21
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENFOQUE INTUITIVO PARA EL ESTUDIO DEL CALCULO

T E S I S

Que para obtener el título de:

A C T U A R I O

P r e s e n t a:

ROSA MARIA CRUZ MONDRAGON

México, D. F. Mayo 1995

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNOMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron la pasante(s) ROSA MARIA CRUZ MONDRAGON

con número de cuenta 7055623-8 con el Título:
ENFOQUE INTUITIVO PARA EL ESTUDIO DEL CALCULO

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de ACTUARIO

GRADO	NOMBRE(S) APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en C.	CARLOS HERNANDEZ SAAVEDRA	Hernandez
Director de Tesis		
M. en C.	ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA	
ACTUARIO	MARIA AURORA VALDEZ MICHEL	
M. en C.	JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA	
Suplente		
M. en C.	EMMA LAM OSNAYA	Emma Lam O.
Suplente		

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACTUARIA

TESIS: ENFOQUE INTUITIVO PARA EL ESTUDIO DEL CALCULO.

DESARROLLADA POR: ROSA MARIA CRUZ MONDRAGON.

DIRECTOR: M. EN C. CARLOS HERNANDEZ SAAVEDRA

ASESOR: M. EN C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

JURADO: M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

JURADO: M. EN C. EMMA LAM OSNAYA

JURADO: ACTUARIO. MARIA AURORA VALDEZ MICHEL

LOS MAS SINCEROS AGRADECIMIENTOS

AL DIRECTOR:

M. EN C. CARLOS HERNANDEZ SAAVEDRA

AL ASESOR:

M. EN C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

A LOS SINODALES:

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

M. EN C. EMMA LAM OSNAYA

ACTUARIO. MARIA AURORA VALDEZ MICHEL

A TI PADRE

QUE FUISTE SIEMPRE MI GUIA

A MI ESPOSO E HIJOS

RUBEN , RUBEN ALBERTO, DIANA PATRICIA

POR SU GRAN APOYO Y COMPRENSION

ENFOQUE INTUITIVO PARA EL ESTUDIO DEL CALCULO

INDICE

J U S T I F I C A C I O N D E L T R A B A J O

Enseñar matemáticas es una tarea sumamente compleja. Demasiados factores influyen en el proceso de comunicar o enseñar habilidades, conceptos y principios matemáticos hacia los estudiantes. Quizás el factor más significativo en el proceso de enseñar es el de entender el desarrollo intelectual o proceso cognoscitivo. El cómo un estudiante aprende o adquiere nuevas habilidades o conocimientos tiene un impacto directo y significativo de cómo los profesores deben enseñar las matemáticas. Pero, ninguna teoría del aprendizaje describe en forma completa cómo el estudiante debe adquirir el conocimiento matemático. En parte ésto se debe a cómo las diferentes teorías del aprendizaje ven las metas u objetivos de la instrucción matemática. Algunas ven a las matemáticas como la adquisición de habilidades algorítmicas, otras la ven como el entendimiento de conceptos y relaciones que definen la estructura de las matemáticas como algo ya acabado y algunas otras la ven como el desarrollo de habilidades y conceptos para resolver problemas.

Cuántas veces nosotros como profesores nos hemos preguntado cómo planear una leccion o unidad en matemáticas, y como empezarla. La teoría del aprendizaje de R. Gagne (The Conditions of Learning and a theory of instruction, 1985, New York, Holt Reinhart.), da sugerencias y algunas ideas de como empezar. El trabajo de Gagne se fundamenta principalmente en la suposición de que la experiencia de una adecuada secuencia didáctica, seguida de una práctica correcta y suficiente, dará por resultado el aprendizaje deseado. El asegura que las tareas de un alto grado de dificultad se pueden dominar si antes que nada, éstas se pueden descomponer en bloques elementales representados en un orden jerárquico de subordinación y de pre-requisitos en las habilidades.

Por las razones aquí expuestas, considero que la enseñanza del Cálculo en un curso introductorio para alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades en edades entre 16 y 17 años según el programa de matemáticas IV de la currícula, debe estar enfocado a traves de un "manoseo" intuitivo de los conceptos fundamentales del mismo (el de Límite más propiamente), sin descuidar las secuencias didácticas adecuadas para impartirlo, así como un tratamiento histórico de los problemas que le dieron origen.

Partiendo de dos hechos importantes:

I° El alumno ya cursó: Algebra, Geometría Euclidiana, y Geometría Analítica.

2° El contenido programático de matemáticas IV donde va a servir este trabajo como material de apoyo es:

Los Reales. Intervalos y Desigualdades

Relaciones y Funciones.

Limites.

Continuidad.

Derivada

Otro punto valioso acerca de esta propuesta para un enfoque intuitivo sobre el estudio del Cálculo es acerca de la motivación que se logra por un lado, en la elección de los problemas mas atractivos y significativos que introducen el estudio del Calculo. Y por otro lado el espíritu histórico de la exposición que motive al estudiante a su intuición geométrica y física de su mundo.

El enfoque del curso debe ser fundamentalmente intuitivo, concreto, histórico y conceptual mas que abstracto y deductivo. Los conceptos fundamentales se incluyen a través del papel que ellos juegan para resolver problemas básicos. Y aún cuando el Cálculo tiene profundas raíces en problemas físicos, sin embargo gran parte de su potencia y belleza deriva en la variedad de sus aplicaciones. Así, un curso introductorio a nivel bachillerato, de Calculo debe llevar a las aplicaciones apelando a la intuicion, para después, por el ejercicio en la resolución de problemas, alcanzar una destreza operatoria. De esta manera el estudiante se convierte en participante activo en la evolución de las ideas y no queda como mero observador pasivo de los resultados.

CAPITULO I

I N T R O D U C C I O N

I. – INTRODUCCION

El cálculo diferencial e integral da origen a una nueva matemática: la matemática del movimiento, antes existía un tipo distinto de matemáticas que se conoce como matemática elemental y cuyas principales ramas son la aritmética, la geometría euclidiana, el álgebra elemental y la trigonometría. En el siglo XVII, se inició el movimiento científico moderno. En él se plantearon problemas y técnicas para nuevas ramas de las matemáticas. La creación más importante y fructífera para el desarrollo moderno de las matemáticas y la ciencia, fue el cálculo. Con el surgimiento del cálculo se produce una ruptura entre lo que es la matemática elemental (contemplativa o estatica) y la matemática que incorpora los procesos dinámicos.

I. 1. - LOS PROBLEMAS QUE DAN ORIGEN AL CALCULO

Los matemáticos del siglo XVII que fueron desarrollando gradualmente las ideas y los procesos que hoy abarca el cálculo, se dedicaron fundamentalmente al estudio del movimiento de los cuerpos. Uno de los primeros problemas que se abordaron es el de la relación existente entre la distancia recorrida por un cuerpo, su velocidad y su aceleracion. Aún cuando ellos sabian que la velocidad era la razón de la distancia con respecto al tiempo, no les era posible calcular la velocidad en un instante determinado. Un problema similar encontraban en el estudio de la aceleración.

El problema inverso era igualmente importante. Supóngase que se conoce la aceleración de un cuerpo en movimiento en cada instante. ¿Como encontraremos la velocidad y distancia recorridas en cada instante? Cuando la aceleración es constante se pueden multiplicar la aceleracion por el tiempo transcurrido y obtener así la velocidad deseada. Pero este procedimiento no conduce al resultado correcto cuando la aceleración es variable.

Otro era el problema de las tangentes a una curva, pero no enfocado desde el punto de vista meramente geométrico. El problema se planteaba como la relacion entre la trayectoria que sigue un cuerpo y las fuerzas que actúan sobre el. Un tercer problema que se presentaba consistía en el estudio de los valores maximos y mínimos de una funcion. Este tipo de problemas comenzo a ser atacado por Galileo en sus estudios sobre la caida libre de los objetos y la balística en particular. Pero también aparecería en el estudio de las trayectorias de los planetas, por ejemplo para calcular la distancia máxima o mínima de un planeta al sol o a otro planeta o para describir el movimiento de un cohete de tal manera que se tenga que tomar en cuenta la variacion en la aceleración debida a la gravedad.

Un cuarto problema abordado era la determinacion de longitudes, volúmenes y areas bajo ciertas curvas. Por ejemplo calcular el volumen de la tierra, o la longitud de la trayectoria sobre la que se mueve un planeta en un periodo de tiempo dado. Esto es importante si se desea predecir la posición del planeta en un instante posterior.

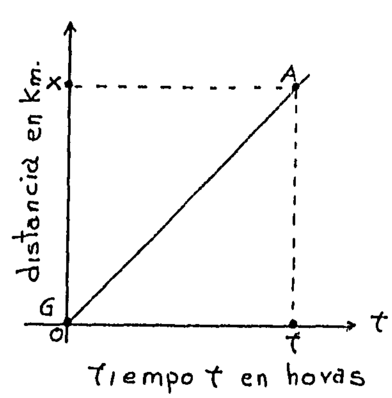
Para dar una idea al alumno de la diversidad de problemas que pueden tratarse por medio del cálculo, se exponen a continuación algunos ejemplos:

I.2. PROBLEMAS QUE INTRODUCEN AL ESTUDIO DEL CALCULO

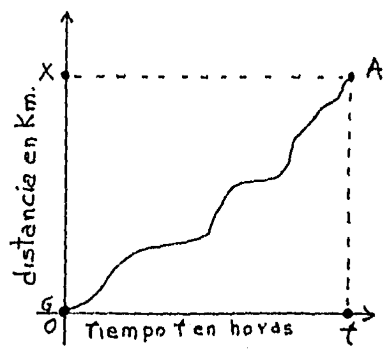
Ejemplo 1.- Consideremos primero un ejemplo de movimiento. Cuando viajamos en carro de Guadalajara a Aguascalientes y décimos que cubrimos los 300Km. en 5hrs, se concluye que desarrollamos una velocidad (rapidez) promedio de 60Km. por hora (sobre hora), en realidad estamos pensando en pasar de la ciudad G a la ciudad A a velocidad constante, de una posicion inicial en el tiempo 0 a la posición x en el tiempo t, que representaria estar en Aguascalientes.

$$V = \frac{x}{t} \text{ (velocidad)}$$

Geométricamente, este hecho lo podemos representar como sigue:



En nuestro ejemplo $x=300Km$ y $t=5hrs$ por lo que la velocidad promedio $v=60Km/hr$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos G(0hrs,0Km) y A(5hrs,300Km). Físicamente esto representa que el carro está viajando a una razon de cambio constante o uniforme. La gráfica, tiempo vs. distancia recorrida, está constituida por una línea recta. Evidentemente, esta descripción del movimiento del carro de G hacia A no es real, un modelo del fenómeno mas realista es aquel en donde la velocidad está variando, cuando el carro disminuye su velocidad debido a las curvas, ciudades, tráfico etc., por lo cual, una gráfica mas realista que describe a este movimiento sería :



Se observa claramente que ahora en cada par de instantes la velocidad promedio puede ser diferente entendiéndose por velocidad promedio, la diferencia entre distancias entre la diferencia de los tiempos. ¿Como debe ser la trayectoria para que cuando se tomen dos parejas distintas las velocidades promedio sean iguales?

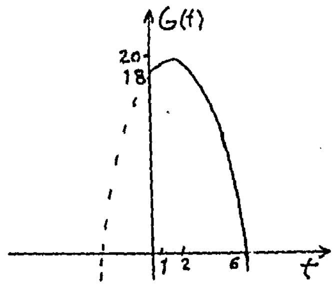
Ejemplo 2- Una compañia manufacturera ha comprado una máquina cuya producción presenta ingresos en un tiempo t, de: $P(t)=-t^2+4t+18$ donde $P(t)$ está en unidades de 10.000 pesos y t está en años. Por otra parte el costo por reparación y mantenimiento de la máquina en el tiempo t es de: $M(t)=t$ donde $M(t)$ está en unidades de 10.000 pesos y t está en años. La compañia está por supuesto interesada en saber, ¿En qué tiempo la máquina da un máximo de ganancias?, ¿En que tiempo se debe retirar la máquina por incosteable?

Solución:

La función de ganancias $G(t)$ es igual a los ingresos $P(t)$ menos el costo por reparacion y mantenimiento de la máquina $M(t)$, por lo que:

$$
\begin{aligned}
G(t) &= P(t) - M(t) \\
&= -t^2 + 4t + 18 - t \\
&= -t^2 + 3t + 18
\end{aligned}
$$

Gráficamente:



Si observamos la gráfica de G(t), vemos que en el vértice de la parábola es en el punto en el que se obtiene mayor ganancia, y se encuentra entre el primero y el segundo año de producción. Esta respuesta es tan aproximada como la escala de la gráfica. Sin embargo, la respuesta precisa será analizada y obtenida posteriormente. La máquina se deberá retirar cuando las ganancias sean cero, y como se observa en la gráfica $G(t)=0$ en $t=6$ años. Para apoyar la respuesta tenemos que hacer:

$$G(t) = -t^2 + 3t + 18 = (t-6)(t+3) = 0$$

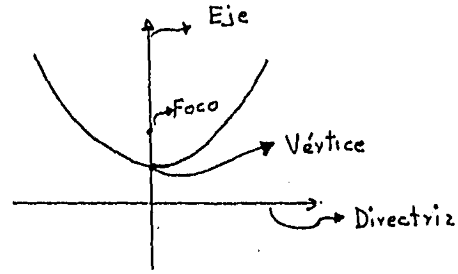
en $t=6$ y en $t=-3$, $G(t) = 0$

$t=-3$ no tiene sentido, entonces $t=6$ años.

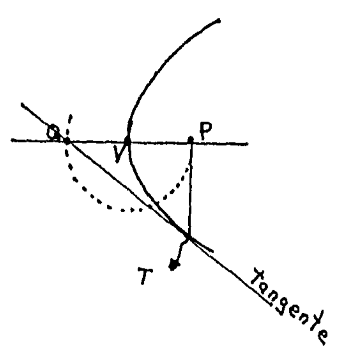
Una pregunta más que podemos plantear es ¿cómo van cambiando las ganancias con respecto al tiempo?

Calcular tangentes a una curva en un punto, localizar puntos exactos sobre la gráfica de una función en los cuales, al dibujar una tangente, ésta sea horizontal, nos permite resolver las preguntas planteadas.

I.3 EL PROBLEMA DE LAS TANGENTES.- El problema de cómo trazar tangentes a curvas ha atraído el interés de muchas personas a través de la historia de las matemáticas. Los geómetras griegos conocían un método para construir tangentes a una parábola pero antes de aplicarlo vamos a recordar que es una parábola. La parábola es el lugar geométrico de todos lo puntos del plano que están equidistantes de un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz. una parábola es simétrica con respecto a la recta que pasa por el foco y forma un ángulo recto con la directriz. esta línea de simetría se llama eje de la parábola y corta a la parábola en un punto llamado vértice.

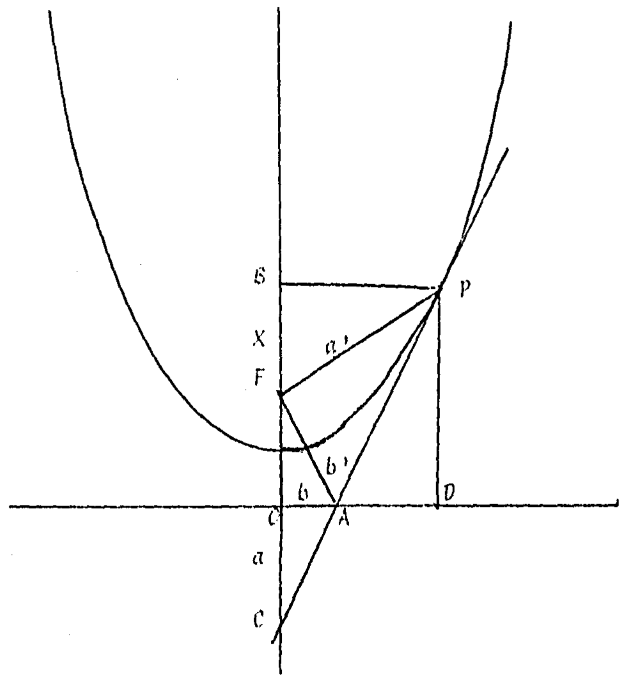


El método griego para trazar tangentes a una curva es el siguiente. Marquemos un punto T en la parábola por donde queremos hacer pasar la tangente. y levantemos una perpendicular de este punto al eje de la parábola, y a esta intersección la denotaremos como P, después trazamos un círculo que pase por el punto P y tenga el vértice de la parábola como centro. este círculo corta el eje de la parábola en otro punto que llamaremos Q. Finalmente trazamos la recta que va de Q a T. esta toca a la parábola en el punto T. y es la recta tangente a la parábola en el punto T.



Demostremos que la recta trazada efectivamente es la tangente a la parabola.

A partir del punto P trazamos rectas paralelas a la directriz y al eje de la parábola formando el rectángulo ODPB, trazamos una recta de P al foco y otra del foco al punto de intersección de la recta tangente con la directriz, de manera que se nos formen los triángulos AFP y PAD como se muestra en la siguiente figura.



$\triangle$PAF y $\triangle$PAD son congruentes por la propiedad de reflexión de la parábola y PF=PD

Como $\triangle OAF \approx \triangle BFP$ entonces $\frac{a'}{b'} = \frac{x}{b}$

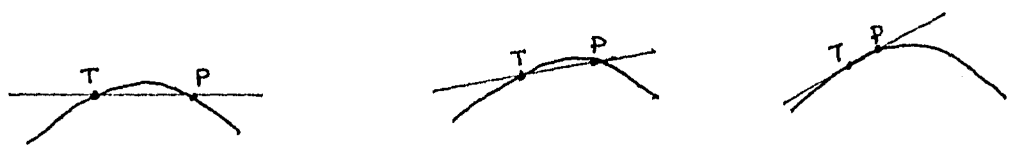
y $\triangle AFP \approx \triangle AOC$ entonces $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$

por lo tanto $\frac{a}{b} = \frac{x}{b}$

$$\boxed{a=x}$$

Por largo tiempo el problema de las tangentes a curvas fue resuelto por varios metodos, pero fue en el siglo XVII cuando Rene Descartes dio un gran paso para unificar la teoría de las tangentes, por un método llamado de raíces iguales, el cual proporciona un procedimiento uniforme para determinar las ecuaciones de las tangentes a un número pequeño de curvas, como el circulo y la parabola, pero este método falla en algunas curvas como $y=x^3$.

Pierre Fermat, un contemporáneo de Descartes encontro una forma para encontrar la ecuacion de la recta tangente para cualquier curva, consiste en marcar en la curva un punto por donde se quiere hacer pasar una tangente denotado como T y tomamos otro punto en la curva P cerca de T, trazamos una recta secante PT. Supongamos que P se mueve hacia T a lo largo de la curva, de manera que la recta secante se va convirtiendo en la recta tangente, conforme P se aproxime a T.



Esta idea será estudiada con cuidado en el capitulo IV

CAPITULO II

N U M E R O S R E A L E S
R E L A C I O N E S
Y
F U N C I O N E S

II. - NUMEROS REALES, RELACIONES Y FUNCIONES.

II.1 LOS NUMEROS REALES

II.1.1 NOCIONES DE TEORIA DE CONJUNTOS .- En esta sección se empieza por estudiar brevemente el lenguaje y la notacion de la teoria de conjuntos, esto se debe a la necesidad de estos conceptos y su terminologia en los capitulos siguientes.

Un conjunto A es una coleccion o grupo de objetos. A cada uno de los objetos del conjunto A se le llama elemento de A o miembro de A. Aquel conjunto que no tiene elementos se denomina **conjunto nulo**, ó **conjunto vacío** y se denota con el simbolo $\emptyset$.

Suponga que A es un conjunto y que **a** es un elemento del conjunto A. Lo anterior se escribe como sigue :

$$a \in A$$

y se lee: "**a** es un elemento de A" o "**a** pertenece a A". Si b no es un elemento de A, entonces escribimos:

$$b \notin A$$

y se lee. "b no es elemento de A" ó "b no pertenece a A".

Existen suficientes ejemplos de conjuntos a nuestro alrededor. Por ejemplo, un alumno puede decir que es miembro de un cierto grupo académico, pongamos por ejemplo la clase de matemáticas. En este caso, el grupo de alumnos que pertenecen a la clase de matemáticas es un **conjunto**, y los estudiantes inscritos en este curso son **elementos** del mismo. Así, un estudiante no inscrito en la clase de matemáticas no es un elemento del conjunto. Si no se inscriben alumnos en la clase de matemáticas, entonces se dice que el conjunto es **conjunto vacío**, esto quiere decir un conjunto que no tiene elementos.

Se puede escribir un conjunto A en dos formas. Estas dos maneras de escribir conjuntos se presentan en los ejemplos siguientes :

Ejemplo 1.- Consideremos al conjunto de los dígitos D. El cual se puede escribir como:

$$D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Aquí en realidad se están listando o **enumerando** los elementos del conjunto D. Una manera de describir el mismo conjunto D es:

$$D = \{x \ / \ x \text{ es un dígito}\}$$

Aquí hemos descrito al conjunto D dando la propiedad o característica común que todos los elementos de D tienen, a saber: la propiedad de ser un dígito.

Por supuesto, cuando esto es posible, se puede utilizar cualesquiera de las dos formas anteriores para describir un conjunto. Sin embargo, algunas veces resulta prácticamente imposible listar o enumerar todos los elementos de un conjunto debido a la naturaleza del mismo. Ejemplo de tales casos es el conjunto de los enteros positivos.

Ejemplo 2.- Considérese ahora, al conjunto S, cuyos elementos son los días de la semana. En este caso se pueden enlistar los elementos de S como:

S={lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

ó S={x/x es día de la semana}

De preferencia los elementos de un conjunto no deben repetirse. Esto significa que un elemento dado se registra una sola vez como miembro del conjunto.

Así. escribimos {3,2} en vez de {3,2,2}

También debemos observar que el orden en el cual se enlistan los elementos del conjunto. carece de importancia, así:

{2, 3, 4} ; {2, 4, 3} ; {3, 4, 2}

Son tres listados diferentes del mismo conjunto. Esto significa que los elementos son los que distinguen al conjunto, y no el orden en el cual se escriben sus elementos.

En adelante, adoptaremos la convencion de que las letras mayúsculas A, B, C,... representen a los conjuntos y las letras minúsculas a, b, c,... representen los elementos de un conjunto.

Considerando a los conjuntos:

$A = \{1,2\}$ $\qquad B = \{1,2,3,4\}$

Se observa que cada elemento de A también pertenece al conjunto B. Cuando dos conjuntos presentan esta condición, decimos que A es un subconjunto de B.

Definición: Si todo elemento de un conjunto A, también es un elemento del conjunto B, entonces A es un subconjunto de B. Lo cual se simboliza como:

$$A \subset B$$

Por ejemplo:

$\{1,2,3\} \subset \{x/x$ es un dígito$\}$

$\{1,2,3\} \subset \{1,2,3\}$

II.1.2 CLASES DE NUMEROS.- Los números que se emplean para enumerar objetos o contarlos, tales como el número de miembros de la Cámara de Diputados o el número de tornillos que fabrica una máquina en una semana, se conocen como **Números Naturales**, los cuales normalmente se simbolizan como N y son :

$$N = \{ 1,2,3,\ldots\ldots \}$$

Sin embargo, existen muchos casos prácticos en los cuales no es posible o no es suficiente conocer y aplicar los números naturales. Por ejemplo, si se tiene un saldo de \$300.00 en la cuenta de cheques y se gira un cheque por \$450.00 ¿Cómo se representará el saldo de una cuenta sin utilizar números rojos?. En círculos contables, un débito o dinero adeudado se representa entre paréntesis, que para el caso anterior del cheque girado sería:

$$(\$150.00) = -\$150.00$$

Si la temperatura durante el día, en alguna ciudad del norte, es de 8°C, y durante la noche baja 12°C, entonces ¿Cuál es la nueva temperatura? y ¿cómo se puede representar?. De hecho lo que se trata de mostrar aquí es la necesidad de números negativos. De esta misma forma, podemos decir que la temperatura durante la noche, decendió a -4°C.

Y al conjunto de números que se emplean para representar casos como los anteriormente descritos, se le conoce como **Números Enteros negativos**, éstos junto con los naturales y el cero forman el conjunto de los **Números Enteros**, los cuales se simbolizan con Z

$$Z = \{\ldots,-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$$

Además observamos que los números naturales (N) forman un subconjunto de los números enteros (Z), esto es:

$$N \subset Z$$

Ya con este conjunto Z, se pueden resolver muchos problemas, sin embargo, existen todavía muchos otros con los cuales, los números enteros tienen dificultades de aplicación. Por ejemplo, ¿se podrá utilizar un número entero para responder a las preguntas? ¿qué parte de la edad de Luis (20 años) representa la edad de Juan (15 años)? ó ¿qué parte de tornillos defectuosos (125) que produce una máquina al día, son del total de tornillos que se producen (8500) diariamente? La respuesta es ¡no!. Se necesita un nuevo conjunto de números, el cual contenga a los anteriormente conocidos. Este nuevo conjunto de números se denomina **Conjunto de Números Racionales**, los cuales se simbolizan y se definen como:

$$Q = (x/x=(m/n) \text{ con } m,\ n \in Z \ \text{ y } n \neq 0)$$

Esto significa que los números racionales son todos aquellos números que se pueden expresar como el cociente (o razón) de dos números enteros (m/n), siempre que el denominador sea diferente de cero, debido a que la división entre cero no está definida (asi $n \neq 0$). Por ejemplo para responder que parte de 20 es 15, se dice que es 15/20 lo cual es 3/4, o también 0.75. Los siguientes, son ejemplos de números racionales.

$$0.75 = 3/4$$

$$-0.15 = -15/100$$

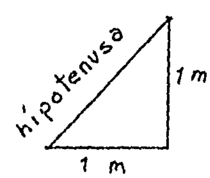
$$3.14 = 314/100$$

$$-3.1416 = -31416/10000$$

$$0.333\ldots = 1/3$$

Sin embargo, todavía en algunos casos, tampoco los números racionales describen con exactitud la solución de muchos problemas. Por ejemplo, si se tiene un triángulo rectángulo isósceles, en el cual los dos lados iguales son de 1 metro de longitud.

Observese la figura siguiente:



Ahora se pregunta, ¿se podrá expresar la longitud de la hipotenusa por medio de un numero racional?, como sabemos por el Teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, la pregunta es si $\ell^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, ¿es ℓ un número racional?

Los antiguos griegos pensaban que la magnitud de cualquier cantidad física, en principio, podía expresarse como un número racional. En aquel tiempo, ellos estaban convencidos de que esta magnitud, debía constar de cierto número de unidades completas mas una fracción m/n como una cantidad adicional. Pero este regocijo de los pitagóricos por la belleza de esta clase de números se vino abajo en el siglo V A.C. por Hipasio de Metaponto quien demostró a través de métodos geométricos que la hipotenusa del triángulo de la figura anterior no se podia expresar como un cociente de enteros. Segun la leyenda, Hipasio hizo este descubrimiento en alta mar y fue arrojado por la borda de la nave griega, por pitagóricos fanáticos debido a que su descubrimiento contradecía la doctrina adoptada por estos. Este descubrimiento decisivo marca la existencia de números que no son racionales los cuales llamaremos **Irracionales**. Este descubrimiento es de los de mayor importancia en toda la historia de las matemáticas. Otros ejemplos de números irracionales, los cuales los podemos simbolizar con Q' son :

$$\sqrt{2}\ ,\quad \sqrt{3},\quad \pi,\quad e,\quad \cos 19^{\circ}$$

También en la antigua Grecia, ya se conocía el hecho de que sin importar qué dos círculos se utilizan,. la razón del perímetro y el diámetro del primero, es la misma razón del perímetro y el diámetro del segundo y es igual al número irracional π. La demostración de que el número π es irracional es complicada y escapó a los matemáticos durante siglos; Lambert en 1761, finalmente pudo demostrarlo, este matemático suizo-alemán, además de su trabajo sobre los números irracionales, escribió excelentes obras sobre geometría y algunas como la teoría de la cartografía y la perspectiva en el arte. En su libro de geometría ya anunciaba el descubrimiento de la geometría no-euclidiana.

La unión de los números racionales con los números irracionales, recibe el nombre de los **Números Reales**, los cuales se simbolizan con R, por lo que :

$$R = Q \cup Q'$$

Dentro de los números reales, los números racionales y los irracionales pueden ser diferenciados por su representación decimal. Los números racionales tienen asociada una representación decimal **periódica**: esto significa que a partir de un cierto lugar de la parte decimal, consta por completo de ceros o bien de una serie finita fija de dígitos, la cual se repite indefinidamente, por ejemplo:

$$3 = 3.\overline{0}$$

$$1/4 = 0.25\overline{0}$$

$$4/3 = 1.\overline{3}$$

$$3/11 = 0.\overline{27}$$

$$5/7 = 0.\overline{714285}7$$

$$3/4 = 0.75\overline{0}$$

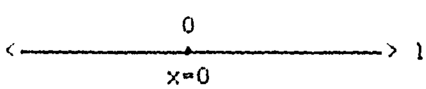
Los números irracionales tienen asociada una representación decimal no - periódica. Por ejemplo

0.101001000100001000001...

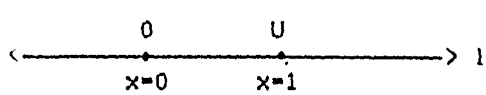
es un número irracional debido a que la parte decimal no se repite, esto es porque el número de ceros entre los unos va creciendo de la siguiente manera, primero un cero, luego dos luego tres, luego cuatro etc. y con la condición de que después de cada grupo de ceros, se pone un uno.

En el año de 1637, el matemático y filósofo francés Renato Descartes (1596 - 1650), publicó su "Geométrie", así como una obra filosófica titulada el "Discurso del Método", la primera de ellas dividida en tres libros de los cuales dedica el segundo a una nueva rama de las matemáticas, así como en el segundo tuvo tres apéndices que tenían por objeto mostrar cómo aplicar el "método" en ejemplos concretos, el tercer apéndice asoció dos ramas de la matemática, el álgebra y la geometría. Todo el trabajo de Descartes evolucionó en una nueva materia llamada **Geometría Analítica**, la cual proporcionó una forma de describir curvas geométricas por medio de fórmulas algebraicas y recíprocamente. La geometría analítica es la base para dar un paso importante en el estudio de los números, estableciendo una correspondencia entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos que conforman a una línea recta, la cual se conoce como la **Recta Numérica Real**. La recta numérica real puede describirse como el conjunto de puntos P de la línea recta, tal que a cada punto P le corresponde exactamente un número real x.

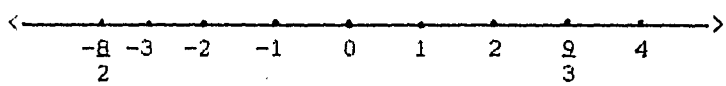
Para establecer la correspondencia entre los puntos P y los números reales x, primeramente consideremos una línea recta horizontal *l*. A continuacion se elige un punto 0 que esté sobre *l*. Llamamos a este punto el origen 0. Se conviene en asociar a este punto 0 el número real x=0



Ahora se elige otro punto U a la derecha del origen 0, sobre *l*; el número x=1 se asocia con el punto U



La distancia de 0 a U se llama escala, o unidad de medida puede ser un cm., un m., una pulgada etc. Ya establecida la escala se puede asociar cada número real x con un punto sobre *l*. Por convención, se acepta que los puntos a la derecha del origen están asociados con los números reales **positivos**, y los que están a la izquierda de 0, con los números reales **negativos**. Así, podemos representar a la recta numérica real con algunos puntos como sigue:



Ahora podemos observar un hecho de suma importancia. Los números reales presentan un orden, es decir :

Dados dos números reales **a** y b, se pueden comparar, observando en la recta numérica cómo están colocados. Si **a** está a la izquierda de b decimos que **a** es menor que **b** y lo denotamos por $a<b$, en este caso también decimos que **b** es mayor que **a** lo cual se puede escribir $b>a$.

El orden en los números reales satisface la siguiente ley llamada ley de Tricotomía:

Ley de tricotomía.- Dados dos números reales cualesquiera, **a** y b, sólo una de las afirmaciones siguientes es cierta:

i) a es menor que b
$a<b$

ii) a es mayor que b
$a>b$

iii) a es igual a b
$a=b$

Algunas veces escribiremos $a\leq b$ para señalar que $a<b$ o $a=b$

Ademas de la tricotomia el orden satisface las siguientes propiedades:

Transitiva.- Si $a<b$ y $b<c$ entonces $a<c$.

Aditiva .- Si $a<b$ y $c \in R$ entonces $a+c<b+c$

Multiplicativa.- Si $a<b$ y $c \in R$ entonces:

$$ac<bc \quad \text{si } c>0$$

$$ac>bc \quad \text{si } c<0$$

Como consecuencia de las propiedades anteriores se tiene que:

$a<b$ si y sólo si $b-a>0$.

II. 2 INTERVALOS

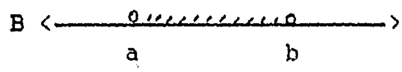
Analicemos los siguientes conjuntos :

$A = \{x \in R \;/\; a \leq x \leq b\}$ con $a \leq b$

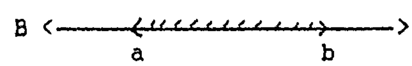
A este se le llama INTERVALO CERRADO. Cumple con tener a todos los valores que están entre a y b inclusive contiene los extremos que son **a** y b. su notación es $[a,b]$ y la representación en la recta numerica es :

$B = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$ con $a<b$

Al conjunto de la forma B se le llama **INTERVALO ABIERTO**, y se forma con los valores que están entre **a** y b pero no contiene los extremos, su notación es $(a,b)=\langle a,b\rangle$ y la representación en la recta numérica es :



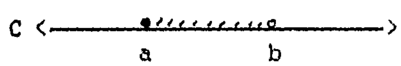
ó



De las dos formas para denotar un intervalo abierto vamos a usar la segunda, $\langle a,b\rangle$ para evitar confusión con los puntos del plano cartesiano que se denotan de la forma (a,b).

$C = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$ con $a<b$

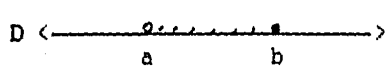
Al conjunto de la forma C se le llama **INTERVALO SEMICERRADO**, o **SEMIABIERTO** y consta de todos los valores que están entre **a** y b incluyendo a **a** pero no a b, su notación $[a,b\rangle$ y la representación en la recta numérica es :



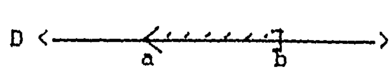
ó

$D = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$ con $a<b$

Al conjunto D se le llama **INTERVALO SEMICERRADO** , o **SEMIABIERTO**, se forma de todos los valores que están entre **a** y b incluyendo a b pero no **a**, su notación es $\langle a,b]$ y la representación en la recta numérica es:

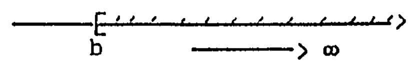


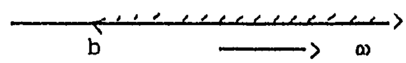
ó

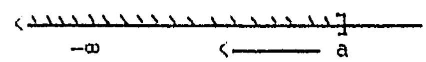


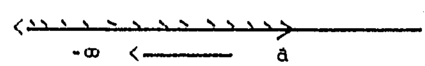
Observemos que los intervalos difieren entre sí, dado que en ellos se incluyen algunos puntos que no se consideran en otros.

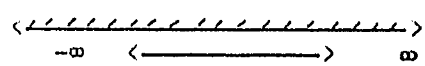
Los siguientes intervalos se llaman INFINITOS porque uno de sus extremos o ambos se extienden hacia el infinito. Su notación y representación gráfica es:

$E=\{x \in R \,/\, x \geq b\}=[b,+\infty>$ E 

$F=\{x \in R \,/\, x > b\}=<b,+\infty>$ F 

$G=\{x \in R \,/\, x \leq a\}=<-\infty,a]$ G 

$H=\{x \in R \,/\, x < a\}=<-\infty,a>$ H 

$I=\{x \in R \,/\, x \in R\}=<-\infty,+\infty>$ I 

Observación: La flecha hacia la derecha indica que el intervalo se debe extender a infinito y la flecha hacia la izquierda indica que el intervalo se debe extender a menos infinito.

II. 2. 1 OPERACIONES CON INTERVALOS.- Los Intervalos son subconjuntos de los Números Reales por lo tanto toda el álgebra de los conjuntos es válida para los intervalos, aquí el conjunto universo es la recta numérica real, es decir todos los Números reales.

Operaciones con conjuntos e intervalos:

UNION

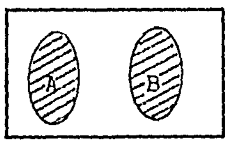
La unión de dos conjuntos se define como:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

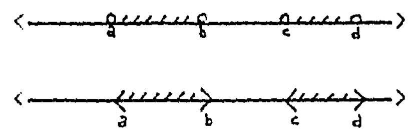
¿Qué será la unión de dos intervalos $A=\langle a,b\rangle$ $B=\langle c,d\rangle$? Analizaremos las posibles situaciones.

PRIMER CASO: Los intervalos son ajenos.

Sean: $A=\langle a,b\rangle$ y $B=\langle c,d\rangle$



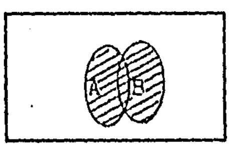
AUB =



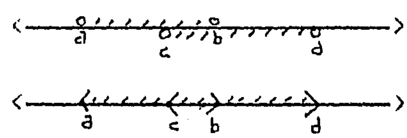
$A \cup B=\langle a,b\rangle \cup \langle c,d\rangle$

SEGUNDO CASO: Los intervalos se intersectan.

Sean: $A=\langle a,b\rangle$ y $B=\langle c,d\rangle$



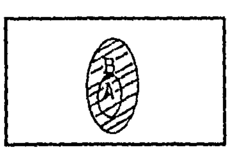
AUB =



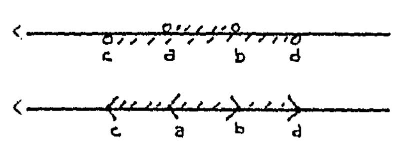
$A \cup B=\langle a,d\rangle$

TERCER CASO: Un intervalo contenido dentro de otro.

Sean: $A=\langle a,b\rangle$ y $B=\langle c,d\rangle$



AUB = B =



$A \cup B=\langle c,d\rangle=B$

Observación: Esta operación se puede realizar no sólo con dos intervalos abiertos, puede tomarse dos cerrados, o bien uno abierto y otro cerrado etc. Como veremos en las otras operaciones.

INTERSECCION

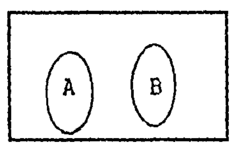
La intersección de dos conjuntos se define como:

$$A\cap B = \{x/x\in A \text{ y } x\in B\}$$

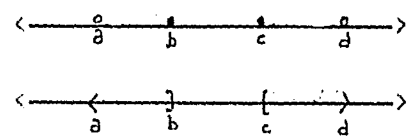
Veamos como se ve para intervalos.

PRIMER CASO: Los intervalos son ajenos.

Sean A y B dos intervalos de la forma: $A=\langle a,b]$ y $B=[c,d\rangle$



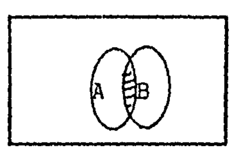
$A\cap B=\emptyset$



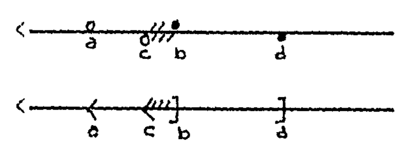
$A\cap B=\emptyset$

SEGUNDO CASO: Los intervalos se intersectan.

Sean A y B dos intervalos: $A=\langle a,b]$ y $B=\langle c,d]$



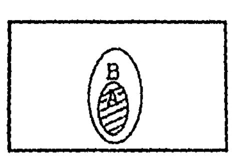
$A\cap B =$



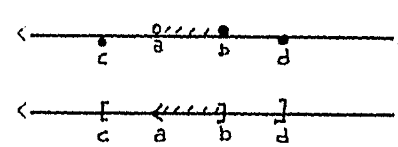
$A\cap B=\langle c,b]$

TERCER CASO: Un intervalo contenido dentro de otro.

Sean A y B dos intervalos: $A=\langle a,b]$ y $B=[c,d]$



$A\cap B=A=$

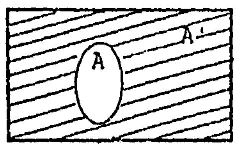


$A\cap B=\langle a,b]=A$

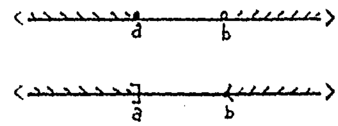
COMPLEMENTO

El complemento del conjunto A se define:
$A' = \{x / x \notin A\}$

El complemento del intervalo
$A = \langle a, b]$



A' =



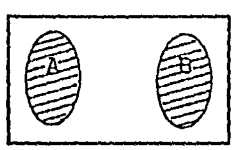
$A' = \langle -\infty, a] \cup \langle b, +\infty\rangle$

RESTA

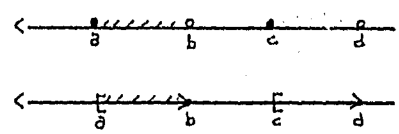
La resta de conjuntos se define: $A-B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$

PRIMER CASO; Los intervalos son ajenos

Sean los intervalo $A = [a, b\rangle$ y $B = [c, d\rangle$



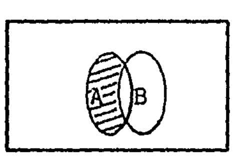
A-B=A=



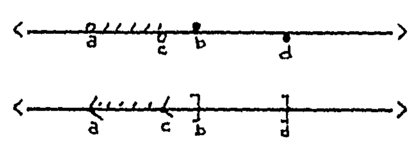
A-B = A

SEGUNDO CASO; Los intervalos se intersectan.

Sean los intervalos $A = \langle a, b]$ y $B = \langle c, d]$



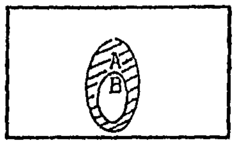
A-B=



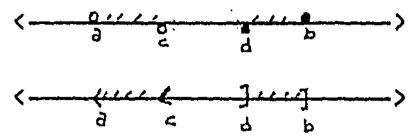
$A-B = \langle a, c]$

TERCER CASO: Un intervalo contenido dentro de otro.

Sean los intervalos $A=\langle a,b]$ y $B=\langle c,d]$



A-B=



$A-B=\langle a,c] \cup \langle d,b]$

Observemos que la diferencia de conjuntos e intervalos es la realización de dos operaciones básicas, ya que:

$$\begin{aligned} A - B &= \{x / x\in A \ \text{ y } \ x\notin B\} \\ &= \{x / x\in A\} \cap \{x / x\notin B\} \\ &= A \cap B'. \end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $A\cup B$, $A\cap B$, A' son operaciones elementales y $A-B$ es una operación compuesta.

PRODUCTO CARTESIANO

El Producto Cartesiano o producto cruz se denota y define como:

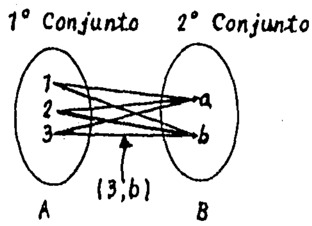
$$A \times B = \{(x,y) / x\in A,\ y\in B\}$$

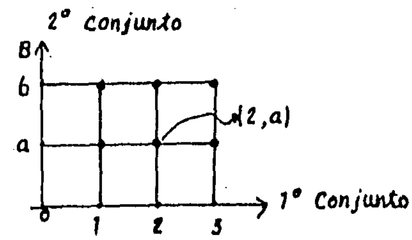
Ejemplo: Sean los conjuntos $A=\{1,2,3\}$; $B=\{a,b\}$

$$\begin{aligned} A\times B &= \{(x,y) / x\in A,\ y\in B\} \\ &= \{(x,y) / x\in \{1,2,3\},\ y\in \{a,b\}\} \\ &= \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\} \end{aligned}$$

Su representación geométrica puede ser de dos formas:

Gráfica de alveolos   Gráfica Cartesiana





En la primera representación AXB. los elementos se visualizan como un segmento, en la segunda como punto.

¿Es (a,1) elemento de AXB?

Respuesta= ¡No¡ $AXB \neq BXA$ el producto cartesiano no es conmutativo.

Ejemplo 1 : Determine AXB si: $A=\langle -6,-1]$ y $B=\langle 2,6]$

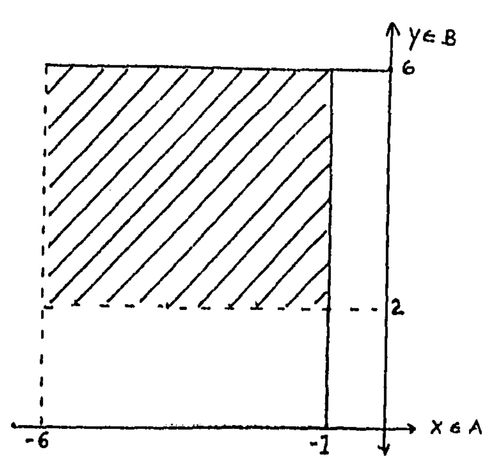
Solución :

$$AxB = \{(x,y) \ / \ x \in A \ , \ y \in B\}$$

$$= \{(x,y) \ / \ x \in \langle -6,-1] , \ y \in \langle 2,6]\}$$

$$= \{(x,y) \ / \ -6 < x \leq -1 , \ 2 < y \leq 6\}$$

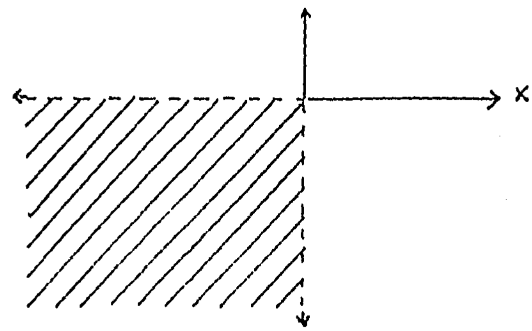
Su Gráfica cartesiana es :



Ejemplo 2.- Determine CXC, con: $C=\langle -\infty, 0\rangle$

$$CXC = \{(x,y)/x\in\langle -\infty,0\rangle,\ y\in\langle -\infty,0\rangle\}$$

$$= \{(x,y) \ / \ x<0,\ y<0\}$$

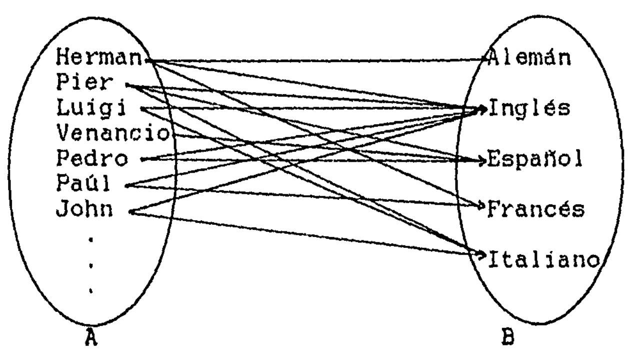


II. 3 RELACIONES

Se introducen los conceptos en forma intuitiva así como su notación en forma práctica.

En la vida diaria frecuentemente usamos relaciones.

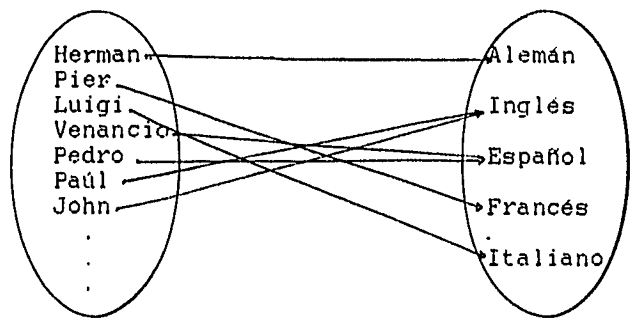
Por ejemplo, la relación tal que a cada empleado del edificio de la ONU (ese que está ahí en Nueva York) le asocia el idioma que domina. Su grafica de alveolos es:



A={x/x es empleado de la ONU} B={y/y es un idioma}

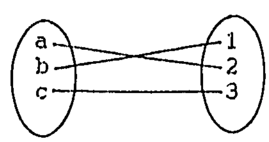
Considerese una segunda relación (R_2) tal que a cada empleado del edificio de la ONU le asocia su idioma materno. Su gráfica de alveolos es:

R_2



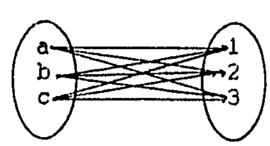
A f B

DEFINICION.- Una relación podemos definirla como la asociación que se hace al menos de un elemento de un conjunto con al menos un elemento del segundo conjunto.



A B

Del ejemplo esquematizado arriba, el máximo de asociaciones que se pueden hacer entre los conjuntos A y B es :



A B

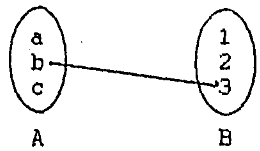
El cual se le conoce como el producto cartesiano entre A y B, y se simboliza.

AXB ={(a,1) (a,2) (a,3) (b,1) (b,2) (b,3) (c,1) (c,2) (c,3)}

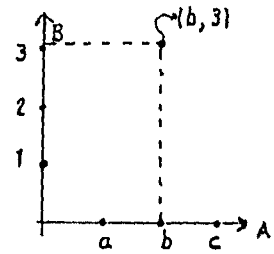
Así las siguientes son relaciones entre los conjuntos A y B : donde A={a,b,c}: B={1,2,3}

R_1 = {(b,3)}

Gráfica de alveolos

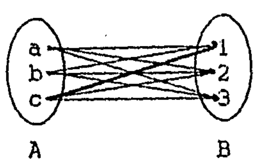


Gráfica cartesiana

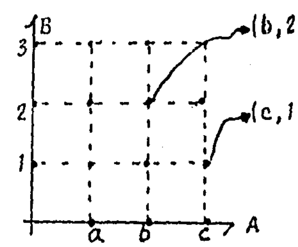


R_2 = {(a,1) (a,2) (a,3) (b,1) (b,2) (b,3) (c,1) (c,2) (c,3)}

Su gráfica de alveolos es:

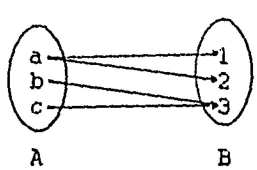


Su gráfica cartesiana es:

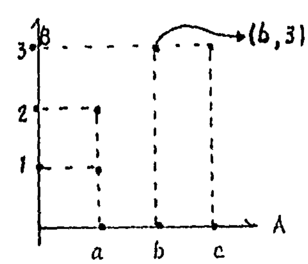


R_3 = {(a,1) (a,2) (b,3) (c,3)}

Su gráfica de alveolos es:

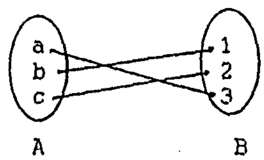


Su gráfica cartesiana es:

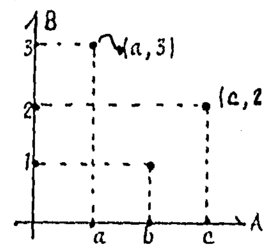


R_4 = ((a,3) (b,1) (c,2))

Su gráfica de alveolos es:

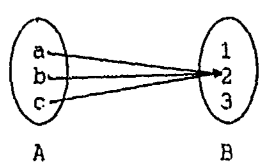


Su gráfica cartesiana es:

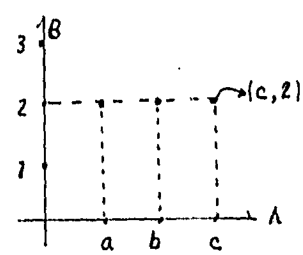


R_5 = ((a,2) (b,2) (c,2))

Su gráfica de alveolos es:

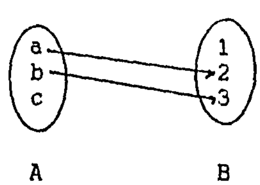


Su gráfica cartesiana es:

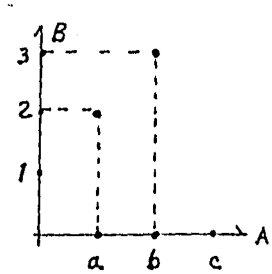


R_6 = ((a,2), (b,3))

Su gráfica de alveolos es:

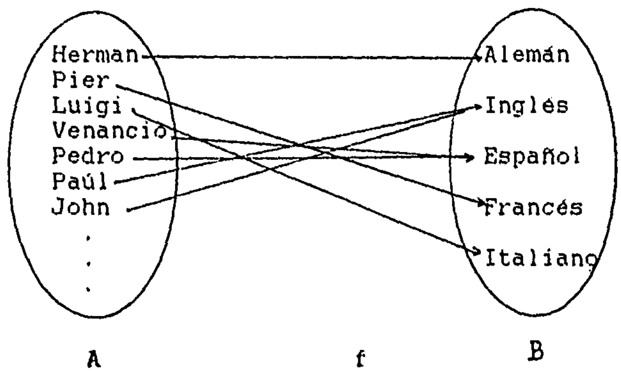


Su gráfica cartesiana es:



II. 4 FUNCIONES

II.4.1. EL CONCEPTO DE FUNCION REAL.- Retomemos la relación tal que a cada empleado del edificio de la ONU le asocia su idioma materno. Su gráfica de alveolos es:



Una función es una relación tal que "A **cada** elemento **del primer conjunto** le **asocia** uno y **sólo** un elemento del segundo conjunto" El primer conjunto se llama Dominio y el segundo Contradominio o Codominio. a la manera en como se asocia elementos de un conjunto con los elementos de otro. se le conoce como regla de correspondencia la cual denotaremos como r.c.

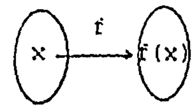
Esto significa que ningún elemento del primer conjunto queda sin asociar y cada elemento del primer conjunto tiene asociado un sólo elemento del segundo conjunto.

¿Cuántas y cuáles de las relaciones de la sección anterior satisfacen esta definición de función?. Si observamos, sólo las relaciones R_4, R_5, debido a que en cada una de ellas, todos y **cada** uno de los elementos del dominio, están asociados con los elementos del rango. Además también se observa que a cada uno de los elementos del dominio le asocia uno y **sólo** un elemento del codominio, que son las dos condiciones que debe satisfacer una relación para que sea función.

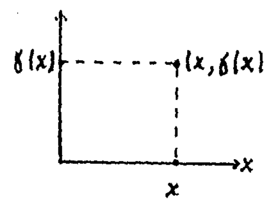
Cada una de las otras relaciones R_1, R_2, R_3, R_4, no cumplen, al menos con una de estas dos condiciones.

El elemento del segundo conjunto asociado por la r.c. se denomina valor de la función o imagen del punto. Si D es el dominio de f, $\{f(x)/x \in Dom\ f\}$ se llama rango o imagen de la función.

Así en una funcion:



Para x en el dominio, f(x) indica "Lo que la función **f** le asocia a x" lo cual se lee brevemente "f de x". Su gráfica cartesiana es:



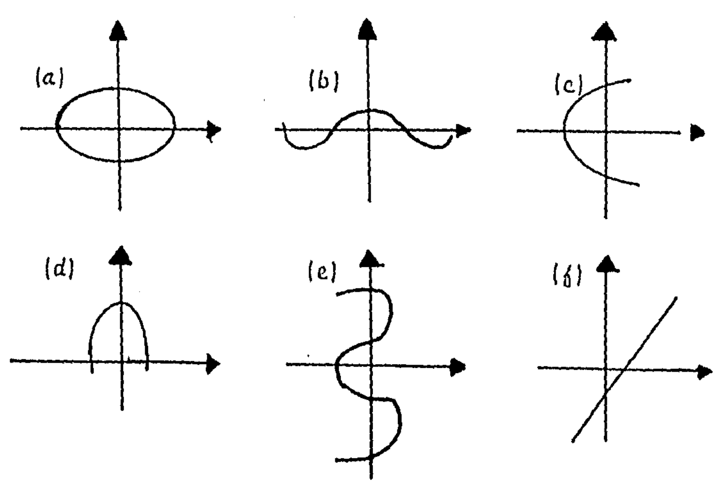
Ahora bien, cuando una función tiene como codominio los números reales (R) entonces decimos que la función es REAL. Si el dominio es un subconjunto de los números reales decimos que la función es de variable real. En cálculo estamos interesados en el estudio de funciones reales de variable real, es decir, de la forma:

$$f: D \subset R \longrightarrow R$$

Definimos la gráfica de una función como:

$G_f = \{(x, f(x))/x \in Dom\ f\}$ Observemos que $G_f \subset R$

¿Cuándo una curva representa la gráfica de una función?



En (a) la curva no representa la gráfica de una función, pues a x=0 le corresponden dos imágenes . Si en la gráfica (e) trazamos una recta paralela al eje de las ordenadas vemos que toca varios puntos de la curva, o sea que a un elemento del dominio le corresponden varias imágenes, lo mismo ocurre con la gráfica del inciso (c), de lo anterior podemos concluir que si una recta paralela al eje y toca a la curva en mas de un punto, esta curva no representa la gráfica de una función. Las curvas de los incisos (b), (d), y (f) sí representan gráficas de funciones.

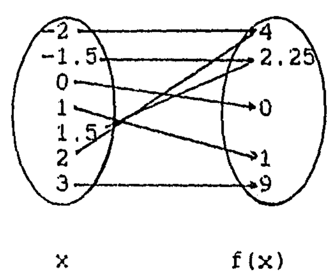
II.4.2 DIFERENTES TIPOS DE FUNCIONES

Ejemplo 1.- Considérese la relación tal que a cada número del conjunto {-2,-1.5,0,1,1.5,2,3} se le asocia su cuadrado.

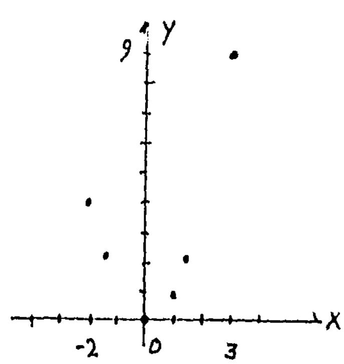
Tabulando tenemos:

x	f(x)
-2	4
-1.5	2.25
0	0
1	1
1.5	2.25
2	4
3	9

Su diagrama de alveolos es:



Su gráfica en el plano cartesiano es:



Estos son los únicos puntos de la gráfica, por lo tanto no podemos unirlos.

De lo anterior podemos obtener:

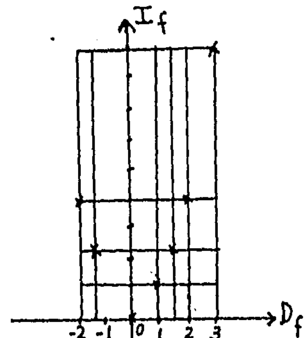
Dominio de la función D_f = {-2, -1.5, 0, 1, 1.5, 2, 3}

Imagen de la función I_f = {4, 2.25, 0, 1, 9}

Regla de correspondencia r.c : $f(x) = x^2$

Por otra parte tenemos que la gráfica es un subconjunto del producto cartesiano $D_f X I_f$

Así: $G_f \subset D_f \times I_f$



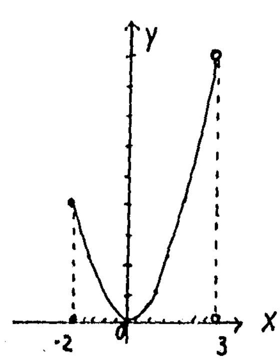
Ejemplo 2.- Sea la función g:[-2,3>—>R cuya r.c. es $g(x)=x^2$

Tabulamos algunos puntos del intervalo [-2,3>

x	g(x)
-2	4
-1.5	2.25
0	0
1	1
1.5	2.25
2	4
2.5	6.25
3	9

El 3 no es elemento del intervalo por lo tanto (3,9) no esta en la gráfica de la función.

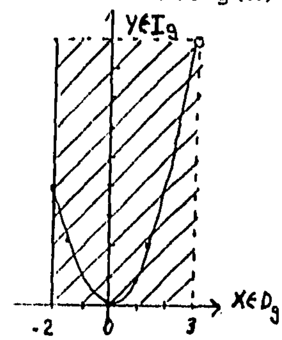
Su gráfica es:



Observemos que en esta gráfica sí debemos unir los puntos que tabulamos, pues la función está definida en todo el intervalo $[-2,3\rangle$. Esto se puede justificar utilizando el concepto de continuidad que veremos más adelante.

El $D_g=[-2,3\rangle$ $\quad$ $I_g=[0,9\rangle$ $\quad$ r.c=$g(x)=x^2$

Así: $G_g \subset D_g \times I_g = [-2,3\rangle \times [0,9\rangle$



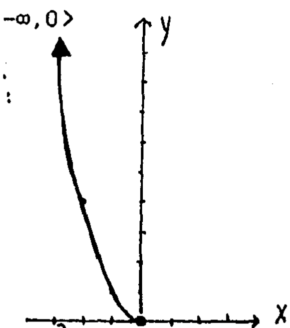
Ejemplo 3 .- Sea h la función que a todo número real negativo le asocia su cuadrado.

h: $\langle -\infty,0\rangle \longrightarrow R$ $\quad$ r.c: $h(x)=x^2$

Tabulemos algunos valores del intervalo $\langle -\infty,0\rangle$

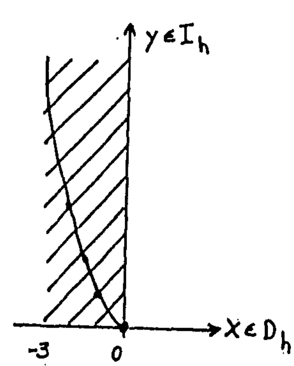
x	h(x)
−3	9
−2	4
−1.5	2.25
−1	1
0	0

Su gráfica es:



Así: $\quad D_h=\langle -\infty,0\rangle$, $\quad I_h=\langle 0,\infty\rangle$, $\quad$ r.c:$h(x)=x^2$

$G_h \subset D_h \times I_h = \langle -\infty,0\rangle \times \langle 0,\infty\rangle$

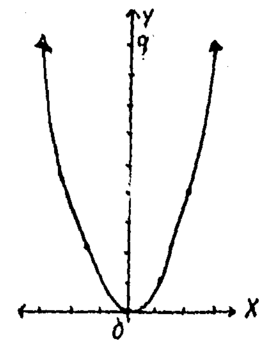


Ejemplo 4.- Sea f la función que a todo número real le asocia su cuadrado.

Tabulamos algunos puntos del intervalo $\langle -\infty, \infty\rangle$

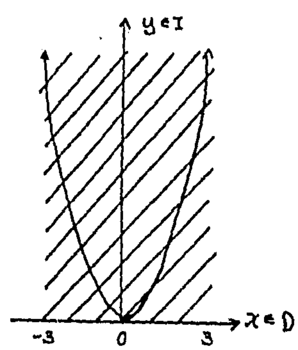
x	f(x)
-3	9
-2	4
-1.5	2.25
0	0
1	1
1.5	2.25
2	4
3	9

Su gráfica en el plano cartesiano es:



Así: $D_f=\langle -\infty,\infty\rangle$ $I_f=[0,\infty\rangle$ $r.c=f(x)=x^2$

En este caso $G_f \subset D_f \times I_f = \langle -\infty,\infty\rangle \times [0,\infty\rangle$



Las funciones anteriores tienen diferente dominio y por tanto diferentes gráficas, pero la misma regla de correspondencia.

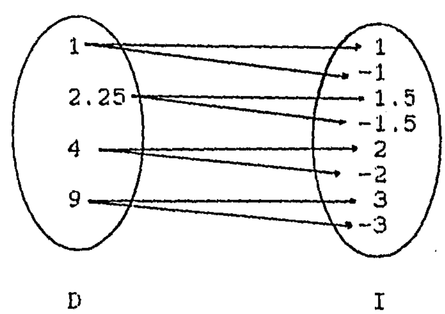
En muchas ocasiones, para hablar de una función sólo se especifica la regla de correspondencia. En estos casos, se entiende que está definida en el conjunto en el cual dicha regla tiene sentido. En este caso decimos que se considera el Dominio Natural de la función. Así si escribimos solamente $f(x)=x^2$ entendemos que nos referimos a la función del ejemplo 4.

Ejemplo 5.- Considérese la relación tal que a cada número real del conjunto {1, 2.25, 4, 9} le asocia su raíz cuadrada. Determina:

a) Su Dominio.
b) Su Imagen.
c) Su regla de correspondencia
d) Su Gráfica de (alveolos y cartesiana)
e) Explica si esta relación es función

Solución:

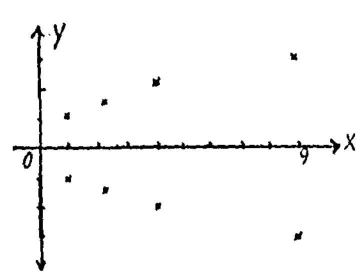
a) D={1, 2.25, 4, 9}



b) I={1, -1, 1.5, -1.5, 2, -2, 3, -3}

c) r.c: $x \longmapsto \sqrt{x}$

d) Su gráfica Cartesiana



e) No es función porque al menos al 2.25 le asocia dos elementos -1.5 y 1.5

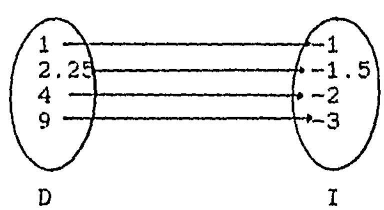
Ejemplo 6.- Consideremos la relación que a cada número real del conjunto {1, 2.25, 4, 9} le asocia su raíz cuadrada negativa.

Determina:

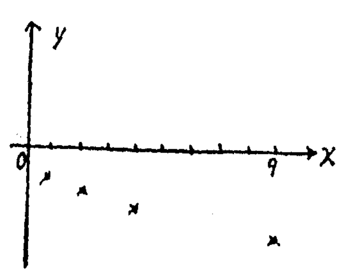
a) Dominio.
b) Imagen.
c) Regla de correspondencia
d) Gráfica de (alveolos y cartesiana)
e) Explica si esta relación es función

Solución:

a) D={1, 2.5, 4, 9}
b) I={-1, -1.5, -2, -3}
c) r.c: $x \longmapsto -\sqrt{x}$
d)



Gráfica Cartesiana



e) Esta relación sí es función, porque a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del contradominio.

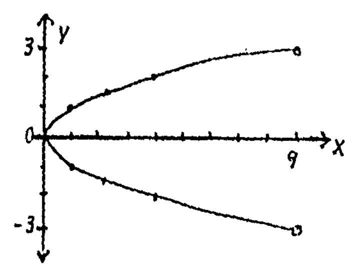
Ejemplo 7.- Consideremos la relación que a cada número real del intervalo $[0,9\rangle$ le asocia su raíz cuadrada. Determina:

a) Dominio.
b) Imagen.
c) Regla de correspondencia
d) Gráfica cartesiana
e) Explica si esta relación es función?
f) Producto cartesiano del dominio y la imagen.

Solución:

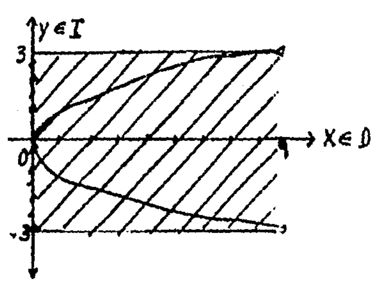
a) $D=[0,9\rangle$
b) $I=\langle -3,3\rangle$ Sea $y\in(-3,3)$, existe x tal que $x \longmapsto y$
si $y\in(-3,0)$ entonces $x=(-y)^2$
si $y\in(0,3)$ entonces $x=y^2$
c) r.c: $x \longmapsto \pm\sqrt{x}$
d)

x	$\pm\sqrt{x}$
0	0
1	1
1	-1
2.25	1.5
2.25	-1.5
4	2
4	-2
9	3
9	-3



e) Esta relación no es función porque al menos al 1 le corresponde dos valores 1,-1

f) El producto Cartesiano DXI



Ejemplo 8.- Consideremos la relación que a todo número real contenido en [0,9> le asocia su raíz cuadrada positiva. Determina:

a) Dominio.
b) Imagen.
c) Regla de correspondencia
d) Gráfica cartesiana
e) Explica si esta relacion es función

Solución:

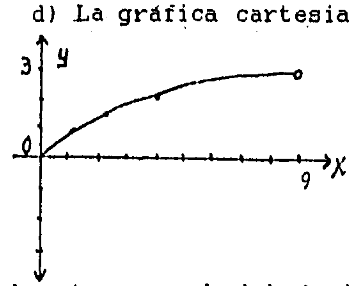
a) $D_r = [0,9>$

b) $I_r = <0,3>$

c) r.c : $x \longmapsto +\sqrt{x}$

x	$+\sqrt{x}$
0	0
1	1
2.25	1.5
4	2
9	3

d) La gráfica cartesiana:



e) Esta relacion si es funcion cada número real del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del contradominio.

II.4.3 CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES REALES

Funciones Polinomiales.- Cualquier función cuya regla de correspondencia sea del tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_nx^n$$

en donde n es un número natural y los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_n son números reales, es llamada función polinomial. Estas funciones tienen por dominio los números reales. Casos especiales de las funciones polinomiales son las funciones lineales que son de la forma:

$f(x)=ax+b \quad a,b\in R$

Daremos algunos ejemplos de funciones polinomiales

II.4.4 FUNCIONES ALGEBRAICAS

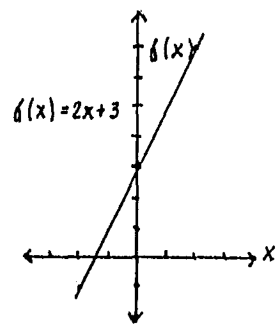
Ejemplo 1.- Sea f la función que a cada número real le asocia su doble más tres.

Tabulemos algunos de los valores que puede tomar esta función:

x	f(x)
-2	-1
0	3
2	7

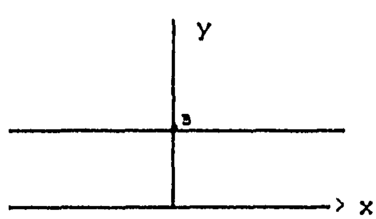
$D_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
$I_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
r.c: $f(x) = 2x + 3$

Gráfica Cartesiana



La Gráfica de esta función es una recta. La gráfica de una función lineal es siempre una recta por eso recibe ese nombre, el dominio y la imagen de estas funciones son los números reales. Toda recta no vertical es la gráfica de una función lineal.

Ejemplo 2.- Consideremos la función que a cada número real le asocia el número 3 . En este caso no se nos da el dominio de la función entonces tomamos su dominio natural que son todos los números reales, su gráfica es:



$D_f = \langle -\infty, \infty \rangle$

$I_f = \{3\}$

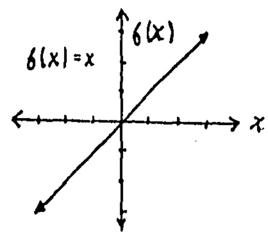
r.c : $f(x) = 3$

La Gráfica de esta funcion representa una recta paralela al eje de las abscisas y pasa por y=3.

Las funciones de la forma f(x)=c donde c es cualquier número real cuyo rango es un solo punto. reciben el nombre de **funciones constantes.**

Ejemplo 3.- Consideremos la funcion f que a cada número real le asocia el mismo número real.

Gráfica Cartesiana



La gráfica de esta funcion es una recta que pasa por el origen y que forma un ángulo de 45°con el eje de las x's.

$D_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
$I_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
r.c: $f(x) = x$

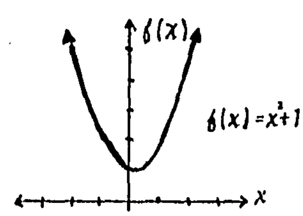
Esta función recibe el nombre de función idéntica o identidad.

Ejemplo 4.- Consideremos la función que a todo número real le asocia su cuadrado mas uno.

Tabulación

x	f(x)
-2	5
0	1
2	5

Gráfica Cartesiana



Esta gráfica nos representa una parábola en donde:

$D_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
$I_f = [1, \infty\rangle$ $x^2+1 \geq 1$ si $x \in R$. Por otra parte si $y \in [1, \infty\rangle$, $y-1 \geq 0$,
$x = \sqrt{y-1}$
r.c: $f(x) = x^2+1$

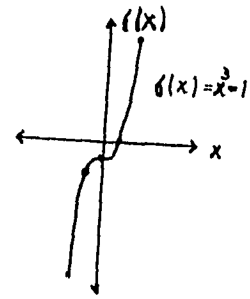
Las funciones de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales donde $a \neq 0$ reciben el nombre de cuadráticas. El dominio de este tipo de funciones también son los números reales, en general las gráficas de funciones cuadráticas son parábolas, si a es positiva la parábola abre hacia arriba pero si $a < 0$ abre hacia abajo.

Ejemplo 5.- Consideremos la función que a cada número real se le asocia su cubo menos uno.

Tabulación

x	f(x)
-2	-9
-1	-2
0	-1
1	0
2	7

Gráfica Cartesiana



$D_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
$I_f = \langle -\infty, \infty \rangle$ Si $y \in \langle -\infty, \infty \rangle$, $x = \sqrt[3]{y+1}$ satisface que $f(x) = y$
r.c: $f(x) = x^3 - 1$

La función del ejemplo anterior pertenece a la familia de las funciones cúbicas que son de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

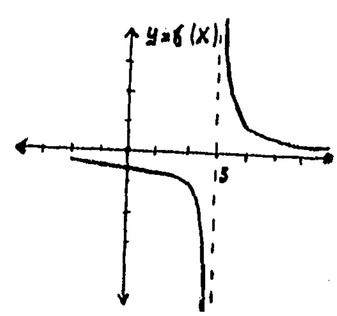
Donde a, b, c, d, son cualquier constante. El dominio de estas funciones también son los números reales.

Ejemplo 6.- Consideremos la función que a cada un número x le asocia el inverso multiplicativo de (x-3).

Tabulación

x	f(x)
-2	-1/5
0	-1/3
2	-1
3	no está definida
4	1
5	1/2
6	1/3

Gráfica Cartesiana



Observemos que la gráfica de esta función no tiene una imagen para el valor $x = 3$ y por lo tanto se corta en este punto.

$D_f = R-\{3\}$
$I_f = R-\{0\}$ Si y≠0 tomando $x=(1/y)+3$ tenemos $f(x)=y$

$$r.c : f(x) = \frac{1}{x-3}$$

La función del ejemplo anterior pertenece a la familia de las funciones racionales que son de la forma:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$ donde g y h son funciones polinomiales

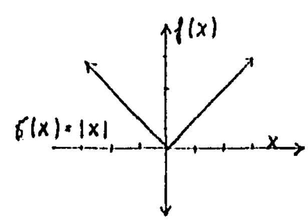
El dominio de las funciones racionales son todos los números reales menos los números reales que nos haga el denominador igual a cero ya que la división entre cero no esta definida.

Ejemplo 7.- Consideremos la función f que a cada número real le asocia su valor absoluto.

Tabulación

x	f(x)
−2	2
−1	1
0	0
2	2
3	3

Gráfica Cartesiana



Observemos que en la gráfica a medida que nos alejamos del origen hacia la izquierda o derecha, aumenta el valor absoluto de x.

$D_f = R$
$I_f = [0,\infty\rangle$ si $y\in[0,\infty\rangle$ $x=y$ ó $x=-y$ satisfacen $f(x)=y$

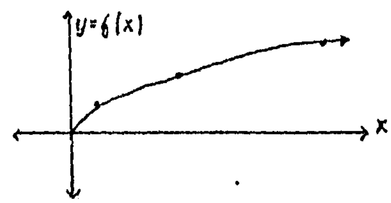
$$r.c : f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 8 .- Consideremos la función tal que a todo número real x no negativo le asocia su raíz cuadrada, (consideremos la parte no negativa de la raíz cuadrada, para que sea función)

Tabulación

x	f(x)
0	0
1	1
4	2

Gráfica Cartesiana



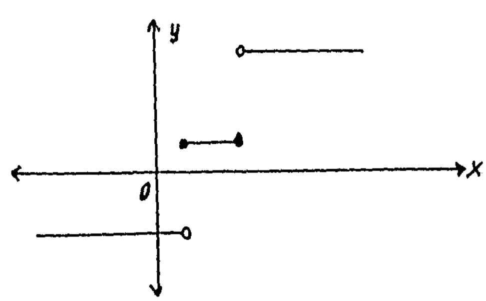
$D_f = [0,\infty\rangle$
$I_f = [0,\infty\rangle$ Si $y\in[0,\infty)$ $x=y^2$ satisface que $f(x)=y$
r.c: $f(x) = \sqrt{x}$

Una función es algebraica si se puede obtener mediante suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces de funciones polinomiales. los anteriores son ejemplos de funciones algebraicas.

Ejemplo 9.- Consideremos la funcion que cumple con la siguiente r.c :

$$f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \le x \le 3 \\ 4 \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Gráfica Cartesiana



$D_f = R$
$I_f = \{-2,1,4\}$

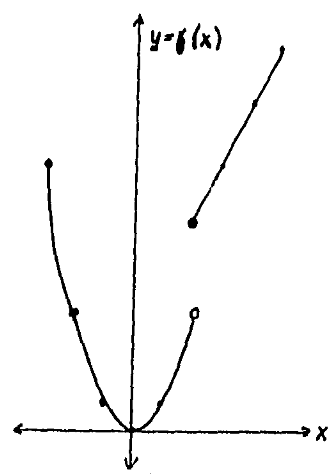
Ejemplo 10.- Consideremos la funcion cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<2 \\ 2x+3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

Tabulación

x	f(x)	
-3	9	x^2
-2	4	
-1	1	
0	0	
1	1	
2	7	$2x + 3$
3	9	
4	11	
5	13	

Gráfica Cartesiana



$D_f = (-\infty,2)\cup(2,\infty)$

$R_f = [0,\infty\rangle$ Si $y\in[0,\infty\rangle$, entonces $x=-\sqrt{y}$ satisface que $f(x)=y$

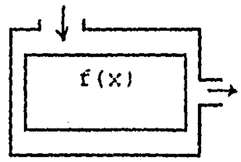
II.4.5 SUSTITUCION DE VALORES EN UNA FUNCION:

Ejemplo 1.- Sea la función: $f(x) = x^2+3$

Evaluar la función para el valor: $x=2$

Vamos a usar la "máquina función" para obtener $f(2)$, en el siguiente dibujo vemos una máquina diseñada para efectuar la aplicación $f(x)= x^2+3$. Las entradas aceptables para la máquina son los elementos del dominio de f la salida son elementos de la imagen de f.

entrada de $x=2$



salida $f(x) = 7$

es decir $f(2)=(2)^2+3=7$

Lo mismo ocurre para los siguientes incisos.

Calcular: b) $f(-2)$ c) $f(0)$ d) $f(x+h)$

e) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ donde $h\neq 0$

b) $f(-2)=(-2)^2+3=7$

c) $f(0)=(0)^2+3=3$

d) $f(x+h)=(x+h)^2+3=x^2+2xh+h^2+3$

e) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2+3-(x^2+3)}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

Ejemplo 2 .- Si $f(x)=\sqrt{2x+3}$

Obtener: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ donde $h\neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{2x+2h+3} - \sqrt{2x+3}}{h} =$$ (Multiplicando por el conjugado)

$$= \frac{(\sqrt{2x+2h+3} - \sqrt{2x+3})(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})}{h(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2x+2h+3})^2 - (\sqrt{2x+3})^2}{h(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})} = \frac{2x+2h+3-2x-3}{h(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})} =$$

$$= \frac{2h}{h(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})} = \frac{2}{(\sqrt{2x+2h+3} + \sqrt{2x+3})}$$

II.4.6 OPERACIONES CON FUNCIONES.

Sean f y g dos funciones, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, se definen como:

a) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ Dominio de $(f+g) = D_f \cap D_g$

b) $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$ Dominio de $(f-g) = D_f \cap D_g$

c) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ Dominio de $(f \cdot g) = D_f \cap D_g$

d) $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ Dominio de $(f/g) = D_f \cap D_g - \{x \in R / g(x)=0\}$

Ejemplo 1.- Sean: $f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0,\infty)$
$g(x) = x$ $D_g = R$

a) $(f+g)(x) = x+\sqrt{x}$ Dominio $R \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

b) $(f-g)(x) = \sqrt{x}-x$ Dominio $R \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

c) $(fg)(x) = (\sqrt{x})(x)$ Dominio $R \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

d) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ Dominio $(0,\infty)$

COMPOSICION DE FUNCIONES.-

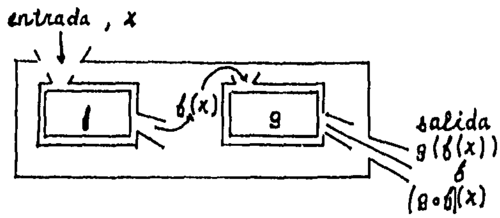
Considérese que en una fábrica para enlatar mermeladas hay 2 máquinas que realizan las siguientes funciones.

Maquina 1.- función f: Llenar frascos de mermelada

Maquina 2.- función g: Cerrar frascos.

Llamaremos a la función $(g \circ f)$ **función composición** que aquí será frascos con mermelada cerrados.

El diagrama de este proceso sería:



$(g \circ f)(x)$ = frascos cerrados llenos de mermelada.

Si quisiéramos ahora aplicar primero g y después f, es decir considerar $f \circ g$, observamos que al aplicar g el frasco queda tapado, por lo cual ya no es posible llenarlo de mermelada, entonces $f \circ g$ no está definido.

Con este simple ejemplo vemos que si tenemos 2 funciones y hacemos la operación composición es importante el orden en que se realice.

Ejemplo 1. $f(x)=x+4$ $\quad g(x)=x^2$

La Composición $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+4) = (x+4)^2$

La Composición $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+4$

Observa que $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$, es decir, la composición no es conmutativa.

Ejemplo 2.- sean $h(x)=1/x$ y $g(x)=x^2-1$

¿Cuál es el dominio de $h \circ g$?

El dominio de $h \circ g$ es el conjunto de valores x que estén en el dominio de g de tal manera que $g(x)$ pertenezca al dominio de h.

a) El dominio de g son los números reales,
   el dominio de h son los números reales menos el cero.

b) $g(x) \in R-\{0\}$ es decir $x^2-1 \neq 0$ entonces $x^2 \neq 1$ de donde $x \neq 1$ y $x \neq -1$, entonces el dominio de $h \circ g = R-\{1,-1\}$.

c) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2-1) = 1/(x^2-1)$

¿Cuál es el dominio de $g \circ h$?

a) El dominio de h es $R-\{0\}$

b) Los valores de h(x) están en $R-\{0\}$

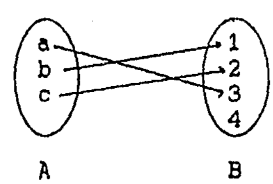
c) Como la regla de correspondencia de $g \circ h$ es $= \dfrac{1}{x^2} - 1$

su dominio es $R-\{0\}$

FUNCION INVERSA.- Antes de ver las funciones inversas vamos a ver las funciones Inyectivas, Suprayectivas y Biyectivas.

Ejemplo.- Para la función formada por las siguientes parejas $\{(a,3), (b,1), (c,2)\}$

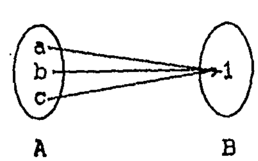
Su gráfica de alveolos es:



A este tipo de funciones, donde a elementos distintos del dominio se le asocian elementos diferentes del contradominio se les conoce como funciones Inyectiva.

Ejemplo.- Para la función formada por las siguientes parejas $\{(a,1), (b,1), (c,1)\}$

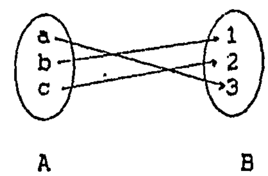
Su gráfica de alveolos es:



A este tipo de funciones, donde el rango de la función es igual al contradominio(es decir todo elemento de B (contradominio) es imagen de al menos un elemento de A (dominio)), se les conoce como funciones **suprayectivas**

Ejemplo.- Para la función formada por las parejas:
{(a,3) (b,1) (c,2)}

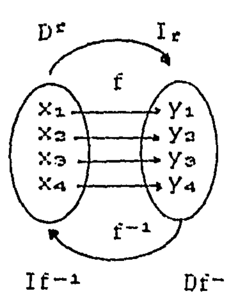
Su gráfica de alveolos es:



A este tipo de funciones que son a la vez funciones Inyectivas y Suprayectivas se les llama funciones **Biyectivas**.

Funciones Inversas.- Para todas las funciones hay una relación **inversa**, pero sólo en algunos casos es la inversa también una función. Solo la relación inversa de las funciones biyectivas es también función. Si la relación inversa de una funcion f es tambien una función, la designaremos como f^{-1}.

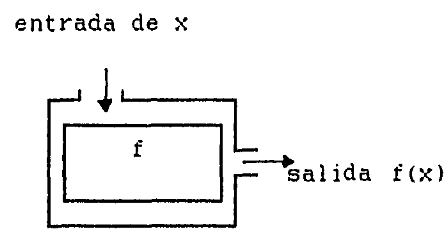
Ejemplo.- Sea la función f definida por las siguientes parejas (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4)



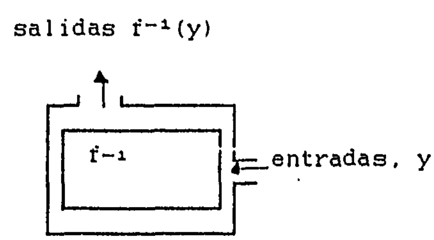
En este caso f es biyectiva y la funcion f^{-1} esta formada por las parejas (y_1,x_1), (y_2,x_2), (y_3,x_3), (y_4,x_4)

Expliquemos esto por medio de unos diagramas:

Si tenemos una máquina de funciones, programada para efectuar la aplicación (función) f. Las entradas aceptables son los elementos del dominio de f y las salidas son los valores de f(x).



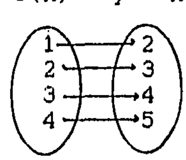
Consideremos las inversas de funciones en términos de máquinas de funciones. Suponga que la función f que se ha programado en dicha máquina tiene una relación inversa que es también función. Supongamos además, que la máquina de funciones tiene un botón de retroceso. Cuando se oprime este botón la máquina esta programada entonces para efectuar la aplicación f^{-1}. Las entradas se dan entonces por el extremo opuesto y todo el proceso se invierte.



Ejemplo .- ¿La función f(x)=x+1 tiene inversa?

Desde luego estamos pensando que el $D_f=I_f=R$

$$f(x) = y = x+1 \qquad R \longrightarrow R$$



Primero veamos que y es inyectiva. en efecto $f(x)=f(x') \Rightarrow x+1 = x'+1 \Rightarrow x=x'$

También es suprayectiva pues para $y \in R$.

$f(x)=y \Leftrightarrow x+1=y \Leftrightarrow x=y-1 \quad \therefore f(y-1)=y$

La última ecuacion $x=y-1$ nos ayuda para encontrar f^{-1}, de hecho $f^{-1}(y)=y-1$.

Ejemplo.- ¿La función $f:R \dashrightarrow R$ $f(x) = \dfrac{3x + 2}{5}$ tiene inversa?

$$\frac{3x+2}{5} = y \Rightarrow 3x+2=5y$$

$$\Rightarrow 3x=5y-2$$

$$\Rightarrow x=\frac{5y-2}{3}$$

$$\therefore f^{-1}(y) = \frac{5y-2}{3}$$

Observemos en este ejemplo, que planteamos primero resolver el problema de la suprayectividad, en el camino vemos que la solución de $f(x)=y$, nos lleva a definir $f^{-1}(y)$; quedando esta bien definida como función, tenemos entonces que f es biyectiva, con inversa $f^{-1}(y)$.

Ejemplo.- Para las funciones del ejemplo anterior:

$$f(x)= \frac{3x+2}{5} \quad \text{y} \quad f^{-1}(y) = \frac{5y-2}{3}, \text{ tenemos:}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \frac{3x + 2}{5}$$

$$= \frac{5\,\dfrac{3x+2}{5} - 2}{3}$$

$$= \frac{3x + 2 - 2}{3} = x$$

Por otro lado:

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=f\left(\frac{5y-2}{3}\right)=\frac{3\left(\frac{5y-2}{3}\right)+2}{5}=\frac{5y-2+2}{5}=y$$

Ejemplo.- Sea $f:R^{+}\longrightarrow R^{+}$ donde $R^{+}=(0,\infty)$ definida por $f(x)=x^2$
$f^{-1}(y)=\sqrt{y}$

$(f\circ f^{-1})(y)=f(\sqrt{y})=(\sqrt{y})^2=y$

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(x^2)=\sqrt{x^2}=x$

De los dos ejemplos anteriores podemos observar que la composición de una función con su inversa es la función identidad.

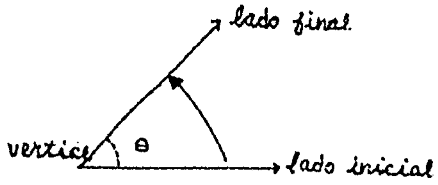
Pero observamos que:
$(f^{-1}\circ f)(x)=x$ quiere decir que $f^{-1}\circ f$ es la función identidad en el dominio.

$(f\circ f^{-1})(y)=y$, da la identidad en el codominio.

II.4.7 FUNCIONES TRASCENDENTES .- Hemos visto que la definición misma de función, induce a que esta es una terna, dos conjuntos (Dominio o Codominio) y una regla de correspondencia, vimos también que si la r.c. está dada como una expresión algebraica, entonces la función se llamará algebraica . Sin embargo, dentro del estudio de las funciones reales, existen aquellas en las que la r.c. no se pueden expresar algebraicamente, a estas se las conoce como funciones trascendentes. A esta clase pertenecen las, Trigonométricas o circulares

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS O CIRCULARES .- A manera de introducción y dado que las funciones circulares o trigonométrica requieren del conocimiento y manipulación del concepto de ángulo plano y las unidades en que se expresa, necesitamos hacer un breve recordatorio al mismo.

En la clase de geometría se definió al ángulo plano (o simplemente ángulo) como "la abertura entre dos segmentos de recta que se cortan en un punto llamado vértice".



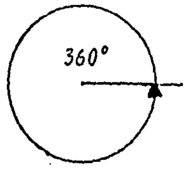
Además se vió que no es importante el tamaño de los segmentos como en sí su abertura.

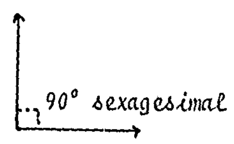
Nota: Los ángulos tienen un sentido, si se miden del lado inicial al lado final en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj entonces el ángulo es positivo. En caso contrario será negativo.

Se estudió también que para medir un ángulo esto se puede hacer en alguno de los tres sistemas de unidades, los cuales son:

$$\text{Sistemas de Unidades (para medir ángulos)} = \begin{cases} \text{Sexagesimal (Deg = D)} \\ \text{Centesimal (GRD = G)} \\ \text{Cíclico (RAD = R)} \end{cases}$$

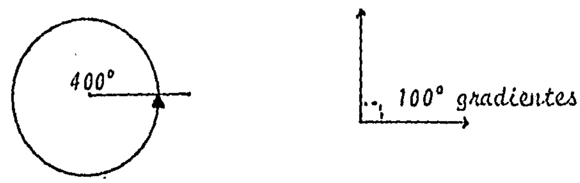
Sistema Sexagesimal.- Es el sistema más antiguo, ya lo usaban sus creadores, los babilonios, hace mas de treinta siglos. Y es aquel en el cual se divide a un ángulo de un giro total (aquel en el que coinciden el lado inicial con el lado final), en 360 pequeños ángulos, todos iguales, a los que se les llamó grados (°).





Y también es el sistema mas usual, el cual aprendimos a usar desde la educación primaria. Posteriormente se crearon submúltiplos a esta unidad, llamados minutos y segundos de ángulo. (base 60 = sexagesimal).

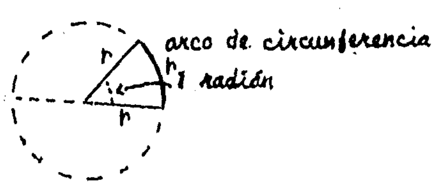
Sistema Centesimal.- Este sistema es relativamente nuevo y surge en la época napoleónica en Francia, con un afán de convertir todo a base 10. Y aquí surgió la unidad llamada gradiente, la cual tuvo origen como la centésima parte de un ángulo recto (no de un giro total) .



Por lo que un ángulo de un giro total es igual a 400° gradientes.

Los dos sistemas anteriores, son convencionales, existe un sistema de unidades para medir ángulos que surge de argumentos geométricos, este es el:

Sistema Cíclico.- En este sistema la unidad angular es el **RADIAN** el cual se define como: " El ángulo entre dos radios de una circunferencia cualquiera, que subtienden un arco de longitud igual al radio".



Y como sabemos que $\dfrac{\text{Perímetro de la circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \pi$

Entonces ¿Cuántos radianes hay en un ángulo de un giro total?. En términos de unidades sexagesimales tenemos:

$$360° = 2\pi rad.$$

$$\Rightarrow \frac{360°}{2\pi} = 1 \text{ rad} \qquad \text{entonces } 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

Hemos obtenido la ley de transformación de grados (sexagesimales) a radianes o viceversa.

Ejemplo 1.- Deseamos transformar 90° a radianes.

Solución:

$$\frac{180°}{\pi rad} = \frac{90°}{x} \Rightarrow x = \frac{90°(\pi rad)}{180°}$$

$$\boxed{x = \pi/2 \text{ rad}}$$

Ejemplo.- Transformar $\pi/3$ rad a grados (sexagesimales)

Solución :

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{x}{\pi/3} \Rightarrow x = \frac{180°\ (\pi/3 rad)}{\pi rad}$$

$$\boxed{x = \frac{180°}{3} = 60°}$$

Ahora haremos una tabla de equivalencias del sistema sexagesimal y el sistema cíclico para los ángulos mas usados:

$\theta(°)$	θ(rad)
0°	0 rad
45°	$\pi/4$ rad
60°	$\pi/3$ rad
90°	$\pi/2$ rad
120°	$2\pi/3$ rad
135°	$3\pi/4$ rad
180°	π rad
225°	$5\pi/4$ rad
270°	$3\pi/2$ rad
315°	$7\pi/4$ rad
360°	2π rad

Concluyendo, en esta parte, hemos visto que un mismo ángulo se puede medir en tres diferentes tipos de unidades, las mas usuales son el sistema sexagesimal y ciclico. En las calculadoras cientificas aparecen estos tres sistemas de unidades seleccionando el:

$\boxed{\text{MODE}}$

S. Sexagesimal $\boxed{\text{Deg}} = \boxed{\text{D}}$

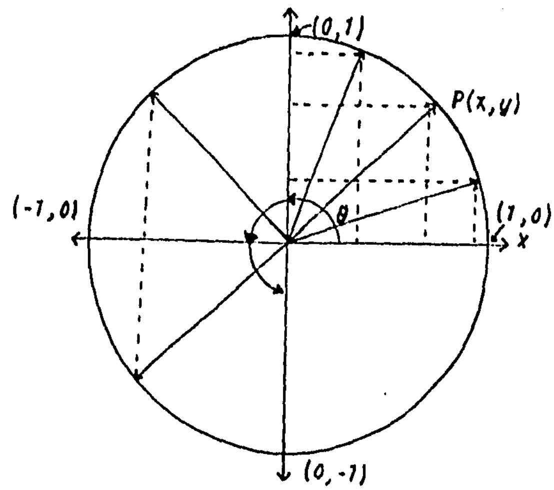
S. Centesimal $\boxed{\text{GRD}} = \boxed{\text{G}}$

S. Ciclico $\boxed{\text{RAD}} = \boxed{\text{R}}$

FUNCIONES CIRCULARES.- Ahora construiremos un juguete generador de funciones: Consideremos en el plano cartesiano el circulo de radio uno y una manecilla apoyada en el origen, cuyo punto final se encuentra justamente sobre la circunferencia y se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj.

El punto final de las manecillas en cada posicion lo designaremos como p(x,y).

Observa que la longitud de la manecilla en cualquier posición es uno.

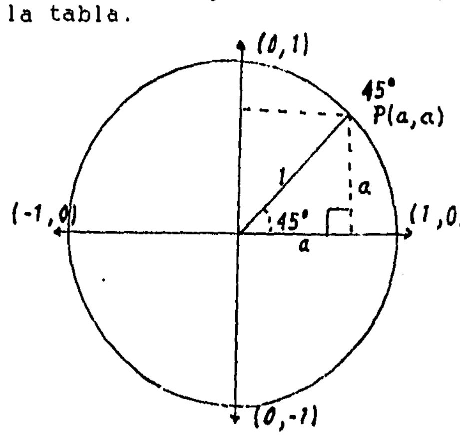


Ahora para el angulo θ que hace la manecilla con el eje **x**, encontramos las coordenadas (x,y) del punto P (punta de las manecillas), entonces tenemos:

TABLA 1

θ	x	y	(x,y)
0° = 0 rad	1	0	(1,0)
90° = $\pi/2$ rad	0	1	(0,1)
180° = π rad	-1	0	(-1,0)
270° = $(3/2)\pi$ rad	0	-1	(0,-1)
360° = 2π rad	1	0	(1,0)

Procedemos a obtener algunos valores para (x,y) que no aparecen en la tabla.



En $\theta=45°=\pi/4$ rad se forma un triángulo isósceles cuyos lados iguales (a) se oponen a los ángulos de 45°. Por Pitágoras tenemos:

$$a^2+a^2=1^2$$
$$2a^2=1$$
$$a^2=1/2$$
$$a=1/\sqrt{2}$$

Utilizando la simetría podemos calcular los valores correspondientes a 135°, 225° y 315°.

Así, tenemos.

TABLA 2

θ	x	y	(x,y)
$0° = 0$ rad	1	0	(1,0)
$45° = \pi/4$ rad	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$
$90° = \pi/2$ rad	0	1	(0,1)
$135° = 3\pi/4$ rad	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$
$180° = \pi$ rad	-1	0	(-1,0)
$225° = (5/4)\pi$ rad	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$(-.1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$
$270° = (3/2)\pi$ rad	0	-1	(0,-1)
$315° = (7/4)\pi$ rad	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$
$360° = 2\pi$ rad	1	0	(1,0)

Esta tabla nos muestra nueve valores para nueve ángulos, no obstante, esta tabulacion pudiera ser de 10° en 10° ó de 1°en 1° y sería mas completa.

Utilizando lo anterior podemos definir las funciones trigonométricas seno y coseno.

Función Seno.- Es la función que asigna a cada ángulo θ la coordenada y del punto P(x,y) extremo final de la manecilla cuando esta forma un ángulo θ con el eje x. Esta función se denota por $y=\text{sen}\theta$:

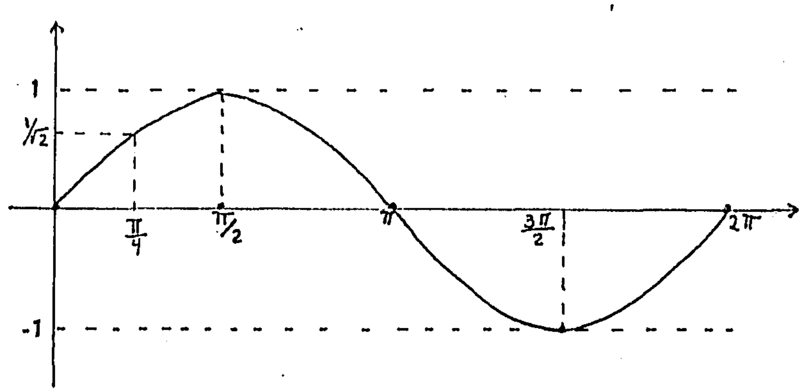
$$\text{Sen}:[0,2\pi]\longrightarrow R$$

$$\theta\longmapsto \text{sen}\theta$$

Emtonces tenemos:

θ	$y=Sen\theta$
0	0
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$1/\sqrt{2}$
π	0
$5\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$
$3\pi/2$	-1
$7\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$
2π	0

Uniendo los puntos obtenemos la grafica Cartesiana:



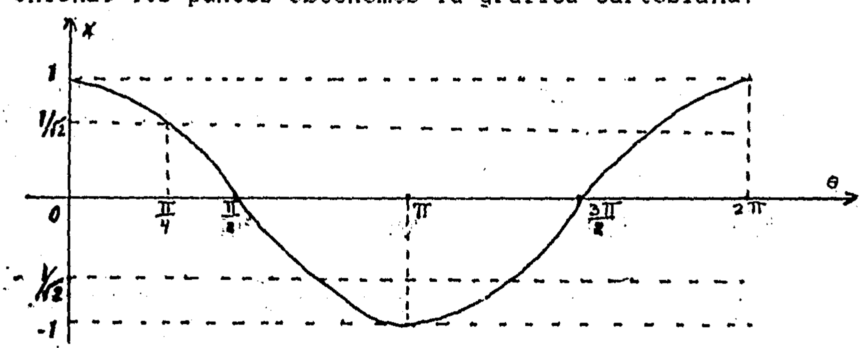
Observamos aqui, que la función seno, así construida, satisface la definicion de función. Su dominio es $[0,2\pi]$.

Función Coseno.- Es la funcion que asigna a cada ángulo θ la coordenada x del punto P(x,y) extremo final de la manecilla cuando ésta forma un ángulo θ con el eje y. Esta función se denota por $x=\cos\theta$:

Entonces tenemos:

θ	$x=\cos\theta$
0	1
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$
π	-1
$5\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$
$3\pi/2$	0
$7\pi/4$	$1/\sqrt{2}$
2π	1

Uniendo los puntos obtenemos la gráfica cartesiana:



Observamos aquí, que la función coseno, así construida, satisface la definición de función; su dominio es $[0,2\pi]$, su rango es $[-1,1]$.

La función tangente se define como aquella que, "a cada ángulo θ le asocia el cociente y/x de las coordenadas de la punta de las manecillas".

Las funciones circulares: cotangente, secante y cosecante que denotamos por cot, sec y csc se definen a través de las anteriores como:

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

A las funciones trigonometricas se les llama también funciones circulares debido a que se definen utilizando el circulo unitario.

CAPITULO III

L I M I T E
Y
C O N T I N U I D A D

III.- LIMITES Y CONTINUIDAD

III.1.- EJEMPLOS DE LIMITES

Ejemplo 1.-Consideremos la funcion $f(x)=x^2+x+1$ y calculemos algunos valores de la funcion.

x	f(x)
-1	1
-1/2	.75
-1/4	.81
-1/8	.89
-1/100	.99
0	1
1/100	1.01
1/8	1.14
1/4	1.31
1/2	1.75
1	3

Observamos que a medida que nos acercamos a cero los valores correspondientes se acercan a uno. entonces escribimos:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

y decimos que el limite de la funcion es uno cuando x tiende a cero.

Observa que en este caso $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

En muchas ocasiones, el limite coincide con el valor de la función, por ello, el primer candidato a considerar es precisamente este valor, sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo, el límite no siempre sigue esta regla.

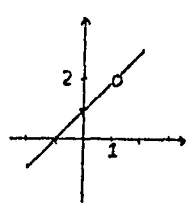
Ejemplo 2.- Obtengamos el $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

En este caso $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$.

La funcion no está definida ya que $x-1=0$ entonces $f(1)$ no puede ser el valor limite, sin embargo:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \text{ si } x \neq 1$$

Entonces las gráficas de $f(x)$ y $g(x)=x+1$ son iguales en todos los puntos excepto en $x=1$, la gráfica de f es:



Si nos acercamos a $x=1$, los valores de la función f se aproximan a 2, entonces, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

Observa que $g(1)=2$, en realidad, a pesar de que las funciones no son iguales en $x=1$ (f no esta definida en $x=1$) se tiene

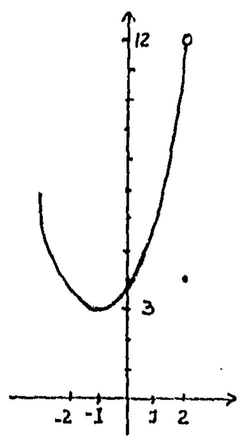
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x+1 = 2$$

Ejemplo 3.- Consideremos la funcion:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 4 & \text{si } x=2\end{cases}$$

como $\dfrac{x^3-8}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4$ si $x\neq 2$

la grafica es:



En este ejemplo f si esta definida en $x=2$. sin embargo los valores de la funcion se aproximan a $12\neq f(2)$, a medida que x se acerca a 2.

Asi: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2+2x+4 = 12$

Ejemplo 4.- Calcular el limite:

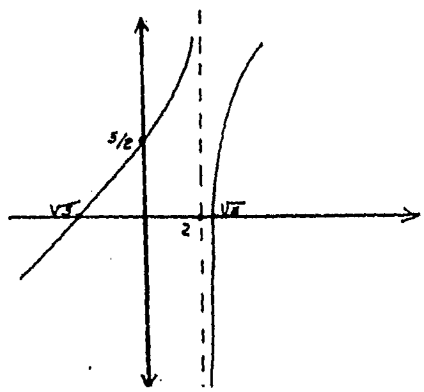
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-5x}{x^2-2x}$ observa que la función no está definida en $x=0$.

Procedemos como en el ejemplo anterior.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-5x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-5)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-5}{x-2}$$

Observa que $g(x)= \dfrac{x^2-5}{x-2}$ si está definida en $x=0$, entonces el candidato a límite es $g(0)=5/2$

Dibujando la gráfica de g tenemos:



entonces: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-5x}{x^2-2x} = \dfrac{5}{2}$

Ejemplo 5.- Calcular $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 6.- Calcular $\lim_{t\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$

En muchos casos, como en este ejemplo, aparecen radicales, una posibilidad para intentar resolver, es multiplicar por el conjugado y dividir entre él.

$$\lim_{t\to 0}\frac{2-\sqrt{4-t}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(2-\sqrt{4-t})(2+\sqrt{4-t})}{t(2-\sqrt{4-t})} = \lim_{t\to 0}\frac{4-(4-t)}{t(2+\sqrt{4-t})}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{t(2+\sqrt{4-t})} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-t}} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 7.- Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

La función no está definida en $x=0$, sin embargo, observamos que:

si $x>0$ $\qquad \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

y si $x<0$ $\qquad \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1,$

Entonces si nos acercamos a cero por la derecha, es decir con valores positivos, los valores de la función siempre son iguales a uno, esto lo denotamos,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1$$

Si ahora nos acercamos usando numeros negativos, los valores de la funcion son iguales a -1, escribimos

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1$$

Es decir al acercarnos simultáneamente por valores positivos y negativos no encontramos un único número al cual se aproximen las imágenes. Así, el límite no existe.

En general $\lim_{x \to a} f(x) = L$

si y sólo si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

es decir los límites por ambos lados deben existir y ser iguales.

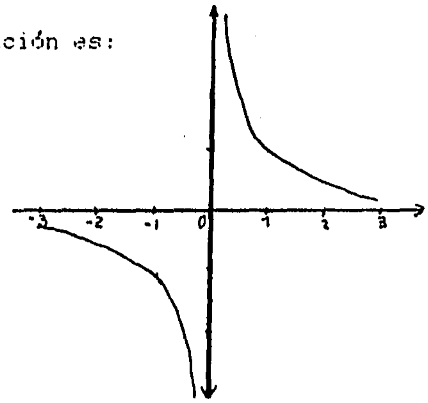
Ejemplo 8.- Consideremos la funcion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ queremos calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Como la función no está definida en x=0 no hay un candidato natural para ser el límite, entonces efectuaremos una tabulación para analizar el comportamiento de la función, observa que en este caso tampoco es posible simplificar la expresión.

x	f(x)
-1/100000	-100000
-1/1000	-1000
-1/100	-100
-1/10	-10
-1/4	-4
-1/3	-3
-1/2	-2
-1	-1
-2	-1/2
-3	-1/3
0	indefinida
1/2	2
1/3	3
1/4	4
1/10	10
1/100	100
1/1000	1000
1/10000	10000
1/100000	100000

La gráfica de la función es:



a medida que nos aproximamos a cero por la derecha, es decir, con valores positivos, los valores de la función crecen cada vez más, contrario a lo que sucede cuando nos acercamos por valores negativos, en cuyo caso se obtienen valores cada vez más pequeños. En este caso el límite no existe, pero para señalar la situación que acabamos de describir escribimos;

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Ejemplo 9.- Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

como en el ejemplo anterior, la función no esta definida en $x=0$ y tampoco es posible simplificar. En este caso:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

En este caso escribimos:

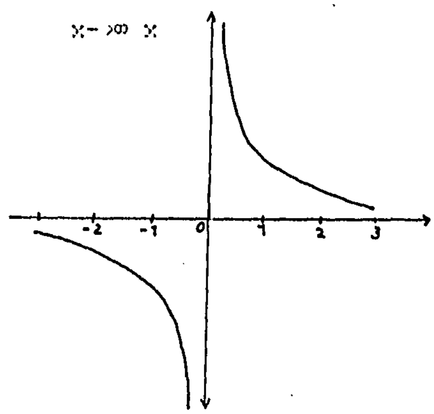
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Aún cuando el límite no existe, ésta es sólo notación para recordar que al acercarnos a cero, los valores de la función crecen indefinidamente.

En todos los ejemplos que hemos analizado, la variable siempre se aproxima a un número real, ahora nos preguntamos qué sucede a medida que la variable crece (decrece) indefinidamente los símbolos que usamos para estos casos son:

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ respectivamente.

EJEMPLO 10.- Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$



Analizando la gráfica de la función observamos que los valores de la función se aproximan a cero a medida que la x crece, entonces:

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ análogamente $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Ejemplo 11.- Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-5x+4}{x^2+2}$

En este caso dibujar la gráfica no es tan sencillo como en los casos anteriores, pero cuando como en este caso, se trata de un cociente de polinomios, tenemos el siguiente recurso, dividimos el numerador y el denominador entre x elevado a la mayor potencia del denominador, en este caso x^2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-5x+4}{x^2+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2}}{\dfrac{x^2+2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 + \dfrac{2}{x^2}} = 3$$

la última igualdad se obtiene utilizando el ejemplo 10 y el hecho

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

que puede probarse de manera análoga.

En el caso de límites de cocientes de polinomios cuando la variable decrece indefinidamente, es posible resolver utilizando el mismo procedimiento.

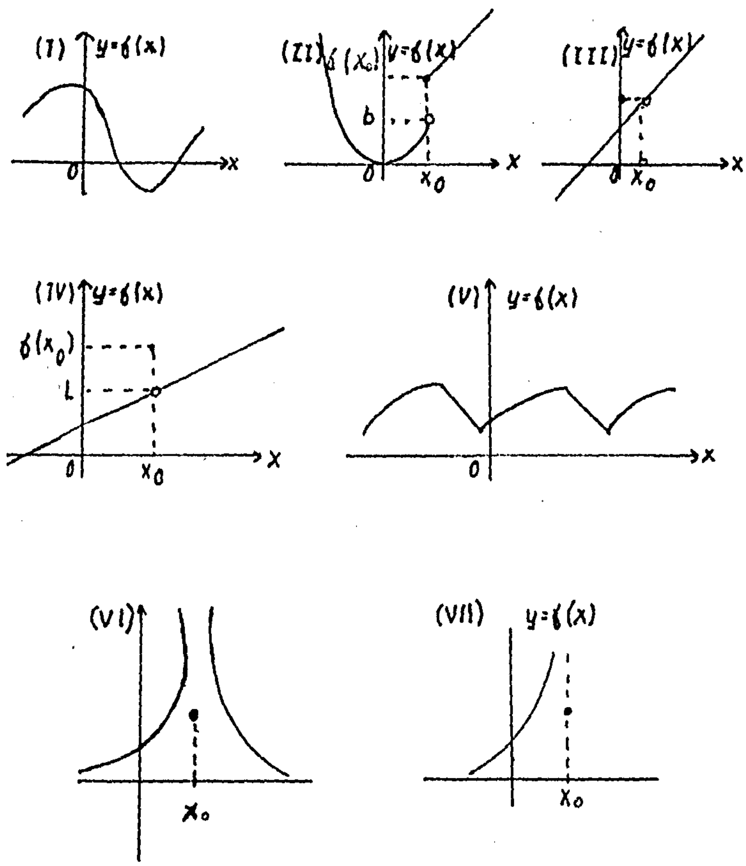
III.2 CONTINUIDAD DE UNA FUNCION.

El concepto de continuidad se origina del estudio del fenómeno físico del movimiento. Nuestra noción intuitiva de una partícula móvil es la de un punto que pasa de una posición a otra ininterrumpidamente.

Para una función, la idea intuitiva de continuidad es que la curva que representa la gráfica de la misma debe poderse dibujar con un trazo ininterrumpido.

Intuitivamente la grafica de una funcion continua estaría representada por una "cuerda" que no se rompe. Si ello no ocurre, es decir si la cuerda se rompe decimos que la funcion es discontinua.

Consideremos las siguientes graficas de funciones:



De las gráficas de las siete funciones anteriores solamente dos de ellas son continuas, la (I) y la (V). Si nos fijamos en un punto x_0 del dominio, observamos que al acercarnos a x_0 por cualquier lado las imágenes correspondientes se aproximan a $f(x_0)$, las otras graficas representan a funciones con algún tipo de discontinuidad en el punto x_0 .

En(II) la función no es continua. Observa que la función está definida en el punto x_0 pero tiene un salto en ese punto.

En (III) la función no está definida en el punto x_0, a la gráfica le falta un punto.

En (IV) la gráfica es similar a la función que aparece en (III), aunque en el punto x_0 la función si está definida, no es continua ya que el valor que toma en ese punto no es el que cubre el hueco de la gráfica, observa que al acercarnos al punto x_0 por ambos lados las imágenes correspondientes se aproximan a L que no es el valor de la funcion en x_0.

En (VI) la función esta definida en x_0 , pero al acercarnos a este punto, nuevamente los valores de la función no se acercan a $f(x_0)$, en este caso tampoco se acercan a un valor determinado.

Por último en (VII), si nos acercamos a x_0 por la derecha, los valores de la función se aproximan al valor de la funcion en x_0, es decir $f(x_0)$, sin embargo por la izquierda los valores de la función no se aproximan a un punto.

En general podriamos decir que se puede encontrar, en las funciones reales, tres tipos distintos de discontinuidad.

Primer Caso.- f no está definida en el punto x_0. En este caso a la gráfica de la función le falta un punto.

Segundo Caso.- La función si esta definida en x_0, los límites laterales $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existen ambos.

Pero ocurre alguna de las siguientes situaciones.

a) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ es decir $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe

pero $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Las gráficas de (II) y (IV) ilustran a) y b) respectivamente.

Tercer Caso.- La función sí está definida en x_0, pero alguno de, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ no existe.

Las gráficas de (VI) y (VII) son ejemplos de este caso.

Observamos que en todos los casos, determinar si la función es continua, nos lleva a pensar en $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

sin embargo vimos que la existencia del límite no asegura la continuidad, del análisis anterior podemos dar la siguiente:

Definición .- Una funcion f es continua en un punto x_0, si y sólo si, se cumple:

i) La funcion **f** esta definida en el punto x_0. Esto quiere decir que $x_0 \in D$.

ii) Exista el límite de la función f en el punto x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Esto quiere decir que los límites laterales sean iguales.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

iii) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esto quiere decir que, que si existe el límite de la función f en el punto x_0, este sea igual al valor que la función le asocia al punto x_0.

Brevemente: f es continua en x_0 si:

a) Esta definida $f(x_0)$

b) Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$

c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

De lo anterior concluimos que si una o mas de las condiciones no se cumplen, la función es discontinua en x_0.

III.2.1 EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS:

Ejemplo 1.- Considera $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ ¿Es continua en x=2?

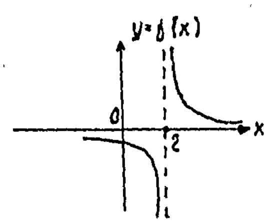
f es discontinua en x=2 ya que:

i) f(2) no esta definido (el denominador es cero en x=2)

ii) No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

En realidad basta con escribir alguna de las dos justificaciones.

Gráficamente tenemos:



Ejemplo 2.- $= \dfrac{x^2-4}{x-2}$ ¿Es continua en x=2?

i) f(2) no esta definida, sin embargo observamos que:

ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

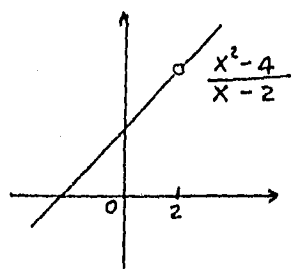
$= \lim\limits_{x\to 2} x+2 = 4$

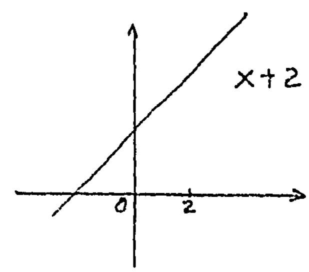
La única condicion que faltó para que la función sea continua es que: $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

es decir si definimos la función en $x=2$ como: $f(2)=4$ la función obtenida será continua.

Gráficamente tenemos:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \qquad\qquad g(x)=x+2$$





Las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x)=x+2$ son iguales excepto

en $x=2$. Así, si definimos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x=2 \end{cases}$$

las dos funciones coinciden. Observa que lo único que hicimos fue definir de manera conveniente en $x=2$ para que el hueco desapareciera.

Cuando como en el caso anterior, asignando un valor determinado como imagen del punto x_0 la función obtenida resulta continua decimos que la discontinuidad es evitable.

El siguiente es otro ejemplo en el cual hay una discontinuidad evitable.

Ejemplo 3.- Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

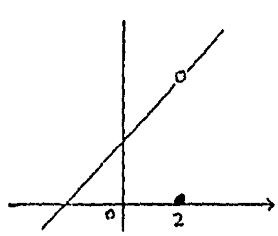
¿Porqué f es discontinua en $x=2$? ¿Es evitable? ¿Cuál es el valor que hay que asignar en $x=2$ para que la función sea continua.

Analizamos las tres condiciones:

i) $f(2)=0$, es decir f si está definida en 2.

ii) $\lim_{x \to 2} f(x)=4$ es decir, el límite si existe.

Observamos que la tercera condición es la que no se cumple, entonces la función no es continua en $x=2$



Sin embargo, como vimos en el ejemplo anterior, la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

es continua en $x=2$. Así, la discontinuidad de f es evitable y el valor que hay que dar en $x=2$ es $f(2)=4$.

En los ejemplos 2 y 3 las discontinuidades son evitables. Una discontinuidad no evitable la encontramos en el ejemplo 1, veamos porque:

la función $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ no esta definida en $x=2$

podemos definir $f(2)=b \qquad b\in R$

sin embargo $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

es decir $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe

y esto último no depende del valor b que se asigne a la función. Asi, no importa cual sea el valor de la función en $x=2$, ésta no es continua y la discontinuidad es por tanto no evitable.

Ejemplo 4.- Considérese la función,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x\in[-3,4] \\ -x+5 & x\in(4,6] \end{cases}$$

¿Es f continua en $x=4$?. analizamos las tres condiciones:

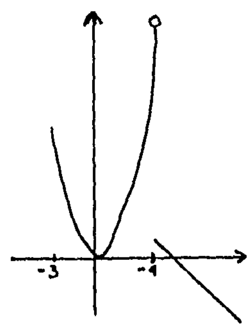
i) $f(4)=1$ es decir f si esta definida en $x=4$

ii) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} x^2 = 16$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} -x+5 = 1$

entonces $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ no existe y f no es continua en $x=4$

Graficamente:



En este caso la continuidad tampoco es evitable

Ejemplo 5.- ¿Es continua en $x=-1$ la siguiente función?

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x^2 - 6, & \text{si } -1 < x \leq 4 \end{cases}$$

i) $f(-1) = -1-4 = -5$

ii) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - 6 = -5$

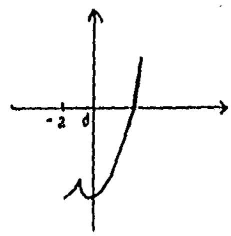
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x - 4 = -5$

entonces $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -5$

iii) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -5 = f(-1)$

Por tanto la función es continua en $x=-1$

Graficamente:



CAPITULO IV

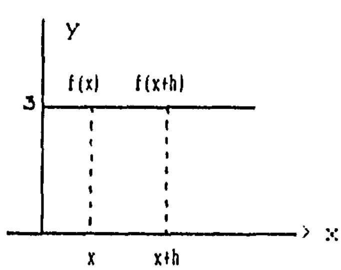
D E R I V A D A

IV.- DERIVADA

IV.I CALCULO DE TANGENTES

Ejemplo 1.- Consideremos la ecuacion $f(x)=3$ ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

$f(x)=3$



$$f(x) = f(x+h) = 3$$

Recordemos que la pendiente de una recta es igual a:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Si tomamos dos puntos en la recta A(x,f(x)) y B(x+h,f(x+h)) la pendiente de la recta será:

$$m = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{3-3}{h} = \frac{0}{h} = 0 \qquad \boxed{m = 0}$$

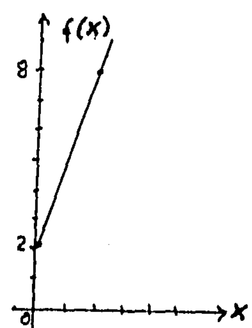
Observa que no es importante que la altura de la recta sea 3, en general si sustituimos por cualquier otra constante, la pendiente sera cero, entonces podemos concluir que la pendiente de una recta paralela al eje de las abscisas es 0.

Ejemplo 2. - Si ahora f(x)=3x+2 ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

Tomamos dos puntos de nuestra recta:

A(x,f(x)) y B(x+h,f(x+h))

f(x)=3x+2



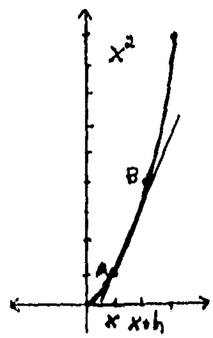
La pendiente de la recta estará dada por:

$$m = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{3(x+h)+2-(3x+2)}{h} = \frac{3x+3h+2-3x-2}{h} =$$

$$= \frac{3h}{h} = 3 \quad \text{si } h \neq 0 \qquad \boxed{m = 3}$$

Ejemplo 3.- Si $f(x)=x^2$ ¿Cual es la pendiente de la recta que une los puntos $A(x,f(x))$ y $B(x+h,f(x+h))$?

$f(x) = x^2$

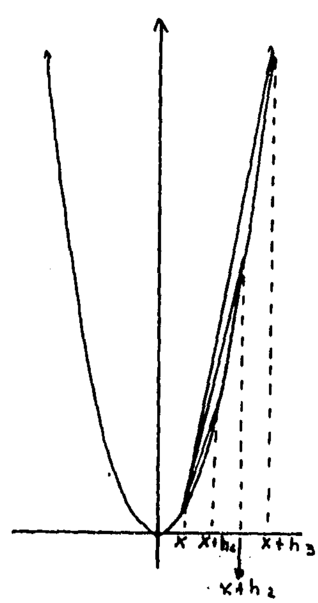


$$m = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h}$$

$=2x+h$ si $h \neq 0$ $\boxed{m=2x+h}$

Observación.- En los ejemplos 1 y 2, el valor de la pendiente no depende de los puntos elegidos, en cambio en el ejemplo 3 el valor de la pendiente depende del valor h que tomemos.

Lo anterior se observa facilmente en el dibujo



Consideremos una partícula que se desplaza sobre el eje vertical y que su posición con respecto al origen (el cero de dicho eje) se puede determinar como una función del tiempo, f(t).

Ejemplo 4 .- Si la partícula se desplaza siguiendo la regla $f(t)=3t+2$. ¿Cuál es la velocidad promedio en el recorrido de la partícula entre los instantes $t=2$ y $t=5$?

Solución.- Desde luego la velocidad promedio entre los tiempos t_1 y t_2 se define como:

$$V_p = \frac{\text{distancia final} - \text{distancia inicial}}{\text{tiempo final} - \text{tiempo inicial}}$$

por lo que en nuestro caso

$$V_p = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{3(5)+2 - [3(2)+2]}{3} = 3.$$

Podemos observar aquí que la velocidad promedio entre dos tiempos cualesquiera t_1 y t_2 es también igual a 3 ya que

$$V_p = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{3(t_2)+2 - [3(t_1)+2]}{t_2 - t_1} = \frac{3(t_2-t_1)}{t_2-t_1} = 3$$

Cuando se trata de un desplazamiento de este tipo donde la velocidad promedio entre dos tiempos cualesquiera es la misma, se dice que es un movimiento uniforme de velocidad constante. Este no es el único tipo de movimiento.

Ejemplo 5.- Si la partícula cambia de posición siguiendo la regla $f(t)=(-1/2)gt^2+8$ donde g es una constante, entonces la velocidad promedio entre $t_1=1$ y $t_2=2$ y la velocidad promedio entre $t_3=2$ y $t_4=3$ son diferentes, en efecto.

$$V_p = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = (-1/2)g(2)^2+8-[-(1/2)g(1)^2+8]=$$

$$= -(1/2)g[4-1]=(-3/2)g$$

$$V_p = \frac{f(t_4)-f(t_3)}{t_4-t_3} = \frac{(-1/2)g(4^2)+8-[-(1/2)g(3)^2+8]}{4-3}$$

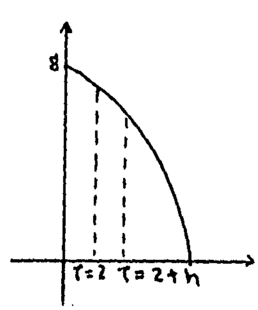
$$= -(1/2)g[4^2-3^2]=(-7/2)g.$$

Ejemplo 6.- Si la posicion de una particula esta sujeta a la regla $f(t)=(-1/2)gt^2+8$ donde g es una constante, cual es la velocidad promedio entre $t_1=2$ y $t_2=2+h$

$$V_p = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{(-1/2)g(2+h)^2+8-[(-1/2)g2^2+8]}{h}$$

$$= \frac{-1g[4h+h^2]}{2h} =(-1/2)g(4+h).$$

Esta velocidad promedio que desde luego cambia, cuando h varia, $V_p(h)=(-1/2)g(4+h)$, cumple que cuando h se aproxima a cero, la velocidad promedio se aproxima a $(-4/2)g=-2g$.



$\frac{-1}{2}gt^2+8$

Esto se conoce como la velocidad instantánea del movimiento en el instante $t=2$.

En general decimos que la velocidad instantánea de una partícula que se mueve sobre una línea, siguiendo la regla $f(t)$, es igual en el instante t_o, al siguiente límite

$$V=\lim_{h\to 0}\frac{f(t_o+h)-f(t_o)}{h}$$

Ejemplo 7.- Cuál es la velocidad instantánea de una partícula que se mueve sobre una línea en el instante $t_o=2$, si su posición con respecto al tiempo esta dada por $f(t)=t^3+t$.

$$V_i(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3+(2+h)-2^3-2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3+2+h-8-2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h^2+13h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^2+6h+13 = 13$$

luego la velocidad instantánea en el instante $t=2$ es igual a 13.

IV.2.- *DERIVACION DE FUNCIONES ELEMENTALES*

Anteriormente vimos que el límite:

$$(\mathrm{I}) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

es fundamental en temas aparentemente tan poco relacionados entre sí como el de las tangentes a curvas y el de velocidad de móviles. Se trata de un límite que ocupa un primer plano en el cálculo diferencial. Para su estudio sistemático conviene considerar junto con cada función f, la funcion cuyo valor en x es el límite (I)

Definición.- Sea f una función definida sobre el intervalo J:

i) Diremos que f es derivable en $x \in J$ si y sólo si, el límite (I) existe;

ii) La nueva función cuyo dominio esta formado por los puntos x en los cuales f es derivable y cuyo valor en x es el límite (I) se llama la **DERIVADA** de f y se indica por f'

La relación entre f y f' puede expresarse brevemente por la igualdad

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El proceso de encontrar f' a partir de f se llama **DERIVACION**. Para llevarlo a cabo evaluamos el límite del cociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

cuando $h \to 0$

Además del símbolo $f'(x)$ otros tipos de notación son utilizados para representar la derivada de $y=f(x)$ con respecto a x.

Observación.- Si hacemos y=x+h. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Por lo que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

pero $h=y-x \to 0$ si y sólo si $y\to x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

IV.3- DIFERENTES NOTACIONES DE LA DERIVADA.

La elección de notación que hizo Leibniz para la derivada fue el resultado de grandes reflexiones y discusiones con sus amigos matemáticos sobre las ventajas y desventajas de distintos símbolos.

Leibniz concibió a la derivada como el cociente de cantidades infinitamente pequeñas llamadas infinitesimales :

$$\frac{dy}{dx}$$

Esta notación resume el proceso que se sigue para obtener la fórmula para calcular pendientes de las rectas tangentes a la curva $y=f(x)$. Ya que primero se empieza obteniendo la pendiente de la secante que pasa por, los puntos $(x,f(x))$ y $(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ o sea:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x+\Delta x-x}$$

Cuando Δx se hace pequeño Δy también, si el cociente de $\Delta y/\Delta x$ se aproxima a un valor, este será la derivada f en x que Leibnitz denotó:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

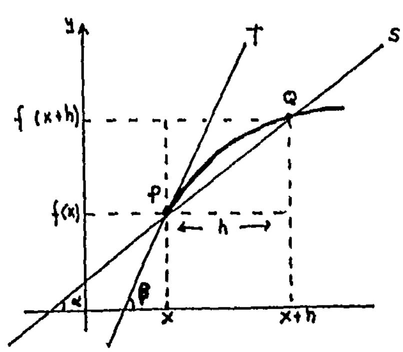
Hay otras notaciones, las mas comunes son:

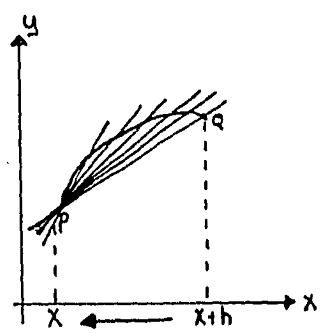
$f'(x) = y'(x)$	notación de Lagrange.
$D_x f$	notacion de Cauchy.
$\dot{y}(x)$	notacion de Newton .

IV.4.- INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA.

Geométricamente la definición de la derivada se expresa de la siguiente manera:

Consideremos la gráfica de una función f y dos puntos $P(x,f(x))$ y $Q(x+h,f(x+h))$ de dicha gráfica. La recta S que determina P y Q forma un ángulo α con respecto a el eje de las x.





De la misma figura observamos que: $\tan \alpha = \Delta y/\Delta x$ donde

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) \quad y \quad \Delta x = h$$

por tanto:

$$\tan \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

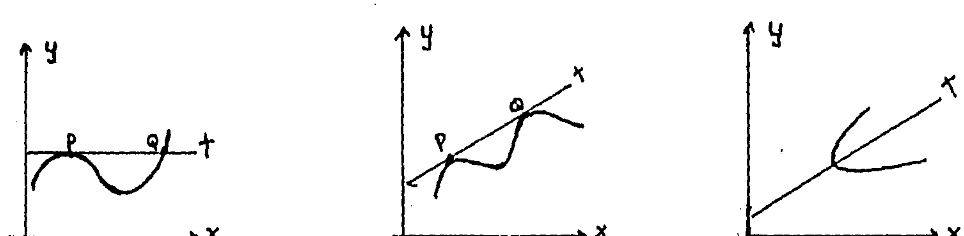
Esta igualdad representa la pendiente de la recta S secante a la curva. Ahora procedemos de la siguiente manera. Haciendo que x+h tienda a x, consideremos la familia de rectas secantes donde Q tiende a P (como se muestra en la 2ª gráfica).

Llamamos recta tangente a la gráfica en el punto (x,f(x)) al límite de las secantes, es decir la recta que pasa por (x,f(x)) y que tiene por pendiente:

$$\tan \beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si tal límite existe, el cual es la derivada de la función y=f(x) en el punto x.

Nótese que estamos definiendo a la tangente a una curva en un punto, como el límite de secantes a esa misma curva que pasa por ese mismo punto, y no como la recta que "corta" a la curva en un sólo punto.



(a) (b) (c)

En las figuras (a) y (b) la recta T es tangente a la gráfica de f en P, pero además corta a la curva en los puntos P y Q; y en la figura (c) aunque corta en un solo punto la recta T a la curva, ésta no es tangente.

IV.5.- PROPIEDADES DE LA DERIVACION: TEOREMAS SOBRE LA DERIVACION DE FUNCIONES.

Veamos ahora algunos teoremas generales sobre la derivada.

TEOREMA 0.- Si f es derivable en x, entonces es continua en x

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h$$

$$= f'(x)\cdot 0 = 0$$

entonces: $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)-f(x)=0$

es decir $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$

TEOREMA 1.- La derivada de una funcion lineal $f(x)=cx+b$ es una constante.

Demostración:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c(x+h)+b-(cx+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ch}{h} = c$$

$$\therefore \boxed{f'(x) = c}$$

Ahora, si la función lineal tiene el coeficiente $c=0$, es decir $f(x)=b$ (la función es constante) entonces:

$$f'(x)=0 \quad \text{(por el teorema 1)}$$

Así, hemos probado:

Corolario 1 .-"La derivada de una función constante es cero".

Ahora, si la función lineal tiene los coeficientes $c=1$ y $b=0$, esto quiere decir $f(x)=x$ (la función Idéntica) entonces:

aplicando nuevamente el teorema 1 se tiene $f'(x)=1$, es decir:

Corolario 2 .-" La derivada de la función Idéntica es uno".

TEOREMA 2.- Si $f(x)=x^n$ siendo n un entero positivo, entonces f es derivable y además $f'(x)=nx^{n-1}$

Demostración:

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{y^n-x^n}{y-x}$$

$$= \lim_{y\to x} \frac{(y-x)(y^{n-1}+y^{n-2}x+...+x^{n-1})}{y-x}$$

$$= \lim_{y\to x} y^{n-1}+y^{n-2}x+...+x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}$$

TEOREMA 3.- Sea f derivable en un punto x, y c un número real, entonces cf es derivable en x, y además

$$\boxed{(cf)'(x)=cf'(x)}$$

Demostración.- $(cf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \left[c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} c \cdot \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

$$= \boxed{cf'(x)} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

TEOREMA 4.- Sean f, g derivables en x, entonces f+g es derivable en x, y

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

Demostración.- $\lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \boxed{f'(x) + g'(x)}$$

Ahora, mostremos la utilidad de estos cuatro teoremas aplicandolos al siguiente ejemplo:

Ejemplo.- Dada $f(x)=7x^4-2x^3+8x+5$ encontrar $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x):$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (7x^4-2x^3+8x+5)$$

$$= \frac{d(7x^4)}{dx} + \frac{d(-2x^3)}{dx} + \frac{d(8x)}{dx} + \frac{d(5)}{dx} \quad \ldots\text{Teo } 4$$

$$= 7\frac{d(x^4)}{dx} - 2\frac{d(x^3)}{dx} + 8\frac{d(x)}{dx} + \frac{d(5)}{dx} \quad \ldots\text{Teo } 3$$

$$= 7\cdot 4\cdot x^3 - 2\cdot 3x^2 + 8\,\frac{dx}{dx} + \frac{d5}{dx} \quad \ldots\text{Teo } 2$$

$$= 28x^3 - 6x^2 + 8\cdot 1 + 0 \quad \ldots\ \text{Teo } 1$$

$$= 28x^3 - 6x^2 + 8$$

A partir de los teoremas anteriores (1,2,3 y 4) la derivada de cualquier función polinomial puede encontrarse fácilmente.

Teorema 5.- Sean f, g, derivables en x entonces fg es derivable en x, y

$$(f\,g)(x) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}\,g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}\,f(x)$$

Demostración.- $\frac{d}{dx}\,(fg)(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$

Restando y sumando $f(x+h)\cdot g(x)$ en el numerador tenemos :

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\cdot\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

usando el teorema 0

$$= \boxed{f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Ejemplo.- Dada $H(x)=(2x^3-4x^2)(3x^5+x^2)$ encontrar $H'(x)$

$$\frac{d}{dx}H(x) = (2x^3-4x^2)\cdot\frac{d}{dx}(3x^5+x^2)+(3x^5+x^2)\frac{d}{dx}(2x^3-4x^2)$$

$$= (2x^3-4x^2)(15x^4+2x)+(3x^5+x^2)(6x^2-8x)$$

$$= (30x^7-60x^6+4x^4-8x^3)+(18x^7-24x^6+6x^4-8x^3)$$

$$= 48x^7-84x^6+10x^4-16x^3$$

Teorema 6 .- Si f y g son funciones derivables en x,y con $g(x)\neq 0$ entonces: f/g es derivable en x, y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{g(x)\cdot\frac{df(x)}{dx}-f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$$

Demostración.- $(f/g)'(x)= \lim_{h\to 0}\frac{(f/g)(x+h)-(f/g)(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}$$

Restando y sumando $f(x) \cdot g(x)$ en el numerador :

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[g(x) \cdot \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - \left[f(x) \cdot \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{g(x) \cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim\limits_{h \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim\limits_{h \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} g(x+h)}$$

utilizando el teorema 0.

$$= \boxed{\frac{g(x) \cdot \dfrac{d}{dx} f(x) - f(x) \cdot \dfrac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Ejemplo.- Dada $H(x) = \dfrac{2x^3+4}{x^2-4x+1}$

encontrar $H'(x)$:

$$\frac{d}{dx}H(x) = \frac{(x^2-4x+1)\frac{d}{dx}(2x^3+4)-(2x^3+4)\frac{d}{dx}(x^2-4x+1)}{(x^2-4x+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-4x+1)(6x^2)-(2x^3+4)(2x-4)}{(x^2-4x+1)^2}$$

$$= \frac{6x^4-24x^3+6x^2-4x^4+8x^3-8x+16}{(x^2-4x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^4-16x^3+6x^2-8x+16}{(x^2-4x+1)^2}$$

Ejemplo.- Apliquemos este último teorema, a $f(x)=x^{-n}$ donde $-n$ es un entero negativo y $x\neq 0$, entonces:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{dx^{-n}}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\right]$$

$$= \frac{x^n\cdot\frac{d(1)}{dx}-1\cdot\frac{dx^n}{dx}}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{x^n\cdot 0 - n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = \boxed{-nx^{-n-1}}$$

De los teoremas 2, 3 y 6 concluimos que para cualquier r entero positivo o negativo y c∈R

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cx^r) = c \cdot r \cdot x^{r-1}}$$

Es útil saber que la derivabilidad es una condición mas fuerte que la continuidad, es decir, si una función es derivable, entonces tambien es continua. Una prueba de ello se dió en el teorema 0.

El recíproco sin embargo, es falso, no es cierto que toda función continua en x posea una derivada en ese punto. El contra ejemplo mas sencillo es la función $f(x)=|x|$ (valor absoluto). Esta función en $x=0$ es continua pero no posee derivada ya que :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -1 \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$$

IV.6.- LA DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA

Sea $H(x)=(2x^3-5x^2+4)^5$ Observamos que $H=f\ g$ donde

$y=f(u)=u^5$ y $u=g(x)=2x^3-5x^2+4$

nos preguntamos en que punto H es derivable, para responder, utilizamos el siguiente teorema, que establece las condiciones para la existencia de la derivada de una función compuesta.

Teorema 7.- (Regla de la Cadena).- Si y es una función de u y dy/du existe, y si u es una función de x, definida por $u=g(x)$ y du/dx existe, entonces y es una función de x y dy/dx existe y esta definida por :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

Aplicando la regla de la cadena a nuestro ejemplo, tenemos:

Ejemplo 1.- Dada $y=(2x^3-5x^2+4)^5$ encontrar dy/dx considerando a y y u tales que: $y=u^5$ y $u=2x^3-5x^2+4$ por lo tanto, aplicando el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \left[\frac{d}{du}u^5\right]\cdot\left[\frac{d(2x^3-5x^2+4)}{dx}\right]$$

$$= 5u^4\cdot(6x^2-10x)$$

$$= 5(2x^3-5x^2+4)^4(6x^2-10x)$$

Ejemplo 2 .- Dada $k(x) = \dfrac{1}{4x^3+5x^2-7x+8}$ obtener $k'(x)$

Aplicando la regla de la cadena con $f(x)=4x^3+5x^2-7x+8$ y $g(u)=1/u$ tenemos:

$$k'(x) = -1(4x^3+5x^2-7x+8)^{-2}(12x^2+10x-7)$$

$$= \frac{-12x^2-10x+7}{(4x^3+5x^2-7x+8)^2}$$

IV.7.- DERIVACION IMPLICITA

Si y es una función de x definida por la ecuación $y=2x^3-5x^2+4$ entonces y está definida explícitamente en función de x y podemos escribir: $y=f(x)$ donde $f(x)=2x^3-5x^2+4$, sin embargo no todas las funciones están definidas explícitamente. Por ejemplo, si tenemos la ecuación:

$$\text{(I)} \quad y^3+3x^2=x^2y+8$$

donde y depende de x, no podemos resolverla para y, y obtener una función explicita. Sin embargo puede existir una o mas funciones $y=f(x)$ tales que satisfacen a la ecuación anterior. En este caso establecemos que y está definida implícitamente como una función de x, o que la funcion f esta definida implícitamente por la ecuación dada.

Si una función está definida implícitamente, podemos encontrar su derivada usando el proceso llamado, **Derivación Implícita**, expliquemos dicho proceso mediante un ejemplo:

Aplicamos d/dx a ambos lados de la ecuación (1) :

derivando la ecuacion:

$$\frac{d}{dx}(y^3+3x^2) = \frac{d}{dx}(x^2y+8)$$

$$\frac{d}{dx}(y^3)+\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{d}{dx}(x^2y)+\frac{d}{dx}(8)$$

$$3y^2\cdot\frac{dy}{dx}+6x = x^2\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot\frac{d}{dx}(x^2)+0$$

$$3y^2\,\frac{dy}{dx}+6x = x^2\frac{dy}{dx}+y\cdot 2x$$

$$(3y^2-x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy-6x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2xy-6x}{3y^2-x^2}}$$

Ejemplo .- Dada $(x+y)^2-(x-y)^2=x^4+y^4$

Obtener $\frac{dy}{dx}$

Derivamos implicitamente con respecto a **x**:

$$2(x+y)(1+\frac{dy}{dx})-2(x-y)(1-\frac{dy}{dx})=4x^3+4y^3\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$2x+2y+(2x+2y)\frac{dy}{dx}-2x+2y+(2x-2y)\frac{dy}{dx}=4x^3+4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$(4x-4y^3)\frac{dy}{dx}=4x^3-4y$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-y}{x-y^3}}$$

El teorema 2, se puede extender para exponentes fraccionarios, a traves de la derivación implícita, si $f(x)=x^n$ con $n=p/q$ $(p,\ q\in Z)$ $q\neq 0$ entonces:

$y=x^{p/q} \Rightarrow y^q=x^p$ derivando implícitamente tenemos:

$$\frac{d}{dx}(y^q) = \frac{d}{dx}(x^p)$$

$$q\cdot y^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left[\frac{p}{q}\right]\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}=\left[\frac{p}{q}\right]\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}}$$

$$=\frac{p}{q}\,x^{p-1}\,x^{(p/q)(1-q)}=\frac{p}{q}\,x^{(p-1)+(p/q)-p}$$

$$=\frac{p}{q}\,x^{(p/q)-1}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}} \quad \text{con } n=p/q$$

Aunque esta fórmula sólo se ha demostrado para $n \in Q$, es válida para cualquier número real.

IV.8.- FUNCIONES INVERSAS

Sean f y g dos funciones. Decimos que g es la inversa de f si $f \circ g = I = g \circ f$, donde I es la función identidad.

Observa que si g es la inversa de f, entonces f es la inversa de g, es decir son mutuamente inversas. si f y g son inversas, podemos escribir $y=f(x)$, $x=g(y)$.

El siguiente teorema relaciona las derivadas de funciones inversas.

Teorema 8 .- La derivada de la inversa de una función es igual al recíproco de la derivada de la función, es decir: Si $y=f(x)$ y $x=g(y)$ son funciones inversas derivables entonces:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dg(y)}{dy}} \qquad \text{si} \quad \frac{dg(y)}{dy} \neq 0$$

Ejemplo.- Si $x=y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5$, encuentra $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{dy} = 1+y^2+y^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+y^2+y^4}$$

Ejemplo.- Si $x = y^{1/2} + y^{1/3}$, encuentre $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y_{-1/2} + \frac{1}{3} y^{-2/3} \qquad \text{si } y \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{2} y^{-1/2} + \frac{1}{3} y^{-2/3}} \qquad \text{si } y \neq 0$$

$$= \frac{6y^{2/3}}{3y^{1/6} + 2}$$

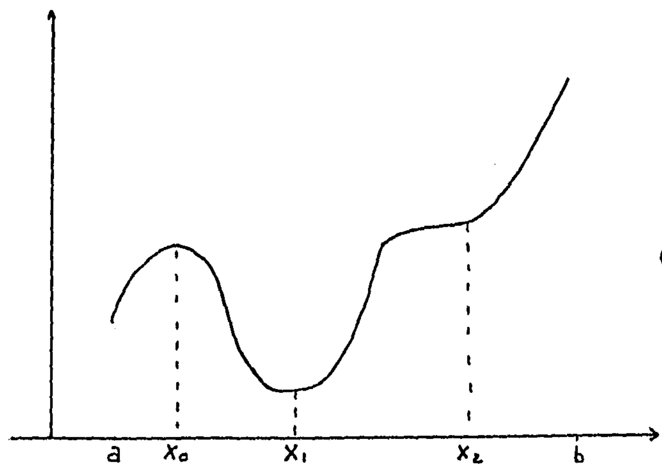
CAPITULO V

A P L I C A C I O N E S DE LA D E R I V A D A

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Como hemos visto, el concepto de la derivada lo hemos podido aplicar a algunos problemas particulares que nos sirvieron de pretexto para entender las ideas del mismo. Estos problemas o mas propiamente su solución son solo algunos ejemplos en donde la derivada interviene en forma directa. No obstante existe un sin número de ejemplos y problemas en donde la derivada juega un papel sumamente importante en su solución. En todos ellos el común denominador es el de ser un proceso de cambio en el cual se desea saber la razón de cambio y/o la rapidez con la cual este cambio se produce. Si tenemos una función la cual nos describe el comportamiento de un proceso determinado a través del tiempo: $f(t)$ y deseamos saber, no sólo la manera en como se esta produciendo este cambio en cada instante t, sino además se desea saber el instante t en el cual el proceso toma un valor máximo, o un valor mínimo.

Supongamos que la gráfica de la función f es de la forma siguiente.



(I)

Observamos que la función f, esta definida en el intervalo $[a,b]$.

Podemos analizar la gráfica de la función observando dónde crece o decrece, que es continua o dibujando en algunos puntos la recta tangente para saber cuál es la pendiente. Sin embargo, en general, se conoce la regla de correspondencia de una función, pero no su gráfica; por ello, es conveniente poder hacer un análisis que no dependa de la gráfica, más aún, que nos dé información acerca de ella para poder dibujarla.

Así, por ejemplo, es importante cuáles son los valores mayor y menor que toma la función.

Diremos que f tiene un máximo absoluto en un punto $c \in [a,b]$, si $f(c)$ es el valor mas grande que f alcanza en todo el intervalo, es decir, si $x \in [a,b]$ entonces

$$f(c) \geq f(x)$$

Por supuesto f tiene un mínimo absoluto en $c' \in [a,b]$ si

$$f(c') \leq f(x) \text{ para cualquier } x \in [a,b]$$

Por ejemplo si $f(x)=x$ está definida en el intervalo $[0,2]$, la función tiene un mínimo absoluto en $x=0$ y un máximo absoluto en $x=2$.

Hay funciones que tienen varios máximos y mínimos absolutos. recuerda por ejemplo la gráfica de la función seno.

Observando nuevamente la gráfica (I), al respecto podemos decir que f tiene un mínimo absoluto en x. y un máximo absoluto en b.

Sin embargo, notamos que fijándonos en el punto x_0, si restringimos el dominio de la función, digamos el intervalo $[a,x_1]$, la nueva función tiene un máximo absoluto en x_0. Decimos entonces que x_0 es un máximo relativo de la función original. De manera análoga podemos hablar de mínimos relativos.

Cuando es muy claro si se trata de un máximo (mínimo) relativo o absoluto, o no es importante de que tipo se trata, lo llamamos simplemente máximo (mínimo).

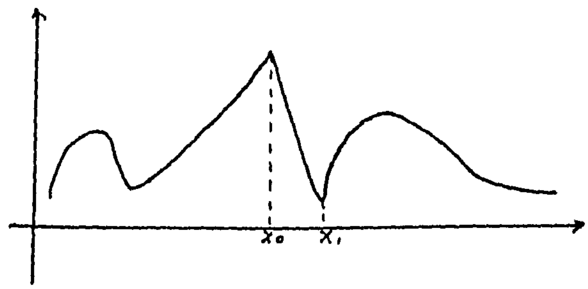
Observemos ahora que en los puntos x_0 y x_1, en los que la función tiene un máximo y un mínimo respectivamente, hay una situación semejante. si trazamos la recta tangente a la gráfica en el punto, en ambos casos se obtiene una recta horizontal, es decir la pendiente es cero. dicho en otras palabras, la derivada de la función en ambos casos es cero, esto no es casual, en general si la función tiene un máximo o mínimo en un punto $c \in (a,b)$ y f es derivable en c, entonces $f'(c)=0$.

Lo anterior dice que en la búsqueda de máximos y mínimos de una función, debemos siempre analizar en aquellos puntos en que la derivada sea cero. Recordemos ahora el ejemplo en el que analizamos la función identidad, el máximo se alcanza en $x=2$ y la tangente en el punto no es horizontal. El problema en ese caso es que se trata de uno de los extremos del intervalo.

Esos son los únicos casos en los que habiendo máximos o mínimos, la derivada no es cero.

Los puntos en los cuales la derivada es cero, se llaman puntos crítico.

Observa que en los puntos en los que la función no es derivable también puede haber máximo o mínimo , por ejemplo:

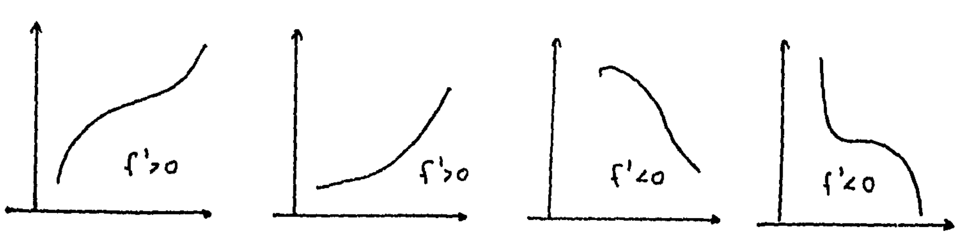


La función no es derivable en x_0 y en x_1 y sin embargo tiene un mínimo en x_1 y un máximo en x_0

En resumen. los máximos o mínimos sólo pueden encontrarse en los extremos del dominio. en los puntos críticos ó donde la función no es derivable.

Notemos que cuando tenemos un máximo en un punto que no es extremo del intervalo. la función a la izquierda del punto es creciente. y decreciente a la derecha. del mismo modo. en un mínimo. observamos que la función decrece a la izquierda y crece a la derecha del punto.

Geométricamente es fácil notar que la derivada es positiva en un intervalo si y sólo si la función es creciente en ese intervalo. De la misma manera la derivada es negativa si la función es decreciente.



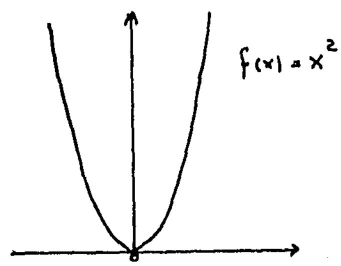
$x=0$ es el único punto crítico

si $x<0$ $f'(x) = 2x < 0$ es decir la función es decreciente en $(-\infty,0)$

De la misma manera, observamos que si $x>0$ $f'(x)=2x>0$, entonces la función es creciente en $(0,\infty)$.

La función tiene un mínimo en $x=0$.

la gráfica es:



Ejemplo 2.- Se $f(x)= 4x^3-3x$ determinar los puntos críticos, los intervalos en los cuáles es creciente o decreciente, Encontrar sus máximos y mínimos. Dibujar la gráfica.

El dominio de la función es R

$f'(x)=12x^2-3$

Resolvemos $f'(x)=0$

$$12x^2-3=0$$

$$12x^2=3$$

$$x^2=3/12$$

$$x^2=1/4$$

los puntos críticos son $x=1/2$ y $x=-1/2$ ahora veamos dónde es positiva la derivada

$$12x^2-3>0$$

$$x^2>1/4$$

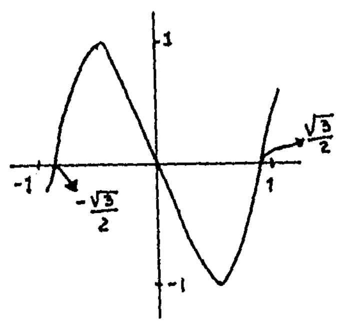
$$|x|>1/2$$

Es decir si $x>1/2$ ó si $x<-1/2$ $f'(x)>0$ dicho de otro modo:

f es creciente en $(-\infty,-1/2)$ y en $(1/2,\infty)$

entonces $f'(x)<0$ si $x\in(-1/2,1/2)$ es decir, es decreciente en dicho intervalo.

como $x=-1/2$ y $x=1/2$ son puntos críticos, del análisis anterior tenemos que en $(-\infty,-1/2)$ es decir, a la izquierda de $-1/2$, f es creciente y a la derecha de $-1/2$ la función es decreciente, entonces en f tiene un máximo en $x=-1/2$. De la misma manera puede verse que f tiene un mínimo en $x=1/2$ la gráfica es:



En ocasiones, no es sencillo encontrar los intervalos en los que la función es creciente o decreciente y por consiguiente, una vez encontrados los puntos críticos no es fácil decidir si la función tiene un máximo o mínimo en dicho punto, por ello es conveniente usar el siguiente criterio, conocido como el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos:

1°) Calcular la derivada e igualar a cero para encontrar los puntos críticos

2°) Calcular la segunda derivada y evaluar en el punto crítico que llamaremos x_1

si $f'(x_1)<0$ f tiene un máximo en x_1

si $f''(x_1)>0$ f tiene un mínimo en x_1

Ejemplo 3.- Sea $f(x)= x^4-2x^2+1$ encontrar los puntos críticos y determinar si se trata de máximos o mínimos. Dibujar la gráfica.

La función está definida y es continua en R.

$f'(x)=4x^3-4x$

igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos

$$4x^3-4x=0$$

$$4x(x^2-1)=0$$

$$4x=0 \quad \text{ó} \quad x^2=1$$

tenemos entonces tres puntos críticos:

$$x=0, \quad x=1 \quad y \quad x=-1$$

Calculamos la 2ª derivada $f''(x)=12x^2-4$

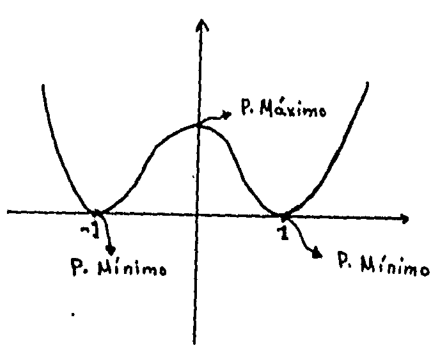
evaluamos en los puntos críticos

$f''(0)=-4$ en $x=0$ hay un máximo

$f''(-1)=12-4=8$ en $x=-1$ hay un mínimo

$f''(1)=12-4=8$ en $x=1$ hay un mínimo

la gráfica es:



Vamos a resolver algunos problemas donde se requiere que alguna cantidad sea maximizada o minimizada, la cual se presenta como una función, aun cuando cada problema tiene característica únicas seguiremos un procedimiento, que consta de los siguientes pasos:

1) Asigne símbolos que representen a las variables del problema. Si es posible, utilice una figura para ayudarse.

2) Determine las relaciones entre estas variables.

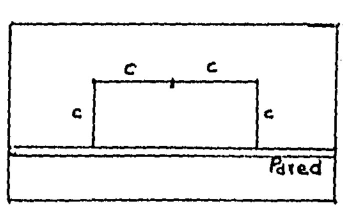
3) Identifique la cantidad para la cual se va a encontrar un máximo o mínimo relativo.

4) Exprese la cantidad que ha de ser optimizada como una función de las variables.

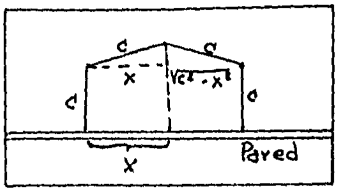
5) Aplique a esta función las técnicas para determinar el máximo o mínimo.

Ejemplo 1.- Un fabricante hace corralitos para bebés cuya construcción flexible permite que se ensamblen los cuatro lados cada lado es de una longitud c y normalmente tiene una forma cuadrada.

Al colocar el corralito para bebé como se muestra en la figura, el área cercada es $2c^2$, la cual dobla el área de juego del niño. ¿Existe otra forma geométrica con la cual se logre un área mas grande, que el doble del área de juego del niño con la condición de que el corralito forme ángulos rectos con una pared?.



Puesto que el corralito para bebés debe estar dispuesto en ángulos rectos contra la pared, las formas geométricas posibles dependen de la longitud de la pared que se utilice como quinto lado para el corralito.



Sea x la mitad de la longitud de la pared utilizada como quinto lado. El área de juego A es una función de x y es la suma de dos rectángulos (con lados c y x) y dos triángulos rectos (de hipotenusa c y base x). Entonces, la cantidad que se ha de maximizar es:

$$A(x) = 2cx + x\sqrt{c^2-x^2}\ ,\ 0 \le x \le c$$

Para calcular el área máxima, se observa que:

$$A'(x) = 2c + \sqrt{c^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}$$

$$= \frac{2c\sqrt{c^2-x^2} + c^2 - 2x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}$$

Los valores críticos obedecen a:

$$2c\sqrt{c^2-x^2} + c^2 - 2x^2 = 0$$

$$2c\sqrt{c^2-x^2} = 2x^2 - c^2$$

$$4c^2(c^2-x^2) = 4x^4 - 4c^2x^2 + c^4$$

$$4x^4 = 3c^4$$

$$x^4 = c^4\frac{3}{4}$$

$$x = .931c$$

Calculamos la segunda derivada de A

$$A'(x) = \frac{-x}{\sqrt{c^2-x^2}} - \left[\frac{2x(c^2-x^2)+x^3}{(c^2-x^2)^{3/2}}\right] = \frac{-3xc^2+2x^3}{(c^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x(2x^2-3c^2)}{(c^2-x^2)^{3/2}}$$

$$A''(\sqrt[4]{(3/4)}c) = \frac{\sqrt[4]{(3/4)}c(2(\sqrt[4]{(3/4)}c)^2-3c^2)}{(c^2(1-\sqrt{3/4}))^{3/2}} < 0 \quad \text{hay un máximo}$$

Se calcula A(x) en los puntos extremos x=0, x=c y en el valor crítico x=.931c

$$A(0) = 0$$

$$A(c) = 2c^2$$

$$A(.931c) = 2.20c^2$$

Así, una pared de longitud 1.862c maximizará el área.

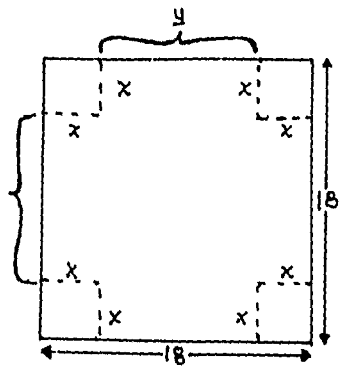
Entonces la forma geométrica que se presenta en la segunda figura, aumenta el área de juego en cerca de un 10 por ciento (de 2 a 2.20)

Ejemplo 2.- De cada esquina de una pieza cuadrada de una hoja de metal de 18 pulgadas de lado, quite un pequeño cuadrado de x pulgadas de lado y de la vuelta a los bordes, de manera que se forme una caja abierta.¿Cúal debe ser la dimensión x del corte para maximizar el volumen de la caja?

La cantidad que se ha de maximizar es el volumen representemoslo por V y a las dimensiones del lado del pequeño cuadrado por x tal como se representa en la figura. Aunque el área de la hoja de metal es fija, los lados del cuadrado pueden modificarse de manera que estos se consideran como variables, sea y la porción que se deja después de cortar las x para hacer el cuadrado, se tiene entonces y=18-2x

La altura de la caja es x mientras que el área de la base de la caja es y^2. Por tanto el volumen V queda expresado por:

$V=xy^2$



Puesto que se tiene una función de dos variables, se necesita reducirla a una de una variable, se hace esto sustituyendo y en la fórmula de volumen. Esto da $V=x(18-2x)^2$

En este ejemplo, la funcion que ha de ser maximizada, es :

$$V=x(18-2x)^2$$

y tiene como dominio el conjunto de los números reales. Sin embargo, físicamente los únicos valores de x que tienen sentido son aquellos están entre 0 y 9. Entonces, se debe encontrar el máximo absoluto de:

$$V= x(18-2x)^2 \quad \text{en} \qquad 0\le x\le 9$$

Para encontrar el valor de x que maximiza a V se deriva y se encuentran los valores críticos, si los hay.

$$V'(x)= (18-2x)^2+2x(18-2x)(-2)$$

$$= (18-2x)(18-6x)$$

Se hace $V'(x)=0$ y se resuelve para x

$$(18-2x)(18-6x)=0$$

$$18-2x=0 \quad \text{ó} \quad 18-6x=0$$

$$\boxed{x=9} \qquad\qquad \boxed{x=3}$$

Ahora se calcula la segunda derivada y se evalua en los puntos encontrados

$V''(x)=-2(18-6x)-6(18-2x)=24x-144$

$V''(9)=72>0$ hay mínimo $\quad V''(3)=-72<0$ hay máximo

en $x=3$ V logra su máximo absoluto.

El volumen máximo es entonces:

$$V=3(18-6)^2 = 432 \text{ pulgadas cúbicas}$$

las dimensiones de la caja son una base cuadrada de 12 pulgadas de lado y altura 3 pulgadas.

Recordemos el ejemplo 2 del capitulo I que decía:

Ejemplo 3.- Una compañía manufacturera había comprado una máquina cuya producción representa ganancias en un tiempo t, de: $G(t)=-t^2+3t+18$ donde G(t) estaba en unidades de 10,000 pesos y t está en años, donde quedo la siguiente pregunta por contestar. ¿En qué tiempo la máquina da un máximo de ganancias netas?

Si observamos la gráfica de G(t) veremos que el máximo de estas ganancias, está entre el primero y el segundo año. Para saber el tiempo exacto en el cual tenemos la máxima ganancia debemos obtener las coordenadas del punto mas alto de nuestra curva

$$G'(t)=-2t+3=0$$

Despejando $-2t=-3$

$$t=-3/-2$$

entonces $t=3/2$ es el único punto crítico

$G''(t)=-2$

$G''(3/2)=-2 \quad -2<0$

entonces G tiene un máximo en $t=3/2$.

La ganancia máxima es, $G(3/2)=-(3/2)^2+3(3/2)+18 = 81/4$

es decir la ganancia en pesos es:

$(81/4)(10\ 000) = \$202\ 500$

BIBLIOGRAFIA

- SESTIER
  HISTORIA DE LAS MATEMATICAS
  LIMUSA

-CRUSE/LEHMAN
 LECCIONES DE CALCULO I
 INTRODUCCION A LA DERIVADA
 FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO (1982)

-HISTORIA DE LAS MATEMATICAS
 JEAN PAUL COLLETTE
 SIGLO VEINTIUNO EDITORES

-LUZ MARIA RANGEL
 FUNCIONES Y RELACIONES
 TRILLAS

-GOLDSTEIN/ LAY/ SCHNEIDER
 CALCULO Y SUS APLICACIONES
 PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA (1990)

-MIZRAHI/ SULLIVAN
 CALCULO CON APLICACIONES A LA ADMINISTRACION, ECONOMIA, Y BIOLOGIA
 UTEHA (1985)

-KEEDY/BITTINGER
 ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA
 FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO (1981)

-PURCELL/ VARBERG
 CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA
 PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA (1987)

-LEITHOLD
 EL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA
 HARLA (1982)