



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

7
2E

PROBLEMAS COMBINATORIOS
SOBRE CONJUNTOS FINITOS DE PUNTOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICO

PRESENTA:

BERNARDO MANUEL ABREGO LERMA



MEXICO, D.F.

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS
REGION ESCOLAR

1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron EL pasante(s) BERNARDO MANUEL ÁBREGO LERMA

con número de cuenta 9251951-2 con el Título:

PROBLEMAS COMBINATORIOS SOBRE

CONJUNTOS FINITOS DE PUNTOS

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en C.	JOSE ANTONIO	GOMEZ ORTEGA	
Director de Tesis DR.	VICTOR	NEUMANN LARA	
DR.	JORGE LUIS	AROCHA PEREZ	
DR.	LUIS	MONTEJANO PEIMBERT	
Suplente DR.	ALEJANDRO	ILLANES MEJIA	
Suplente			

**Problemas Combinatorios sobre Conjuntos
Finitos de Puntos**

**Bernardo Manuel Ábrego Lerma
Facultad de Ciencias U.N.A.M**

Abril 1995

Contenido

1	Introducción	5
2	Problemas Tipo Sylvester	9
2.1	Introducción	9
2.2	Las Demostraciones del Teorema de Sylvester	10
2.3	Problemas Relacionados	15
2.4	Otros Problemas Tipo Sylvester	18
3	Distancias en Conjuntos Finitos	23
3.1	Introducción	23
3.2	Distancias Máximas	24
3.2.1	Características de los Conjuntos donde se Alcanza la Igualdad	26
3.2.2	Dimensiones Mayores	30
3.3	Distancias Mínimas	30
3.4	Distancias Unitarias	32
3.4.1	Dimensiones Mayores	35
3.5	Distancias Diferentes	36

2 Contenido

3.5.1	Distancias Diferentes en Polígonos Convexos	42
3.5.2	Conjuntos en Posición General	52
3.6	Notas	54
3.6.1	Distancias Máximas y Mínimas	54
3.6.2	Distancias Unitarias	54
3.6.3	Distancias Diferentes	55
4	Triángulos Congruentes	57
4.1	El Problema	57
4.2	Cotas sobre la Cantidad de Puntos	58
4.3	Cotas más Precisas	59
4.3.1	Caso 1	61
4.3.2	Caso 2	64
4.3.3	Caso 3	70
4.4	Clasificación de las Configuraciones	75
4.4.1	Conjuntos de Cuatro Puntos	76
4.4.2	Conjuntos de Cinco Puntos	77
4.4.3	Conjuntos de Seis Puntos	81
4.4.4	Conjuntos de Siete Puntos	85
5	Triángulos Semejantes	87
5.1	El Problema	87
5.2	Clasificación de los Conjuntos con 4 Puntos	89

5.2.1	Casco Convexo Triángulo	91
5.2.2	Casco Convexo Cuadrilátero	92
5.3	Clasificación de los Conjuntos con 5 Puntos	94
5.3.1	Casco Convexo Triángulo	97
5.3.2	Casco Convexo Cuadrilátero	114
5.4	Conjuntos Grandes	136
5.5	Triángulos Equiláteros	140
6	Número de Triángulos Equiláteros	143
6.1	Introducción	143
6.2	El Problema	144
6.3	Cotas Sencillas	144
6.3.1	Una Cota Inferior	144
6.3.2	Una Cota Superior	146
6.4	Una Mejor Cota Inferior	146
6.4.1	Hexágonos Regulares	147
6.4.2	Círculos	154
6.5	Una Mejor Cota Superior	162
6.6	Dimensiones Mayores	171
A	Ecuaciones Diversas	175
A.1	El Heptágono Regular	175
A.2	El Valor de γ	175

4 Contenido

A.3	Las Ecuaciones del Capítulo 5	176
A.3.1	El Sistema de II.3.b.ii.B	176
A.3.2	El Sistema de IV.2.b	177
A.3.3	El Intervalo de Soluciones en IV.3.b	178
A.3.4	El Sistema de V.2.b.i.A	178
A.3.5	El Sistema de V.2.b.i.B	179
A.3.6	Los Sistemas de V.2.b.ii	180
B	Triángulos Cubrientes	183
	Bibliografía	185

Introducción

Durante la última mitad del presente siglo ha surgido una dirección nueva dentro de la investigación en Geometría: La Geometría Combinatoria, el estudio de *problemas de optimización* acerca de conjuntos *finitos* de puntos o figuras (en su mayoría convexas), es decir problemas sobre configuraciones finitas de puntos o figuras que son en cierto sentido óptimas o suficientemente buenas.

El nacimiento de la geometría combinatoria ocurre en la década de los cuarentas y cincuentas con la aparición de los artículos [Er4] y [Had]. El primero de ellos se debe al gran matemático húngaro Paul Erdős quien ha contribuido en gran medida al desarrollo de esta nueva geometría (para dar una idea de esto basta decir que ha publicado a lo largo de su vida más de 40 artículos al respecto, muchos de ellos con problemas propuestos por él que han resistido hasta la fecha los embates de los mejores matemáticos del mundo), el segundo, escrito por el matemático suizo Hugo Hadwiger es la primera publicación donde se utiliza como tal el término "Geometría Combinatoria". Desde entonces a la fecha ha habido un crecimiento explosivo en la materia (comparable al que han tenido la Combinatoria y la Teoría de las Gráficas), al grado de haber más de 3000 publicaciones al respecto.

Los objetivos fundamentales del presente trabajo son dos: Por una parte el estudio de problemas *tipo Sylvester* (capítulos 1, 4 y 5) que, aunque el primero de éstos tuvo su origen hace más de cien años, han servido para generar decenas de trabajos recientes de investigación, por otra parte el análisis e investigación sobre problemas de optimización en conjuntos *finitos* de puntos (capítulos 3 y 6).

Aunque pudiera parecer que estas dos partes son aisladas entre sí se puede observar que algunos de los resultados de una parte dependen de la otra e inversamente.

La tesis se encuentra dividida en seis capítulos. En el capítulo 2 se estudia con detenimiento el Teorema de Sylvester; uno de los problemas de más tradición dentro de la geometría combinatoria (data del siglo pasado y fue clasificado varias veces, junto con el Teorema de los cuatro colores, como un problema de fácil planteamiento y solución aparentemente imposible, [K1]). Además de exponer múltiples demostraciones, se encuentran resultados con interés propio que son consecuencia inmediata del citado Teorema. Por otro lado se estudian diversos problemas que conservan el espíritu de planteamiento y que son igualmente interesantes, varios de éstos constituyen el objetivo fundamental de los capítulos 4 y 5.

El capítulo 3 se encarga del estudio de problemas combinatorios sobre configuraciones de puntos en el plano (o en E^d) que son óptimas en un cierto sentido (por ejemplo determinan el menor número posible de distancias entre pares de puntos o el mayor número de distancias máximas). Los resultados que se han obtenido para este tipo de problemas son, en el mejor de los casos, asintóticamente precisos, en algunos de ellos es inclusive complicado determinar valores exactos para conjuntos pequeños. La dificultad fundamental de lo anterior consiste en la falta de configuraciones simétricas con un gran número de objetos, aún cuando la búsqueda de éstas ha sido motivada por ciencias nuevas, como la *Teoría de Códigos* y la *Cristalografía*. En este sentido se distinguen por su precisión los resultados sobre distancias máximas (sección 3.2), distancias mínimas (sección 3.3) y distancias diferentes en polígonos convexos (sección 3.5.1). Numerosos resultados en éstas secciones, además de ser interesantes por sí mismos, son de gran utilidad para los fines del capítulo 4.

El capítulo 4 se encarga de resolver uno de los problemas de tipo Sylvester acerca de triángulos congruentes a uno dado. En el transcurso del mismo se completa exitosamente esta tarea, es decir se demuestra afirmativamente el problema exceptuando un número finito de casos que son clasificados totalmente. Posteriormente, en el

capítulo 5 se estudia la generalización natural del problema anterior, pero para triángulos semejantes a uno dado, del cual se obtienen solamente resultados parciales: se clasifican totalmente las excepciones con 4 puntos y casi en su totalidad las de 5 puntos, se encuentran excepciones con un número elevado de puntos y se resuelve totalmente el problema cuando el triángulo en cuestión resulta ser equilátero.

Todos los resultados, tanto problemas como soluciones, tratados en estos dos capítulos constituyen trabajo original de investigación y no se encuentran plasmados en ninguna de las publicaciones consultadas. Entre éstos sobresale la técnica de demostración del Teorema 19, pues ha probado tener aplicaciones a problemas de otra índole.

El capítulo 6 se encarga de determinar el número máximo de triángulos equiláteros que pueden determinar n puntos en el plano. Este problema ha sido planteado en diferentes ocasiones por diversos especialistas en el área ([Er5], [CFG]). En el transcurso del capítulo se resuelve asintóticamente el problema e incluso se demuestra que el orden correcto de estimación es cuadrático en n . Además se refinan considerablemente las cotas superior e inferior de la constante del término cuadrático (la mejor cota superior que se encuentra resulta de las técnicas de demostración del Teorema 19). Este capítulo constituye tal vez la parte más importante de la tesis y al igual que en los capítulos anteriores el trabajo es original en su totalidad y no se encuentra reportado en las referencias consultadas.

Finalmente, al final de la tesis se encuentran un par de apéndices que tratan con ciertas cuestiones técnicas, fundamentalmente de los capítulos 4 y 5.

Las definiciones y teoremas que se encuentran en el trabajo están numeradas en orden secuencial, la numeración de las proposiciones depende del capítulo en que se encuentran y la de los lemas y corolarios, de los teoremas o proposiciones a los que contribuyen.

Problemas Tipo Sylvester

2.1 Introducción

“Considérese un conjunto finito de puntos en el plano con la propiedad de que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera contiene a un tercero. ¿Deberán estar todos los puntos sobre una misma recta?”

Hace más de cien años Sylvester ([Sy], 1893) propuso este problema. En aquella época no se encontró ninguna solución satisfactoria y el problema pareció ser relegado al olvido. Cuarenta años después (1933) Paul Erdős lo saca a la luz como una conjetura en su forma contrapuesta:

“Si un conjunto finito de puntos en el plano no está sobre una línea recta entonces hay una recta que pasa por exactamente dos puntos”.

Erdős [Er2] en 1982 escribió al respecto *“esperaba que el problema fuera sencillo, pero para mi gran sorpresa y desencanto no pude encontrar una demostración, le conté este problema a Gallai quien muy pronto encontró una demostración ingeniosa”*. En 1943 Erdős [Er1] propuso el problema en “The American Mathematical Monthly” aún sin saber que ya había sido propuesto cincuenta años antes y al año siguiente apareció impresa la primera solución del mismo por Gallai [Ga]. Desde entonces a la fecha se han encontrado muchas demostraciones más de diversa índole.

Ejemplos simples muestran que la misma pregunta es falsa en el plano complejo proyectivo [Co], así como en las geometrías finitas, donde cada recta contiene el mismo número de puntos. Kelly y Moser

en [KM] afirman que la respuesta afirmativa a la pregunta depende fuertemente de los axiomas de orden.

Referencias extensas de la literatura que ha surgido a partir de este problema se pueden encontrar en [BM].

En la siguiente sección se expondrán algunas de las demostraciones que hay del ahora Teorema de Sylvester-Gallai. Posteriormente se demostrará una variación del mismo para puntos coloreados y se expondrán un par de resultados interesantes que dependen directamente del citado Teorema. Finalmente se estudiarán algunos problemas que tienen un planteamiento similar al del Teorema en cuestión, algunos de estos se desarrollarán de forma más extensiva en Capítulos subsecuentes y solo son brevemente mencionados en éste.

2.2 Las Demostraciones del Teorema de Sylvester

Sea P un conjunto finito de puntos en el plano

Definición 1 *Se llamará recta conectora a aquella que una dos puntos de P y recta ordinaria a aquella que pase por exactamente dos puntos de P .*

En función de la definición anterior el Teorema de Sylvester es el siguiente:

Teorema 1 (Gallai) *Cualquier conjunto finito P de puntos no todos colineales determina al menos una recta ordinaria.*

Demostración 1 (Gallai, [Ga]).

Escójase un punto $p_1 \in P$. Si p_1 cae en alguna recta ordinaria el Teorema es cierto, por lo tanto se supondrá que p_1 no cae en ninguna recta ordinaria. Ahora proyéctese p_1 a algún punto al infinito (nótese que las proyecciones preservan las relaciones de incidencia) y

considérese el conjunto de rectas conectoras que pasan por p_1 ; todas éstas son paralelas entre sí y cada una de ellas contiene por lo menos dos puntos de P además de p_1 . El resto de rectas conectoras (las que no pasan por p_1) son transversales a las anteriores y por tanto forman un cierto ángulo con el haz de rectas paralelas por p_1 . Sea s la recta transversal conectora que forma el menor de dichos ángulos (ésta existe, pues sólo hay un número finito de rectas conectoras, Fig. 2.1 A). Supóngase que s tiene por lo menos tres puntos de P ; p_2 , p_3 y p_4 , y además p_3 está entre p_2 y p_4 (Fig. 2.1 B). La recta conectora por $p_1 p_3$ no es ordinaria, por tanto contiene algún otro punto $p_5 \in P$ y entonces alguna de las rectas $p_2 p_5$ ó $p_4 p_5$ formaría un ángulo menor con el haz de paralelas que el que forma s . Por lo tanto s tiene exactamente dos puntos de P , es decir, es ordinaria como se quería demostrar. \square

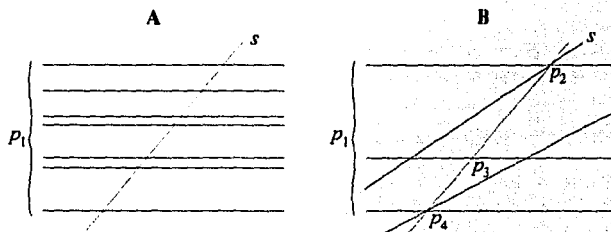


FIGURA 2.1. Primera demostración del Teorema de Sylvester.

La siguiente prueba es particularmente simple y totalmente euclideana.

Demostración 2 (Kelly, [Cr]).

Sea P un conjunto finito de puntos no todos colineales y sea S el conjunto de rectas conectoras determinadas por P . Por cada punto $p \in P$ y cada recta $s \in S$ que no pase por p sea $d(p, s)$ la distancia euclideana de p a s . El conjunto de todas estas distancias es finito, ya que tanto P como S lo son; por lo tanto hay una de éstas que

cumple ser la menor. Sea $p^* \in P$ y $s^* \in S$ una pareja que realice dicha distancia mínima y sea q el pié de la perpendicular a s^* por p^* . Se afirma que s^* es ordinaria, ya que de lo contrario s^* contendría al menos tres puntos de P , de los cuales por lo menos dos caerían en un mismo semiplano determinado por p^*q . Sean estos puntos p_1 y p_2 con p_1 entre q y p_2 (Fig 2.2 A) o $p_1 = q$ (Fig 2.2 B). En ambos casos la distancia de p_1 a la recta conectora p^*p_2 es menor que $d(p^*, s^*)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto s^* es ordinaria y el Teorema queda demostrado. \square

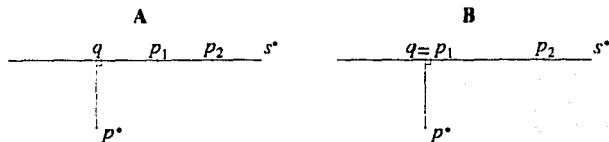


FIGURA 2.2. Segunda demostración del Teorema de Sylvester.

Demostración 3 (Steinberg, [Ste]).

Sea P un conjunto de puntos no todos colineales y sea S el conjunto de rectas conectoras determinadas por P . Sea $p \in P$, si p cae en alguna recta ordinaria el Teorema queda probado, por lo tanto se supondrá que p no cae en ninguna recta ordinaria. Sea l una recta por p que no pase por ningún otro punto de P , las rectas en S que no pasan por p intersectan a l en los puntos x_1, x_2, \dots, x_k . Supóngase sin perder generalidad que el segmento px_1 no contiene a ningún otro x_i (Fig 2.3 A). Sea $s \in S$ una recta que pase por x_1 (Fig 2.3 B), entonces s es ordinaria, pues de lo contrario habría tres o más puntos de P en s . Sean estos puntos p_1, p_2 y p_3 de tal forma que p_1 y x_1 queden separados por p_2 y p_3 (Fig 2.3 C). La recta conectora pp_1 contiene otro punto de P (recuérdese que p no cae en ninguna recta ordinaria), sea este punto p_4 , ahora alguna de las rectas conectoras p_2p_4 ó p_3p_4 intersectaría a l en el segmento "prohibido" px_1 lo cual es una contradicción. Por lo tanto s es ordinaria y el Teorema queda demostrado. \square

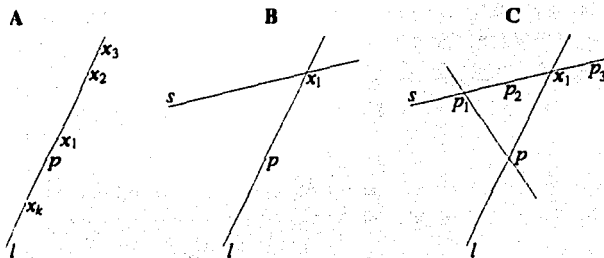


FIGURA 2.3. Tercera demostración del Teorema de Sylvester.

Esta demostración tiene la virtud de ser una prueba elemental pues, al igual que el planteamiento del Teorema, solamente utiliza el concepto de incidencia de puntos y rectas. A diferencia de las demostraciones 1 y 2 en las que se usa el concepto de ángulo y distancia respectivamente.

La prueba que sigue muestra como el Teorema de Sylvester se deduce a partir de un hecho conocido sobre mapas en la esfera.

Demostración 4 (Steenrod).

Se demostrará primero la siguiente Proposición acerca de mapas en la esfera: Dado un mapa finito en la esfera donde cada cara tiene tres o más lados existe un vértice con valencia menor que seis (la valencia de un vértice es el número de aristas que inciden en él).

Si V denota el número de vértices del mapa, A el número de aristas, y C el número de caras se tiene la relación de Euler

$$V - A + C = 2 \quad (2.1)$$

Ahora, como cada cara tiene por lo menos tres aristas y cada arista está en exactamente dos caras se tiene que

$$3C \leq 2A \quad (2.2)$$

Supóngase que la valencia de cada vértice es mayor o igual que seis. Como cada arista contiene exactamente dos vértices, entonces

$$6V \leq 2A \quad (2.3)$$

De (2.1), (2.2) y (2.3) se sigue que

$$12 = 6(V - A + C) = 6V - 6A + 6C \leq 2A - 6A + 4A = 0$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe algún vértice con valencia menor que seis.

Piénsese el Teorema de Sylvester en el plano proyectivo y en su forma dual, es decir: Dado un conjunto de rectas en el plano proyectivo no todas concurrentes existe un punto que cae precisamente en dos rectas. Considérese ahora el plano proyectivo como una esfera identificando antípodas y obsérvese que la identificación no contribuye en nada al problema; el planteamiento equivalente queda como sigue: Dado un número finito de círculos máximos en la esfera no todos concurrentes existe un punto que cae exactamente en dos círculos. De ser falso el enunciado anterior los círculos máximos generarían un mapa en la esfera donde cada vértice caería por lo menos en tres círculos máximos, es decir, cada vértice tendría valencia por lo menos seis; esto último es imposible como se demostró anteriormente. Por lo tanto el enunciado es cierto y el Teorema queda demostrado. \square

2.3 Problemas Relacionados

A continuación se resolverá una variante del Teorema de Sylvester cuando los puntos en cuestión son coloreados con dos colores, para ello se seguirán las ideas de Chakerian quien utiliza un enfoque similar al de la última demostración.

Teorema 2 *Si P es un conjunto finito de puntos en el plano que están coloreados con dos colores y que no están sobre una línea recta, entonces hay una recta conectora que cumple que todos los puntos de P que caen sobre ella son del mismo color.*

Demostración. (Chakerian,[Cha])

Se demostrará primero el siguiente Lema, atribuido a Cauchy, quien lo uso para demostrar su famoso Teorema de rigidez para poliedros convexos.

Lema 2.1 (Cauchy) *Dado un mapa en la esfera donde cada cara del mismo tiene por lo menos 3 lados es imposible etiquetar las aristas del mismo con signos $+$ y $-$ de forma que el número de cambios de signo alrededor de cada vértice sea por lo menos 4.*

Demostración.

Un cambio de signo es simplemente un par de aristas adyacentes con signos diferentes.

Supóngase que se tiene un mapa en la esfera donde cada cara del mismo tiene por lo menos 3 lados. Supóngase además que las aristas están etiquetadas de forma que el número de cambios de signo alrededor de cada vértice es por lo menos 4. Sean V , A , y C como en la demostración 4 y sea N la suma del número de cambios de signo alrededor de cada uno de los vértices del mapa. En vista de que el número de cambios de signo alrededor de cada vértice es por lo menos 4 se tiene que

$$N \geq 4V \quad (2.4)$$

Sea C_k el número de caras del mapa que tienen exactamente k lados. Nótese que al sumar sobre todas las caras el número de cambios de signo alrededor de cada una se obtiene N . Ahora, como el número de cambios de signo alrededor de una cara de k lados es par y a lo más k se obtiene

$$N \leq 2C_3 + 4C_4 + 4C_5 + 6C_6 + 6C_7 + \dots \quad (2.5)$$

Por el mismo argumento que se usó para obtener (2.2) se obtiene

$$2A = 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \dots \quad (2.6)$$

Utilizando (2.1) y (2.6), y luego (2.4) y (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned} 4V - 8 &= 4A - 4C = 2(3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \dots) - 4(C_3 + C_4 + \dots) \\ 4V - 8 &= 2C_3 + 4C_4 + 6C_5 + \dots \geq N \geq 4V \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto el Lema queda demostrado. \square

Ahora de la misma forma que en la demostración 4, después de dualizar y transferir el problema a la esfera, el enunciado equivalente es el siguiente: Dado un número finito de círculos máximos en la esfera cada uno de ellos coloreado rojo o azul y no todos concurrentes, existe un punto que cae en por lo menos dos círculos y además todos los círculos que pasan por él son del mismo color.

De ser falso este enunciado etiquétese a las aristas del mapa que resulta en la esfera con $+$ si la arista en cuestión forma parte de un círculo rojo y con $-$ si forma parte de uno azul. Como cada vértice del mapa tiene círculos rojos y azules que pasan por él, entonces hay por lo menos cuatro cambios de signo alrededor de cada vértice; lo cual contradiría al Lema 2.1. Por lo tanto el enunciado es verdadero y el Teorema queda demostrado. \square

La siguiente Proposición es una consecuencia inmediata del Teorema de Sylvester que ha sido el punto de partida de muchas preguntas interesantes al respecto.

Proposición 2.1 *Para cualquier conjunto no colineal de n puntos hay uno de ellos que está en por lo menos \sqrt{n} rectas conectoras.*

Demostración.

Sea S el conjunto en cuestión, denótese m al máximo número de rectas conectoras que pasan por algún punto de S y k al número máximo de puntos de S que están sobre alguna recta conectora.

Como para cualquier recta conectora L y para cualquier punto $q \in S \setminus L$ las rectas que conectan a q con los puntos de $S \cap L$ son distintas entonces $m \geq k$.

Sea p un punto de S que esté en m rectas conectoras. Como $k \leq m$ cada recta incidente a p pasa por a lo más $m - 1$ puntos adicionales de S . Pero cada punto de S cae en alguna de estas rectas, por lo tanto $n \leq m(m - 1) + 1$. De aquí se sigue que $m \geq \sqrt{n}$. \square

La siguiente conjetura es una versión más fuerte del Teorema anterior:

Conjetura 1 *Si n puntos en el plano no son todos colineales entonces alguno de ellos debe caer en por lo menos $\frac{1}{3}n$ rectas conectoras.*

Dirac [Di] propuso este problema reemplazando $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$, pero Grünbaum [Gr2] encontró algunos ejemplos que prueban que $\frac{1}{2}$ no funciona para todas las n , aún así es probable que funcione para n suficientemente grande. Fue Erdős [Er3] el primero que sugirió la dificultad de establecer cualquier cota inferior de la forma cn , con c constante positiva. La mejor cota hasta el momento es $c = 10^{-32}$ obtenida por Clarkson, Edelsbrunner y otros [CEGSW]. Éste es uno de los ejemplos más famosos que muestra la dificultad que hay para

encontrar resultados precisos sobre incidencia de puntos y rectas. Para terminar esta sección se discutirá un resultado que es una excepción en este sentido, es decir, un resultado preciso sobre incidencia de puntos y rectas que se obtiene a partir de un argumento sencillo; de hecho el siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema de Sylvester.

Proposición 2.2 *n puntos no colineales determinan por lo menos n rectas conectoras.*

Demostración.

Si $n = 3$ el resultado obviamente es cierto, supóngase que el enunciado es falso para algún conjunto S con $n \geq 4$ elementos, supóngase sin perder generalidad que S es el más pequeño de todos los conjuntos que no cumplen el resultado.

Por el Teorema de Sylvester hay una recta l que contiene exactamente dos puntos p y q de S . Si $S \setminus \{p\}$ es colineal tendríamos $n - 1$ rectas que pasan por p más la recta que contiene a $S \setminus \{p\}$ y entonces el resultado es cierto. Si $S \setminus \{p\}$ no fuera colineal mejor aún, pues entonces $S \setminus \{p\}$ tendría por lo menos $n - 1$ rectas (S era el mínimo que podía tener menos rectas conectoras que su tamaño) y como la recta l es ordinaria no coincide con ninguna de éstas. \square

Esta última Proposición es precisa, pues $n - 1$ puntos sobre una recta y un punto fuera de la misma determinan exactamente n rectas conectoras.

2.4 Otros Problemas Tipo Sylvester

Sea R una propiedad sobre conjuntos del plano y sea S una colección de subconjuntos de \mathbf{E}^2 (el plano euclideo), tal que cualquier conjunto P de n puntos que cumpla R está en algún elemento de S .

Ejemplos:

1) $R = \emptyset$, S el conjunto de todas las rectas del plano y $n = 2$ (i.e. cualquier conjunto de dos puntos determina exactamente una recta).

2) R la propiedad de no tener ternas colineales, S el conjunto de todas las circunferencias en el plano y $n = 3$ (i.e. cualquier conjunto de tres puntos no colineales determina exactamente una circunferencia).

Bajo estas consideraciones se puede plantear el siguiente problema:

Problema: Sea P un conjunto finito de puntos en el plano que cumpla R y que además para cada subconjunto de n puntos de P hay otro punto, de forma que los $n + 1$ estén contenidos en algún elemento de S . ¿Será cierto que todo P está contenido en un solo elemento de S ?

Nótese que si R , S y n son como en el ejemplo 1 entonces el Problema resulta ser el Teorema de Sylvester. Si R , S y n son como en el ejemplo 2 el problema es cierto y Motzkin [Mot] fué el primero en dar cuenta del hecho, el problema con S el conjunto de cónicas no degeneradas (elipses e hipérbolas), $n = 5$ y R cierta propiedad que garantice que cualesquiera cinco puntos estén contenidos en una cónica, fué resuelto por Wiseman y Wilson [WW]; mientras que el problema con S el conjunto de parábolas, $n = 4$ y R cierta propiedad análoga permanece abierto. A continuación se resolverá el problema con R , S y n como en el ejemplo 2.

Teorema 3 (Motzkin, [Mot]): Para cualquier conjunto finito de puntos no tres de ellos colineales y no todos sobre una circunferencia hay una circunferencia que pasa por exactamente tres de ellos.

Demostración.

Sea P un conjunto finito de puntos en \mathbf{E}^2 , $|P| \geq 4$ (para evitar que el conjunto esté sobre una circunferencia). Sea C el conjunto

de todas las circunferencias determinadas por ternas de P . Tómesse $p \in P$ y sea $C_p \subseteq C$ las circunferencias de C que además pasan por p (Fig 2.4), obsérvese que $P \subseteq C_p$ y que además todo punto de P es intersección de por lo menos dos circunferencias de C_p . Inviértase el plano con respecto a alguna circunferencia arbitraria con centro en p (Fig 2.4). Sean P' y C'_p las imágenes de P y C_p bajo la inversión. Como C_p es un conjunto de circunferencias que pasan por el centro de inversión, entonces C'_p es un conjunto de rectas que coincide con ser el conjunto de rectas conectoras determinadas por P' ; por lo tanto por el Teorema de Sylvester existe $c' \in C'_p$ que contiene sólo dos puntos de P' y entonces c (la imagen inversa de c') es una circunferencia que pasa por p y por únicamente otros dos puntos de P . Quedando así demostrado el Teorema. \square

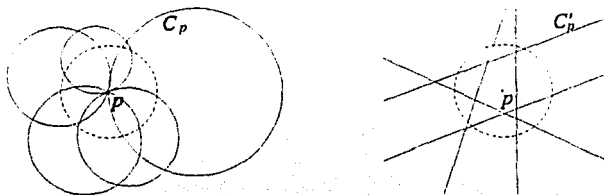


FIGURA 2.4. C_p se transforma en un conjunto de rectas bajo la inversión.

En el transcurso del capítulo 4 se demostrará que el problema con $R = \emptyset$, $n = 2$ y S el conjunto de ternas en el plano que son vértices de triángulos **congruentes** a T (con T fijo), es cierto excepto por un número finito de casos que se estudian con detalle en el mismo capítulo. Para la extensión natural del problema, con S el conjunto de ternas en el plano que son vértices de triángulos **semejantes** a T , se encuentran todas las excepciones posibles con 4 ó 5 puntos (en la mayoría de los casos) y además se demuestra afirmativamente el problema cuando T es equilátero, todo esto en el capítulo 5.

Para terminar este capítulo se mencionará un problema de planteamiento similar propuesto por Croft [CFG, sección F10, pag. 157]:

Problema *¿Existirá un conjunto finito de puntos en el plano con la propiedad de que la mediatriz de cualesquiera dos de ellos contenga por lo menos otros dos puntos del conjunto?*

Kelly encontró un conjunto de ocho puntos (Fig 2.5) el cual consiste de los vértices de un cuadrado junto con los vértices de cuatro triángulos equiláteros, cada uno de ellos sobre un lado del cuadrado y todos apuntando hacia afuera (hacia adentro es lo mismo). ¿Qué otros conjuntos de puntos tienen esta propiedad? ¿Es ocho el máximo número posible de elementos? ¿Habrá configuraciones con por lo menos tres puntos en cada mediatriz? Todas estas preguntas carecen de respuesta hasta la fecha.

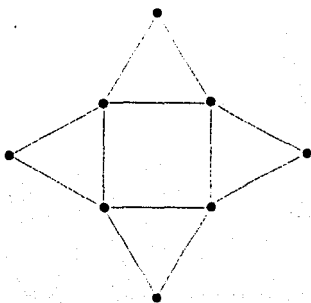


FIGURA 2.5. Un conjunto donde cada mediatriz tiene exactamente dos puntos del conjunto.

22 2. Problemas Tipo Sylvester

3

Distancias en Conjuntos Finitos

3.1 Introducción

¿Cuál es el número máximo de parejas a distancia máxima/mínima que pueden determinar n puntos? ¿Cuál es el número máximo de parejas a distancia unitaria? ¿Cuál es el mínimo número de distancias diferentes que puede determinar un conjunto finito? ¿Qué ocurre en las preguntas anteriores si se restringen a conjuntos con ciertas propiedades (polígonos convexos, conjuntos en posición general)?

Éstas y otras preguntas relacionadas se estudian en el transcurso de este capítulo. Se puede ver fácilmente que estas cuestiones son las más sencillas y naturales que se pueden plantear sobre la cantidad de configuraciones en el espacio euclideo que cumplen ciertas propiedades geométricas, sin embargo ninguna de ellas resulta ser trivial pues en el mejor de los casos se han encontrado soluciones asíntóticas y valores precisos para n pequeños.

El capítulo se divide de la siguiente manera: En las secciones **3.2**, **3.3** y **3.4** se estudian los problemas sobre el número máximo de distancias máximas, mínimas y unitarias respectivamente, en la sección **3.5** se analizará el número mínimo de distancias diferentes que pueden ocurrir en conjuntos finitos. Finalmente en la sección de notas se comentan algunos resultados sobre otras preguntas igualmente interesantes que no son tratadas en las secciones previas.

3.2 Distancias Máximas

ncias, la
más im-

El objetivo de esta sección es exponer algunos resultados acerca del número de veces que ocurre la distancia máxima en un conjunto finito de puntos. Para conjuntos en la recta la respuesta es obviamente 1, a continuación se demostrará el valor preciso para conjuntos en el plano y además se demostrarán algunas características inherentes a aquellos conjuntos que realizan la igualdad.

Definición 2 Sea P un conjunto de n puntos en el plano (de aquí en adelante se escribirá $(P : n)$ cuando se requiera precisar que P tiene n elementos). Sea $M(P : n)$ el número de parejas de P a distancia máxima. Abusando de la notación se define $M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$M(n) = \underset{(P:n)}{\text{máz}} M(P : n)$$

donde el máximo se considera sobre todos los subconjuntos del plano con n elementos.

En seguida se demostrará que $M(n) = n$ siguiendo las ideas de Pannwitz.

Teorema 4 (Pannwitz, [HP]) Si $(P : n)$ es un conjunto de puntos en el plano entonces la distancia máxima entre ellos ocurre a lo más n veces, más aun, para cada $n \geq 3$ existen conjuntos de n puntos con n segmentos a distancia máxima (i.e. $M(n) = n$).

Demostración.

Se demostrará primero el siguiente Lema.

Lema 4.1 Los segmentos de longitud máxima determinados por un conjunto finito de puntos en el plano siempre se intersectan.

Demostración.

Sea m la distancia máxima entre parejas de P . Supóngase que $A, B, C, D \in P$ son tales que $AB = CD = m$ y además AB y CD no se intersectan, entonces los cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo con AB y CD dos de sus lados. Como los ángulos internos del cuadrilátero suman 360° alguno de los ángulos internos, sin perder generalidad $\angle ABC$, es mayor o igual que 90° y por tanto la diagonal AC cumple que $AC > AB = m$ (Fig 3.1) contradiciendo el hecho de ser m la medida mayor. Por lo tanto cualesquiera dos segmentos de longitud m se intersectan. \square

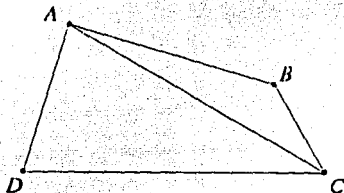


FIGURA 3.1. Dos segmentos de longitud máxima siempre se intersectan.

Ahora se demostrará el Teorema: Sea $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ un conjunto de puntos en el plano y sea m la distancia máxima entre parejas de P . Se procederá por inducción. Si $n = 2$ ó $n = 3$ el resultado es cierto.

Conéctese P_i con P_j siempre que $P_i P_j = m$. Distínganse dos casos:

1. Cada P_i está conectado con a lo más otros dos elementos de P , en este caso el número de parejas de puntos a distancia m es menor o igual que n (pues denotando x_i al número de vértices que están conectados con P_i , $M(P : n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \leq n$).
2. Alguno de los elementos de P , supóngase P_1 , está conectado con tres o más, supónganse P_2, P_3, P_4 y además $P_1 P_3$ está entre

P_1P_2 y P_1P_4 . P_3 no está conectado con ningún otro P_i , pues de estarlo P_3P_i tendría que intersectar tanto a P_1P_2 como a P_1P_4 (ya que los segmentos de longitud m se intersectan), lo cual es imposible.

Ahora aplicando la hipótesis de inducción a $P - \{P_3\}$ hay a lo más $n - 1$ distancias m y P_3 sólo contribuye con una más, por lo tanto en P hay a lo más n distancias m .

Además los vértices del polígono regular de $2n + 1$ lados y los vértices del polígono de $2n + 1$ lados con un punto más a distancia máxima de algún vértice y sobre la mediatriz de los dos vértices opuestos son ejemplos de conjuntos donde se alcanza la igualdad (Fig 3.2). □

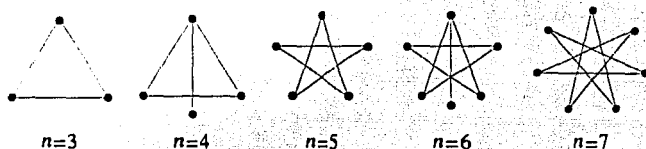


FIGURA 3.2. Configuraciones de n puntos donde la máxima distancia ocurre n veces.

3.2.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS CONJUNTOS DONDE SE ALCANZA LA IGUALDAD

En esta subsección se demuestran tres proposiciones relativas a la estructura geométrica que poseen las configuraciones óptimas del problema. Además de su interés propio, estas proposiciones serán de utilidad para los resultados del capítulo 4.

Definición 3 Sea $(P : n)$ es un conjunto en el plano. $C_C(P : n)$ denotará el número de lados del polígono que forma la envolvente conveza del conjunto.

Proposición 3.1 Si $(P : n)$ cumple ser una configuración donde la distancia máxima ocurre n veces, entonces los n puntos forman un n -ágono convexo (i.e. $Cc(P : n) = n$)

Demostración.

Supóngase $Cc(P : n) = k < n$. La distancia entre cualesquiera dos puntos del interior del polígono, o entre un punto del interior del polígono y un vértice del mismo, es menor que la distancia entre sus vértices más distantes; por lo tanto los $n - k$ puntos que están en el interior del polígono no son extremos de segmentos cuya distancia sea máxima. Por otro lado por el Teorema 4 los restantes k puntos determinan a lo más k distancias máximas, obteniéndose así una contradicción pues la distancia máxima ocurre n veces. \square

Proposición 3.2 Si $(P : 2n)$ es una configuración donde la distancia máxima ocurre $2n$ veces, entonces hay un punto de P que es extremo de exactamente un segmento de longitud máxima.

Demostración.

Debido a la maximalidad del número de segmentos máximos es necesario que cada punto sea extremo de por lo menos un segmento de longitud máxima. Sea $P = \{P_1, P_2, \dots, P_{2n}\}$, supóngase que todos los elementos de P son extremos de exactamente dos segmentos de longitud máxima. La gráfica conformada por los elementos de P como vértices y los segmentos de longitud máxima como aristas es entonces una unión finita de ciclos. Considérense los siguientes dos casos:

1. Hay algún ciclo de longitud impar. Supóngase que $P_1 P_2 \dots P_{2k+1}$ es dicho ciclo, por paridad debe existir otro ciclo de longitud impar, denótese al mismo $P_{2k+2} P_{2k+3} \dots P_{2r}$ (Fig 3.3). Supóngase sin perder generalidad que P_{2k+2} se encuentra en el semiplano inferior determinado por la recta $P_1 P_2$, por el Lema 4.1 $P_{2k+2} P_{2k+3}$ debe intersectar al segmento $P_1 P_2$ y por

lo tanto P_{2k+3} se encuentra en el semiplano superior determinado por P_1P_2 . En general, bajo el mismo argumento, P_i está en el semiplano inferior si i es par y en el superior si es impar. De esta forma P_{2r} se encuentra en el semiplano inferior y entonces los segmentos P_1P_2 y $P_{2r}P_{2k+2}$ son ajenos, contradiciendo al Lema 4.1.

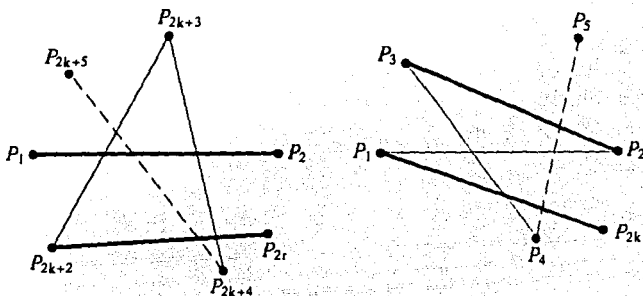


FIGURA 3.3. Proposición 3.2, Casos 1 y 2.

2. Todos los ciclos son de longitud par. Sea $P_1P_2 \dots P_{2k}$ un ciclo de longitud par. Supóngase que P_3 se encuentra en el semiplano superior determinado por la recta P_1P_2 (Fig 3.3). Análogamente al caso anterior se deduce que P_i está en el semiplano inferior si i es par y en el superior si es impar. Por lo tanto P_{2k} se encuentra en el semiplano inferior y por consiguiente los segmentos P_2P_3 y $P_{2k}P_1$ son ajenos, contradiciendo al Lema 4.1.

En ambos casos se obtiene una contradicción, lo que demuestra la Proposición. \square

Proposición 3.3 Si A, B, C, D, E es un conjunto de puntos en el plano, de forma que la distancia máxima ocurre 5 veces entonces ocurre alguna de las siguientes:

1. Tres de esos puntos forman un triángulo equilátero de lado la distancia máxima.
2. Las cinco distancias máximas son diagonales de un pentágono convexo.

Demostración.

Sea m la distancia máxima. Por la Proposición 3.1 los cinco puntos son vértices de un pentágono convexo, sea $ABCDE$ dicho pentágono. Si las cinco diagonales tienen longitud máxima no hay nada que demostrar, de no ser así supongase que $AB = m$. Por el Lema 4.1 las distancias máximas se intersectan y por lo tanto $CD \neq m$, $DE \neq m$ y $EC \neq m$ (Fig 3.4). Además por la misma razón EA y BC no pueden ser ambas de longitud m . Si ninguna de las distancias EA y BC es igual a m entonces el resto de los segmentos miden m (pues de los diez segmentos hay cinco que no miden m), por lo tanto el triángulo $\triangle DAB$ es equilátero y de lado m . Por otro lado, si $EA = m$ entonces $BC \neq m$ y $BD \neq m$. De esta forma se obtienen cinco distancias que no valen m , por lo tanto las restantes deben ser iguales a m y consecuentemente el triángulo $\triangle ABE$ es equilátero de lado m como se quería demostrar. \square

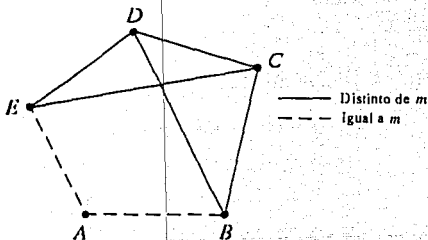


FIGURA 3.4. Proposición 3.3.

3.2.2 DIMENSIONES MAYORES

El mismo problema en dimensiones mayores a dos es sustancialmente más complicado y son muy pocos los resultados que se han obtenido.

Definición 4 Sea $(P : n)$ un conjunto en E^d . Sea $M^d(P : n)$ el número de parejas de P a distancia máxima. Abusando de la notación se define $M^d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$M^d(n) = \max_{(P:n)} M^d(P : n)$$

donde el máximo se considera sobre todos los subconjuntos de E^d con n elementos.

$M^3(n) = 2n - 2$ fue conjeturado por Pannwitz (ver Hopf y Pannwitz [HP], Sutherland [Su]) y Vázsonyi (ver [Er4]) y probado independientemente por Grünbaum [Gr1], Heppes [He] y Straszewicz [Str]. Lenz probó que $M^4(n) \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$ (Con la misma construcción de la Proposición 3.4) y Erdős [Er5] demostró que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^d(n)}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2[d/2]}$$

Encontrar los valores exactos de $M_d(n)$ para $d \geq 4$ es un problema abierto.

3.3 Distancias Mínimas

Muy poco se conoce acerca del número de veces que ocurre la distancia mínima en un conjunto finito de puntos. Para conjuntos en la recta la respuesta es obviamente $n - 1$, sin embargo para dimensiones mayores que tres es muy complicado encontrar siquiera estimaciones correctas.

Definición 5 Sea $(P : n)$ un conjunto en \mathbf{E}^d . Sea $m^d(P : n)$ el número de parejas de P a distancia mínima. Abusando de la notación se define $m^d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$m^d(n) = \max_{(P:n)} m^d(P : n)$$

donde el máximo se considera sobre todos los subconjuntos de \mathbf{E}^d con n elementos.

A continuación se demostrará que $m^2(n) \leq 3n - 6$.

Teorema 5 (Erdős, [Er4]) Para cualquier conjunto de n puntos en el plano la distancia mínima ocurre a lo más $3n - 6$ veces (i.e. $m^2(n) \leq 3n - 6$).

Demostración.

Por un argumento dual al del Lema 4.1, dos segmentos de longitud mínima no se pueden intersectar, por consiguiente la gráfica formada por los vértices del conjunto y por las aristas de longitud mínima es plana y entonces cumple con la fórmula de Euler: $n - 2 = A - C$, donde A es el número de aristas (i.e. $A = m^2(P : n)$) y C el número de regiones o caras determinadas por las aristas. Como cada cara tiene por lo menos tres aristas y cada arista está en dos caras entonces $3C \leq 2A$, de donde $3n - 6 = 3A - 3C \geq A$. \square

El valor preciso $m^2(n) = \lfloor 3n - \sqrt{12n - 3} \rfloor$ fue conjeturado por Reutter [Re], y demostrado por Harborth [Har], la igualdad ocurre en ciertos subconjuntos de la latice de triángulos equiláteros. Estos subconjuntos han sido clasificados totalmente por Kupitz [Ku].

Como menciona Erdős en [Er5] es posible demostrar que $m^3(n) < 6n$ en base a la sencilla observación de que a lo más se pueden situar 12 puntos en la esfera unitaria de forma que cada uno de ellos diste por lo menos 1 del resto, esto demuestra que $m^3(n) = O(n)$, sin embargo el valor preciso de $m^3(n)$ permanece como problema abierto.

Encontrar el valor preciso o estimaciones de $m^d(n)$ para $d \geq 4$ también es un problema abierto.

3.4 Distancias Unitarias

Después de haber investigado sobre el número máximo de parejas a distancia máxima y mínima la siguiente pregunta natural es cuestionarse por el número máximo de segmentos a distancia fija. En particular basta estudiar el problema para segmentos unitarios. Como es de esperarse el problema es mucho más complicado, pues los argumentos métricos se ven restringidos notablemente.

Definición 6 Sea $(P : n)$ un conjunto en el plano. Sea $F(P : n)$ el número de parejas de P a distancia unitaria. Abusando de la notación se dirá que $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ esta dada por:

$$F(n) = \max_{(P:n)} F(P : n)$$

donde el máximo se toma sobre todos los conjuntos de n puntos en el plano.

A continuación se demostrará que $F(n) \leq n^{\frac{3}{2}}$.

Teorema 6 (Erdős, [Er4]): n puntos en el plano determinan a lo más $n^{\frac{3}{2}}$ distancias unitarias (i.e. $F(n) \leq n^{\frac{3}{2}}$).

Demostración.

Sea $P = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto arbitrario de n puntos en el plano y sea x_i el número de distancias unitarias que parten de v_i ; supóngase sin perder generalidad que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Claramente $F(P : n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i$. Sea $a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, y sea $\varepsilon = \sqrt{n} - a$

($0 \leq \varepsilon < 1$). Como la circunferencia unitaria con centro en v_1 y la circunferencia unitaria con centro en v_2 se intersectan en a lo más dos puntos, entonces $x_1 + x_2 - 2 \leq n$. Más generalmente

$$\sum_{i=1}^j (x_1 - 2i + 2) \leq n$$

de donde

$$\begin{aligned} ax_a &\leq \sum_{i=1}^a x_i \leq n - 2a + \sum_{i=1}^a 2i = n + a^2 - a \\ &= 2n - 2\sqrt{n\varepsilon} + \varepsilon^2 + \varepsilon - \sqrt{n} \end{aligned}$$

y si $n \geq 4$ entonces $\varepsilon^2 + \varepsilon \leq \sqrt{n}$, por lo que

$$ax_a \leq \sum_{i=1}^a x_i \leq 2n - 2\sqrt{n\varepsilon}$$

de donde

$$x_a \leq \frac{2n - 2\sqrt{n\varepsilon}}{a} \leq \frac{2n - 2\sqrt{n\varepsilon}}{\sqrt{n} - \varepsilon} = 2\sqrt{n}$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^a x_i + \sum_{i=a+1}^n x_i \leq 2n - 2\sqrt{n\varepsilon} + (n-a)x_a \leq 2n^{\frac{3}{2}}$$

es decir $F(P; n) \leq n^{\frac{3}{2}}$, y por lo tanto $F(n) \leq n^{\frac{3}{2}}$. \square

Determinar el orden correcto de la función $F(n)$ es un problema muy complicado. En 1946 Erdős propuso por primera vez este problema y demostró la cota superior $n^{\frac{3}{2}}$, desde entonces las cotas superiores han sido mejoradas muy poco utilizando técnicas combinatorias en extremo complejas. Erdős obtuvo $cn^{\frac{3}{2}}$, Jozsa y Szemerédi

$o(n^{\frac{3}{2}})$ [JS], Beck y Spencer $cn^{\frac{13}{9}}$ [BS] y Spencer, Szemerédi y Trotter $cn^{\frac{3}{2}}$ [SST] la cual es la mejor cota hasta el momento, sin embargo ésta última es aún muy lejana a la esperada $cn^{1+\epsilon}$. De hecho Erdős conjetura que:

$$F(n) < n^{1+\frac{\epsilon}{\log \log n}}$$

y ha ofrecido en múltiples ocasiones \$500 por una prueba o un contraejemplo.

Al respecto de las cotas inferiores Erdős [Er4] demostró utilizando resultados clásicos de Teoría de Números acerca del número de soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = c$, que los vértices de la cuadrícula de $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ es un conjunto de n puntos en el plano en el cual alguna de las distancias entre vértices del mismo ocurre por lo menos $n^{1+\frac{\epsilon}{\log \log n}}$ veces. Aplicando una dilatación a tal conjunto de forma que la citada distancia se convierta en la unidad se demuestra que $n^{1+\frac{\epsilon}{\log \log n}} < F(n)$.

Algunos valores de $F(n)$ para n pequeños son: $F(2) = 1$, $F(3) = 3$, $F(4) = 5$, $F(5) = 7$, $F(6) = 9$, $F(7) = 12$ (Fig 3.5).

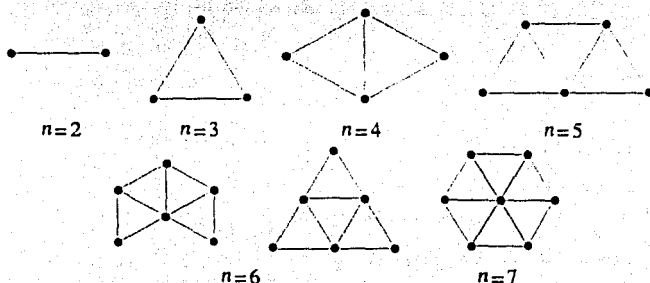


FIGURA 3.5. Configuraciones de n puntos con el máximo número posible de distancias unitarias entre parejas.

3.4.1 DIMENSIONES MAYORES

A continuación se mencionarán brevemente algunos resultados para el mismo problema en dimensiones mayores. Es interesante notar que para dimensiones mayores que tres es posible determinar el orden correcto a partir de una construcción relativamente sencilla.

Sea $(P : n)$ un conjunto de puntos en \mathbf{E}^d (Donde \mathbf{E}^d es el espacio euclideo de dimensión d)

Definición 7 Sea $(P : n)$ un conjunto en \mathbf{E}^d . Sea $F_d(P : n)$ el número de parejas de P a distancia unitaria. Abusando de la notación se dirá que $F_d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ esta dada por:

$$F_d(n) = \max_{(P:n)} F_d(P : n)$$

donde el máximo se toma sobre todos los conjuntos de n puntos en \mathbf{E}^d .

Para $d = 3$ (es decir en el espacio) las mejores cotas son:

$$c_1 n^{\frac{1}{3}} \log \log n < F_3(n) < n^{\frac{2}{3}} \beta(n)$$

donde $\beta(n)$ es una función relacionada con la inversa de Ackerman. la cual tiene la propiedad de crecer extremadamente lento.

La cota inferior fue obtenida por Erdős [Er4] igual que en el plano a partir de la latices de hipercubos. Erdős [Er4] obtuvo $cn^{\frac{1}{3}}$ como cota superior para $F_3(n)$, posteriormente Beck obtuvo $n^{\frac{2}{3} + o(1)}$ [Be], Chung $cn^{\frac{1}{3}}$ [Ch1] y finalmente Clarkson et al [CEGSW] obtuvieron $n^{\frac{2}{3}} \beta(n)$. Obtener el orden correcto de estimación parece ser mucho más complicado que encontrar el de $F_2(n)$.

Para $d \geq 4$ el mejor resultado es $F_d(n) = \frac{1}{2} n^2 \left(1 - \frac{1}{\lfloor d/2 \rfloor} + o(1)\right)$, obtenido por Erdős en [Er6] utilizando algunos teoremas clásicos

en Teoría Extrema de Gráficas [KST], [ES]. A continuación se demostrará un resultado más débil.

Proposición 3.4 Si $d \geq 4$ entonces $F_d(n) = O(n^2)$.

Demostración.

Utilizando la construcción de H. Lenz se construirá un conjunto $(P : n)$ en \mathbf{E}^d que sirva de cota inferior. Sean

$$A = \left\{ (u_i, v_i, 0, 0, \vec{0}) \in \mathbf{E}^d : 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$$

$$B = \left\{ (0, 0, u_i, v_i, \vec{0}) \in \mathbf{E}^d : 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$$

donde las parejas (u_i, v_i) son soluciones distintas de $u^2 + v^2 = \frac{1}{2}$.

La distancia entre cualesquiera dos puntos, uno en A y el otro en B es 1, por lo que $P = A \cup B$ es un conjunto de n o $n+1$ puntos en \mathbf{E}^d con más de $\frac{1}{4}n^2$ distancias unitarias, por lo tanto $F_d(n) \geq \frac{1}{4}n^2$. Por otro lado n puntos determinan por lo menos $\frac{n(n-1)}{2}$ distancias, (i.e. $F_d(n) \leq \frac{n(n-1)}{2}$) consecuentemente $F_d(n) = O(n^2)$. \square

3.5 Distancias Diferentes

En el transcurso de las secciones anteriores se han planteado problemas sobre el máximo número de parejas a "cierta" distancia que puede determinar un conjunto de n puntos. ¿Cuántos valores distintos podría tomar esa "cierta" distancia? el objetivo de esta sección es dar cabida a esta pregunta.

Definición 8 Sea $(P : n)$ un conjunto en \mathbf{E}^d . Sea $f_d(P : n)$ el número de distancias diferentes entre parejas de puntos de P . Se dice entonces (abusando de la notación) que $f_d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ está dada

por:

$$f_d(n) = \min_{(P;n)} f_d(P; n)$$

donde el mínimo se toma sobre todos los subconjuntos de E^d con n elementos.

El problema consiste en estimar o encontrar el valor exacto de $f_d(n)$ para cada n . Este problema planteado hace casi 50 años por Erdős [Er4] ha probado ser extremadamente difícil. Las mejores cotas hasta el momento son:

$$f_1(n) = n - 1$$

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\log n)^{c_1}} < f_2(n) < \frac{c_2 n}{\sqrt{\log n}}$$

$$\text{Para } d \geq 3, \quad c_d n^{\frac{1}{d}} < f_d(n) < c'_d n^{\frac{2}{d}}$$

Las cotas superiores están dadas por la latiz de hipercubos en E^d . Erdős obtuvo las cotas inferiores para $d \geq 3$, en tanto que las cotas inferiores para el plano han ido mejorando desde Erdős $cn^{\frac{1}{2}}$, Moser $cn^{\frac{2}{3}}$ [Mos], Chung $cn^{\frac{2}{3}}$ [Ch2], Beck $cn^{\frac{2}{3}-\epsilon}$ [Be], hasta Chung, Szemerédi y Trotter [CST] quienes afirman que tal vez podrían probar $cn^{\frac{2}{3}}$, pero que aún esta cota quedaría lejos de la que se sospecha es la correcta, de hecho Erdős conjetura que:

$$f_2(n) > \frac{cn}{\sqrt{\log n}}$$

y ha ofrecido \$500 por una prueba o un contraejemplo.

En seguida se expondrá una demostración de $cn^{\frac{2}{3}} < f_2(n)$.

Teorema 7 (Moser, [Mos]) n puntos en el plano determinan por lo menos $\sqrt{n-2}$ distancias diferentes (i.e. $f_2(n) \geq \sqrt{n-2}$).

Demostración.

Sea $(P : n)$ un conjunto arbitrario de puntos en el plano. Considérense dos puntos $A, B \in P$ vértices consecutivos de la envolvente convexa de P , la totalidad del conjunto P está en alguno de los dos semiplanos determinados por la recta AB . Supóngase que desde A hay a distancias distintas y desde B hay b distancias diferentes. Distingáanse dos casos:

1. $\max\{a, b\} \geq \sqrt{n-2}$, de donde $f_2(P : n) \geq \sqrt{n-2}$
2. $a < \sqrt{n-2}$ y $b < \sqrt{n-2}$, cada punto de P distinto de A y de B está en la intersección de un semicírculo con centro en A y otro con centro en B y éstos se intersectan a lo más en ab puntos (Fig 3.6); pero $ab < n-2$ lo cual es contradictorio con el hecho de haber $n-2$ puntos en $P - \{A, B\}$.

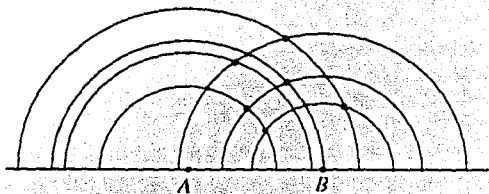


FIGURA 3.6. Teorema 7.

De acuerdo al Teorema anterior y a las configuraciones que se muestran en las figuras 3.7 y 3.9 es posible demostrar que $f_2(3) = 1$, $f_2(4) = 2$, $f_2(5) = 2$ y $f_2(7) = 3$. Otros valores para los cuales se conoce el valor preciso de $f_2(n)$ son: $f_2(6) = 3$, $f_2(8) = 4$ y $f_2(9) = 4$. A continuación se demostrará una proposición que, además de tener interés por sí misma, será de utilidad para demostrar que $f_2(6) = 3$.

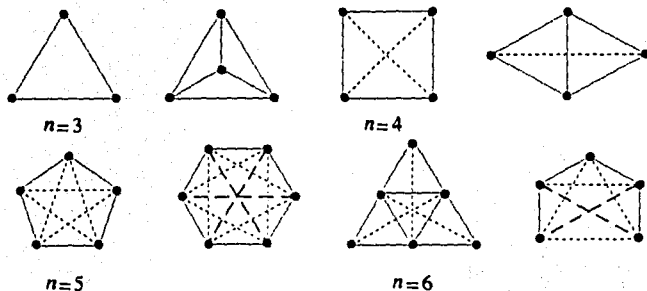


FIGURA 3.7. Configuraciones de n puntos con el mínimo número posible de distancias.

Proposición 3.5 *La única configuración de 5 puntos y únicamente dos distancias distintas es el pentágono regular.*

Demostración.

Sea $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. Denótese por a y b a los únicos valores posibles para las distancias entre parejas de puntos de P . Supóngase primero que hay por lo menos 6 segmentos cuya longitud es a . Sea $A(P_i)$ el número de segmentos de longitud a que tienen a P_i como uno de sus extremos. Entonces se tiene que $\sum_{i=1}^5 A(P_i) \geq 12$ lo cual implica que existe i tal que $A(P_i) \geq 3$. Sin perder generalidad, $A(P_1) \geq 3$ y $P_1P_2 = P_1P_3 = P_1P_4 = a$. Nótese que si alguno de los segmentos P_2P_3 , P_2P_4 ó P_3P_4 midiera a entonces se tendría un triángulo equilátero de lado a , por otro lado, si los tres segmentos midieran b se tendría un triángulo equilátero de lado b . Por lo tanto siempre hay tres puntos de P que forman un triángulo equilátero, supóngase sin perder generalidad que $\triangle P_1P_2P_3$ es equilátero.

Sea $a = 1$ y $a < b$. De las tres distancias de P_i a P_1, P_2 y P_3 ($i = 4, 5$) dos son iguales entre sí por el principio de las casillas. Si $P_1P_4 = P_2P_4$ entonces $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ debe ser alguna de las siguientes configuraciones: (Fig 3.8)

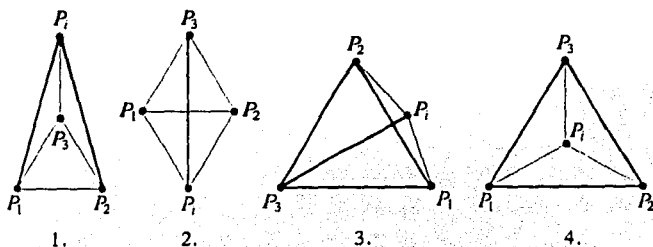


FIGURA 3.8. Proposición 3.5.

1. $b = 2\text{Sen}(75^\circ)$, $P_1P_2 = P_3P_4 = a$, $P_1P_4 = P_2P_4 = b$.
2. $b = \sqrt{3}$, $P_1P_2 = P_1P_4 = P_2P_4 = a$, $P_3P_4 = b$.
3. $b = (4 + 2\sqrt{3})\text{Sen}(75^\circ)$, $P_1P_2 = P_3P_4 = b$, $P_1P_4 = P_2P_4 = a$.
4. $b = \sqrt{3}$, $P_1P_2 = b$, $P_1P_4 = P_2P_4 = P_3P_4 = a$.

No es posible que P_4 y P_5 estén en alguna de las anteriores simultáneamente, pues P_4P_5 sería una nueva distancia, por lo tanto no es factible suponer que hay algún triángulo equilátero.

Supóngase que hay exactamente 5 segmentos de longitud a , 5 de longitud b y además no hay triángulos equiláteros en P . El número de distancias máximas en P es 5 y consecuentemente por la Proposición 3.3 las cinco distancias máximas son diagonales de un pentágono convexo, entonces todos los lados del pentágono son iguales entre sí y por lo tanto el pentágono es regular. \square

Corolario 3.5.1 $f(6) = 3$.

Demostración.

$f(6) \geq 2$ debido al Teorema 7 y los vértices del hexágono regular demuestran que $f(6) \leq 3$. Si existe P tal que $f(P : 6) = 2$ entonces por la proposición anterior se sigue que cualquier quinteta de puntos de P son los vértices de un pentágono regular, lo cual es imposible. Por lo tanto $f(6) > 2$ (i.e. $f(6) = 3$). \square

De la proposición 3.5 se sigue inmediatamente que el pentágono regular es la única configuración que realiza $f_2(5)$, también es trivial demostrar que el triángulo equilátero es la única configuración que realiza $f_2(3)$. ¿Existirá algún otro entero $n > 5$ para el cual exista una única configuración que realice $f_2(n)$? esto último es falso si $n = 6, 7, 8$ y 9 (Fig 3.9).

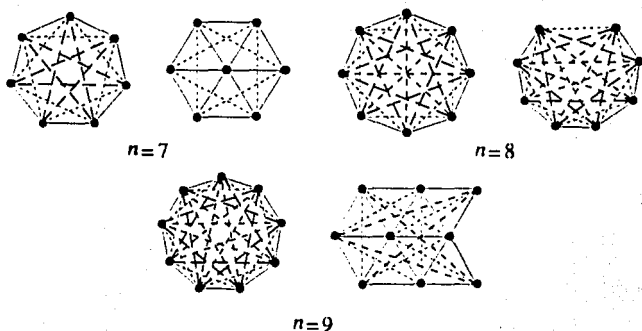


FIGURA 3.9. Configuraciones de n puntos con el mínimo número posible de distancias.

3.5.1 DISTANCIAS DIFERENTES EN POLÍGONOS CONVEXOS

En esta subsección se expondrán los resultados obtenidos por Altman, quien resolvió afirmativamente una conjetura de Erdős [Er4]. Como es usual en este tipo de problemas, una vez que se tiene información geométrica sobre las configuraciones en cuestión, basta un sencillo argumento combinatorio para deducir el resultado.

A continuación el resultado principal.

Teorema 8 (Altman, [Al]) *Todo polígono convexo de n lados determina por lo menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ distancias distintas entre pares de vértices.*

Demostración.

Se demostrarán previamente los siguientes Lemas.

Lema 8.1 *Si un lado A_1A_n de un polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$ es de longitud máxima (i.e. no excedido en longitud por ningún lado o diagonal), entonces para cualquier cuarteta de enteros (p, q, x, y) que satisfaga $1 \leq p < y \leq x < q < n$ se tiene que al menos uno de los segmentos A_pA_x ó A_qA_y es más pequeño que A_pA_q .*

Demostración.

Sean $A_1A_2 \dots A_n$ y (p, q, x, y) como en las hipótesis. Supóngase contrario a lo que se quiere demostrar, que ninguno de los segmentos A_pA_x y A_qA_y es más pequeño que A_pA_q , i.e.

$$\begin{aligned} A_qA_y &\geq A_pA_q \\ A_pA_x &\geq A_pA_q \end{aligned} \tag{3.1}$$

Supóngase $y < x$ y sean $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \phi, \bar{\phi}, \psi, \bar{\psi}$ y $\hat{\psi}$ como en la figura 3.10, por (3.1) se tiene que

$$\begin{aligned}\phi &\geq \alpha \\ \psi &\geq \beta\end{aligned}$$

y entonces

$$\phi + \psi \geq \alpha + \beta \quad (3.2)$$

por la convexidad del polígono

$$\begin{aligned}\alpha &> \bar{\alpha} \\ \beta &> \bar{\beta}\end{aligned} \quad (3.3)$$

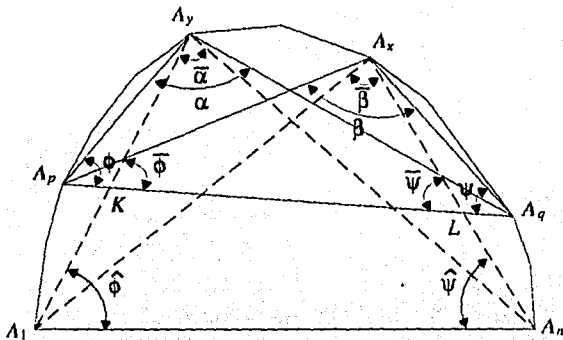


FIGURA 3.10. Lema 8.1. $y < x$.

Si denotamos por K y L a las intersecciones de A_1A_y y A_nA_x con A_pA_q respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &> \phi \\ \bar{\psi} &> \psi\end{aligned}$$

donde $\bar{\phi} = \phi$ si $p = 1$. Entonces $\bar{\phi} + \bar{\psi} > \phi + \psi$ y por (3.2) y (3.3)

$$\bar{\phi} + \bar{\psi} > \bar{\alpha} + \bar{\beta} \quad (3.4)$$

En los triángulos $A_1A_nA_y$ y $A_1A_nA_x$ los ángulos $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ se oponen al lado mayor A_1A_n , por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &> \hat{\phi} \\ \bar{\beta} &> \hat{\psi} \end{aligned}$$

y entonces

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} > \hat{\phi} + \hat{\psi} \quad (3.5)$$

además, como los ángulos del cuadrilátero A_1A_nLK suman 360° se tiene que

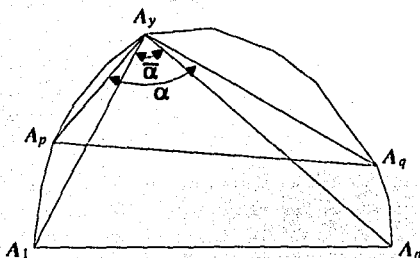
$$\bar{\phi} + \bar{\psi} = \hat{\phi} + \hat{\psi} \quad (3.6)$$

y de (3.5) y (3.6) se sigue que

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} > \bar{\phi} + \bar{\psi}$$

lo cual es contradictorio con (3.4). El Lema queda demostrado en este caso.

Si $x = y$ por convexidad $\angle A_pA_yA_q = \alpha > \bar{\alpha} = \angle A_1A_yA_n$ (Fig 3.11). Como $\bar{\alpha}$ se opone al lado A_1A_n en el triángulo $A_1A_yA_n$, $\bar{\alpha} \geq 60^\circ$ y por lo tanto $\alpha > 60^\circ$. Consecuentemente al menos uno de los lados A_pA_y ó A_qA_y en el triángulo $A_pA_qA_y$ debe oponerse a algún ángulo menor que 60° (i.e. debe ser menor que A_pA_q) y entonces el lema queda demostrado completamente. \square

FIGURA 3.11. Lema 8.1, $x = y$

Lema 8.2 Si un lado de un polígono convexo de n lados es de longitud máxima (i.e. no excedido en longitud por ningún lado o diagonal), entonces el polígono tiene al menos $n - 2$ distancias diferentes; si además un lado es máximo en el sentido estricto entonces el polígono tiene al menos $n - 1$ distancias diferentes.

Demostración.

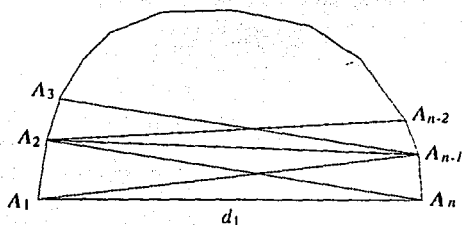


FIGURA 3.12. Lema 8.2.

Sea $A_1A_2 \dots A_n$ un polígono convexo (Fig 3.12) y sea A_1A_n un lado de longitud máxima d_1 .

Considérese el cuadrilátero $A_1A_nA_{n-1}A_2$. Como A_1A_n es de longitud máxima entonces los ángulos adyacentes a A_1A_n deben ser agudos. El cuadrilátero sin embargo debe tener algún ángulo obtuso que debe ser adyacente al lado $A_{n-1}A_2$ (i.e. opuesto a alguna de las diagonales). El lado $A_{n-1}A_2$ (denotado por d_2) es entonces menor que ésta diagonal y por lo tanto menor que A_1A_n (i.e. $d_2 < d_1$).

Por el Lema 8.1 al menos una de las diagonales A_2A_{n-2} , $A_{n-1}A_3$ (denotada por d_3) debe ser más pequeña que A_2A_{n-1} (i.e. $d_3 < d_2 < d_1$).

En general, si A_pA_{n-q} es una diagonal de longitud d_λ entonces por el Lema 8.1 alguno de los segmentos $A_{p+1}A_{n-q}$ ó A_pA_{n-q-1} debe ser menor que d_λ . Introduciendo así una nueva distancia $d_{\lambda+1} < d_\lambda$.

Cada etapa en este proceso consigue una nueva distancia más pequeña y elimina un vértice adyacente a la distancia anterior, por lo tanto después de $n - 3$ pasos se habrá terminado con este procedimiento obteniéndose $n - 3$ distancias distintas, si a éstas se agrega el lado $A_1A_n = d_1$ entonces se habrán conseguido exactamente $n - 2$ distancias diferentes.

Si además A_1A_n es máximo en el sentido estricto, entonces ambas diagonales del cuadrilátero $A_1A_nA_{n-1}A_2$ son menores que $A_1A_n = d_1$ y por lo menos una de éstas es menor que $A_{n-1}A_2 = d_2$ obteniéndose así una longitud intermedia $d_{1.5}$, $d_1 > d_{1.5} > d_2$. Así queda demostrado completamente el Lema. \square

A continuación se demostrará el Teorema: Sea $A_1A_2 \dots A_n$ un polígono convexo de n lados (Fig 3.13) y A_pA_q una diagonal de longitud máxima con la propiedad de dejar el menor número posible x de vértices de un solo lado (sin incluir a A_p y A_q). Se obtienen de este modo dos polígonos convexos: $A_p \dots A_r \dots A_q$ denotado por P con un total de $x + 2$ lados y $A_q \dots A_s \dots A_p$ denotado por Q con un total de $n - x$ lados.

En P se tiene que A_pA_q es máximo en el sentido estricto y entonces por el Lema 8.2, P tiene por lo menos $x + 1$ distancias diferentes. En Q se tiene que A_pA_q es máximo y por el mismo Lema, Q tiene

por lo menos $n - x - 2$ distancias distintas.

Supóngase que ni en P ni en Q hay más de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ distancias diferentes entonces las siguientes dos desigualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} x + 1 &< \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ n - x - 2 &< \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{aligned}$$

i.e.

$$n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 < x < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$$

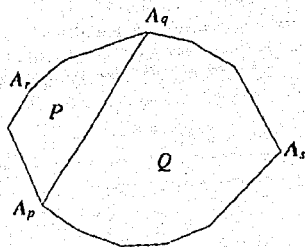


FIGURA 3.13. Teorema 8

Para $n = 2N$ se tiene que $N - 2 < x < N - 1$ lo cual no se cumple para ningún entero x . Mientras que para $n = 2N + 1$ se tiene que $N - 1 < x < N - 1$ lo cual es contradictorio por sí mismo. Así queda demostrado el Teorema. \square

Gracias a que la contradicción en el caso impar es más fuerte es posible caracterizar a aquellos conjuntos que cumplen con la igualdad, sorpresivamente, éstos son los polígonos regulares.

Teorema 9 (Altman, [Al]) Si $2N + 1$ puntos en el plano forman un polígono convexo y entre estos puntos hay exactamente N distancias distintas entonces el polígono es regular.

Demostración.

Primero se demostrará el siguiente Lema.

- Lema 9.1** 1. Si un lado A_1A_n de un polígono convexo de n lados $A_1A_2 \dots A_n$ es máximo en el sentido estricto (i.e. de longitud mayor que cualquier lado o diagonal) y el polígono define exactamente $n - 1$ distancias diferentes $d_1 > d_2 > \dots > d_{n-1}$ entonces A_kA_{n-k+1} ($k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) es de longitud d_{2k-1} y $A_kA_{n-k+2} = A_{k-1}A_{n-k+1} = d_{2k-2}$ con $k = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.
2. Si un lado A_1A_n de un polígono convexo de n lados $A_1A_2 \dots A_n$ es de longitud máxima d_1 (i.e. de longitud mayor o igual que cualquier lado o diagonal) y el polígono define exactamente $n - 2$ distancias diferentes $d_1 > d_2 > \dots > d_{n-2}$ entonces A_kA_{n-k+1} ($k = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) es de longitud d_{2k-2} y $A_kA_{n-k+2} = A_{k-1}A_{n-k+1} = d_{2k-3}$ con $k = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Demostración.

1. Sea $A_1A_2 \dots A_n$ un polígono convexo que define exactamente $n - 1$ distancias diferentes y en donde A_1A_n es máximo estricto (Fig 3.14).

Considérese el cuadrilátero $A_1A_2A_{n-1}A_n$. De la demostración del Lema 8.2 se puede suponer sin perder generalidad que si $d_1 = A_1A_n$ entonces $A_1A_{n-1} = d_2$ y $A_2A_{n-1} = d_3$ ($d_1 > d_2 > d_3$).

Sea $x = A_2A_n$. Por la desigualdad del triángulo la suma de las longitudes de las diagonales es mayor que la suma de las longitudes de dos lados opuestos por lo tanto $x + d_2 > d_1 + d_3 \Rightarrow x > (d_1 - d_2) + d_3 > d_3$. En virtud de la minimalidad de distancias

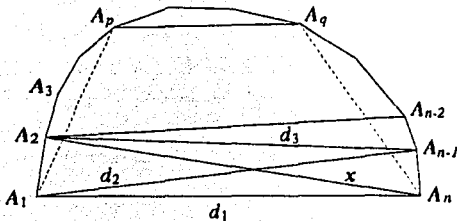


FIGURA 3.14. Lema 9.1, parte 1.

en el polígono, x no puede ser una distancia intermedia entre d_2 y d_3 , por lo tanto $x = d_2$.

A continuación se demostrará que A_2A_{n-1} es máximo estricto en el polígono secundario $A_2A_3 \dots A_{n-2}A_{n-1}$. Supóngase que $A_pA_q \geq d_3$.

(a) $2 < p < q < n - 1$.

Por un argumento similar al del Lema 8.1 (es decir por convexidad) se tiene que $\angle A_pA_2A_{n-1} + \angle A_2A_{n-1}A_q < \angle A_pA_1A_n + \angle A_1A_nA_q$. Por otro lado, como A_pA_q es lado máximo en los triángulos $\triangle A_2A_pA_q$ y $\triangle A_{n-1}A_pA_q$ y los ángulos $\angle A_{n-1}A_qA_p$, $\angle A_qA_pA_2$ no se oponen al lado máximo, se tiene que estos últimos ángulos son agudos (o rectos si $A_pA_q = d_3$). De la misma forma en los triángulos $\triangle A_1A_pA_q$ y $\triangle A_nA_pA_q$ se obtiene que los ángulos $\angle A_pA_1A_n$ y $\angle A_1A_nA_q$ también son agudos y entonces:

$$360^\circ = \angle A_pA_2A_{n-1} + \angle A_2A_{n-1}A_q + \angle A_{n-1}A_qA_p + \angle A_qA_pA_2 < \angle A_pA_1A_n + \angle A_1A_nA_q + 180^\circ \leq 360^\circ$$

Por lo tanto en este caso es imposible que $A_pA_q \geq d_3$.

(b) $p = 2$.¹

¹El caso $q = n - 1$ es análogo.

La suma de las diagonales es mayor que la suma de lados opuestos en el cuadrilátero $A_1A_2A_7A_{n-1}$ por lo tanto:

$$A_1A_7 + A_2A_{n-1} > A_2A_7 + A_1A_{n-1} \Rightarrow$$

$$A_1A_7 + d_3 > A_2A_7 + d_2 \geq d_3 + d_2 \Rightarrow$$

$$A_1A_7 > d_2 \Rightarrow A_1A_7 = d_1$$

Lo cual contradice el hecho de ser A_1A_7 máximo absoluto.

Ahora, si el polígono $A_2A_3 \dots A_{n-2}A_{n-1}$ es convexo de $n-2$ lados, con exactamente $n-3$ distancias diferentes y A_2A_{n-1} es máximo estricto; entonces por las mismas consideraciones del primer párrafo de la demostración se obtiene que $A_2A_{n-2} = A_3A_{n-1} = d_4$ y $A_3A_{n-2} = d_5$. Aplicando este mismo proceso sucesivamente se encuentra el resultado deseado.

2. Sea $A_1A_2 \dots A_n$ un polígono convexo que define exactamente $n-2$ distancias diferentes y en donde A_1A_n es máximo (Fig 3.15).

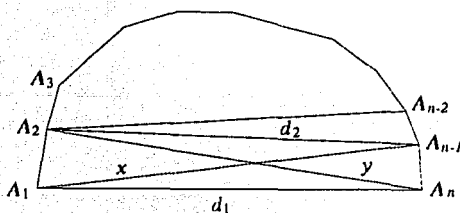


FIGURA 3.15. Lema 9.1, parte 2

Si $A_1A_n = d_1$ y $A_2A_{n-1} = d_2$ de acuerdo al Lema 8.2 $d_1 > d_2$. Sean x, y las longitudes respectivas de A_1A_{n-1} y A_2A_n entonces por convexidad en el cuadrilátero $A_1A_2A_{n-1}A_n$

$$x + y > d_1 + d_2 \Rightarrow$$

$$x > (d_1 - y) + d_2$$

$$y > (d_1 - x) + d_2$$

i.e.

$$x > d_2, y > d_2.$$

Debido a la minimalidad del número de distancias distintas, se tiene que $x = y = d_1$.

Por un argumento análogo a 1. se observa que A_2A_{n-1} es un máximo estricto en el polígono secundario $A_1A_2 \dots A_n$ y aplicando las mismas consideraciones se demuestra el resultado. \square

Ahora puede ser demostrado el Teorema.

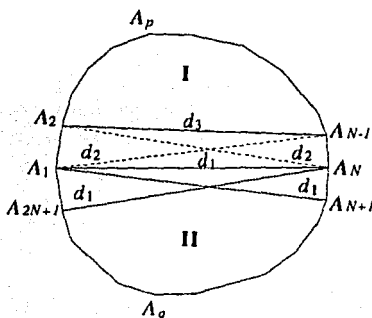


FIGURA 3.16. Teorema 9

Sea $A_1A_2 \dots A_{2N+1}$ (Fig 3.16) un polígono convexo que comprende exactamente N distancias diferentes entre sus vértices. Su diagonal máxima debe dejar exactamente N vértices de un lado y $N - 1$ del otro, pues si dejara más de N vértices de algún lado se obtendría un polígono de más de $N + 2$ lados en el cual la diagonal en cuestión sería un máximo y por el Lema 8.2, contrario a la suposición, comprendería más de N distancias distintas.

Sea A_1A_N una diagonal de longitud máxima. Se obtienen los siguientes polígonos secundarios:

- I $A_1 \dots A_p \dots A_N$ con un total de $N + 1$ lados donde A_1A_N es máximo en el sentido estricto.
- II $A_N \dots A_q \dots A_{2N+1}A_1$ con un total de $N + 2$ lados donde A_1A_N es de máxima longitud.

De acuerdo con el Lema 1 para el polígono (II) las diagonales A_1A_{N+1} y A_NA_{2N+1} deben ser de longitud máxima. Cada una de éstas divide al polígono en dos polígonos secundarios del tipo (I) y (II) de tal forma que cada polígono del tipo (II) tiene una nueva diagonal de longitud máxima. Por lo tanto todas las diagonales que dejan N vértices de un lado y $N - 1$ del otro son iguales.

Además cada polígono secundario del tipo (I) cumple las consecuencias del Lema 1, por lo que todas las diagonales que dejan K vértices de un lado y $N - K - 1$ del otro ($K = 0, 1, \dots, N - 1$) son iguales entre sí. Por lo tanto el polígono es regular. \square

3.5.2 CONJUNTOS EN POSICIÓN GENERAL

Además de los problemas que ya se han considerado, se pueden pedir condiciones adicionales sobre las configuraciones en consideración y obtener de este modo problemas de diversa índole y dificultad. El siguiente es un ejemplo al respecto.

Definición 9 Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por:

$$g(n) = \min_{(P;n)} f_2(P; n)$$

donde el mínimo se considera sobre todos los subconjuntos del plano con n puntos y en posición general (i.e. no tres colineales y no cuatro cocíclicos)

El problema análogo consiste en estimar $g(n)$, Erdős ha preguntado varias veces si es cierto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{n} = \infty \quad (3.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{n^2} = 0 \quad (3.8)$$

Szemerédi [Sz] observó que $g(n) \geq (n-1)/3$ y de hecho conjetura que $g(n) \geq (n-1)/2$, posteriormente Erdős, Hickerson y Pach [EHP] demostraron (3.8) afirmativamente. A continuación su demostración.

Teorema 10 Para cada número natural n , $g(n) < (3/2)n^{\log 3 / \log 2} < (3/2)n^{1.585}$

Demostración.

Considérese primero el caso $n = 2^k$. Sea P el conjunto de vértices del hipercubo unitario en \mathbb{R}^k (i.e. todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ de ceros y unos). $x - x'$ es una sucesión de ceros, unos y menos unos independientemente de x y x' , por lo que las parejas de elementos de P determinan a lo más $3^k - 1$ vectores distintos.² Estos últimos ocurren en $(3^k - 1)/2$ parejas de vectores opuestos y entonces determinan a lo más $(3^k - 1)/2$ distancias diferentes. Ahora se puede escoger un plano Π que pase por el origen de forma que la proyección de P en Π sea un conjunto en posición general. El conjunto proyectado P' también determina a lo más $(3^k - 1)/2$ distancias diferentes (i.e. $g(2^k) \leq (3^k - 1)/2 < 3^k/2$).

Ahora considérese n arbitraria. Sea k tal que $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Dado que g es estrictamente creciente se tiene que $g(n) \leq g(2^k) < 3^k/2$. Pero $k < 1 + \log n / \log 2$, por lo tanto $g(n) < (3/2)3^{\log n / \log 2} = (3/2)n^{\log 3 / \log 2}$. \square

²La sucesión $(0, 0, \dots, 0)$ nunca es la diferencia de dos puntos distintos.

3.6 Notas

En esta sección se exponen brevemente otros problemas que no podían dejar de ser mencionados, pues están directamente relacionados con las secciones anteriores.

3.6.1 DISTANCIAS MÁXIMAS Y MÍNIMAS

En un enfoque distinto al de la sección 4.2, trabajando exclusivamente en el plano, se define $M_i(n)$ como el número máximo de veces que puede ocurrir la i -ésima más grande distancia, y $m_i(n)$ el número máximo de veces que puede ocurrir la i -ésima más pequeña distancia ($M^2(n) = M_1(n)$ y $m^2(n) = m_1(n)$).

Recientemente Brass [Br] demostró que:

$$m_2(n) = \left(\frac{24}{7} + o(1) \right) n$$

y Vesztergombi ([Ve1], [Ve2]) probó que $M_2(n) \leq 3n/2$ con igualdad para n par.

Erdős conjetura que existe una constante c tal que $M_i(n) < cn$ y $m_i(n) < cn$.

Para $i \geq 3$ no se conocen ni valores exactos ni estimaciones de $M_i(n)$ y $m_i(n)$.

3.6.2 DISTANCIAS UNITARIAS

Se define

$$F_c(n) = \max \left\{ F_2(P; n) : P \text{ es un polígono convexo en } E^2 \right\}$$

Füredi [Fü] consiguió demostrar que $F_c(n)$ es sustancialmente menor que $F_2(n)$, de hecho demostró que $F_c(n) \leq 2\pi n \log n - \pi n = O(n \log n)$.

Por otro lado Edelsbrunner y Hajnal [EH] encontraron ejemplos para cada n que demuestran que $F_c(n) \geq 2n - 7$, lo cual es considerablemente mejor que la cota $\frac{2}{3}(n - 1)$ obtenida por Erdős y Moser [EM].

3.6.3 DISTANCIAS DIFERENTES

Otro problema relacionado muy interesante es el siguiente.

¿Cuál es el número máximo de puntos que puede haber en E^n de forma que las distancias entre parejas sólo tomen dos valores? Formalizando la pregunta; si $d(n)$ es este máximo ¿Cuánto vale exactamente $d(n)$? La respuesta para n pequeños es: $d(1) = 3$ (un segmento y su punto medio), $d(2) = 5$ (los vértices de un pentágono regular), $d(3) = 6$ (los vértices de un octaedro regular, o una pirámide con base pentágono regular, y altura adecuada, Fig 3.17).

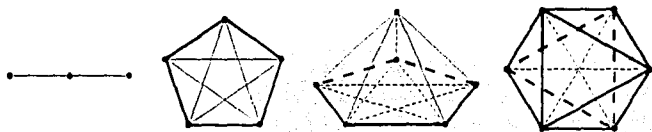


FIGURA 3.17. Configuraciones en n dimensiones que cumplen ser conjuntos de dos distancias con número máximo de elementos.

Los valores exactos para $n \geq 4$ son aún desconocidos, aunque hay algunas cotas; el conjunto de $\frac{1}{2}n(n + 1)$ puntos medios de las aristas del simplejo regular de dimensión n siempre forma un conjunto de dos distancias. Delsarte, Goethals y Seidel [DGS] han dado ejemplos con $\frac{1}{2}n(n + 3)$ puntos para $n = 2, 6$, y 22 . La mejor cota superior es debida a Blokhuis [Bl] quien demostró que un conjunto de dos distancias en E^n tiene a lo más $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ puntos.

Triángulos Congruentes

En este capítulo se resolverá el problema de tipo Sylvester que según la sección 2.4 corresponde a los valores $R = \emptyset$, $n = 2$ y S el conjunto de ternas en el plano que son vértices de triángulos congruentes a T .

El problema se resuelve afirmativamente excepto por siete configuraciones muy específicas y una familia infinita bien determinada. La solución del mismo constituye, en gran medida, una multitud de aplicaciones del capítulo anterior lo que demuestra en particular que la Teoría de Conjuntos Finitos de Puntos no está conformada por resultados aislados entre sí.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: En la primera sección se plantea y formaliza el problema, en la segunda y tercera sección se encuentran cotas sobre el número máximo de elementos que podría tener una configuración que constituya una excepción. Finalmente, la última sección, se encarga de la clasificación rigurosa de estas excepciones.

4.1 El Problema

Considérese un conjunto finito $(P : n)$ de puntos en el plano. El objetivo del problema es clasificar todas las configuraciones de puntos $(P : n)$ y todos los triángulos T con la siguiente propiedad: Por cada pareja de puntos en P hay otro punto en P de forma que los tres puntos son vértices de un triángulo congruente a T . Formalizando lo anterior se tienen las siguientes.

Definición 10 Sea $(P : n)$ un conjunto de puntos en el plano y sea T un triángulo dado. Se dice que la pareja $(A, B) \in P \times P$ es T -congruente conectable, con respecto a $(P : n)$, si existe $C \in P$ de forma que el triángulo $\triangle ABC$ es congruente a T . Si no existe tal C se dice que (A, B) es T -congruente ordinaria. (En notación $T \cong_{\text{conectable}}$ o $T \cong_{\text{ordinaria}}$)

Definición 11 Si $(P : n)$ es un conjunto de puntos en el plano que cumple que toda pareja (A, B) con $A \neq B$ es $T \cong_{\text{conectable}}$, entonces se dirá que P es T -congruente conectable. (En notación $T \cong_{\text{conectable}}$).

Con estas definiciones el problema consiste en caracterizar P y T de forma que $(P : n)$ sea $T \cong_{\text{conectable}}$.

4.2 Cotas sobre la Cantidad de Puntos

Si $(P : n)$ es $T \cong_{\text{conectable}}$ entonces cada punto de P dista del resto alguna de las tres medidas de los lados de T , por lo tanto el número de distancias distintas en el conjunto está restringida y en este sentido el Teorema 7 permitirá demostrar el siguiente.

Teorema 11 Sea $(P : n)$ un conjunto $T \cong_{\text{conectable}}$, entonces:

1. $n \leq 11$, y en particular:
2. T equilátero $\Rightarrow n \leq 3$.
3. T isósceles $\Rightarrow n \leq 5$.

Demostración.

1. En general $f_2(P : n) \leq 3$ y entonces, por el Teorema 7 $\sqrt{n-2} \leq f_2(P : n) \leq 3$, y por lo tanto $n \leq 11$.

2. Si T es equilátero, entonces por la misma Proposición $\sqrt{n-2} \leq f_2(P : n) = 1$, y por lo tanto $n \leq 3$.
3. Análogamente a 2. $\sqrt{n-2} \leq f_2(P : n) = 2$ y por lo tanto $n \leq 6$. Pero la igualdad no puede ocurrir, pues $f(6) = 3$ por el Corolario 3.5.1 y por lo tanto $n \leq 5$.

Los puntos 2 y 3 del Teorema son precisos, es decir, en efecto existen configuraciones $(P : 5)$ y $(P : 3)$, (el pentágono regular y el triángulo equilátero) que son $T \cong$ conectables para algún T isósceles y equilátero respectivamente. Por el contrario la cota general se puede mejorar considerablemente. De hecho, es importante hacer notar que una vez conocido el valor $f_2(8) = 4$ se podría deducir inmediatamente que la cota general puede ser rebajada a $n \leq 7$. Sin embargo se preferirá otro enfoque para demostrar la cota $n \leq 7$ que tendrá la virtud de ser de utilidad para la subsecuente clasificación de las configuraciones $T \cong$ conectables.

4.3 Cotas más Precisas

Definición 12 Sea $T_c((P : n), T)$ el número de triángulos congruentes a T con vértices en P .

Proposición 4.1 Si $(P : n)$ es $T \cong$ conectable entonces:

$$T_c((P : n), T) \geq \left\lceil \frac{1}{3} \binom{n}{2} \right\rceil$$

Demostración.

Para cada pareja $P_i, P_j \in P$ con $P_i \neq P_j$ se define $g_T(P_i, P_j)$ como el número de triángulos congruentes a T que tienen a $P_i P_j$ como uno de sus lados, nótese que:

$$T_c((P : n), T) = \frac{1}{3} \sum_{i \neq j} g_T(P_i, P_j) \quad (4.1)$$

Ya que cada triángulo congruente a T en P se cuenta tres veces en la suma (una vez por cada lado). Ahora, como P es $T \cong$ conectable se tiene que $g_T(P_i, P_j) \geq 1$ para cualquier pareja, lo que junto con (4.1) lleva a:

$$T_c((P : n), T) \geq \frac{1}{3} \binom{n}{2} \Rightarrow T_c((P : n), T) \geq \left\lceil \frac{1}{3} \binom{n}{2} \right\rceil \quad \square$$

Esta última Proposición indica que las configuraciones $T \cong$ conectables poseen una gran cantidad de triángulos congruentes con T , esta propiedad será de gran utilidad para demostrar el siguiente.

Teorema 12 Si $(P : n)$ es $T \cong$ conectable entonces $n \leq 7$.

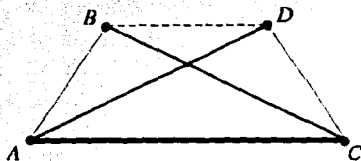
Demostración.

Supóngase que $(P : n)$ es $T \cong$ conectable con $n \geq 8$ y además T no es isósceles. Denótese por $a < b < c$ las medidas de los lados de T . La distancia c ocurre en $(P : n)$ a lo más n veces por el Teorema 4 y por la Proposición anterior $T_c((P : n), T) \geq \left\lceil \frac{1}{3} \binom{n}{2} \right\rceil$. Nótese que si $n \geq 8$ entonces $n < \left\lceil \frac{1}{3} \binom{n}{2} \right\rceil$ y por lo tanto hay dos triángulos congruentes a T que comparten el lado de tamaño c , denótese a estos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, donde $AB = a$, $BC = b$ y $AC = c$; se tienen tres posibles casos:

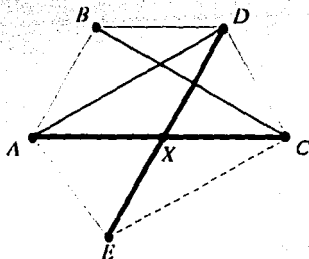
1. B y D en el mismo semiplano determinado por la recta AC .
2. B y D en semiplanos distintos y $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.
3. B y D en semiplanos distintos y $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

4.3.1 CASO 1

B y D en el mismo semiplano determinado por la recta AC , consecuentemente $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

FIGURA 4.1. Caso 1. Posible medida de BD .

$BD \neq c$ pues por el Lema 4.1 los segmentos de longitud máxima se intersectan. Si $BD = b$ entonces $\angle CDB = \angle BCD$, pero $\angle ACD, \angle BAC, \angle DBA < 90^\circ$ por ser ángulos opuestos a lados menores que c y entonces: $360^\circ = \angle CDB + \angle DBA + \angle BAC + \angle ACD = \angle BCD + \angle DBA + \angle BAC + \angle ACD < \angle DBA + \angle BAC + 2\angle ACD < 4 \cdot 90^\circ$, claramente una contradicción. Por lo tanto $BD = a$.

FIGURA 4.2. Caso 1. Posible medida de AE .

Ahora, como $(P; n)$ es $T \cong$ conectable entonces (B, D) es $T \cong$ conectable y por lo tanto existe $E \in P$ que cumple $\triangle DBE \cong \triangle ABC$ (la otra

opción $\triangle DBE \cong \triangle BAC$ es simétrica) y además por el Lema 4.1 DE interseca a AC .

Sea $X = AC \cap DE$. El triángulo $\triangle BEC$ es isósceles por lo que $\angle BEC = \angle ECB$. Por otro lado $\angle BED = \angle ACB$, de donde $\angle DEC = \angle ECA$ y por tanto $\triangle ECX$ es isósceles $\Rightarrow EX = XC \Rightarrow DX = AX \Rightarrow \triangle XAE \cong \triangle XDC \Rightarrow AE = DC = a$.

$ABDC$ es un cuadrilátero cíclico por ser un trapecio isósceles, y además $\angle AEB = \angle BAD = \angle ADB$, por lo tanto el pentágono $EABDC$ es cíclico. Por otro lado $CE \neq a$ pues de lo contrario $EABDC$ sería un pentágono regular y consecuentemente c y b serían iguales, lo cual no es posible.

Caso 1.1 $CE = b$

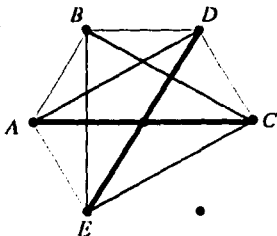


FIGURA 4.3. Caso 1.1. Solo se pueden agregar dos puntos más, el centro del hexágono y el vértice faltante.

El cuadrilátero $EADC$ es un paralelogramo y por ser cíclico es un rectángulo. Por lo tanto $a^2 + b^2 = c^2$, por otro lado aplicando el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero cíclico $CDBE$ se tiene que $c = 2a$ y $b = \sqrt{3}a$; es decir E, A, B, D, C son cinco vértices de un hexágono regular.

Respetando la existencia, de únicamente las distancias a, b y c sólo se pueden agregar dos puntos más; el vértice faltante del hexágono,

y el centro del mismo (Fig 4.3). Además el centro del hexágono falla ser miembro de alguna pareja $T \cong$ conectable. Por lo tanto, con $n \geq 8$, no hay configuraciones en este caso.

Caso 1.2 $CE = c$

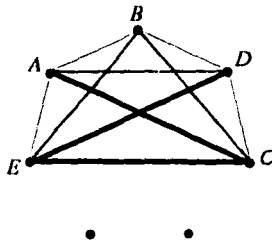


FIGURA 4.4. Caso 1.2. Solo se pueden agregar dos puntos más, los vértices faltantes del heptágono

Aplicando el Teorema de Ptolomeo a los cuadriláteros $ABDC$ y al $ABCE$; y haciendo $a = 1$ se obtiene $c = b^2 - 1$ y $b^3 - b^2 - 2b + 1 = 0$, de donde la única solución con $a < b < c$ (ver Apéndice A), consiste en que los puntos E, A, B, D, C sean vértices consecutivos de un heptágono regular.

Nuevamente, como en el caso anterior los únicos dos puntos que se pueden agregar a la configuración son los dos vértices faltantes del heptágono regular (Fig 4.4). De esta forma se tendría una configuración de a lo más siete puntos, lo cual contradice la hipótesis $n \geq 8$.

Además como la pareja (E, C) es $T \cong$ conectable es necesario que alguno de los vértices faltantes esté en la configuración y con esto bastará para tener una configuración $T \cong$ conectable.

4.3.2 CASO 2

B y D en semiplanos distintos, y $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Como $ABCD$ es un paralelogramo se tiene que

$$BD^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2 \quad (4.2)$$

Caso 2.1 $BD = a$

Dado que la pareja (B, D) es $T \cong$ conectable existe $E \in P$ tal que $\triangle BDE \cong \triangle ABC$. Hay dos posibles opciones salvo simetría (E_1 y E_2 en la figura 4.5). Sean $\alpha = \angle ACB = \angle CAD = \angle DE_i B$ y $\beta = \angle BAC = \angle DCA = \angle DBE_i$ con $i = 1, 2$.

$\angle CDE_2 = \angle BDE_2 - \angle BDC = \alpha + \beta \Rightarrow DE_2 = b, CE_2 = a$ y A, D y E_2 son colineales. Entonces, como $\angle E_2CA$ es obtuso se infiere que $AE_2 > AC = c$ lo cual es una contradicción y por lo tanto $E = E_1$.

$\triangle ABD$ es isósceles $\Rightarrow \angle DBA = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Por otro lado como $\triangle EDA$ es isósceles, y además $\angle EDA = \angle EDB - \angle ADB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ se tiene que $\triangle BCD \sim \triangle EAD$ y por consiguiente $AE = c$. A continuación los tres casos para el posible valor de EC :

1. $EC = a \Rightarrow \triangle ECB \cong \triangle ABC \Rightarrow \angle CBE = \angle ACB$, pero $\angle ACB < \angle BAC$ (pues $a < b$), de donde: $\angle ACB = \angle CBE = \angle CBD + \angle DBE = \angle CBD + \angle BAC > \angle ACB$ claramente una contradicción.
2. $EC = b \Rightarrow \triangle BEC \cong \triangle AED \Rightarrow \angle CBE = \angle DAE$ pero también $\angle DAE = \angle CBD$ y $\angle CBE = \angle CBD + \angle DBE$, lo cual implicaría que $\angle DBE = 0$.
3. $EC = c \Rightarrow \triangle AEC$ es equilátero $\Rightarrow \angle CAE = \angle CAD + \angle DAE = 2\alpha + \beta = 60^\circ$, además como $\triangle ECB$ es isósceles entonces $\alpha + 2\beta = \angle CBE = \angle ECB = 3\alpha + \beta \Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 15^\circ$ y $\beta = 30^\circ$. Por otro lado también $\triangle AEB$ es isósceles por lo que

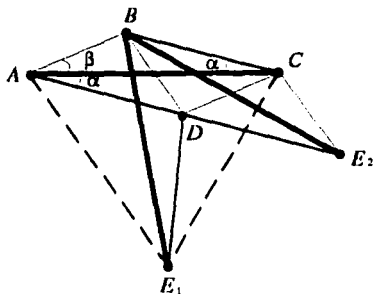


FIGURA 4.5. Caso 2.1

$$2\alpha + 2\beta = \angle BAE = \angle EBA = 180^\circ - 2\alpha - 3\beta \Rightarrow 5\beta + 4\alpha = 180^\circ \Rightarrow 210^\circ = 180^\circ, \text{ esto último, una contradicción evidente.}$$

Caso 2.2 $BD = b$

Por (4.2) se tiene que $c^2 = 2a^2 + b^2$. Como la pareja (B, D) es $T \cong$ conectable existe $E \in P$ tal que $\triangle BDE \cong \triangle ABC$. De las dos posibles opciones salvo simetría (E_1 y E_2 en la figura 4.5) $E_2 \neq E$, ya que $\angle ADE_2 > \angle ADC \Rightarrow AE_2 > AC = c$, lo cual no es posible. Por lo tanto $E = E_1$.

Sean $\alpha = \angle ACB = \angle CAD = \angle DBE$ y $\beta = \angle BAC = \angle DCA = \angle BED$. Por suma de ángulos internos en el $\triangle BDE$ se obtiene que $\angle EDB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Además, como $\triangle ABD$ es isósceles y $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \alpha + \beta$ se tiene que $\angle ADB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ y por consiguiente $\angle EDA = \angle EDB - \angle ADB = \alpha + \beta$. Por otra parte $\angle ADC = 180^\circ - \alpha - \beta$ por lo que C, D y E son colineales y entonces por simetría $AE = b$. Ahora hay dos posibles casos:

1. $CE = b \Rightarrow 2a = b \Rightarrow c = \sqrt{6}a$. Es decir, si $a = 1$ entonces $b = 2$ y $c = \sqrt{6}$, por lo tanto los puntos A, B, C, D, E están bien

determinados. Ahora, como (E, C) es $T \cong$ conectable existe F que cumple $\triangle ECF \cong T$ y en cualquiera de las posibles locaciones de F resulta que FD , por ser mediana del $\triangle CFE$, vale $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ distancia que no está permitida.

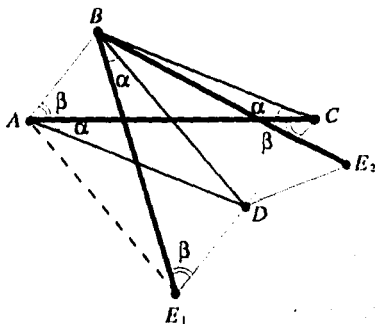
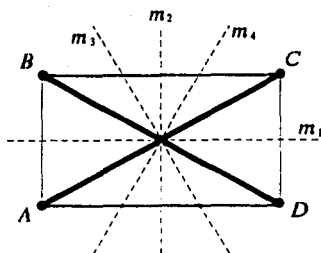


FIGURA 4.6. Caso 2.2.

2. $CE = c \Rightarrow 2a = c \Rightarrow b = \sqrt{2}a$. Es decir, si $a = 1$ entonces $b = \sqrt{2}$ y $c = 2$, por lo tanto los puntos A, B, C, D, E están bien determinados. Ahora, como (E, C) es $T \cong$ conectable existe F que cumple $\triangle ECF \cong T$ y en cualquiera de las posibles locaciones de F resulta que FD , por ser mediana del $\triangle CFE$, vale $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, distancia que no está permitida.

Caso 2.3 $BD = c$

Por (4.2) se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$, es decir T es rectángulo. Como $n \geq 5$ hay un quinto punto E que dista de A, B, C y D alguna de las distancias a, b o c , por lo tanto al menos una de estas tres distancias se repite (i.e. E está en alguna de las cuatro mediatrices determinadas por A, B, C y D). Sean estas mediatrices m_1, m_2, m_3 y m_4 como se muestra en la figura 4.7.

FIGURA 4.7. Caso 2.3. El Rectángulo $ABCD$ y sus mediatrices.*Caso 2.3.1 E en el interior de ADCB*

E no puede distar c de ningún vértice del rectángulo, pues c es la longitud de la diagonal del mismo. Si alguna de las distancias a o b , que hay de E a los vértices del rectángulo se repitiera más de dos veces, entonces E tendría que estar en dos mediatrices, y por lo tanto tendría que ser el centro del rectángulo; de aquí se obtienen los siguientes dos casos:

1. E el centro del rectángulo. $AE = \frac{1}{2}c$ tendría que ser igual a a y $b = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Como (A, E) es $T \cong$ conectable entonces existe $F \in P$ tal que $\triangle AEF \cong \triangle ABC$, pero cualquiera de las dos posibles locaciones de F , salvo simetría (F_1 y F_2 en la figura 4.8) distaría más que c de D . Y por lo tanto no se podría tener una configuración $T \cong$ conectable con $n \geq 8$ puntos.
2. E dista a de dos vértices del rectángulo, y b de los otros dos. Hay dos posibles subcasos:
 - (a) $BE = CE = a$ y $AE = DE = b$.
 - (b) $BE = AE = a$ y $CE = DE = b$.

En el primer caso $\triangle ADE$ es equilátero y $\triangle BAE$ es isósceles, por lo tanto $\angle BAE = \angle AEB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Y por lo tanto

$\angle BEC = 360^\circ - \angle AEB - \angle DEA - \angle CED = 240^\circ > 180^\circ$, esto último una contradicción. El segundo subcaso se resuelve análogamente al primero. En ambos subcasos E no puede estar en el interior del rectángulo.

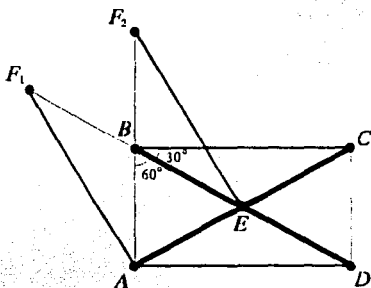


FIGURA 4.8. Caso 2.3.1. Las posibles locaciones de F no cumplen las hipótesis.

Caso 2.3.2 E en el exterior de $ADCB$

Si E está en m_1 y a la derecha de CD , entonces resulta que $EB = EA > c$, lo cual no es posible. Si E está en m_4 y arriba de BC entonces $\triangle ABE \cong \triangle ABC \Rightarrow E = C$, lo cual es una contradicción.¹ Por último si E está en m_2 hay tres subcasos:

1. $EB = EC = a$ y $EA = ED = b$. En este caso se obtiene una configuración análoga al Caso 1.1
2. $EB = EC = a$ y $EA = ED = c$

Si H_1 y H_2 son los puntos medios de BC y AD respectivamente, entonces por el Teorema de Pitágoras aplicado a los

¹Los casos E en m_1 , y a la izquierda de AB , E en m_3 y E en m_4 y abajo de AD son análogos por simetría.

triángulos $\triangle EH_1C$, $\triangle EH_2D$ y haciendo $a = 1$; se obtiene el siguiente sistema y soluciones:

$$\begin{aligned} (EH_1)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 &= a^2 & a &= 1 \\ (EH_1 + a)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 &= c^2 & b &= \sqrt{\frac{\sqrt{13}+1}{2}} \\ & & c &= \sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}} \end{aligned}$$

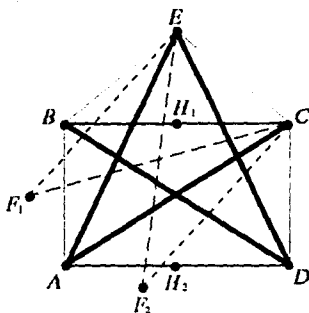


FIGURA 4.9. Caso 2.3.2. Las posibles locaciones de F no cumplen las hipótesis.

es decir los puntos A, B, C, D y E son muy particulares. Ahora, como (E, C) es $T \cong$ conectable existe $F \in P$ de forma que $\triangle FEC \cong T$ y además con F bajo BC , pues las distancias máximas se deben intersectar; las dos únicas opciones para F salvo simetría (F_1 y F_2 en la Figura 4.9) no cumplen las hipótesis, pues $BF_1 < a$ y $AF_2 < a$.

3. $EB = EC = b$ y $EA = ED = c$. Como $\triangle EBC$ es equilátero y $EA = AC$ entonces A y B están ambos sobre la mediatriz de EC lo cual es imposible.

4.3.3 CASO 3

B y D en semiplanos distintos, y $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

Caso 3.1 $BD = a$

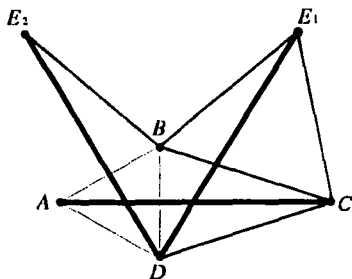


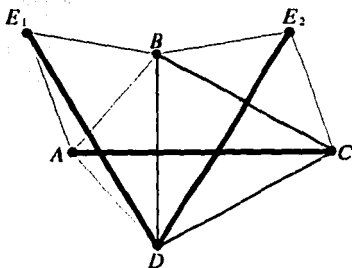
FIGURA 4.10. Caso 3.1. Las posibles locaciones de E no cumplen las hipótesis.

Al ser $(B : D) T \cong$ conectable existe $E \in P$ tal que $\triangle DBE \cong \triangle ABC$ y exceptuando simetrías solo hay dos opciones para E (E_1 y E_2 en la figura 4.10). Como $60^\circ = \angle ADB < \angle CBD$, y $\triangle CBD$ es isósceles, entonces:

$$60^\circ < \angle CBD < 90^\circ \quad (4.3)$$

Caso 3.1.1 $E = E_1$

$\triangle DEB \cong \triangle ACB \Rightarrow \angle EBD = \angle ABC \Rightarrow \angle EBD - \angle CBD = \angle CBA - \angle CBD = 60^\circ \Rightarrow \angle EBC = 60^\circ \Rightarrow \triangle CEB$ es equilátero. Además $\angle ABE = 360^\circ - \angle DBA - \angle EBC - \angle CBD = 240^\circ - \angle CBD$. Y usando (4.3) se tiene que: $150^\circ < \angle ABE < 180^\circ \Rightarrow AE = c \Rightarrow \triangle ACE$ isósceles $\Rightarrow 2\angle CBA + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow \angle CBA = 150^\circ \Rightarrow \angle ACB = 0^\circ$. Esto último una contradicción.

FIGURA 4.11. Caso 3.2. Posibles locaciones de E .

Caso 3.1.2 $E = E_2$

1. $EC \leq b \Rightarrow \angle EBC \leq 60^\circ \Rightarrow \angle ABE + \angle CBD + 120^\circ \geq 360^\circ \Rightarrow \angle CBD \geq 120^\circ$. Una contradicción a (4.3), pues $\angle CBD < 90^\circ$.
2. $EC = c$. $\angle EDC = 30^\circ + \angle BDC = 30^\circ + \angle CBD$, además $\angle DCE = \angle EDC = 30^\circ + \angle CBD$ pues $\triangle EDC$ es isósceles. Por otra parte $\angle DCE = \angle DCB + \angle BCE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EBC - (90^\circ - \angle CBD) = 270 - 2\angle CBD - \frac{1}{2}\angle EBC \Rightarrow$

$$240^\circ = 3\angle CBD + \frac{1}{2}\angle EBC \quad (4.4)$$

Pero $\angle EBC = 360^\circ - 2\angle CBD - 60^\circ = 300^\circ - 2\angle CBD$, sustituyendo en (4.4): $240^\circ = 3\angle CBD + 150^\circ - \angle CBD \Rightarrow \angle CBD = 45^\circ$, contradicción a (4.3).

Caso 3.2 $BD = b$

Dado que (B, D) es $T \cong$ conectable existe $E \in P$ que cumple $\triangle DBE \cong \triangle ABC$, distínganse dos casos según las únicas dos posibles locaciones de E exceptuando simetrías (E_1 y E_2 en la figura 4.11).

Caso 3.2.1 $E = E_1$

$\angle ABE = \angle DBE - \angle DBA = \angle CBA - \angle DBA = 60^\circ$. Como $0 < \angle DBA < 60^\circ$ y $\angle CBE = 120^\circ + \angle DBA$ entonces $120^\circ < \angle CBE < 180^\circ$ y por lo tanto $EC = c$. Por otra parte $\angle BAC = 90^\circ - \angle DBA$ y $0 < \angle DBA < 60^\circ \Rightarrow 30^\circ < \angle BAC < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < \angle EAC < 150^\circ$. Por lo tanto $c = EC > AC = c$, obviamente una contradicción.

Caso 3.2.2 $E = E_2$

Por simetría $EC = a$. $AE \neq a$, pues $\angle EBA > 60^\circ$. Si $AE = b$ se obtiene una configuración análoga al caso 1.1. Finalmente, si $AE = c$, por el Teorema de Pitágoras aplicado a $\triangle ABH$, y el de Ptolomeo al trapecio isósceles $ADCE$ se obtiene el sistema:

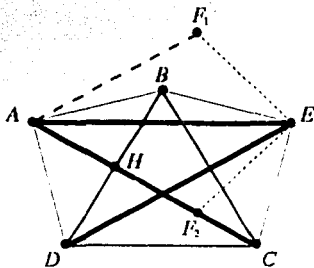


FIGURA 4.12. Caso 3.2.2. Las posibles locaciones de F no cumplen las hipótesis.

$$\left(c - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = a^2$$

$$c^2 - bc - a^2 = 0$$

Si $a = 1$ se obtiene $b = \sqrt{2}$ y $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$, es decir los puntos A, B, C, D y E están determinados, así como el triángulo T ; como

(A, E) es $T \cong$ conectable existe $F \in P$ tal que $\triangle EFA \cong \triangle ABC$, pero las dos posibles locaciones de F salvo simetría (F_1 y F_2 en la figura 4.12) fallan, pues $F_1B < a$ y $F_2C < a$.

Caso 3.3 $BD = c$

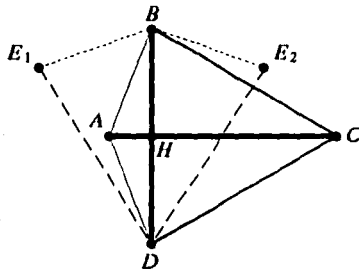


FIGURA 4.13. Caso 3.3. Las posibles locaciones de E , no cumplen las hipótesis.

Como (B, D) es $T \cong$ conectable existe $E \in P$ de forma que $\triangle BED \cong \triangle ABC$, (la otra opción $\triangle BED \cong \triangle BAC$ es simétrica), y las dos posibles locaciones de E (E_1 y E_2 en la figura 4.13) cumplen que $E_1E_2 = c$, pues $\triangle E_1DE_2 \cong \triangle DCB$. Por lo tanto E_1E_2CA es un paralelogramo, y entonces $E_2C = E_1A$ y $E_2A < E_1C$. Sean $H = BD \cap AC$, $c_1 = HC$ y $c_2 = AH$. Por el Teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos $\triangle BHC$ y $\triangle AHB$ se obtiene:

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + (c_2)^2 \\ b^2 &= \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + (c_1)^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

También por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}(E_2C)^2 &= \left(\frac{1}{2}c - c_2\right)^2 + \left(c_1 - \frac{1}{2}c\right)^2 \\(E_2A)^2 &= \left(\frac{1}{2}c + c_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c - c_2\right)^2\end{aligned}\quad (4.6)$$

Si $E_2C = c$ entonces por (4.6) se tendría que $\frac{1}{2}c^2 = -2c_1c_2$ lo cual no es posible. De igual forma, si $E_2A = c$ entonces por (4.6) $\frac{1}{4}c^2 = (c_2)^2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}c \Rightarrow a = b$ una nueva contradicción. Por lo tanto la única opción que resta es $E_2C = a$, $E_2A = b$ y sustituyendo estos valores en (4.6) y luego igualando (4.5) y (4.6) se obtienen simultáneamente $b = c(\sqrt{3} - 1)$ y $b = \frac{1}{2}c\sqrt{\sqrt{3} + 1}$ lo cual es contradictorio. Por lo tanto E_2 queda descartado. E_1 también queda descartado pues: $(E_1C)^2 = \left(\frac{3}{2}c - c_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c - c_2\right)^2 > c^2$.

Una vez terminado el análisis de todos los casos queda demostrado el Teorema y además se obtienen los siguientes corolarios, que serán de gran utilidad, para clasificar a todas las configuraciones $(P : n)$ conectables. \square

Corolario 12.1 Si $(P : n)$ es $T \cong$ conectable donde T es escaleno y hay una distancia máxima que comparten dos triángulos congruentes a T , entonces $(P : n)$ y T son alguno de los siguientes:

1. $(P : 4)$ vértices de un rectángulo arbitrario y T el triángulo rectángulo correspondiente.
2. $(P : 5)$ cinco vértices de un hexágono regular y T el triángulo formado con un lado del hexágono y dos diagonales distintas entre sí.
3. $(P : 6)$ vértices de un hexágono regular y T el triángulo formado con un lado del hexágono y dos diagonales distintas entre sí.
4. $(P : 6)$ seis vértices de un heptágono regular y T el triángulo formado con un lado del heptágono y dos diagonales distintas entre sí.

5. $(P : 7)$ vértices de un heptágono regular y T el triángulo formado con un lado del heptágono y dos diagonales distintas entre sí.

Corolario 12.2 Si $(P : n)$ es $T \cong$ conectable con T escaleno y no es 1,2,3,4 ó 5 del corolario anterior entonces $T_c((P : n), T) \leq k$ donde k es el número de veces que ocurre la distancia máxima en $(P : n)$.

Demostración.

Si $(P : n)$ es $T \cong$ conectable con T escaleno y no es 1,2,3,4 ó 5 del corolario anterior entonces ninguna pareja de triángulos congruentes a T comparten lado máximo, por lo que el número de triángulos congruentes a T es menor o igual que el número de segmentos en $(P : n)$ a distancia máxima (i.e. $T_c((P : n), T) \leq k$). \square

Corolario 12.3 Si $(P : n)$ es $T \cong$ conectable con T escaleno, y no es 1,2,3,4 ó 5 del corolario 12.1 entonces:

$$\begin{aligned} 4 &\leq T_c((P : 5), T) \leq 5 \\ 5 &\leq T_c((P : 6), T) \leq 6 \\ T_c((P : 7), T) &= 7 \end{aligned}$$

dependiendo del valor de n .

Demostración.

Se sigue directamente del corolario anterior, de la Proposición 4.1, y del Teorema 4. \square

4.4 Clasificación de las Configuraciones

El Teorema 12 de la sección anterior, junto con sus Corolarios será de suma utilidad para proceder a la clasificación de las configura-

ciones $T \cong$ conectables, de antemano se sabe que dichas configuraciones tienen a lo más 7 puntos. Primero se desecharán aquellas configuraciones de 3 ó menos puntos, pues éstas obviamente son $T \cong$ conectables; después se realizará la clasificación según el tamaño de los conjuntos y posteriormente de acuerdo a que T sea isósceles o escaleno.

4.4.1 CONJUNTOS DE CUATRO PUNTOS

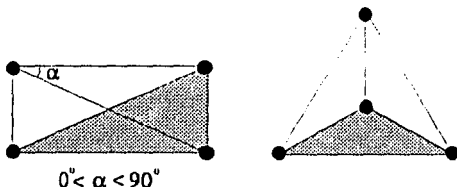


FIGURA 4.14. Únicos conjuntos $T \cong$ conectables con cuatro puntos.

Teorema 13 Las únicas configuraciones $(P : 4)$ que son $T \cong$ conectables son:

1. $(P : 4)$ tres vértices de un triángulo equilátero y su centroide, y T el triángulo formado con el centroide y dos vértices del triángulo equilátero.
2. $(P : 4)$ vértices de un rectángulo arbitrario, y T el triángulo rectángulo correspondiente.

Demostración.

Claramente las configuraciones 1 y 2 cumplen ser $T \cong$ conectables. La demostración de la unicidad para conjuntos con 4 elementos se verá más adelante como consecuencia de un resultado más general (Teorema 18). \square

4.4.2 CONJUNTOS DE CINCO PUNTOS

Teorema 14 Las únicas configuraciones $(P : 5)$ que son $T \cong$ conectables, con T isósceles son:

1. $(P : 5)$ vértices de un pentágono regular, y T el triángulo formado con dos lados y una diagonal.
2. $(P : 5)$ vértices de un pentágono regular, y T el triángulo formado con dos diagonales y un lado.

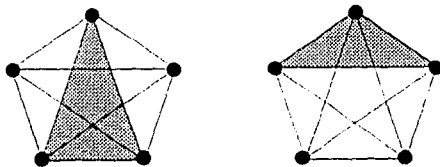


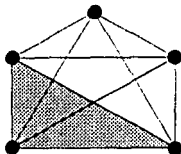
FIGURA 4.15. Únicos conjuntos $T \cong$ conectables de cinco puntos con T isósceles.

Demostración.

Es fácil verificar que las configuraciones descritas en 1 y 2 cumplen ser $T \cong$ conectables. La unicidad se sigue directamente de la Proposición 3.5.

Teorema 15 La única configuración $(P : 5)$, $T \cong$ conectable, con T escaleno es:

- $(P : 5)$ cinco vértices de un hexágono regular, y T el triángulo formado con un lado del hexágono, y dos diagonales distintas entre sí.

Demostración.FIGURA 4.16. Único conjunto $T \cong$ conectable de cinco puntos con T escaleno.

Por el Corolario 12.1 se sabe que la configuración descrita arriba cumple ser $T \cong$ conectable y además es la única configuración existente con T escaleno y con un par de triángulos congruentes a T compartiendo lado máximo; por lo tanto solo falta demostrar que no hay configuraciones $(P : 5)$ con T escaleno y sin triángulos congruentes a T que compartan lado máximo.

Se procederá por contradicción, supóngase que existiese tal configuración $(P : 5) = \{A, B, C, D, E\}$. Por el Corolario 12.3 dicha configuración debe cumplir que $4 \leq T_c((P : 5), T) \leq 5$.

1. $T_c((P : 5), T) = 4$

Si en algún punto inciden los cuatro segmentos de longitud c , sin perder generalidad en A ; entonces la pareja (A, B) es $T \cong$ ordinaria, pues todos los triángulos con AB como lado son isósceles. Lo mismo sucede si en A inciden tres segmentos de longitud c (AB, AC y AD) y además $BE = c$ (Fig 4.17). Si $AB = AC = AD = c$, y ninguno de los segmentos BE, CE ó DE mide c entonces forzosamente alguno de los segmentos BC, CD ó BD es de longitud c ; como además los segmentos máximos se intersecan, supóngase sin perder generalidad que

$BC = c^2$ y que AD está entre AB y AC . Como (A, B) y (A, C) son $T \cong$ conectables por suposición entonces $AE = a$ (o b) y por lo tanto $BE = CE = b$ (o a); en ambos casos se infiere que E está en la mediatriz de BC y al no estar en el interior de $\triangle ABC$ se infiere que $AD = b$ y $BD = CD = a$. Entonces es evidente que $ED < a$.³

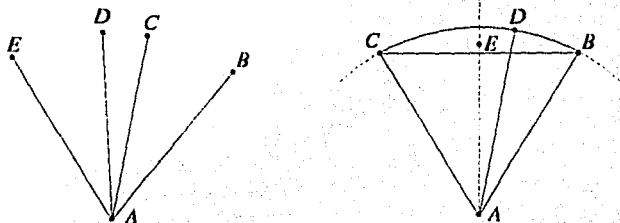


FIGURA 4.17. Teorema 15, caso 1.

El único caso faltante es que todos los puntos sean extremos de a lo más dos segmentos de longitud c . Sin perder generalidad y dado que los segmentos de longitud máxima deben intersectarse supóngase que $DB = BE = EC = CA = c$. Como las parejas (E, B) y (B, D) son $T \cong$ conectables entonces $T \cong \triangle BAE$ y $T \cong \triangle BDC$ y salvo simetría se tienen los siguientes tres casos (Fig 4.18):

- (a) $DC = EA = a$ y $BA = BC = b$. Por simetría se tendría que $AD = c$ lo cual no es posible.
- (b) $DC = BA = a$ y $BC = EA = b$. (E, C) es $T \cong$ conectable $\Rightarrow ED = b$, además (A, D) es $T \cong$ conectable $\Rightarrow AD = b \Rightarrow \angle CDA = \angle CDE$ lo cual es una contradicción.

²Nótese que $\triangle ABC$ es equilátero.

³Pues la distancia máxima de D a cualquier punto del sector circular BAC menos el $\triangle ABC$ es precisamente $DB = DC = a$.

- (c) $BC = EA = a$ y $DC = BA = b$. (E, C) es $T \cong$ conectable $\Rightarrow ED = a$, además (A, D) es $T \cong$ conectable $\Rightarrow AD = a \Rightarrow \angle CDA = \angle CDE$ lo cual es una contradicción.

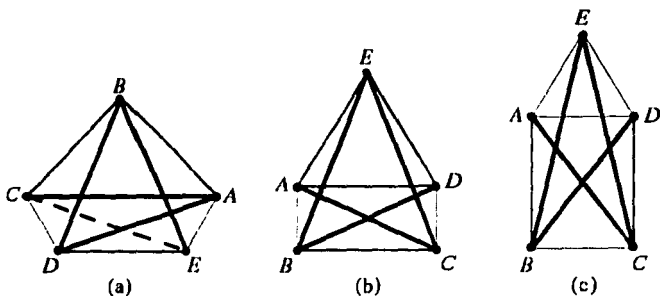


FIGURA 4.18. Teorema 15, caso 1.

2. $T_c((P:5), T) = 5$

Por la Proposición 3.3 hay dos casos:

- (a)
- $\triangle ABC$
- equilátero

Por lo menos alguna de las distancias DA, DB, DC, EA, EB o EC vale c , pues de lo contrario habría únicamente cuatro distancias máximas, sin perder generalidad sea $AD = c$. Por analogía con 1. se concluye que $AE = b$ y $BE = CE = a$; consecuentemente $ED < a$.

- (b)
- $ABCDE$
- pentágono convexo con todas sus diagonales de medida
- c
- .

Los segmentos AB, BC, CD, DE y EA tienen longitud a ó b , y por lo tanto sin perder generalidad $AB = BC$ obteniéndose así una contradicción, pues (A, C) es $T \cong$ ordinaria ya que todos los triángulos con AC como lado son isósceles. \square

4.4.3 CONJUNTOS DE SEIS PUNTOS

Teorema 16 *Las únicas configuraciones $(P : 6)$ que son $T \cong$ conectables son:*

1. $(P : 6)$ vértices de un hexágono regular, y T el triángulo formado con un lado del hexágono y dos diagonales distintas entre sí.
2. $(P : 6)$ seis vértices consecutivos de un heptágono regular, y T el triángulo formado con un lado del heptágono y dos diagonales distintas entre sí.

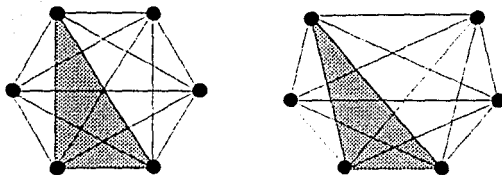


FIGURA 4.19. Únicos conjuntos $T \cong$ conectables con seis puntos.

Demostración.

Por la Proposición 4.1 se sabe que si $(P : 6)$ es $T \cong$ conectable entonces T es escaleno, de la misma forma que en la sección anterior se supondrá que $P = \{A, B, C, D, E, F\}$ no es ninguna de las configuraciones descritas en el Corolario 12.1, entonces por el Corolario 12.3 se tiene que $5 \leq T_c((P : 6), T) \leq 6$.

1. $T_c((P : 6), T) = 6$.

Por el Corolario 12.2 la distancia c ocurre exactamente 6 veces, y por otro lado, según la Proposición 3.1 $C_c(P : 6) = 6$. Por la Proposición 3.2 hay un elemento de P que es extremo de

exactamente un segmento de longitud c . Sea A tal elemento. Considérese el conjunto $P - \{A\}$ y obsérvese que es un conjunto de 5 elementos con 5 segmentos de longitud máxima; entonces por la Proposición 3.3 ocurre alguna de las siguientes:

- (a) Las diagonales del pentágono $BCDEF$ son todas de longitud c . Se supondrá sin perder generalidad que $FA = c$. Como las parejas (D, E) y (F, C) son $T \cong$ conectables se tiene que si $EF = BF$ entonces $ED = BC$; consecuentemente por simetría $EA = BA$ y por lo tanto la pareja (B, E) es $T \cong$ ordinaria (Fig 4.20 A). La otra opción es

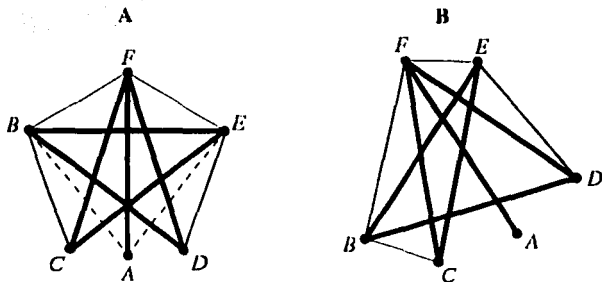


FIGURA 4.20. Teorema 16, caso 1.a.

que $EF \neq BF$ y entonces se puede suponer sin perder generalidad que $EF = a$ y $BF = b$. Debido a que las parejas (F, D) y (F, B) son $T \cong$ conectables se tiene que $ED = b$ y $BC = a$, consecuentemente $CA \neq a$ y $CE \neq b$ lo que implica que (A, F) es $T \cong$ ordinaria contradiciendo las hipótesis (Fig 4.20 B).

- (b) Tres elementos de $P - \{A\}$ forman un triángulo equilátero de lado c . Nótese que los otros tres segmentos de longitud c necesariamente intersectan a los tres lados del triángulo equilátero, debido a esto se tiene que cada uno de estos tres segmentos tiene algún extremo que coincide

con un vértice del triángulo equilátero. Supóngase que el triángulo equilátero es $\triangle BCD$, y supóngase además que dos segmentos, sin perder generalidad BE y BF , tienen longitud c . Obsérvese que entonces la pareja (E, F) es

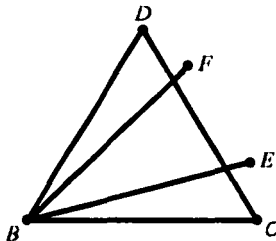


FIGURA 4.21. Teorema 16, caso 1.b.

$T \cong$ ordinaria, pues BE y BF están ambos entre BC y BD (i.e. $EF \neq c$), y además EA y FA no pueden tener longitud c por no tener extremos que coincidan con B, C ó D (Fig 4.21).

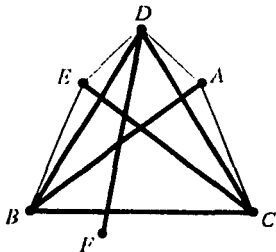


FIGURA 4.22. Teorema 16, caso 1.b.

El caso faltante es que cada uno de los vértices del $\triangle BCD$ sea extremo de otro segmento de longitud c (i.e. $BA =$

$CE = DF = c$). Como (B, C) , (C, D) y (D, B) son $T \cong$ conectables, entonces los triángulos $\triangle BCF$, $\triangle CDA$, y $\triangle DBE$ son congruentes a T .

Supóngase que dos lados consecutivos del hexágono $ADEBFC$ son iguales (i.e. $AD = DE = a$ y también $CA = EB = b$). Por la convexidad del hexágono se tiene que $AE \neq a$ y por lo tanto $AE = b$; entonces la pareja (A, E) resulta ser $T \cong$ ordinaria, contradiciendo las hipótesis (Fig 4.22).

Si ningún par de lados consecutivos del hexágono son iguales entre sí, entonces se puede suponer sin perder generalidad que $AD = EB = FC = a$ (Fig 4.23), entonces por simetría de la figura se tendría que $AE = EF = FA$ y además por convexidad $AE \neq a$ y $AE \neq b$ (pues $\triangle EAD$ no es isósceles), por lo tanto $AE = c$ lo cual contradice el hecho de haber únicamente 6 segmentos de longitud c .

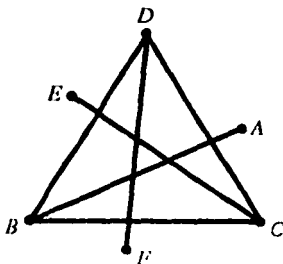


FIGURA 4.23. Teorema 16, caso 1.b.

$$2. T_c((P: 6), T) = 5$$

Particularizando la demostración de la Proposición 4.1 se obtiene:

$$15 = \sum_{\substack{(X, Y) \in P^2 \\ X \neq Y}} g_r((X, Y), T)$$

donde cada sumando es mayor que uno y como sólo son 15 elementos en la suma, entonces cada pareja de puntos de P forma parte de uno y solo ún triángulo congruente a T . Considérese el triángulo congruente a T correspondiente a la pareja AB , sea éste $\triangle ABC$; considérese ahora el triángulo análogo para la pareja AD , sea este nuevo triángulo $\triangle ADE$. Finalmente, supóngase que el triángulo correspondiente a la pareja AF es $\triangle AFX$. Nótese que independientemente del punto que sea X la pareja AX formaría parte de dos triángulos congruentes a T lo cual esclaramente una contradicción, por lo que no hay configuraciones $T \cong$ conectables en este caso. \square

4.4.4 CONJUNTOS DE SIETE PUNTOS

Teorema 17 *La única configuración $(P : 7)$, $T \cong$ conectable es:*

$(P : 7)$ vértices de un heptágono regular, y T el triángulo formado con un lado del heptágono, y dos diagonales distintas entre sí.

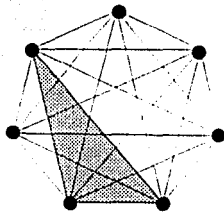


FIGURA 4.24. Único conjunto $T \cong$ conectable con siete puntos.

Demostración.

Igual que en las dos secciones anteriores, solo falta demostrar que no hay configuraciones $(P : 7)$, $T \cong$ conectables sin triángulos congruentes a T que compartan lado máximo, de existir tal con-

figuración, por el Corolario 12.3, $T_c((P : 7), T) = 7$, y además el número de distancias máximas es 7, y entonces por la Proposición 3.1 $C_c(P : 7) = 7$; y consecuentemente por el Teorema 9 ($P : 7$) son los vértices de un heptágono regular, lo cual contradice el hecho de no haber triángulos congruentes a T que compartieran lado máximo. \square

Triángulos Semejantes

En este capítulo se trata el problema análogo al capítulo anterior pero para triángulos semejantes, es decir, el problema correspondiente a los valores $R = \emptyset$, $n = 2$ y S el conjunto de ternas en el plano que son vértices de triángulos semejantes a T , según la sección 2.4.

Este problema presenta dificultades mayores que el del capítulo anterior, la razón principal es que no se pueden usar todos los resultados acerca de distancias entre parejas, pues ahora estas no están restringidas. Sin embargo, se logran clasificar todas las excepciones con 4 puntos, así como las de 5 puntos cuya envolvente convexa no sea un pentágono, además se muestran varias excepciones con más de 5 puntos (de 11 puntos la más grande que se conoce) y se resuelve afirmativamente el problema cuando T es equilátero.

El capítulo se divide de la siguiente manera: En la primera sección se plantea y formaliza el problema, en la segunda y tercera sección se clasifican todas las configuraciones que constituyen excepciones con 4 puntos y con 5 puntos bajo ciertas condiciones. En la tercera sección se muestran varias de las configuraciones que se conocen con más de 5 puntos, finalmente, en la última sección se resuelve el problema cuando T es equilátero.

5.1 El Problema

Considérese un conjunto finito P de puntos en el plano. El objetivo del problema es clasificar todas las configuraciones de puntos ($P : n$)

y todos los triángulos T con la siguiente propiedad: Por cada pareja de puntos en P hay otro punto en P de forma que los tres puntos son vértices de un triángulo semejante a T . Formalizando lo anterior se tienen las siguientes.

Definición 13 Sea $(P : n)$ un conjunto de puntos en el plano y sea T un triángulo dado. Se dice que la pareja $(A, B) \in P \times P$ es T -semejante conectable, con respecto a $(P : n)$, si existe $C \in P$ de forma que el triángulo $\triangle ABC$ es semejante a T . Si no existe tal C se dice que (A, B) es T -semejante ordinaria. (En notación $T \sim$ conectable o $T \sim$ ordinaria)

Definición 14 Si $(P : n)$ es un conjunto de puntos en el plano que cumple que toda pareja (A, B) con $A \neq B$ es $T \sim$ conectable, entonces se dirá que P es T -semejante conectable. (En notación $T \sim$ conectable).

Con estas definiciones el problema consiste en caracterizar P y T de forma que $(P : n)$ sea $T \sim$ conectable.

La siguiente Proposición será técnicamente necesaria para la clasificación de las configuraciones $T \sim$ conectables con 4 ó 5 puntos, por lo que será utilizada reiterativamente a lo largo de este capítulo.

Proposición 5.1 Sean $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ los ángulos del triángulo T

1. Si $\triangle ABC \sim T \sim \triangle ABD$ con D un punto interior del triángulo $\triangle ABC$, entonces $\alpha < \beta < \gamma$, $\angle BDA = \gamma$ y además $\angle BCA = \alpha$.
2. Si D y E son puntos interiores de $\triangle ABC$ es imposible que $\triangle ABC \sim T \sim \triangle ABD$ y $\triangle BCE \sim T$.
3. Es imposible que D y E sean puntos en el triángulo $\triangle ABC$, D interior y que además los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ADE$, $\triangle BDE$ y $\triangle CDE$ sean semejantes a T .

4. Es imposible que D y E sean puntos en el triángulo $\triangle ABC$, D interior y que además los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ y $\triangle CDE$ sean semejantes a T .

Demostración.

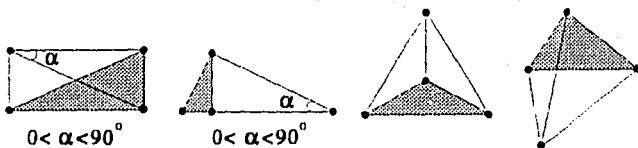
1. Si $\triangle ABC \sim T \sim \triangle ABD$ con D un punto interior del triángulo $\triangle ABC$ entonces claramente $\angle ABD < \angle ABC$ y $\angle DAB < \angle CAB$, por lo tanto $\angle CAB$, $\angle ABC$ son distintos de α , y $\angle ABD$, $\angle DAB$ son distintos de γ . Consecuentemente $\angle BDA = \gamma$, $\angle BCA = \alpha$ y $\alpha < \beta < \gamma$.
2. De acuerdo con 1. si $\triangle ABD$ y $\triangle BCE$ son semejantes a $\triangle ABC$ se tendría simultáneamente que $\angle BCA = \angle CAB = \alpha$ lo cual contradice que $\alpha < \beta < \gamma$.
3. Si D y E son puntos de $\triangle ABC$, D es interior y además $\triangle ABC$, $\triangle ADE$, $\triangle BDE$ y $\triangle CDE$ son semejantes a T entonces $\angle EAD < \angle CAB$, $\angle EBD < \angle ABC$ y $\angle ECD < \angle BCA$ lo cual implicaría que ninguno de los ángulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$ valdría α lo cual es una contradicción.
4. Si D y E son puntos de $\triangle ABC$, D es interior y además $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ y $\triangle CDE$ son semejantes a T entonces $\angle DAB < \angle CAB$, $\angle DBA < \angle ABC$ y $\angle ECD < \angle BCA$ lo cual implicaría que ninguno de los ángulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$ valdría α lo cual es una contradicción. \square

5.2 Clasificación de los Conjuntos con 4 Puntos

Teorema 18 ($P : 4$) es $T \sim$ conectable si y solo si P y T es alguno de los siguientes (Fig 5.1):

1. ($P : 4$) vértices de un rectángulo arbitrario y T el triángulo rectángulo correspondiente.

2. ($P : 4$) tres vértices de un triángulo rectángulo arbitrario y el pie de la altura sobre la hipotenusa y T el triángulo rectángulo correspondiente.
3. ($P : 4$) tres vértices de un triángulo equilátero y su centroide y T el triángulo formado con el centroide y dos vértices del triángulo equilátero.
4. ($P : 4$) = $\{A, B, C, D\}$ donde $T \sim \Delta ABC \sim \Delta BDC$ y $T = T$ donde T tiene dos ángulos γ y 2γ de forma que γ es el único ángulo que cumple $\text{sen}^3(3\gamma) - \text{sen}(\gamma)\text{sen}^2(2\gamma) = 0$.¹

FIGURA 5.1. Únicos conjuntos $T \sim$ conectables.

Demostración.

Claramente las configuraciones descritas en 1, 2, y 3, cumplen ser $T \sim$ conectables, a continuación se demostrará que el conjunto descrito en 4, es $T \sim$ conectable.

Las parejas (A, B) , (A, C) , (B, C) , (B, D) y (C, D) son $T \sim$ conectables por estar en los triángulos ΔABC ó ΔBDC . La pareja faltante (A, D) es $T \sim$ conectable pues $\Delta CAD \sim T$ por lo siguiente:

$$AC = \frac{BC \cdot \text{sen}(3\gamma)}{\text{sen}(2\gamma)} \quad CD = \frac{BC \cdot \text{sen}(2\gamma)}{\text{sen}(3\gamma)}$$

por ley de los senos, y entonces

¹El cuadrilátero que se obtiene reflejando $ABCD$ se considerará la misma configuración.

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\text{sen}^2(3\gamma)}{\text{sen}^2(2\gamma)} \quad (5.1)$$

por hipótesis

$$\frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(3\gamma)} = \frac{\text{sen}^2(3\gamma)}{\text{sen}^2(2\gamma)} \quad (5.2)$$

también por ley de senos

$$\frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(3\gamma)} = \frac{AB}{AC} \quad (5.3)$$

y de (5.1), (5.2) y (5.3) se obtiene

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

de donde $\Delta CAD \sim \Delta ABC \sim T$.

En las siguientes dos subsecciones se expondrán las condiciones necesarias para que exista una configuración $T \sim$ conectable segun el número de vértices del casco convexo de la misma.

5.2.1 CASCO CONVEXO TRIÁNGULO

Nótese que de los cuatro triángulos que se pueden formar con vértices de P al menos tres deben de ser semejantes a T , ya que cualesquiera dos triángulos comparten una arista, y entonces entre dos triángulos utilizarían a lo más cinco aristas; es entonces necesario considerar un triángulo más para cubrir a la pareja faltante.

Supóngase que D está en el interior del triángulo ΔABC . Por la Proposición 5.1 es imposible que ΔABC sea semejante a T , por lo tanto los triángulos ΔBCD , ΔCAD y ΔABD son semejantes entre sí. Sean $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ los ángulos de T .

Necesariamente dos de los ángulos $\angle BDA$, $\angle CDA$, $\angle BDA$ son obtusos, pues la suma de los tres es 360° . Supóngase sin perder generalidad que $\angle CDA$ y $\angle BDA$ son obtusos, entonces $\gamma = \angle CDA = \angle BDA$ pues T tiene a lo más un ángulo obtuso. Entonces $\angle CDB = 360^\circ - 2\gamma = 2\alpha + 2\beta$, quien obviamente es mayor que α y β , por lo tanto $\angle CDB = \gamma$ es decir $360^\circ - 2\gamma = \gamma \Rightarrow \gamma = 120^\circ$. De esto último se deduce fácilmente que $\triangle ABC$ es equilátero y D es su centroide. (Como se describe en 3.) \square

5.2.2 CASCO CONVEXO CUADRILÁTERO

De la misma forma que en la subsección anterior debe haber tres triángulos semejantes a T . Por lo tanto se supondrá sin perder generalidad que $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$ son semejantes a T . Como (A, C) es T ~conectable entonces sin perder generalidad $\triangle ABC \sim T$. Sean $\alpha = \angle BAD$, $\beta = \angle DBA$ y $\gamma = \angle ADB$

Salvo simetría se tienen los siguientes cuatro casos:

1. $\triangle ABD \sim \triangle CDB$: Dado que $\angle CBA > \beta$ y $\angle CBA > \gamma$ entonces $\angle CBA = \alpha \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ y entonces $(P : 4)$ es como en 2.
2. $\triangle ABD \sim \triangle CBD$: Como $AB = CB$ entonces $\triangle ABC$ es isósceles y por lo tanto sin perder generalidad $\alpha = \beta = \frac{\gamma}{2}$ y entonces $\alpha = 90^\circ$ y $\beta = \gamma = 45^\circ$ lo cual es un caso particular de la configuración 1.
3. $\triangle ABD \sim \triangle DBC$: Como $\angle CBA > \beta$ y $\angle CBA > \alpha$ entonces $\angle CBA = \gamma \Rightarrow \gamma = \beta + \alpha \Rightarrow \gamma = 90^\circ$ y entonces $(P : 4)$ es como en 1.
4. $\triangle ABC \sim \triangle BCD$: Sin perder generalidad $\angle ADC = \beta$ (i.e. $2\gamma = \beta$), ahora $\angle CAD < \alpha$ y $\angle CAD \neq 2\gamma$ por lo tanto $\angle CAD = \gamma$ y $\angle ACD = \alpha$. Entonces $\triangle ACD \sim \triangle DAB$ y consecuentemente $AD \cdot BA = DB \cdot DC$. Por otro lado:

$$\frac{AD}{\operatorname{sen}(2\gamma)} = \frac{BD}{\operatorname{sen}(3\gamma)} = \frac{BA}{\operatorname{sen}(\gamma)} \text{ y } \frac{DC}{\operatorname{sen}(3\gamma)} = \frac{BD}{\operatorname{sen}(2\gamma)}$$

debido a la ley de los senos en los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$, sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene que $\operatorname{sen}^3(3\gamma) - \operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{sen}^2(2\gamma) = 0$. (Para la existencia y unicidad de γ ver Apéndice A). Por lo tanto $(P : 4)$ es como se describe en 4. \square

Corolario 18.1 $(P : 4)$ es $T \sim$ conectable si y solo si hay tres o más triángulos semejantes a T .

Como se puede observar en la demostración del Teorema anterior, la herramienta combinatoria que juega un papel decisivo en el argumento es el conocimiento del número de triángulos semejantes a T . En esta dirección, la función análoga a T_c (introducida en la Proposición 4.1), pero ahora para triángulos semejantes será de gran utilidad para la clasificación de las configuraciones con 5 puntos.

Definición 15 Sea $T_s((P : n), T)$ el número de triángulos semejantes a T con vértices en P .

Proposición 5.2 Si $(P : n)$ es $T \sim$ conectable entonces

$$T_s((P : n), T) \geq \left\lceil \frac{1}{3} \binom{n}{2} \right\rceil$$

Demostración.

La demostración es totalmente análoga a la Proposición 4.1. \square

Proposición 5.3 Si $(P : n)$ es $T \sim$ conectable con $n \geq 5$ y no contiene configuraciones como las descritas en el Teorema 18 entonces $T_s((P : n), T) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \binom{n}{3} \right\rfloor$.

Demostación.

Para cada cuarteta $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de puntos en P se define $g_4(\{A_1, A_2, A_3, A_4\}, T)$ como el número de triángulos semejantes a T cuyos vértices son elementos de la cuarteta.

Nótese que

$$T_s((P : n), T) = \frac{1}{n-3} \sum g_4(\{A_i, A_j, A_k, A_l\}, T)$$

pues cada triángulo semejante a T se repite $n-3$ veces en la suma por estar contenido en $n-3$ cuartetos. Además $g_4(\{A_i, A_j, A_k, A_l\}, T) \leq 2$ pues de lo contrario, por el Corolario 18.1, se tendría una cuarteta de puntos como las descritas en el Teorema 18. Aplicando esta última desigualdad a la suma se obtiene que.

$$T_s((P : n), T) \leq \frac{2}{n-3} \binom{n}{4} = \frac{1}{2} \binom{n}{3}$$

como se quería demostrar. \square

Corolario 5.3.1 Si $(P : 5)$ es $T \sim$ conectable y satisface las hipótesis de la Proposición anterior entonces $4 \leq T_s((P : n), T) \leq 5$.

En base a este corolario se procederá a la clasificación de las configuraciones $T \sim$ conectables con 5 puntos que no contienen subconfiguraciones como las descritas en el Teorema 18, posteriormente se encontrarán las extensiones de los únicos cuatro casos especiales.

5.3 Clasificación de los Conjuntos con 5 Puntos

Sea $(P : 5)$ $T \sim$ conectable $P = \{A, B, C, D, E\}$. Según el Corolario 5.3.1 si P no contiene configuraciones como las descritas en el Teorema 18 se cumple que $4 \leq T_s((P : 5), T) \leq 5$. En el transcurso de

esta sección se usará la siguiente notación para los triángulos con vértices en P :

$$\begin{aligned} T_1 &= \triangle ABC & T_6 &= \triangle ACE \\ T_2 &= \triangle ABD & T_7 &= \triangle BCE \\ T_3 &= \triangle ACD & T_8 &= \triangle ADE \\ T_4 &= \triangle BCD & T_9 &= \triangle BDE \\ T_5 &= \triangle ABE & T_{10} &= \triangle CDE \end{aligned}$$

Si $T_s((P:5), T) = 4$, las únicas configuraciones de grupos de 4 triángulos semejantes a T que cubren a cada pareja de P son (ver Apéndice B):

1. - $T_1 T_2 T_5 T_{10}$
2. - $T_1 T_3 T_6 T_9$
3. - $T_1 T_8 T_9 T_{10}$
4. - $T_1 T_4 T_7 T_8$
5. - $T_2 T_3 T_7 T_8$
6. - $T_4 T_5 T_6 T_8$
7. - $T_2 T_4 T_6 T_9$
8. - $T_3 T_5 T_7 T_9$
9. - $T_3 T_4 T_5 T_{10}$
10. - $T_2 T_6 T_7 T_{10}$

Si $T_s((P:5), T) = 5$, las únicas configuraciones de grupos de 5 triángulos semejantes a T que no son extensiones de las anteriores son (ver Apéndice B):

1. - $T_1 T_2 T_6 T_9 T_{10}$
2. - $T_1 T_4 T_5 T_8 T_{10}$
3. - $T_1 T_2 T_7 T_8 T_{10}$
4. - $T_1 T_3 T_5 T_9 T_{10}$
5. - $T_1 T_3 T_7 T_8 T_9$
6. - $T_1 T_4 T_6 T_8 T_9$
7. - $T_2 T_3 T_5 T_7 T_{10}$
8. - $T_2 T_3 T_6 T_7 T_9$
9. - $T_2 T_4 T_5 T_6 T_{10}$
10. - $T_2 T_4 T_6 T_7 T_8$
11. - $T_3 T_4 T_5 T_6 T_9$
12. - $T_3 T_4 T_5 T_7 T_8$

Se procederá a la clasificación de las configuraciones T ~conectables de la siguiente forma: Primero, según el número de lados de la envolvente convexa y después de acuerdo al número de triángulos congruentes con T que pudiera haber según las listas anteriores (cuando se indique que el número de triángulos es 5 se supondrá que los cinco triángulos son de la segunda lista, ya que los casos restantes se

analizarán cuando se suponga que solo son 4 triángulos). En todos los casos a considerar se evitan aquellos que son simétricos entre sí.

5.3.1 CASCO CONVEXO TRIÁNGULO

Sin perder generalidad se supondrá que $\triangle ABC$ es la envoltura convexa de P , se contemplarán tres casos según el número de puntos de P que hubiera en el interior de $\triangle ABC$. El cuadro sinóptico (Fig 5.2) resume el análisis total de los casos, después de aquellos casos o subcasos que dan origen a conjuntos T ~conectables, se localizan reproducciones de los conjuntos.

I D Y E EN LA FRONTERA

$$T_s((P:5), T) = 4$$

Quitando los casos simétricos hay solo tres posibilidades.

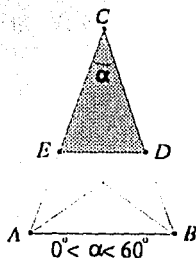


FIGURA 5.3. Una configuración T ~conectable para cada alfa.

$$1. T_1 \sim T_2 \sim T_5 \sim T_{10} \sim T$$

Denótese por α , β y γ a los ángulos $\angle BCA$, $\angle ABC$ y $\angle CAB$ respectivamente. $E \notin (AB \cup DB)$ pues $T_2 \sim T_5 \sim T$, de igual

forma D y E no están en el mismo lado de $\triangle ABC$ pues $T_{10} \sim T$, sin perder generalidad se supondrá que $E \in AC$ y $D \in BC$.

Como $T_2 \sim T_3 \sim T$ entonces

$$\begin{aligned}\angle ABE &= \angle DAB = \angle BCA = \alpha \\ \angle BEA &= \angle ABD = \angle CBA = \beta \\ \angle EAB &= \angle BDA = \angle CAB = \gamma\end{aligned}$$

Ahora, como $T_{10} \sim T$, si $\angle CED = \beta$ entonces $\angle DBA + \angle DEA = 180^\circ$ y por consiguiente A, B, D y E son cíclicos y por lo tanto $\beta = \gamma$ en cuyo caso $AB \parallel ED$, si por el contrario $\angle CED = \gamma$ entonces de inmediato se sigue que $AB \parallel ED$. En ambos casos $\angle CAB = \angle ABC = \beta$. Si $0 < \alpha < 60^\circ$ entonces hay una única configuración para cada α (Fig 5.3).

2. $T_2 \sim T_3 \sim T_7 \sim T_8 \sim T$

Como $T_2 \sim T_3 \sim T$ se tiene que $\angle ADB = \angle CDA = 90^\circ$. Si $\angle CDA \neq \angle DAB$ entonces $\angle CAB = 90^\circ$ y como $T_7 \sim T \Rightarrow \angle CEB = 90^\circ$ entonces $A = E$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\angle CAD = \angle DAB$ y como $T_7 \sim T_8 \sim T \Rightarrow \angle CEB = \angle CED = 90^\circ$ entonces B, E y D están alineados lo cual es también una contradicción.

3. $T_1 \sim T_8 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$

Este caso no es posible pues como $T_8 \sim T_9 \sim T_{10}$ se tiene que $\angle AED + \angle DEC = 180^\circ$ y $\angle EDA + \angle BDE = 180^\circ$ de donde T sería degenerado.

$$T_3((P:5), T) = 5$$

Experimentando simetrías hay dos casos.

1. $T_1 \sim T_2 \sim T_6 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$

D y E no pueden estar en el mismo lado pues $T_9 \sim T_{10} \sim T$. Además $E \notin AC$ y $D \notin AB$ pues $T_2 \sim T_6 \sim T$. Sin perder generalidad supóngase que $E \in AB$ y $D \in BC$.

Sean $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $\angle CAB = \gamma$ (Fig 5.4). Por semejanza de triángulos se tiene que

$$T_6 \sim T_1 \sim T \Rightarrow \angle AEC = \beta, \angle ECA = \alpha$$

$$T_2 \sim T_1 \sim T \Rightarrow \angle DAB = \beta, \angle BDA = \gamma$$

$$T_9 \sim T_1 \sim T \Rightarrow \angle DEB = \gamma, \angle BDE = \beta$$

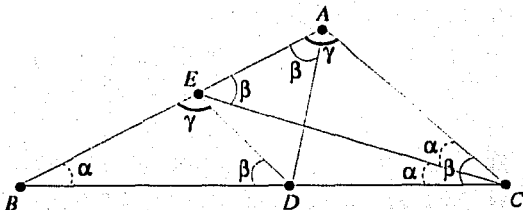


FIGURA 5.4. Caso I.1.

de donde $\alpha < \beta < \gamma$, pues $\alpha = \angle ECA < \angle BCA = \beta$ y $\beta = \angle DAB < \angle CAB = \gamma$. Dado que $T_{10} \sim T_1 \sim T$ y $\angle DCE < \angle DCA = \angle BCA = \beta$ se tiene que $\angle DCE = \alpha$. Distingáanse ahora los dos posibles valores de $\angle CED$

$$\begin{aligned} \angle CED = \beta &\Rightarrow 180^\circ = \angle DEB + \angle CED + \angle AEC = \\ &= \gamma + 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle CED = \gamma &\Rightarrow 180^\circ = \angle DEB + \angle CED + \angle AEC = \\ &= 2\gamma + \beta \Rightarrow \alpha = \gamma. \end{aligned}$$

En ambos casos se obtiene una contradicción, por lo que no hay configuraciones en este caso.

2. $T_2 \sim T_3 \sim T_5 \sim T_7 \sim T_{10} \sim T$

Como $T_2 \sim T_3 \sim T$ se tiene que $\angle ADB = \angle CDA$ y por lo tanto ambos son iguales a 90° lo cual implica que $\angle CAB = 90^\circ$. Análogamente como $T_5 \sim T_7 \sim T$ se tiene que $\angle ABC = 90^\circ$ lo cual es imposible.

II D Y E PUNTOS INTERIORES

$$T_s((P:5), T) = 4$$

De aquí en adelante se denotarán por $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ a los ángulos de T . Por simetría los únicos casos posibles son:

$$1. T_1 \sim T_2 \sim T_5 \sim T_{10} \sim T$$

No hay configuraciones en este caso de acuerdo a la Proposición 5.1 (inciso 4) aplicada a los triángulos T_1, T_2 y T_{10} .

$$2. T_1 \sim T_8 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$$

No hay configuraciones en este caso de acuerdo a la Proposición 5.1 (inciso 3) aplicada a los triángulos T_1, T_8, T_9 y T_{10} .

$$3. T_2 \sim T_3 \sim T_7 \sim T_8 \sim T$$

Debido a que D está en el interior de $\triangle ABC$ se tiene que $\angle CDB < 180^\circ \Rightarrow \angle ADC + \angle BDA > 180^\circ$ de donde $\gamma = \angle ADC = \angle BDA > 90^\circ$ pues $T_2 \sim T_3$.

Sin perder generalidad se puede suponer que E está en el semiplano derecho determinado por AD . El ángulo $\angle EDA \neq \alpha$ pues de lo contrario $\angle DAE = \beta$ y consecuentemente A, E y C serían colineales lo cual no es posible ya que E es punto interior de $\triangle ABC$. A continuación el análisis de los dos posibles valores de $\angle EDA$.

(a) $\angle EDA = \gamma \Rightarrow \angle CAD = \beta$ pues $\angle CAD > \angle EAD$. En seguida se analizarán los dos posibles valores de $\angle DAB$.

i. $\angle DAB = \beta \Rightarrow \angle ABD = \alpha$ y además $\angle EBC, \angle BCE \neq \gamma$ pues de lo contrario $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB > 180^\circ$. De esto último se deduce que $\angle CEB = \gamma$, además como E está a la derecha de AD entonces $\angle EBC < \angle BCE \Rightarrow \angle EBC = \alpha$ y $\angle BCE = \beta$. Por simetría $\angle DBC = \angle BCD = \angle BCE = \beta$ (Fig 5.5).

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \\ &= (\beta + \alpha) + (\beta + \alpha) + 2\beta = 2\alpha + 4\beta \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \beta &= 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha \\ \gamma &= 135^\circ - \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

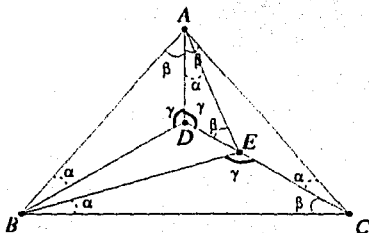


FIGURA 5.5. Caso II.3.a.

Supóngase que $AD = 1$, por ley de senos aplicada a $\triangle ABD$ y $\triangle CAD$ se obtiene que

$$BD = DC = \frac{\text{sen}(45 - \frac{\alpha}{2})}{\text{sen}\alpha} \quad (5.4)$$

Como $\triangle AED \sim \triangle CAD$ entonces

$$DE = \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{DC}$$

Además

$$\triangle BCE \sim \triangle CAD \Leftrightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{AC}$$

pues ya se tiene que

$$\angle BCE = \beta \Rightarrow \left(DC - \frac{1}{DC} \right) AC = BC$$

pero

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{BC}{2AB} = \frac{BC}{2AC}$$

lo cual implica que

$$DC - \frac{1}{DC} = 2 \operatorname{sen} \left(45 - \frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow$$

$$DC = \operatorname{sen} \left(45 - \frac{\alpha}{2} \right) + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \left(45 - \frac{\alpha}{2} \right) + 1} \quad (5.5)$$

Igualando (5.4) y (5.5) se obtiene que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$. Por lo tanto hay una sola configuración $T \sim$ conectable con $\alpha = \arcsen \left(\frac{1}{3} \right)$ en este caso (Fig 5.6).

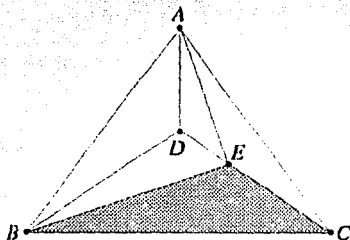
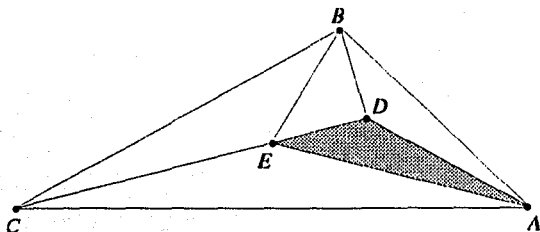


FIGURA 5.6. Configuración $T \sim$ conectable.

- ii. $\angle DAB = \alpha \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ - \alpha - \beta$ pues $\triangle AEB$ es isósceles $\Rightarrow \angle CEB = 90^\circ + \alpha + \beta > 90^\circ \Rightarrow \angle CEB = \gamma \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ + (\alpha + \beta) \Rightarrow 45^\circ = \alpha + \beta$.

Ahora si $AD = 1$, como en el caso anterior entonces como $\triangle AED \sim \triangle CAD$ se tiene que

$$CD = \frac{1}{ED} \quad (5.6)$$

FIGURA 5.7. Configuración $T \sim$ conectable.

además

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen}(45^\circ) = \text{sen} \angle DEB = \frac{DE}{BE} \Rightarrow \quad (5.7)$$

$$BE = \frac{2DE}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}DE$$

ahora se distinguirán los posibles valores de $\angle EBC$.

A. $\angle EBC = \beta$. Para ser $(P : 5) T \sim$ conectable, es condición necesaria y suficiente que $\frac{BE}{EC} = DE$, utilizando (5.6) y (5.7) se deduce que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}DE &= BE = DE \cdot EC = DE(DC - DE) \\ &= DE \left(\frac{1}{DE} - DE \right) = 1 - DE^2 \end{aligned}$$

de donde

$$DE = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

y es único en este caso (Fig 5.7).

B. $\angle EBC = \alpha$. Para ser $(P : 5) T \sim$ conectable, es condición necesaria y suficiente que $\frac{EC}{BE} = DE$, utilizando (5.6) y (5.7) se deduce que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}DE^3 &= DE^2(BE) = \\ &= DE \cdot EC = 1 - DE^2 \end{aligned}$$

de donde

$$DE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y es la única solución (Fig 5.8).

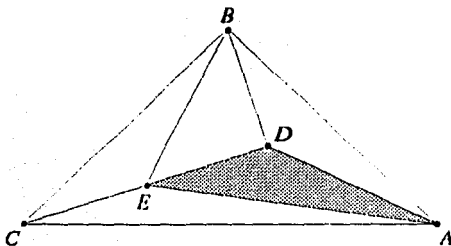


FIGURA 5.8. Configuración $T \sim$ conectable.

(b) $\angle EDA = \beta \Rightarrow \angle EAD = \alpha$ y $\angle DEA = \gamma$ de donde $\angle CAD = \beta$ pues $\angle CAD > \angle EAD$, esto último implica también que $\angle DCA = \alpha$. A continuación los posibles valores de $\angle DAB$.

i. $\angle DAB = \beta \Rightarrow \angle ABD = \alpha$, análogamente a 3(a) $\angle CEB = \gamma$ y como $EC < EB$ entonces $\angle EBC = \alpha$ y $\angle BCE = \beta$.

Sea $AB = a$ y $BD = CD = b$, además supóngase que $AD = 1$. Nótese que $DE = \frac{1}{AB}$ y $AE = \frac{BD}{AB}$ pues $\triangle ADE \sim \triangle BAD$. Por otro lado

$$BC = 2AB \sin \beta \Rightarrow BC^2 = 4a^2 (1 - \cos^2 \beta)$$

y por ley de cosenos en $\triangle BAD$

$$\cos \beta = \frac{a + 1 - b^2}{2a}$$

lo cual implica que

$$BC^2 = 4a^2 - (a^2 + 1 - b^2)^2$$

Por otro lado, nótese que

$$\angle AED = \angle CED = 90^\circ$$

de donde

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = a^2 - \frac{b^2}{a^2}$$

y

$$EC^2 = CD^2 - DE^2 = b^2 - \frac{1}{a^2}$$

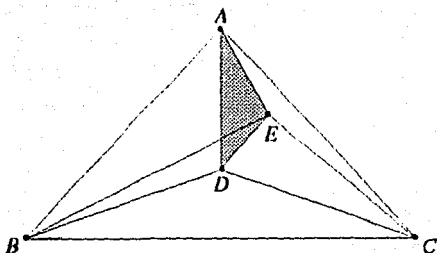


FIGURA 5.9. Configuración $T \sim$ conectable.

Se tiene también que $\triangle BCE \sim \triangle BAD$ implica que

$$\frac{BE^2}{EC^2} = BD^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^4$$

y también $\frac{EC^2}{BC^2} = \frac{1}{AB^2}$ de donde

$$a^2 b^2 - 1 = -a^4 - b^4 - 1 + 2a^2 + 2b^2 + 2a^2 b^2$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones se encuentra que la única pareja de soluciones reales que satisfacen $1 < b < a$ es $b = \sqrt{2}$ y $a = 2$. Por lo tanto $AB = 2$ y $BD = \sqrt{2}$ es la única solución que da origen a una configuración $T \sim$ conectable (Fig 5.9).

ii. $\angle DAB = \alpha \Rightarrow \angle ABD = \beta$. Distingan los posibles valores de $\angle EBC$.

A. $\angle EBC = \beta \Rightarrow \angle BCE = \alpha$

Sea $AD = 1$, $CD = a$ y $AC = b$. Como $\triangle ABD \sim \triangle CAD \sim \triangle ADE$ entonces $BD = \frac{1}{a}$, $AB = \frac{b}{a}$, $DE = \frac{1}{b}$ y $AE = \frac{a}{b}$. Usando ley de cosenos en $\triangle ADC$ se obtienen

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2ab} \quad (5.8)$$

$$\cos \beta = \frac{b^2 + 1 - a^2}{2b} \quad (5.9)$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + 1 - b^2}{2a} \quad (5.10)$$

Por otro lado también de la ley de cosenos en $\triangle ABE$ se tiene que

$$BE^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} - 2 \cos 2\alpha$$

Sustituyendo (5.8) y utilizando una identidad trigonométrica conocida se sigue que

$$BE^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - 1}{a^2 b^2}$$

Nuevamente, por ley de cosenos en $\triangle BDC$

$$BC^2 = \frac{1}{a^2} + a^2 - 2 \cos 2\gamma$$

sustituyendo (5.10) en la anterior se sigue que

$$BC^2 = \frac{(2a^2 + 2 - b^2) b^2}{a^2}$$

Ahora en virtud de que $\triangle CBE \sim \triangle CAD$ se tiene que

$$\frac{BC^2}{BE^2} = \frac{AC^2}{AD^2} \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{b^2 + 1}{2}$$

Por ley de cosenos en $\triangle AEC$

$$EC^2 = \frac{a^2}{b^2} + b^2 - 2a \cos(\beta - \alpha)$$

además

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

y por ley de senos en $\triangle CAD$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \beta}{a}$$

utilizando (5.8) y (5.9).

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{a^2 b^2 + b^2 - a^4 + 2a^2 - 1}{2ab^2}$$

de donde

$$EC^2 = \frac{b^4 - a^2 b^2 - b^2 + a^4 - a^2 + 1}{b^2}$$

si se sustituye $a^2 = \frac{b^2+1}{2}$ se obtiene

$$EC^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{b^4 - 2b^2 + 1}{b^2} \right)$$

también usando $a^2 = \frac{b^2+1}{2}$ se obtiene que

$$BE^2 = \frac{3}{a^2} = \frac{6}{b^2 + 1}$$

Nuevamente, como $\triangle CBE \sim \triangle CAD$

$$\frac{EC^2}{BE^2} = \frac{DC^2}{AD^2} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{b^4 - 2b^2 + 1}{b^2} \right) = a^2 \left(\frac{3}{a^2} \right) = 3 \Rightarrow$$

$$b^4 - 6b^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = 1 + \sqrt{2}$$

las opciones con signo menos quedan descartadas (pues $b > 1$), por lo que $a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ y entonces el triángulo de lados 1, a y b resulta ser acutángulo lo cual es imposible. Por lo tanto no hay configuraciones en este caso.

B. $\angle EBC = \alpha$

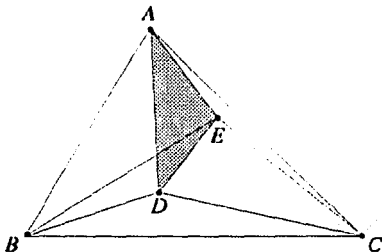


FIGURA 5.10. Configuración $T \sim$ conectable.

Por analogía al caso anterior se tiene que

$$BC^2 = \frac{b^2(2a^2 + 2 - b^2)}{a^2}$$

$$BE^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - 1}{a^2 b^2}$$

$$EC^2 = \frac{b^4 - a^2 b^2 - b^2 + a^4 - a^2 + 1}{b^2}$$

Ahora, como $\triangle BCE \sim \triangle CAD$ se tiene que

$$\frac{BC^2}{EC^2} = \frac{AC^2}{AD^2}, \quad \frac{BC^2}{BE^2} = \frac{AC^2}{CD^2} \Rightarrow$$

$$2b^2 + 2a^2 - 1 = a^4(b^4 - a^2 b^2 - b^2 + a^4 - a^2 + 1)$$

$$2b^2 + 2a^2 - 1 = a^2 b^2(2a^2 - b^2 + 2)$$

Una sola solución real del sistema (Apéndice A) cumple $1 < a < b$. Por lo tanto hay una única solución en este caso con valores aproximados $a = 1.21061$ y $b = 1.77423$ (Fig 5.10).

$$T_5((P : 5)T) = 5$$

Exceptuando simetrías hay dos casos:

$$1. T_1 \sim T_2 \sim T_6 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$$

no hay configuraciones en este caso de acuerdo a la Proposición 5.1 (inciso 4) aplicada a los triángulos T_1 , T_2 y T_{10} .

$$2. T_2 \sim T_3 \sim T_5 \sim T_7 \sim T_{10} \sim T$$

Como $T \sim T_2 \sim T_3$ y $\angle CDB < 180^\circ$ entonces

$$\angle ADB = \angle CDA = \gamma > 90^\circ$$

análogamente como $T \sim T_7 \sim T_5$ y $\angle AEC < 180^\circ$ entonces

$$\angle AEB = \angle CEB = \gamma > 90^\circ$$

lo cual implica que $AB \parallel DE$ y más aún $ABDE$ resulta ser un trapecio isósceles.

Ahora, como $T_{10} \sim T$ alguno de $\angle DEC$, $\angle ECD$ ó $\angle CDE$ vale γ de donde se infiere que D ó E es punto exterior lo cual es una contradicción. Por tanto no hay configuraciones en este caso.

III E EN EL SEGEMENTO AB Y D PUNTO INTERIOR.

$$T_4((P : 5)T) = 4$$

Por simetría hay seis casos:

$$1. T_1 \sim T_3 \sim T_6 \sim T_9 \sim T$$

no hay configuraciones en este caso de acuerdo a la Proposición 5.1 (inciso 4) aplicada a los triángulos T_1 , T_3 y T_9 .

$$2. T_1 \sim T_8 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$$

no hay configuraciones en este caso de acuerdo a la Proposición 5.1 (inciso 3) aplicada a los triángulos T_1 , T_8 , T_9 y T_{10} .

3. $T_1 \sim T_4 \sim T_7 \sim T_8 \sim T$

no hay configuraciones en este caso de acuerdo a la Proposición 5.1 (inciso 4) aplicada a los triángulos T_1 , T_4 y T_8 .

4. $T_2 \sim T_3 \sim T_7 \sim T_8 \sim T$

Como $T_3 \sim T_2 \sim T$ y $\angle BDC < 180^\circ$ entonces $\angle CDA = \angle BDA = \gamma > 90^\circ$

$$T_2 \sim T_7 \text{ y } \angle EBC > \angle ABD \Rightarrow \angle ABD = \alpha, \angle DAB = \beta$$

además $\angle EBC \neq \gamma$ pues $\angle ADC = \gamma$ y D es punto interior del triángulo $\triangle ABC$ lo cual implica que

$$\angle EBC = \beta, \angle CEB = \gamma, \angle BCE = \alpha$$

$\angle BCE \neq \gamma$ pues de lo contrario la suma de los ángulos internos en $\triangle ABC$ sería mayor que 180° . Como la suma de los ángulos internos en el triángulo $\triangle BCE$ es $\alpha + \beta + \gamma + \angle DCE$ se deduce que $\angle DCE = 0$ (i.e. C , D y E son colineales), entonces $\angle AED = 180^\circ - \gamma < 90^\circ$. Como $T_8 \sim T$ y $\angle DAE = \beta$ se deduce que $\angle AED = \alpha$, por consiguiente A , E y B no serían colineales, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto no hay configuraciones en este caso.

5. $T_2 \sim T_4 \sim T_6 \sim T_9 \sim T$

Dado que $T_2 \sim T_4 \sim T$ y $\angle ADC < 180^\circ$

$$\angle BDA = \angle CDB = \gamma > 90^\circ$$

además, como $T_2 \sim T_6 \sim T$ y $\angle DAB < \angle CAE$ se tiene que

$$\angle DAB = \alpha, \angle ABD = \beta$$

por otra parte $T_9 \sim T$ implica que

$$\angle BDE = \alpha, \angle DEB = \gamma$$

Distínganse los siguientes dos casos de acuerdo al valor de $\angle DBC$.

- (a) $\angle DBC = \beta \Rightarrow \angle BCD = \alpha$ de donde $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ y por lo tanto $BC = BA \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \beta = 45^\circ$. Sean $AB = BC = 1$ y consecuentemente $AC = \sqrt{2}$. Como $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ entonces

$$AE = \sqrt{2}BD$$

Por ley de senos en $\triangle ABD$ y $\triangle BDE$ se tiene que

$$BD = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} \text{ y } BE = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\gamma}$$

Ahora, dado que

$$\frac{\sqrt{2}\text{sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} = \sqrt{2}BD = AE =$$

$$AB - BE = \frac{\text{sen}^2\gamma - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\gamma}$$

y $\gamma = 135^\circ - \alpha$ se obtiene que $\alpha = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ (i.e. $\alpha = 30^\circ$)
 Por lo tanto hay una configuración con T el triángulo de ángulos $30^\circ, 45^\circ, 135^\circ$ y es la única solución en este caso (Fig 5.11).

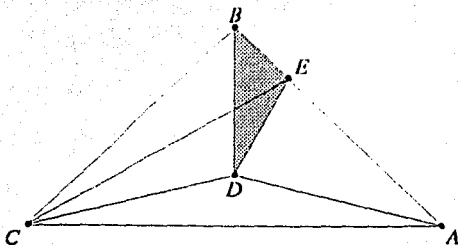


FIGURA 5.11. Configuración $T \sim$ conectable.

$$(b) \angle DBC = \alpha \Rightarrow \angle BCD = \beta$$

Sean $AD = b$, $AB = a$ y $BD = 1$.

Como $\triangle ABD \sim \triangle DBE \sim \triangle BCD$ entonces

$$DE = \frac{b}{a}, EB = \frac{1}{a}, CD = \frac{1}{b}, BC = \frac{a}{b}$$

$$AE = AB - EB = \frac{a^2 - 1}{a}$$

$\triangle ECB$ es isósceles pues $\angle BEC = \angle CBE$ y ésto implica que $\triangle CAE \sim \triangle ABD$ y por consiguiente

$$b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 1}$$

Aplicando la ley de senos a $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ se obtiene que

$$\frac{AC}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{BC}{\text{sen}\beta} \Rightarrow$$

$$AC = \frac{a \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}\beta} = \frac{a^2}{b^2}$$

Por ley de cosenos en $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ se sigue que

$$\cos \gamma = \frac{b^2 + 1 - a^2}{2b}$$

y

$$AC^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{b} \cos \gamma \right)$$

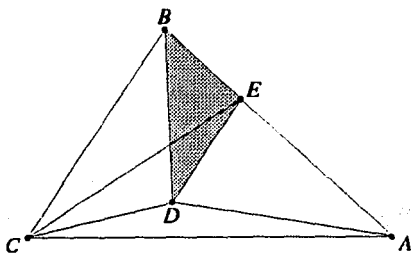
i.e.

$$AC^2 = \frac{a^2}{b^2} (2b^2 + 2 - a^2)$$

De todo lo anterior se tiene que

$$a^2 = b^2 (2b^2 - a^2 + 2)$$

y como $b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 1}$ entonces $a^2 = 3$ (pues si $a^2 = \frac{1}{2}$, $b^2 = -1$ lo cual es imposible). De aquí se tiene que $a = \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$ es la única solución que dá origen a una configuración T ~conectable en este caso (Fig 5.12).

FIGURA 5.12. Configuración $T \sim$ conectable.

$$6. T_2 \sim T_6 \sim T_7 \sim T_{10} \sim T$$

Como $T \sim T_6 \sim T_7$ se tiene que $\angle CEA = \angle CEB = 90^\circ = \gamma$. Ahora, como $\angle BDA = \gamma = 90^\circ$, entonces $\angle BCA = \angle BCE + \angle ECA < 90^\circ$ lo cual implica que $\angle BCE = \angle ECA = \alpha$ y entonces como $T_{10} \sim T$ y $\angle ECD < \angle ECA = \alpha$ se obtiene una contradicción.

$$T_2((P:5), T) = 5$$

Por simetría hay cinco casos

1. $T_1 \sim T_2 \sim T_6 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$. No hay configuraciones en este caso de acuerdo a la Proposición 5.1 (inciso 4) aplicada a los triángulos T_1, T_2 y T_{10} .
2. $T_1 \sim T_2 \sim T_7 \sim T_8 \sim T_{10} \sim T$. Análogo a 1.
3. $T_1 \sim T_3 \sim T_7 \sim T_8 \sim T_9 \sim T$. Análogo a 1. con T_1, T_3 y T_9 .
4. $T_1 \sim T_4 \sim T_6 \sim T_8 \sim T_9 \sim T$. Análogo a 1. con T_1, T_4 y T_8 .
5. $T_2 \sim T_3 \sim T_6 \sim T_7 \sim T_9 \sim T$. Como $T \sim T_6 \sim T_7$ se sigue por analogía al caso 6. del párrafo anterior que $\angle CEA = \angle CEB = 90^\circ = \gamma$.

Dado que $T_9 \sim T$, si $\angle BCA \geq 90^\circ$ entonces $\angle BDE = \gamma = 90^\circ$ y como $T_2 \sim T$ y $\angle BDA > \angle BDE = \gamma$ se obtiene una contradicción.

Si, por el contrario, $\angle BCA < 90^\circ$ entonces $\angle BCE = \angle ECA = \alpha$ y $\angle CAE = \angle EBC = \beta$.

Si además $\angle BDE = \gamma$ se sigue el argumento de la contradicción anterior, de otro modo se tiene que $\angle EBD < \angle EBC = \beta$ lo cual implica que $\angle EBD = \alpha$ y $\angle DEB = 90^\circ$. Como además $T_2 \sim T$ entonces

$$\angle BDA = 2\beta = \gamma = 90^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ = \alpha$$

lo cual es una contradicción, por lo que no hay configuraciones T ~conectables en este caso.

5.3.2 CASO CONVEXO CUADRILÁTERO

Sean A, B, C y D los vértices de la envolvente convexa (en ese orden). Se procederá análogamente a la subsección anterior, es decir, primero se clasificarán las configuraciones de acuerdo con que E esté en la frontera del cuadrilátero $ABCD$ o en su interior y posteriormente de acuerdo al número de triángulos semejantes a T igual que en la subsección anterior la tabla Fig 5.13 resume el análisis de los casos.

IV E EN LA FRONTERA DE $ABCD$.

Se supondrá sin perder generalidad que $E \in AB$.

$$T_s((P : 5), T) = 4$$

Por simetría hay esencialmente tres casos distintos.

1. $T_1 \sim T_8 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$

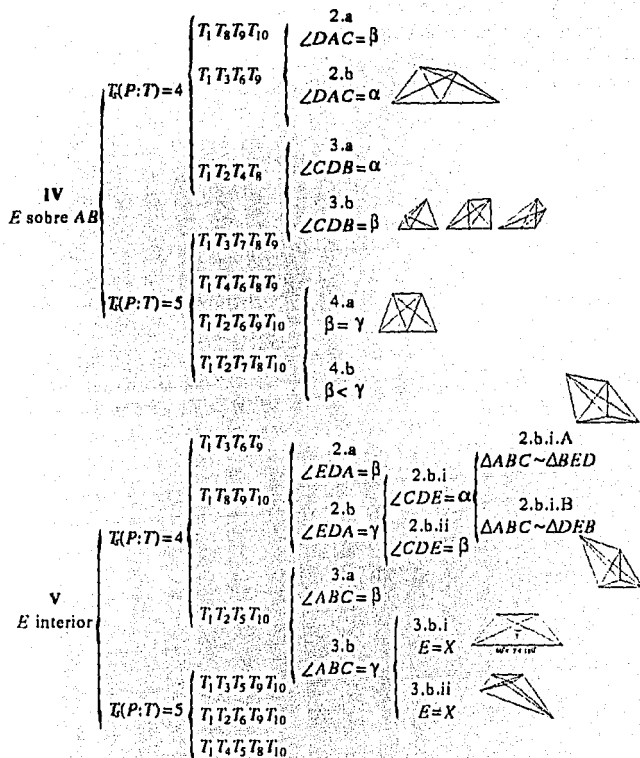


FIGURA 5.13. Resumen del análisis por casos de las configuraciones $T \sim$ conectables con 5 puntos y casco convexo cuadrilátero.

Como $T_8 \sim T_9$ y A, E y B son colineales entonces $\angle DEB = \angle AED = \gamma = 90^\circ$, además $\triangle BED \cong \triangle AED$ pues si $\triangle BED \sim \triangle DEA$ entonces se tendría una subconfiguración como la descrita en el Teorema 18. También $T_1 = \triangle ABC$ es semejante a T por lo que C es colineal con B y D , (si $\triangle ABC \sim \triangle DAE$) o C es colineal con A y D . (si $\triangle ABC \sim \triangle AED$)

2. $T_1 \sim T_3 \sim T_8 \sim T_9 \sim T$

Recuérdese que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ son los ángulos de T .

$\angle ABC > \angle EBD$ y $\angle BCA > \angle ECA \Rightarrow \angle ABC \neq \alpha$ y $\angle BCA \neq \alpha \Rightarrow \angle CAB = \angle CAE = \alpha$ (pues $T_1 \sim T$). Por otro lado $\angle ECA < \angle BCA \Rightarrow \angle ECA \neq \gamma$ y además $\angle CAE = \alpha$ de donde $\angle ECA \neq \alpha$, estas dos últimas implican que $\angle ECA = \beta$ y consecuentemente $\angle AEC = \gamma$ ($T_8 \sim T$). También $\angle BCA = \gamma$ pues $\beta = \angle ECA < \angle BCA$ y $T_1 \sim T$, por lo que también se tiene que $\angle ABC = \beta$. Como $T_9 \sim T$ y $\angle BDE < \angle CDA$, entonces $\angle BDE \neq \gamma$. Además $\beta = \angle ABC > \angle EBD$ de donde ($T_9 \sim T$) $\angle EBD = \alpha$, $\angle DEB = \gamma$ y $\angle BDE = \beta$; esta última implica a su vez que $\angle CDA = \gamma$ ($T_3 \sim T$, Fig 5.14).

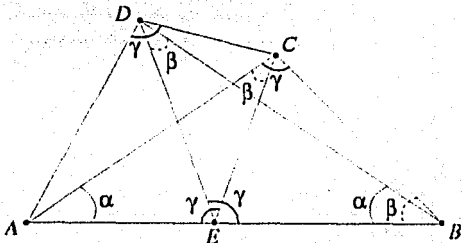


FIGURA 5.14. Caso IV.2.

Esta es toda la información que se puede obtener acerca de los ángulos de la configuración a partir de las hipótesis. A continuación distínganse dos casos.

(a) $\angle DAC = \beta$

Como $T_3 \sim T$ entonces $\angle ACD = \alpha$. Resulta entonces que el segmento AD está sustentado por ángulos α desde B y C , esto implica que los puntos A, B, C y D son cocíclicos; de esto último se infiere que $\beta = \angle CAD = \angle CBD < \beta$ lo cual es una contradicción.

(b) $\angle DAC = \alpha$

$T_3 \sim T \Rightarrow \angle ACD = \beta$. Sean $AD = AE = a$, $AC = b$ y $CD = CE = 1$.

Utilizando que $\triangle ACD \cong \triangle ACE \sim \triangle ABC \sim \triangle BDE$ se tiene que.

$$AB = \frac{b^2}{a}, BC = \frac{b}{a} \text{ y } BE = AB - AE = \frac{b^2 - a^2}{a}$$

También se tiene que

$$DE = \frac{BE}{a} = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \quad (5.11)$$

y

$$BD = \frac{BE \cdot b}{a} = \frac{b(b^2 - a^2)}{a^2} \quad (5.12)$$

Por otro lado, utilizando la ley de cosenos en el triángulo $\triangle AEC$

$$1 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) \quad (5.13)$$

y en el $\triangle BDC$ se tiene que

$$BD^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b}{a} \cos(\gamma + \beta) = 1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a} \cos(\alpha) \quad (5.14)$$

Finalmente, por la ley de senos en $\triangle ADE$ se obtiene

$$DE = 2a \sin(\alpha) \quad (5.15)$$

Sustitúyase ahora (5.13) en (5.14) y (5.15), y posteriormente iguálense estas últimas con (5.11) y (5.12) respectivamente para obtener el sistema

$$\begin{aligned} b^2 (b^2 - a^2)^2 &= a^2(2a^2 + 2b^2 - 1) \\ b^2 (b^2 - a^2)^2 &= -a^4 (a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - 2a^2 - 2b^2 + 1) \end{aligned}$$

sujeto a la restricción $1 < a < b$ y $a + 1 > b$. Existe una única solución al sistema (ver Apéndice A) con valores aproximados $a = 1.3525$ y $b = 2.0087$ la cual dá origen a una única configuración $T \sim$ conectable en este caso (Fig 5.15).

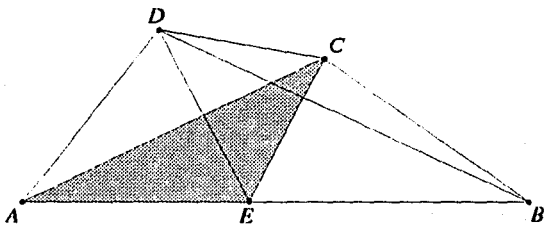


FIGURA 5.15. Configuración $T \sim$ conectable.

3. $T_1 \sim T_2 \sim T_4 \sim T_8$

Debido a que $\angle BCD > \angle BCA > \angle BCE$ y todos éstos forman parte de triángulos semejantes a T , se tiene que $\angle BCD = \gamma$, $\angle BCA = \beta$ y $\angle BCE = \alpha$. Por otro lado $\angle DBC < \angle ABC = \angle EBC \Rightarrow \angle ABC = \angle EBC \neq \alpha \Rightarrow \angle CAB = \alpha$ (pues $T_1 \sim T$), consecuentemente $\angle ABC = \angle EBC = \gamma$ y $\angle CEB = \beta$ (Fig 5.16).

Distínganse los siguientes dos casos.

- (a) $\angle CDB = \alpha$ y $\angle DBC = \beta$

Es decir A, B, C y D son cocíclicos, y por lo tanto $\beta = \angle DBC = \angle DAC$ (pues sustentan el mismo arco). Entonces $\gamma = \angle BCD$ y $\angle DAB = \angle CAB + \angle DAC = \alpha + \beta$ son suplementarios y por lo tanto $\gamma = 90^\circ$ de donde se obtiene una subconfiguración como en el Teorema 18.

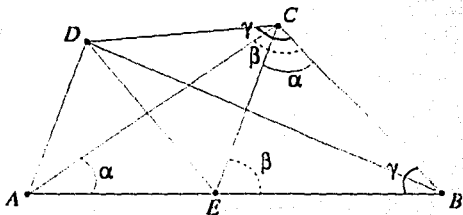


FIGURA 5.16. Caso IV.3.

(b) $\angle CDB = \beta$ y $\angle DBC = \alpha$

Es decir E, B, C y D son cocíclicos y más aun $\triangle BDC \cong \triangle CEB$. De donde $\angle DEC = \angle DBC = \angle BDE = \alpha$ y entonces $\angle AED = 180^\circ - \angle DEB = 180^\circ - \angle DEC - \angle CEB = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma$. Por otro lado, como $\triangle DAE \sim T$ y $\angle DAE > \angle CAE$ entonces $\angle DAE = \beta$ y $\angle EDA = \alpha$. Sean $1 = BC < AB = a < AC = b$.

A continuación se encontrarán los valores de DE y AE en función de a y b . Como $\triangle ABC \sim \triangle CBE$ se tiene que

$$BE = CD = \frac{1}{a} \text{ y } CE = \frac{b}{a} \quad (5.16)$$

Utilizando (5.16) y la ley de cosenos en $\triangle CDE$ se obtiene que

$$DE^2 \cdot a^2 = b^2 + 1 - 2b \cos(\gamma - \alpha) \quad (5.17)$$

Nuevamente por la ley de cosenos en $\triangle ABC$ se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) \\ b^2 &= 1 + a^2 - 2a \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Utilizando la fórmula $\cos(\gamma - \alpha) = \cos(\alpha) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma)$ en (5.17), y después sustituyendo (5.18) se obtiene que

$$DE^2 \cdot a^4 = (b^2 - 1)^2 \quad (5.19)$$

Por otro lado de (5.16) se tiene que

$$AE = AB - BE = a - \frac{1}{a} \quad (5.20)$$

Ahora, $\triangle AED \sim \triangle CBA \Leftrightarrow AE \cdot a = DE$ (puesto que $\angle DEA = \gamma$) y esto último ocurre si y solo si. (sustituyendo (5.19) y (5.20))

$$a^2(a^2 - 1) = b^2 - 1$$

Es decir para que exista una configuración con triángulo T de lados $1 < a < b$ tal triángulo debe estar sujeto a las restricciones $1 + a > b$ y $a^2(a^2 - 1) = b^2 - 1$. Además para cada triángulo T que cumpla las citadas restricciones es posible construir la configuración (P: 5) (Fig 5.17).

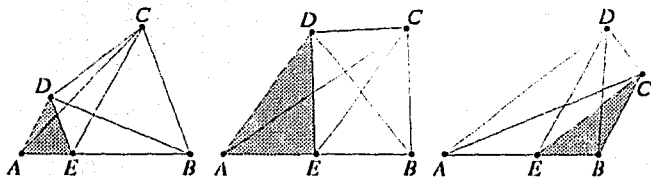


FIGURA 5.17. Conjuntos T ~conectables de lados $1, a, \sqrt{a^4 - a^2 + 1}$ con $a = 1.2, 1.4$ y 1.6 respectivamente.

Por lo tanto en este caso se encuentra una única configuración para cada T de lados $1, a$ y $\sqrt{a^4 - a^2 + 1}$ con a

entre 1 y 1.7692 aproximadamente (Ver Apéndice A para esta última cota).

$$T_5((P : 5), T) = 5$$

Salvo simetría se tienen los siguientes cuatro casos

$$1. T_1 \sim T_3 \sim T_7 \sim T_8 \sim T_9 \sim T$$

Dado que $T_8 \sim T_9$ entonces $\angle AED = \angle DEB = \gamma = 90^\circ$, y por analogía con 1. del párrafo anterior no hay configuraciones posibles en este caso.

$$2. T_1 \sim T_4 \sim T_6 \sim T_8 \sim T_9 \sim T$$

De la misma forma que en el caso anterior $T_8 \sim T_9$ y por lo tanto no hay configuraciones en este caso.

$$3. T_1 \sim T_2 \sim T_6 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$$

Como $\angle BDE < \angle CDE$ y $\angle ECA < \angle ECD$ entonces se tiene que $\alpha = \angle DEC$. (pues $T_{10} \sim T$)

Dada la simetría de la figura supóngase que $\angle CDE = \beta$ y $\angle ECD = \gamma$, entonces por la primera desigualdad se tiene que $\angle BDE = \alpha$ y consecuentemente $\angle ABD = \beta$ (pues $\angle ABD < \angle ABC$). Esto último implica que $\angle BDA = \gamma$ y $\angle DAB = \alpha$, ($T_2 \sim T$) lo cual es una contradicción pues $\angle CAE < \angle DAB$. Por lo tanto no hay configuraciones en este caso.

$$4. T_1 \sim T_2 \sim T_7 \sim T_8 \sim T_{10} \sim T$$

Se tienen las siguientes desigualdades: $\angle CAB < \angle DAE$, $\angle ABD < \angle EBC$, $\angle EDA < \angle BDA$ y $\angle BCE < \angle BCA$. Además $\angle CAB = \beta \Rightarrow \angle BCA = \gamma$ y $\angle ABC = \alpha$ lo cual es contradictorio, pues $\angle ABC = \angle EBC \neq \alpha$, por lo tanto $\angle CAB = \alpha$ y análogamente $\angle ABD = \alpha$.

Distínganse los siguientes dos casos.

(a) $\beta = \gamma$. Se tiene entonces que $\triangle AED \cong \triangle EBC \cong \triangle CDE \sim \triangle DAB \cong \triangle BCA$ y además todos son isósceles. Sean $AE = EB = CD = 1$ y $AD = DE = EC = CB = a$.

Entonces por semejanza se tiene que $a^2 = 2$ (i.e. $a = \sqrt{2}$) lo cual es suficiente para tener una única configuración $T \sim$ conectable (Fig 5.18).

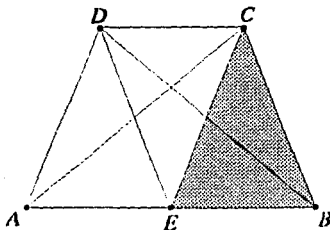


FIGURA 5.18. Configuración $T \sim$ conectable.

- (b) $\beta < \gamma$. $\angle EDA = \beta \Rightarrow \angle DAE = \gamma = \angle DAB$ y $\angle BDA = \gamma$ lo cual contradice el hecho de haber un solo ángulo γ en $\triangle ABD$. Por lo tanto $\angle EDA = \alpha$ y análogamente $\angle BCE = \alpha$.

Nuevamente se tienen dos casos.

- i. $\angle DEC = \alpha$

$DE \parallel BC$ y $AD \parallel CE$. Luego, sin perder generalidad $\angle DAE = \gamma$ (pues si $\angle DAE = \angle EBC = \beta$ entonces $\angle AED = \angle CEB = \gamma$ y por lo tanto $180^\circ = \angle AEB = 2\gamma + \alpha > \gamma + \beta + \alpha = 180^\circ$) y entonces $\angle CEB = \gamma$, $\angle EBC = \beta$, $(T_7 \sim T)$ $\angle EBD = \alpha$, $\angle BDA = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Además $\angle ECD \neq \gamma$ pues de lo contrario los cuadriláteros $AECD$ y $EBCD$ serían rombos y como consecuencia se tendría que $\beta = \gamma$, consecuentemente $\angle ECD = \beta$ y $\angle CDE = \gamma$ ($T_{10} \sim T$) de donde el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y por lo tanto $\beta = \angle BDA = \angle BCA = \gamma$ nuevamente contradiciendo la hipótesis.

- ii. $\angle DEC > \alpha$ Como además $\angle CEB$ y $\angle AED$ son distintos de α entonces

$$180^\circ = \angle DEC + \angle CEB + \angle AED \geq 3\beta$$

y más aun, basta con que alguno de estos tres ángulos sea distinto de β para obtener

$$180^\circ \geq 2\beta + \gamma > \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto $\angle DEC = \angle CEB = \angle AED = \beta = 60^\circ$.

De inmediato se infiere que E es el punto medio de AB , y consecuentemente $\beta = \gamma$. Por lo que no hay configuraciones $T \sim$ conectables en este caso.

V E EN EL INTERIOR DE ABCD

$$T_s((P : 5), T) = 4$$

Exceptuando simetrías se tienen los siguientes tres casos.

1. $T_1 \sim T_3 \sim T_6 \sim T_9$. Debido a que se tienen las desigualdades $\angle CAE < \angle DAC$, $\angle ACE < \angle ACD$, $\angle BDE < \angle CDA$ y todos estos ángulos forman parte de triángulos semejantes a T entonces se infiere que ninguno de los ángulos $\angle DAC$, $\angle ACD$, $\angle CDA$ vale α (el ángulo menor de T) lo cual es una contradicción, pues $T_3 \sim T$. Por lo tanto no hay configuraciones en este caso.
2. $T_1 \sim T_8 \sim T_9 \sim T_{10}$.

Dado que $T_9 \sim T$ se supondrá sin perder generalidad que E está en el interior de $\triangle BCD$. Como $\angle EDB < \angle EDA$, $\angle DBE < \angle ABC$ y $T_9 \sim T$ se tiene que $\angle BED = \gamma$ (el ángulo mayor de T).

Si $\angle EBD = \alpha$ y $\angle EDB = \beta$ entonces, en virtud de que $\angle EDB < \angle EDA$, se infiere que $\angle EDA = \gamma$ y por consiguiente $\angle AED = \beta$ y $\angle DAE = \alpha$, es decir los puntos A, B, E

y D son cocíclicos y por lo tanto $\angle EAB = \angle ABD$. Además $\angle ABC > \angle ABD = \beta \Rightarrow \angle ABC = \gamma$.

Por otra parte se tiene que $\angle ECD$ y $\angle CDE$ son ambos menores que γ pues de lo contrario la suma de ángulos internos de $ABCD$ excedería 360° , por lo tanto $\angle CED = \gamma$ y consecuentemente $\angle CEA = \angle AED + \angle CED = \gamma + \beta < 180^\circ$. De esto último se sigue que $\angle CAB > \angle EAB = \beta$, es decir $\angle CAB = \gamma$, lo cual es una contradicción pues $\angle ABC = \gamma$ y T_1 no puede tener dos ángulos iguales entre sí.

De todo lo anterior se infiere que $\angle EBD \neq \alpha$, es decir $\angle EBD = \beta$ y por consiguiente $\angle EDB = \alpha$. Además, como $\angle ABC > \angle DBE$ se tiene que $\angle ABC = \gamma$. A continuación distínganse los dos posibles valores de $\angle EDA$.

- (a) $\angle EDA = \beta$. Como $T_3 \sim T$ y $\angle AED < \angle BED$ se sigue que $\angle AED = \alpha$ y $\angle DAE = \gamma$.

Por otro lado $\angle ABD < \angle CBA - \angle EBD = \gamma - \beta$ de donde $\angle EAB > 2\alpha + \beta - \gamma$ y por consiguiente los ángulos $\angle ECD$, $\angle ECD$ son ambos distintos de γ (de otro modo los ángulos internos de $ABCD$ sumarían más de 360°), es decir $\angle DEC = \gamma$. En seguida se considerarán los posibles valores de $\angle CDE$.

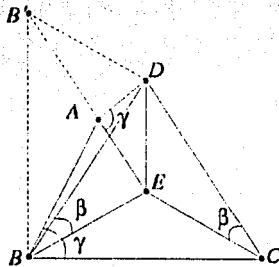


FIGURA 5.19. Caso V.2.a

Si $\angle CDE = \alpha$ entonces $\angle DBC = 90^\circ - \alpha$, $\angle ABD = \gamma + \alpha - 90^\circ$ y por consiguiente $\angle ABE = 90^\circ$. Esto último es imposible, pues si B' es tal que $B'BED$ es un trapecio isósceles (Fig 5.19), entonces $\angle B'BE < 90^\circ$ y además $\angle B'BE > \angle ABE$. Por lo tanto $\angle CDE = \beta$ y $\angle ECD = \alpha$. Considérense ahora los dos posibles valores de $\angle BCA$.

i. $\angle BCA = \alpha$. Se tiene que $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, entonces

$$\frac{DC}{AC} = \frac{EC}{BC}$$

y como además $\angle ACD = \angle CDA$ se infiere que $\triangle BCE \sim \triangle ACD$ por lo que

$$\begin{aligned} \angle CEB &= \angle CDA \Rightarrow \\ 360^\circ - 2\gamma &= 2\beta \end{aligned}$$

es decir $\gamma + \beta = 180^\circ$ lo cual es una contradicción, por lo que no hay configuraciones en este caso.

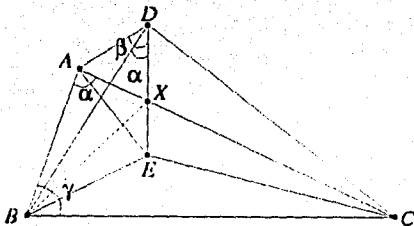


FIGURA 5.20. Caso V.2.a.i.

ii. $\angle BCA = \beta$. Sea $X = AC \cap DE$ (en efecto estos segmentos se intersectan pues $\angle AEC < 180^\circ$, Fig 5.20). Dado que $\angle XDB = \angle XAB$ se tiene que el cuadrilátero $BXDA$ es cíclico y por lo tanto $\angle ABX = 180^\circ - \beta$ pero entonces

$$\angle ABC = \gamma > \angle ABX = 180^\circ - \beta$$

es decir $\gamma + \beta > 180^\circ$, nuevamente una contradicción, por lo que no hay configuraciones en este caso.

- (b) $\angle EDA = \gamma$. Si $\angle DAE = \beta$ entonces $360^\circ = \angle EDA + \angle DAB + \angle ABC + \angle BCE + \angle ECD + \angle CDE = \gamma + (\alpha + \beta) + \gamma + \angle BCE + \angle ECD + \angle CDE$ y como $T_{10} \sim T$ y E está en el interior de $ABCD$, entonces $\angle BCE + \angle ECD + \angle CDE > \alpha + \beta$ de donde

$$360^\circ > 2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $\angle DAE = \alpha$ y $\angle AED = \beta$.

Como E está en el interior de $\triangle CDB$, entonces $\angle DEC = \gamma$ (de lo contrario $\angle BED + \angle DEC < 180^\circ$, Fig 5.21). Sean

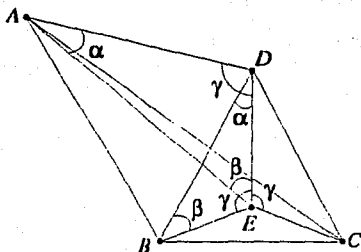


FIGURA 5.21. Caso V.2.b.

$BE = 1$, $AD = a$ y $BD = b$. Dado que $\triangle AED \sim \triangle DBE$ se tiene que $AE = ab$ y $AD = a^2$. Aplicando la ley de cosenos a $\triangle BDE$ se obtienen

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2ab} \quad (5.21)$$

$$\cos \beta = \frac{b^2 + 1 - a^2}{2b} \quad (5.22)$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + 1 - b^2}{2a} \quad (5.23)$$

También por ley de cosenos en $\triangle ABE$ se tiene que

$$AB^2 = a^2b^2 + 1 - 2ab \cos(\gamma - \beta)$$

Utilizando (5.22) y (5.23), así como las identidades $\sin \gamma = \frac{b \sin \beta}{a}$ y $\cos(\gamma - \beta) = \cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta$ en la anterior se obtiene

$$AB^2 = b^4 + a^4 - a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$$

Considérense ahora los siguientes dos casos

- i. $\angle CDE = \alpha$. En cuyo caso $\triangle CDE \cong \triangle BDE$ y por lo tanto $EC = 1$ y $CD = b$. $\triangle BDC$ es isósceles y por lo tanto $BC = 2BD \sin \alpha$, elevando al cuadrado y sustituyendo (5.21) se obtiene que

$$BC^2 = \frac{1}{a^2} (-a^4 - b^4 + 2a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 1) \quad (5.24)$$

Por otro lado, de la ley de cosenos aplicada a $\triangle AEC$ se obtiene que

$$AC^2 = a^2b^2 + 1 - 2ab \cos(\gamma + \beta)$$

utilizando el hecho de que $\cos(\gamma + \beta) = -\cos \alpha$ y sustituyendo (5.21) se sigue que

$$AC^2 = a^2b^2 + a^2 + b^2 \quad (5.25)$$

Como $T_1 \sim T$ existen dos posibilidades.

A. $\triangle ABC \sim \triangle BED$, de donde

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{BD} \text{ y } \frac{BC}{AC} = \frac{ED}{CD}$$

i.e.

$$b \cdot AB = AC \text{ y } b \cdot BC = a \cdot AC$$

sustituyendo (5.24) y (5.25) se obtiene el sistema

$$b^2(b^4 + a^4 - a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) = a^2b^2 + a^2 + b^2$$

$$b^2 \left(-(a^2 - b^2)^2 + 2a^2 + 2b^2 - 1 \right) = a^4(a^2b^2 + a^2 + b^2)$$

sujeto a las restricciones $1 < a < b$ y $a+1 > b$. Los únicos valores que satisfacen el sistema son $a = 1.16327$ y $b = 1.68261$ (ver Apéndice A). Por lo tanto hay una única configuración $T \sim$ conectable en este caso (Fig 5.22).

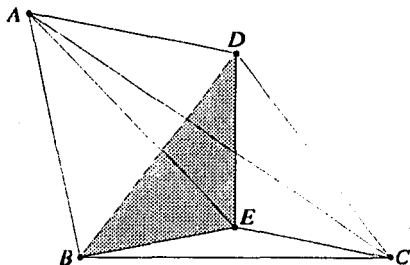


FIGURA 5.22. Configuración $T \sim$ conectable.

B. $\triangle ABC \sim \triangle DEB$, de donde

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{BD} \text{ y } \frac{BC}{AC} = \frac{EB}{DB}$$

i.e.

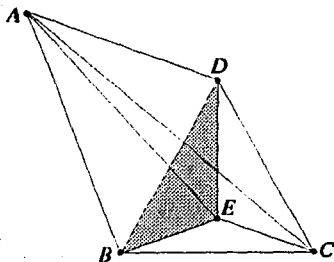
$$b \cdot AB = a \cdot AC \text{ y } b \cdot BC = AC$$

sustituyendo (5.24) y (5.25) se obtiene el sistema

$$b^2(b^4 + a^4 - a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) = a^2(a^2b^2 + a^2 + b^2)$$

$$b^2(-(a^2 - b^2)^2 + 2a^2 + 2b^2 - 1) = a^2(a^2b^2 + a^2 + b^2)$$

sujeto a las restricciones $1 < a < b$ y $a+1 > b$. los únicos valores que satisfacen el sistema son $a = \sqrt{2}$ y $b = 2$ (ver Apéndice A). Por lo tanto hay una única configuración $T \sim$ conectable en este caso (Fig 5.23).

FIGURA 5.23. Configuración $T \sim$ conectable.

- ii. $\angle CDE = \beta$, de donde $AECD$ es un paralelogramo, es decir $EC = a^2$ y $CD = ab$. Por ley de cosenos en $\triangle AEC$ se sigue que

$$AC^2 = a^2b^2 + a^4 - 2a^3b \cos(\gamma + \beta)$$

nuevamente, como $\cos(\gamma + \beta) = -\cos\alpha$ se puede sustituir (5.21) en la anterior y obtener

$$AC^2 = a^2(2a^2 + 2b^2 - 1) \quad (5.26)$$

Por otro lado, aplicando la ley de cosenos a $\triangle BCE$ se obtiene que

$$BC^2 = 1 + a^4 - 2a^2 \cos(2\gamma)$$

utilizando la identidad $\cos(2\gamma) = 2\cos^2(\gamma) - 1$ y sustituyendo (5.21) se sigue que

$$BC^2 = b^2(2a^2 + b^2 + 2) \quad (5.27)$$

Análogamente al caso anterior, se procederá de acuerdo con que $\triangle ABC \sim \triangle BED$ o $\triangle ABC \sim \triangle DEB$. Después de sustituir (5.26) y (5.27) en las proporciones de semejanza se obtienen los sistemas

$$b^2(b^4 + a^4 - a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) = a^2(2a^2 + 2b^2 - 1)$$

$$b^4(2a^2 + b^2 + 2) = a^4(2a^2 + 2b^2 - 1)$$

y

$$b^2(b^4 + a^4 - a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) = a^4(2a^2 + 2b^2 - 1)$$

$$b^4(2a^2 + b^2 + 2) = a^2(2a^2 + 2b^2 - 1)$$

Para el primero hay una única solución que satisface $1 < a < b$, pero el triángulo al que da lugar resulta ser acutángulo (Apéndice A), lo cual no es posible. La segunda no tiene soluciones reales que satisfagan $1 < a < b$ (Apéndice A). Por lo tanto no hay configuraciones en este caso.

3. $T_1 \sim T_2 \sim T_3 \sim T_{10} \sim T$

Se tiene que $\angle EAB < \angle DAB$ y $\angle ABE < \angle ABC$ y como $T_3 \sim T$ entonces $\angle BEA = \gamma$. Sin perder generalidad supóngase que $\angle DAB = \gamma$ y $\angle ABC \geq \beta$. Distinganse dos casos.

- (a) $\angle ABC = \beta$, de donde $\triangle ABC \cong \triangle BAE$, además $\angle ABD \neq \gamma$ pues $\angle ABD < \angle ABC$ y también $\angle ABD \neq \beta$ pues de lo contrario B, C y D serían colineales. Por lo tanto $\angle ABD = \alpha$ y consecuentemente B, E y D son colineales (Fig 5.24). Además, como $T_{10} \sim T$ y $\angle DEC =$

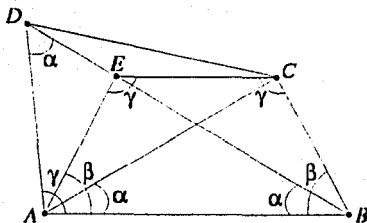


FIGURA 5.24. Caso V.3.a

$$180^\circ - \angle CEB = 180^\circ - \alpha \text{ entonces}$$

$$180^\circ - \alpha = \angle DEC \leq \gamma \Rightarrow 180^\circ \leq \alpha + \gamma$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto no hay configuraciones en este caso.

- (b) $\angle ABC = \gamma$. Sea $X = AC \cap BD$. Si $E \in \triangle AXB$ propiamente entonces $\angle EAB < \angle CAB < \gamma$, $\angle ABE < \angle ABD < \gamma$ y consecuentemente $\angle EAB = \angle ABE = \alpha$ lo cual no es posible. De igual forma, si $E \in \triangle DXC$ propiamente entonces $\angle ABD < \angle ABE < \gamma$, $\angle CAB < \angle EAB < \gamma$ y por consiguiente $\angle ABE = \angle EAB = \beta$ lo cual tampoco es posible.

De lo anterior se deduce que $E \in \triangle AXD \cup \triangle BCX$. Sin perder generalidad se supondrá que $E \in \triangle AXD$. Como $T_5 \sim T$ se tienen dos opciones.

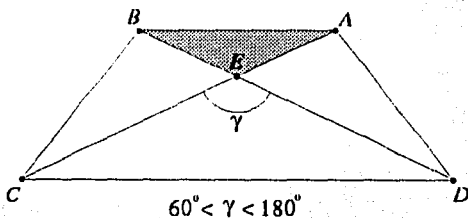


FIGURA 5.25. Una configuración $T \sim$ conectable para cada alfa.

- i. $E = X$. Sean $1 > BE = a \geq AE = b$. Como $\triangle ABE \sim \triangle ACB \sim \triangle DBA$ se sigue que $AC = \frac{1}{b}$ y $BD = \frac{1}{a}$, de donde

$$EC = AC - CE = \frac{1}{b} - b$$

$$ED = BD - BE = \frac{1}{a} - a$$

Además $T_{10} \sim T$, y como $ED \geq EC$ entonces

$$\frac{\frac{1}{a} - a}{\frac{1}{b} - b} = \frac{b}{a}$$

- i.e. $a = b$ y esto es suficiente para tener una configuración $T \sim$ conectable, entonces si $60^\circ < \angle BEA = \gamma < 180^\circ$ se obtiene una configuración para cada γ (Fig 5.25).
- ii. $E \neq X$. En cuyo caso basta que $\triangle ABC \sim \triangle DAB \sim \triangle BEA$ y que $\gamma > 60^\circ$ para obtener una configuración $T \sim$ conectable. A continuación la demostración.

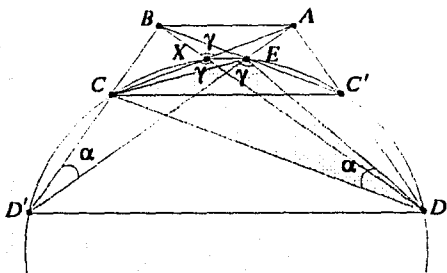


FIGURA 5.26. Caso V.3.b.ii, los puntos A, B, C, C', D, D', E, X son cocíclicos.

Sean C' y D' los simétricos de C y D con respecto a la mediatriz de AB (Fig 5.26), por simetría $E = AD' \cap BD$ y $\angle BD'A = \alpha$. Nótese que $\angle ACC' = \angle CAB$ (AB y CC' son paralelos) y que $\angle XDC' = \angle CAB$ por hipótesis. De esta observación se deduce que C, X, C' y D son cocíclicos, y como los trapezios $EXCC'$ y $DC'CD'$ son isósceles entonces se sigue que los seis puntos A, B, C, C', D, D', E, X están sobre una circunferencia. Por lo tanto $\angle DEC = \angle DXC = \gamma$, $\angle CDE = \angle CD'E = \alpha$ y consecuentemente $\triangle DEC \sim \triangle DAB$, es decir los cinco puntos forman una configuración $T \sim$ conectable (Fig 5.27).

Este resultado es sorprendente, pues a diferencia de las otras familias infinitas que se han encontrado, esta familia está determinada por dos parámetros. En particular existe una configuración $T \sim$ conectable de 5

puntos para cualquier triángulo distinto del equilátero y es muy probable que a partir de esta construcción se puedan obtener configuraciones con un mayor número de puntos.

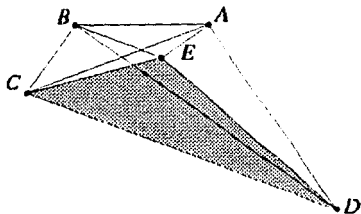


FIGURA 5.27. Una configuración T \sim conectable para cada triángulo T no equilátero.

$$T_5((P : 5), T) = 5$$

Sea $X = AC \cap BD$. Evitando simetrías se tienen los siguientes tres casos.

$$1. T_1 \sim T_3 \sim T_5 \sim T_9 \sim T_{10} \sim T$$

Sin perder generalidad supóngase que $E \in \triangle AXD$. Como $\angle BDE < \angle CDE < \angle CDA$ y los tres ángulos forman parte de ángulos semejantes a T , entonces $\angle BDE = \alpha$, $\angle CDE = \beta$ y $\angle CDA = \gamma$, por otro lado $\angle EBD < \angle ABC$ y $\angle BDE < \angle CDE$ por lo que $\angle DEB = \gamma$. Además, como $\angle DEC < \angle DEB$ y $\angle CDE = \beta$ entonces $(T_{10} \sim T)$ $\angle DEC = \alpha$ y $\angle ECD = \gamma$ lo cual es contradictorio pues $\gamma = \angle ECD < \angle ACD \leq \gamma$. Por lo tanto no hay configuraciones en este caso.

$$2. T_1 \sim T_2 \sim T_6 \sim T_9 \sim T_{10}$$

Se tiene que $\angle EBD < \angle ABD < \angle ABC$ y todos estos son ángulos de triángulos semejantes a T por lo que $\angle EBD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$ y $\angle ABC = \gamma$. Distínganse dos casos.

- (a) $E \in \triangle ABD$, de donde $\angle EAC < \angle DAB$ y por lo tanto $\angle DAB = \gamma$ y $\angle BDA = \alpha$ ($T_2 \sim T$) lo cual es contradictorio pues $\alpha = \angle BDA > \angle BDE \geq \alpha$.
- (b) $E \in \triangle BCD$, de donde $\angle CAE < \angle CAB < \angle DAB$ y como todos son ángulos de triángulos semejantes a T entonces $\angle CAE = \alpha$, $\angle CAB = \beta$ y $\angle DAB = \gamma$ y por consiguiente ($T_1 \sim T$) $\angle BCA = \alpha$ lo cual es contradictorio pues $\alpha = \angle BCA > \angle ECA \geq \alpha$.

En ambos subcasos se obtienen contradicciones, por lo tanto no hay configuraciones en este caso.

3. $T_1 \sim T_4 \sim T_5 \sim T_8 \sim T_{10}$.

Supóngase primero, que T es isósceles con ángulos $\gamma > \alpha$. Como $\angle DBC < \angle ABC$, $\angle BCA < \angle BCD$, $\angle ABE < \angle ABC$, $\angle ECD < \angle BCD$ y todos estos son ángulos de triángulos semejantes a T entonces $\angle ABC = \angle BCD = \gamma$ y $\angle DBC = \angle BCA = \angle ABE = \angle ECD = \alpha$. Si $\gamma \geq 90^\circ$ entonces $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$, de lo contrario $\angle CDB = \angle CAB = \gamma$, en ambos casos se tiene que $E \in BD \cap AC$ pues $T_5 \sim T_{10}$ y E está en el interior de $ABCD$, por lo tanto $E = X$ y consecuentemente $\angle ECD = \alpha$ por lo que $2\alpha = \gamma$ y por lo tanto $\gamma = 90^\circ$, obteniéndose así una subconfiguración descrita en el Teorema 18. Ahora, se analizara el caso en que T sea escaleno. Distínganse los siguientes tres casos.

- (a) $E \in \triangle AXD$, de donde $\angle CDB < \angle CDE$, $\angle DBC < \angle ABC$, $\angle CAB < \angle EAB$ y $\angle BCA < \angle BCD$ y por consiguiente ($T_1 \sim T_4 \sim T$) $\angle BCD = \angle ABC = \gamma$, pero $\angle EAB, \angle CDE \geq \beta$ y por tanto

$$360^\circ = \angle CDE + \angle EDA + \angle DAE + \angle EAB + \angle ABC + \angle BCD \geq 2\beta + 2\gamma + \angle DAE + \angle EDA$$

y como $T_8 \sim T$ entonces $\angle DAE + \angle EDA \geq \alpha + \beta$, de donde

$$360^\circ \geq 3\beta + 2\gamma + \alpha > 360^\circ$$

lo cual es una contradicción.

(b) $E \in \triangle DXC$, de donde $\angle CAB < \angle EAB$, $\angle BCA < \angle BCD$ y por consiguiente ($T_1 \sim T$) $\angle ABC = \gamma$. A continuación distínganse los posibles valores de $\angle CAB$.

i. $\angle CAB = \beta$, de donde $\angle EAB = \gamma$ y por tanto

$$360^\circ = \angle CDE + \angle EDA + \angle DAE + \angle EAB + \angle ABC + \angle BCD \geq 2\alpha + 2\gamma + \beta + \angle BCD$$

y como $\angle BCD \geq \beta$ entonces $360^\circ \geq 2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$ es decir todas las igualdades se deben cumplir y por consiguiente $\angle BCD = \beta$ y $\angle CDE = \alpha$, pero $\angle BCD = \beta > \angle ECD = \alpha$ y por tanto $\angle CDE \geq \beta > \alpha$ lo cual es una contradicción.

ii. $\angle CAB = \alpha$, de donde $\angle BCD = \gamma$ y por tanto

$$360^\circ = \angle CDE + \angle EDA + \angle DAE + \angle EAB + \angle ABC + \angle BCD \geq 2\alpha + 2\gamma + 2\beta = 360^\circ$$

y entonces deben ocurrir todas las igualdades (Fig 5.28), por lo que $\angle BCA = \angle ECD = \beta$, $\angle ABE = \angle DBC = \alpha$ y consecuentemente $2\alpha > \gamma > 2\beta$ lo cual es una contradicción.

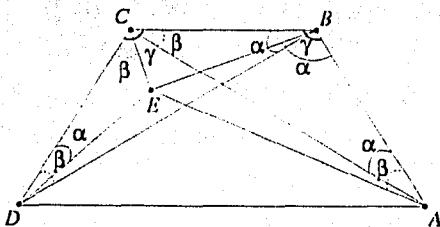


FIGURA 5.28. Caso V.3.b.2.ii con 5 triángulos semejantes a T .

(c) $E \in \triangle BCX$, de donde $\angle ECD < \angle BCD$, $\angle ABE < \angle ABC$, $\angle EAB < \angle CAB$, $\angle CDE < \angle CDB$ y como todos son ángulos de triángulos semejantes a T entonces

$\angle DEC = \angle BEA = \gamma$ y $\angle BCA = \angle DBC = \alpha$. Debido a que $\alpha \neq \beta$ y $T_8 \sim T$ se puede suponer sin perder generalidad que $\angle ECD = \alpha$ y $\angle ABE = \beta$. Como $T_4 \sim T_1 \sim T_5 \sim T_{10}$, entonces $\angle CDE = \angle BCD = \angle CAB = \beta$, $\angle EAB = \alpha$ y $\angle ABC = \gamma$ (Fig 5.29).

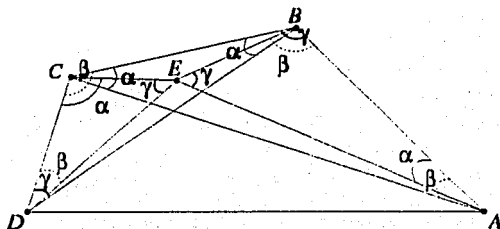


FIGURA 5.29. Caso V.3.c, con 5 triángulos semejantes a T .

Dado que $\angle BCE = \beta - \alpha$ y $\angle EBC = \gamma - \beta$ entonces $\angle CEB = 2\alpha + \beta$ y por consiguiente $\angle AED = \beta$, como $T_8 \sim T$ entonces $\angle EDA + \angle DAE \geq \beta + \gamma$ y por lo tanto

$$360^\circ = \angle CDE + \angle EDA + \angle DAE + \angle EAB + \angle ABC + \angle BCD \geq \alpha + 2\gamma + 3\beta > 360^\circ$$

lo cual es una contradicción.

En todos los casos se obtienen contradicciones, por lo que no hay configuraciones en este caso.

5.4 Conjuntos Grandes

En la sección anterior se logró determinar una gran cantidad de configuraciones T ~conectables con 5 puntos, incluyendo 4 familias infinitas. A pesar de lo anterior son muy pocas las configuraciones que se conocen con más de cinco puntos, de hecho exceptuando

las configuraciones $T \cong$ conectables (que por supuesto también son $T \sim$ conectables) no se conoce ninguna configuración de más de seis puntos que no contenga alguna subconfiguración ya descrita en las dos secciones anteriores. Esta última precisión es previsible, pues se observan grandes dificultades para extender la técnica de clasificación de conjuntos con 5 puntos a conjuntos con un mayor número de puntos. Por otro lado es muy probable que, de la misma forma que con las configuraciones $T \cong$ conectables, exista un conjunto $T \sim$ conectable con número máximo de elementos.

Un conjunto $T \sim$ conectable que fuera el más grande de todos necesariamente debe ser maximal en el sentido de la contención, es decir, no debe estar contenido propiamente en ningún otro conjunto $T \sim$ conectable. En este sentido los conjuntos que a continuación se detallan son $T \sim$ conectables con más de cinco puntos y que tal vez sean maximales.

1. $(P : 7) = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ donde $\triangle ABC$ es equilátero, D, E, F son los puntos medios de AB, BC y CA respectivamente, G es el centroide de $\triangle ABC$ y $T = \triangle AGC$ (Fig 5.30).

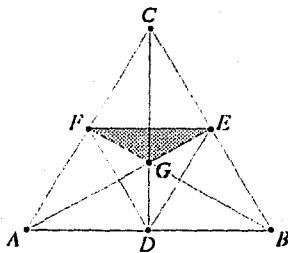


FIGURA 5.30. Configuración $T \sim$ conectable de siete puntos.

2. $(P : 7) = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ donde $ABCD$ es un trapecio isósceles de medidas $AB = 2, BC = DA = \sqrt{2}, CD = 1,$

E, F, G son los puntos medios de AB, CE y DE respectivamente y $T = \triangle AED$ (Fig 5.31).

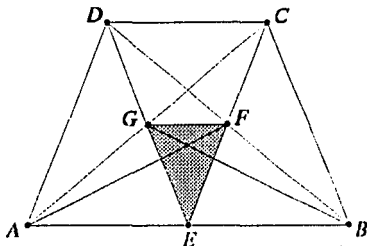


FIGURA 5.31. Configuración $T \sim$ conectable de siete puntos.

3. $(P : 9) = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ donde $ABCD$ es un rectángulo de medidas $AD = 1, AB = \sqrt{2}$, E, F, G son los puntos medios de AB, CD y AD respectivamente, G es el centro de $ABCD$, $I \in ED$ es tal que $EI = 2ID$ y $T = \triangle ABC$ (Fig 5.32).

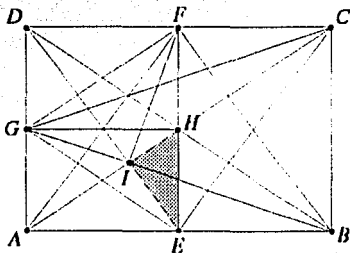


FIGURA 5.32. Configuración $T \sim$ conectable con 9 puntos.

4. $(P : 11) = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$ donde $ABCD$ es un

rectángulo de medidas $AD = 1$, $AB = \sqrt{2}$, E, F son los puntos medios de AB y CD respectivamente, G, H y I, J son tales que dividen a AC y BD en tres partes iguales respectivamente, K es el centro del rectángulo y $T = \triangle ABC$ (Fig 5.33).

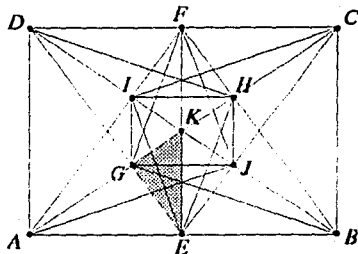


FIGURA 5.33. Configuración $T \sim$ conectable con 11 puntos.

Para precisar que en efecto son configuraciones $T \sim$ conectables basta indicar los triángulos semejantes a T en las configuraciones respectivas.

1. $\triangle AGC \sim \triangle DFC \sim \triangle DGF$ y también son semejantes entre sí los triángulos análogos según las simetrías del triángulo equilátero $\triangle ABC$.
2. $\triangle AED \sim \triangle EGA \sim \triangle CDE \sim \triangle FGE$ y también son semejantes entre sí los triángulos análogos según las simetrías del trapecio isósceles $ABCD$.
3. $\triangle ABC \sim \triangle AIE \sim \triangle EIH \sim \triangle DIA \sim \triangle FIG \sim \triangle CID \sim \triangle BIF$, todos estos cubren a las parejas con I en un extremo, el resto de los triángulos semejantes están incluidos en el siguiente inciso.

4. $\triangle ABC \sim \triangle BGF \sim \triangle DAE \sim \triangle AIJ \sim \triangle A EK \sim \triangle AGE \sim \triangle JIF \sim \triangle EGK \sim \triangle GJH$ y también son semejantes entre sí los triángulos análogos según las simetrías del rectángulo $ABCD$.

Todas estas configuraciones contienen subconfiguraciones $T \sim$ conectables de más de cuatro puntos, la primera y la segunda solo tienen una, pero entre la tercera y la cuarta tienen 53 subconfiguraciones $T \sim$ conectables no isomorfas entre sí.

De estos conjuntos el más sorprendente es el cuarto, pues entre otras cosas tiene 48 triángulos semejantes entre sí, probablemente sea el conjunto de 11 puntos que más triángulos semejantes a uno dado determine. Además, es probable que sea el conjunto $T \sim$ conectable más grande que pueda existir.

5.5 Triángulos Equiláteros

En las secciones anteriores se han determinado las configuraciones $T \sim$ conectables de acuerdo al número de puntos, en esta sección se seguirá un enfoque distinto. Una vez fijo T , ¿Para que n existirán configuraciones $(P : n) T \sim$ conectables?, en particular en la sección 5.3 se demostró que para cualquier triángulo distinto del equilátero existe una configuración tal con 5 puntos. En general, clasificar todas las n para las cuales existen las citadas configuraciones con T fijo es mucho más complicado que el trabajo realizado en las secciones anteriores puesto que hay muchas más posibilidades en consideración. También es clara la necesidad de argumentos geométricos más fuertes para completar con éxito dicha clasificación.

En este sentido, el único resultado contundente que se obtuvo es cuando T es un triángulo equilátero, a continuación el Teorema.

Teorema 19 *Si P es un conjunto finito de puntos en el plano con la propiedad de que por cada dos puntos de P hay otro de forma que*

los tres son vértices de un triángulo equilátero entonces P tiene tres elementos. (i.e. Si P tiene más de cuatro elementos, y T es equilateral entonces contiene una pareja $T \sim$ ordinaria).

Demostración.

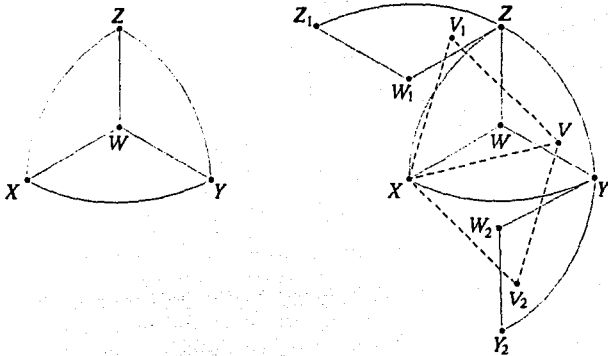


FIGURA 5.34. Teorema 19.

Supóngase que P tiene más de tres elementos. Sean X y Y dos puntos en P a distancia máxima, por hipótesis hay $Z \in P$ tal que $\triangle XYZ$ es equilátero. Como la distancia máxima entre puntos de P es igual al lado del triángulo $\triangle XYZ$ entonces P está contenido en el triángulo de Reuleaux con vértices XYZ . Sea W el centroide de $\triangle XYZ$, considérense las regiones ZXW , XYW y YZW (Fig 5.34); por simetría podemos suponer que hay un cuarto punto $V \in P$ en la región YZW . Sean V_1 y V_2 los dos puntos en el plano que cumplen que los triángulos $\triangle XVV_1$ y $\triangle XVV_2$ son equiláteros y sean Z_1ZW_1 y Y_2W_2 las regiones obtenidas de rotar la región ZYW desde X , 60° y -60° respectivamente (Fig 5.34). Como $\angle XVV_1 = 60^\circ$ y $XV = XV_1$ entonces V_1 está en la región Z_1ZW_1 , análogamente V_2 está en

la región YY_2W_2 . Dado que la recta W_1Z es tangente al arco XZ en Z y la recta W_2Y es tangente al arco XY en Y se tiene que las regiones Z_1ZW_1 y YY_2W_2 intersectan al triángulo de Reuleaux XYZ en los puntos Z y Y respectivamente. Por lo tanto ni V_1 ni V_2 están en P y entonces la pareja XV no cumple con la hipótesis, contradiciendo así la suposición de tener P más de tres elementos. \square

Observación. El teorema sigue siendo válido si P es un conjunto compacto de E^2 .

De lo anterior se desprende que la única configuración $T \sim$ conectable con T equilátero es la trivial, es decir, tres puntos que son los vértices de un triángulo equilátero.

6

Número de Triángulos Equiláteros

6.1 Introducción

En este capítulo se estudiará el máximo número de triángulos equiláteros que pueden determinar n puntos en el plano. Este problema fué planteado por primera vez por Erdős [Er5] y como ya ha sido mencionado en la literatura al respecto (ver por ejemplo [EHP] y [CFG, sección F14. pag. 161]) el tipo de configuraciones que se piensan óptimas para este tipo de problemas normalmente son en extremo simétricas, ésta no es la excepción, pues no es muy difícil conjeturar que la configuración óptima es un cierto subconjunto de la latiz de triángulos equiláteros. Lo interesante en este problema es que se puede determinar fácilmente el orden preciso de crecimiento de dicha función con respecto de n .

En la primera sección se plantea y formaliza el problema, posteriormente, en la segunda sección se encuentran cotas sencillas del problema que son suficientes para determinar el orden correcto de estimación. En la tercera y cuarta sección se refinan considerablemente las cotas inferior y superior respectivamente; esta última mediante una aplicación del Teorema 10. Finalmente se muestra un panorama del mismo problema en dimensiones mayores, en particular se encuentra el orden correcto de estimación para el espacio euclideo de dimensión $d \geq 6$.

6.2 El Problema

Sea $(P : n)$ un conjunto de puntos en el plano.

Definición 16 $E(P : n)$ denotará al número de triángulos equiláteros que tienen como vértices a los elementos de $(P : n)$. Abusando de la notación se define

$$E(n) = \max_{(P:n)} E(P : n)$$

donde el máximo se considerará sobre todos los conjuntos en el plano con n vértices.

El problema consiste en determinar el valor de $E(n)$ para cada n , o menos optimistamente, encontrar el orden correcto de estimación de $E(n)$.

6.3 Cotas Sencillas

6.3.1 UNA COTA INFERIOR

Como ya se mencionó en la introducción, los mejores ejemplos de configuraciones óptimas que se pueden pensar en este problema son subconjuntos de la latiz de triángulos equiláteros. Para obtener una primera cota inferior se contarán los triángulos equiláteros que tienen como vértices los puntos latices de una latiz de triángulos equiláteros comprendida en un triángulo equilátero de lado n . Formalizando lo anterior se tienen las siguientes.

Definición 17 Por latiz se entenderá al conjunto de vértices de la reticula formada por triángulos equiláteros unitarios. Se denotará: puntos latices a los elementos de la latiz y polígonos latices a aquellos polígonos cuyos vértices sean puntos latices.

Definición 18 Para cada $n \in \mathbb{N}$: $E_T(n) = E\left(\mathbf{T} : \binom{n+2}{2}\right)$, donde \mathbf{T} es el conjunto de puntos latiz comprendidos en un triángulo equilátero latiz de lado n y con lados paralelos a la misma.

Proposición 6.1 Para todo n número natural: $E_T(n) = \binom{n+3}{4}$

Demostración.

Nótese que cualquier triángulo latiz equilátero puede ser inscrito en un triángulo latiz equilátero de base inferior paralela a la horizontal y además, contenido en el triángulo latiz equilátero de lado n .

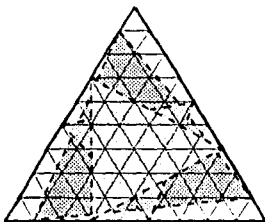


FIGURA 6.1. Todo triángulo equilátero latiz puede ser inscrito en un triángulo equilátero de base inferior paralela a la horizontal.

Una vez sabido esto basta darse cuenta que hay exactamente $\binom{n+2-i}{2}$ triángulos latices equiláteros de lado i con base inferior paralela a la horizontal y además en cada uno de ellos se pueden inscribir exactamente i triángulos equiláteros latices (Fig 6.1). Por lo tanto

$$E_T(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n+2-i)(n+1-i);$$

simplicando la suma se obtiene $E_T(n) = \binom{n+3}{4}$ \square

De esta forma si $\binom{n+2}{2} \leq m \leq \binom{n+3}{2}$, es decir, si $m = \binom{n+2}{2} + k$ con $0 \leq k \leq 2n+4$ entonces dado que $E(m)$ es estrictamente creciente

se tiene que

$$\begin{aligned} E(m) &\geq E\binom{n+2}{2} + k \geq E_T(n) + k \geq \\ &\geq \binom{n+3}{4} + k \geq \frac{1}{6}(m^2 - m(2k+1) + k^2 + 7k) \end{aligned}$$

de donde se desprende que $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{E(m)}{m^2} \geq \frac{1}{6}$ si es que existe, como se demostrará en la siguiente subsección.

6.3.2 UNA COTA SUPERIOR

Proposición 6.2 Para todo número natural n : $E(n) \leq \frac{2}{3} \binom{n}{2}$

Demostración.

Dada una pareja de puntos en el plano hay únicamente otros dos puntos que son vértices de triángulos equiláteros cuyos otros dos vértices son los elementos de la pareja en consideración, por lo tanto dado un conjunto de n puntos en el plano a lo más cada pareja de ellos forma parte de dos triángulos equiláteros, como hay $\binom{n}{2}$ parejas de puntos y cada triángulo se cuenta tres veces por cada uno de sus lados entonces $E(n) \leq \frac{2}{3} \binom{n}{2}$ \square

Esto último demuestra que $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{E(m)}{m^2}$ existe, y además es menor o igual que $\frac{1}{3}$; consecuentemente $E(m) = O(m^2)$. En las siguientes secciones se encontrarán mejores cotas tanto superior como inferior de dicho límite.

6.4 Una Mejor Cota Inferior

En el transcurso de esta sección se contará el número de triángulos equiláteros que hay en una cierta porción de la latiz triangular. Para comenzar se estudiarán los hexágonos regulares y posteriormente los círculos.

6.4.1 HEXÁGONOS REGULARES

Harán falta las siguientes definiciones para describir claramente el modo en que se contarán los triángulos equiláteros latice cuyos vértices están contenidos en un hexágono regular de lado n . Es importante hacer notar que se obtendrá un resultado preciso al respecto.

Definición 19 Se denotará por *hexágono paralelo* a aquel hexágono latice cuyos seis lados sean paralelos a la latiz.

Definición 20 Sea H_n el conjunto de puntos latice contenidos en un hexágono regular paralelo de lado n .

Definición 21 Para cada $n \in \mathbb{N}$: $E_H(n) = E(H_n) = 3n^2 + 3n + 1$.

Definición 22 Para cada $n \in \mathbb{N}$: $E_P(n)$ es igual al número de triángulos equiláteros con vértices en H_n y lados paralelos a la latiz.

Definición 23 $X = ABCDEF$ es un (a, b) -hexágono con a, b enteros no negativos si es un hexágono con las siguientes propiedades

1. X es un hexágono paralelo
2. $AB = CD = EF = a$
3. $BC = DE = FA = b$

Definición 24 Si X es un (a, b) -hexágono se dirá que el primer lado de "arriba" a "abajo" es la base superior, el último será la base inferior y el segmento formado con los dos vértices restantes se denotará el segmento medio.

Definición 25 $H(n, l, k)$ es el número de (l, k) -hexágonos con vértices en H_n cuyas bases superiores son de longitud l .

Por simetría $H(n, l, k) = H(n, k, l)$. Un $(a, 0)$ -hexágono resulta ser un triángulo equilátero con lados paralelos a la latiz¹, por lo que

$$E_p(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor} H(n, k, 0)$$

el límite superior se debe a que el lado del triángulo equilátero con lados paralelos a la latiz, de mayor tamaño y contenido en H_n , es precisamente $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$.

Definición 26 $H(n)$ es el número de todos los posibles (l, k) -hexágonos con vértices en H_n .

Teorema 20 Para todo número natural n

$$E_H(n) = \frac{1}{4}n(7n^3 + 14n^2 + 9n + 2)$$

Demostración.

Se demostrarán previamente los siguientes Lemas

Lema 20.1 Para todo número natural n

$$E_H(n) = 2H(n) + E_P(n)$$

Demostración.

Sea EH el conjunto de triángulos equiláteros con vértices en H_n , sea EP el conjunto de triángulos equiláteros con lados paralelos a la latiz y contenidos en H_n .

Sea $\triangle ABC$ un elemento de $EH \setminus EP$ con A el primer vértice de "izquierda" a "derecha", B el segundo y C el último. Sea $\triangle A'B'C'$

¹El caso $l = k = 0$ corresponde al número de puntos latices dentro del hexágono regular latice de lado n .

el triángulo obtenido de reflejar $\triangle ABC$ con respecto a la recta vertical que pasa por el centroide de $\triangle ABC$ (Fig 6.2). El hexágono $AB'BA'CC'$ cumple por construcción $B'B \parallel CC'$ y además es un hexágono latiz. Por otra parte los cuadriláteros cíclicos $AB'A'C$ y $ABA'C'$ cumplen $CA = B'A'$ y $AB = A'C'$ respectivamente por lo que son trapecios isósceles de donde $C'A \parallel BA'$ y $AB' \parallel A'C$. Finalmente es claro que $\triangle A'B'C'$ es también el resultado de una rotación de $\triangle ABC$ con respecto de su centroide, por lo que $A'C = C'A = B'B$ y $AB' = BA' = CC'$, es decir, $AB'BA'CC'$ es un (a, b) -hexágono.

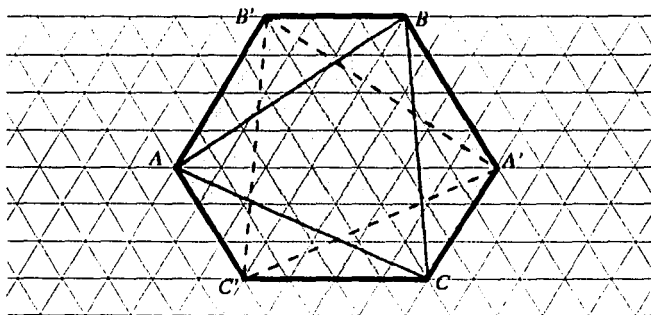


FIGURA 6.2. Lema 20.1.

De esta forma se demuestra que a cada elemento de $EH \setminus EP$ le corresponde el (a, b) -hexágono que lo circunscribe, además cada (a, b) -hexágono circunscribe a dos triángulos de $EH \setminus EP$, por lo tanto $E_H(n) - E_P(n) = 2H(n)$ \square

Lema 20.2 Para todo número natural n

$$H(n) = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^{\lfloor \frac{3n-k}{2} \rfloor} H(n, l, k) - \sum_{k=1}^n H(n, k, k)$$

Demostración.

La demostración se sigue directamente de las definiciones y de la observación $H(n, l, k) = H(n, k, l)$, bajo la cual basta incluir únicamente en la suma aquellos sumandos $H(n, l, k)$ que cumplen $l \geq k$ y duplicar el resultado, por otra parte es preciso restar aquellos sumandos donde $l = k$ pues estos no debían ser incluidos doblemente en la suma. El límite superior $\left\lfloor \frac{3n-k}{2} \right\rfloor$ se debe al hecho de no haber (l, k) -hexágonos que cumplan $l > \left\lfloor \frac{3n-k}{2} \right\rfloor$. \square

Lema 20.3

$$H(n, l, k) = \begin{cases} 3n^2 - 3n(k+l+1) + \frac{1}{2}(l^2 + k^2 + 4kl + 3k + 3l + 2) & \text{si } 0 \leq k \leq l \leq n \\ \frac{1}{2}(3n - 2l - k + 2)(3n - 2l - k + 1) & \text{si } 0 \leq k < n \leq l \leq \left\lfloor \frac{3n-k}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

Demostración.

Distínganse dos casos:

1. $0 \leq k \leq l \leq n$ (Fig 6.3). Se contará el número de (l, k) -hexágonos que tienen su base inferior en el renglón i . Obsérvese que la base inferior de un (l, k) -hexágono es de longitud k , por lo tanto se pueden situar $n+1-k$ hexágonos del tipo (l, k) en el renglón 1, el siguiente renglón tiene un espacio más de longitud por lo que en él caben $n+2-k$ hexágonos (l, k) . Continuando este proceso se observa que hay exactamente $n+i-k$ hexágonos del tipo (l, k) en el renglón i , con $1 \leq i \leq n+1-l$, pues justamente en el renglón $n+1-l$ los segmentos medios de los (l, k) -hexágonos correspondientes alcanzan el renglón $n+1$.

Si se realiza el mismo proceso, pero ahora con respecto a las bases superiores y además de arriba hacia abajo se observó que en el renglón $2n+2-i$ (con $1 \leq i < n+1-k$) se pueden situar $n+i-l$ hexágonos del tipo (l, k) con su base

superior sobre dicho renglón, nuevamente esto es posible hasta el renglón $n + 1 + k$ y además los de este último renglón no se incluyen puesto que ya fueron contados con el argumento anterior.

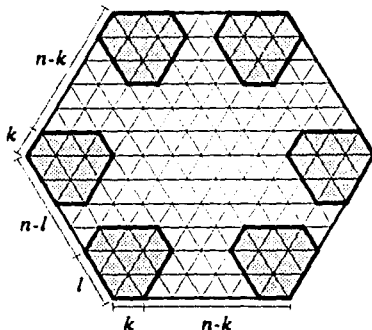


FIGURA 6.3. Lema 20.3, caso 1

Sumando la totalidad de (l, k) -hexágonos que hay en cada renglón se obtiene

$$H(n, l, k) = \sum_{i=1}^{n+1-l} (n+i-k) + \sum_{i=1}^{n-k} (n+i-l)$$

simplificando la suma se obtiene el resultado.

- $0 \leq k < n < l \leq \left\lfloor \frac{3n-k}{2} \right\rfloor$ (Fig 6.4). De la misma forma que en 1. se contará el número de (l, k) -hexágonos que pueden ser situados con su base inferior sobre el renglón i . En el renglón 1 el primer hexágono que se puede considerar es aquel cuyo extremo izquierdo de la base inferior se encuentra en el lugar $l-n$ (Fig 6.4), consecuentemente el último hexágono en dicho renglón será aquel cuyo extremo izquierdo de la base inferior se encuentre en el lugar $2n-l+1-k$, por lo tanto hay $3n -$

$2l - k + 1$ hexágonos del tipo (l, k) en el renglón 1. El siguiente renglón tiene un espacio menos de lugar para acomodar un (l, k) -hexágono puesto que la base superior es de tamaño l , por lo que en él caben $3n - 2l - k$ hexágonos del tipo (l, k) , este proceso se puede continuar hasta el renglón $3n - 2l - k + 1$ donde solo hay un (l, k) -hexágono. Por lo tanto en este caso

$$H(n, l, k) = \sum_{i=1}^{3n-2l-k+1} i = \frac{1}{2}(3n - 2l - k + 2)(3n - 2l - k + 1)$$

como se quería demostrar. \square

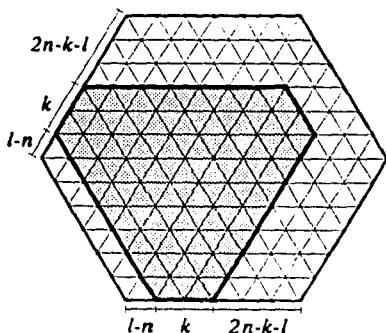


FIGURA 6.4. Lema 20.3, caso 2.

Ahora se puede demostrar el Teorema. De acuerdo a los Lemas 20.1 y 20.2 se tiene que

$$E_H(n) = 2H(n) + E_P(n) = 4 \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^{\lfloor \frac{3n-k}{2} \rfloor} H(n, l, k) - 2 \sum_{k=1}^n H(n, k, k) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor} H(n, k, 0)$$

Utilizando el Lema 20.3 se parte cada suma según la definición correspondiente de $H(n, l, k)$ para obtener

$$E_H(n) =$$

$$4 \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n \left(3n^2 - 3n(k+l+1) + \frac{1}{2}(l^2 + k^2 + 4kl + 3k + 3l + 2) \right) +$$

$$2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=n+1}^{\lfloor \frac{3n-k}{2} \rfloor} (3n - 2l - k + 2)(3n - 2l - k + 1) -$$

$$2 \sum_{k=1}^n \left(3n^2 - 3n(2k+1) + \frac{1}{2}(6k^2 + 6k + 2) \right) +$$

$$\sum_{k=1}^n \left(3n^2 - 3n(k+1) + \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) \right) +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor} (3n - 2k + 2)(3n - 2k + 1)$$

Ahora, mediante el uso de las fórmulas

$$\sum_{m=1}^n m = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{m=1}^n m^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{m=1}^n m^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

se pueden simplificar las sumas anteriores para obtener el resultado deseado.

Para evitar este trabajo es más sencillo percatarse que después de la simplificación de las sumas se obtendrá un polinomio de grado 4.

Una vez sabido ésto se pueden calcular los primeros cuatro valores de E_H , que a saber son $E_H(1) = 8$, $E_H(2) = 66$, $E_H(3) = 258$ y $E_H(4) = 710$; después se puede agregar el valor $E_H(0) = 0$ e interpolar según la fórmula de Lagrange para obtener como resultado $E_H(n) = \frac{1}{4}n(7n^3 + 14n^2 + 9n + 2)$. \square

De esta forma se observá que si m es un conjunto de puntos en el plano que cumple $3n^2 + 3n + 1 \leq m < 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$, es decir, si $m = 3n^2 + 3n + 1 + k$ con $0 \leq k < 6(n+1)$ entonces, dado que $E(m)$ es estrictamente creciente, se tiene que

$$E(m) \geq E_H(n) + k \geq \frac{1}{4}n(7n^3 + 14n^2 + 9n + 2) + k >$$

$$\frac{7}{4} \left(\frac{m-k-1}{3} \right)^2 + k$$

y por lo tanto $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{E(m)}{m^2} \geq \frac{7}{36}$ lo cual es mayor que $\frac{1}{6}$. Se puede mejorar un poco más este límite si se considera para cada n el conjunto de puntos latices que más se aproxime a los puntos latices contenidos en un disco, en la siguiente subsección se detalla el análisis de estos ejemplos.

6.4.2 CÍRCULOS

Hasta la fecha no se ha podido determinar con exactitud el número de puntos latices contenidos en un disco de radio n , por lo que es de esperarse que tampoco se podrá determinar con precisión el número de triángulos equiláteros latices contenidos en el disco. Sin embargo usando el método probabilístico se puede precisar el valor al que tiende $\frac{E(P, m)}{m^2}$ cuando $(P : m)$ es una región de puntos latices que tiende a ser una región circular conforme m crece.

Definición 27 Sea D_n un disco de radio n con centro en un punto latiz. Sea D_n^* el conjunto de los puntos latices que pertenecen a D_n .

Definición 28 Para cada n entero positivo sea $D^*(n) = |D_n^*|$ (i.e. el número de puntos latices contenidos en D_n).

La siguiente Proposición resuelve el valor asintótico de $D^*(n)$.

Proposición 6.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D^*(n)}{n^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ es decir $D^*(n) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}} n^2$

Demostración.

Sea $E_1(n)$ el número de triángulos latices unitarios y equiláteros que se forman dentro de D_n . Como cada triángulo equilátero unitario tiene area $\frac{\sqrt{3}}{4}$ entonces se tiene que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} E_1(n) < \pi n^2$$

y además

$$\pi(n-1)^2 < \frac{\sqrt{3}}{4} E_1(n)$$

Ahora, nótese que cada triángulo equilátero unitario tiene tres vértices y además cada punto del interior del círculo esta en seis triángulos excepto los de la orilla, pero como el número de puntos de la orilla es de orden n entonces

$$\frac{1}{2} E_1(n) = D^*(n) + O(n)$$

De lo anterior se deduce que

$$\frac{2\pi(n-1)^2}{\sqrt{3}n^2} < \frac{D^*(n) + O(n)}{n^2} < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

haciendo tender n a infinito se obtiene el resultado deseado. \square

En general la misma demostración sirve para deducir que si A es una región simple² del plano con area Δ y A^* es el número de puntos latices contenidos en la región entonces $A^* \sim \frac{2\Delta}{\sqrt{3}}$.

En seguida se aplicarán estos resultados al problema.

²delimitada por una curva continua, cerrada y sin auto intersecciones.

Definición 29 Sea $E_D(n)$ el número de triángulos equiláteros con vértices en D_n^* .

Definición 30 Para cada punto $p \in D_n^*$ sea $T(p) = S(p) + 2D(p)$, donde $S(p)$ es el número de puntos que junto con p son vértices de exactamente un triángulo latiz equilátero contenido en D_n y $D(p)$ es el número de puntos que junto con p son vértices de exactamente dos triángulos latices equiláteros contenido en D_n .

De acuerdo a las definiciones anteriores se tiene que

$$E_D(n) = \frac{1}{6} \sum_{p \in D_n^*} T(p)$$

puesto que cada triángulo equilátero latiz se incluye seis veces en la suma, dos veces por cada lado.

Teorema 21

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_D(n)}{n^4} = \frac{4\pi^2}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ es decir } E_D(n) \sim \left(\frac{4\pi^2}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \right) n^4.$$

Demostración.

Para la demostración del Teorema se usarán ángulos en radianes, a diferencia del resto del trabajo donde se utilizan grados. Antes de pasar a la demostración del mismo harán falta los siguientes Lemas.

Lema 21.1 Si o es el centro de D_n y p' el punto obtenido a partir de p bajo una rotación con centro en o de 60° entonces $T(p) = 2|D_n^* \cap D'|$ (i.e. dos veces el número de puntos latices contenidos en $D_n \cap D'$) donde D' es el disco con centro en p' y radio n (Fig 6.5).

Demostración.

Sea $p \in D_n^*$ un punto latiz, sean p' y p'' los puntos obtenidos a partir de p por rotaciones con centro en o de 60° y -60° respectivamente.

Si un punto $q \in D_n^*$ es tal que Δpqt es equilátero entonces necesariamente t es un punto latiz, de acuerdo a esto último basta determinar aquellas regiones de puntos q en D_n donde los t correspondientes también se encuentren en D_n .

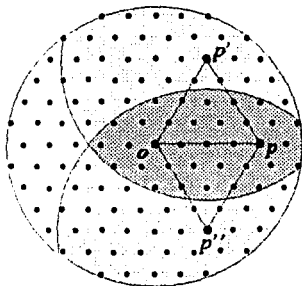


FIGURA 6.5. El lugar geométrico de los puntos que junto con p pueden formar triángulos equiláteros contenidos en D_n .

Clasifíquese a los puntos q , que junto con p forman triángulos equiláteros en D_n , en dos conjuntos: El conjunto I , de todos los puntos q tales que si Δpqt es equilátero entonces t se encuentra del lado izquierdo del rayo \overline{pq} y el conjunto D donde los t correspondientes se encuentran a la derecha de \overline{pq} . Si q forma junto con p dos triángulos equiláteros en D_n entonces $q \in I \cap D$. Por lo tanto

$$T(p) = |D \setminus I| + |I \setminus D| + 2|I \cap D|$$

i.e.

$$T(p) = |D| + |I|$$

además por la simetría de D_n se tiene que $|D| = |I|$ por lo que

$$T(p) = 2|I|$$

Sea D' el disco con centro en p' y radio n . Si $q \in I$ entonces existe t tal que Δpqt es equilátero y además t está a la izquierda de \overline{pq} (Fig

6.6). Si se realiza una rotación de 60° con centro en p entonces

$$p' \mapsto o \text{ y } q \mapsto t$$

Por lo tanto $p'q = ot$ y como $t \in D_n$ entonces $p'q = ot < n$, es decir, $q \in D'$. Recíprocamente, si $q \in D'$ y t es un punto tal que Δpqt es equilátero y además t está a la izquierda de \overline{pq} (Fig 6.6) entonces realizando la misma rotación se obtiene que $ot = p'q < n$, es decir, $t \in D_n$ y por lo tanto $q \in I$.

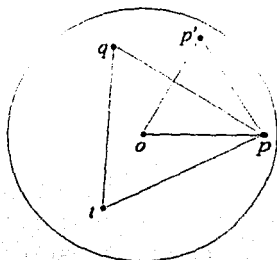


FIGURA 6.6. Lema 21.1.

De esto último se deduce que I es igual al número de puntos latice contenidos en $D_n \cap D'$, de hecho, por la misma razón D es el número de puntos latice contenidos en $D_n \cap D''$ si D'' es el círculo con centro en p'' y radio n (Fig 6.5). \square

Lema 21.2 Si o es el centro de D_n y $op = r$ entonces

$$T(p) \sim \left(4 \arccos \left(\frac{r}{2n} \right) - \frac{r}{n} \sqrt{4 - \left(\frac{r}{n} \right)^2} \right) \frac{2}{\sqrt{3}} n^2.$$

Demostración.

Sea D' como en la Proposición anterior, sea $op = r$. Según la observación de la Proposición 6.3 basta encontrar el área determinada por $D_n \cap D'$. Sean a y b las intersecciones de las circunferencias que rodean a D_n y D' (Fig 6.7). Sea $\theta = \angle aop = \angle pob$. Como D_n tiene

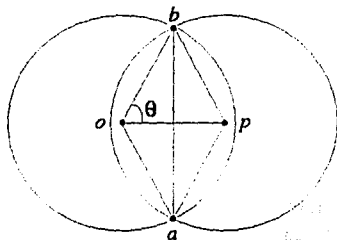


FIGURA 6.7. Área de la región $D_n \cap D'$.

radio n , el área del sector circular abo es θn^2 , por otra parte el área del triángulo Δabo es $\frac{1}{2}n^2 \text{sen}2\theta$ de donde se deduce que el área buscada Δ (el doble de la diferencia del área del sector circular menos el área del triángulo) es

$$n^2 (2\theta - 2\text{sen}\theta \cos \theta)$$

además por el Teorema de Pitágoras se tiene que $\text{sen}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{r}{n}\right)^2}$ y $\cos \theta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{n}\right)$ de donde

$$\Delta = 2 \arccos \left(\frac{r}{2n} \right) - \frac{r}{2n} \sqrt{4 - \left(\frac{r}{n} \right)^2}$$

y entonces según la observación de la Proposición 6.3 el número de puntos latice $T(p)$ es asintóticamente

$$\left(4 \arccos \left(\frac{r}{2n} \right) - \frac{r}{n} \sqrt{4 - \left(\frac{r}{n} \right)^2} \right) \frac{2}{\sqrt{3}} n^2$$

como se quería demostrar. \square

La demostración del Teorema es como sigue. Para cada $p \in D_n^*$ sea $r_p = op$, sea $A_n(r) = 4 \arccos\left(\frac{r}{2n}\right) - \frac{r}{n} \sqrt{4 - \left(\frac{r}{n}\right)^2}$. De acuerdo a las definiciones y al Lema 21.2 se tiene que

$$E_D(n) \sim \frac{n^2}{3\sqrt{3}} \sum_{p \in D_n^*} A_n(r_p)$$

de donde

$$E_D(n) \sim \frac{2n^4}{9} \sum_{p \in D_n^*} \frac{\sqrt{3}}{2n^2} A_n(r_p)$$

ahora, si se realiza una homotecia con centro en o y razón $\frac{1}{n}$ y después se considerará la latiz dual de la latiz de triángulos equiláteros (i.e. la red de hexágonos regulares que se forma uniendo los centroides de los triángulos equiláteros que comparten una arista) se observó que cada punto latiz está rodeado por un hexágono de área $\frac{\sqrt{3}}{2n^2}$, además todos estos hexágonos cubren la totalidad de D_1 salvo la orilla y conforme n crece tienden precisamente a cubrir D_1 . De estas observaciones se deduce que

$$\sum_{p \in D_n^*} \frac{\sqrt{3}}{2n^2} A_n(r_p) = \sum_{p \in D_n^*} \frac{\sqrt{3}}{2n^2} A_1\left(\frac{r_p}{n}\right)$$

es una suma de Riemann de la función $A_1(r)$ sobre el círculo unitario, es decir

$$\sum_{p \in D_n^*} \frac{\sqrt{3}}{2n^2} A_1\left(\frac{r_p}{n}\right) \sim \int_{D_1} A_1\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy$$

Si se realiza un cambio de variables a coordenadas polares, se observa que el jacobiano de la transformación es igual a r , por lo que

$$\sum_{p \in D_n^*} \frac{\sqrt{3}}{2n^2} A_n(r_p) \sim \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r A_1(r) d\theta \right) dr$$

simplificando y resolviendo la integral se obtiene

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r A_1(r) d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^1 r A_1(r) dr =$$

$$\left(\pi r^2 - \frac{\sqrt{4-r^2}}{4} (2r + r^3) - 2(r^2 - 1) \arcsen\left(\frac{r}{2}\right) \right) \Big|_0^1 =$$

$$\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

por lo tanto

$$E_D(n) \sim \left(\frac{4\pi^2}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \right) n^4$$

como se quería demostrar. \square

A la luz del Teorema anterior y bajo el hecho de que por la Proposición 6.3 en D_n^* hay $D^*(n) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}} n^2$ puntos se sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{E(m)}{m^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} n^2\right)}{\frac{4\pi^2}{3} n^4} = \frac{3}{4\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(D^*(n))}{n^4} \geq$$

$$\frac{3}{4\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_D(n)}{n^4} = \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{4\pi^2}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

esta última es ligeramente mejor que $\frac{7}{36}$, de hecho $\frac{7}{36} - \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) < 0.0011$. Dada la naturaleza simétrica de los triángulos equiláteros y de las circunferencias se conjetura que.

Conjetura 2 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{E(m)}{m^2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

La dificultad que hay para demostrar esta Conjetura estriba principalmente en la inadecuada comprensión de la estructura geométrica que poseen las configuraciones óptimas. En la siguiente sección se baja la cota superior de acuerdo a un argumento geométrico basado fuertemente en las simetrías del triángulo equilátero.

6.5 Una Mejor Cota Superior

La optimización de la cota superior $\frac{1}{3}$ está basada en la esencia de la demostración del Teorema 19. Sea $(P : n) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos en el plano.

Definición 31 Sea $g_2(p_i, p_j)$ el número de puntos en P que son vértices de triángulos equiláteros que tienen como sus otros dos vértices a p_i y p_j .

Obsérvese que de la definición anterior se deduce que

$$3E(P : n) = \sum_{i < j} g_2(p_i, p_j) \quad (6.1)$$

puesto que cada triángulo se cuenta tres veces en la suma, una vez por cada lado.

A continuación se encontrará una forma de acotar superiormente sumas de la forma $\sum_{i < j} g_2(p_i, p_j)$ para ciertos puntos p_i muy específicos.

Proposición 6.4 Si $\Delta p_1 p_2 p_3$ es un triángulo equilátero de lado máximo dentro de los triángulos equiláteros determinados por $(P : n)$ entonces

$$\sum_{\substack{i < j \\ 1 \leq i \leq 3}} g_2(p_i, p_j) \leq 5(n - 2)$$

Demostración.

Divídase el plano en cuatro regiones: la región F , el exterior del triángulo de Rubeaux $\Delta p_1 p_2 p_3$ y las regiones R_1 , R_2 y R_3 en el interior del triángulo de Rubeaux y determinadas por los segmentos que unen el centroide de $\Delta p_1 p_2 p_3$ con sus vértices (Fig 6.8). Denótese por R_i al número de puntos de $P - \{p_1, p_2, p_3\}$ contenidos en la región R_i , de la misma forma sea F el número de puntos de $P - \{p_1, p_2, p_3\}$ contenidos en F . Se denotará a $p_i p_j$ ordinaria, sencilla o doble de

acuerdo con que $g_2(p_i, p_j)$ valga 0, 1 ó 2 respectivamente. Sean O , S y D el número de parejas ordinarias, sencillas y dobles respectivamente que hay de la forma $p_i p_j$ con $i = 1, 2, 3$. Claramente $O + S + D = 3n - 6$ y también

$$\sum_{\substack{i < j \\ 1 \leq i \leq 3}} g_2(p_i, p_j) = S + 2D \quad (6.2)$$

$$= 2(3n - 6) - 2O - S$$

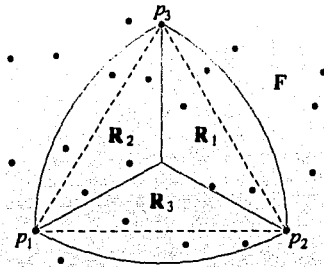


FIGURA 6.8. Las regiones que determina el triángulo $p_1 p_2 p_3$.

Un poco más de notación. Sea O_i el número de puntos en la región R_i que forman una pareja ordinaria con p_i , respectivamente defínanse S_i y D_i para parejas sencillas y dobles. De estas definiciones se obtiene que

$$R_i = O_i + S_i + D_i \text{ para } i = 1, 2, 3 \quad (6.3)$$

y además

$$R_1 + R_2 + R_3 + F = n - 3 \quad (6.4)$$

Por otro lado, recuérdese de la demostración del Teorema 19 que cada punto en R_i que forma parte de una pareja sencilla o doble con p_i determina un punto o una pareja de puntos en F , a saber

el otro vértice o los otros vértices de los triángulos equiláteros que determinan; además dichos puntos en F no pueden ser determinados por alguna otra pareja que forme una pareja sencilla o doble con p_j ($j = 1, 2, 3$), esto último debido a que las regiones $R_i^{60^\circ}$ y $R_i^{-60^\circ}$ obtenidas a partir de R_i por rotaciones con centro en p_i y ángulos de 60° y -60° respectivamente son ajenas entre sí (Fig 6.9). De todo lo anterior se deduce que

$$F \geq 2(D_1 + D_2 + D_3) + S_1 + S_2 + S_3 \quad (6.5)$$

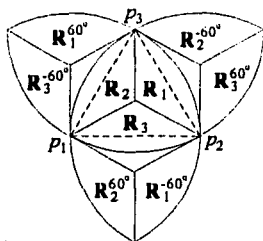


FIGURA 6.9. Las regiones R_i rotadas 60 y -60 grados.

Además a cada punto p en F se le puede hacer corresponder el vértice más distante p_i del triángulo $\Delta p_1 p_2 p_3$, la distancia pp_i por ser mayor que el lado de $\Delta p_1 p_2 p_3$ hace que la pareja pp_i sea ordinaria (recuérdese que $\Delta p_1 p_2 p_3$ es el triángulo equilátero de lado máximo). Por otro lado, al menos una de las parejas $p_1 p_2$, $p_1 p_3$, $p_2 p_3$ es sencilla, pues si las tres fueran dobles se obtendría un triángulo equilátero de lado $2p_1 p_2$ lo cual es imposible. Por lo tanto, de estas observaciones y de las definiciones se tiene que

$$O \geq F + O_1 + O_2 + O_3 \quad (6.6)$$

y

$$S \geq S_1 + S_2 + S_3 + 1 \quad (6.7)$$

de donde

$$2O + S \geq 2(F + O_1 + O_2 + O_3) + (S_1 + S_2 + S_3) + 1 \quad (6.8)$$

utilizando (6.5) y (6.3) se sigue que

$$\begin{aligned} 2O + S &\geq F + 2\left(\sum_{i=1}^3 (O_i + S_i + D_i)\right) + 1 = \\ &= 2(R_1 + R_2 + R_3) + F + 1 \end{aligned}$$

de (6.4) se deduce que

$$2O + S \geq 2(n - 3) - F + 1$$

finalmente como $F \leq n - 3$

$$2O + S \geq n - 2$$

y posteriormente sustituyendo en (6.2) se sigue que

$$\sum_{\substack{i < j \\ 1 \leq i \leq 3}} g_2(p_i, p_j) \leq 5n - 10$$

como se quería demostrar. \square

Esta última Proposición, que reduce localmente la suma $\sum_{i < j} g_2(p_i, p_j)$ permite encontrar una mejor cota para n pequeños así como una mejor cota global.

Proposición 6.5 Para todo número natural $n \geq 3$: $E(n) \leq \frac{1}{3}(n^2 - 2n + 2)$

Demostración.

Sean P y $\Delta p_1 p_2 p_3$ como en la Proposición anterior. Como se mencionó en la Proposición anterior se tiene que

$$3E(P : n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_2(p_i, p_j) =$$

$$\sum_{\substack{i < j \\ 1 \leq i \leq 3}} g_2(p_i, p_j) + \sum_{4 \leq i < j \leq n} g_2(p_i, p_j) \leq$$

$$5n - 10 + 2 \binom{n-3}{2}$$

esto último debido a la Proposición 6.4, por lo tanto se tiene que

$$E(P : n) \leq \frac{1}{3} (n^2 - 2n + 2)$$

como se quería demostrar. \square

A continuación una definición que ayudará a clarificar algunos aspectos del siguiente Teorema.

Definición 32 Si T es un triángulo en el plano, entonces para todo punto p en el plano $L_T(p)$ denotará a alguno de los vértices de T que cumpla ser el más alejado de p .

Teorema 22 Para todo número natural n , si $r = n - 9 \lfloor \frac{n}{9} \rfloor$ entonces

$$E(n) \leq \begin{cases} \frac{1}{54} (17n^2 - 21n + r^2 + 3r - 18) & 0 \leq r \leq 2 \\ \frac{1}{54} (17n^2 - 21n + r^2 - 15r + 36) & 3 \leq r \leq 8 \end{cases}$$

Demostración.

A continuación se verá un resultado técnico que será necesario para la demostración del Teorema. Sea $(P : n) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos en el plano.

Lema 22.1 Sea $(P' : n - m) = P \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ con $m \leq n - 3$. Supóngase que $M = \Delta p_{m+1} p_{m+2} p_{m+3}$ es un triángulo equilátero

máximo en P' . Si F denota al conjunto de puntos en P' que están en el exterior del triángulo de Rulauz M entonces

$$\sum_{p \in F} g_2(p, L_M(p)) \leq 2m$$

Demostración.

Supóngase que $p \in F$ forma una pareja sencilla, o doble con $L_M(p) = p_{m+1}$ (i.e. $g_2(p, L_M(p)) \geq 1$), esto quiere decir que existe $q \in P$ de forma que $\Delta pq p_{m+1}$ es equilátero. Como $p \in F$ se tiene que $pp_{m+1} > p_{m+1}p_{m+2}$ por lo que $\Delta pq p_{m+1}$ es un triángulo equilátero mayor que ΔABC y por lo tanto $q \in \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. En base a esta observación se deduce que la suma

$$\sum_{p \in F} g_2(p, L_M(p))$$

es igual al número de triángulos equiláteros de la forma $\Delta pp_j L_M(p)$ con $p \in F$ y $1 \leq j \leq m$. Denótese por o al centroide de M y por

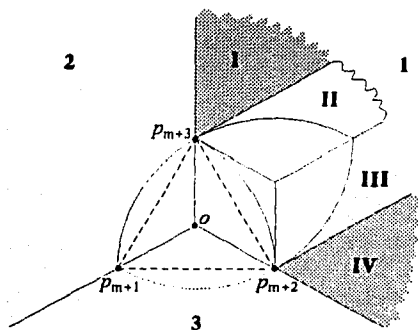


FIGURA 6.10. Lema 22.1

regiones 1, 2 y 3 a las determinadas por los rayos op_{m+1} , op_{m+2} y

op_{m+3} según la figura 6.10; también según la figura defínase las regiones I, II, III y IV.

Sea p_j un punto arbitrario en $F \setminus P'$, supóngase sin perder generalidad que p_j se encuentra en la región 1. Nótese que las región i ($i = 1, 2, 3$) es el lugar geométrico de los puntos p tales que $L_M(p) = p_{m+i}$. Se afirma que

1. Si hay un punto $p \in F$ tal que $L_M(p) = p_{m+1}$ y $\triangle pp_j p_{m+1}$ es equilátero entonces $p_j \in I \cup IV$.
2. Si hay un punto $p \in F$ tal que $L_M(p) = p_{m+2}$ y $\triangle pp_j p_{m+2}$ es equilátero entonces $p_j \in I \cup II$.
3. Si hay un punto $p \in F$ tal que $L_M(p) = p_{m+3}$ y $\triangle pp_j p_{m+3}$ es equilátero entonces $p_j \in III \cup IV$.

Dada la simetría de M basta probar los primeros dos incisos. Para demostrar el primero supóngase que hay un punto $p \in F$ tal que $L_M(p) = p_{m+1}$ y $\triangle pp_j p_{m+1}$ es equilátero, supóngase además que p se encuentra a la derecha del rayo $p_{m+1}p_j$. Si se realiza una rotación de 60° con centro en p_{m+1} y se denota por $1'$ a la imagen de 1 bajo dicha rotación se observará que $I = 1 \cap 1'$ además bajo la rotación se tiene que $p \mapsto p_j$ por lo que $p_j \in I$. Si p se encuentra a la izquierda del rayo $p_{m+1}p_j$ entonces rotando -60° se demuestra que $p_j \in IV$.

Ahora, la demostración del segundo inciso. Sea $p \in F$ tal que $L_M(p) = p_{m+2}$ y $\triangle pp_j p_{m+2}$ es equilátero, nótese que para que p esté en la región 2 es necesario que p esté a la izquierda del rayo $p_{m+2}p_j$. Realícese una rotación de -60° con centro en p_{m+2} y denótese por $2'$ a la imagen de 2 bajo dicha rotación. Nuevamente, como en el inciso anterior, se observa que $I \cup II = 1 \cap 2'$ y además $p \mapsto p_j$ por lo que $p_j \in I \cup II$.

De hecho los enunciados recíprocos de los tres incisos anteriores también son ciertos y se pueden demostrar con la misma técnica.

De estos incisos se deduce que p_j forma parte de a lo más dos triángulos equiláteros de la forma $\Delta p p_j L_M(p)$, esto es

$$\sum_{p \in F} g_2(p, L_M(p)) \leq 2m$$

como se quería demostrar. \square

Sea $(P : n) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos en el plano. De acuerdo a la Proposición 6.4 se tiene que si $\Delta p_1 p_2 p_3$ es un triángulo equilátero de lado máximo entonces

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq 3}} g_2(p_i, p_j) \leq 5n - 10 \quad (6.9)$$

Sea $\Delta p_4 p_5 p_6$ un triángulo equilátero máximo de $P \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$. Nótese que en la demostración de la Proposición 6.4 solo se uso el hecho de que $\Delta p_1 p_2 p_3$ fuera máximo en las desigualdades (6.6) y (6.7). Si se considera a $\Delta p_4 p_5 p_6$ en vez de $\Delta p_1 p_2 p_3$ entonces utilizando el Lema 22.1 para las desigualdades (6.6) y (6.7) se puede reemplazar (6.8) por

$$2O + S \geq 2(F + O_1 + O_2 + O_3) + S_1 + S_2 + S_3 - 6$$

siguiendo el argumento de la demostración integralmente se obtiene que

$$\sum_{\substack{4 \leq i < j \leq 6}} g_2(p_i, p_j) \leq 5n - 18$$

en general, si $\Delta p_{3l-2} p_{3l-1} p_{3l}$ es un triángulo equilátero máximo de $P \setminus \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{3l-3}\}$ entonces (6.8) se reemplaza por

$$2O + S \geq 2(F + O_1 + O_2 + O_3) + S_1 + S_2 + S_3 - 6(l - 1)$$

y consecuentemente se obtiene

$$\sum_{\substack{3l-2 \leq i < j \leq 3l}} g_2(p_i, p_j) \leq 5n - 9l \quad (6.10)$$

Sea $n = 9m + r$ con $0 \leq r \leq 8$. Distingáanse los siguientes dos casos

1. $0 \leq r \leq 2$. Considérense la desigualdad (6.9) y las desigualdades (6.10) para $l = 2, \dots, m$. Para $l = 3m + 1, \dots, n$ considérense las desigualdades triviales

$$\sum_{i < j} g_2(p_i, p_j) \leq 2(n - l)$$

Sumando todas las desigualdades en consideración se obtiene que

$$\sum_{i < j} g_2(p_i, p_j) \leq \left(\sum_{l=1}^m 5n - 9l \right) - 1 + 2 \sum_{l=3m+1}^n (n - l)$$

es decir

$$\sum_{i < j} g_2(p_i, p_j) \leq \frac{1}{18} (17n^2 - 21n + r^2 + 3r - 18)$$

y entonces por (6.1) se obtiene que

$$E(n) \leq \frac{1}{54} (17n^2 - 21n + r^2 + 3r - 18)$$

2. $3 \leq r \leq 8$. Considérense la desigualdad (6.9) y las desigualdades (6.10) para $l = 2, \dots, m, m + 1$. Para $l = 3m + 4, \dots, n$ considérense las desigualdades triviales

$$\sum_{i < j} g_2(p_i, p_j) \leq 2(n - l)$$

Sumando todas las desigualdades en consideración se obtiene que

$$\sum_{i < j} g_2(p_i, p_j) \leq \left(\sum_{l=1}^{m+1} 5n - 9l \right) - 1 + 2 \sum_{l=3m+4}^n (n - l)$$

es decir

$$\sum_{i < j} g_2(p_i, p_j) \leq \frac{1}{18} (17n^2 - 21n + r^2 - 15r + 36)$$

y entonces por (6.1) se obtiene que

$$E(n) \leq \frac{1}{54} (17n^2 - 21n + r^2 - 15r + 36)$$

como se quería demostrar. \square

De este último Teorema se sigue directamente que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(n)}{n^2} \leq \frac{17}{54}$ lo cual es una mejoría significativa con respecto a la cota anterior $\frac{1}{3}$.

Resumiendo, las mejores cotas que se han podido encontrar son

$$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{E(m)}{m^2} \leq \frac{17}{54}$$

6.6 Dimensiones Mayores

Sea $(P : n)$ un conjunto en E^d

Definición 33 Sea $E^d(P : n)$ el número de triángulos equiláteros cuyos vértices son elementos de P , abusando de la notación se define

$$E^d(n) = \max_{(P:n)} E^d(P : n)$$

donde el máximo se considera sobre todos los conjuntos de n puntos en E^d

Nuevamente el problema consiste en determinar $E^d(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ o encontrar el orden correcto de magnitud. De hecho según las secciones anteriores y la cota trivial $\binom{n}{3}$ las preguntas de interés más conciso son:

$$i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E^d(n)}{n^2} = \infty ? \text{ si } d \geq 3 \quad (6.11)$$

y

$$i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E^d(n)}{n^3} = 0 ? \text{ si } d \geq 3 \quad (6.12)$$

Como lo hizo notar Erdős en [Er5] según el método generalizado de Lenz es posible contestar ambas preguntas si $d \geq 6$, en particular, es posible demostrar que si $d \geq 6$ entonces $E^d(3n) \geq n^3$ y consecuentemente $E^d(n) = O(n^3)$. A continuación la demostración de este hecho.

Proposición 6.6 (Erdős, [Er5]) Si $d \geq 6$ entonces $E^d(3n) \geq n^3$.

Demostración.

Sean A, B y C los siguientes conjuntos en E^d

$$A = \left\{ (x_i, y_i, 0, 0, 0, 0, \bar{0}) \in E^d : 1 \leq i \leq n \right\}$$

$$B = \left\{ (0, 0, x_i, y_i, 0, 0, \bar{0}) \in E^d : 1 \leq i \leq n \right\}$$

$$C = \left\{ (0, 0, 0, 0, x_i, y_i, \bar{0}) \in E^d : 1 \leq i \leq n \right\}$$

donde (x_i, y_i) son soluciones distintas de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Nótese que si $P = A \cup B \cup C$ entonces cualquier terna de puntos, con un elemento en cada uno de los conjuntos A, B y C determina un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$, por lo tanto $E^d(P : 3n) \geq n^3$ como se quería demostrar. \square

De hecho, Erdős plantea en el mismo artículo que al parecer es imposible situar $3n$ puntos en E^6 de forma que determinen más de n^3 triángulos equiláteros del mismo tamaño. Esto último tal vez sea correcto para n suficientemente grande, pero es falso para $n \leq 4$, pues el simplejo de dimensión cinco tiene 6 puntos y 20 triángulos equiláteros del mismo tamaño, del mismo modo el conjunto formado por un simplejo de dimensión seis y otro de dimensión 4 que compartan una cara de dimensión 2 (un triángulo) tiene 9 puntos y 44 triángulos equiláteros del mismo tamaño. Finalmente el conjunto formado por un tetraedro y dos simplejos de dimensión seis, cada uno de ellos compartiendo una cara con el tetraedro, tiene 12 puntos y determina 73 triángulos equiláteros del mismo tamaño.

Para dimensiones $3 \leq d \leq 5$ no existen respuestas a las preguntas 6.11 y 6.12, sin embargo se sospecha fuertemente que ambas son afirmativas para $d = 3$.

Apéndice A

Ecuaciones Diversas

A.1 El Heptágono Regular

Utilizando *Mathematica 2.2* se encuentra que las soluciones aproximadas de la ecuación $b^3 - b^2 - 2b + 1 = 0$ son:

$$b_1 = -1.24698$$

$$b_2 = 0.445042$$

$$b_3 = 1.80194$$

Como b debe ser mayor que $a = 1$ entonces la tercera opción es la única solución posible al problema. Por otro lado, en efecto es una solución válida, pues aplicando dos veces el Teorema de Ptolomeo a un heptágono regular de lado 1 se obtiene que la diagonal menor cumple la ecuación de arriba.

A.2 El Valor de γ

Proposición A.1 Si γ es un real no nulo que satisface $\text{Sen}^3(3\gamma) - \text{Sen}(\gamma)\text{Sen}^2(2\gamma) = 0$ entonces:

$$\gamma = \arcsen \left(\frac{1}{2} \sqrt{3 + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}} \right)$$

Demostración.

Utilizando las identidades $\text{Sen}(3\gamma) = 3\text{Sen}(\gamma) - 4\text{Sen}^3(\gamma)$ y $\text{Sen}^2(2\gamma) = 4\text{Sen}^2(\gamma) - 4\text{Sen}^3(\gamma)$ se obtiene que la ecuación en cuestión es equivalente a la ecuación $(3 - 4\text{Sen}^2(\gamma))^3 - (4 - 4\text{Sen}^2(\gamma)) = 0$. Sea $y = 3 - 4\text{Sen}^2(\gamma)$, entonces basta resolver $y^3 - y + 1 = 0$. Cuya única solución real es $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$ puesto que $\frac{23}{3} > 0$. De esta última se infiere el resultado. (El valor aproximado utilizando *Mathematica 2.2* es $\gamma \approx 40.328^\circ$) \square

A.3 Las Ecuaciones del Capítulo 5**A.3.1 EL SISTEMA DE II.3.B.II.B**

Como a y b representan distancias en el sistema (pag 108) son cantidades positivas y por lo tanto haciendo los cambios de variable $A = a^2$ y $B = b^2$ se encuentra el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 2B + 2A - 1 &= A^2(B^2 - AB - B + A^2 - A + 1) \\ 2B + 2A - 1 &= AB(2A - B + 2) \end{aligned}$$

Utilizando *Mathematica 2.2* se encuentra que las soluciones aproximadas del sistema son:

$A = 0$	$B = 0.5$
$A = 0.46557$	$B = 0.10091$
$A = 1.61803$	$B = 0.38196$
$A = -0.61803$	$B = 2.61803$
$A = 1.46557$	$B = 3.14789$
$A = -0.232 - 0.792 \cdot i$	$B = 0.426 + 0.368 \cdot i$
$A = -0.232 + 0.792 \cdot i$	$B = 0.426 - 0.368 \cdot i$
$A = -1.232 - 0.792 \cdot i$	$B = 0.449 - 3.115 \cdot i$
$A = -1.232 + 0.792 \cdot i$	$B = 0.449 + 3.115 \cdot i$

De todas éstas solo la solución $A = 1.465571232$ y $B = 3.147899036$ preserva la condición $1 < A < B$ y entonces para esta solución $a = 1.21061$ y $b = 1.77423$ de forma que además se cumple que $a + 1 > b$ por lo que en efecto existe el triángulo de lados $1, a$ y b .

A.3.2 EL SISTEMA DE IV.2.B

Dado que a y b representan distancias en el sistema (pag 118) son cantidades positivas y por lo tanto haciendo los cambios de variable $A = a^2$ y $B = b^2$ se encuentra el sistema equivalente

$$\begin{aligned} B(B - A)^2 &= -A^2 (A^2 + B^2 - 2AB - 2A - 2B + 1) \\ B(B - A)^2 &= 2A^2 + 2AB - A \end{aligned}$$

Utilizando *Mathematica 2.2* se encuentra que las soluciones aproximadas del sistema son:

$$\begin{array}{ll} A = 0 & B = 0 \\ A = 0.5 & B = -0.5 \\ A = 0.25 & B = 0.25 \\ A = 1.829483552 & B = 4.035052971 \\ A = 0.335 + 0.401 \cdot i & B = 0.232 - 0.264 \cdot i \\ A = 0.335 - 0.401 \cdot i & B = 0.232 + 0.264 \cdot i \end{array}$$

De todas éstas solo la solución $A = 1.829483552$ y $B = 4.035052971$ preserva la condición $1 < A < B$ y entonces para esta solución $a = 1.352584028$ y $b = 2.008744128$ de forma que además se cumple que $a + 1 > b$ por lo que en efecto existe el triángulo de lados $1, a$ y b .

A.3.3 EL INTERVALO DE SOLUCIONES EN IV.3.B

Para que exista un triángulo con lados $1 < a < \sqrt{a^4 - a^2 + 1}$ basta verificar que se satisface la desigualdad del triángulo, es decir

$$\sqrt{a^4 - a^2 + 1} < a + 1 \Rightarrow$$

$$a^4 - 2a^2 - 2 < 0$$

como $a > 0$ entonces la anterior es equivalente a

$$a^3 - 2a - 2 < 0$$

Utilizando *Mathematica 2.2* se comprobó que la primera raíz posi-

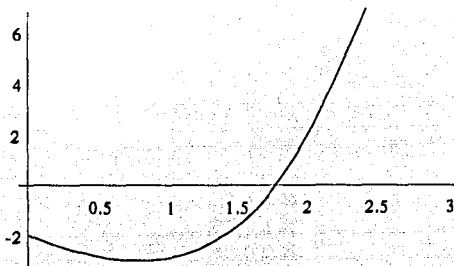


FIGURA A.1. Gráfica de la función $a^3 - 2a - 2$.

tiva de la ecuación anterior igualada a 0 es $a = 1.769292253$ aproximadamente y como se puede ver en la gráfica (Fig A.1), el intervalo $(1, 1.7692 \dots)$ satisface plenamente la desigualdad.

Por lo tanto existe el triángulo requerido siempre que $a \in (1, 1.7692 \dots)$.

A.3.4 EL SISTEMA DE V.2.B.I.A

Dado que a y b representan distancias en el sistema (pag 128) son cantidades positivas y por lo tanto haciendo los cambios de variable

$A = a^2$ y $B = b^2$ se encuentra el sistema equivalente

$$\begin{aligned} B(B^2 + A^2 - AB - A - B + 1) &= AB + A + B \\ B(-(A - B)^2 + 2A + 2B - 1) &= A^2(AB + A + B) \end{aligned}$$

Utilizando *Mathematica 2.2* se encuentra que las soluciones aproximadas del sistema son:

$$\begin{array}{ll} A = 0 & B = 0 \\ A = 0 & B = -1 \\ A = \sqrt{2} & B = -1 \\ A = -\sqrt{2} & B = -1 \\ A = 1.35321 & B = 2.83118 \\ A = -0.5 \pm 0.866 \cdot i & B = -0.5 \mp 0.866 \cdot i \\ A = -0.176 \pm 1.202 \cdot i & B = -0.415 \mp 0.424 \cdot i \end{array}$$

De todas éstas solo la solución $A = 1.35321$ y $B = 2.83118$ preserva la condición $1 < A < B$ y entonces para esta solución $a = 1.163275$ y $b = 1.682611$ de forma que además se cumple que $a + 1 > b$ por lo que en efecto existe el triángulo de lados $1, a$ y b .

A.3.5 EL SISTEMA DE V.2.B.I.B

Dado que a y b representan distancias en el sistema (pag 128) son cantidades positivas y por lo tanto haciendo los cambios de variable $A = a^2$ y $B = b^2$ se encuentra el sistema equivalente

$$\begin{aligned} B(B^2 + A^2 - AB - A - B + 1) &= A(AB + A + B) \\ B(-(A - B)^2 + 2A + 2B - 1) &= A(AB + A + B) \end{aligned}$$

Utilizando *Mathematica 2.2* se encuentra que las soluciones aproximadas

imadas del sistema son:

$$\begin{array}{ll}
 A = 0 & B = 0 \\
 A = 0.25 & B = 0.5 \\
 A = 2 & B = 4 \\
 A = -0.5 \pm 0.866 \cdot i & B = -0.5 \mp 0.866 \cdot i
 \end{array}$$

De todas éstas solo la solución $A = 2$ y $B = 4$ preserva la condición $1 < A < B$ y entonces para esta solución $a = \sqrt{2}$ y $b = 2$ de forma que además se cumple que $a + 1 > b$ por lo que en efecto existe el triángulo de lados $1, a$ y b .

A.3.6 LOS SISTEMAS DE V.2.B.II

Dado que a y b representan distancias en ambos sistemas (pag 130) son cantidades positivas y por lo tanto haciendo los cambios de variable $A = a^2$ y $B = b^2$ se encuentran los sistemas equivalentes

$$\begin{array}{l}
 B(B^2 + A^2 - AB - A - B + 1) = A(2A + 2B - 1) \\
 B^2(2A + B + 2) = A^2(2A + 2B - 1)
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{l}
 B(B^2 + A^2 - AB - A - B + 1) = A^2(2A + 2B - 1) \\
 B^2(2A + B + 2) = A(2A + 2B - 1)
 \end{array}$$

Utilizando *Mathematica 2.2* se encuentra que las soluciones aproximadas de los sistemas son:

$$\begin{array}{ll}
 A = 0 & B = 0 \\
 A = 0.5 & B = 0 \\
 A = 0.467728 & B = 0.0956429 \\
 A = 5.18674 & B = 5.54257 \\
 A = -0.398 \pm 0.47 \cdot i & B = -0.561 \mp 1.212 \cdot i \\
 A = -0.128 \pm 0.945 \cdot i & B = 0.442 \mp 0.429 \cdot i
 \end{array}$$

para el primer sistema y

$$\begin{array}{ll}
 A = 0 & B = 0 \\
 A = 0.5 & B = 0 \\
 A = 0.478416 & B = 0.272826 \\
 A = -1.759 \pm 1.398 \cdot i & B = -0.165 \mp 2.703 \cdot i \\
 A = -0.518 \pm 0.543 \cdot i & B = -0.087 \pm 1.120 \cdot i \\
 A = 0.185 \pm 0.423 \cdot i & B = 0.075 \mp 0.305 \cdot i
 \end{array}$$

del segundo sistema

De las soluciones de ambos sistemas solo $A = 5.18674$ y $B = 5.54257$ preserva la condición $1 < A < B$ y entonces para esta solución $a = 2.27744$ y $b = 2.354266$ de forma que en efecto se cumple que $a + 1 > b$ por lo que existe el triángulo de lados $1, a$ y b , sin embargo dicho triángulo resulta ser acutángulo pues

$$\cos \gamma = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2a} \approx 0.1414 > 0$$

Apéndice B

Triángulos Cubrientes

El algoritmo que se utilizo para determinar los posibles grupos de cuatro y cinco triángulos que cubren a cada pareja de T es el siguiente.

For $t_1 = 1$ to 6

For $t_2 = t_1 + 1$ to 7

For $t_3 = t_2 + 1$ to 8

For $t_4 = t_3 + 1$ to 9

For $t_5 = t_4 + 1$ to 10 (recorre todos los indices de triángulos)

$AB \rightarrow 0$ $BD \rightarrow 0$

$AC \rightarrow 0$ $BE \rightarrow 0$

$AD \rightarrow 0$ $CD \rightarrow 0$ (inicializa

$AE \rightarrow 0$ $CE \rightarrow 0$ los valores

$BC \rightarrow 0$ $DE \rightarrow 0$ de las parejas)

For $i = 1$ to 5

$t_i = 1 \Rightarrow AB, AC, BC \rightarrow 1$

$t_i = 2 \Rightarrow AB, BD, AD \rightarrow 1$

$t_i = 3 \Rightarrow AC, CD, AD \rightarrow 1$

$t_i = 4 \Rightarrow BC, CD, BD \rightarrow 1$

$t_i = 5 \Rightarrow AB, BE, AE \rightarrow 1$

$t_i = 6 \Rightarrow AC, CE, AE \rightarrow 1$ (asigna 1 a
 $t_i = 7 \Rightarrow BC, CE, BE \rightarrow 1$ aquellas pa-
 $t_i = 8 \Rightarrow AD, DE, AE \rightarrow 1$ rejas que
 $t_i = 9 \Rightarrow BD, DE, BE \rightarrow 1$ han sido cu-
 $t_i = 10 \Rightarrow CD, DE, CE \rightarrow 1$ biertas)

next i

$P \rightarrow AB \cdot AC \cdot AD \cdot AE \cdot BC \cdot BD \cdot BE \cdot CE \cdot CD \cdot DE$

$P = 1 \Rightarrow T_{t_1} T_{t_2} T_{t_3} T_{t_4} T_{t_5}$ (salida)

next t_5

next t_4

next t_3

next t_2

next t_1

Bibliografia

- [Al] **E. Altman** (1963): *On a Problem of Paul Erdős*. Amer. Math. Monthly 70, 148-157.
- [Be] **J. Beck** (1983): *On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős in combinatorial geometry*, Combinatorica 3, 281-297.
- [Bl] **A. Blockhuis** (1984): *A new upper bound for the cardinality of 2-distance sets in euclidean space*, Ann. Discr. Math. 20, North Holland, Amsterdam.
- [BM] **P. Borwein and W.O.J Moser** (1990): *A survey of Sylvester's problem and its generalizations*, Aequationes Mathematicae 40, 111-135.
- [Br] **P. Brass** (1992): *The maximum number of second smallest distances in finite planar graphs*, Discr. Computat. Geom 7, 371-379.
- [BS] **J. Beck and J. Spencer** (1984): *Unit Distances*, J. Combinat. Theory SerA 37, 231-238.
- [CEGSW] **K.L. Clarkson, H. Edelsbrunner, L.J. Guibas, M. Sharir and E. Welzl** (1990): *Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and surfaces*. Discr. Computat. Geometry 5, 99-160.
- [CFG] **H.T. Croft, K.J. Falconer and R.K. Guy** (1991): *Unsolved Problems in Geometry*, Springer Verlag, F, 157.

- [Cha] **G.D. Chakerian** (1970): *Sylvester's problem on collinear points and a relative*, American Mathematical Monthly 77, 164-167.
- [Ch1] **F. Chung** (1989): *Sphere-and-point incidence relations in high dimensions with applications to unit distances and furthest neighbour pairs*, Discr. Computat. Geometry 4, 183-190.
- [Ch2] **F. Chung** (1984): *The number of different distances determined by n points in the plane*, J. Combinat Theory Ser A 36, 342-354.
- [Co] **H.S.M.Coxeter** (1948): *A problem of collinear points*, American Mathematical Monthly, 55, 26-28.
- [Cr] **H.T. Croft** (1967): *Incidence incidents*, Eureka (Cambridge) 30, 22-26.
- [CST] **F. Chung, E. Szemerédi and W.T.Trotter** (1992): *The number of different distances determined by a set of points in the Euclidean plane*, Discr Computat. Geometry 7,1-11.
- [Di] **G.A. Dirac** (1951): *Collinearity properties of sets of points*, Quarterly Journal of Mathematics, 2, 221-227.
- [DGS] **P.Delsarte, J.M. Goethals and J.J.Seidel** (1977): *Spherical codes and designs*, Geom Dedicata 6, 363-388.
- [EH] **H. Edelsbrunner and P.Hajnal** (1991): *A lower bound on the number of unit distances between the points of a convex polygon*. J. Combinat. Theory, Ser A 56, 312-316.
- [EHP] **P. Erdős, D.Hickerson and J.Pach** (1989): *A problem of Leo Moser about repeated distances on the sphere*, Amer. Math. Monthly 96, 569-575.
- [EM] **P. Erdős and L.Moser** (1959): *Problem 11*. Canad. Math. Bull. 2, 43.

- [Er1] **P. Erdős** (1943): *Problem 4065*, American Mathematical Monthly 50, 65.
- [Er2] **P. Erdős** (1982): *Personal reminiscences and remarks on the mathematical work of Tibor Gallai*, Combinatorica 2, 207-212.
- [Er3] **P. Erdős** (1945): *Integral Distances*, Bulletin of the American Mathematical Society, 51, 996.
- [Er4] **P. Erdős** (1946): *On sets of distances of n points*, American Mathematical Monthly 53, 248-250.
- [Er5] **P. Erdős** (1975): *On some problems of elementary and combinatorial geometry*. Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IV 103, 99-108.
- [Er6] **P. Erdős** (1960): *On sets of distances of n points in euclidean space*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci 5, 165-169.
- [ES] **P. Erdős and A.H. Stone** (1946): *On the structure of linear graphs*, Bull. Amer. Math. Soc 52, 1087-1091.
- [Fü] **Z. Füredi** (1990): *The maximum number of unit distances in a convex n -gon*, J. Combinat. Theory Ser. A 55, 316-320.
- [Ga] **T. Gallai** (1944): *Solution to Problem 4065*, American Mathematical Monthly 51, 169-171.
- [Gr1] **B. Grünbaum** (1956): *A proof of Vázsonyi's conjecture*, Bull. Res. Council. Isr. Sect A 6, 77-78.
- [Gr2] **B. Grünbaum** (1971): *Arrangements of hyperplanes*, Proceedings of the Second Louisiana Conference of Combinatorics, Graph Theory and Computing, Louisiana State University, Baton Rouge, 41-106.
- [Had] **H. Hadwiger** (1955): *Eulers charakteristik und kombinatorische geometrie*, J. reine angew. Math. 194, 101-110.

- [Har] **H. Harborth** (1974): *Solution to problem 664A*, Elem. Math. 29, 14-15.
- [He] **A. Heppes** (1956): *Beweis einer Vermutung von A. Vázsonyi*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 7: 463-466.
- [HP] **H. Hopf and E. Pannwitz** (1934): *Problem 167*. Jahresber. Deutsch. Math. Verein., 43, 114.
- [JS] **S. Jossa and E. Szemerédi** (1975): *The number of unit distances in the plane*. In Infinite and Finite Sets (A. Hajnal et al eds.), North Holland, Amsterdam.
- [KM] **L.M. Kelly and W.O.J. Moser** (1958): *On the number of ordinary lines determined by n points*, Canadian Journal of Mathematics, 10, 210-219.
- [KST] **T. Kővári, V.T. Sós and P. Turán** (1954): *On a problem of K. Zarankiewicz*, Colloq. Math. 3, 50-57.
- [Ku] **Y. Kupitz** (1990): *On the maximal number of appearances of the minimal distance among n points in the plane*, Manuscript.
- [Kl] **V. Klee** (1979): *Some unsolved problems in plane geometry*, Mathematics Magazine 52, 3, 131-145.
- [KW] **V. Klee and S. Wagon** (1991): *Old and New Unsolved problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions 11, 29-35, 103-110.
- [Mos] **L. Moser** (1952): *On different distances determined by n points*, Amer. Math. Monthly 59, 85-91.
- [Mot] **T.S. Motzkin** (1951): *The lines and planes connecting the points of a finite set*, Transactions of the American Mathematical Society 70, 451-464.
- [Re] **O. Reutter** (1972): *Problem 664A*, Elem. Math. 27, 19.

- [SST] **J.Spencer, E.Szemerédi and W.Trotter** (1984): *Unit distances in the euclidean plane*. Graph Theory and Combinatorics, Proc. hon. P.Erdős, Cambridge 1983: 293-303. Academic Press London.
- [Ste] **R.Steinberg** (1944): *Three point collinearity*, American Mathematical Monthly 51, 169-171.
- [Str] **S. Straszewicz** (1957): *Sur un problème geometrique de P. Erdős*, Bull Acad. Polon. Sci 5. 39-40.
- [Su] **J.W.Sutherland** (1935): *Problem 167*. Jahresber. Deutsch. Math. Verein.,45, 33.
- [Sy] **J.J.Sylvester** (1893): *Mathematical Question 11851*, Educational Times 59, 98.
- [Sz] **E. Szemerédi**
- [Ve1] **K. Vesztergombi** (1985): *On the distribution of distances in finite sets in the plane*, Discr. Math. 57, 129-145.
- [Ve2] **K. Vesztergombi** (1987): *On large distances in planar sets*, Discr. Math. 67, 191-198.
- [WW] **J.A.Wiseman and P.R.Wilson** (1988): *A Sylvester theorem for conic sections*, Discrete and Computational Geometry 3, 295-305.