



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ÁREA HIPERBÓLICA DE
REGIONES FUNDAMENTALES

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A:
LUIS ENRIQUE GUTIERREZ GARCÍA



MEXICO, D. F.



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN ESCOLAR

1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realizó(ó)ron el pasante(s) GUTIERREZ GARCIA LUIS ENRIQUE

con número de cuenta 8510602-4 con el Título:

"EL AREA HIPERBOLICA DE REGIONES FUNDAMENTALES"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO

| GRADO | NOMBRE(S) | APELLIDOS COMPLETOS | FIRMA |
|-------------------|-----------|---------------------|--------------------------------|
| DOCTOR | ANTONIO | LASCURAIN ORIVE | <i>Antonio Lascurain Orive</i> |
| Director de Tesis | | | |
| DOCTORA | SILVIA | DE NEYMET URRINA | <i>Silvia de Neymet Urbina</i> |
| DOCTOR | GUILLELMO | SIENDA LOERA | <i>G. Sienda Loera</i> |
| M. EN C. | FRANCISCO | STUCK CHAVEZ | <i>F. Stuck Chavez</i> |
| Suplente | | | |
| M. EN C. | PILAR | MARTINEZ TELLEZ | <i>Pilar Martínez Tellez</i> |
| Suplente | | | |

Dedico esta tesis a mis padres:

**FRANCISCO GUTIERREZ SANCHEZ
IRENE GARCIA HERRERA**

Por su amor, comprensión y paciencia.

A mis hermanos:

**JORGE
ROSA
ARELI
JAVIER**

Por su amistad, lealtad y compañía.

A mi cómplice y amigo de toda la vida:

FRANCISCO PLATAS LOPEZ

A LA UNAM.

A MI BLANCA LUNA DE MI NEGRA NOCHE.

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| | PROLOGO | 2 |
| CAPITULO 1 | INTEGRAL DE LEBESGUE | 3 |
| | Medida exterior. | 3 |
| | Conjuntos Lebesgue medibles. | 5 |
| | Funciones Lebesgue medibles. | 11 |
| | Funciones simples. | 13 |
| | Integración. | 14 |
| CAPITULO 2 | HOMOLOGIA SINGULAR | 18 |
| | Teoría singular. | 18 |
| | Complejo de cadenas. | 25 |
| | Invariancia homotópica de la homología. | 27 |
| | Homología relativa. | 28 |
| | La sucesión exacta de homología. | 31 |
| | Teorema de escisión. | 35 |
| | Sucesión de Mayer-Vietoris. | 37 |
| | Construcción de complejos esféricos. | 39 |
| | Números de Betti y característica de Euler. | 44 |
| | Teorema de clasificación de superficies compactas orientables. | 47 |
| CAPITULO 3 | GEOMETRIA HIPERBOLICA PLANA | 50 |
| CAPITULO 4 | EL AREA HIPERBOLICA DE REGIONES FUNDAMENTALES | 58 |
| | BIBLIOGRAFIA | 72 |

En este trabajo se exhibe una fórmula para calcular el área hiperbólica de las regiones fundamentales de grupos Fuchsianos actuando en el plano hiperbólico; y por lo tanto de las superficies de Riemann asociadas a dichos grupos. Por otra parte se prueba también que esta área es finita si y solo si el polígono tiene un número finito de lados y no tiene lados libres. La fórmula del área está dada en términos del género y de los órdenes de los ciclos parabólicos y elípticos.

El espíritu de la tesis es mostrar que la matemática es una unidad y no un conglomerado de ramas sin conexiones. De acuerdo con esto se han desarrollado introducciones a la integral de Lebesgue así como a la homología singular (capítulos 1 y 2). Estas teorías se usarán para probar que el área es independiente de la región fundamental y para exhibir la fórmula de la característica de Euler de un complejo esférico. Esta última determinará la fórmula del área.

Los fundamentos de los grupos Fuchsianos y de la geometría hiperbólica plana no se han desarrollado con detalle, sólo se han enumerado las definiciones y los resultados fundamentales (capítulo 3). Una descripción más detallada se puede encontrar en Lehner [5] o en Mosqueda [7].

Finalmente quisiera enfatizar la importancia de este tema en la matemática actual. En un nivel bastante más complejo pero paralelo, el estudio de volúmenes de 3-variedades hiperbólicas es un problema central en la topología de las 3-variedades así como en el estudio de los grupos Kleinianos; En particular encontrar variedades de volumen mínimo, que se sabe que existen, es un problema abierto.

INTEGRAL DE LEBESGUE

MEDIDA EXTERIOR

Sea $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ un rectángulo, se define el área $A(I)$ de I como $A(I) = (b-a)(d-c)$.

Entenderemos por cubierta cerrada de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ como cualquier familia a lo sumo numerable de rectángulos cerrados $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, con el entendimiento que si se tiene cubierta finita, $I_k = \emptyset$ si $j > k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Si ζ es cualquier cubierta cerrada de un conjunto

$E \subset \mathbb{R}^2$, escribimos $\sigma(\zeta) = \sum_{I \in \zeta} A(I)$.

La medida exterior de un subconjunto E de \mathbb{R}^2 , denotada por $|E|_e$, se define como $|E|_e = \inf \sigma(\zeta)$. Donde el infimo es tomado sobre las cubiertas cerradas ζ de E .

Teorema 1.1. Para un rectángulo I , $|I|_e = A(I)$.

DEMOSTRACION. Ya que un rectángulo I es cubierta de sí mismo, tenemos que $|E|_e \leq A(I)$. Para probar la desigualdad inversa, supongase que $\zeta = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una cubierta cerrada de I . Dado $\epsilon > 0$, sea I_k° un rectángulo cuyo interior contenga a I_k tal que $A(I_k^\circ) \leq (1+\epsilon)A(I_k)$. Entonces $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k^\circ)^\circ$, como I es compacto, renombrando los índices se tiene que $I \subset \bigcup_{k=1}^N I_k^\circ$. Claramente se tiene que $A(I) \leq \sum_{k=1}^N A(I_k^\circ)$. (lo cual se puede ver subdividiendo los rectángulos I e I_k , $k=1, \dots, n$ en subrectángulos). Por tanto,

$$A(I) \leq \sum_{k=1}^N A(I_k^\circ) \leq (1+\epsilon) \sum_{k=1}^N A(I_k) \leq (1+\epsilon)\sigma(\zeta).$$

Ya que ϵ puede ser arbitrariamente pequeño, se sigue que $A(I) \leq \epsilon(\zeta)$ y por tanto $A(I) \leq |I|_o$. \square

Teorema 1.2. Sea $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces $|E|_o \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_o$.

DEMOSTRACION. Podemos suponer que $|E_k|_o < \infty$ para $k \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon > 0$ fijo, para cada k elijamos una cubierta cerrada

$\{I_j^k\}_j$ de E_k tal que $\sum_j A(I_j^k) < |E_k|_o + \epsilon/2^k$. Puesto que

$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_j I_j^k \right)$, tenemos $|E|_o \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j A(I_j^k)$. Por lo tanto

$$|E|_o \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|E_k|_o + \epsilon/2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_o + \epsilon,$$

ya que ϵ puede ser arbitrariamente pequeño se sigue el resultado. \square

Observe que la unión numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero.

Como ejemplo construimos el conjunto de Cantor que es un conjunto no numerable de medida cero.

Consideremos el conjunto $I \times I = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ dividamos $I \times I$ en nueve cuadrados de igual área y tomemos solo los cuatro cuadrados cerrados de las esquinas. Llamémosle a la unión de estos C_1 . Ahora repitamos la operación en los cuatro cuadrados de C_1 , obtenemos 16 cuadrados y llamémosle a su unión C_2 . Continuamos la operación sucesivamente obteniendo C_3, C_4, \dots . Se define el

conjunto de Cantor en \mathbb{R}^2 como $C^2 = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$

ya que los conjuntos C_k son cerrados se sigue que C^2 es cerrado. Los C_k consisten de 2^{2k} cuadrados cerrados de área $(3^{-k})^2$. C^2 contiene los vértices de todos estos cuadrados. Cualquier punto de C^2 pertenece a un cuadrado en C_k para

cada k y es por lo tanto un punto límite de los vértices de los cuadrados. Esto prueba que C^2 es perfecto. Finalmente, ya que C^2 está cubierto por los cuadrados de cualquier C_k , $|C^2|_e \leq (2^2 3^{-k})^2$ para toda k . Por tanto $|C^2|_e = 0$.

Teorema 1.3. Si $E \subset \mathbb{R}^2$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto G tal que $E \subset G$ y $|G|_e \leq |E|_e + \epsilon$. Por tanto $|E|_e = \inf |G|_e$. Donde el ínfimo es tomado sobre todos los conjuntos abiertos G que continen a E .

DEMOSTRACION. Dado $\epsilon > 0$, elijamos rectángulos I_k tal que $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} A(I_k) \leq |E|_e + \epsilon/2$. Sea I_k^0 un rectángulo que contiene a I_k en su interior de tal manera que $A(I_k^0) \leq A(I_k) + \epsilon/2^{k+1}$. Si $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k^0)^0$, entonces G es abierto y contiene a E . Además,

$$|G|_e \leq \sum_{k=1}^{\infty} A(I_k^0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} A(I_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon/2^{k+1} \leq |E|_e + 1/2\epsilon + 1/2\epsilon = |E|_e + \epsilon. \quad \square$$

CONJUNTOS LEBESGUE MEDIBLES

Un subconjunto E de \mathbb{R}^2 se dice que es Lebesgue medible, o simplemente medible, si dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto G tal que $E \subset G$ y $|G - E|_e \leq \epsilon$.

Si E es medible, su medida exterior es llamada medida de Lebesgue o simplemente su medida y es denotada $|E|$; es decir

$$|E| = |E|_e, \text{ para } E \text{ medible}$$

Cualquier conjunto abierto es medible, esto es inmediato de la definición.

Cualquier conjunto de medida cero es medible. Supóngase que $|E|_e = 0$, entonces dado $\epsilon > 0$, por el teorema 1.3 existe un conjunto abierto G conteniendo a E tal que $|G| < |E|_e + \epsilon$. Por tanto

$$|G - E|_e \leq |G| < \epsilon.$$

Para ejemplo de conjunto no medible ver Wheeden [10] pag.46.

Teorema 1.4. La unión numerable $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ de conjuntos medibles es medible y $|E| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|$.

DEMOSTRACION. Sea $\epsilon > 0$, para cada $k=1,2,\dots$. Elijamos un conjunto abierto G_k tal que $E_k \subset G_k$ y $|G_k - E_k|_e \leq \epsilon/2^k$.

Entonces $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ es abierto y $E \subset G$. Mas aún, ya que

$G - E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k - E_k)$, tenemos

$$|G - E|_e \leq \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k - E_k) \right|_e \leq \sum_{k=1}^{\infty} |G_k - E_k|_e < \epsilon.$$

Esto prueba que E es medible. La desigualdad es consecuencia del teorema 1.2. \square

Corolario 1.5. Un rectángulo I es medible y $|I| = A(I)$.

DEMOSTRACION. I es la unión de su interior y su frontera, ya que estos son medibles entonces del teorema 1.4 se sigue que I es medible y del teorema 1.1. que $A(I) = |I|$. \square

Teorema 1.6. Cualquier conjunto cerrado es medible.

Para probar este teorema necesitamos de los siguientes lemas:

Lema 1.7. Cualquier conjunto abierto en \mathbb{R}^2 puede ser escrito como una unión numerable de cuadrados cerrados que no se intersectan en sus interiores.

DEMOSTRACION. Se define K_0 como el conjunto de cuadrados en \mathbb{R}^2 determinados por los puntos con coordenadas enteras. Bisectando los lados de cada cuadrado en K_0 , obtenemos cuatro subcuadrados cuyos lados tienen longitud $1/2$, esta nueva colección de subcuadrados la llamamos K_1 . Si continuamos bisectando, obtenemos colecciones de cuadrados K_j cuyos lados tienen longitud $1/2^j$ $j=2,3,\dots$. Ahora,

sea G cualquier abierto en \mathbb{R}^2 . S_0 la colección de todos los cuadrados en K_0 que están contenidos en G . Sea S_1 los cuadrados en K_1 que están contenidos en G pero que no son subcuadrados de algún cuadrado de S_0 . En general, para $j \geq 1$. Sea S_j la colección de cuadrados en K_j contenidos en G pero que no son subcuadrados de ningún cuadrado en S_0, \dots, S_{j-1} . Si S denota la colección total de cuadrados de todos los S_j , entonces S es un conjunto numerable de cuadrados. Además, ya que G es abierto y los diámetros de los cuadrados de K_j tienden a cero cuando j tiende a infinito, se tiene que $G = \bigcup Q$. \square

Q.E.D.

Lema 1.8. Si $\{I_k\}_{k=1}^N$ es una colección finita de rectángulos tales que $I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces $\bigcup_{k=1}^N I_k$ es medible y

$$\left| \bigcup_{k=1}^N I_k \right| = \sum_{k=1}^N |I_k|.$$

DEMOSTRACION. Por el teorema 1.4 $\bigcup_{k=1}^N I_k$ es medible ya que cada

I_k es medible y además $\left| \bigcup_{k=1}^N I_k \right| \leq \sum_{k=1}^N |I_k|$. Ahora, supóngase

que $\zeta = \{E_i\}_{i=1}^m$ es una cubierta cerrada de $\bigcup_{k=1}^N I_k$. Dado

$\epsilon > 0$, sea E_k° un rectángulo cuyo interior contenga a E_k

tal que $A(E_k^\circ) \leq (1+\epsilon)A(E_k)$. Entonces $\bigcup_{k=1}^N I_k \subset \bigcup_{k=1}^m (E_k^\circ)^\circ$,

como $\bigcup_{k=1}^N I_k$ es compacto renombrando los índices se tiene

$$\bigcup_{k=1}^N I_k \subset \bigcup_{i=1}^m E_i^\circ.$$

Procediendo como en el teorema 1.1. $\sum_{k=1}^N A(I_k) \leq \sum_{i=1}^m A(E_i^\circ)$

(ya que los I_k no se traslapan), por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^N A(I_k) \leq \sum_{k=1}^N A(E_k^*) \leq (1+\epsilon)\sigma(\zeta).$$

Ya que ϵ puede ser arbitrariamente pequeño, se sigue que

$$\sum_{k=1}^N A(I_k) \leq \left| \bigcup_{k=1}^N I_k \right|. \quad \square$$

Definición. Se define la distancia entre dos conjuntos E_1 y E_2 como $d(E_1, E_2) = \inf \{ |x_1 - x_2| : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \}$.

Lema 1.9. Si $d(E_1, E_2) > 0$ entonces $|E_1 \cup E_2|_o = |E_1|_o + |E_2|_o$.

DEMOSTRACION. Por el teorema 2.1 $|E_1 \cup E_2|_o \leq |E_1|_o + |E_2|_o$.

Ahora, sea $\epsilon > 0$ y elijamos intervalos $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $E_1 \cup E_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq |E_1 \cup E_2|_o + \epsilon$. Podemos suponer que el diámetro de cada I_k es menor que $d(E_1, E_2)$. (De otro modo, dividimos cada I_k en un número finito de subintervalos con esa propiedad). Por tanto $\{I_k\}$ se separa en dos subcubiertas $\{I_k^1\}$ y $\{I_k^2\}$, la primera cubre E_1 y la segunda E_2 . Claramente,

$$|E_1|_o + |E_2|_o \leq \sum |I_k^1| + \sum |I_k^2| = \sum |I_k| \leq |E_1 \cup E_2|_o + \epsilon.$$

Por lo tanto, $|E_1|_o + |E_2|_o \leq |E_1 \cup E_2|_o$. □

Obsérvese que si E_1 y E_2 son compactos y disjuntos entonces $d(E_1, E_2) > 0$ y por tanto $|E_1 \cup E_2|_o = |E_1|_o + |E_2|_o$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.6. Supóngase que F es compacto. Dado $\epsilon > 0$, elijamos un abierto G tal que $F \subset G$ y $|G| \leq |F|_o + \epsilon$, ya que $G - F$ es abierto entonces existen cuadrados que no se traslapan $I_k, k=1, 2, \dots$, tal que $G - F = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Por lo tanto $|G - F| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$, por lo que

es suficiente demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq c$.

Tenemos $G = F \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) \supset F \cup \left(\bigcup_{k=1}^N I_k \right)$ para cada entero

positivo N . Por tanto $|G| \geq \left| F \cup \left(\bigcup_{k=1}^N I_k \right) \right|_o = |F|_o + \left| \bigcup_{k=1}^N I_k \right|_o$,

por el lema 1.8, F y $\bigcup_{k=1}^N I_k$ son disjuntos y compactos,

ahora como $\left| \bigcup_{k=1}^N I_k \right|_o = \sum_{k=1}^N |I_k|$ por el lema 1.7, obtenemos

$\sum_{k=1}^N |I_k| \leq |G| - |F|_o < c$ para cada N , por lo que $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq c$

como esperabamos. Esto prueba el resultado en el caso donde F es compacto. Para complementar la prueba, sea F cualquier

subconjunto cerrado de \mathbb{R}^2 y escribamos $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, donde

$F_k = F \cap \{x : |x| \leq k\}$, $k=1,2,\dots$, cada F_k es compacto y por lo tanto medible por lo que F es medible. \square

Definición. Una colección Σ de subconjuntos de X es llamada una σ -álgebra si satisface las siguientes condiciones:

i) $X \in \Sigma$.

ii) $E^c \in \Sigma$ si $E \in \Sigma$.

iii) $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma$ si $E_k \in \Sigma$, $k=1,2,\dots$

Observese que como $(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c$ se tiene $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma$ si $E_k \in \Sigma$, $k=1,2,\dots$.

Teorema 1.10. La colección de subconjuntos de \mathbb{R}^2 medibles es una σ -álgebra.

DEMOSTRACION. La unión numerable de conjuntos medibles es medible (teorema 1.4). Por lo que basta demostrar que el complemento de un conjunto medible es medible. Sea E medible, para cada entero positivo k elijamos un abierto G_k

tal que $E \subset G_k$ y $|G_k - E|_0 < 1/k$. Sea $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k^c$, entonces H es medible puesto que es unión de cerrados, además $H \subset E^c$. Escribimos $E^c = H \cup Z$ donde $Z = E^c - H$. Entonces $Z \subset E^c - G_k^c = G_k - E$, y por lo tanto $|Z|_0 < 1/k$ para todo k , entonces $|Z|_0 = 0$ y en particular Z es medible. Por lo tanto E^c es medible ya que es unión de dos medibles. \square

Lema 1.11. *Un conjunto E en \mathbb{R}^2 es medible si y solo si, dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto cerrado $F \subset E$ tal que*

$$|E - F|_0 < \epsilon.$$

DEMOSTRACION. E es medible si y sólo si E^c es medible, esto es, si y sólo si dado $\epsilon > 0$, existe un abierto G tal que $E^c \subset G$ y $|G - E^c|_0 < \epsilon$. Este conjunto abierto G existe si y solo si el conjunto cerrado $F = G^c$ satisface $F \subset E$ y $|E - F|_0 < \epsilon$. (Ya que $G - E^c = E - F$). \square

Teorema 2.9. *Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección numerable de conjuntos medibles disjuntos entonces $|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|$.*

OBSERVACION. A esta propiedad se le llama propiedad de aditividad numerable y se dice que la medida es σ -aditiva.

DEMOSTRACION. Primero supóngase que cada E_k es acotado. Dado $\epsilon > 0$ y $k=1, 2, \dots$, usemos el lema anterior para elegir un cerrado $F_k \subset E_k$ con $|E_k - F_k| < \epsilon/2^k$. Entonces $|E_k| \leq |F_k| + \epsilon/2^k$ por el teorema 1.4. Ya que los E_k son acotados y disjuntos,

los F_k son compactos y disjuntos. Por lo tanto, por el lema 1.8 $|\bigcup_{k=1}^n F_k| = \sum_{k=1}^n |F_k|$ para cada n . El hecho que

$\bigcup_{k=1}^n F_k \subset \bigcup_{k=1}^n E_k$ implica $\sum_{k=1}^n |F_k| \leq |\bigcup_{k=1}^n E_k|$. Por lo tanto

$$|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| \geq \sum_{k=1}^{\infty} (|E_k| - \epsilon/2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k| - \epsilon.$$

por lo que $|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|$. Ya que la otra desigualdad es siempre cierta el teorema se sigue en este caso. Para el caso general, sea $I_j, j=1,2,\dots$, una sucesión anidada de rectángulos cerrados que cubra \mathbb{R}^2 y definamos $S_1 = I_1$ y $S_j = I_j - I_{j-1}$ para $j \geq 2$. Entonces los conjuntos $E_{k,j} = E_k \cap S_j, k, j=1,2,\dots$, son acotados, disjuntos y medibles. Ahora

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k,j} \quad \text{y} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k,j} \right),$$

Por lo tanto usando el primer caso tenemos

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right| &= \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k,j} \right) \right| = \left| \bigcup_{k,j} E_{k,j} \right| = \sum_{k,j} |E_{k,j}| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |E_{k,j}| \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|. \quad \square \end{aligned}$$

FUNCIONES LEBESGUE MEDIBLES

Sea $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que f es Lebesgue medible en E , o simplemente medible, si para cada a finito, el conjunto $\{x \in E / f(x) > a\}$ es un subconjunto medible en \mathbb{R}^2 .

Si $E = \mathbb{R}^2$ y f es continua en \mathbb{R}^2 , entonces $\{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) > a\}$ es siempre abierto, por lo que toda función continua de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} es medible.

Teorema 1.12. Sea $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es medible si y solo si cualquiera de las condiciones se cumple para toda a real.

- i) $\{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) \geq a\}$ es medible.
- ii) $\{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) < a\}$ es medible.
- iii) $\{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) \leq a\}$ es medible.

DEMOSTRACION. Ya que $\{x \in E / f(x) \geq a\} = \bigcap \{x \in E / f(x) > a - k^{-1}\}$ la medibilidad de f implica (i). Ya que $\{x \in E / f(x) < a\}$ es el complemento de $\{x \in E / f(x) \geq a\}$ se sigue que (i) implica (ii). Ya que $\{x \in E / f(x) \leq a\} = \bigcap \{x \in E / f(x) < a + k^{-1}\}$, se ve

que (ii) implica (iii). Finalmente, ya que $\{x \in E / f(x) > a\}$ es el complemento de $\{x \in E / f(x) \leq a\}$, se sigue que f es medible si (iii) lo es.

Teorema 1.12. Si f es medible, $|f|$ es medible.

DEMOSTRACION.

$$\{x / |f(x)| < a\} = \{x / f(x) < a\} \cup \{x / f(x) > -a\} \quad \square$$

Teorema 1.13. Si $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces $\sup_k f_k(x)$ y $\inf_k f_k(x)$ son medibles.

DEMOSTRACION. Ya que $\inf_k f_k(x) = -\sup_k (-f_k(x))$ es suficiente probar el resultado para $\sup_k f_k$. Pero esto se sigue fácilmente del hecho que

$$\{x / \sup_k f_k(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x / f_k(x) > a\}. \quad \square$$

Como caso especial del teorema anterior, vemos que si f_1, \dots, f_n son medibles, entonces $\max_k f_k(x)$ y $\min_k f_k(x)$ lo son. En particular, si f es medible, entonces lo son $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = -\min(f, 0)$.

Si $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de \mathbb{R} , sea

$$b_j = \sup_{k \geq j} a_k \text{ y } c_j = \inf_{k \geq j} a_k, \quad j=1, 2, \dots$$

Entonces $-\infty \leq c_j \leq b_j \leq +\infty$, y $\{b_j\}$ y $\{c_j\}$ son monótona creciente y decreciente respectivamente. Se define

$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$ y $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$ como

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq j} a_k \right)$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{j \rightarrow \infty} c_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq j} a_k \right)$$

Además la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un punto x en \mathbb{R} si y solo si $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k = x$. Ver Wheeden [10] pag. 4.

Teorema 1.14. Si $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones, medibles $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ y $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ son medibles.

DEMOSTRACION. Ya que $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{ \sup_{j \geq k} f_j(x) \}$ y $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{ \inf_{j \geq k} f_j(x) \}$.

El teorema se sigue del teorema anterior. \square

Corolario 1.15. El límite de una sucesión convergente de funciones medibles es medible.

FUNCIONES SIMPLES

Definición. Sea s una función real definida en \mathbb{R}^2 . Si el rango de s es finito, decimos que s es una función simple. Sea $E \subset \mathbb{R}^2$, y pongamos

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

A χ_E se le llama la función característica de E .

Supongamos que el rango de s consta de los números c_1, \dots, c_n , $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$. Sea $E_i = \{x/s(x) = c_i\}$ $i=1, \dots, n$

Entonces $s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$, es decir, toda función simple es una combinación lineal finita de funciones características. Es evidente que s es medible si y solo si los conjuntos E_1, \dots, E_n son medibles.

Teorema 1.16. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) f puede ser escrita como el límite de una sucesión $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funciones simples.
- ii) Si $f(x) \geq 0 \forall x$, la sucesión de (i) se puede elegir creciente, esto es, tal que $f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \forall k, \forall x$.
- iii) Si la función f es medible, entonces las f_k en (i) y (ii) pueden ser elegidas medibles.

DEMOSTRACION. Supongamos $f \geq 0$, para cada $k, k=1,2,\dots$, subdividiremos los valores de f los cuales caen en $[0, k]$ con una partici3n de $[0, k]$ en intervalos $[(j-1)2^{-k}, j2^{-k}]$, $j=1,2,\dots,k2^k$. Sea

$$f_k(x) = \begin{cases} (j-1)/2^k & \text{si } (j-1)/2^k \leq f(x) \leq j/2^k, \quad j=1,\dots,k2^k. \\ k & \text{si } f(x) \geq k. \end{cases}$$

Cada f_k es una funci3n simple definida en todo el dominio de f .

Se tiene que $f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \quad \forall x$. Esto se puede ver escribiendo la desigualdad $(j-1)/2^k \leq f(x) \leq j/2^k$ de la forma $(2j-2)/2^{k+1} \leq f(x) \leq 2j/2^{k+1}$.

Adem3s $f_k \rightarrow f$ ya que $0 \leq f - f_k \leq 2^{-k}$ para k suficientemente grande.

Para probar i) aplicamos ii) a cada una de las funciones no negativas f^+ y f^- obteniendo sucesiones crecientes $\{f_k^+\}$ y $\{f_k^-\}$ de funciones simples tal que $f_k^+ \rightarrow f^+$, $f_k^- \rightarrow f^-$. Entonces $(f_k^+ - f_k^-) \rightarrow (f^+ - f^-) = f$.

Por 3ltimo, para $f(x) \geq 0$ tenemos $f_k = (j-1)/2^k \chi_{E_j} + k \chi_{E_k}$, donde $E_j = \{x \in U / (j-1)/2^k \leq f(x) \leq j/2^k\}$ y $E_k = \{x \in U / f(x) \geq k\}$.

Estos conjuntos son medibles si f lo es, por lo que f_k es medible. \square

Se observa que si f es acotada, las funciones simples convergen uniformemente.

INTEGRACION

Supongamos que

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2, \quad c_i > 0)$$

es medible, y $E \subset \mathbb{R}^2$ es medible. Se define

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i |E \cap E_i|$$

Si f es medible y no negativa, se define

$$\int_E f \, dA = \sup I_E(s)$$

donde el supremo es tomado sobre todas las funciones simples s tales que $0 \leq s \leq f$.

A $\int_E f \, dA$ se le llama la integral de Lebesgue de f sobre el conjunto E .

Observese que $\int_E s \, dA = I_E(s)$ para toda función simple s no negativa.

Sea f medible y consideremos las dos integrales

$$\int_E f^+ \, dA \quad \int_E f^- \, dA.$$

Si al menos una es finita, se define

$$\int_E f \, dA = \int_E f^+ \, dA - \int_E f^- \, dA.$$

Si ambas son finitas se dice que f es integrable en E en el sentido de Lebesgue y se denota $f \in \mathcal{L}$.

Teorema 1.17. Sea E un conjunto medible en \mathbb{R}^2 .

i) Si f es medible y acotada en E , y si $|E| < \infty$, entonces $f \in \mathcal{L}$ en E .

ii) Si $a \leq f(x) \leq b$ para $x \in E$, $|E| < \infty$, es

$$a|E| \leq \int_E f \, dA \leq b|E|$$

iii) Si $f, g \in \mathcal{L}$ en E , y si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$

$$\int_E f \, dA \leq \int_E g \, dA$$

iv) Si $f \in \mathcal{L}$ en E , entonces $cf \in \mathcal{L}$ en E para toda constante c , y $\int_E cf \, dA = c \int_E f \, dA$.

v) Si $|E| = 0$, y f medible $\int_E f \, dA = 0$.

vi) Si $f \in \mathcal{L}$ en E , A medible y $A \subset E$, entonces $f \in \mathcal{L}$ en A .

La demostración de éstas afirmaciones es consecuencia inmediata de la definición:

Teorema 1.18.

1) Supongamos que f es medible y no negativa en \mathbb{R}^2 . Para E medible definamos

$$\phi(E) = \int_E f \, dA$$

entonces, ϕ es σ -aditiva en la σ -álgebra de conjuntos medibles de \mathbb{R}^2 .

11) La misma conclusión se cumple para $f \in \mathcal{L}$ en \mathbb{R}^2 .

DEMOSTRACION. Hay que probar que si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, donde $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, y los conjuntos son medibles ($k=1,2,\dots$) entonces $\phi(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k)$, consideramos tres casos:

1) Si $f = \chi_B$

$$\begin{aligned} \phi(E) &= \int_E \chi_B \, dA = |B \cap E| = |B \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)| = |\bigcup_{k=1}^{\infty} (B \cap E_k)| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |B \cap E_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} \chi_B \, dA = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k). \end{aligned}$$

2) Si $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{B_k}$ función simple.

Se tiene

$$\phi(E) = \int_E \sum_{k=1}^n c_k \chi_{B_k} \, dA = \sum_{k=1}^n c_k |B_k \cap E|.$$

Procediendo como en 1) esto es $\sum \phi(E_k)$.

3) Si f es una función cualquiera, se tiene que para cada función simple medible s tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$.

$$\int_E s \, dA = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} s \, dA \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k).$$

Por lo tanto,

$$\phi(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k)$$

Ahora, si $\phi(E_k) = +\infty$ para cualquier k el resultado es

trivial ya que $\phi(E) \geq \phi(E_k)$.

Supongamos que $\phi(E_k) < +\infty \quad \forall k$. Dado $\epsilon > 0$, podemos elegir una función simple $s: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$ y que

$$\int_{E_1} s \, dA \geq \int_{E_1} f \, dA - \epsilon \quad \text{y} \quad \int_{E_2} s \, dA \geq \int_{E_2} f \, dA - \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \phi(E_1 \cup E_2) &\geq \int_{E_1 \cup E_2} s \, dA = \int_{E_1} s \, dA + \int_{E_2} s \, dA \\ &\geq \phi(E_1) + \phi(E_2) - 2\epsilon, \end{aligned}$$

de modo que $\phi(E_1 \cup E_2) \geq \phi(E_1) + \phi(E_2)$.

Se deduce que $\forall k$,

$$\phi(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = \phi(E_1) + \phi(E_2) + \dots + \phi(E_k)$$

como $E \supset E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$, entonces $\phi(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k)$. \square

Corolario 1.19. Si E es medible, $B \subset E$ y $|E - B| = 0$, entonces $\int_E f \, dA = \int_B f \, dA$.

DEMOSTRACION. $E = B \cup (E - B)$, entonces

$$\phi(E) = \phi(B) + \phi(E - B) = \phi(B) + \int_{E-B} f \, dA = \phi(B)$$

ya que $|E - B| = 0$. \square

HOMOLOGIA SINGULAR

Un espacio afín de dimensión n sobre \mathbb{R} es un conjunto E en el cual el grupo aditivo \mathbb{R}^n actúa libre y transitivamente. De este modo para cada par de puntos P, Q en E hay un único vector v en \mathbb{R}^n de Q a P .

Sea $S = \{P_0, \dots, P_n\}$ un subconjunto finito de \mathbb{R}^n . Entonces $\pi(P_0, \dots, P_n)$ o $\pi(S)$ (llamado hiperplano generado por S) es el conjunto de los puntos P de \mathbb{R}^n que pueden escribirse como

$$P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \quad \text{y cada} \quad \lambda_i \quad \text{es un número real.}$$

Decimos que P_0, \dots, P_n son independientes si

$$P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0 \quad \text{son linealmente independientes.}$$

Ahora, si P_0, \dots, P_n son independientes, $\pi(P_0, \dots, P_n)$ es un espacio afín de dimensión n , el cual es llamado espacio generado por P_0, \dots, P_n . Cada punto $S = \sum_{i=0}^n a_i P_i$ en este espacio tiene un único conjunto de coordenadas (a_0, \dots, a_n) llamadas coordenadas baricéntricas relativas a P_0, \dots, P_n . Estas coordenadas son arbitrarias excepto por la ecuación

$$\sum_{i=0}^n a_i = 1.$$

Dados puntos independientes P_0, \dots, P_n , el conjunto S_n que consta de los elementos de $\pi(P_0, \dots, P_n)$ cuyas coordenadas baricéntricas son no negativas forman el n -dimensional simplejo geométrico generado por P_0, \dots, P_n .

Proposición 2.1. S_n es el menor conjunto convexo que contiene a $\{P_0, \dots, P_n\}$.

DEMOSTRACION. Realizaremos la prueba en dos pasos:

a) S_n es convexo. Sean $P, Q \in S_n$,

$$P = \sum_{i=0}^n a_i P_i \quad \text{con } a_i \geq 0, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=0}^n a_i = 1,$$

$$Q = \sum_{i=0}^n b_i P_i \quad \text{con } b_i \geq 0, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=0}^n b_i = 1,$$

calculando

$$tP + (1-t)Q = t \sum_{i=0}^n a_i P_i + (1-t) \sum_{i=0}^n b_i P_i =$$

$$\sum_{i=0}^n (ta_i + (1-t)b_i) P_i \quad \text{con } \sum_{i=0}^n (ta_i + (1-t)b_i) = 1.$$

Por tanto, $tP + (1-t)Q \in S_n$ si $0 \leq t \leq 1$, esto muestra que S_n es convexo.

Observemos que $\{P_0, \dots, P_n\} \subseteq S_n$.

b) $S_n \subseteq C$, para todo C convexo que contenga a $\{P_0, \dots, P_n\}$.

Usando inducción sobre n .

Si $n = 0$, entonces $S_0 = \{P_0\} \subseteq C$.

Si $n = 1$, entonces $S_1 = \{tP_0 + (1-t)P_1; 0 \leq t \leq 1\} \in C$, ya que C es convexo.

Suponiendo que la hipótesis vale para k .

Si $n = k + 1$, sea $\sum_{i=0}^n a_i P_i \in S_n$, entonces si $a_n \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^k \frac{a_i}{(1-a_n)} P_i \in C \quad \text{y} \quad P_n \in C.$$

Por tanto,

$$(1-a_n) \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{(1-a_n)} P_i + a_n P_n = \sum_{i=0}^n a_i P_i \in C.$$

De aquí se tiene que $S_{k+1} \subseteq C$. □

Una función f de un espacio afín E a otro E' se llamará transformación afín si

$$f(tP + (1-t)Q) = tf(P) + (1-t)f(Q), \quad \forall P, Q \in E \text{ y } t \in \mathbb{R}.$$

Si P_0, \dots, P_n son independientes y $E = \pi(P_0, \dots, P_n)$ la transformación afín está únicamente determinada por su efecto

en estos puntos, ya que

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(P_i).$$

Para mostrar lo anterior apliquemos inducción sobre n . Si

$a_0 \neq 1$, en otro caso es trivial,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^n a_i P_i\right) &= f\left(a_0 P_0 + (1 - a_0) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(1 - a_0)} P_i\right) \\ &= a_0 f(P_0) + (1 - a_0) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(1 - a_0)} P_i\right) \end{aligned}$$

y por hipótesis de inducción es igual a

$$a_0 f(P_0) + (1 - a_0) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(1 - a_0)} f(P_i) = \sum_{i=0}^n a_i f(P_i).$$

Inversamente, dados cualesquiera puntos $f(P_1), \dots, f(P_n)$ en \mathbb{R}^m , estos valores definen una única transformación afín $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($E = \pi(P_0, \dots, P_n)$), definida por

$$f\left(\sum_{i=0}^n a_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n a_i f(P_i).$$

Ya que si $P, Q \in E$,

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^n a_i P_i, \quad Q = \sum_{i=0}^n b_i P_i \\ f(tP + (1 - t)Q) &= \sum_{i=0}^n f(ta_i + (1 - tb_i)P_i) = \\ &= \sum_{i=0}^n ta_i f(P_i) + \sum_{i=0}^n (1 - t)b_i f(P_i) = \\ t \sum_{i=0}^n a_i f(P_i) + (1 - t) \sum_{i=0}^n b_i f(P_i) &= t f(P) + (1 - t)f(Q). \end{aligned}$$

TEORIA SINGULAR

De aquí en adelante todas las funciones consideradas serán funciones continuas.

Para cada $n \geq 0$, consideremos los vectores en \mathbb{R}^n ,

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots,$$

$$e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

o

Δ_n denota el n -dimensional simplejo geométrico generado por e_0, e_1, \dots, e_n . Esto es Δ_0 es un punto; Δ_1 el intervalo unitario $[0, 1]$; Δ_2 es un triángulo (con su interior) que tiene como vértices e_0, e_1, e_2 ; Δ_3 es un tetraedro etc. Dado un espacio topológico X , un n -simplejo singular en X es una función $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$.

Si R es un anillo conmutativo con unidad, se define $S_n(X)$ como el R -módulo libre generado por todos los n -simplejos singulares en X . Los elementos de $S_n(X)$ son combinaciones formales

$$\sum v_\sigma \sigma$$

donde σ corre a través de los n -simplejos y los coeficientes son elementos de R . Estas sumas son llamadas n -cadenas singulares.

Si P_0, \dots, P_n son puntos de \mathbb{R}^n , $(P_0 \dots P_n)$ denotará la restricción a Δ_n de la única transformación afín $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que envía e_0 en P_0, \dots, e_n en P_n . De este modo $(e_0 \dots e_n)$ es la transformación identidad de Δ_n .

Dado $n > 0$, para $0 \leq i \leq n$,

$$F_n^i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$$

es la transformación afín $(e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_n)$ donde \hat{e}_i significa "omitir e_i "; en otras palabras,

$$F_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j < i, \\ e_{j+1} & \text{si } j \geq i. \end{cases}$$

Análogamente $(e_0 \dots \hat{e}_i \dots \hat{e}_j \dots e_n)$ denota la transformación afín donde "omitimos e_i y e_j ", es decir, la transformación $f : \Delta_{n-2} \rightarrow \Delta_n$ donde

$$f(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } k < j, \\ e_{k+1} & \text{si } j \leq k \leq i-1, \\ e_{k+2} & \text{si } k \geq i-1. \end{cases}$$

Para un n -simplejo singular arbitrario σ en un espacio X se define la i -ésima cara $\sigma^{(i)}$ de σ como el $(n-1)$ -simplejo singular $\sigma \circ F_n^i$.

Como ejemplo tomamos $n = 2$ y $\sigma: \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$ la identidad en Δ_2 .

La frontera de un n -simplejo singular σ es la $(n-1)$ -cadena singular $\partial(\sigma) = \sum (-1)^i \sigma^{(i)}$.

Ahora extendemos ∂ a un homomorfismo de módulos

$$S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

por linealidad; de este modo $\partial(\sum v_\sigma \sigma) = \sum v_\sigma \partial(\sigma)$.

Para $n = 0$, la frontera de una 0-cadena se define como 0.

Lema 2.2. $F_n^i F_n^j = F_n^j F_n^{i-1}$ para $j < i$.

DEMOSTRACION. $F_n^i F_n^j = (e_0 \dots \hat{e}_j \dots \hat{e}_{i-1} \dots e_n) = F_n^j F_n^{i-1}$. \square

Proposición 2.3. $\partial\partial = 0$.

DEMOSTRACION. Es suficiente verificar que $\partial(\partial\sigma) = 0$ cuando σ es un n -simplejo singular. Usando el lema 2.2.

$$\begin{aligned} \partial(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial(\sigma^{(i)}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (\sigma \circ F_n^i) \circ F_n^j = \\ &= \sum_{j < i=1}^n (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_n^j F_n^{i-1}) + \sum_{0=1 \leq j}^{n-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_n^i F_n^j). \end{aligned}$$

Cambiando los índices al primer miembro de la suma de tal forma que $i' = j$, $j' = i-1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j < i=1}^n (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_n^j F_n^{i-1}) &= \sum_{i' < j'+1=1}^n (-1)^{j'+i'+1} \sigma \circ (F_n^{i'} F_n^{j'}) = \\ &= \sum_{0=1' \leq j'}^{n-1} (-1)^{j'+i'+1} \sigma \circ (F_n^{i'} F_n^{j'}). \end{aligned}$$

Por lo que ambos miembros de la suma se cancelan. \square

Una n -cadena singular c tal que $\partial(c) = 0$ es llamada ciclo; si $c = \partial(c')$ para alguna $(n+1)$ -cadena c' , c es llamada frontera. Dos n -cadenas c_1, c_2 las cuales difieren por una

frontera son llamadas homólogas y escribimos $c_1 \sim c_2$.

Por la proposición 2.3.; las fronteras forman un submódulo $B_n(X)$ de el módulo $Z_n(X)$ de ciclos; el módulo cociente $Z_n(X)/B_n(X)$ es llamado el n -ésimo módulo de homología singular de X , denotado por $H_n(X; R)$ o $H_n(X)$ cuando la referencia de R es sobreentendida.

EJEMPLO 1. X es un único punto x . Hay un único n -simplejo σ_n para cada n (función constante en x). Tenemos

$$\partial(\sigma_n) = \begin{cases} \sigma_{n-1} & n \text{ par mayor que cero} \\ 0 & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Ya que $\partial(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}$ y $\sigma^{(i)}$ es la función constante con valor x , para toda i . Por lo tanto

$$Z_n = B_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par mayor que cero} \\ S_n & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Por lo que $H_n = 0$, para toda $n > 0$. Sin embargo $Z_0 = S_0$ mientras $B_0 = 0$, por lo que $H_0 \cong R$, el isomorfismo es $v\sigma_0 \rightarrow v$.

Proposición 2.4. Sea (X_k) la familia de componentes conexas por trayectorias de X . Entonces hay un isomorfismo canónico

$$H_n(X) \cong \bigoplus_k H_n(X_k) \text{ para todo } n \geq 0.$$

DEMOSTRACION. Como Δ_n es conexo por trayectorias un n -simplejo singular σ envía Δ_n en alguna componente por trayectoria X_k . De este modo cada n -cadena c se descompone en una suma $c = \sum_k c_k$ donde c_k es una n -cadena singular en X_k . Por lo tanto se tiene el isomorfismo canónico

$$S_n(X) \cong \bigoplus_k S_n(X_k) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Y además la frontera opera componente a componente. \square

Proposición 2.5. $H_0(X)$ es un R -módulo libre con tantos generadores como componentes por trayectoria hay en X .

DEMOSTRACION. Por la proposición 2.4. Podemos suponer que X es conexo. Eligiendo un punto base x_0 en X . Para cada x en X , sea σ_x una trayectoria de x_0 a x , por lo que

$$\partial(\sigma_x) = x - x_0.$$

Dada una 0-cadena

$$c = \sum_x v_x x$$

Afirmamos que c es una frontera si y sólo si la suma de sus coeficientes es cero: si $\sum_x v_x = 0$, entonces

$$c = \sum_x v_x x - (\sum_x v_x) x_0 = \partial(\sum_x v_x \sigma_x).$$

El recíproco es inmediato. Ahora cada 0-cadena es un ciclo. La función que envía c en la suma de sus coeficientes es un homomorfismo de S_0 en R con Kernel B_0 . De este modo, por el primer teorema de isomorfismo $H_0(X) \cong R$. \square

Observación 1. El módulo de homología reducida $H_0^{\bullet}(X)$ es obtenido definiendo un diferente operador frontera sobre 0-cadenas

$$\partial^{\bullet}(\sum_x v_x x) = \sum_x v_x.$$

Se puede verificar que $\partial^{\bullet} \partial = 0$. $H_0^{\bullet}(X)$ es el cociente de el kernel de ∂^{\bullet} por las fronteras de 1-cadenas. Si X es conexo por trayectorias, $H_0^{\bullet}(X) = 0$, mientras si X tiene r componentes por trayectoria, $r > 1$, $H_0^{\bullet}(X)$ es un R -módulo libre sobre $(r - 1)$ generadores, por lo que es llamado homología reducida.

Para $n > 0$ definimos $H_n^{\bullet}(X) = H_n(X)$.

Consideramos ahora propiedades functoriales. Sea $f: X \rightarrow X'$ función. Si σ es un n -simplejo singular en X , $f \circ \sigma$ es uno en X' . Obtenemos un homomorfismo $S_n(f): S_n(X) \rightarrow S_n(X')$ por

$$S_n(f)(\sum v_\sigma \sigma) = \sum v_\sigma (f \circ \sigma).$$

Es claro que

- (1) $S_n(\text{Identidad}) = \text{Identidad}$,
- (2) $S_n(g \circ f) = S_n(g) \circ S_n(f)$.

Lema 2.6. $\partial S_n(f) = S_{n-1}(f)\partial$.

DEMOSTRACION. Se sigue a partir de que $(f \circ \sigma) \circ F_n^1 = f \circ (\sigma \circ F_n^1) \square$

Lema 2.7. $S_n(f): S_n(X) \rightarrow S_n(X')$ envia $B_n(X)$ en $B_n(X')$ y $Z_n(X)$ en $Z_n(X')$.

DEMOSTRACION. Sea $c \in B_n(X)$, entonces existe $c' \in S_{n+1}(X)$ tal que $\partial(c') = c$, ahora $S_n(f)c = S_n(f)\partial c' = \partial(S_{n+1}(f)c')$. Por lo que $S_n(f)c \in B_n(X')$. Sea $z \in Z_n(X)$,

$$0 = S_{n-1}(f)\partial z = \partial(S_n(f)z). \text{ Por lo que } S_n(f)z \in Z_n(X'). \square$$

Si z es un ciclo en X , \bar{z} su clase de homología, obtenemos un homomorfismo

$$H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(X')$$

con $H_n(f)(\bar{z}) = \overline{S_n(f)(z)}$. El cual está bien definido por el lema anterior. También es claro que:

- (1) $H_n(\text{Identidad}) = \text{Identidad}$,
- (2) $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$.

OBSERVACION 2. H_n es un functor de la categoría de espacios topológicos en la categoría de R -módulos para cada $n \geq 0$. De este modo los módulos de homología son invariantes topológicos.

COMPLEJO DE CADENAS

Definición. Un complejo de cadenas sobre R es una sucesión $C = \{C_n, \partial_n\}$ de R -módulos libres y homomorfismos $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$

tal que $\partial_n \partial_{n-1} = 0$.

$$C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}$$

Si $n < 0$, entonces $C_n = 0$. Un elemento de C_n tiene dimensión n . El complejo singular de un espacio X es el ejemplo donde $C_n = S_n(X)$ y ∂_n es la función frontera. Frecuentemente abreviamos $\{S_n(X)\}$ por $S(X)$.

Definición. Una sucesión de homomorfismos $\{f_n\}$ con

$$f_n: C_n \rightarrow C'_n$$

es una función de cadenas si $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$.

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & C'_n \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C'_{n-1} \end{array}$$

Por ejemplo, una función de espacios $f: X \rightarrow Y$ induce una función de cadenas $S(f): S(X) \rightarrow S(Y)$.

Como en el caso topológico, introducimos $Z_n(C)$, $B_n(C)$, los submódulos de C_n definimos por

$$Z_n(C) = \ker \partial_n \quad n\text{-ciclos}$$

$$B_n(C) = \operatorname{Im} \partial_{n-1} \quad n\text{-fronteras.}$$

Definición. El n -ésimo módulo de homología de C está definido por

$$H_n(C) = Z_n(C) / B_n(C).$$

Por construcción, $H_n(C)$ es un R -módulo. Si $z \in Z_n(C)$ escribimos \bar{z} para el elemento correspondiente en $H_n(C)$.

Una función de cadenas $f: C \rightarrow C'$ envía ciclos a ciclos y fronteras a fronteras. Por lo tanto induce un homomorfismo bien definido

$$\begin{aligned} H_n(f): H_n(C) &\longrightarrow H_n(C') \\ H_n(f)(\bar{z}) &= \overline{f_n(z)}. \end{aligned}$$

De este modo H define un functor de la categoría de complejo de cadenas sobre R y funciones de cadena a la categoría de

R-módulos y homomorfismos.

Definición. Una homotopía de cadenas entre funciones de cadenas

$$f = \{f_n: C_n \rightarrow C'_n\} \text{ y } g = \{g_n: C_n \rightarrow C'_n\}$$

es una sucesión $D = \{D_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}\}$ de homomorfismos tal

$$\text{que } \partial'_{n+1} D_n + D_{n-1} \partial_n = f_n - g_n.$$

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C'_{n+1} & \longrightarrow & C'_n & \longrightarrow & C'_{n-1} \end{array}$$

Escribimos $f = g$. (Si $C_n = 0$ para $n < 0$, la ecuación se lee $\partial'_1 D_0 = f_0 - g_0$).

Proposición 2.8. *Funciones de cadena homotópicas inducen las mismas funciones en homología.*

DEMOSTRACION. Sea $\bar{z} \in H_n(C)$ una clase con representante $z \in Z_n(C)$. Entonces

$$f_n(z) - g_n(z) = \partial'_{n+1} D_n(z) + D_{n-1} \partial_n(z) = \partial'_{n+1} D_n(z) \in B_n(C')$$

Por tanto

$$H_n(f)(\bar{z}) = H_n(g)(\bar{z}). \quad \square$$

INVARIANCIA HOMOTÓPICA DE LA HOMOLOGÍA.

Un rasgo fundamental de los funtores de homología es su invariancia homotópica; funciones homotópicas inducen la misma función en homología. Espacios de el mismo tipo de homotopía tienen módulos de homología isomorfos.

Teorema 2.9. *Si $f, g: X \rightarrow Y$ son funciones homotópicas, entonces $S(f)$ y $S(g)$ son funciones de cadena homotópicas $S(X) \rightarrow S(Y)$.*

Vease Greenberg [2] pag. 59.

Teorema 2.10. Si $f, g : X \rightarrow Y$ son funciones homotópicas para cada $n \geq 0$, los homomorfismos inducidos $H_n(f)$ y $H_n(g)$ en los módulos de homología son iguales.

DEMOSTRACION. Si $f, g : X \rightarrow Y$ son funciones homotópicas, por el teorema anterior $S(f)$ y $S(g)$ son funciones de cadena homotópicas y por la proposición 2.8 inducen funciones iguales en homología. \square

Teorema 2.11. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces para cada $n \geq 0$,

$$H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACION. Sea $g : Y \rightarrow X$ una inversa homotópica a f .

Entonces $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ y $g \circ f \simeq \text{id}_X$. Por lo que

$$H_n(f) \circ H_n(g) = 1 \quad \text{y} \quad H_n(g) \circ H_n(f) = 1.$$

Por lo tanto $H_n(f)$ y $H_n(g)$ son isomorfismos inversos.

Teorema 2.12. (Relación entre π_1 y H_1).

Sea X un espacio topológico conexo por trayectorias entonces

$H_1(X, \mathbb{Z})$ es la abelianización de $\pi_1(X)$.

Ver Greenberg [2] capítulo 12.

HOMOLOGIA RELATIVA

Sea A un subespacio de X . Entonces para cada $n \geq 0$, $S_n(A)$ es el submódulo de $S_n(X)$ que consiste de las combinaciones lineales de n -simplejos singulares $\Delta_n \rightarrow X$ cuya imagen esta contenida en A . Podemos entonces formar el módulo cociente, y ya que el operador frontera envía $S_n(A)$ en $S_{n-1}(A)$, se induce un homomorfismo $\bar{\partial}$ el cual hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 S_n(X) & \longrightarrow & S_n(X)/S_n(A) \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \bar{\delta} \\
 S_{n-1}(X) & \longrightarrow & S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A)
 \end{array}$$

es decir, si $c \in S_n(X)$, se define $\bar{\delta}(c) = \bar{\delta}c$. Es inmediato que $\bar{\delta}$ está bien definido.

Claramente $\bar{\delta} \bar{\delta} = 0$. Podemos entonces considerar como antes, los módulos

$$(a) \text{ kernel } \left[S_n(X)/S_n(A) \xrightarrow{\bar{\delta}} S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A) \right]$$

$$(b) \text{ Im } \left[S_{n+1}(X)/S_{n+1}(A) \xrightarrow{\bar{\delta}} S_n(X)/S_n(A) \right]$$

Ya que (b) es submódulo de (a), podemos también formar el módulo cociente, el cual se denota $H_n(X, A)$, [o $H_n(X, A, R)$ si queremos hacer explícito el anillo de coeficientes] y es llamado el n -ésimo módulo de homología relativa de $X \text{ mod } A$. Podemos obtener este módulo directamente de $S_n(X)$ si deseamos. Comenzamos con $c \in S_n(X)$. Supongamos que recorriendo el diagrama anterior c es enviado a $0 \in S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A)$; claramente esto significa que

$$\delta c \in S_{n-1}(A).$$

El conjunto de todos los tales c 's forma un submódulo $Z_n(X, A)$ de $S_n(X)$ cuyos elementos son llamados n -ciclos relativos en $X \text{ mod } A$.

EJEMPLO 2. Si σ es una trayectoria en X , es un 1-ciclo relativo mod A si y sólo si sus puntos finales están en el subespacio A . Más generalmente, un n -simplejo singular es un n -ciclo relativo si y sólo si sus caras están en A .

El módulo $Z_n(X, A)$ es justo la preimagen del homomorfismo cociente del módulo (a) arriba. La preimagen de (b) claramente es el submódulo $B_n(X, A)$ de $S_n(X)$ que consiste de cadenas homólogas a cadenas en $S_n(A)$; Estas son llamadas n -fronteras relativas en $X \text{ mod } A$ (escribimos $c \in c'$

mod A si $c-c'$ es una n -frontera relativa).

Lema 2.13. $H_n(X, A) \cong Z_n(X, A)/B_n(X, A)$.

DEMOSTRACION. Se sigue del tercer teorema de isomorfismo:

Sean $M'' \subset M' \subset M$ R -módulos entonces

$$(M/M'')/(M'/M'') \cong M/M' \quad \square$$

EJEMPLO 3. Si A es vacío, $S_n(A) = 0$ para toda n , por definición, aquí $H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$. De este modo cualquier discusión de módulos de homología relativa incluye a los de homología como caso especial.

Los módulos de homología relativa son functoriales en el par (X, A) donde A es un subespacio de X , es decir, dado otro par (X', A') , A' subespacio de X' y una función

$$f: (X, A) \longrightarrow (X', A'),$$

esto es, $f: X \longrightarrow X'$ y $f(A) \subset A'$, el homomorfismo inducido

$$S_n(f): S_n(X) \longrightarrow S_n(X')$$

envía $S_n(A)$ en $S_n(A')$, por tanto envía $Z_n(X, A)$ en $Z_n(X', A')$ y $B_n(X, A)$ en $B_n(X', A')$, por lo que pasando al cociente induce el homomorfismo

$$H_n(f): H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X', A').$$

Esta cumple las propiedades functoriales

- (1) $H_n(\text{Id}) = \text{Id}$,
- (2) $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$.

EJEMPLO 4. Tenemos siempre una función $j: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ la cual es la función identidad en X , y por tanto el homomorfismo inducido

$$H_n(j): H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A).$$

Por otro lado, la función inclusión $i: A \longrightarrow X$ induce un homomorfismo

$$H_n(i): H_n(A) \longrightarrow H_n(X).$$

Ya que $Z_n(A) \subset B_n(X, A)$, el homomorfismo composición

$$H_n(j \circ i): H_n(A) \longrightarrow H_n(X, A)$$

es el homomorfismo cero.

A los homomorfismos $H_n(j)$ y $H_n(i)$ los denotaremos por i_* y j_* respectivamente.

Observemos que los rectángulos en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A') & \xrightarrow{i'_*} & H_n(X') & \xrightarrow{j'_*} & H_n(X', A') \end{array}$$

son conmutativos (las flechas verticales son homomorfismos inducidos por una función $f: (X, A) \longrightarrow (X', A')$).

Proposición 2.14. Si A es no vacío y X conexo por trayectorias entonces $H_0(X, A) = 0$.

DEMOSTRACION. Elijamos $x_0 \in A$. Dada una 0-cadena en X ,

$$c = \sum v_x x$$

elijamos una trayectoria α_x de x_0 a x . Entonces

$$\partial(\sum v_x \alpha_x) = c - (\sum v_x) x_0$$

por lo que c es homóloga a una 0-cadena en A . \square

A continuación se exhibe un resultado análogo al teorema 2.10., para homología relativa.

Proposición 2.15. Funciones homotópicas de pares $f, g: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ inducen funciones iguales en homología. (Ver Greenberg [G], pag. 73)

LA SUCESION EXACTA DE HOMOLOGIA.

La más importante propiedad de los módulos de homología relativa $H_n(X, A)$ es la existencia de un homomorfismo de conexión

$$H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$$

con el cual obtenemos una sucesión infinita de homomorfismos

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_0} H_n(X) \xrightarrow{j_0} H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

llamada la sucesión de homología de el par (X, A) .

Definimos este homomorfismo como sigue: Dado un n -ciclo relativo z en $X \bmod A$ representando una clase de homología \bar{z} en $H_n(X, A)$, por definición, ∂z es una $(n-1)$ -cadena en A , pero ya que $\partial\partial = 0$, ∂z es en realidad un $(n-1)$ -ciclo en A . Y podemos considerar su clase de homología $\overline{\partial z}$ en $H_{n-1}(A)$. Esta clase depende sólo de \bar{z} : Si $z \sim z' \bmod A$, entonces $z = z' + w + \partial z''$, donde w es una n -cadena en A , z'' es una $(n+1)$ -cadena en X ; entonces $\partial z = \partial z' + \partial w$, es decir, ∂z y $\partial z'$ son homólogos en A . Por lo tanto definimos el homomorfismo de conexión, denotado por ∂ como $\overline{\partial z} = \overline{\partial z}$.

Teorema 2.16. *La sucesión de homología de (X, A) es exacta.*

DEMOSTRACION. Exactitud en $H_n(X, A)$: Sea z un n -ciclo en X , es decir, $\partial z = 0$. Entonces $\partial j_0(\bar{z}) = \overline{\partial z} = 0$, por lo que la composición ∂j_0 es cero. Sea z un n -ciclo relativo tal que la imagen $\overline{\partial z}$ de \bar{z} bajo el homomorfismo de conexión es cero, esto significa que $\partial z = \partial w$, donde w es una n -cadena en A . Por lo tanto, $z - w$ es un ciclo en X . Además, la clase de homología relativa de $z - w$ es la misma que la de z ; De este modo $j_0(\overline{z - w}) = \bar{z}$. Esto muestra que la imagen de j_0 es igual al kernel de ∂ .

Exactitud en $H_n(X)$: Sabemos que $j_0 i_0 = 0$. Sea z un n -ciclo en X tal que $j_0(\bar{z}) = 0$, entonces z es una frontera relativa $\bmod A$, es decir, $z = \partial w' + z$ donde w es una n -cadena en A y w' es una $(n+1)$ -cadena en X . Ahora $\partial w = \partial z + \partial w' = 0$, por lo tanto w es un n ciclo en A , además w y z son homólogos en X , por tanto $i_0(\overline{w}) = \bar{z}$. Esto muestra que la imagen de i_0 es igual al kernel de j_0 .

Exactitud en $H_n(A)$: Sea z un ciclo relativo mod A , entonces $\partial z \in S_n(A)$, por lo que $i_*(\partial z) = \delta \bar{z} = 0$ en $H_n(X)$. Sea z un ciclo en A tal que $i_*(z) = 0$, entonces $z = \partial w$ donde w es una $n+1$ -cadena en X , por lo que w es un ciclo relativo mod A . Esto prueba que la imagen de i_* es igual al kernel de δ .

EjemPlo 5. Si A es un único punto x_0 , $H_n(A) = 0$ para toda $n > 0$. De este modo para toda $n \geq 2$

$$0 \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X, x_0) \longrightarrow 0$$

es exacta, lo cual dice que j_n es un isomorfismo. Para $n = 1$ el lado derecho debe ser remplazado por $H_0(x_0) \cong \mathbb{R}$. Pero es claro que $\delta: Z_1(X, x_0) \rightarrow H_0(x_0)$ es homomorfismo cero, por lo que j_1 es un isomorfismo.

EjemPlo 6. Sea X la n -bola $E^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq 1\}$, $A = S^{n-1}$ su frontera. Ya que E^n es contraíble $H_n(E^n) = 0$ para toda $n \geq 1$, y por tanto, debido a la exactitud de la sucesión de homología

$$\delta: H_n(E^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$$

es un isomorfismo para toda $n \geq 2$.

Para $n = 1$ obtenemos

$$0 \longrightarrow H_1(E^1, S^0) \longrightarrow H_0(S^0) \longrightarrow H_0(E^1) \longrightarrow 0$$

Para $n > 1$, S^{n-1} es conexo por trayectorias y por tanto $H_1(E^n, S^{n-1}) = 0$. Para $n = 1$ obtenemos

$$H_1(E^1, S^0) \cong \mathbb{R} \cong \ker(H_0(S^0) \rightarrow H_0(E^1)).$$

Proposición 2.17. La sucesión de homología es functorial en el par (X, A) .

DEMOSTRACION. Esto significa que la función

$$f: (X, A) \longrightarrow (X', A')$$

induce una sucesión infinita de cuadros conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_n(A') & \longrightarrow & H_n(X') & \longrightarrow & H_n(X', A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

los homomorfismos verticales son inducidos por f . Solo necesitamos checar que

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \\
 \downarrow & \searrow \partial & \downarrow \\
 H_n(X', A') & \longrightarrow & H_{n-1}(A')
 \end{array}$$

es conmutativo; esto es inmediato de el hecho que las cadenas de homomorfismos $S_n(f)$ conmutan con el operador frontera. \square

Lema del cinco 2.18. Dado un diagrama de R -módulos y homomorfismos con todos los rectángulos conmutativos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
 \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \epsilon \downarrow \\
 B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5
 \end{array}$$

tal que las flechas son exactas en 2, 3, 4 y los cuatro homomorfismos $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ son isomorfismos, entonces γ es un isomorfismo.

DEMOSTRACION. δ es mono: Si $a \in A_3$ y $\gamma(a) = 0$ entonces $\delta f_3(a) = 0$. Ya que δ es mono, $f_3(a) = 0$. Por la exactitud en A_3 , $a = f_2(a')$. Entonces $g_2 \beta(a') = \gamma f_2(a') = 0$. Por la exactitud en B_2 , $\beta(a') = g_1(b)$. Ya que α es epi, $b = \alpha(a'')$. Entonces $g_1(\alpha(a'')) = \beta(a') = \beta f_1(a'')$, por lo que $\beta(a' - f_1(a'')) = 0$. Ya que β es mono, $a' = f_1(a'')$. Entonces $a = f_2 f_1(a'') = 0$.

γ es epi: Si $b_3 \in B_3$, $g_3(b_3) = \delta(a_4)$ por ser δ epi, entonces $\epsilon(f_4(a_4)) = g_4(\delta(a_4)) = 0$. Ya que ϵ es mono $f_4(a_4) = 0$. Por la exactitud en A_4 , $f_3(a_3) = a_4$. Entonces $g_3(\gamma(a_3)) = \delta(f_3(a_3)) = g_3(b_3)$. Por lo tanto $g_3(b_3 - \gamma(a_3)) = 0$. Por

la exactitud en B_3 $g_2(b_2) = b_3 - \gamma(a_3)$. Ya que β es epi $\beta(a_2) = b_2$. Entonces $\gamma(f_2(a_2)) = g_2(\beta_2(a_2)) = g_2(b_2) = b_3 - \gamma(a_3)$. Por lo tanto $b_3 = \gamma(a_3 + f_2(a_2))$. \square

TEOREMA DE ESCISION

Este teorema establece que ciertos espacios $V \subset A$ pueden ser cortados sin afectar a los módulos de homología relativa. Más precisamente, la función inclusión

$$(X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$$

es llamada escisión si induce un isomorfismo

$$H_n(X - U, A - U) \longrightarrow H_n(X, A)$$

Teorema 2.19. *Si la cerradura de U esta contenida en el interior de A , entonces U puede ser escindido.*

Ver Greenberg [2] pag. 82

Teorema 2.20. *Supongase $V \subset U \subset A$ y*

(i) *V puede ser escindido.*

(ii) *$(X - U, A - U)$ es un retracto por deformación de*

$$(X - V, A - V).$$

Entonces U puede ser escindido.

DEMOSTRACION. La condición de (ii) significa que la función identidad de $(X - V, A - V)$ es homotopica a $i \circ r$, donde r es una retracción de $(X - V, A - V)$ en $(X - U, A - U)$,

$$i: (X - U, A - U) \longrightarrow (X - V, A - V)$$

es la función inclusión. Por el teorema 2.15, $H_n(i)$ es un isomorfismo para toda n . Ya que H_n es un functor y V puede ser escindido, $(X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ es una escisión. \square

Teorema 2.21. Sean E_n^+ , E_n^- los hemisferios cerrados de la n -esfera S^n , $n \geq 1$, esto es, $E_n^+ \cap E_n^-$ es el ecuador S^{n-1} . Entonces

$$(E_n^+, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, E_n^-)$$

es una escisión.

DEMOSTRACION. Escindiremos el hemisferio abierto

$$U = \{x \in S^n / x_{n-1} < 0\}.$$

No podemos aplicar directamente el teorema de escisión ya que no satisface las hipótesis. De modo que procederemos en dos pasos.

Sea $V = \{x \in S^n / x_{n-1} < -1/2\}$, por el teorema de escisión V puede ser escindido. Pero (E_n^+, S^{n-1}) es un retracto fuerte por deformación de $(S^n - V, E_n^- - V)$, por tanto aplicando el teorema anterior $(E_n^+, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, E_n^-)$ es una escisión. \square

Ahora proyectando en las primeras n coordenadas obtenemos un homeomorfismo

$$(E_n^+, S^{n-1}) \longrightarrow (E^n, S^{n-1}).$$

Hemos visto que el homomorfismo de conexión

$$H_q(E^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_{q-1}(S^{n-1})$$

es un isomorfismo para $q \geq 2$. Por otro lado, como E_n^- es contraíble tenemos que

$$H_q(S^n) \longrightarrow H_q(S^n, E_n^-)$$

es un isomorfismo para $q \geq 2$. Combinando estos resultados con el teorema anterior obtenemos un isomorfismo

$$H_q(S^n) \longrightarrow H_{q-1}(S^{n-1}) \text{ para todo } q \geq 2, n \geq 1.$$

Si $n = 1$,

$$H_1(E^1, S^0) = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ \mathbb{R} & n = 1. \end{cases}$$

También tenemos la sucesión exacta para $n \geq 1$

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{a} H_1(S^n, E_n^-) \xrightarrow{b} H_0(E_n^-) \xrightarrow{c} H_0(S^n) \longrightarrow 0$$

ya que c es un isomorfismo, también obtenemos que a es un isomorfismo ($b = 0$).

Corolario 2.22. Para $q \geq 1$ y $n \geq 1$

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = n, \\ 0 & q \neq n. \end{cases}$$

$$H_q(E^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = n, \\ 0 & q \neq n. \end{cases}$$

OBSERVACION 3. El teorema de escisión es cierto para la homología reducida si suponemos que $U \neq A$, para este caso

$$H_0^{\mathbb{R}}(X - U, A - U) = H_0^{\mathbb{R}}(X - U, A - U).$$

$H_0^{\mathbb{R}}(X, A) = H_0^{\mathbb{R}}(X, A)$ (Suponiendo $A \neq \emptyset$). $U = A$ puede ocurrir bajo la hipótesis de 2.19 solo cuando A es abierto y cerrado a la vez.

SUCESION DE MAYER-VIETORIS

Ahora consideramos triadas ordenadas de espacios (X, X_1, X_2) tal que X_1 y X_2 son subespacios de X . Tenemos las funciones inclusión

$$\begin{aligned} k_1: (X_2, X_1 \cap X_2) &\longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1), \\ k_2: (X_1, X_1 \cap X_2) &\longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2) \end{aligned}$$

Si k_1 y k_2 son escisiones, la triada es llamada exacta (o propia en algunos libros):

De este modo

$$H_n(k_1): H_n(X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_n(X_1 \cup X_2, X_1)$$

es un isomorfismo para toda, $(i, j) = (1, 2)$ o $(2, 1)$. Estos isomorfismos son análogos al primer teorema de isomorfismo en la teoría de grupos. La exactitud depende solo de $X_1 \cup X_2$, no de X .

EJEMPLO 7. Si X_1, X_2 son ambos abiertos, entonces (X, X_1, X_2) es exacta. Podemos suponer $X = X_1 \cup X_2$. Para $A = X_1$,

$U = X_1 - (X_1 \cap X_2)$, entonces $X - U = X_2$, por lo que U es un subconjunto cerrado de X contenido en el abierto A , y así aplicamos el teorema de escisión.

EjemPlo e. (S^n, E_n^+, E_n^-) es una triada exacta por teorema 2.21.

Supondremos en lo que sigue que $X = X_1 \cup X_2$ y $A = X_1 \cup X_2$.

La inclusión $(X_1, A) \rightarrow (X, X_2)$ induce el diagrama

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccccc} \rightarrow & H_n(A) & \rightarrow & H_n(X_1) & \rightarrow & H_n(X_1, A) & \rightarrow & H_{n-1}(A) & \rightarrow & H_{n-1}(X_1) & \rightarrow \\ & \downarrow & & \\ \rightarrow & H_n(X_2) & \rightarrow & H_n(X) & \rightarrow & H_n(X, X_2) & \rightarrow & H_{n-1}(X_2) & \rightarrow & H_{n-1}(X) & \rightarrow \end{array}$$

en el cual todos los rectángulos son conmutativos.

Lema 2.23 (De Barratt-Whitehead) Dado un diagrama de R -módulos y homomorfismos en los cuales los rectángulos conmutan y los renglones son exactos

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \rightarrow & C_{1+1} & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & A_{1-1} & \rightarrow & B_{1-1} & \rightarrow \\ & \downarrow \gamma_{1+1} & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \alpha_{1-1} & & \downarrow \beta_{1-1} & & \\ \rightarrow & C'_{1+1} & \rightarrow & A'_1 & \xrightarrow{f'_1} & B'_1 & \xrightarrow{g'_1} & C'_1 & \xrightarrow{h'_1} & A'_{1-1} & \rightarrow & B'_{1-1} & \rightarrow \end{array}$$

Si los γ_i son isomorfismos, entonces hay una sucesión larga exacta

$$\rightarrow A_1 \xrightarrow{\Phi_1} A'_1 \oplus B_1 \xrightarrow{\Psi_1} B'_1 \xrightarrow{\Gamma_1} A_{1-1} \rightarrow$$

donde $\Phi_1 = (\alpha_1 \circ f_1)D$, $\Psi_1 = D'(-f'_1 \circ \beta_1)$, $\Gamma_1 = h_1 \gamma_1^{-1} g'_1$ y $D(a) = (a, a)$, $D'(x, y) = (x + y)$.

Ver Greenberg [2], pag. 99.

La funtorialidad de la sucesión Barratt-Whitehead es una consecuencia de la construcción.

Definición. Si (X, X_1, X_2) es una triada exacta entonces (1) es un diagrama con isomorfismos $H_n(X_1, A) \rightarrow H_n(X, X_2)$. La sucesión asociada de Barratt-Whitehead es la sucesión

Mayer-Vietoris de la triada.

$$\rightarrow H_{n+1}(X) \xrightarrow{\Gamma^{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{\oplus^n} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{\Psi^n} H_n(X) \rightarrow$$

OBSERVACION 4. Si $A \neq \emptyset$, la sucesión Mayer-Vietoris puede ser terminada en

$$\rightarrow H_1(X) \rightarrow H_0^{\oplus}(A) \rightarrow H_0^{\oplus}(X_1) \oplus H_0^{\oplus}(X_2) \rightarrow H_0^{\oplus}(X) \rightarrow 0.$$

por observación 3.

EJEMPLO 9. Homología del Toro T.

El toro puede ser considerado como dos tubos cilíndricos A identificados a lo largo de su frontera común. (Abusando de la notación ambos tubos serán denotados por A.)

La frontera es la unión disjunta $C_1 + C_2$ de dos círculos C_1 y C_2 con las inclusiones $C_i \rightarrow A$ equivalencias homotópicas. Usando el teorema de escisión 2.19 y 2.20 observamos que $(A, \partial A) \subset (T, A)$ induce un isomorfismo en homología. Por tanto obtenemos una sucesión Mayer-Vietoris exacta

$$0 \rightarrow H_2(T) \rightarrow H_1(C_1 + C_2) \xrightarrow{\phi_1} H_1(A) \oplus H_1(A) \rightarrow H_1(T) \rightarrow \\ \rightarrow H_1(T) \rightarrow H_0^{\oplus}(C_1 + C_2) \rightarrow 0.$$

Por (2.4) y (2.22), $H_1(C_1 + C_2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, y por observación 1 $H_0^{\oplus}(C_1 + C_2) \cong \mathbb{R}$. Usamos las equivalencias homotópicas para identificar $H_1(A) \oplus H_1(A) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, la matriz de ϕ_1 con respecto a la base natural es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se sigue que $\ker \phi_1 \cong \mathbb{R}$ generado por $(1, -1)$ y $\text{im } \phi_1 \cong \mathbb{R}$ generado por $(1, 1)$. Entonces $H_2(T) \cong \mathbb{R}$ y $H_1(T) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

CONSTRUCCION DE COMPLEJOS ESFERICOS

Supóngase que son dados un subespacio A de un espacio X y una función f de A en un subespacio Y. En la unión disjunta

$X \sqcup_f Y$ de X y Y con la topología coproducto, identificamos cada punto $x \in A$ con su imagen $f(x) \in Y$. El espacio cociente $Z = X \cup_f Y$ de $X \sqcup_f Y$ con la relación de equivalencia determinada por esta identificación es llamado el espacio de adjunción de el sistema $X \supset A \xrightarrow{f} Y$. Es claro que la función cociente $g: X \sqcup_f Y \rightarrow Z$ envía Y homeomórficamente en un subespacio de Z ; identificaremos Y con este subespacio. Si $\bar{f}: X \rightarrow Z$ es la restricción de g a X , entonces identificando A con el correspondiente subconjunto de Y en $X \sqcup_f Y$ se tiene, $\bar{f}|_A = f$.

En lo siguiente, consideraremos solo pares (X, A) que satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) X es Hausdorff,
- (2) A es cerrado,
- (3) Puntos en $X - A$ pueden ser separados de A , es decir, para cada punto $x \in X - A$, existen abiertos disjuntos U, V tal que $x \in U$ y $A \subset V$.
- (4) A tiene un collar B en X , es decir, hay una vecindad abierta B de A en X tal que A es un retracto fuerte por deformación de B , y $A \neq B$.

En este caso decimos que (X, A) es un par con collar.

EJEMPLO 10. (E^n, S^{n-1}) es un par con collar. En este caso, el espacio $Z = E^n \cup_f Y$ se dice es obtenido de Y por adjunción de una n -celda via f .

EJEMPLO 11. Más general, si X es una variedad con frontera, y A es su frontera, entonces (X, A) es un par con collar; en efecto, A tiene una vecindad abierta B tal que (B, A) es homeomorfo a $(A \times [0, 1], A \times 0)$.

Proposición 2.24. Dado un par con collar (X, A) y una función $f: A \rightarrow Y$, donde Y es Hausdorff. Si $Z = X \cup_f Y$, entonces (Z, Y) es un par con collar; en efecto, si B es un collar de A , entonces $Y \cup \bar{f}(B)$ es un collar de Y . Además, \bar{f} envía $X - A$ homeomórficamente sobre $Z - Y$.

DEMOSTRACION. Ya que $g^{-1}(Z - Y) = X - A$, el cual es abierto en $X \cup Y$, $Z - Y$ es abierto, y \bar{f} envía $X - A$ homeomórficamente en $Z - Y$. Sea B un collar de A en X . Ya que $B \cup Y$ es abierto en $X \cup Y$, $Y \cup \bar{f}(B)$ es abierto de Z .

Sea $D: B \times I \rightarrow B$ una función tal que $D(a, t) = a$ para toda $a \in A$, $D(b, 0) = b$ para toda $b \in B$, $D(b, 1) \in A$ para toda $b \in B$. Se define una función \bar{D} en $(Y \cup \bar{f}(B)) \times I$ por

$$\bar{D}(z, t) = \begin{cases} z & \text{si } z \in Y, \\ \bar{f}(D(b, t)) & \text{si } z = \bar{f}(b) \text{ con } b \in B - A. \end{cases}$$

Observese que \bar{D} está bien definida, además \bar{D} es continua puesto que $\bar{D}|_{Y \times I}$ es continua y $\bar{D}|_{\bar{f}(B) \times I}$ también lo es y ambos son conjuntos cerrados. Por lo tanto Y es un retracto fuerte por deformación de $Y \cup \bar{f}(B)$. Supongase $z \in Z - Y$, $z = \bar{f}(x)$. Sean U, V abiertos disjuntos en X tal que $x \in U$ y $A \subset V$. Entonces los abiertos disjuntos $Y \cup \bar{f}(V)$ y $\bar{f}(U)$ de Z separan Y de z . De este modo la condición (3) se cumple.

Para probar que Z es Hausdorff, dados puntos distintos z_1, z_2 hay 3 casos:

caso 1: Ambos puntos están en $Z - Y$. Ya que $Z - Y$ es abierto y homeomorfo a $X - A$, el cual es abierto en X Hausdorff, podemos separar puntos.

caso 2: Un punto está en Y , el otro fuera de Y . Este caso se sigue de la condición (3).

caso 3: Ambos puntos están en Y . Sea Y_1, Y_2 abiertos disjuntos de Y los cuales separan z_1 y z_2 . Sea $r: B \rightarrow A$

una retracción, y $B_i = r^{-1}(f^{-1}(Y_i))$, $i = 1, 2$. Entonces B_i es abierto en X , y $Y_1 \cup \bar{f}(B_1)$ y $Y_2 \cup \bar{f}(B_2)$ son abiertos disjuntos de Z los cuales separan z_1 y z_2 . \square

Si se empieza con un conjunto finito de puntos, y sucesivamente se añaden un número finito de celdas posiblemente de diferentes dimensiones, se obtiene un espacio compacto Hausdorff, que se llama complejo esférico.

EJEMPLOS 12.

Si f envía S^{n-1} en un punto Y . Entonces $Z \approx S^n$.

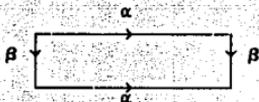
Si $Y = S^{n-1}$, $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ la identidad, entonces $Z = E^n$.

Si $Y = S^1$, $f: S^0 \rightarrow Y$ es una función en un punto Y .

Entonces Z consiste de 2 círculos con el punto Y en común.

Iterando esta operación $(r - 1)$ veces (con el mismo punto Y) obtenemos la rosa de r -hojas G_r (que es la unión de r círculos en un punto común).

Si $Y = G_2$, denotando los 2 lazos α, β y considerando E^2 como I^2 , S^1 como el perímetro de el rectángulo, el diagrama describe una función f la cual pega una 2-celda a G_2 .



Entonces Z es homeomorfo a el toro.

Supongase ahora que Z es el espacio de adjunción de un sistema $X \supset A \xrightarrow{f} Y$, y $\bar{f}: X \rightarrow Z$ es la extensión canónica de f . Entonces \bar{f} induce un homomorfismo de la sucesión de homología del par (X, A) en la del par (Z, Y) .

Teorema 2.25. Supongamos que (X, A) es un par con collar. Entonces

$$H_n(\bar{f}): H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Z, Y)$$

es un isomorfismo para toda n .

DEMOSTRACION. Sea B un collar de A en X . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{i} & H_n(X, B) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ H_n(Z, Y) & \xrightarrow{j} & H_n(Z, Y \cup \bar{f}(B)) \end{array}$$

donde los homomorfismos horizontales son inducidos por inclusiones y los verticales por \bar{f} .

Mostraremos que i, j, f_2 son isomorfismos y por tanto f_1 lo es.

El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X - A, B - A) & \longrightarrow & H_n(X, B) \\ f_3 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ H_n(Z - Y, \bar{f}(B - A)) & \longrightarrow & H_n(Z, Y \cup \bar{f}(B)) \end{array}$$

en el cual las flechas horizontales son escisiones y f_3 inducido por un homeomorfismo, muestra que f_2 es un isomorfismo. Para ver que i (respect. j) es un isomorfismo, usamos el hecho que A (respect. Y) es un retractor fuerte por deformación de B (respect. de $Y \cup \bar{f}(B)$). Esto implica que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \\ H_n \downarrow & & H_n \downarrow & & H_n \downarrow & & H_{n-1} \downarrow & & H_{n-1} \downarrow \\ H_n(B) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}$$

en el cual las dos flechas verticales de cada extremo son isomorfismos y la sucesiones son exactas. El resultado se sigue del lema del cinco.

NUMEROS DE BETTI Y CARACTERISTICA DE EULER.

Si tomamos la homología con coeficientes enteros, para ciertos espacios, tales como los complejos esféricos, los grupos de homología son finitamente generados. (Ver Greenberg [2], pag. 118).

El teorema fundamental de grupos abelianos nos dice que si A es finitamente generado,

$$A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}$$

(Ver Lang [5], pag.).

Se define el rango de A como el número de copias de \mathbb{Z} . El rango de $H_n(X, \mathbb{Z})$ es llamado el n -ésimo número de Betti β_n de el espacio X , y también se define la característica de Euler $\chi(X)$ por la fórmula

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \beta_n$$

cuando esta suma es finita. Estos números son invariantes topológicos.

EJEMPLO 13. Para S^n , $\beta_0 = \beta_n = 1$, y $\beta_q = 0$ para $q \neq n$ y $q \neq 0$. Y obtenemos

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

También se define de manera similar los números relativos de Betti y la característica relativa de Euler $\chi(X, A)$ para un par (X, A) .

EJEMPLO 14. Para el toro T , $\beta_0 = \beta_2 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_n = 0$ si $n > 2$ (ejemplo 9). Y obtenemos

$$\chi(T) = 0.$$

Lema 2.26. Cuando estos números están definidos,

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A)$$

DEMOSTRACION. Usando la sucesión de homología exacta

$$\dots \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

la demostración se reduce a un lema puramente algebraico:

Lema 2.27. Dada una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_{r-1}} A_r \longrightarrow 0$$

entonces

$$\text{rango } A_1 - \text{rango } A_2 + \dots + (-1)^{r+1} \text{rango } A_r = 0.$$

DEMOSTRACION. Por inducción sobre r .

Para $r = 1$ y $r = 2$ es inmediato. Para $r = 3$, sea \bar{A}_1 el grupo cociente de A_1 módulo su grupo de torsión. Obtenemos homomorfismos inducidos \bar{i}_1, \bar{i}_2 , por lo tanto una sucesión de grupos abelianos libres

$$0 \longrightarrow \bar{A}_1 \xrightarrow{\bar{i}_1} \bar{A}_2 \xrightarrow{\bar{i}_2} \bar{A}_3 \longrightarrow 0$$

la cual no es en general exacta. Además tenemos el siguiente resultado.

Sublema 2.28. \bar{i}_1 es un monomorfismo, \bar{i}_2 es un epimorfismo, y $\text{kernel } \bar{i}_2 / \text{Im } \bar{i}_1$ es un grupo de torsión.

DEMOSTRACION. Si $a_i \in A_i$, $i=1,2,3$, denotaremos como \bar{a}_i a su clase de equivalencia en A_i .

\bar{i}_1 es un monomorfismo: Sea $\bar{a}_1 \in \bar{A}_1$ tal que $\bar{i}_1(\bar{a}_1) = \bar{0}$, esto implica que existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 = [i_1(a_1)]^n = i_1(a_1^n)$ y como i_1 es monomorfismo se tiene que $a_1^n = 0$, por tanto $\bar{a}_1 = \bar{0}$.

\bar{i}_2 es un epimorfismo: Sea $\bar{a}_3 \in \bar{A}_3$, como i_2 es epimorfismo, existe $a_2 \in A_2$ tal que $i_2(a_2) = a_3$. De aquí se tiene que

$$\bar{i}_2(\bar{a}_2) = \bar{a}_3.$$

$T = \text{kernel } \bar{i}_2 / \text{Im } \bar{i}_1$ es de torsión: Sea $\bar{a}_2 \in \bar{A}_2$ tal que

$$\bar{i}_2(\bar{a}_2) = \bar{0}, \text{ entonces } i_2(a_2^n) = [i_2(a_2)]^n = 0 \text{ para alguna } n, \text{ y}$$

como $\text{kernel } i_2 = \text{Im } i_1$, se tiene que $i_1(a_1) = i_2(a_2^n)$ para

alguna $a_1 \in A_1$. Por tanto si \bar{a}_2 es la clase \bar{a}_2 en T se tiene

que $(\bar{a}_2)^n = (\bar{a}_2^n) = \overline{1_1(a_1)} = \overline{1_1(\bar{a}_1)}$. Esto prueba que T es de torsión. \square

Por tanto $\text{rango } \bar{A}_1 = \text{rango}(\text{kernel } \bar{I}_2)$. Ahora la sucesión exacta de grupos abelianos libres

$$0 \longrightarrow \text{kernel } \bar{I}_1 \longrightarrow \bar{A}_2 \longrightarrow \bar{A}_3 \longrightarrow 0$$

se escinde ya que los módulos libres son proyectivos. De donde $\text{rango } \bar{A}_2 = \text{rango } \bar{A}_3 + \text{rango}(\text{kernel } \bar{I}_2)$.

Ya que $\text{rango } \bar{A}_1 = \text{rango } \bar{A}_3$ por definición, el lema está probado para $r = 3$.

Para $r > 3$, consideramos las 2 sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \text{Im } i_2 \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im } i_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow A_r \longrightarrow 0 \end{array}$$

ya que cada sucesión contiene menos que r términos, concluimos por inducción.

Corolario 2.29. Si Z es obtenido de Y por adjunción de una n -celda, y $\chi(Y)$ está definido, entonces

$$\chi(Z) = \chi(Y) + (-1)^n$$

DEMOSTRACION. Por la proposición 2.25. $H_n(Z, Y) \cong H_n(E^n, S^{n-1})$ para toda n , por tanto por el lema anterior necesitamos solo calcular

$$\chi(Z, Y) = \chi(E^n, S^{n-1}). \text{ Aplicando el lema otra vez}$$

$$\chi(E^n) = \chi(E^n, S^{n-1}) + \chi(S^{n-1}), \text{ por lo que}$$

$$\chi(E^n, S^{n-1}) = \chi(E^n) - \chi(S^{n-1}) = 1 - [1 + (-1)^{n-1}] = (-1)^n. \quad \square$$

COROLARIO 2.30. Sea X un complejo esférico, obtenido de α_0 puntos por adjunción de α_q celdas de dimensión q , para $q = 1, \dots, n$ (en cualquier orden). Entonces

$$\chi(X) = \sum_0^n (-1)^q \alpha_q.$$

DEMOSTRACION.

Si $q = 0$, X es el espacio que consta de α_0 puntos. Usando el ejemplo 1 y el teorema 2.4 tenemos que

$$\chi(X) = \alpha_0.$$

Supongamos el corolario válido para $n = k$. Sea X el complejo esférico obtenido de α_0 puntos y por adjunción de α_n n -celdas para $n = 1, \dots, k$. Y sea X' el espacio obtenido de X por adjunción de α_{k+1} $k+1$ -celdas, por el corolario

anterior tenemos

$$\begin{aligned}\chi(X') &= \chi(X) + (-1)^{k+1} \alpha_{k+1} = \sum_0^k (-1)^q \alpha_q + (-1)^{k+1} \alpha_{k+1} \\ &= \sum_0^{k+1} (-1)^q \alpha_q. \quad \square\end{aligned}$$

TEOREMA DE CLASIFICACION DE SUPERFICIAS COMPACTAS
ORIENTABLES

Terminaremos con este capítulo enunciando el Teorema de Clasificación de Superficies compactas orientables, el cual utilizaremos en el capítulo 4.

Una Superficie es una 2-variedad conexa.

Sea S_1 y S_2 dos superficies disjuntas. Su suma conexa, designada por $S_1 \# S_2$, es la superficie que se obtiene quitando un pequeño disco a cada superficie y pegando a lo largo del borde de cada agujero. Para ser precisos, escojamos subconjuntos $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ tales que D_1 y D_2 sean homeomorfos a $E^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$. Sea S'_1 el complemento de D_1 en S_1 , $i = 1, 2$. Escojamos un homeomorfismo h del círculo borde de D_1 sobre el círculo borde de D_2 . Entonces $S_1 \# S_2$ es el espacio cociente de $S'_1 \cup S'_2$ obtenido identificando los puntos x y $h(x)$, para todo x del borde D_1 . $S_1 \# S_2$ resulta ser una superficie y además, se

puede demostrar que el tipo topológico de $S_1 \# S_2$ no depende de la elección de los discos D_1 y D_2 , ni de la elección del homeomorfismo h .

Teorema 2.31. *Toda superficie compacta orientable es homeomorfa a una esfera, o a una suma conexa de toros.*

Si una superficie S es suma conexa de g toros, se dice que es una superficie de género g . Además

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

Ver Massey [6], capítulo 1.

Por último mencionaremos una definición alternativa de la característica de Euler para superficies, la cual coincide con nuestra definición anterior.

DEFINICION. Una triangulación de una superficie compacta S consiste de una familia finita de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ que cubren S , y una familia de homeomorfismos $\phi_i: T'_i \rightarrow T_i$, $i = 1, \dots, n$ donde T'_i es un triángulo del plano \mathbb{R}^2 (es decir un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 limitado por 3 rectas distintas). Los subconjuntos T_i se llaman "triángulos". Los subconjuntos de T_i que son imagen por ϕ_i de vértices y aristas del triángulo T'_i se llaman también "vértices" y "aristas" respectivamente. Finalmente se impone la condición de que dos triángulos distintos T_i y T_j o son distintos, o tienen un sólo vértice común, o tienen toda una arista común.

Sea M una superficie con triangulación $\{T_1, \dots, T_n\}$. Sean

v = número total de vértices de M .

e = número total de aristas de M .

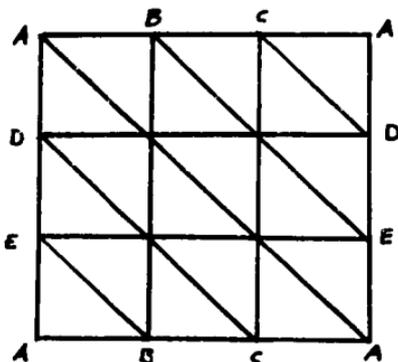
entonces se define la característica de Euler χ de M como

$$\chi(M) = v - e + n.$$

La cual solo depende de M y no de la triangulación elegida (ver Massey [6], cap. 1, secc. 8).

EJEMPLO. Característica de Euler del Toro. En la figura siguiente se muestra una triangulación del Toro, con la cual obtenemos que

$$\chi(T) = 9 - 27 + 18 = 0.$$



GEOMETRIA HIPERBOLICA PLANA

En este capítulo mencionaremos las definiciones y resultados básicos de geometría hiperbólica plana. Las demostraciones de estos hechos se pueden consultar en pueden ver en Lehner [5], capítulo 1.

Una transformación de Möbius es una biyección conforme del plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo. Estas transformaciones son de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

donde a, b, c, d son números complejos. Es fácil probar que estas transformaciones forman un grupo bajo la composición. Si dos transformaciones son iguales, es decir,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}, \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a'd' - b'c' \neq 0$$

entonces $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$, $c = \lambda c'$, $d = \lambda d'$ para alguna $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo cual a cada transformación de Möbius T le corresponden exactamente 2 matrices unimodulares

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } ad - bc = 1 \quad \text{y} \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

El grupo de estas matrices se denota por $SL(2, \mathbb{C})$. Es fácil probar que la siguiente sucesión es exacta.

$$0 \longrightarrow \pm I \longrightarrow SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})/\pm I \longrightarrow 0.$$

Por lo cual, (ya que el centro K de $SL(2, \mathbb{C})$ es $\pm I$) se puede identificar el grupo de transformaciones de Möbius con $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/K$.

Una transformación de Möbius T es conjugada a otra S en $PSL(2, \mathbb{C})$ si existe una transformación $A \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $ATA^{-1} = S$.

Las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{C})$ fijan a lo más dos puntos y se clasifican como sigue: Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$

1.- Si T fija un punto. La transformación es conjugada a una translación y a T se le llama parabólica.

2.- Si fija 2 puntos. Es conjugada a una transformación de la forma $z \rightarrow \rho e^{i\theta} z$, con $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Y tenemos 3 casos:

- a) Si $\rho = 1$, $\theta \neq 0$; a T se le llama elíptica.
- b) Si $\rho \neq 1$, $\theta = 0$; a T se le llama hiperbólica.
- c) Si $\rho \neq 1$, $\theta \neq 0$; a T se le llama loxodrómica.

Si χ denota la traza de una matriz en $SL(2, \mathbb{C})$ que define a T se tiene que T es parabólica si y solo si $|\chi| = 2$; T es elíptica si y solo si $\chi \in \mathbb{R}$ y $|\chi| < 2$; T es hiperbólica si y solo si $\chi \in \mathbb{R}$ y $|\chi| > 2$; y T es loxodrómica si y solo si $\chi \notin \mathbb{R}$.

Se denota por $PSL(2, \mathbb{R})$ el subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ que consiste de las transformaciones definidas por matrices $SL(2, \mathbb{C})$ con entradas reales. Estas son exactamente las transformaciones que preservan el semiplano superior $H^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. Si $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ es claro que nunca es loxodrómica. Además: si T elíptica los puntos fijos de T son conjugados; si T es hiperbólica tiene dos puntos fijos reales y cuando es parabólica tiene un punto fijo real.

Si L_1 y L_2 son líneas o círculos ortogonales al eje real, entonces existe un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ que envía L_1 en L_2 . Sea $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario abierto. La transformación

$$A(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$$

transforma H^2 en Δ . Por lo que ATA^{-1} , $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ preserva Δ y viceversa cualquier transformación de Möbius que

preserva Δ es de esta forma. Es decir, si $M(\Delta)$ denota el conjunto de todas las transformaciones que preservan Δ . $PSL(2, \mathbb{R})$ y $M(\Delta)$ son subgrupos conjugados. En esta tesis trabajamos solamente con estos subgrupos.

Un punto $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ es un punto límite de un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$ si hay un $z \in \hat{\mathbb{C}}$ y una sucesión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos de Γ tal que $V_n(z) \rightarrow \alpha$. Se denota por L al conjunto de todos los puntos límites de Γ . Si z no es un punto límite se dice que z es un punto ordinario, y se denota como \emptyset al conjunto de todos los puntos ordinarios.

Un grupo Γ es discontinuo si y sólo si \emptyset es vacío. A los subgrupos discontinuos de $PSL(2, \mathbb{R})$ o de $M(\Delta)$ se les llama grupos Fuchsianos.

Un grupo discontinuo es a lo sumo numerable.

Dado $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$. Dos puntos z y w en $\hat{\mathbb{C}}$ son equivalentes (o Γ -equivalentes) si y sólo si existe $V \in \Gamma$ tal que $V(z) = w$. Esta es una relación de equivalencia, por lo cual induce una partición en $\hat{\mathbb{C}}$ en clases de equivalencias u órbitas. Así

$$\Gamma z = \{V(z) : V \in \Gamma\} \text{ es la órbita de } z$$

Un subgrupo en $SL(2, \mathbb{C})$ es discreto si no tiene sucesiones de matrices distintas convergentes. Esta definición se extiende de manera natural a $PSL(2, \mathbb{C})$.

El conjunto de puntos límite de un grupo discreto es cerrado.

Un grupo Γ es discontinuo si y solo si es discreto. Además si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$, $L(\Gamma) \subset \mathbb{R}$ y si $\Gamma < M_\Delta$, $L(\Gamma) \subset \partial\Delta$.

El estabilizador Γ_z de un punto z es el subgrupo de Γ definido como $\Gamma_z = \{V \in \Gamma : V(z) = z\}$. Se tiene que $\Gamma_A(z) = A\Gamma_z A^{-1} \quad \forall A \in \Gamma$.

Si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ y Γ es discreto, Γ_z es cíclico finito o la identidad cuando $z \in \mathbb{H}$, es cíclico infinito o la identidad cuando $z \in \mathbb{R}$.

Sea $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ un grupo, una región fundamental de Γ es un subconjunto abierto R de H tal que

- 1) Ningún par de puntos de R son Γ -equivalentes.
- 2) Cada punto de H es Γ -equivalente a un punto de \bar{R} .

Se tiene que cada grupo que posee una región fundamental es discontinuo.

Se define una métrica en H^2 como sigue:

Dados P, Q en H^2

$$\rho(P, Q) = \inf \int_b^a \frac{|y'(t)|}{|y(t)|} dt$$

donde el infimo corre sobre todas las curvas

$\gamma: [0, 1] \rightarrow H$ suaves que unen a P con Q .

Esta es la métrica hiperbólica en H^2 . H^2 provisto con esta métrica se le llama plano hiperbólico de Poincaré.

$\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es precisamente el grupo de isometrías hiperbólicas de H^2 que preservan la orientación. Además las curvas que minimizan la distancia hiperbólica o geodésicas son los semicírculos y semirectas ortogonales al eje real. A las geodésicas se les llama también H -líneas y a los segmentos de geodésica H -segmento.

Sea $R \subset H^2$ Lebesgue medible se define el área hiperbólica como

$$\int_R \frac{1}{y^2} dA,$$

esta cantidad se denotará por $|R|$.

El área hiperbólica es invariante bajo transformaciones en $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

La topología inducida por la métrica hiperbólica en H^2 es equivalente a la topología usual euclidiana. Una base de los conjuntos abiertos en la topología hiperbólica consiste de los discos

$$D(\tau_0, r) = \{w \in H : \rho(w, \tau_0) < r, r > 0\},$$

y estos discos resultan ser discos euclidianos.

El bisector perpendicular de un H-segmento ab es el conjunto de los puntos en H^2 que equidistan hiperbólicamente de a y b . Este conjunto es precisamente la geodésica ortogonal al H-segmento ab en su punto medio.

Se dice que $W \subset H^2$ es hiperbólicamente convexo o H-convexo si $\forall p, q \in W$, W contiene al segmento de geodésica que une p y q . Un conjunto H-convexo es conexo.

Exhibimos ahora la construcción del polígono fundamental de Dirichlet (o polígono normal para un subgrupo discreto Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$).

Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ discreto, y $w_0 \in H^2$ tal que no es punto fijo de ninguna transformación en $\Gamma - \{Id\}$.

Sea $\{V_i, i = 0, 1, 2, \dots, V_0 = I\}$, una enumeración de los elementos de Γ . Las imágenes $w_i = V_i(w_0)$ son todas distintas. De este modo para $i > 0$, $w_0 w_i$ es un H-segmento y no un punto.

Se denota por λ_i el bisector perpendicular de el segmento $w_0 w_i$. La H-línea λ_i divide a H en dos "semiplanos"; denotamos por L_i al que contiene a w_0 , y al otro L'_i .

Se tiene que

$$L_i = \{z \in H : \rho(z, w_0) < \rho(z, w_i)\}$$

$$\lambda_i = \{z \in H : \rho(z, w_0) = \rho(z, w_i)\}$$

$$L'_i = \{z \in H : \rho(z, w_0) > \rho(z, w_i)\}$$

El polígono de Dirichlet con centro en w_0 se define como

$$N_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i,$$

y asimismo $N_i = V_i(N_0)$ es el polígono de Dirichlet con centro en w_i . N_i es un conjunto H-convexo que consiste de

los puntos que están estrictamente más cerca de w_1 que de w_j , $\forall j \neq 1$.

A la cerradura de N_1 en \hat{C} la denotaremos como \bar{N}_1 y a la cerradura de N_1 en H^2 como \bar{N} .

N_0 (y por tanto N_1) es una región fundamental de Γ relativa a H . Cualquier subconjunto compacto de H^2 está contenido en un número finito de polígonos N_1 .

Cualquier punto en H^2 está en exactamente uno de los siguientes conjuntos:

$I = \{z \in H : \rho(z, w_0) < \rho(z, w_i) \text{ para toda } i \neq 0\}$

$B = \{z \in H : \rho(z, w_0) \leq \rho(z, w_i) \text{ para toda } i \text{ y}$

$\rho(z, w_0) = \rho(z, w_k) \text{ para al menos una } k \neq 0\}$

$E = \{z \in H : \rho(z, w_0) > \rho(z, w_k) \text{ para al menos una } k \neq 0\}$

De hecho,

$$I = N_0, \quad B = \partial N_0, \quad E = \text{Ext } N_0 \cap H.$$

Un lado de N_0 es un H -segmento máximo contenido en la intersección de un bisector λ_j y \bar{N}_0 .

Un vértice ordinario de N_0 es un punto en H que se encuentra en exactamente dos lados.

Un lado libre es un segmento máximo de \hat{R} contenido en \bar{N}_0 .

Un vértice real es el punto de intersección de dos lados en la recta real extendida.

La parte de la frontera de N_0 que está en H consiste de un número a lo más numerable de lados y vértices ordinarios, la parte de la frontera que está en \hat{R} es o vacía, o consiste de un número a lo más numerable de vértices reales y lados libres, y de puntos para los cuales cualquier vecindad de ellos interseca a un número infinito de lados. Los puntos que están dentro de un lado libre son puntos ordinarios de Γ .

Se dice que dos lados de N_0 son conjugados, si hay un elemento de Γ , distinto de la identidad, que transforma un lado en otro. Los lados de N_0 son conjugados por pares.

Un lado S coincide con su conjugado si y sólo si hay un elemento elíptico $V \in \Gamma$ de orden 2 que tiene un punto fijo α que coincide con el H -punto medio de S (si S no tiene longitud infinita). En este caso se considera α como vértice, y los dos segmentos del lado original S , como dos lados distintos que con vértice común α .

La relación de Γ -equivalencia divide los vértices ordinarios de N_0 en clases de equivalencia llamadas **ciclos ordinarios**. Un ciclo ordinario solo contiene un número finito de vértices.

Una transformación que fija un punto ordinario necesariamente es una transformación elíptica. De esta forma se clasifican los ciclos como elíptico o accidental, de acuerdo a si todos o ninguno de los vértices del ciclo son puntos fijos, y los correspondientes vértices son llamados vértices elípticos o vértices accidentales y los ciclos son elíptico o accidentales respectivamente.

El estabilizador Γ_v de un vértice elíptico v es un grupo cíclico finito cuyo orden es llamado el orden del vértice, y el orden de todos los vértices de un ciclo elíptico es el mismo. Este entero es llamado orden del ciclo.

Los lados de N_0 que se cortan en un vértice v son arcos circulares y forman dos ángulos si v es ordinario. La medida del ángulo que limita una porción de N_0 será llamado el ángulo de v en N_0 .

Cuando $v \in \hat{R}$, decimos que el ángulo es cero si v es la intersección de dos lados y $\pi/2$ si v es la intersección de un lado y un lado libre.

Un ciclo parabólico es la intersección de la órbita de un punto fijo de una transformación parabólica con N_0 . De hecho todo ciclo parabólico contiene al menos un vértice en N_0 llamado vértice parabólico (ver Beardon [1] teorema 9.2.9).

La suma de los ángulos en los vértices de un ciclo ordinario de N_0 es $2\pi/l$ si y sólo si el ciclo es elíptico de orden l , y es 2π si y sólo si el ciclo es accidental.

Si $\{S_j, S'_j : j = 1, 2, \dots\}$ son los lados de N_0 y

$$T_j(S_j) = S'_j, \quad T_j \in \Gamma.$$

Entonces

$$\Gamma = \langle T_1, T_2, \dots \rangle.$$

Es decir, Γ está generado por las transformaciones que conjugan los lados de N_0 .

Estos resultados no solamente son ciertos para polígonos de Dirichlet sino se cumplen también para una clase más general [ver Beardon [1] capítulo 9].

EL AREA HIPERBOLICA DE REGIONES FUNDAMENTALES

Teorema 4.1 (de Gauss-Bonnet). *El área hiperbólica de un triángulo hiperbólico con ángulos α, β, γ es finita e igual*

a

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

DEMOSTRACION. Dividiremos la demostración en varios casos:

(1) Sea el triángulo ABC con ángulos $0, \pi/2, \alpha$. Se puede suponer que dicho triángulo es el que aparece en la figura 1 ya que mediante una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ se puede enviar al triángulo de la figura. Se tiene $0 < a \leq \rho$. Ahora, aplicando el teorema de Fubini para integrales impropias (ver Hasser[11], teorema 5.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} |\Delta ABC| &= \int_0^a \int_{\sqrt{\rho^2-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \\ &= \int_0^a \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{\rho^2-x^2}}^t \frac{1}{y^2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^a \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2-x^2}} \right\} dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\rho^2-x^2}} dx \\ &= \int_0^a \frac{1/\rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\rho}\right)^2}} dx. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = x/\rho$ la integral anterior se transforma en

$$\frac{1}{\rho} \int_0^{a/\rho} \frac{\rho du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsen \frac{a}{\rho} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - (0 + \frac{\pi}{2} + \alpha).$$

Observese que este caso se aplica también cuando $a = \rho$, es decir el triángulo tiene 2 vértices en \hat{R} .

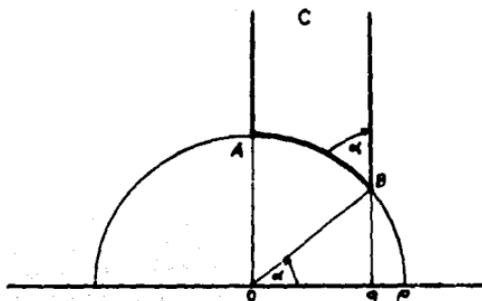


figura 1

(2) Si $\triangle ABC$ tiene ángulos $0, \alpha, \beta$ como muestra la figura 2

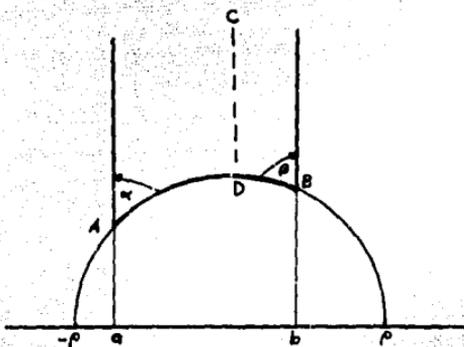


figura 2

Se tiene $|\triangle ADC| = \pi - (\alpha + \frac{\pi}{2})$ y $|\triangle BDC| = \pi - (\frac{\pi}{2} + \beta)$

Por tanto

$$|\triangle ABC| = 2\pi - (\pi + \alpha + \beta) = \pi - (\alpha + \beta).$$

En el caso en que A y B están en el mismo lado con respecto a D se procede de manera similar.

El caso 2 cubre todos los casos en los que el triángulo tiene al menos un vértice real ya que mediante una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ se puede transformar dicho triángulo en alguno que tenga ∞ como vértice.

3) En este caso se consideran triángulos sin vértices reales como se muestra en la figura 3.

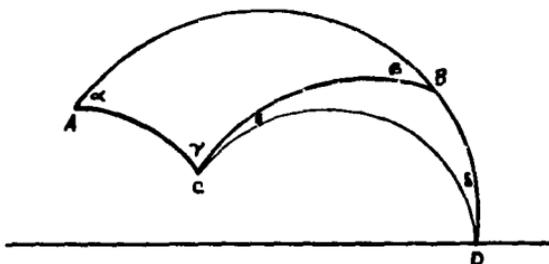


figura 3

Se prolonga AB hasta cortar el eje real en un punto D. Trazando la H-línea que une a C con D se tiene que

$$\begin{aligned} |\Delta ABC| &= |\Delta ADC| - |\Delta BCD| = \\ &= (\pi - (\alpha + \gamma + \epsilon + \delta)) - (\pi - (\epsilon + \eta + \delta)) \\ &= -(\alpha + \gamma) + (\pi - \beta) = \pi - (\alpha + \gamma + \beta). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 4.2. Sean R_1 y R_2 regiones fundamentales tales que sus fronteras (en H) tienen área de Lebesgue cero. Entonces

$$|R_1| = |R_2|.$$

DEMOSTRACION. Ya que R_1 es abierto, es Lebesgue medible; y ya que ∂R_1 es de área cero, se tiene por (1.19) que $|\bar{R}_1| = |R_1|$. Consideramos primero el caso en que $|R_1|, |R_2|$ son finitos.

Para probar el teorema se necesitarán las siguientes

relaciones

$$\bar{R}_1 \supset \bigcup_{V \in \Gamma} (V(R_2) \cap \bar{R}_1), \quad \bigcup_{V \in \Gamma} (R_2 \cap V^{-1}(\bar{R}_1)) \supset R_2$$

La primera es trivial y la segunda se sigue del hecho de que H es cubierto por imágenes de \bar{R}_1 .

Como los términos en el miembro derecho de la primera inclusión son disjuntos, se tiene que

$$|R_1| = |\bar{R}_1| \geq \sum_{V \in \Gamma} |V(R_2) \cap \bar{R}_1|$$

Aquí se está usando la σ -aditividad del área (1.18).

Por la invariancia del área hiperbólica y otra vez la σ -aditividad del área se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{V \in \Gamma} |V(R_2) \cap \bar{R}_1| &= \sum_{V \in \Gamma} |R_2 \cap V^{-1}(\bar{R}_1)| = \\ &\geq \left| \bigcup_{V \in \Gamma} (R_2 \cap V^{-1}(\bar{R}_1)) \right| \geq |R_2|. \end{aligned}$$

De esta forma invirtiendo los papeles de R_1 y R_2 completamos la prueba. Si $|R_1| < \infty$ este argumento prueba que $|R_2| < \infty$.

Corolario 4.3. *Dos polígonos de Dirichlet de Γ (en general con diferentes centros) tienen área hiperbólica igual.*

DEMOSTRACION. Se tiene únicamente que observar que la frontera de un polígono de Dirichlet consiste de un número a lo mas numerable de líneas rectas y arcos circulares y es por tanto de área cero. \square

Teorema 4.4. *Un polígono de Dirichlet tiene área hiperbólica finita si y solo si tiene un número finito de lados y no tiene lados libre.*

DEMOSTRACION. Por el corolario anterior podemos considerar un polígono de Dirichlet arbitrario N . Si N tiene un número finito de lados y no tiene lados libres, su área puede ser calculada por la fórmula de Gauss-Bonnet. Seleccionando un punto interior P en N y dibujando H -líneas de P a cada uno de los vértices de N . Por la convexidad de N estas

H-líneas están enteramente contenidas en \bar{N} . De esta manera se obtiene una triangulación de N . Supongase que N tiene $2n$ lados. Asociamos a cada ciclo un número l , el cual es 1 para un ciclo accidental, el orden del ciclo para un ciclo elíptico y ∞ (esto es $1/l = 0$) para un ciclo parabólico. Con esta asociación se observa que la suma de los ángulos en los vértices de un ciclo es en todos los casos igual a $2\pi/l$. Considerando que la suma de los ángulos en P es 2π .

Se tiene por Gauss-Bonnet que

$$(1) \quad |N| = 2\pi n - 2\pi - 2\pi \sum 1/l = 2\pi (n - 1 - \sum 1/l),$$

donde la suma se extiende sobre todos los ciclos. Se sigue que $|N|$ es finita.

Supongamos ahora que $|N|$ es finito. Entonces N no tiene lados libres, debido a que cualquier vecindad de un punto dentro de un lado libre tiene área infinita.

Probamos ahora que N tiene un número finito de lados. Sean s_1, s_2, \dots, s_{2n} $2n$ lados consecutivos de N . Desde un punto interior de N se toman H-líneas a los puntos extremos de estos lados, formando $2n$ triángulos hiperbólicos, cuya área ahora se estimará por el teorema de Gauss-Bonnet.

(Ver figura 4).

Sea $w_j = \gamma_j + \beta_{j+1}$ el ángulo en el vértice v_j (éste puede estar en H o en R). Entonces

$$(2) \quad |N| = 2\pi n - \sum_{j=1}^{2n-1} w_j - \beta_1 - \gamma_{2n} - \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j.$$

Obsérvese que $\sum \alpha_j \leq 2\pi$ y $0 \leq w_j \leq \pi$. Además, se pueden excluir los vértices para los cuales $w_j = \pi$, ya que este caso ocurre solo con un ciclo de orden 2 constituido por un único vértice que se puede simplemente despreciar transformando los 2 triángulos que llegan a este vértice en uno solo. Por tanto

$$(3) \quad 3\pi + |N| > \beta_1 + \gamma_{2n} - \pi + 2\pi + |N| \geq \sum_{j=1}^{2n-1} (\pi - w_j),$$

ya que $\beta_1 < w_1 < \pi$ y similarmente $\gamma_{2n} < \pi$.

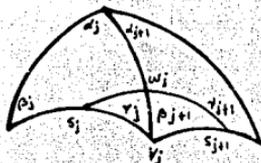


figura 4

Si el número de lados en N es infinito, se puede extender la sucesión $\{s_i\}$ indefinidamente. Y se sigue de (3) que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} (\pi - w_j)$ converge; y por lo tanto $w_j \rightarrow \pi$. Se sigue que $w_j = 0$ para solo un número finito de j 's, las cuales corresponden, a los vértices parabólicos en N . Por consiguiente si $j > j_0$

$$(4) \quad \frac{2}{3} \pi < w_j < \pi \text{ para } j > j_0$$

Estos vértices de N son ordinarios. Como hay un número infinito de ciclos algunos de ellos digamos v_{r_1}, \dots, v_{r_j} satisfacen $r_k > j_0$ $k = r_1, \dots, r_j$

Para este ciclo se tiene por (4)

$$\frac{2}{3} \pi < w_k < \pi, \quad k = r_1, r_2, \dots, r_j$$

finalmente como

$$w_{r_1} + \dots + w_{r_j} = \frac{2\pi}{l},$$

donde l es orden del ciclo, se tiene que

$$\frac{2}{3} \pi j < \frac{2\pi}{l} < \pi j$$

y

$$2 < jl < 3,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto N tiene un número finito de lados. \square

Corolario 4.5. Si $|N| < \infty$, entonces Γ posee un sistema de generadores que tiene a lo más $\frac{3|N|}{2} + 6$ miembros.

DEMOSTRACION. Supongase que N tiene $2t$ lados. Por Gauss-Bonnet

$$|N| = 2\pi(t - 1) - 2\pi \sum 1/l_j,$$

la suma se extiende sobre todos los ciclos ordinarios. Si un ciclo de orden l_j tiene r_j vértices, entonces $r_j l_j > 3$; exceptuando el caso $l_j = 2, r_j = 1$. Esto es trivial si $l_j > 3$ o si $l_j = 2$ y $r_j > 1$. Si $l_j = 1$ (esto es un ciclo accidental), entonces $r_j \geq 3$. Esto es porque la suma de los ángulos de los vértices de un ciclo accidental es 2π , y los ángulos en vértices accidentales son menores que π (un ángulo de π está asociado solo con un vértice de orden 2). Supongase hay e ciclos con $l_j = 2, r_j = 1$. Entonces para los ciclos restantes se tiene

$$\sum \frac{1}{l_j} = \sum \frac{r_j}{r_j l_j} \leq \frac{1}{3} \sum r_j \leq \frac{2t - e}{3},$$

y por lo tanto

$$\frac{|N|}{2\pi} \geq t - 1 - \frac{2t - e}{3} - \frac{e}{2} = \frac{t}{3} - \frac{e}{6} - 1$$

Cada uno de los vértices e de orden 2 separa 2 lados conjugados. Dos de estos vértices no pueden ser consecutivos en la frontera N , ya que esto implicaría que el lado comprendido entre ambos sería conjugado de 2 lados distintos (ver figura 5).

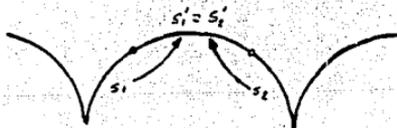


figura 5

Por tanto $e \leq t$ y esto da

$$\frac{|N|}{2\pi} \geq \frac{1}{6} - 1.$$

Ya que las transformaciones que conjugan los lados generan el grupo, se sigue la demostración. \square

Definición. Un espacio topológico conexo de Hausdorff es una **Superficie de Riemann** si existe una familia

$$\{(\phi_j, U_j) : j \in J\},$$

llamada un atlas (las parejas (ϕ_j, U_j) se les llama cartas) tal que

- (i) $\{U_j : j \in J\}$ es una cubierta abierta de X ;
- (ii) cada ϕ_j es un homeomorfismo de U_j sobre un subconjunto abierto del plano complejo; y
- (iii) si $U = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces

$$\phi_i(\phi_j)^{-1} : \phi_j(U) \rightarrow \phi_i(U)$$

es una función analítica entre los conjuntos planos $\phi_j(U)$ y $\phi_i(U)$.

Definición. Sea G un grupo multiplicativo con elemento identidad e . Se dice que G actúa en el espacio topológico X cuando existe una función $\theta: G \times X \rightarrow X$ que satisface

- (1) $\theta(e, x) = x \quad \forall x \in X$.
- (2) $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x) \quad \forall x \in X \text{ y } \forall g, h \in G$.
- (3) $\theta_g: X \rightarrow X$ es continua $\forall g \in G$, donde $\theta_g(x) = \theta(g, x)$.

A θ se llama una acción de G en X .

Dada una acción de G en espacio X , el **espacio de órbitas** es el conjunto de órbitas X/G provisto de la topología cociente inducida por la proyección natural $\pi: X \rightarrow X/G$.

Si $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ y definimos $\theta: \Gamma \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ como $\theta(T, z) = T(z)$. Entonces θ define una acción de G en \mathbb{H}^2 y \mathbb{H}^2/Γ denota su espacio de órbitas. Además, si $\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{C}}$ entonces denotaremos como \mathbb{R}/Γ al espacio cociente de \mathbb{R} bajo la relación de Γ -equivalencia.

Si Γ es un grupo Fuchsiano actuando en H^2 , H^2/Γ es una superficie de Riemann (ver Beardon [1] cap. 6), más aún si N es una región fundamental entonces H^2/Γ y \bar{N}/Γ son homeomorfos (Beardon [1] cap. 10). En el caso en que N tenga área hiperbólica finita se puede probar que \bar{N}/Γ es una superficie de Riemann compacta orientable sin frontera. Esto se hace estableciendo una topología adecuada para los puntos fijos parabólicos (ver Beardon [1] cap. 6 y cap. 10). Por lo cual \bar{N}/Γ es la superficie cerrada asociada a \bar{N}/Γ ya que se obtiene de \bar{N} quitando un número finito de puntos que corresponden a los puntos parabólicos.

De acuerdo al teorema 4.2., para calcular el área hiperbólica de una región fundamental de Γ es suficiente calcular el área para cualquier polígono de Dirichlet N de Γ . Y se tiene además el siguiente resultado.

Teorema 4.7. Si $|N| < \infty$, entonces

$$|N|/2\pi = (2g - 2 + \sum_{i=1}^s (1 - 1/l_i)),$$

donde g es el género de la superficie de Riemann \bar{N}/Γ y s es el número de ciclos no accidentales.

DEMOSTRACION. Identificando los vértices y los lados Γ -equivalentes obtenemos la superficie de Riemann compacta sin frontera \bar{N}/Γ , la cual (si N tiene c ciclos y $2n$ lados) tiene c vértices y n lados, ya que por definición los vértices de un ciclo son Γ -equivales y los lados se conjugan por pares.

Por teorema 2.31 se tiene que $\chi(\bar{N}/\Gamma) = 2 - 2g$, donde g es el género de \bar{N}/Γ y usando la fórmula 2.30 (característica de Euler de un complejo esférico), se tiene que

$$\chi(\bar{N}/\Gamma) = c - n + 1.$$

Por tanto, $c - n + 1 = 2 - 2g$.

Ahora se tiene por Gauss-Bonnet que

$$|N| = 2\pi \left(n - 1 - \sum_{i=1}^c 1/l_i \right).$$

De esta forma tenemos que

$$|N|/2\pi = 2g - 2 + c - \sum_{i=1}^c 1/l_i = 2g - 2 + \sum_{i=1}^c (1 - 1/l_i).$$

En la suma anterior podemos omitir los ciclos accidentales ($l = 1$), por lo tanto

$$|N|/2\pi = 2g - 2 + \sum_{i=1}^s (1 - 1/l_i),$$

donde s denota el número de ciclos no accidentales. \square

Corolario 4.8. Sea R una región fundamental de $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Spongase también que la frontera de R tiene medida de Lebesgue cero. Entonces

$$|R| > \frac{\pi}{21}.$$

DEMOSTRACION. Por el teorema 4.2 podemos suponer que R es un polígono de Dirichlet de Γ y por la fórmula del teorema 4.7, se tiene que

$$(1) \quad R_1 = |R|/2\pi = 2g - 2 + \sum_{i=1}^s (1 - 1/l_i)$$

donde s es el número de ciclos no accidentales.

Se quiere demostrar que

$$R_1 \geq \frac{1}{42}$$

Los parámetros en (1) son g y $\{l_1, \dots, l_s\}$, donde $g \geq 0$ y $2 \leq l_i \leq \infty$.

Cuando $g \geq 2$, tenemos $R_1 \geq 2$.

Cuando $g = 1$, tenemos que $s > 0$, de otra forma $R_1 = 0$. Por tanto

$$R_1 \geq 1 - 1/l_1 \geq 1/2.$$

Supongase $g = 0$.

Si $s \geq 5$; $R_1 \geq -2 + 5/2 = 1/2$.

Si $s = 4$, $l_1 > 2$ para al menos alguna i , de otra forma R_1 no es positivo y $R_1 \geq -1/l_1 + 1/2 \geq 1/2 - 1/3 = 1/6$.

Si $s = 1$ o $s = 2$ no se cumple que R_1 es positivo.

Si $s = 3$, tenemos

$$R_1 = 1 - (1/l_1 + 1/l_2 + 1/l_3),$$

supongase $l_1 \leq l_2 \leq l_3$. Si $l_1 \geq 4$, $R_1 \geq 1 - 3(1/4) = 1/4$.

Si $l_1 \geq 3$, entonces ya que $l_2 \geq 1/3$, debemos tener que $l_3 \geq 4$ para que R_1 se mayor que cero. Por tanto

$$R_1 \geq (1/3 + 1/3 + 1/4) = 1/12.$$

Finalmente supongase $l_1 = 2$. Entonces $l_2 = 3$ o $l_2 \geq 4$. En el primer caso necesariamente

$$l_3 \geq 7 \text{ y } R_1 \geq 1 - (1/2 + 1/3 + 1/7) = 1/42.$$

Si $l_2 = 4$ necesariamente $l_3 \geq 5$. Por tanto

$$R_1 \geq 1 - (1/2 + 1/4 + 1/5) = 1/20.$$

El caso $l_2 > 4$ se sigue en forma análoga. \square

EJEMPLOS.

La cota inferior descrita en el corolario es la mejor, ya que existe un grupo con los parámetros

$$g = 0, l_1 = 2, l_2 = 3, l_3 = 7,$$

llamado el grupo triangular 2,3,7. Se puede probar que la región descrita en la figura 6 es una región fundamental para este grupo.

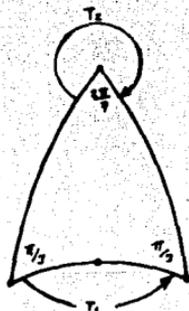


figura 6

Al aplicar las transformaciones de este grupo se obtiene una teselación del disco unitario (vease figura 7).

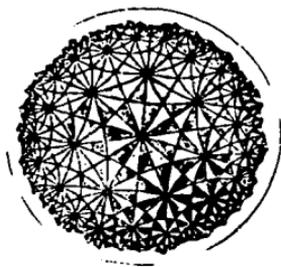


figura 7

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

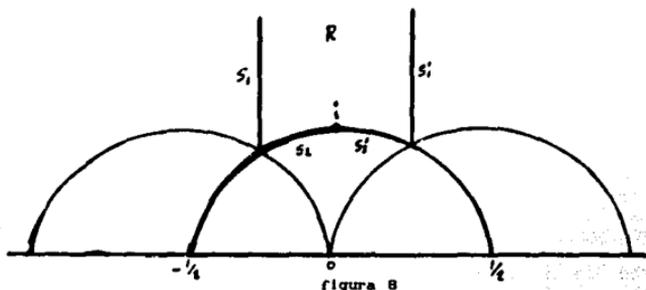
El grupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$.

El grupo modular denotado $SL(2, \mathbb{Z})$ es el grupo de todas las matrices 2×2 unimodulares con entradas enteras.

Una región fundamental para el grupo de transformaciones definido por $SL(2, \mathbb{Z})$ es

$$R : x^2 + y^2 > 1, \quad |x| < 1/2, \quad y > 0$$

(ver Lehner [4], pag.59), la cual se muestra en la figura 8.



El grupo es generado por las transformaciones

$U(z) = z + 1$, la cual conjugua s_1 con s_1' y $T(z) = -1/z$, la cual conjugua s_2 con s_2' .

Los ciclos son $\{\rho, -\bar{\rho}\}$, $\{1\}$, $\{\infty\}$, donde

$\{\rho, -\bar{\rho}\}$ es un ciclo de orden 3, ya que la suma de los ángulos de los vértices de este ciclo es $2\pi/3$.

$\{1\}$ es un ciclo de orden 2.

$\{\infty\}$ ciclo parabólico.

Usando la fórmula (2) del teorema 4.7 tenemos que

$$g = (c - n - 1)/2 = (3 - 2 - 1)/2 = 0.$$

Por el teorema 4.7 el área hiperbólica de la región fundamental es

$$|R| = 2\pi \left(2g - 2 + \sum_{i=1}^n (1 - 1/l_i) \right) = 2\pi [-2 + (1 - 1/3) + (1 - 1/2) + 1] = \pi/3.$$

El grupo $\Gamma(2)$.

El grupo $\Gamma(2)$ es el subgrupo de $SL(2, \mathbb{Z})$ que consiste de todas las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } a \text{ y } d \text{ impares, } b \text{ y } c \text{ pares.}$$

Una región fundamental para este grupo es la que se muestra en la figura 9. (Ver Lehner [4], pag.61)

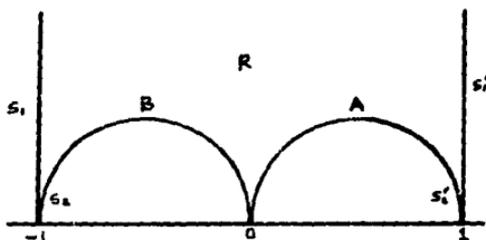


figura 9

Este grupo es generado por las transformaciones

$$U = z + 2, \text{ que conjuga los lados } s_1 \text{ con } s'_1 \text{ y}$$

$$T(z) = \frac{z}{2z + 1}, \text{ que conjuga los lados } s_2 \text{ con } s'_2.$$

Los ciclos son (∞) , $(-1, 1)$, (0) , los cuales son todos parabólicos.

Usando la fórmula (2) de teorema 4.7 tenemos que

$$g = (3 - 2 - 1)/2 = 0.$$

Por el teorema 4.7 el área hiperbólica de la región fundamental es

$$|R| = (-2 + 3)2\pi = 2\pi.$$

BIBLIOGRAFIA

1. A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, N.Y. (1983).
2. M. J. Greenberg y J. R. Harper, *Algebraic Topologic*, Addison-Wesley, Massachusetts, U.S.A (1981)
3. J. W. Keesee, *Introducción a la Topología Algebraica*, Alhambra, España (1971).
4. S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Massachusetts, U.S.A. (1964).
5. J. Lehner, *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston, N.Y. (1966).
6. W. S. Massey, *Introducción a la Topología Algebraica*, Reverté, España (1982).
7. G. Mosqueda, "Poligonos, fundamentales de Dirichlet", Tesis de Licenciatura, UNAM (1992).
8. J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academia Press, N. Y. (1979).
9. W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, 3a.edición, McGraw-Hill, México (1980).
10. R. L. Wheeden y A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Dekker, N.Y. (1977).
11. N. B. Hasser, J. P. La Salle y J. A. Sullivan, *Análisis Matemático*, Vol 2, Ed. trillas, México (1970).