b_i} = C_{ac_i} \left(\frac{a_c}{0.2 d} \right)^{1.6 z_i} \left(\frac{0.2 d}{y_b} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.29)$$

Con la ec 4.29 se puede obtener la concentración C_b en cualquier punto de la zona inferior; desarrollando la ec 4.29 se obtiene que

$$C_{b_i} = C_{ac_i} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y_b^{1.0677}} \frac{1}{(0.2 d)^{0.5323}} \right]^{z_i} \quad (4.30)$$

finalmente se llega a

$$C_{b_i} = C_{ac_i} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y_b^{1.0677}} \frac{1}{0.4246 d^{0.5323}} \right]^{z_i} \quad (4.31a)$$

o bien

$$C_{b_i} = C_{ac_i} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y_b^{1.0677}} 2.3552d^{-0.5323} \right]^{z_i} \quad (4.31b)$$

Las ecs 4.31 a y b son válidas en el rango $k_s \leq y_b \leq 0.2d$

3) Si la distancia y_u donde se desea valuar la concentración y medida desde el fondo se encuentra dentro de los límites $0.6d \leq y_u \leq d$ (como se muestra en la fig 4.7). Para obtener la distribución de concentraciones se procede de la siguiente forma

a) Se obtiene la concentración en la frontera intermedia-superior (ver fig 4.7) al sustituir en la ec 4.25 $C_{c_i} = C_{cu_i} y_c = 0.6d$

$$C_{cu_i} = C_{ac_i} \left(\frac{a_c}{0.6d} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.32)$$

b) Obtenida C_{cu_i} , se procede a obtener la concentración C_{u_i} en la zona superior, a la distancia y_u medida desde el fondo, con ayuda de la ec 4.11

$$C_{u_i} = C_{cu_i} \left(\frac{a_u}{y_u} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.33)$$

Con la ec 4.33 se obtiene la concentración en cualquier punto de la zona superior, al sustituir en ella los valores para la frontera intermedia-superior

$$C_{u_i} = C_{cu_i} \left(\frac{0.6d}{y_u} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.34)$$

sustituyendo la ec 4.32 en la 4.34

$$C_{u_i} = C_{ac_i} \left(\frac{a_c}{0.6 d} \right)^{1.6 z_i} \left(\frac{0.6 d}{y_u} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.35)$$

con la ec 4.35 se obtiene la concentración C_u en cualquier punto de la zona superior; desarrollando la ec 4.35

$$C_{u_i} = C_{ac_i} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y_u^{4.327}} (0.6 d)^{2.727} \right]^{z_i} \quad (4.36)$$

finalmente se llega a

$$C_{u_i} = C_{ac_i} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y_u^{4.327}} 0.2483 d^{2.727} \right]^{z_i} \quad (4.37)$$

La ec 4.37 es válida en el rango $0.6 d \leq y_u \leq d$

4.1.4 Ecuaciones de distribución de concentraciones cuando C_u conocida y obtenida a una distancia a_u sobre el fondo, tal que $0.6 d \leq a_u \leq d$

- 1) A una distancia medida desde el fondo y_u que se encuentra en la zona superior (como se muestra en la fig 4.8) la distribución de concentraciones se expresa mediante la ecuación

$$C_{u_i} = C_{au_i} \left(\frac{a_u}{y_u} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.38)$$

la cual es válida en el rango $0.6d \leq y_u \leq d$.

2) Si la distancia y_c donde se desea valuar la concentración y medida desde el fondo se encuentra dentro de los límites $0.2d \leq y_c \leq 0.6d$ (como se muestra en la fig 4.8). Para obtener la distribución de concentraciones se procede de la manera siguiente

a) Se obtiene la concentración en la frontera intermedia-superior (ver fig 4.8) al sustituir en la ec 4.38 $C_{u_i} = C_{cu_i}$, $y_u = 0.6d$

$$C_{cu_i} = C_{au_i} \left(\frac{a_u}{0.6d} \right)^{4.327 z_i} \quad (4.39)$$

b) Obtenida C_{cu_i} se procede a obtener la concentración C_{c_i} en la zona intermedia, a la distancia y_c medida desde el fondo, con la ayuda de la ec 4.10

$$C_{c_i} = C_{cu_i} \left(\frac{a_c}{y_c} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.40)$$

la ec 4.40 sirve para obtener la concentración en cualquier punto de la zona intermedia, al sustituir en ella los valores para la frontera intermedia-superior

$$C_{c_i} = C_{cu_i} \left(\frac{0.6d}{y_c} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.41)$$

sustituyendo la ec 4.39 en la 4.41, se llega a

$$C_{c_i} = C_{au_i} \left(\frac{a_u}{0.6d} \right)^{4.327 z_i} \left(\frac{0.6d}{y_c} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.42)$$

Con la ec 4.42 se puede obtener la concentración C_c en cualquier punto de la zona intermedia; desarrollando la ec 4.42

$$C_{c_i} = C_{au_i} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y_c^{1.6}} \frac{1}{(0.6 d)^{2.727}} \right]^{z_i} \quad (4.43)$$

Finalmente se llega a

$$C_{c_i} = C_{au_i} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y_c^{1.6}} \frac{1}{0.2483 d^{2.727}} \right]^{z_i} \quad (4.44a)$$

o bien

$$C_{c_i} = C_{au_i} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y_c^{1.6}} 4.0274 d^{-2.727} \right]^{z_i} \quad (4.44b)$$

las ecs 4.44 a y b son válidas en el rango $0.2 d \leq y_c \leq 0.6 d$

3) Si la distancia y_b donde se desea valuar la concentración y medida desde el fondo se encuentra dentro de los límites $k_s \leq y_b \leq 0.2d$ (como se muestra en la fig 4.8). Para obtener la distribución de concentraciones se procede de la manera siguiente.

a) se obtiene la concentración en la frontera inferior-intermedia (ver fig 4.8) al sustituir en la ec 4.42 $C_{c_i} = C_{bc_i}$ $y_c = 0.2d$

$$C_{bc_i} = C_{au_i} \left(\frac{a_u}{0.6 d} \right)^{4.327 z_i} \left(\frac{0.6 d}{0.2 d} \right)^{1.6 z_i} \quad (4.45)$$

b) obtenida C_{bc_i} se procede a obtener la concentración C_{b_i} en la zona inferior, a la distancia y_b medida desde el fondo, con la ayuda de la ec 4.9

$$C_{b_i} = C_{bc_i} \left(\frac{a_b}{y_b} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.46)$$

Con la ec 4.46 se obtiene la concentración en cualquier punto de la zona, al sustituir en ella los valores para la frontera inferior-intermedia

$$C_{b_i} = C_{bc_i} \left(\frac{0.2 d}{y_b} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.47)$$

sustituyendo la ec 4.45 en la ec 4.47

$$C_{b_i} = C_{au_i} \left(\frac{a_u}{0.6 d} \right)^{4.6 z_i} \left(\frac{0.6 d}{0.2 d} \right)^{1.6 z_i} \left(\frac{0.2 d}{y_b} \right)^{1.0677 z_i} \quad (4.48)$$

Con la ec 4.48 se puede obtener la concentración C_{b_i} en cualquier punto de la zona inferior; desarrollando la ec 4.48

$$C_{b_i} = C_{au_i} \left[\frac{a_u^{4.327}}{(0.6 d)^{4.327}} 5.7995 \frac{(0.2 d)^{1.0677}}{y_b^{1.0677}} \right] z_i \quad (4.49)$$

finalmente se llega a

$$C_{b_i} = C_{au_i} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y_b^{1.0677}} \frac{9.4851}{d^{3.2593}} \right] z_i \quad (4.50a)$$

o bien

$$C_{b_i} = C_{a_i} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y_b^{1.0677}} 9.4851 d^{-3.2593} \right]^{R_i} \quad (4.50b)$$

Las ecs 4.50 a y b son válidas en el rango $k_s \leq y_b \leq 0.2 d$.

Se han mostrado las ecuaciones para obtener la distribución de concentraciones en una vertical bajo tres condiciones diferentes. Todas ellas están en función de la concentración medida C_a o C_{a_i} y de la distancia a donde se toma la muestra, medida sobre el fondo. En cada uno de ellos, la concentración total se obtiene con la relación

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

donde n es el número de fracciones consideradas.

4.2 Resumen

Para facilitar la explicación se ha denominado a la variable y como y_b, y_c, y_a teniendo en cuenta la zona en que se deberá valorar la concentración. De aquí en adelante dicha variable se indicará como tal (y) indicando claramente los límites en que se aplica cada ecuación.

A continuación se presentan las ecuaciones principales correspondientes a cada una de las zonas para obtener la concentración de sedimentos; de acuerdo con la profundidad correspondiente a la concentración

1) Zona inferior

Si la concentración C_{ab} se conoce a una distancia a_b sobre el fondo tal que $k_s \leq a_b \leq 0.2d$, se tiene

Para $k_s \leq y \leq 0.2 d$

$$C_b = C_{ab} \left(\frac{a_b}{y} \right)^{1.0677} \quad (4.12)$$

Para $0.2d \leq y \leq 0.6d$

$$C_c = C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y^{1.6}} 0.4246 d^{0.5323} \right] \quad (4.18)$$

Para $0.6d \leq y \leq d$

$$C_u = C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y^{4.327}} 0.1054 d^{3.2593} \right] \quad (4.24)$$

II) Zona intermedia

Si la concentración C_{ac} se conoce a una distancia a_c sobre el fondo tal que $0.2d \leq a_c \leq 0.6d$, se tiene

Para $k_s \leq y \leq 0.2 d$

$$C_b = C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{1.0677}} 2.3552d^{-0.5323} \right] \quad (4.31b)$$

Para $0.2d \leq y \leq 0.6 d$

$$C_c = C_{ac} \left(\frac{a_c}{y} \right)^{1.6 z} \quad (4.25)$$

Para $0.6d \leq y \leq d$

$$C_u = C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{4.327}} 0.2483 d^{2.727} \right]^z \quad (4.37)$$

II) Zona superior

Si la concentración C_{au} se conoce a una distancia a_u sobre el fondo tal que $0.6d \leq a_u \leq d$, se tiene

Para $k_s \leq y \leq 0.2 d$

$$C_b = C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.0677}} 9.4851 d^{-3.2593} \right]^z \quad (4.50b)$$

Para $0.2d \leq y \leq 0.6 d$

$$C_c = C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.6}} 4.0274 d^{-2.727} \right]^z \quad (4.44b)$$

Para $0.6d \leq y \leq d$

$$C_u = C_{au} \left(\frac{a_u}{y} \right)^{4.327 z} \quad (4.38)$$

4.3 Ejemplo numérico

Los datos del problema son los mismos del ejemplo del capítulo 2.

4.3.1 Granulometría y puntos de interés en estudio

- a) La curva granulométrica se dividirá en 10 partes iguales, por tanto se obtendrá el D_i correspondiente a cada rango, se obtiene

Fracción	i	p_i	D_i (m)	C_{ai} (kgf/m ³)
0 - 10	5	0.1	0.000183	0.1
10 - 20	15	0.1	0.000299	0.1
20 - 30	25	0.1	0.000400	0.1
30 - 40	35	0.1	0.000504	0.1
40 - 50	45	0.1	0.000621	0.1
50 - 60	55	0.1	0.000759	0.1
60 - 70	65	0.1	0.000935	0.1
70 - 80	75	0.1	0.001179	0.1
80 - 90	85	0.1	0.001576	0.1
90 - 100	95	0.1	0.002567	0.1

- b) Para obtener la distribución de la concentración de sedimentos en todo el tirante se dividirá en 10 partes iguales

Sección <i>j</i>	Rango de Tirante	Punto en Estudio <i>y_j</i> , en m
1	0 - 0.46	0.23
2	0.46 - 0.92	0.69
3	0.92 - 1.38	1.15
4	1.38 - 1.84	1.61
5	1.84 - 2.30	2.07
6	2.30 - 2.76	2.53
7	2.76 - 3.22	2.99
8	3.22 - 3.68	3.45
9	3.68 - 4.14	3.91
10	4.14 - 4.60	4.37

Para obtener la concentración de sedimentos en cada uno de los puntos en estudio (y_j) es necesario realizarlo para los 10 diámetros de interés (D_i) antes mencionados, obtenidos de la curva granulométrica.

4.3.2 Parámetros requeridos en la mayoría de las ecuaciones

De la ec 2.30 $\Delta = \frac{2680 - 1000}{1000} \quad \Delta = 1.68$

De la ec 2.40 $U_* = \sqrt{(9.81) (4.6) (0.00038)} \quad U_* = 0.13095 \text{ m/s}$

La constante universal de von - Karman $\kappa = 0.4$

De la ec 2.29

$$F_{1i} = \left(\frac{2}{3} + \frac{(36) (0.0000010066)^2}{(9.81) (1.68) (D_i)^3} \right)^{0.5} - \left(\frac{(36) (0.0000010066)^2}{(9.81) (1.68) (D_i)^3} \right)^{0.5}$$

De la ec 2.28

$$\omega_i = F_{1i} [(9.81) (1.68) (D_i)]^{0.5} = F_{1i} (16.48 D_i)^{0.5}$$

De la ec 2.27

$$z_i = \frac{\omega_i}{(0.4) (0.13095)} = 19.091 \omega_i$$

Por ejemplo, para un $D_s = 0.000183$ m se tiene que

De la ec 2.29

$$F_{1s} = \left(\frac{2}{3} + \frac{(36) (0.0000010066)^2}{(9.81) (1.68) (0.000183)^3} \right)^{0.5} - \left(\frac{(36) (0.0000010066)^2}{(9.81) (1.68) (0.000183)^3} \right)^{0.5}$$

$$F_{1s} = 0.41286$$

De la ec 2.28

$$\omega_s = 0.41286 [(9.81) (1.68) (0.000183)]^{0.5}$$

$$\omega_s = 0.02267 \text{ m/s}$$

De la ec 2.27

$$z_5 = \frac{0.02267}{(0.4) (0.13095)}$$

$$z_5 = 0.43286$$

Se procede de igual manera para los demás diámetros, con lo que se obtienen los resultados mostrados en la tabla siguiente

i	D_i (m)	F_{ii} ec 2.29	ω_i (m/s) ec 2.28	z_i ec 2.27
5	0.000183	0.41286	0.02267	0.43286
15	0.000299	0.57797	0.04057	0.77458
25	0.000400	0.65144	0.05289	1.00979
35	0.000504	0.69553	0.06339	1.21020
45	0.000621	0.72600	0.07345	1.40219
55	0.000759	0.74844	0.08371	1.59810
65	0.000935	0.76612	0.09516	1.81562
75	0.001179	0.78057	0.10881	2.07728
85	0.001576	0.79306	0.12781	2.44012
95	0.002567	0.80514	0.16560	3.16160

4.3.3 Distribución de concentraciones

Con los datos del problema planteado en el inciso 2.13.1 y con los parámetros requeridos obtenidos en el inciso 4.3.2, se calculará la concentración de sedimentos en los puntos de estudio.

Como se dijo anteriormente la profundidad del flujo se divide en 3 zonas, tal como se muestra en la fig 4.1. Recordando el espesor de cada zona y sus límites conforme al tirante del problema.

Zona	Espesor	Fronteras
Inferior	$k_s \leq y \leq 0.2 d$	$0.2 d = 0.2(4.6) = 0.92 m$
Intermedia	$0.2 d \leq y \leq 0.6 d$	$0.6 d = 0.6(4.6) = 2.76 m$
Superior	$0.6 d \leq y \leq d$	$d = 4.6$

Por otra parte, como la muestra se obtuvo en $y = 0.30 m$, ésta se localiza entre k_s y $0.2d$; es decir en la zona inferior. Por tanto se utilizarán las fórmulas del inciso 4.1.2. En ellas $a_0 = 0.3 m$ y $C_{ab} = 1 kgf/m^3$ y todas las $C_{ab_i} = 0.1 kgf/m^3$ a que la concentración C_{ab} se divide de fracciones iguales.

Para obtener la concentración de sedimento a lo largo del tirante se usarán las ecuaciones 4.12, 4.18 y 4.24 respectivamente, dependiendo de la distancia y_j medida desde el fondo

Zona inferior

$$k_s \leq y_j \leq 0.92 m \quad C_i = 0.1 \left[\frac{0.3}{y_j} \right]^{1.0677 z_i}$$

Zona intermedia

$$0.92 \text{ m} \leq y_j \leq 2.76 \text{ m} \quad C_i = 0.1 \left[\frac{0.3^{1.0677}}{y_j^{1.6}} 0.4246 (4.6)^{0.5323} \right]^{z_i}$$

Zona superior

$$2.76 \text{ m} \leq y_j \leq 4.6 \text{ m} \quad C_i = 0.1 \left[\frac{0.3^{1.0677}}{y_j^{4.327}} 0.1054(4.6)^{3.2593} \right]^{z_i}$$

$$C_j = \sum_i C_i$$

Se presentan a continuación las tablas para algunos puntos seleccionados para ejemplificar la obtención de la concentración en cada una de las fracciones de la curva granulométrica y después se mostrará la tabla de concentración para cada uno de los puntos seleccionados a lo largo del tirante.

Para $y = 0.69 \text{ m}$

De la ec 4.12

$$C_i = 0.1 \left[\frac{0.3}{0.69} \right]^{1.0677 z_i}$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA EL PUNTO 0.69 m

i	z_i , ec 2.27	C_i (kgf/m ³), ec 4.12
5	0.43286	0.06805
15	0.77458	0.05022
25	1.00979	0.04074
35	1.21020	0.03409
45	1.40219	0.02874
55	1.59810	0.02414
65	1.81562	0.01990
75	2.07728	0.01577
85	2.44012	0.01142
95	3.16160	0.00601

$$C_{0.69} = \sum_i C_i \quad C_{0.69} = 0.29906 \text{ kgf/m}^3$$

Para $y = 1.61$ m

De la ec 4.18

$$C_i = 0.1 \left[\frac{0.3^{1.0677}}{1.61^{1.6}} 0.4246 (4.6)^{0.5323} \right]^{z_i}$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA EL PUNTO 1.61 m

i	z_i , ec 2.27	C_i (kgf/m ³), ec 4.18
5	0.43286	0.04044
15	0.77458	0.01978
25	1.00979	0.01210
35	1.21020	0.00795
45	1.40219	0.00532
55	1.59810	0.00353
65	1.81562	0.00224
75	2.07728	0.00130
85	2.44012	0.00061
95	3.16160	0.00013

$$C_{1.61} = \sum_i C_i \quad C_{1.61} = 0.09340 \text{ kgf/m}^3$$

Para $y = 3.45$ m

De la ec 4.24

$$C_i = 0.1 \left[\frac{0.3^{1.0677}}{3.45^{4.327}} 0.1054(4.6)^{3.2593} \right]^{F_i}$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA EL PUNTO 3.45 m

i	z_i , ec 2.27	C_i (kgf/m ³), ec 4.24
5	0.43286	0.01833
15	0.77458	0.00480
25	1.00979	0.00191
35	1.21020	0.00087
45	1.40219	0.00041
55	1.59810	0.00019
65	1.81562	0.00008
75	2.07728	0.00003
85	2.44012	0.000007
95	3.16160	0.0000004

$$C_{3.45} = \sum_i C_i \quad C_{3.45} = 0.02663 \text{ kgf/m}^3$$

TABLA DE CONCENTRACION DE SEDIMENTO PARA DIFERENTES ALTURAS

Punto de estudio j	Tirante y_j , m	Concentración C_j , kgf/m ³
1	0.23	1.61066
2	0.69	0.29906
3	1.15	0.14975
4	1.61	0.09340
5	2.07	0.06821
6	2.53	0.05406
7	2.99	0.03901
8	3.45	0.02663
9	3.91	0.01953
10	4.37	0.01503

Los resultados de la distribución de concentraciones con la ecuaciones de potencia se compararán en la tabla 4.1 con los de Rouse. Aquí se observa, que los resultados obtenidos con las ecuaciones de potencia no difieren mucho de los que se tienen con el método de Rouse, por lo cual se recomienda utilizar las ecuaciones exponenciales propuestas para cada zona, ya que son confiables y fáciles de resolver como se puede comprobar con el ejemplo numérico.

Tabla 4.1

Comparación de resultados

Distribución de concentración de sedimentos

Tirante y (m)	Rouse C (ec 2.26) (kgf/m ³)	Ec. exponencial C (ec 4.12, 4.18, 4.24) (kgf/m ³)	Error e (%)
0.23	1.60542	1.61066	0.32624
0.69	0.28608	0.29906	4.53926
1.15	0.14828	0.14975	0.99098
1.61	0.09719	0.09340	3.89746
2.07	0.06987	0.06821	2.37436
2.53	0.05227	0.05406	3.42626
2.99	0.03949	0.03901	1.21684
3.45	0.02927	0.02663	9.03455
3.91	0.02024	0.01953	3.51748
4.37	0.01065	0.01503	41.18056

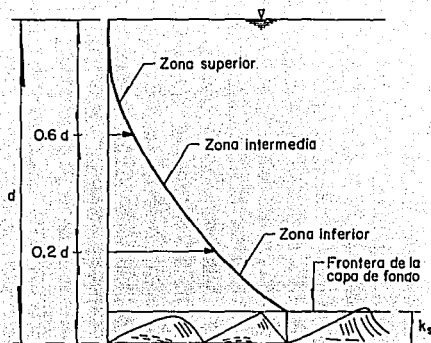


Fig 4.1 Perfil de concentración de sedimentos, donde se representan las tres zonas en que se divide la distribución de concentración de sedimentos.

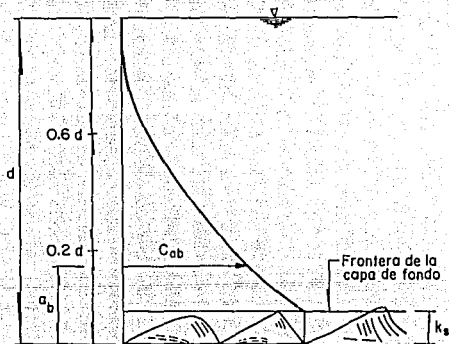


Fig 4.2 Representación de la zona inferior, donde se encuentra la concentración C_{ab} .

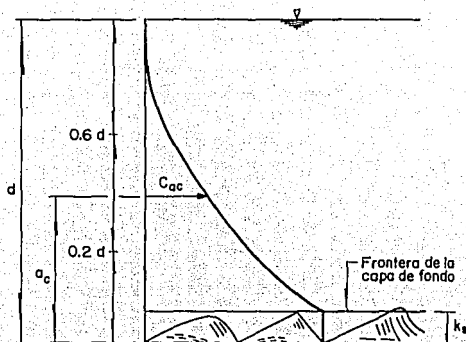


Fig 4.3 Representación de la zona intermedia, donde se encuentra la concentración C_{ac} .

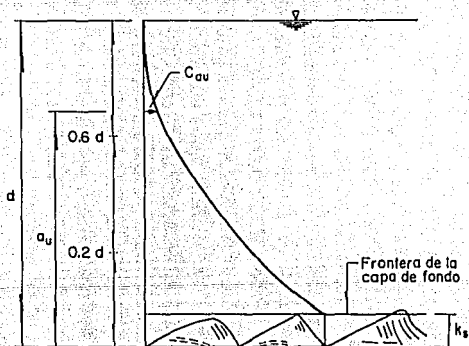


Fig 4.4 Representación de la zona superior, donde se encuentra la concentración C_{au} .

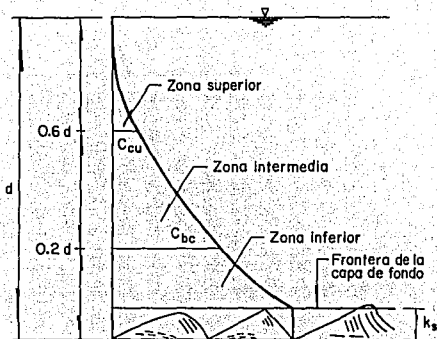


Fig 4.5 Localización de las concentraciones de frontera C_{cu} , C_{bc} .

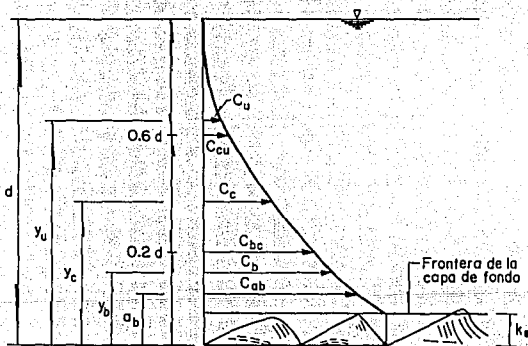


Fig 4.6 Localización de las concentraciones C_b , C_c y C_u , a partir de la concentración conocida C_{ab} en la zona inferior.

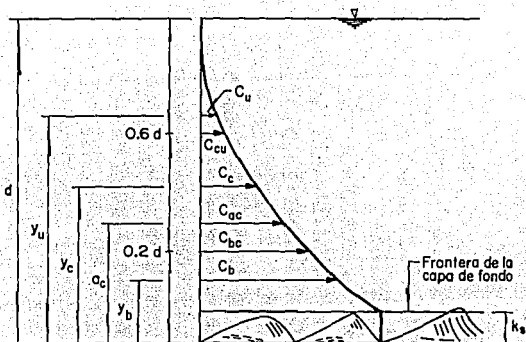


Fig 4.7 Localización de las concentraciones C_b , C_c y C_u a partir de la concentración conocida C_{ac} en la zona intermedia.

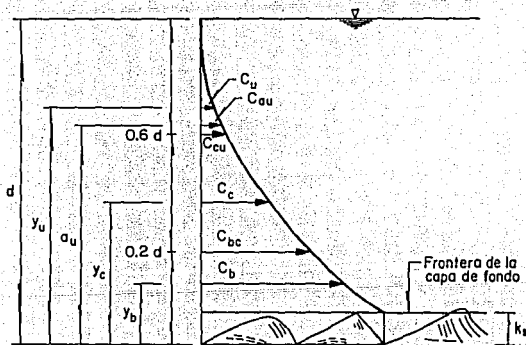


Fig 4.8 Localización de las concentraciones C_b , C_c y C_u a partir de la concentración conocida C_{au} en la zona superior.

CAPITULO 5

TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN SUSPENSION

El transporte de sedimentos en suspensión por unidad de ancho en un flujo bidimensional a superficie libre está dado por la relación

$$g_s \int_y^d = \int_y^d u C dy \quad (5.1)$$

donde

- g_s transporte de sedimento en suspensión entre y y d
- u velocidad del flujo al nivel y
- C concentración del material del fondo en suspensión, dado en peso por unidad de volumen, kg/m^3
- y distancia medida desde el fondo
- d tirante o profundidad

Como indican los límites de la integral, el transporte de sedimentos en suspensión se obtiene entre la superficie libre del agua y la distancia y . Por tanto, cuando se desea obtener todo el transporte en suspensión en toda la sección se debe calcular desde la capa de fondo a la superficie, y por ello se selecciona $y = a_b$, siendo a_b el espesor de la capa de fondo. Como se ha indicado en el cap 4, el espesor de la capa de fondo en un cauce natural es igual a k_s , y por consiguiente $a_b = k_s$.

Así, en este subcapítulo se explicará la forma de relacionar las ecuaciones de potencia propuestas tanto para la distribución de velocidades como para la concentración de sedimentos, y con ellas obtener el transporte de sedimento en suspensión, g_s .

Para valuar el transporte de sedimentos en suspensión es necesario conocer la distribución de la concentración de sedimento C , ya sea por medio de las ecuaciones de potencia propuestas en este capítulo o por medio de cualquiera de los métodos presentados en el capítulo dos.

Por lo que se ha mencionado en los capítulos anteriores, la profundidad del flujo tiene que dividirse en cuatro zonas tal como se muestra en la fig 5.1. El espesor de cada zona se muestra a continuación

Zona	Espesor
Inferior I	$k_s \leq y \leq y_a$
Inferior II	$y_a \leq y \leq 0.2d$
Intermedia	$0.2d \leq y \leq 0.6d$
Superior	$0.6d \leq y \leq d$

En que y , es el punto medido desde el fondo donde se desea conocer la concentración de sedimento o la velocidad del flujo; d es el tirante del escurrimiento; k_s es la rugosidad según Nikuradse y que en canales arenosos se toma igual al espesor de la capa de fondo y y_a es la ordenada en donde se cruzan las ecuaciones exponenciales que representan la distribución de velocidades, para flujo turbulento con pared hidráulicamente rugosa.

Por lo anteriormente explicado, los límites para obtener el transporte de sedimentos en suspensión van desde k_s hasta la superficie libre del agua d , con lo cual la ec 5.1 queda

$$g_s \Big|_{k_s}^d = \int_{k_s}^d u C \, dy \quad (5.2)$$

A continuación se presentan los tres grupos de ecuaciones necesarias para cada una de las zonas a partir de la cual se desea valorar el transporte de sedimentos en suspensión.

5.1 Zona inferior

Si la concentración conocida se encuentra en el punto a a una distancia sobre el fondo tal que $k_s \leq a \leq 0.2d$, como se muestra en la fig 5.2; se procede como se indica.

La distribución de velocidades se obtiene por medio de las dos ecuaciones de potencia presentadas en el capítulo tercero, las cuales están dadas por las expresiones siguientes.

De la ec 3.65 que es válida en el intervalo $k_s \leq y \leq y_a$

$$u_k = u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/m} \quad (5.3)$$

De la ec 3.56 que es válida en el intervalo $y_a \leq y \leq d$

$$u_u = U_{máx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} \quad (5.4)$$

donde

- u_k velocidad en cualquier punto situado dentro del intervalo $k_s \leq y \leq y_a$
- u_u velocidad en cualquier punto situado dentro del intervalo $y_a \leq y \leq d$
- u_a velocidad en el punto y_a ; está dada por la ec 3.60
- $U_{máx}$ velocidad del fluido en la superficie cuando $y = d$; está dada por la ec 3.43
- y_a ordenada donde se cruzan las ecuaciones exponenciales 5.3 y 5.4; se obtiene por medio de la ec 3.57 ó 3.58
- m exponente; está dado por la ec 3.55

m exponente; está dado por la ec 3.66

y distancia medida desde el fondo donde se desea valuar la velocidad puntual media

Por otra parte la distribución de concentraciones de sedimentos, según las ecuaciones de potencia o exponenciales presentadas en el capítulo cuarto se obtiene mediante las expresiones siguientes.

De la ec 4.12 para la zona inferior en que $k_s \leq y \leq 0.2 d$

$$C_b = C_{ab} \left(\frac{a_b}{y} \right)^{1.0677 z} \quad (5.5)$$

De la ec 4.18 para la zona intermedia en que $0.2 d \leq y \leq 0.6 d$

$$C_c = C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y^{1.6}} - 0.4246 d^{0.5323} \right]^z \quad (5.6)$$

De la ec 4.24 para la zona superior en que $0.6 d \leq y \leq d$

$$C_u = C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y^{4.327}} - 0.1054 d^{3.2593} \right]^z \quad (5.7)$$

donde

C_b concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $k_s \leq y \leq 0.2d$

C_c concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $0.2d \leq y \leq 0.6d$

- C_u concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $0.6d \leq y \leq d$
- C_{ab} concentración de sedimentos conocida, es obtenida de una muestra tomada a distancia a_b sobre el fondo, tal que $k_s \leq a_b \leq 0.2d$
- d tirante del flujo
- z exponente de Rouse; se calcula con la ec 4.3
- y distancia medida desde el fondo donde se desea valuar la concentración C , siendo $C = C_b, C_r,$ o C_u según la zona donde C desea ser valuada

Las ecuaciones de distribución de velocidades y de concentración de sedimento se sustituyen en la ecuación del transporte de sedimento en suspensión, ec 5.2, obteniendo una ecuación para cada una de las zonas; así se tiene que

- 1) En la zona inferior I se sustituyen las ecs 5.3 y 5.5 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Sbl} \frac{y_a^z}{k_s} = \int_{k_s}^{y_a} u_k C_b dy \quad (5.8a)$$

o bien

$$g_{Sbl} \frac{y_a^z}{k_s} = \int_{k_s}^{y_a} u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/mI} C_{ab} \left(\frac{a_b}{y} \right)^{1.06772} dy \quad (5.8b)$$

II) En la zona inferior II se sustituyen las ecs 5.4 y 5.5 en la 5.2, con lo que se obtiene

$$g_{SbII} \int_{y_a}^{0.2d} = \int_{y_a}^{0.2d} u_u C_b dy \quad (5.9a)$$

o bien

$$g_{SbII} \int_{y_a}^{0.2d} = \int_{y_a}^{0.2d} U_{max} \left(\frac{y}{d}\right)^{1/m} C_{ab} \left(\frac{a_b}{y}\right)^{1.0677} dy \quad (5.9b)$$

III) En la zona intermedia se sustituyen las ecs 5.4 y 5.6 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Sc} \int_{0.2d}^{0.6d} = \int_{0.2d}^{0.6d} u_u C_c dy \quad (5.10a)$$

o bien

$$g_{Sc} \int_{0.2d}^{0.6d} = \int_{0.2d}^{0.6d} U_{max} \left(\frac{y}{d}\right)^{1/m} C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y^{1.6}} 0.4246 d^{0.5323} \right] dy \quad (5.10b)$$

IV) En la zona superior se sustituyen las ecs 5.4 y 5.7 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Su} \int_{0.6d}^d = \int_{0.6d}^d u_u C_u dy \quad (5.11a)$$

o bien

$$g_{Su} \int_{0.6d}^d = \int_{0.6d}^d U_{max} \left(\frac{y}{d}\right)^{1/m} C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y^{4.327}} 0.1054 d^{3.2593} \right] dy \quad (5.11b)$$

Para obtener el transporte de sedimento en suspensión se suman las ecs 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11 que corresponden a cada una de las zonas, con lo cual los límites de la integral van a partir del punto k , hasta la superficie libre del agua d ; la ec 5.2 queda

$$g_s = g_{sbl} + g_{sbl} + g_{sc} + g_{su} \quad (5.12)$$

sustituyendo valores, se tiene que

$$\begin{aligned} g_s = & \int_{k_i}^{y_a} u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/m} C_{ab} \left(\frac{a_b}{y} \right)^{1.0677 z} dy \\ & + \int_{y_a}^{0.2d} U_{m\acute{a}x} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{ab} \left(\frac{a_b}{y} \right)^{1.0677 z} dy \\ & + \int_{0.2d}^{0.6d} U_{m\acute{a}x} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y^{1.6}} 0.4246 d^{0.5323} \right]^z dy \\ & + \int_{0.6d}^d U_{m\acute{a}x} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{ab} \left[\frac{a_b^{1.0677}}{y^{4.327}} 0.1054 d^{1.2593} \right]^z dy \end{aligned} \quad (5.13)$$

Si todos los términos conocidos se agrupan en un solo parámetro se pueden escribir las relaciones siguientes

$$W_1 = C_{ab} a_b^{1.0677z} \frac{u_a}{y_a^{1/m}} \quad (5.14a)$$

$$W_2 = C_{ab} a_b^{1.0677z} \frac{U_{m\acute{a}x}}{d^{1/m}} \quad (5.14b)$$

$$W_3 = C_{ab} \left[a_b^{1.0677} 0.4246 d^{0.5323} \right] z \frac{U_{m dx}}{d^{1/m}} \quad (5.14c)$$

$$W_4 = C_{ab} \left[a_b^{1.0677} 0.1054 d^{3.2593} \right] z \frac{U_{m dx}}{d^{1/m}} \quad (5.14d)$$

y la ec 5.13 queda

$$g_S = W_1 \int_{k_1}^{y_a} y^{1/m-1.0677z} dy + W_2 \int_{y_a}^{0.2d} y^{1/m-1.0677z} dy \\ + W_3 \int_{0.2d}^{0.6d} y^{1/m-1.6z} dy + W_4 \int_{0.6d}^d y^{1/m-4.327z} dy \quad (5.15)$$

al integrar se llega

$$g_S = W_1 \left[\frac{y^{1/m-1.0677z+1}}{1/m-1.0677z+1} \right]_{k_1}^{y_a} + W_2 \left[\frac{y^{1/m-1.0677z+1}}{1/m-1.0677z+1} \right]_{y_a}^{0.2d} \\ + W_3 \left[\frac{y^{1/m-1.6z+1}}{1/m-1.6z+1} \right]_{0.2d}^{0.6d} + W_4 \left[\frac{y^{1/m-4.327z+1}}{1/m-4.327z+1} \right]_{0.6d}^d \quad (5.16)$$

efectuando un cambio de variables, se tiene que

$$P_1 = 1/m-1.0677z+1 \quad (5.17a)$$

$$P_2 = 1/m-1.0677z+1 \quad (5.17b)$$

$$P_3 = 1/m-1.6z+1 \quad (5.17c)$$

$$P_4 = 1/m-4.327z+1 \quad (5.17d)$$

agrupando las ecs 5.14 y 5.17

$$W'_1 = W_1/P_1 \quad (5.18a)$$

$$W'_2 = W_2/P_2 \quad (5.18b)$$

$$W'_3 = W_3/P_3 \quad (5.18c)$$

$$W'_4 = W_4/P_4 \quad (5.18d)$$

Sustituyendo las ecs 5.17 y 5.18 en 5.16

$$g_S = W'_1 [y^{P_1}]_{k_s}^{y_a} + W'_2 [y^{P_2}]_{y_a}^{0.2d} + W'_3 [y^{P_3}]_{0.2d}^{0.6d} + W'_4 [y^{P_4}]_{0.6d}^d \quad (5.19)$$

tomando límites se obtiene

$$g_S = W'_1 [y_a^{P_1} - k_s^{P_1}] + W'_2 [(0.2d)^{P_2} - y_a^{P_2}] + W'_3 [(0.6d)^{P_3} - (0.2d)^{P_3}] + W'_4 [d^{P_4} - (0.6d)^{P_4}] \quad (5.20)$$

Válida si $k_s \leq a \leq 0.2d$

La ec 5.20 permite obtener el transporte de sedimento en suspensión a partir del espesor de la capa de fondo k_s , y la superficie libre del agua d , cuando el punto a se encuentra localizado en la zona inferior.

5.2 Zona intermedia

Si la concentración conocida se encuentra en el punto a a una distancia sobre el fondo tal que $0.2d \leq a \leq 0.6d$, como se muestra en la fig 5.3, se procede como se indica.

La distribución de velocidades se obtiene por medio de las dos ecuaciones de potencia presentadas en el capítulo tercero, las cuales están dadas por las expresiones siguientes.

De la ec 3.65 que es válida en el intervalo $k_s \leq y \leq y_a$

$$u_k = u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/m} \quad (5.21)$$

De la ec 3.56 que es válida en el intervalo $y_a \leq y \leq d$

$$u_u = U_{mdx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} \quad (5.22)$$

donde

- u_k velocidad en cualquier punto situado dentro del intervalo $k_x \leq y \leq y_a$
- u_u velocidad en cualquier punto situado dentro del intervalo $y_a \leq y \leq d$
- u_a velocidad en el punto y_a ; está dada por la ec 3.60
- U_{mdx} velocidad del fluido en la superficie cuando $y = d$; está dada por la ec 3.43
- y_a punto en donde se cruzan las ecuaciones exponenciales 5.21 y 5.22; se obtiene por medio de la ec 3.57 ó 3.58
- m exponente; está dado por la ec 3.55
- ml exponente; está dado por la ec 3.66
- y distancia medida desde el fondo donde se desea valuar la velocidad puntual media

Por otra parte la distribución de concentraciones de sedimentos, según las ecuaciones de potencia o exponenciales presentadas en el capítulo cuarto, se obtiene mediante las expresiones siguientes.

De la ec 4.30 para la zona inferior en que $k_x \leq y \leq 0.2 d$

$$C_b = C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{1.0677}} 2.3552d^{-0.5323} \right]^2 \quad (5.23)$$

De la ec 4.25 para la zona intermedia en que $0.2 d \leq y \leq 0.6 d$

$$C_c = C_{ac} \left(\frac{a_c}{y} \right)^{1.6z} \quad (5.24)$$

De la ec 4.37 para la zona superior en que $0.6 d \leq y \leq d$

$$C_u = C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{4.327}} 0.2483 d^{2.727} \right]^z \quad (5.25)$$

donde

- C_b concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $k_s \leq y \leq 0.2d$
- C_c concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $0.2d \leq y \leq 0.6d$
- C_u concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $0.6d \leq y \leq d$
- C_{ac} concentración de sedimentos conocida obtenida de una muestra tomada a una distancia a_c sobre el fondo, tal que $0.2d \leq a_c \leq 0.6d$
- d tirante del flujo
- z exponente de Rouse; se calcula con la ec 4.3
- y distancia medida desde el fondo donde se desea valuar la concentración C , siendo $C = C_b, C_c$, o C_u según la zona donde C desea ser valuada

Las ecuaciones de distribución de velocidades y de concentración de sedimento se sustituyen en la ecuación del transporte de sedimento en suspensión, ec 5.2, obteniendo una ecuación para cada una de las zonas; así se tiene que

I) En la zona inferior I se sustituyen las ecs 5.21 y 5.23 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Sbl} \dot{y}_a = \int_{k_a}^{y_a} u_k C_b dy \quad (5.26a)$$

o bien

$$g_{Sbl} \dot{y}_a = \int_{k_a}^{y_a} u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/m} C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{1.0677}} 2.3552d^{-0.5323} \right] dy \quad (5.26b)$$

II) En la zona inferior II se sustituyen las ecs 5.22 y 5.23 en la 5.2, con lo que se obtiene

$$g_{SblI} \dot{y}_a^{0.2d} = \int_{y_a}^{0.2d} u_u C_b dy \quad (5.27a)$$

o bien

$$g_{SblI} \dot{y}_a^{0.2d} = \int_{y_a}^{0.2d} U_{máx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{1.0677}} 2.3552d^{-0.5323} \right] dy \quad (5.27b)$$

III) En la zona intermedia se sustituyen las ecs 5.22 y 5.24 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Sc} \dot{0.2d}^{0.6d} = \int_{0.2d}^{0.6d} u_u C_c dy \quad (5.28a)$$

o bien

$$g_{Sc} \dot{0.2d}^{0.6d} = \int_{0.2d}^{0.6d} U_{máx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{ac} \left(\frac{a_c}{y} \right)^{1.6c} dy \quad (5.28b)$$

IV) En la zona superior se sustituyen las ecs 5.22 y 5.25 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Su} \int_{0.6d}^d u_a C_u dy \quad (5.29a)$$

o bien

$$g_{Su} \int_{0.6d}^d U_{max} \left(\frac{y}{d}\right)^{1/m} C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{4.327}} 0.2483 d^{2.727} \right]^z dy \quad (5.29b)$$

Para obtener el transporte de sedimento en suspensión se suman las ecs 5.26, 5.27, 5.28 y 5.29 que corresponden a cada una de las zonas, con lo cual los límites de la integral van a partir del punto k , hasta la superficie libre del agua d ; la ec 5.2 queda

$$g_S = g_{Sbl} + g_{Sbll} + g_{Sc} + g_{Su} \quad (5.30)$$

sustituyendo valores, se tiene que

$$\begin{aligned} g_S = & \int_{k_s}^{y_a} u_a \left(\frac{y}{y_a}\right)^{1/m} C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{1.0677}} 2.3552d^{-0.5323} \right]^z dy \\ & + \int_{y_a}^{0.2d} U_{max} \left(\frac{y}{d}\right)^{1/m} C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{1.0677}} 2.3552d^{-0.5323} \right]^z dy \\ & + \int_{0.2d}^{0.6d} U_{max} \left(\frac{y}{d}\right)^{1/m} C_{ac} \left(\frac{a_c}{y}\right)^{1.6z} dy \\ & + \int_{0.6d}^d U_{max} \left(\frac{y}{d}\right)^{1/m} C_{ac} \left[\frac{a_c^{1.6}}{y^{4.327}} 0.2483 d^{2.727} \right]^z dy \end{aligned} \quad (5.31)$$

Si todos los términos conocidos se agrupan en un solo parámetro se pueden escribir las ecuaciones siguientes

$$W_5 = C_{ac} \left[a_c^{1.6} 2.3552d^{-0.5323} \right]^z \frac{u_a}{y_a^{1/m}} \quad (5.32a)$$

$$W_6 = C_{ac} \left[a_c^{1.6} 2.3552d^{-0.5323} \right]^z \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.32b)$$

$$W_7 = C_{ac} a_c^{1.6z} \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.32c)$$

$$W_8 = C_{ac} \left[a_c^{1.6} 0.2483 d^{2.727} \right]^z \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.32d)$$

y la ec 5.31 queda

$$\begin{aligned} g_S = & W_5 \int_{k_s}^{y_a} y^{1/m-1.0677z} dy + W_6 \int_{y_a}^{0.2d} y^{1/m-1.0677z} dy \\ & + W_7 \int_{0.2d}^{0.6d} y^{1/m-1.6z} dy + W_8 \int_{0.6d}^d y^{1/m-4.327z} dy \end{aligned} \quad (5.33)$$

al integrar se llega a

$$\begin{aligned} g_S = & W_5 \left[\frac{y^{1/m-1.0677z+1}}{1/m-1.0677z+1} \right]_{k_s}^{y_a} + W_6 \left[\frac{y^{1/m-1.0677z+1}}{1/m-1.06677z+1} \right]_{y_a}^{0.2d} \\ & + W_7 \left[\frac{y^{1/m-1.6z+1}}{1/m-1.6z+1} \right]_{0.2d}^{0.6d} + W_8 \left[\frac{y^{1/m-4.327z+1}}{1/m-4.327z+1} \right]_{0.6d}^d \end{aligned} \quad (5.34)$$

efectuando un cambio de variables, se tiene que

$$P_5 = 1/m - 1.0677z + 1 \quad (5.35a)$$

$$P_6 = 1/m - 1.0677z + 1 \quad (5.35b)$$

$$P_7 = 1/m - 1.6z + 1 \quad (5.35c)$$

$$P_8 = 1/m - 4.327z + 1 \quad (5.35d)$$

agrupando las ecs 5.32 y 5.35

$$W'_5 = W_5/P_5 \quad (5.36a)$$

$$W'_6 = W_6/P_6 \quad (5.36b)$$

$$W'_7 = W_7/P_7 \quad (5.36c)$$

$$W'_8 = W_8/P_8 \quad (5.36d)$$

Sustituyendo las ecs 5.35 y 5.36 en 5.34

$$g_s = W'_5 [y^{P_5}]_{k_s}^{y_a} + W'_6 [y^{P_6}]_{y_a}^{0.2d} + W'_7 [y^{P_7}]_{0.2d}^{0.6d} + W'_8 [y^{P_8}]_{0.6d}^d \quad (5.37)$$

tomando limites se obtiene

$$g_s = W'_5 [y_a^{P_5} - k_s^{P_5}] + W'_6 [(0.2d)^{P_6} - y_a^{P_6}] + W'_7 [(0.6d)^{P_7} - (0.2d)^{P_7}] + W'_8 [d^{P_8} - (0.6d)^{P_8}] \quad (5.38)$$

válida si $0.2d \leq a \leq 0.6d$

La ec 5.38 permite obtener el transporte de sedimento en suspensión a partir del espesor de la capa de fondo, k_s , y la superficie libre del agua, d , cuando el punto a se encuentra localizado en la zona intermedia.

5.3 Zona superior

Si la concentración conocida se encuentra en el punto a a una distancia sobre el fondo tal que $0.6d \leq a \leq d$, como se muestra en la fig 5.4; se procede como se indica.

La distribución de velocidades del flujo se obtiene por medio de las dos ecuaciones exponenciales presentadas en el capítulo tercero, las cuales están dadas por las expresiones siguientes.

De la ec 3.65 que es válida en el intervalo $k_s \leq y \leq y_a$

$$u_k = u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/m_1} \quad (5.39)$$

De la ec 3.56 que es válida en el intervalo $y_a \leq y \leq d$

$$u_u = U_{máx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} \quad (5.40)$$

donde

u_k velocidad en cualquier punto situado dentro del intervalo $k_s \leq y \leq y_a$

u_u velocidad en cualquier punto situado dentro del intervalo $y_a \leq y \leq d$

u_a velocidad en el punto y_a ; está dada por la ec 3.60

$U_{máx}$ velocidad del fluido en la superficie cuando $y = d$; está dada por la ec 3.43

y_a ordenada donde se cruzan las ecuaciones exponenciales 5.39 y 5.40; se obtiene por medio de la ec 3.57 ó 3.58

- m exponente; está dado por la ec 3.55
- ml exponente; está dado por la ec 3.66
- y distancia medida desde el fondo donde se desea valuar la velocidad puntual media

Por otra parte la distribución de concentraciones de sedimentos, según las ecuaciones de potencia o exponenciales presentadas en el capítulo cuarto, se obtiene mediante las expresiones siguientes.

De la ec 4.50 para la zona inferior en que $k_s \leq y \leq 0.2 d$

$$C_b = C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.0677}} 9.4851d^{-3.2593} \right]^z \quad (5.41)$$

De la ec 4.44 para la zona intermedia en que $0.2 d \leq y \leq 0.6 d$

$$C_c = C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.6}} 4.0274d^{-2.727} \right]^z \quad (5.42)$$

De la ec 4.38 para la zona superior en que $0.6 d \leq y \leq d$

$$C_u = C_{au} \left(\frac{a_u}{y} \right)^{4.327z} \quad (5.43)$$

donde

- C_b concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $k_s \leq y \leq 0.2d$

- C_c concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $0.2d \leq y \leq 0.6d$
- C_u concentración de sedimentos en los puntos situados dentro del intervalo $0.6d \leq y \leq d$
- C_{au} concentración de sedimentos conocida obtenida de una muestra tomada a una distancia a_u sobre el fondo, tal que $0.6d \leq a_u \leq d$
- d tirante del flujo
- z exponente de Rouse; se calcula con la ec 4.3
- y distancia medida desde el fondo donde se desea valuar la concentración C , siendo $C = C_b, C_c$, o C_u según la zona donde C desea ser valuada

Las ecuaciones de distribución de velocidades y de concentración de sedimento se sustituyen en la ecuación del transporte de sedimento en suspensión, ec 5.2, obteniendo una ecuación para cada una de las zonas; así se tiene que

1) En la zona inferior I se sustituyen las ecs 5.39 y 5.41 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Sbt} \int_{k_t}^{y_a} u_k C_b dy \quad (5.44a)$$

o bien

$$g_{Sbt} \int_{k_t}^{y_a} u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/m} C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.0677}} 9.4851d^{-3.2593} \right]^2 dy \quad (5.44b)$$

II) En la zona inferior II se sustituyen las ecs 5.40 y 5.41 en la 5.2, con lo que se obtiene

$$g_{SbII} \int_{y_a}^{0.2d} = \int_{y_a}^{0.2d} u_u C_b dy \quad (5.45a)$$

o bien

$$g_{SbII} \int_{y_a}^{0.2d} = \int_{y_a}^{0.2d} U_{mdx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.0677}} 9.4851d^{-3.2593} \right]^z dy \quad (5.45b)$$

III) En la zona intermedia se sustituyen las ecs 5.40 y 5.42 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Sc} \int_{0.2d}^{0.6d} = \int_{0.2d}^{0.6d} u_u C_c dy \quad (5.46a)$$

o bien

$$g_{Sc} \int_{0.2d}^{0.6d} = \int_{0.2d}^{0.6d} U_{mdx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.6}} 4.0274d^{-2.727} \right]^z dy \quad (5.46b)$$

IV) En la zona superior se sustituyen las ecs 5.40 y 5.43 en la 5.2, obteniendo que

$$g_{Su} \int_{0.6d}^d = \int_{0.6d}^d u_u C_u dy \quad (5.47a)$$

o bien

$$g_{Su} \int_{0.6d}^d = \int_{0.6d}^d U_{mdx} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{au} \left(\frac{a_u}{y} \right)^{4.327z} dy \quad (5.47b)$$

Para obtener el transporte de sedimento en suspensión se suman las ecs 5.44, 5.45, 5.46 y 5.47 que corresponden a cada una de las zonas, con lo cual los límites de la integral van a partir del punto k , hasta la superficie libre del agua d ; la ec 5.2 queda

$$g_s = g_{sbl} + g_{sbl} + g_{sc} + g_{su} \quad (5.48)$$

sustituyendo valores, se tiene que

$$\begin{aligned} g_s = & \int_{k_s}^{y_a} u_a \left(\frac{y}{y_a} \right)^{1/m} C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.0677}} 9.4851d^{-3.2593} \right]^z dy \\ & + \int_{y_a}^{0.2d} U_{m\dot{x}} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.0677}} 9.4851d^{-3.2593} \right]^z dy \\ & + \int_{0.2d}^{0.6d} U_{m\dot{x}} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{au} \left[\frac{a_u^{4.327}}{y^{1.6}} 4.0274d^{-2.727} \right]^z dy \\ & + \int_{0.6d}^d U_{m\dot{x}} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/m} C_{au} \left(\frac{a_u}{y} \right)^{4.327z} dy \end{aligned} \quad (5.49)$$

Si todos los términos conocidos se agrupan en un solo parámetro se pueden escribir las ecuaciones siguientes

$$W_9 = C_{au} \left[a_u^{4.327} 9.4851d^{-3.2593} \right]^z \frac{u_a}{y_a^{1/m}} \quad (5.50a)$$

$$W_{10} = C_{au} \left[a_u^{4.327} 9.4851d^{-3.2593} \right]^z \frac{U_{m\dot{x}}}{d^{1/m}} \quad (5.50b)$$

$$W_{11} = C_{au} \left[a_u^{4.327} 4.0274d^{-2.727} \right]^z \frac{U_{m\dot{x}}}{d^{1/m}} \quad (5.50c)$$

$$W_{12} = C_{au} a_u^{4.327z} \frac{U_{m\dot{x}}}{d^{1/m}} \quad (5.50d)$$

y la ec 5.49 queda

$$g_s = W_9 \int_{k_1}^{y_a} y^{1/m-1.0677z} dy + W_{10} \int_{y_a}^{0.2d} y^{1/m-1.0677z} dy + W_{11} \int_{0.2d}^{0.6d} y^{1/m-1.6z} dy + W_{12} \int_{0.6d}^d y^{1/m-4.327z} dy \quad (5.51)$$

al integrar se llega a

$$g_s = W_9 \left[\frac{y^{1/m-1.0677z+1}}{1/m-1.0677z+1} \right]_{k_1}^{y_a} + W_{10} \left[\frac{y^{1/m-1.0677z+1}}{1/m-1.0677z+1} \right]_{y_a}^{0.2d} + W_{11} \left[\frac{y^{1/m-1.6z+1}}{1/m-1.6z+1} \right]_{0.2d}^{0.6d} + W_{12} \left[\frac{y^{1/m-4.327z+1}}{1/m-4.327z+1} \right]_{0.6d}^d \quad (5.52)$$

efectuando un cambio de variables, se tiene que

$$P_9 = 1/m-1.0677z+1 \quad (5.53a)$$

$$P_{10} = 1/m-1.0677z+1 \quad (5.53b)$$

$$P_{11} = 1/m-1.6z+1 \quad (5.53c)$$

$$P_{12} = 1/m-4.327z+1 \quad (5.53d)$$

agrupando las ecs 5.50 y 5.53

$$W'_9 = W_9/P_9 \quad (5.54a)$$

$$W'_{10} = W_{10}/P_{10} \quad (5.54b)$$

$$W'_{11} = W_{11}/P_{11} \quad (5.54c)$$

$$W'_{12} = W_{12}/P_{12} \quad (5.54d)$$

Sustituyendo las ecs 5.53 y 5.54 en la 5.52

$$g_s = W'_9 [y^{P_9}]_{k_1}^{y_a} + W'_{10} [y^{P_{10}}]_{y_a}^{0.2d} + W'_{11} [y^{P_{11}}]_{0.2d}^{0.6d} + W'_{12} [y^{P_{12}}]_{0.6d}^d \quad (5.55)$$

tomando límites se obtiene

$$g_s = W'_9 [y_a^{P_9} - k_s^{P_9}] + W'_{10} [(0.2d)^{P_{10}} - y_a^{P_{10}}] + W'_{11} [(0.6d)^{P_{11}} - (0.2d)^{P_{11}}] + W'_{12} [d^{P_{12}} - (0.6d)^{P_{12}}] \quad (5.56)$$

válida si $0.6d \leq a \leq d$

La ec 5.56 permite obtener el transporte de sedimento en suspensión a partir del espesor de la capa de fondo, k_s , y la superficie libre del agua, d , cuando el punto a se encuentra localizado en la zona superior.

5.4 Resumen

Si el tamaño de la muestra de concentración de sedimentos (tomada a la altura $y = a$) es suficiente, se obtiene la curva granulométrica del material que viaja en suspensión, y se divide en fracciones. Con ello es posible conocer la concentración de sedimentos a ese nivel para cada fracción de la curva granulométrica C_{ai} y mediante las ecuaciones correspondientes se determina la distribución de concentración de sedimentos en suspensión de las partículas con el diámetro medio D_i .

Con cada C_{ai} calculado, se evalúa, mediante la ecuación correspondiente, el transporte de sedimento en suspensión con diámetro medio D_i que es transportado por el flujo desde el nivel $y = k_s$ hasta la superficie, $y = d$. De esta manera, la ec 5.2 toma la forma

$$g_{si} = \int_{k_s}^d u C_{ai} dy \quad (5.57)$$

Por último, el transporte de sedimento en suspensión, en peso por unidad de tiempo y ancho g_s , será igual a la suma de todos los g_{si} , correspondientes a las diferentes fracciones en que se haya dividido la curva granulométrica de los sedimentos que son transportados en suspensión.

$$g_s = \sum_i g_{si} \quad (5.58)$$

5.4.1 Ecuaciones de transporte de sedimentos en suspensión

A continuación se presenta un resumen de lo antes mencionado, en donde se muestran las ecuaciones necesarias a utilizar en cada una de las tres zonas para obtener el transporte de sedimento en suspensión a partir del espesor de la capa de fondo k_s , hasta la superficie libre del agua d .

I) Zona inferior

Si la concentración C_{ab} es conocida a una distancia a_b sobre el fondo tal que $k_s \leq a_b \leq 0.2d$, se tiene

$$g_s = W'_1 [y_a^{P_1} - k_s^{P_1}] + W'_2 [(0.2d)^{P_2} - y_a^{P_2}] + W'_3 [(0.6d)^{P_3} - (0.2d)^{P_3}] + W'_4 [d^{P_4} - (0.6d)^{P_4}] \quad (5.20)$$

de donde

$$W'_1 = W_1/P_1 \quad (5.18a)$$

$$W'_2 = W_2/P_2 \quad (5.18b)$$

$$W'_3 = W_3/P_3 \quad (5.18c)$$

$$W'_4 = W_4/P_4 \quad (5.18d)$$

$$W_1 = C_{ab} a_b^{1.0677z} \frac{u_a}{y_a^{1/m}} \quad (5.14a)$$

$$W_2 = C_{ab} a_b^{1.0677z} \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.14b)$$

$$W_3 = C_{ab} [a_b^{1.0677} 0.4246 d^{0.5323}]^z \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.14c)$$

$$W_4 = C_{ab} [a_b^{1.0677} 0.1054 d^{3.2593}]^z \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.14d)$$

$$P_1 = 1/m1 - 1.0677z + 1 \quad (5.17a)$$

$$P_2 = 1/m - 1.0677z + 1 \quad (5.17b)$$

$$P_3 = 1/m - 1.6z + 1 \quad (5.17c)$$

$$P_4 = 1/m - 4.327z + 1 \quad (5.17d)$$

u_a está dada por la ec 3.60

U_{max} está dada por la ec 3.43

y_a se obtiene por medio de la ec 3.57 ó 3.58

m se calcula con la ec 3.55

$m1$ está dada por la ec 3.66

II) Zona intermedia

Si la concentración C_{ac} es conocida a una distancia a_c sobre el fondo tal que

$0.2d \leq a_c \leq 0.6d$, se tiene

$$g_s = W'_5 [y_a^{P_3} - k_s^{P_3}] + W'_6 [(0.2d)^{P_6} - y_a^{P_6}] + W'_7 [(0.6d)^{P_7} - (0.2d)^{P_7}] + W'_8 [d^{P_8} - (0.6d)^{P_8}] \quad (5.38)$$

de donde

$$W'_5 = W_5/P_3 \quad (5.36a)$$

$$W'_6 = W_6/P_6 \quad (5.36b)$$

$$W'_7 = W_7/P_7 \quad (5.36c)$$

$$W'_8 = W_8/P_8 \quad (5.36d)$$

$$W_5 = C_{ac} \left[a_c^{1.6} 2.3552d^{-0.5323} \right]^z \frac{u_a}{y_a^{1/m1}} \quad (5.32a)$$

$$W_6 = C_{ac} \left[a_c^{1.6} 2.3552d^{-0.5323} \right]^z \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.32b)$$

$$W_7 = C_{ac} a_c^{1.6z} \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.32c)$$

$$W_8 = C_{ac} \left[a_c^{1.6} 0.2483 d^{2.727} \right]^z \frac{U_{mdx}}{d^{1/m}} \quad (5.32d)$$

$$P_5 = 1/m1 - 1.0677z + 1 \quad (5.35a)$$

$$P_6 = 1/m - 1.0677z + 1 \quad (5.35b)$$

$$P_7 = 1/m - 1.6z + 1 \quad (5.35c)$$

$$P_8 = 1/m - 4.327z + 1 \quad (5.35d)$$

u_a está dada por la ec 3.60

U_{mdx} está dada por la ec 3.43

y_a se obtiene por medio de la ec 3.57 ó 3.58

m se calcula con la ec 3.55

$m1$ está dada por la ec 3.66

III) Zona superior

Si la concentración C_{aa} es conocida a una distancia a_u sobre el fondo tal que $0.6d \leq a_u \leq d$, se tiene

$$g_s = W'_9 [y_a^{P_9} - k_s^{P_9}] + W'_{10} [(0.2d)^{P_{10}} - y_a^{P_{10}}] + W'_{11} [(0.6d)^{P_{11}} - (0.2d)^{P_{11}}] + W'_{12} [d^{P_{12}} - (0.6d)^{P_{12}}] \quad (5.56)$$

de donde

$$W'_9 = W_9/P_9 \quad (5.54a)$$

$$W'_{10} = W_{10}/P_{10} \quad (5.54b)$$

$$W'_{11} = W_{11}/P_{11} \quad (5.54c)$$

$$W'_{12} = W_{12}/P_{12} \quad (5.54d)$$

$$W_9 = C_{au} \left[a_u^{4.327} 9.4851d^{-3.2593} \right]^z \frac{u_a}{y_a^{1/m}} \quad (5.50a)$$

$$W_{10} = C_{au} \left[a_u^{4.327} 9.4851d^{-3.2593} \right]^z \frac{U_{máx}}{d^{1/m}} \quad (5.50b)$$

$$W_{11} = C_{au} \left[a_u^{4.327} 4.0274d^{-2.727} \right]^z \frac{U_{máx}}{d^{1/m}} \quad (5.50c)$$

$$W_{12} = C_{au} a_u^{4.327z} \frac{U_{máx}}{d^{1/m}} \quad (5.50d)$$

$$P_9 = 1/m - 1.0677z + 1 \quad (5.53a)$$

$$P_{10} = 1/m - 1.0677z + 1 \quad (5.53b)$$

$$P_{11} = 1/m - 1.6z + 1 \quad (5.53c)$$

$$P_{12} = 1/m - 4.327z + 1 \quad (5.53d)$$

u_a está dada por la ec 3.60

$U_{máx}$ está dada por la ec 3.43

y_a se obtiene por medio de la ec 3.57 ó 3.58

m se calcula con la ec 3.55

$m1$ está dada por la ec 3.66

5.5 Ejemplo numérico

Los datos del problema que se utilizaron para mostrar la aplicación de las ecuaciones de este capítulo son los mismos que se tienen en el ejemplo del subcapítulo 2.13.

Se sabe que la concentración de la muestra se obtuvo en $a = 0.30$ m, por tanto cae en la zona inferior, ya que su rango va de k_s hasta $0.2d = 0.92$ m. Así, se utilizarán las ecuaciones propuestas en la zona inferior (ecs 5.20 a 5.17d), para obtener el transporte de sedimento en suspensión a partir del espesor de la capa de fondo k_s , hasta la superficie libre del agua d .

El valor que puede tomar k_s ha sido asignado por diferentes autores, como son

$$\text{Velikanov} \quad k_s = 0.002d$$

$$\text{Einstein} \quad k_s = 2D_{65}$$

$$\text{Keulegan} \quad k_s = \left[\exp \frac{\kappa U}{U_*} \right]^{-1} 12.27 R$$

Si el fondo es plano, el valor que da Einstein es adecuado; sin embargo para tomar en cuenta las ondulaciones del fondo con Keulegan da un mejor resultado, por lo cual para asignar el valor de k_s se tomará aquel que se obtenga al aplicar la ecuación propuesta por este autor.

Para aplicar la ecuación de Keulegan es necesario conocer la velocidad media, para ello se aplicaron los métodos de Cruickshank-Maza y Garde y Ranga-Raju.

De la ecuación de Cruickshank-Maza se obtuvo

$$U = 7.58 \omega \left(\frac{d}{D_{84}} \right)^{0.634} \left(\frac{S}{\Delta} \right)^{0.456}$$

$$U = 2.08227 \text{ m/s}$$

De la ecuación de Garde y Ranga-Raju

$$U = \sqrt{9.81 \cdot \Delta + D_{50}} \kappa \left(\frac{d}{D_{50}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{S}{\Delta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$U = 1.81923 \text{ m/s}$$

Se acepta tomar el promedio. Por tanto

$$U = 1.95075 \text{ m/s}$$

Por lo que

$$k_s = \left[\exp \frac{(0.4)(1.95075)}{(0.13095)} \right]^{-1} \quad (12.27) \quad (4.6)$$

$$k_s = 0.14579 \text{ m}$$

Es necesario conocer primero los parámetros siguientes

$$\frac{d}{k_s} = \frac{4.6}{0.14579} = 31.5522$$

como d/k_s cae en el rango $25 \leq d/k_s \leq 10000$ se utilizará la ec 3.57.

De la ec 3.57

$$y_a = \left[\frac{0.9432}{\sqrt{\frac{4.6}{0.14579}}} - \frac{1.28}{\frac{4.6}{0.14579}} - 0.015 \exp \left\{ -0.0135 \frac{4.6}{0.14579} \right\} \right]$$

$$y_a = 0.54073 \text{ m}$$

De la ec 2.20 $U_* = \sqrt{(9.81) (4.6) (0.00038)}$

$$U_* = 0.13095 \text{ m/s}$$

De la ec 4.43 $U_{máx} = (2.5) (0.13095) \left(\text{Ln} \frac{(30) (4.6)}{0.14579} \right)$

$$U_{máx} = 2.24345 \text{ m/s}$$

$$\text{De la ec 4.55 } m = \text{Ln} \left[\frac{(30) (4.6)}{(e) (0.14579)} \right] \quad m = 5.85284$$

$$\text{De la ec 4.59 } u_k = 8.5 (0.13095) \quad u_k = 1.11307 \text{ m/s}$$

$$\text{De la ec 4.60 } u_a = 2.24345 \left(\frac{0.54073}{4.6} \right)^{\frac{1}{5.87284}} \quad u_a = 1.55617 \text{ m/s}$$

$$\text{De la ec 4.66 } ml = \frac{\text{Ln} \left(\frac{0.54073}{0.14579} \right)}{\text{Ln} \left(\frac{1.55617}{1.11307} \right)} \quad ml = 3.91151$$

La curva granulométrica se dividirá en 10 partes iguales, por tanto se obtendrá el D_i correspondiente a cada rango

Fracción	i	p_i	D_i (m)	C_d (kgf/m ³)
0-10	5	0.1	0.000183	0.1
10-20	15	0.1	0.000299	0.1
20-30	25	0.1	0.000400	0.1
30-40	35	0.1	0.000504	0.1
40-50	45	0.1	0.000621	0.1
50-60	55	0.1	0.000759	0.1
60-70	65	0.1	0.000935	0.1
70-80	75	0.1	0.001179	0.1
80-90	85	0.1	0.001576	0.1
90-100	95	0.1	0.002567	0.1

De la ec 2.30 $\Delta = \frac{2680 - 1000}{1000}$ $\Delta = 1.68$

La constante universal de von-Karman $\kappa = 0.4$

De la ec 2.29

$$F_{1i} = \left[\frac{2}{3} + \frac{(36) (0.0000010066)^2}{(9.81) (1.68) (D_i)^3} \right]^{0.5} - \left[\frac{(36) (0.0000010066)^2}{(9.81) (1.68) (D_i)^3} \right]^{0.5}$$

De la ec 2.28 $\omega_i = F_{1i} [(9.81) (1.68) (D_i)]^{0.5}$

De la ec 4.3 $z_i = \frac{\omega_i}{(0.4) (0.13095)}$

Por ejemplo, para $i = 5$ y $D_5 = 0.000183$ m se tiene

De la ec 2.29

$$F_{15} = \left[\frac{2}{3} + \frac{(36) (0.0000010066)^2}{(9.81) (1.68) (0.000183)^3} \right]^{0.5} - \left[\frac{(36) (0.0000010066)^2}{(9.81) (1.68) (0.000183)^3} \right]^{0.5}$$

$$F_{15} = 0.41286$$

De la ec 2.28 $\omega_5 = 0.41286 [(9.81) (1.68) (0.000183)]^{0.5}$ $\omega_5 = 0.02267$ m/s

De la ec 4.3 $z_5 = \frac{0.02267}{(0.4) (0.13095)}$ $z_5 = 0.43286$

Se procede de igual manera para los demás diámetros, mostrando los resultados en la tabla siguiente

l	D_i (m)	F_{ii} ec 2.29	ω_i (m/s) ec 2.28	z_i ec 5.3
5	0.000183	0.41286	0.02267	0.43286
15	0.000299	0.57797	0.04057	0.77458
25	0.000400	0.65144	0.05289	1.00979
35	0.000504	0.69553	0.06339	1.21020
45	0.000621	0.72600	0.07345	1.40219
55	0.000759	0.74844	0.08371	1.59810
65	0.000935	0.76612	0.09516	1.81562
75	0.001179	0.78057	0.10881	2.07728
85	0.001576	0.79306	0.12781	2.44012
95	0.002567	0.80514	0.16560	3.16160

Por otra parte se tiene que, como la muestra se obtuvo en $y = 0.30$ m, y por tanto se localiza entre k , y $0.2d$; ella se ubica dentro de la zona inferior. Por ello se utilizarán las fórmulas del inciso 5.1, en la que $a_0 = 0.30$ m y $C_{ab} = 1 \text{ kg/m}^3$.

$$\text{De la ec 5.14a} \quad W_{1i} = [(0.1) (0.30)^{1.0677z_i}] \left[\frac{1.55617}{(0.54073)^{1/3.91151}} \right]$$

$$\text{De la ec 5.14b} \quad W_{2i} = [(0.1) (0.30)^{1.0677z_i}] \left[\frac{2.24345}{4.6^{1/5.85284}} \right]$$

De la ec 5.14c
$$W_{3i} = [0.1((0.30)^{1.0677} (0.4246) (4.6)^{0.5323})^2] \left[\frac{2.24345}{4.6^{1/5.85284}} \right]$$

De la ec 5.14d
$$W_{4i} = [0.1((0.30)^{1.0677} (0.1054) (4.6)^{3.2593})^2] \left[\frac{2.24345}{4.6^{1/5.85284}} \right]$$

Por ejemplo, para $i = 5$ y $z_i = 0.43286$ se tiene

De la ec 5.14a
$$W_{1s} = [(0.1) (0.30^{(1.0677)(0.43286)})] \left[\frac{1.55617}{(0.54073)^{1/3.91151}} \right]$$

$$W_{1s} = 0.10439$$

De la ec 5.14b
$$W_{2s} = [(0.1) (0.30^{(1.0677)(0.43286)})] \left[\frac{2.24345}{4.6^{1/5.85284}} \right]$$

$$W_{2s} = 0.09909$$

De la ec 5.14c
$$W_{3s} = [0.1((0.30)^{1.0677} (0.4246) (4.6)^{0.5323})^{0.43286}] \left[\frac{2.24345}{4.6^{1/5.85284}} \right]$$

$$W_{3s} = 0.09721$$

De la ec 5.14d
$$W_{4s} = [0.1[(0.30)^{1.0677} (0.1054) (4.6)^{3.2593}]^{0.43286}] \left[\frac{2.24345}{4.6^{1/5.85284}} \right]$$

$$W_{4s} = 0.32217$$

Se procede de igual manera para los demás diámetros, los resultados se muestran en la tabla siguiente

i	W_i ec 5.14a	W_2 ec 5.14b	W_3 ec 5.14c	W_4 ec 5.14d
5	0.10439	0.09909	0.09721	0.32217
15	0.06728	0.06386	0.06171	0.52669
25	0.04973	0.04720	0.04514	0.73873
35	0.03843	0.03648	0.03458	0.98555
45	0.03003	0.02850	0.02679	1.29901
55	0.02334	0.02216	0.02064	1.72185
65	0.01765	0.01675	0.01546	2.35439
75	0.01261	0.01197	0.01092	3.43032
85	0.00791	0.00751	0.00674	5.78091
95	0.00313	0.00297	0.00258	16.31915

De la ec 5.17a
$$P_{1i} = \frac{1}{3.91151} - 1.0677z_i + 1$$

De la ec 5.17b
$$P_{2i} = \frac{1}{5.85284} - 1.0677z_i + 1$$

De la ec 5.17c
$$P_{3i} = \frac{1}{5.85284} - 1.6z_i + 1$$

De la ec 5.17d
$$P_{4i} = \frac{1}{5.85284} - 4.327z_i + 1$$

Ejemplificando, para $i = 5$ y $z_i = 0.43286$ se tiene

De la ec 5.17a
$$P_{15} = \frac{1}{3.91151} - 1.0677(0.43286) + 1$$

$$P_{15} = 0.79349$$

De la ec 5.17b
$$P_{2_i} = \frac{1}{5.85284} - 1.0677(0.43286) + 1$$

$$P_{2_i} = 0.70869$$

De la ec 5.17c
$$P_{3_i} = \frac{1}{5.85284} - 1.6(0.43286) + 1$$

$$P_{3_i} = 0.47828$$

De la ec 5.17d
$$P_{4_i} = \frac{1}{5.85284} - 4.327(0.43286) + 1$$

$$P_{4_i} = -0.70213$$

Para los demás diámetros se procede de igual forma y mostrando los resultados en la tabla siguiente

i	P_1 ec 5.17a	P_2 ec 5.17b	P_3 ec 5.17c	P_4 ec 5.17d
5	0.79349	0.70869	0.47828	-0.70213
15	0.42864	0.34383	-0.06847	-2.18075
25	0.17750	0.09270	-0.44481	-3.19850
35	-0.03647	-0.12127	-0.76546	-4.06568
45	-0.24146	-0.32626	-1.07265	-4.89642
55	-0.45064	-0.53543	-1.38610	-5.74412
65	-0.68288	-0.76768	-1.73413	-6.68533
75	-0.96226	-1.04705	-2.15279	-7.81753
85	-1.34966	-1.43446	-2.73333	-9.38754
90	-2.11998	-2.20478	-3.88770	-12.50939

De la ec 5.18a $W'_{1_i} = \frac{W_{1_i}}{P_{1_i}}$

De la ec 5.18b $W'_{2_i} = \frac{W_{2_i}}{P_{2_i}}$

De la ec 5.18c $W'_{3_i} = \frac{W_{3_i}}{P_{3_i}}$

De la ec 5.18d $W'_{4_i} = \frac{W_{4_i}}{P_{4_i}}$

Ejemplificando, para $i = 5$ y $z_5 = 0.43286$ se tiene

De la ec 5.18a $W'_{1_5} = \frac{0.10439}{0.79349}$ $W'_{1_5} = 0.13156$

De la ec 5.18b $W'_{2_5} = \frac{0.09909}{0.70869}$ $W'_{2_5} = 0.13982$

De la ec 5.18c $W'_{3_5} = \frac{0.09721}{0.47828}$ $W'_{3_5} = 0.20324$

De la ec 5.18d $W'_{4_5} = \frac{0.32217}{-0.70213}$ $W'_{4_5} = -0.45884$

Se procede de igual manera para los demás diámetros, mostrando los resultados de éstos en la tabla siguiente.

i	W'_1 ec 5.18a	W'_2 ec 5.18b	W'_3 ec 5.18c	W'_4 ec 5.18d
5	0.13156	0.13982	0.20324	-0.45884
15	0.15696	0.18574	-0.90125	-0.24152
25	0.28014	0.50914	-0.10147	-0.23096
35	-1.05366	-0.30081	-0.04517	-0.24241
45	-0.12435	-0.08736	-0.02497	-0.26530
55	-0.05180	-0.04138	-0.01489	-0.29976
65	-0.02584	-0.02182	-0.00891	-0.35217
75	-0.01310	-0.01143	-0.00507	-0.43880
85	-0.00586	-0.00523	-0.00246	-0.61581
95	-0.00148	-0.00135	-0.00066	-1.30455

De la ec 5.20

$$g_{s_i} = W'_1 [(0.54073)^{P_{1i}} - (0.14579)^{P_{1i}}] + W'_2 [(0.92)^{P_{2i}} - (0.54073)^{P_{2i}}] + \\ + W'_3 [(2.76)^{P_{3i}} - (0.92)^{P_{3i}}] + W'_4 [(4.6)^{P_{4i}} - (2.76)^{P_{4i}}]$$

Por ejemplo, para $i = 5$

$$g_{s_5} = 0.13156[(0.54073)^{0.79349} - (0.14579)^{0.79349}] + 0.13982 [(0.92)^{0.70869} - (0.54073)^{0.70869}] + \\ + 0.20324 [(2.76)^{0.47828} - (0.92)^{0.47828}] - 0.45884 [(4.6)^{-0.70213} - (2.76)^{-0.70213}]$$

$$g_{s_5} = 0.29638 \text{ kgf/ms}$$

Para los demás diámetros se procede de igual forma y se muestran los resultados en la tabla siguiente

i	g_s kgf/m.s
5	0.29638
15	0.16539
25	0.12436
35	0.10380
45	0.09130
55	0.08317
65	0.07780
75	0.07473
85	0.07509
95	0.08654

De la ec 5.58

$$g_s = \sum_i g_{s_i}$$

$$g_s = 1.17866 \text{ kgf/m.s}$$

Con la finalidad de comprobar los resultados de transporte de sedimentos en suspensión que se obtienen al aplicar este método con los de otros autores, se presenta a continuación una tabla en donde se muestra de cada uno de ellos su resultado (el desarrollo de los métodos de los otros autores se encuentran en la ref 2).

Cabe mencionar que los resultados presentados en la tabla 5.1 son para un solo diámetro, siendo en este caso D_{15} el que se utilizó.

En dicha tabla se observa que los resultados obtenidos al aplicar las ecuaciones exponenciales de distribución de velocidades y de concentración de sedimentos en la ec 5.2, se encuentran dentro del rango de valores que se obtuvieron con los diferentes métodos de los autores presentados en la tabla 5.1.

Por lo cual se recomienda utilizar dichas ecuaciones de potencia propuestas para obtener el transporte de sedimento en suspensión en cada zona; aunque a simple vista se ve más complejo el proceso que el de los otros autores, sin embargo son confiables y fáciles de resolver como se puede comprobar con el ejemplo numérico desarrollado.

La mayor diferencia que se observa en la tabla 5.1 es con el método de Einstein; esto es debido que al obtener la velocidad media, ella resulta mayor con éste método, siendo del orden del doble de la que se llegó a utilizar con los demás métodos.

Tabla 5.1

Comparación de resultados

TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN SUSPENSION
(kgf/s.m)

METODO	g _s
LANE Y KALINSKE	0.26517
EINSTEIN	0.36689
BROOKS	0.21274
CHANG, SIMONS Y RICHARDSON	0.13167
EINSTEIN Y ABDEL-AAL	0.36689
ITAKURA Y KISHI	0.25739
EXPONENCIAL (ecs 5.14,5.17,5.18,5.20 y 5.58)	0.16539

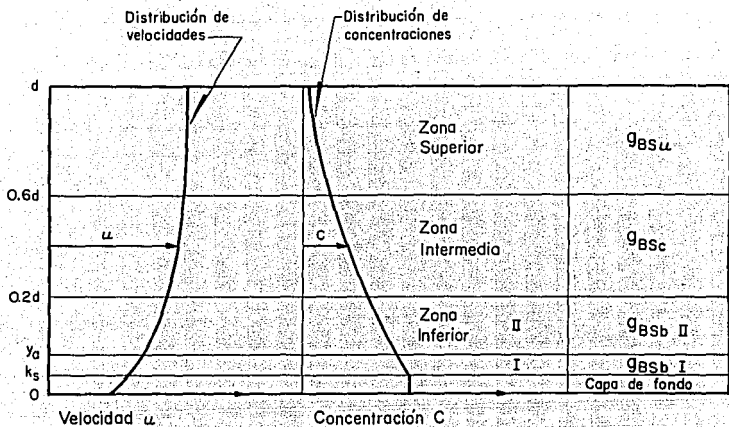


Fig 5.1 Zonas propuestas en el transporte de sedimentos en suspensión

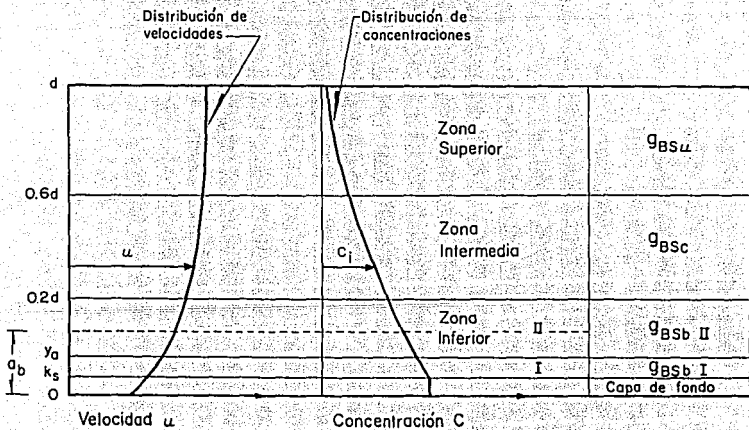


Fig 5.2 Representación de la zona inferior, $k_s \leq a_b \leq 0.2d$.

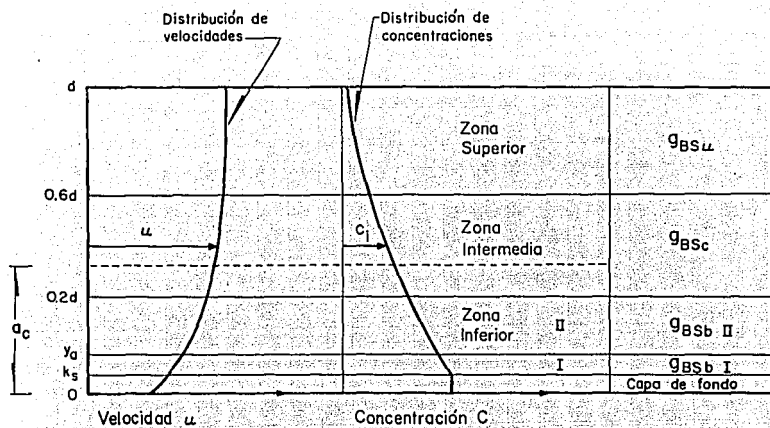


Fig 5.3 Representación de la zona intermedia $0.2d \leq a_c \leq 0.6d$.

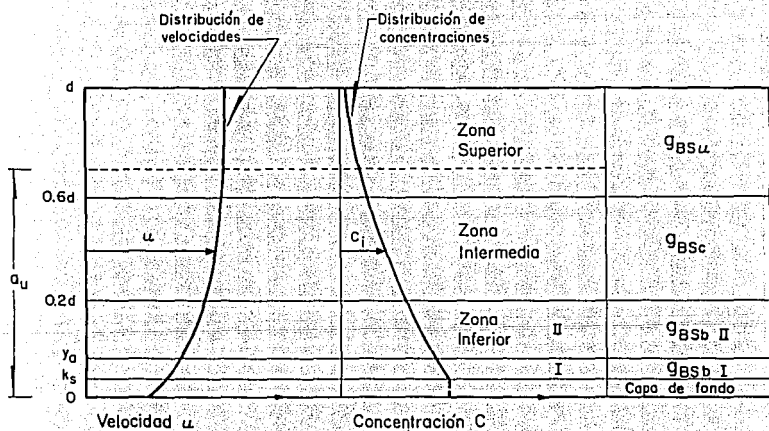


Fig 5.4 Representación de la zona superior $0.6d \leq a_u \leq d$

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito la forma de obtener la distribución de concentración de sedimentos y de velocidades en canales muy anchos y ríos; se presentó algunos métodos clásicos y fórmulas, así como también se desarrollaron nuevas ecuaciones para las dos distribuciones.

En el capítulo dos se describieron doce métodos para obtener la distribución de concentración de sedimentos. Cada uno de ellos cuenta con una metodología sustentada en ecuaciones, por lo cual, es posible su aplicación; sin embargo, la mayoría de ellos se han desarrollado a partir de las ideas del método de Rouse.

Al final del capítulo dos se presentó un ejemplo numérico que se aplicó para cada uno de ellos. En la tabla 2.1 se tienen los resultados obtenidos con los métodos propuestos. Como se observa algunos son iguales a los de Rouse, otros se encuentran cercanos a éste y hay algunos que difieren bastante. Por tanto, es recomendable usar más de un método con la finalidad de comparar los resultados y así poder tomar una decisión adecuada.

Cabe mencionar que las diferencias que se obtienen al aplicar los diferentes métodos son para los datos del ejemplo presentado en este trabajo, por lo cual es posible que en otros problemas tales diferencias sean menores o mayores, dependiendo de las características de flujo y propiedades físicas del material transportado.

En el capítulo tres se incluyeron las ecuaciones de tipo logarítmico para obtener la distribución de velocidades que comúnmente se utilizan para las condiciones de pared hidráulicamente lisa, de transición y rugosa. Por otra parte, se ha presentado la ec 3.39 con la cual se obtiene el parámetro B, que puede ser utilizado en las ecs 3.37 y 3.38, para obtener respectivamente la distribución de velocidades y la velocidad media en flujos turbulentos con cualquier condición hidráulica de la pared.

Además en el capítulo mencionado se desarrolló una serie de ecuaciones para calcular la distribución de velocidades en una vertical de un canal muy ancho y plano para flujo turbulento con pared hidráulicamente rugosa. Dicha distribución se puede encontrar con dos ecuaciones exponenciales que se cruzan en la ordenada y_a . Para la zona superior, en que $y_a \leq y \leq d$, se usa la ec 3.56. Para la zona inferior, en que $k_s \leq y \leq y_a$ se utiliza la ec 3.65 complementada con las ecs 3.59, 3.60 y 3.66; estas últimas ecuaciones requieren del conocimiento de y_a , que es la frontera entre las dos zonas, la cuál se determina con las ecs 3.57 y 3.58.

Con base en los resultados obtenidos, la máxima diferencia que se tiene al calcular la velocidad puntual con las ecuaciones logarítmica y exponencial es en el punto y_a . Dicha diferencia es en promedio del orden de 3.5%, como se muestra en la tabla 3.2. Arriba del punto y_a los valores de u son prácticamente iguales con ambas ecuaciones. La diferencia de 3.5% disminuye cuando los tirantes son menores que 2 m. y crecen al aumentar el tirante; por otra parte, para un mismo tirante tienden a disminuir al incrementarse la rugosidad k_s .

Los resultados de la velocidad puntual que se muestran en la tabla 3.2, se obtuvieron a partir de los valores que se utilizaron para el ejemplo del capítulo dos; es decir, con $y_a = 0.08509$ m, obtenida de la ec 3.57 y $y_k = k_s$.

En la tabla 3.2a se presentan los resultados para la velocidad puntual en la zona superior, en que $y_a \leq y \leq d$, y en la Tabla 3.2b los valores son para la zona inferior, que va de $y_k \leq y \leq y_a$.

Por último, se mostraron las ecuaciones exponenciales para cauces con ondulaciones en el fondo, ecs 3.76 y 3.78. Esta última que es válida en la zona inferior, donde $k_{sn} \leq y \leq y_{an}$ se ajusta mejor que la obtenida para el fondo plano.

En el capítulo cuarto se presentó el desarrollo de ecuaciones exponenciales para obtener la distribución de concentración de sedimentos. Dichas ecuaciones se obtuvieron con la finalidad de hacer más fácil el cálculo del transporte de sedimentos en suspensión sin necesidad de utilizar tablas. Ya que algunos métodos requieren de ellas para resolver integrales.

Sin embargo, no fue posible que con una sola ecuación se obtuvieran resultados aceptables. Por tal motivo, fue necesario utilizar una ecuación en cada una de las zonas propuestas en que se dividió el tirante de la corriente. De ahí surgieron las ecuaciones necesarias a partir de la distancia a la que se encuentra el punto donde es tomada la muestra, originando así que en cada una de las zonas se tenga un juego de tres ecuaciones para obtener la distribución de concentraciones en toda la vertical.

Lo anterior puede hacer pensar que este método sea más complicado de aplicar que las ecuaciones que presentan otros autores; sin embargo, no es así, ya que una vez localizado en que zona se encuentra el punto de muestreo, se toman las tres ecuaciones correspondientes a dichas zona y es sencillo aplicar las ecuaciones que permiten obtener la concentración de sedimentos.

Con las tres ecuaciones correspondientes de cada zona, se obtiene fácilmente la distribución de concentración de sedimento a todo lo largo del tirante, se desarrolló sin complicaciones, ya que las ecuaciones son sencillas y por lo tanto, fáciles de resolver.

Cabe mencionar que los resultados que se obtuvieron en el ejemplo numérico al utilizar las ecuaciones exponenciales propuestas no difieren mucho de las que se obtienen con el método de Rouse, como se puede ver en la Tabla 4.1, con lo cual se puede concluir que resulta confiable utilizar las ecuaciones exponenciales propuestas en cada zona para obtener la distribución de concentración de sedimento para flujo turbulento con pared hidráulicamente rugosa.

Las ecuaciones exponenciales de velocidad y de concentración de sedimento que se propusieron en los capítulos anteriores se sustituyeron en la ec 1.2, con la finalidad de obtener el transporte de sedimentos en suspensión de una manera más sencilla sin necesidad de realizar operaciones difíciles o de resolver integrales complejas. Se muestra en el capítulo cinco.

El objetivo del presente trabajo se cumplió; sin embargo, al realizar las operaciones correspondientes se obtuvieron una serie de ecuaciones para cada zona que a simple vista se ven más complejas que si se aplicara algún método tradicional; lo anterior resulta ser engañoso ya que si se utilizan las ecuaciones propuestas únicamente se realizan operaciones de tipo básico, por lo cual resulta más sencilla su aplicación.

Si se cuenta con una computadora y también con algún paquete como es, por ejemplo, el Math Cad que resuelva las integrales que resultan con otros métodos es recomendable utilizar éstos; pero si no se tiene este tipo de herramienta o si el proyectista se encuentra en campo y necesita obtener el transporte de sedimento en suspensión y únicamente se cuenta con una calculadora, como se mencionó anteriormente, las ecuaciones que se proponen al final del capítulo cinco, facilitan el trabajo obteniendo resultados aceptables para el transporte de sedimentos en suspensión.

REFERENCIAS

1. Maza Alvarez, J.A. y García Flores, M. "*Hidrodinámica (bases para hidráulica fluvial)*". Publicación D-20 del Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D.F., 1984
2. Maza Alvarez, J.A. y García Flores, M. "*Manual de Ingeniería de ríos*", capítulo 10 , transporte de sedimentos, Comisión Nacional del Agua, México, D.F., 1994
3. Van Rijn, L.C. "*Sediment transport*", Part II, Suspend load transport, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, No. 11, 1984.
4. Maza Alvarez, J.A. y Val Segura, R. "*Distribución exponencial de velocidades para flujos turbulentos con pared hidráulicamente rugosa*", Memorias XVI Congreso Latinoamericano, Santiago, Chile, Noviembre, 1994
5. Graf, W. H. "*Hydraulics of Sediment Transport*", Ed. McGraw-Hill, New York, 1971
6. Maza Alvarez, J.A., "*Introduction to river engineering*", Advanced course on water resources management, Perugia, Italia, Feb, 1993
7. Fuentes, R. y Carrasquel, S. "*Una ecuación empírica para zonas de transición*", Publicación N_78-10 del Lab. Nacionalde Hidráulica, Ernesto León, Caracas, Venezuela, Nov, 1978