

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

*PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMAGENES POR MEDIO DE
TRANSFORMACIONES POLINOMIALES*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
INGENIERIA ELECTRICA PRESENTA

SANTIAGO VENEGAS MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. BORIS ESCALANTE RAMIREZ

MEXICO, D.F., 1995

*Se agradece a las siguientes personas su tiempo cedido para la revisión de la tesis
presente :*

DR. FRANCISCO J. GARCIA UGALDE.
DR. BORIS ESCALANTE RAMIREZ.
DR. J. ANTONIO GARCIA BARRETO.
M.I. FERNANDO LEPE CASILLAS.
M.C. RENE CARRILLO MORENO.

*PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMAGENES POR MEDIO DE
TRANSFORMACIONES POLINOMIALES*

INDICE

RESUMEN

1. INTRODUCCION

1.1 Conceptualización	1
1.2 Hipótesis	2
1.3 Justificación	2
1.4 Objetivos	3
1.5 Enfoque	3

2. ADQUISICION DE IMAGENES

2.1 Consideraciones de señal a ruido en CCD's	4
2.2 Integración de la imagen	5
2.3 Calibración de la imagen	7
2.4 Modelo de formación de la imagen	9

3. TRANSFORMACIONES POLINOMIALES

3.1 Transformaciones polinomiales unidimensionales	11
3.2 Transformada Hermite	15
3.3 Transformaciones polinomiales bidimensionales	18
3.4 Transformaciones polinomiales discretas	20

4. REDUCCION DE RUIDO

4.1 Descripción del método	23
----------------------------	----

4.2	Procesamiento en una escala	25
4.3	Procesamiento en varias escalas	27
4.4	Resultados	30
5.	PERFILACION DE IMAGENES	
5.1	Modelo de difuminación	36
5.2	Estimación de la imagen no difuminada	37
5.3	Resultados	40
6.	CODIFICACION DE IMAGENES	
6.1	Esquema de predicción	43
6.2	Transformación polinomial jerárquica	46
6.3	Resultados	48
7.	PROCESAMIENTO INTEGRAL	
7.1	Realce adaptivo	52
7.2	Codificación adaptiva	56
7.3	Resultados	58
	CONCLUSIONES	61
	REFERENCIAS	63

RESUMEN

El presente trabajo da algunas aplicaciones a la reciente teoría de las transformaciones polinomiales, enfocándose al procesamiento de imágenes astronómicas (reducción de ruido, realce y codificación) e incorporación de imágenes naturales (realce y codificación).

Para una interpretación inteligente de los datos de una imagen astronómica necesitamos obtener información explícita importante. Esto usualmente implica la determinación de las relaciones espacio-temporal entre estas intensidades y que requieren alguna forma de procesamiento local de los datos visuales. Este trabajo se enfoca en el esquema basado para el procesamiento local de la información visual, llamada transformada Hermite.

Los capítulos 2 y 3 se incorporan con la finalidad de proporcionar al lector una ayuda en la comprensión de las aplicaciones que se dan en los subsecuentes capítulos. Por lo tanto, la transformación Hermite se puede usar para:

- Reducir ruido en condiciones de poco contraste (capítulo 4). El método que se sigue es el siguiente: inicialmente se realiza una descomposición de la imagen (con ruido) por medio de filtros de análisis, posteriormente en base a los coeficientes polinomiales de primer orden se realiza la discriminación de los coeficientes polinomiales que se consideran carentes de contribución de ruido, y finalmente con los coeficientes polinomiales (sin contribución de ruido) se realiza la reconstrucción de la imagen (con menor ruido) por medio de filtros de síntesis. El resultado se enfoca a restaurar imágenes astronómicas. Esta aplicación en particular se había extendido exclusivamente a imágenes médicas (tomografía computarizada), es decir, en este capítulo se verifica su validación (restauración de imágenes) para sistemas de adquisición de imágenes con propiedades estadísticas similares, que a su vez con ciertas adecuaciones para la detección de toda clase de ruido se puede generalizar la aplicación.

- En perfilación de imágenes, es decir, el problema debido a la pérdida de nitidez en la representación de una escena sobre una imagen (capítulo 5). El método que se sigue es el siguiente: a partir de una imagen difuminada por el kernel de un sistema de adquisición de imágenes (telescopio) que tiene como respuesta una función de Bessel de orden 0 que puede ser aproximada con una función Gaussiana, se realiza la expansión, de la imagen difuminada con los filtros de análisis, posteriormente,

se realiza la reconstrucción de la imagen con filtros de síntesis que consideran la desviación estandar de los filtros de análisis y la desviación estandar de la función de difuminación. El resultado se enfoca a compensar la respuesta de un sistema de adquisición de imágenes.

- En la codificación de imágenes (capítulo 6), resaltando las ventajas de reducción de información con métodos de perfilación e interpolación. En esta aplicación se describe su relación con los codificadores piramidales existentes. El método que se sigue es el siguiente: tomando en cuenta las propiedades de los coeficientes polinomiales en la perfilación de imágenes (capítulo 5), se realiza una difuminación intencional sobre la imagen seguida por un submuestreo, a partir de la imagen resultante se realiza la predicción de la imagen original en base a su perfilación, finalmente se subtrae la imagen predicha de la imagen original obteniéndose el error de predicción que junto con la imagen submuestreada son indispensables para reconstruir la imagen original en base a menor información.

- Finalmente se propone la integración de reducción de ruido con la codificación de imágenes (capítulo 7). La aplicación es exclusiva para imágenes degradadas por ruido tales como las imágenes astronómicas que son imágenes con relación señal a ruido muy baja y requieren grandes capacidades de almacenamiento. El método que se sigue es el siguiente: se realiza la descomposición de la señal por medio de filtros de análisis, posteriormente se detectan los bordes en base a los coeficientes de primer orden, finalmente se reconstruyen las regiones homogéneas únicamente a partir del coeficiente polinomial de orden cero y perfilando aquellas regiones de la imagen que se localizan previamente con los coeficientes de primer orden. El resultado se enfoca a reconstruir la imagen con menor ruido exclusivamente a partir del coeficiente polinomial de orden cero y las contribuciones de energía de los coeficientes de primer orden.

Las aplicaciones de la transformada Hermite que se dan en el presente trabajo se desarrollan sobre estructuras piramidales.

1. INTRODUCCION

1.1 Conceptualización

En los diferentes campos científicos y de investigación se ha hecho patente la necesidad de interpretar los fenómenos en estudio a través de imágenes que generalmente se adquieren en condiciones no ideales.

En el caso particular de analizar las imágenes astronómicas, generalmente el astrónomo busca encontrar la diferenciación de las partes de la imagen que proveen una demostración óptica de la forma de la galaxia y características gravitacionales. Esto puede ser combinado con información de ondas de radio y cualquier otro tipo de evidencia para explicar la forma y actividad de la galaxia.

Los datos (representación digital) de las imágenes se usan para crear modelos matemáticos. Varios componentes de la galaxia se extraen del modelo y mediciones en los diferentes parámetros -tamaño, brillo, masa, velocidad, etc.- para determinar su contribución total. Además, por medio de procesamientos de imágenes adecuados es posible revelar la forma de los brazos en espiral de una galaxia o su ángulo.

Los datos del CCD (Charge Coupled Device : contenedor de carga eléctrica) se almacenan en cinta magnética, el procesamiento digital de imágenes ha llegado a ser el medio inevitable de translación empleado por los observatorios astronómicos.

La comunidad científica ha enfocado su interés en el procesamiento de imágenes necesario para determinar si los datos pueden ser utilizados en su totalidad. Como ejemplos, se tiene: la contaminación de luz del cielo (fondo), propiedades térmicas y eléctricas del equipo (corriente en oscuridad y de polarización), y la respuesta no uniforme del receptor (respuesta del campo plano) se deben remover para lograr la interpretación de la imagen.[1]

1.2 Hipótesis

Existen transformaciones como la Transformada Wavelet [16] [22], Transformada de Gabor [20] [21], Pirámide Laplaciana [17] [18], las cuales son técnicas cuyos modelos de representación de imágenes son eficientes en distintas aplicaciones como codificación, procesamiento, caracterización. El modelo de representación de imágenes que inicialmente hemos escogido en este proyecto es la Transformada Polinomial [4] [5] para plantear un conjunto de algoritmos (filtrado, realce y codificación de imágenes) basados en modelos matemáticos desarrollados para representar una imagen.

1.3 Justificación

La Transformada Polinomial [4] es una técnica que permite descomponer una imagen en componentes locales. La imagen se aproxima mediante una suma ponderada de funciones, lo que permite llevar a cabo procesamiento adaptivo sobre la imagen. En el caso particular de emplear ventanas Gaussianas, el modelo simula algunas de las propiedades del sistema visual humano cuyo aspecto fundamental en sus primeras etapas es extraer información relevante para analizar las imágenes. Hay evidencia de que esta información [12] [23] consiste principalmente en orientación, localización, y contraste de las transiciones de luminancia. Esta información se extrae por procesamiento local en campos receptivos de diferente tamaño, es decir, con diferentes resoluciones espaciales. Las estructuras piramidales las usamos para construir representaciones de imágenes multirresolución basadas en

transformaciones polinomiales.

1.4 Objetivos

El objetivo del presente trabajo es presentar algunas aplicaciones de las transformaciones polinomiales al procesamiento digital de imágenes como es la reducción de ruido (capítulo 4), realce (capítulo 5) y codificación (capítulo 6) en imágenes astronómicas e imágenes naturales, así como la combinación de los métodos que se proponen en los capítulos 4, 5 y 6 (capítulo 7), procesamiento integral. Este trabajo dejará las bases suficientes para continuar el procesamiento digital de imágenes, como sería la segmentación y la caracterización de las mismas.

1.5 Enfoque

El enfoque teórico de las transformaciones polinomiales se da desde el punto de vista de codificación de imágenes, por lo tanto el esquema de procesamiento se presenta como un sistema análisis/síntesis. Sin embargo, los objetivos no se restringen a codificación. El procesamiento digital de imágenes por medio de transformaciones polinomiales que se plantea en el presente trabajo es de aplicación general, para interpretar las aplicaciones, la ilustración de resultados se muestra sobre imágenes astronómicas exclusivamente.

2. ADQUISICION DE IMAGENES

2.1 Consideraciones de señal a ruido en CCD's

Todo circuito electrónico genera ruido indeseable. El ruido por el choque de fotones, corriente en oscuridad y ruido generado durante la lectura son fuentes primarias de ruido en una cámara CCD [2].

El ruido por el choque de fotones es una propiedad fundamental de la naturaleza cuántica de la luz. El número total de fotones emitidos por una fuente estable sobre cualquier intervalo de tiempo varía de acuerdo a una distribución de Poisson [3]. Igualmente los fotones recolectados por un CCD presentan la misma distribución de Poisson. El ruido por el choque de fotones es inevitable, presentandose siempre en cualquier sistema de adquisición de imágenes y también se expresa como una incertidumbre en los datos.

La corriente en oscuridad, o carga generada por efectos térmicos, no puede ser distinguida de la carga inducida por fotones. Se mide y se subtrae la corriente oscura, pero su contribución de ruido no debe ser ignorada. Al enfriar el CCD se elimina completamente toda señal generada por energía térmica, reduciéndose la corriente en oscuridad en un 50% por cada seis grados que decrece la temperatura [1].

La tercera fuente primaria de ruido se produce en la lectura, que está definida por los límites de detección de la cámara CCD. El ruido de lectura se genera en el amplificador de salida y puede ser reducido a algunos electrones a través de la selección y comparación cuidadosa de los contenedores CCDs, así como por la limitación de la frecuencia de lectura (para reducir el ruido, las cámaras fotométricas leen los datos de los CCDs a frecuencias [2] de 40, 50, 200, o 500 kHz). En condiciones con poca luz donde el ruido de lectura excede al ruido por fotones, los datos del CCD se generan con un ruido limitado.

En aplicaciones con niveles altos de luz, se ignoran la corriente en oscuridad y el ruido de lectura (a una frecuencia baja) para maximizar la razón señal a ruido (SNR) en la cámara CCD. En astronomía solar, por ejemplo, es importante detectar pequeñas fluctuaciones en intensidad sobre el área del sol como una función de tiempo. Si el tiempo de integración es tal que los potenciales del CCD sean de 250,000 electrones/pixel, el ruido por fotones sería de 500 electrones/pixel. La SNR sería de 500. Bajo estas condiciones, una fluctuación de intensidad solar de 0.28 por ciento se detectaría con un 95% de confianza.

En aplicaciones con bajo nivel de luz, la corriente en oscuridad y el ruido de lectura llegan a ser factores importantes. El ruido de lectura típico en cámaras CCD fotométricas operadas a 50 kHz es de 10 electrones aproximadamente. Así, datos de imágenes de bajo nivel de luz se leen con un ruido limitado cuando la señal es menos de 100 electrones (porque el ruido por fotones para 100 electrones es de 10 electrones). Para señales por encima de 100 electrones, la corriente en oscuridad es una fuente predominante de ruido.

2.2 Integración de la imagen

Hay tres tipos de integración condicionadas a medirse en la carga que se ha acumulado en el CCD [1]: integración por exposición, integración de la corriente de polarización, e integración de la corriente en oscuridad. En todos los casos el amplificador de salida reporta la carga en cada pixel de un CCD en unidades

analógico-digital (ADUs), un valor digital que es directamente proporcional a la cantidad de carga electrónica acumulada.

Inicialmente, una exposición limpia el CCD de cualquier carga acumulada. Se abre el obturador, se expone el CCD a la luz, y se permite al CCD integrar por una duración de tiempo específica. Posteriormente, se cierra el obturador, y se realiza la lectura de la imagen resultante.

La corriente de polarización y la corriente en oscuridad muestran una medida de carga acumulada sin necesidad de exponer el CCD a la luz.

La integración de la corriente de polarización se usa para proveer una medida del desplazamiento de DC y alguna estructura inherente en la señal oculta del CCD. Esta integración limpia el CCD de cargas residuales e inmediatamente realiza la lectura y convierte (analógico-digital) la salida. Esta salida posteriormente se sustrae de la integración por exposición para generar una imagen más precisa.

La integración de la corriente en oscuridad se utiliza para medir las cargas espontáneas (señal en oscuridad) que puede acumularse durante el tiempo en el que el obturador de la cámara está cerrado. Esta integración limpia el CCD de cualquier carga, permite al CCD integrar durante una longitud de tiempo específico, e inmediatamente obtiene la lectura y convierte (analógico-digital) la salida. La integración de la corriente en oscuridad usualmente se hace para el mismo tiempo de integración de una exposición o se escala en magnitud para representar la carga acumulada sobre el tiempo de integración de una exposición. Posteriormente, esta integración se sustrae de la integración por exposición para remover tanto la señal de polarización y la señal en oscuridad de una imagen.

El CCD y la salida del CCD se describen como un arreglo de pixels en donde las dimensiones serial y paralela definen el valor máximo que determina el tamaño del CCD. Una imagen entonces se especifica en términos de estas dimensiones.

Durante la integración de la imagen se realiza un proceso de combinación de cargas en pixels adyacentes para incrementar la señal anterior a la conversión (analógico-

digital), minimizando la adición de ruido. La señal presentada es la suma de los pixels, denominados superpixels. Los superpixels tienen una razón señal-ruido más grande que los pixels normales, pero con el costo de la resolución espacial.

El sistema convierte cada electrón en un número predefinido de unidades analógico-digital. Este valor muestra una ganancia base. En sistemas [2] de 500 kHz, se puede amplificar la señal generada por cada electrón por un factor de uno o cuatro. Si se escala la señal generada por cada electrón de carga, entonces se presenta el efecto de saturación (el nivel en el cual el convertidor analógico-digital tiene fijado su límite) al convertir la señal. En una asignación típica de ganancia, el punto de saturación es cercano a la capacidad total del CCD (el nivel de luz en el cual el potencial del CCD ha aceptado tantos electrones como es posible).

Idealmente se podría incrementar el factor de ganancia, y por lo tanto decrecería el punto de saturación, a tal grado que el punto de saturación se menosprecia sobre el valor máximo de intensidad esperado para una imagen en particular o para una imagen típica de cierta aplicación. Esto da la más alta resolución posible en el rango de luz.

2.3 Calibración de la imagen

Un generador CCD de imágenes se compone de un arreglo de dos dimensiones con detectores sensibles a la luz, o sensores elementales. El arreglo CCD es completamente estable con los sensores elementales manteniendo una posición geométrica fija. Cada detector dentro del arreglo, sin embargo, tiene su propia característica de sensibilidad a la luz. Estas características afectan el desempeño de la cámara y por lo tanto deben eliminarse por medio de la calibración. El proceso por el cual la cámara CCD se calibra se le conoce como campo plano, o corrección de matiz [3].

El proceso de campo plano requiere la adquisición de dos cuadros de calibración: el cuadro de señal en oscuridad o de polarización, y el cuadro de campo de fondo. Primero, se requiere un cuadro de señal en oscuridad o de polarización. El cuadro

de polarización limpia la cámara de cualquier carga acumulada y lee el CCD limpio. La imagen resultante es una imagen de señal baja. En esta imagen todos los pixels tienen aproximadamente el mismo valor, el cual se debe al desplazamiento electrónico del sistema o a la estructura inherente en el CCD. El cuadro de corriente en oscuridad limpia el CCD de cargas que, permite a la carga acumularse en un tiempo específico con el obturador cerrado, y obtiene la lectura de esa carga (corriente en oscuridad). Un cuadro de señal en oscuridad contiene una componente estándar de polarización y la señal respectiva en oscuridad. La integración de señal en oscuridad es más común cuando se toman exposiciones con bajos niveles de luz.

El cuadro de polarización y señal en oscuridad se sustraen de cada imagen para proveer señales calibradas cuantitativamente.

El cuadro de campo de fondo mide la respuesta de cada sensor elemental en el arreglo CCD para la iluminación y corrige alguna variación en la iluminación sobre el campo del arreglo. La mayoría de los sistemas ópticos [1] introducen alguna variación en el patrón de iluminación sobre el campo del arreglo CCD. El proceso de equalización de la respuesta de los sensores elementales bajo la iluminación de fondo del campo corrige desigualdades de iluminación si esa iluminación es una característica estable para cada objeto expuesto. Esto es necesario para iluminar el CCD con un patrón de luz que es representativo en la iluminación del fondo. Esta iluminación podría ser suficientemente brillante, o la exposición obtenida durante un período largo, de tal manera que las señales de los sensores son al menos el 25% de la escala total, o preferiblemente mayor. En cámaras fotométricas con procesador de 12 bits esto significa un nivel de al menos 1000 conteos.

En el cuadro de campo de fondo se corrige el desplazamiento electrónico sustrayéndole el cuadro de polarización o señal en oscuridad. Se calcula el valor medio de los pixels del cuadro sustraído. El valor medio es único para cada combinación del cuadro de campo de fondo y cuadro de señal en oscuridad/polarización.

La etapa final es la equalización de la respuesta de los sensores elementales del campo. Se obtiene una exposición. Se sustrae el cuadro de polarización de la señal expuesta. Finalmente, la imagen se multiplica por el valor medio de los pixels del cuadro de campo de fondo, y el resultado se divide por el cuadro de campo de fondo.

El valor medio de los pixels en la imagen no es el mismo que el valor anterior a la equalización del campo porque la razón del valor medio en el cuadro de campo de fondo a los valores individuales en el mismo campo, generalmente no es la unidad.

Todos los detectores que tienen valor de cero en el cuadro de campo de fondo dan un valor de 32767 en la imagen resultante de la etapa de equalización del campo. Como esta etapa introduce un cambio en la escala de intensidades de los elementos del cuadro, se debe usar el mismo cuadro de campo de fondo y valor medio de los elementos cuando se comparan cuantitativamente un conjunto de imágenes.

2.4 Modelo de formación de la imagen

El diagrama de bloques de la figura 2.1 muestra la secuencia de etapas a través de las cuales se somete una exposición en astronomía. Descripción de los bloques:

-($I_R * I_S * R_T$). Representa la afectación de la imagen original I_R por las respuestas de la atmósfera I_S y del telescopio R_T .

-(*INTEGRACION*). Representa la medición de la carga que se acumula en el CCD. Su importancia se describe en la sección 2.2 del presente capítulo.

-(*IMAGEN* - I_B). Representa la eliminación del desplazamiento electrónico I_B (corriente de polarización o señal en oscuridad) en la imagen.

-($\frac{1}{N} \sum$). Representa el promedio de los elementos del cuadro. Este promedio es único para cada combinación del cuadro de campo de fondo con la señal en oscuridad y de polarización.

-(*EQUALIZACION*). Representa la etapa final del proceso. Se obtiene una exposición, se sustrae el cuadro de polarización de la señal expuesta, y finalmente la imagen se multiplica por el promedio de los elementos del cuadro de campo de fondo. El resultado final se divide por el cuadro de campo de fondo.

-(I_C). Representa la adquisición de la imagen lista para su interpretación.

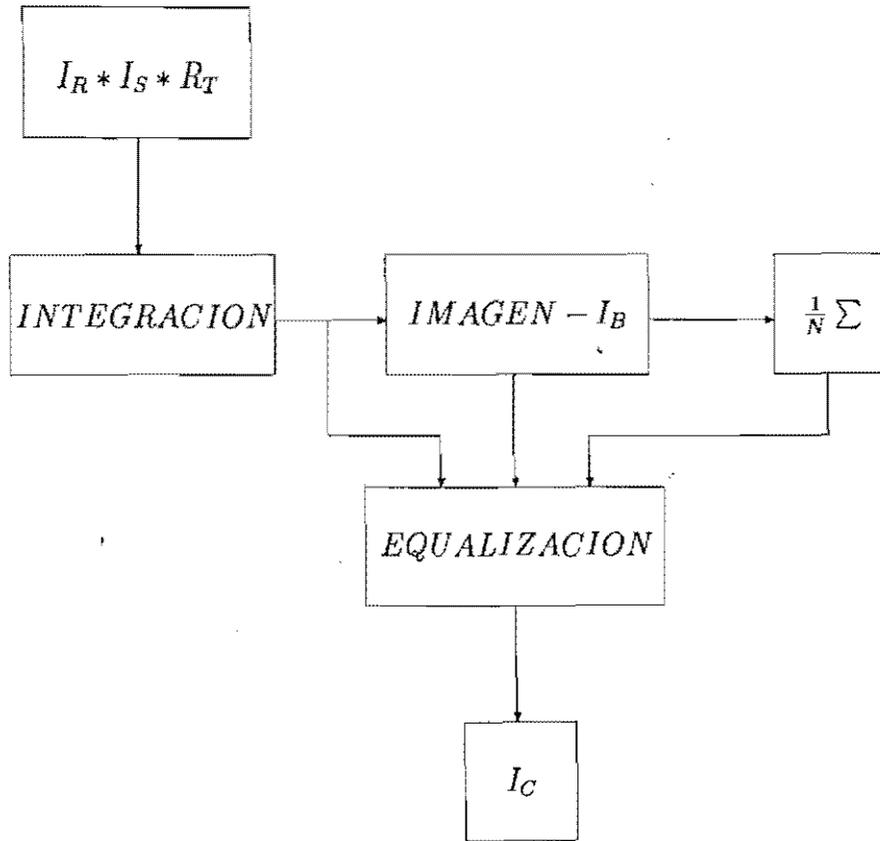


Fig. 2.1 Diagrama de formación de imágenes astronómicas.

3. TRANSFORMACIONES POLINOMIALES

3.1 Transformaciones polinomiales unidimensionales

En esta sección se muestra una técnica de descomposición de señales, llamada Transformada Polinomial [4] [5], en la cual las señales se aproximan por polinomios. Primero se introducen las ideas para señales analógicas de una sola dimensión, pero que pueden extenderse a señales de dos o más dimensiones y señales discretas.

El análisis por transformada polinomial abarca dos etapas a seguir [4]. En la primera etapa, la señal original $L(x)$ se localiza multiplicándola por una función ventana $V(x)$. Una descripción completa de la señal requiere que el proceso de localización se repita para un número suficiente de posiciones de la ventana. Se requiere un espaciamiento constante entre las ventanas.

A partir de la localización de la función ventana $V(x)$, se puede construir una función de peso por medio de su repetición periódica.

$$W(x) = \sum_k V(x - kT) \quad 3.1.1$$

Por lo tanto, la propia función de peso se define con el periodo de espaciamento T . Si se considera que la función de peso $W(x)$ existe con valores diferentes de cero para toda x , es posible obtener

$$L(x) = \frac{1}{W(x)} \sum_k L(x) \cdot V(x - kT) \quad 3.1.2$$

de tal manera que se garantice la localización de las señales $L(x) \cdot V(x - kT)$ en todas las posiciones kT de la ventana y que en cada posición se contiene suficiente información acerca de la señal original.

La segunda etapa de la transformación polinomial consiste en aproximar el segmento de señal definido dentro de la ventana $V(x - kT)$ por medio de una suma ponderada de polinomios. Como funciones base para la expansión polinomial se toman los polinomios $G_n(x)$, con grado del polinomio dado como $[G_n(x)] = n$, y que son ortonormales con respecto a $V^2(x)$, esto es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V^2(x) G_m(x) G_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad 3.1.3$$

Estos polinomios se determinan únicamente por $V^2(x)$. Si $V^2(x)$ es función par entonces se tienen los siguientes ejemplos de polinomios ortonormales [10] hasta de orden 3.

$$G_0(x) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$$

$$G_1(x) = \frac{x}{\sqrt{c_2}}$$

$$G_2(x) = \frac{(c_0x^2 - c_2)}{\sqrt{c_0(c_0c_4 - c_2^2)}}$$

$$G_3(x) = \frac{(c_2x^3 - c_4x)}{\sqrt{c_2(c_2c_6 - c_4^2)}} \quad 3.1.4$$

en donde

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n V^2(x) dx \quad 3.1.5$$

es el momento de orden n de $V^2(x)$.

En condiciones más generales, para la señal original $L(x)$, se obtiene [10]

$$V(x - kT) \left[L(x) - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(kT) \cdot G_n(x - kT) \right] = 0 \quad 3.1.6$$

donde

$$L_n(kT) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) \cdot G_n(x - kT) V^2(x - kT) dx. \quad 3.1.7$$

Si $L(x)$ se puede descomponer en términos como en (3.1.9), y es finita para toda x , se garantiza la convergencia de la expansión en (3.1.6) para la mayoría de las funciones ventana. Por lo tanto, el error de aproximación entre la señal y un polinomio es menor conforme mayor sea el grado de la expansión polinomial, como ocurre en las expansiones de Taylor. Esto implica que la descripción de la señal localizada $L(x) \cdot V(x - kT)$ contiene una aproximación de error arbitrariamente pequeño para un conjunto finito de coeficientes polinomiales $L_n(kT)$. La señal de energía dentro de la ventana se expresa en términos de los coeficientes de la expansión,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L^2(x) V^2(x - kT) dx = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^2(kT). \quad 3.1.8$$

Esta es la aplicación del teorema de Parseval para polinomios ortonormales.

Si se combina (3.1.2) y (3.1.6), se obtiene la siguiente expansión para la señal completa

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k L_n(kT) \cdot P_n(x - kT) \quad 3.1.9$$

en donde

$$P_n(x) = \frac{G_n(x) V(x)}{W(x)}. \quad 3.1.10$$

La ecuación (3.1.7) implica que los coeficientes $L_n(kT)$ se derivan de la señal $L(x)$ convolucionándola con la función filtro

$$D_n(x) = G_n(-x) V^2(-x) \quad 3.1.11$$

seguida por un muestreo en múltiplos de T . Al mapeo de la señal original $L(x)$ a los coeficientes polinomiales $L_n(kT)$ se le denomina transformación polinomial directa, y a la reconstrucción polinomial a partir de los coeficientes de acuerdo con (3.1.9) se le denomina transformación polinomial inversa. Esto consiste en interpolar los valores entre los coeficientes $L_n(kT)$ con la función patrón $P_n(x)$ y sumar para todo orden n .

Si los coeficientes polinomiales en la expansión de la señal de (3.1.9) se multiplican por constantes fijas, entonces se presentan modificaciones que realzan o atenúan (según sea el caso) estructuras (en la señal) asociadas con las funciones de análisis, obteniéndose la imagen modificada

$$\hat{L}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k t_n \cdot L_n(kT) P_n(x - kT). \quad 3.1.12$$

3.2 Transformada Hermite

Para ilustrar las propiedades de las transformaciones polinomiales, se considera el caso especial de que la función ventana sea una función Gaussiana [4], es decir,

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\sigma}} \exp(-x^2/2\sigma^2) \quad 3.2.1$$

con desviación standard σ . Los polinomios ortogonales que se asocian con $V^2(x)$

se les conoce como polinomios Hermite, y por lo tanto la técnica de descomposición se denomina transformación Hermite.

Las razones por las cuales es común utilizar ventanas Gaussianas son múltiples. Primero, la teoría es matemáticamente tratable en este caso, consecuentemente las propiedades son fácilmente derivables y evaluables. Segundo, las ventanas Gaussianas separables en dos dimensiones con desviación estándar σ son un buen modelo de la superposición de campos receptivos retinales que se ha encontrado [24] en experimentos fisiológicos. Tercero, lo anterior conduce a que la transformada Hermite involucra derivadas de funciones Gaussianas como funciones filtro. Estas funciones tienen un amplio uso en el modelado del sistema visual humano [25] [26].

Como la función de peso $W(x)$ es periódica con período T se puede expandir en series de Fourier [10]

$$W(x) = \frac{\sqrt{2\sqrt{\pi}\sigma}}{T} w(x) \quad 3.2.2$$

con

$$w(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(k \frac{2\pi\sigma}{T} \right)^2 \right] \cdot \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right). \quad 3.2.3$$

Las funciones filtro determinan explícitamente la información en los coeficientes de la transformación Hermite. Por lo tanto, las principales propiedades de la transformación Hermite se definen en las funciones filtro. De la expresión general en (3.1.11) se deriva [10]

$$D_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} H_n \left(\frac{x}{\sigma} \right) e^{-x^2/\sigma^2}. \quad 3.2.4$$

Los polinomios Hermite son ortogonales sobre la ventana (Gaussiana) al cuadrado $V^2(x)$.

Es demostrable [27] que la función filtro $D_n(x)$ es similar a la derivada de orden n de una función Gaussiana

$$D_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \frac{d^n}{d\left(\frac{x}{\sigma}\right)^n} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\sigma^2} \right]. \quad 3.2.5$$

Y su transformada de Fourier tiene una expresión simple:

$$d_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot (j\omega\sigma)^n e^{-(\omega\sigma)^2/4}. \quad 3.2.6$$

Las funciones patrón se requieren para sintetizar la señal original a partir de los coeficientes de la transformación Hermite. Y se generan por medio de la siguiente expresión [27]

$$P_n(x) = \frac{T}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-x^2/2\sigma^2} / w(x) \quad 3.2.7$$

en donde $w(x)$ es la función de peso en (3.2.3). Además, la función Hermite también tiene la propiedad de ser isomórfica a su transformada de Fourier:

$$p_n(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2^n n!}} \cdot (-j)^n H_n(\omega\sigma) e^{-(\omega\sigma)^2/4}. \quad 3.2.8$$

En la transformación Hermite finita (limitada en la práctica por el orden del polinomio) hay dos consideraciones importantes. Por un lado, se desea que σ sea tan grande como sea posible, ya que sobre áreas grandes de integración mejora la razón señal-a-ruido de la salida y la eficiencia de la representación de la señal. Por otro lado, σ no debe ser demasiado grande, porque se carecería de una descripción precisa de la señal si se generan pocos términos en la expansión Hermite.

3.3 Transformaciones polinomiales bidimensionales

La transformación polinomial se puede generalizar a dos dimensiones. Dada una función ventana $V(x, y)$, los polinomios ortonormales $G_{m, n-m}(x, y)$, donde m y $n-m$ son el grado del polinomio con respecto a x y y , respectivamente, se determinan únicamente por (de manera similar a (3.1.3))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V^2(x, y) G_{m, n-m}(x, y) G_{j, i-j}(x, y) dx dy = \delta_{ni} \delta_{mj} \quad 3.3.1$$

para $n, i = 0, 1, \dots, \infty$; $m = 0, \dots, n$ y $j = 0, \dots, i$.

La descomposición de señales de dos dimensiones en polinomios se define como (siguiendo la ecuación (3.1.9))

$$L(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{(p,q) \in S} L_{m, n-m}(p, q) \cdot P_{m, n-m}(x - p, y - p) \quad 3.3.2$$

en donde (p, q) corresponde a todas las coordenadas de la malla S , la cual es el

espacio asociado a la descomposición de la señal. La única condición para la malla de muestreo es que la función de peso

$$W(x, y) = \sum_{(p, q) \in S} V(x - p, y - q) \quad 3.3.3$$

sea diferente de cero en todas las coordenadas (x, y) .

Los coeficientes polinomiales $L_{m, n-m}(p, q)$ se derivan convolucionando la imagen con las funciones filtro (de manera similar a la ecuación (3.1.11))

$$D_{m, n-m}(x, y) = G_{m, n-m}(-x, -y)V^2(-x, -y) \quad 3.3.4$$

seguida por un muestreo de la salida en $(p, q) \in S$. Siguiendo la ecuación (3.1.10), las funciones patrón se usan para interpolar los coeficientes polinomiales en dos dimensiones

$$P_{m, n-m}(x, y) = \frac{G_{m, n-m}(x, y)V(x, y)}{W(x, y)} \quad 3.3.5$$

para $n = 0, 1, \dots, \infty$ y $m = 0, \dots, n$.

Un caso especial de la transformación polinomial es cuando la función ventana es separable, $V(x, y) = V(x)V(y)$, con malla de muestreo cuadrada. Entonces las funciones de análisis y síntesis también son separables, y fáciles de implantar. Por ejemplo, los coeficientes polinomiales se generan convolucionando la imagen con las funciones filtro $D_m(x)D_{n-m}(y)$, en donde $D_m(x)$ es la función filtro de una dimensión para la ventana $V(x)$, seguida por un muestreo de la salida en las direcciones horizontal y vertical en múltiplos de T .

La ventaja importante de las ventanas Gaussianas en dos dimensiones es que tienen la propiedad única de ser tanto separables espacialmente como simétricas rotacionalmente [4].

3.4 Transformaciones polinomiales discretas

Hasta ahora todas las señales y filtros se han considerado continuos. En aplicaciones prácticas de transformaciones polinomiales se requiere la formulación de señales discretas. Hay dos alternativas para formular transformaciones polinomiales discretas.

Una aproximación posible es ligar cada señal discreta con una continua, por ejemplo [4], la señal

$$L(x) = \sum_q L_q \cdot I(x - q\Delta) \quad 3.4.1$$

se especifica por un número contable de coeficientes L_q por medio de la interpolación con $I(x)$. Si se aplica una transformación directa a esta señal, se producen los siguientes coeficientes

$$L_n(pT) = \sum_q L_q [D_n(x) * I(x)]_{x=pT-q\Delta} \quad 3.4.2$$

Si T es múltiplo de la distancia de muestreo ($T = T_\Delta \Delta$), entonces los coeficientes polinomiales de orden n se generan por una convolución discreta de la secuencia L_q con la secuencia del filtro

$$DI_n(q) = [D_n(x) * I(x)]_{x=q\Delta} \quad 3.4.3$$

seguida por un submuestreo con factor de T_{Δ} . Sin embargo, también se pueden definir transformaciones polinomiales directamente en señales discretas. Es válido en las funciones de peso, análisis, y síntesis, reemplazar la variable continua x por una discreta. Las expresiones de integración se cambian por sumatorias. Por ejemplo, de acuerdo a la ecuación (3.1.5) el momento de orden n puede definirse como

$$c_n = \sum_x x^n V^2(x) \quad 3.4.4$$

para $n = 0, \dots, N$.

La contraparte discreta de una ventana Gaussiana es una ventana binomial, cuyo valor al cuadrado es

$$V^2(x) = \frac{1}{2^M} \binom{M}{x} \quad 3.4.5$$

para $x = 0, \dots, M$. Los polinomios ortonormales que se asocian con esta ventana son los polinomios Krawtchouk's [9]

$$G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\binom{M}{n}}} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{M-x}{n-k} \cdot \binom{x}{k} \quad 3.4.6$$

para $x, n = 0, \dots, M$.

La transformación discreta Hermite de longitud M aproxima a la transformación continua Hermite con desviación estandar $\sigma = \sqrt{M/2}$, en el caso de que M sea

par. Las funciones de análisis y síntesis se centran en el origen con un corrimiento de $M/2$ en la ventana binomial. Esto conduce al siguiente filtro de análisis

$$D_n(x) = G_n\left(\frac{M}{2} - x\right) \cdot V^2\left(\frac{M}{2} - x\right) \quad 3.4.7$$

para $x = -(M/2), \dots, M/2$.

4. REDUCCION DE RUIDO

4.1 Descripción del método

En el caso específico de las ventanas Gaussianas, una transformación polinomial directa consiste en la convolución de la imagen original con derivadas de funciones Gaussianas [4]. Esto implica que los coeficientes polinomiales representan cambios en intensidad en la imagen [23] [28], emulando así algunas propiedades del sistema visual humano [6] [7]. En el caso de reducción de ruido [8], utilizamos la energía contenida en los coeficientes polinomiales para detectar la existencia de estructuras con significado dentro de la imagen. Esto con el fin de separar las regiones homogéneas de las regiones con bordes y líneas, ya que en las regiones homogéneas aplicamos un filtrado más severo sin correr el riesgo de perder detalles de la imagen, mientras que en los bordes se debe preservar la resolución original con el fin de no dañar (difuminar) los mismos. La medida de energía de orden n se define como (de acuerdo a la ecuación (3.1.8))

$$E_n = \sum_{m=0}^n L_{m,n-m}^2 \quad 4.1.1$$

para $n = 1, \dots, N$. En el caso de imágenes afectadas por ruido (capítulo 2), la energía E_n contiene contribuciones de señal y ruido.

Para analizar una imagen es importante la detección de sus bordes. Por lo tanto, el método que planteamos se enfoca a detectar y restaurar los bordes (estructuras) completamente. Canny [29] [30] ha mostrado que la detección y localización óptima de bordes se realiza por medio de un operador similar a la derivada de primer orden de una función. Gaussiana. Es por esto que utilizamos la medida de energía de primer orden E_1 para detectar los bordes presentes en la imagen.

El problema de detección de bordes se puede considerar como un problema de decisión binaria en el cual se conoce las propiedades estadísticas del ruido, pero no de la señal. El histograma de la energía asociada a los coeficientes de primer orden, cuando únicamente hay presencia de ruido, se aproxima con

$$p(E_1) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{E_1}{2\sigma^2}\right] \quad 4.1.2$$

con condición de simetría en la función de autocorrelación R del ruido

$$\sigma^2 = R_{1,0;1,0} = R_{0,1;0,1} \quad 4.1.3$$

Y si hay presencia tanto de ruido como de borde, entonces la PDF de E_1 se puede definir como [8] [27]

$$p(E_1) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{E_1 + L_e^2}{2\sigma^2}\right] \cdot I_0\left(\frac{L_e}{\sigma^2} \sqrt{E_1}\right) \quad 4.1.4$$

con

$$L_e = \frac{A_e}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[- \left(\frac{x_e}{\omega} \right)^2 \right] \quad 4.1.5$$

en donde I_0 es la función modificada de Bessel de orden cero, y σ es la desviación estandard de la ventana Gaussiana, x_e es la posición del borde de amplitud A_e .

Como esta medida de energía de primer orden E_1 contiene contribuciones tanto de ruido como de señal, el problema se centra en encontrar un umbral (intensidad de energía) sobre el histograma de la energía de primer orden que permita discriminar aquellas regiones de la imagen en donde su energía de primer orden está representada en mayor proporción por contribuciones de señal.

Como se ha dicho, además de ser un problema de decisión binaria, la detección de bordes, en la práctica, es un método iterativo de apreciación visual (restauración de bordes con presencia de ruido o eliminación de ruido con atenuación de bordes).

4.2 Procesamiento en una escala

En esta sección se presenta un algoritmo de reducción de ruido para imágenes astronómicas. Primero, se realiza una transformación polinomial directa sobre la imagen astronómica afectada por el ruido, en base a una función ventana definida a priori. El resultado que obtuvimos es un conjunto de coeficientes polinomiales que los agrupamos como

$$L_n = [L_{n,0} \ L_{n-1,1} \ \cdots \ L_{1,n-1} \ L_{0,n}] \quad 4.2.1$$

para $n = 0, \dots, N$.

Posteriormente, evaluamos la medida de energía de primer orden E_1 , definida en (4.1.1), a través de estos coeficientes polinomiales.

En base al método descrito en la sección anterior discriminamos la contribución de bordes de la contribución de ruido sobre la energía de primer orden. En todos los casos en los que se detecta bordes, se realiza una transformación polinomial inversa completa. Y en los casos restantes únicamente se incluye el coeficiente polinomial de orden cero en la transformación inversa. Esto quiere decir que el ruido de la imagen original se sustituye por el promedio definido en las ventanas de aquellas regiones.

Los parámetros ajustables en el sistema son el umbral de la señal de energía, la función ventana V , y la malla de muestreo. La malla de muestreo influye principalmente en el número de cálculos que se necesitan para implantar el algoritmo.

Una vez que se eligen los parámetros de la transformación polinomial, se presenta la transacción que consiste en elegir el umbral de la señal de energía tal que el ruido alrededor de los bordes tienda a disminuir sin degradar los bordes (imagen nítida).

La transformación polinomial directa, se deriva a través de un análisis que consiste en convolucionar la señal original $L(x)$ con las funciones filtro $D_{i,n}(x)$,

$$\begin{aligned} L_{i,n}(x) &= L(x) * D_{i,n}(x) \\ &= L(x) * G_{i,n}(-x)V_i^2(-x) \end{aligned} \quad 4.2.2$$

seguida por un submuestreo en múltiplos de T_i . Los polinomios ortogonales definidos sobre la ventana al cuadrado $V^2(-x)$ se denotan por $G_{i,n}(x)$, para $i = 1$ y $n = 0, \dots, N_{i=1}$.

La transformación polinomial inversa se deriva de una síntesis por medio de la interpolación empleando los coeficientes $\{L_{i,n}(qT_i); q = \text{entero}\}$ con la función

patrón $P_{i,n}(x)$, seguida por una sumatoria sobre todos los ordenes n ,

$$\hat{L}(x) = \sum_{n=0}^N \sum_q L_{i,n}(qT_i) P_{i,n}(x - qT_i). \quad 4.2.3$$

Las funciones patrón se definieron de acuerdo a la ecuación (3.1.10)

$$P_{i,n}(x) = \frac{G_{i,n}(x)V_i(x)}{W_i(x)} \quad 4.2.4$$

para $n = 0, \dots, N_{i=1}$ en donde

$$W_i(x) = \sum_q V_i(x - qT_i) \quad 4.2.5$$

es la función de peso para $i = 1$.

4.3 Procesamiento en varias escalas

Como se ha mencionado en secciones anteriores, el tamaño de la ventana influye en dos problemas, a) si la ventana es demasiado grande se pierden detalles de la imagen si no se considera un orden de transformación muy alto, además se

reconstruye una franja muy ancha de ruido a lo largo de los bordes y b) si la ventana es demasiado pequeña no se presenta rechazo de los niveles de energía del ruido similares a los niveles de energía con contribuciones de bordes. Para resolverlos, a) se requiere de un gran número de coeficientes polinomiales para obtener la reconstrucción adecuada, y b) se requiere efectuar repeticiones del proceso. Esto trae como resultado un algoritmo de alto costo computacional.

Las estructuras piramidales [17] [18] son una técnica para procesar de manera eficiente con ventanas de longitud variable.

En primera instancia se plantea la alternativa de transformación de los coeficientes polinomiales en un nivel j a los coeficientes del nivel i por medio de una transformación polinomial inversa para una función ventana $V_j(x)$ seguida por una transformación polinomial directa para una función ventana $V_i(x)$.

Sin embargo, el argumento teórico para incrementar el tamaño de la ventana es que permita la reducción de la desviación estándar σ del ruido. *Este es el primer objetivo* del algoritmo de reducción de ruido en imágenes astronómicas. La consecuencia de presentar una decisión binaria (umbral límite) al problema es la preservación de ruido en el entorno de los bordes detectados en la imagen.

En base a lo anterior se concluye que la reducción óptima del ruido requiere analizar la imagen con diferentes ventanas $V_i(x)$, $V_j(x)$ para $i \neq j$, ampliándose la solución con múltiples decisiones.

Es conveniente que el tamaño de la ventana disminuya a medida que se incrementa la amplitud de los bordes y la reducción de su separación (cambios grandes de intensidad de un pixel con sus vecinos). Se ha demostrado [4] [5] la expansión de transformaciones polinomiales en estructuras piramidales.

La diferencia entre niveles sobre una estructura piramidal presenta una imagen de contenido frecuencial bajo en el nivel que representa la elección de una ventana más grande.

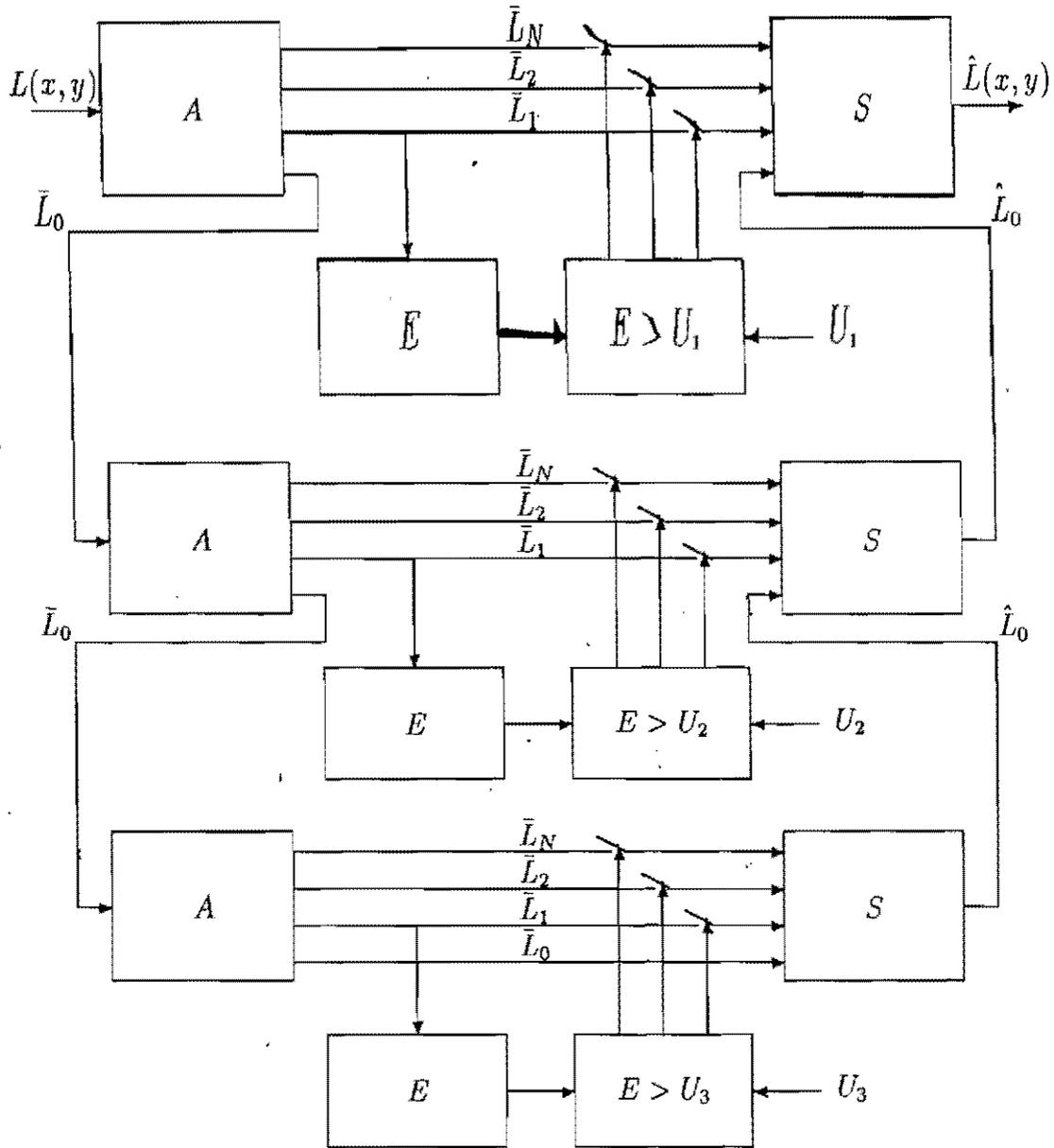


Fig. 4.1 Algoritmo multiescala de reducción de ruido.

Aunque no es estrictamente necesario, pueden ser iguales las funciones ventana $V_i(x)$ sobre la estructura piramidal, simplificándose de esta forma el proceso computacional. El submuestreo por factor de dos en cada nivel, es equivalente a in-

cremeutar el tamaño de la ventana por factor de dos en cada nivel sucesivo de la pirámide.

En los experimentos que se realizaron con imágenes astronómicas, el umbral de energía (E) decrecía a medida que se pasaba al siguiente nivel de la pirámide, porque la desviación estandard σ ; también decrece.

El diagrama de la figura 4.1 muestra el algoritmo de reducción de ruido en varias escalas, ajustando la atenuación del ruido en la amplitud y posición de los bordes.

4.4 Resultados

En esta sección se ilustra las transformaciones polinomiales (capítulo 3), así como su aplicación en el método de reducción de ruido (capítulo 4).

El tipo de imágenes que se emplearon experimentalmente presentan las siguientes características: Imágenes (CCD 960×960 [pixel]) astronómicas de galaxias en espiral con barra, centradas en los filtros R (λ Central = 6340 [Å], $\Delta\lambda = 400$ [Å]), I (λ Central = 8040 [Å], $\Delta\lambda = 1660$ [Å]) y H α (λ Central₀ = 6459 [Å], $\Delta\lambda_0 = 101$ [Å] y λ Central₁ = 6607 [Å], $\Delta\lambda_1 = 89$ [Å]). La substracción del cuadro de polarización y del campo de fondo de la imagen se realizaron con software (NOAO IRAF) en el Instituto de Astronomía UNAM.

La figura 4.4.1 muestra la expansión polinomial de una imagen (galaxia M51). El mosaico de la figura es un arreglo matricial de los coeficientes polinomiales, es decir, es una transformación binomial de segundo orden con una ventana de análisis de 3 pixeles de longitud, la cual aproxima a una ventana Gaussiana con desviación estandard $\sigma = 1$ (ver sec. 3.4). La imagen 0,0 es el coeficiente de orden cero, similar a la imagen original pasada por un filtro paso-bajas. Como se ha dicho y se puede observar en la figura 4.4.1, los coeficientes polinomiales de orden uno (imágenes 0,1 y 1,0) son buenos detectores de bordes [29] [30]. En la posición matricial que correspondería al coeficiente de orden cuatro, se muestra la medida de energía de primer orden E_1 para detectar los bordes presentes en la imagen original.

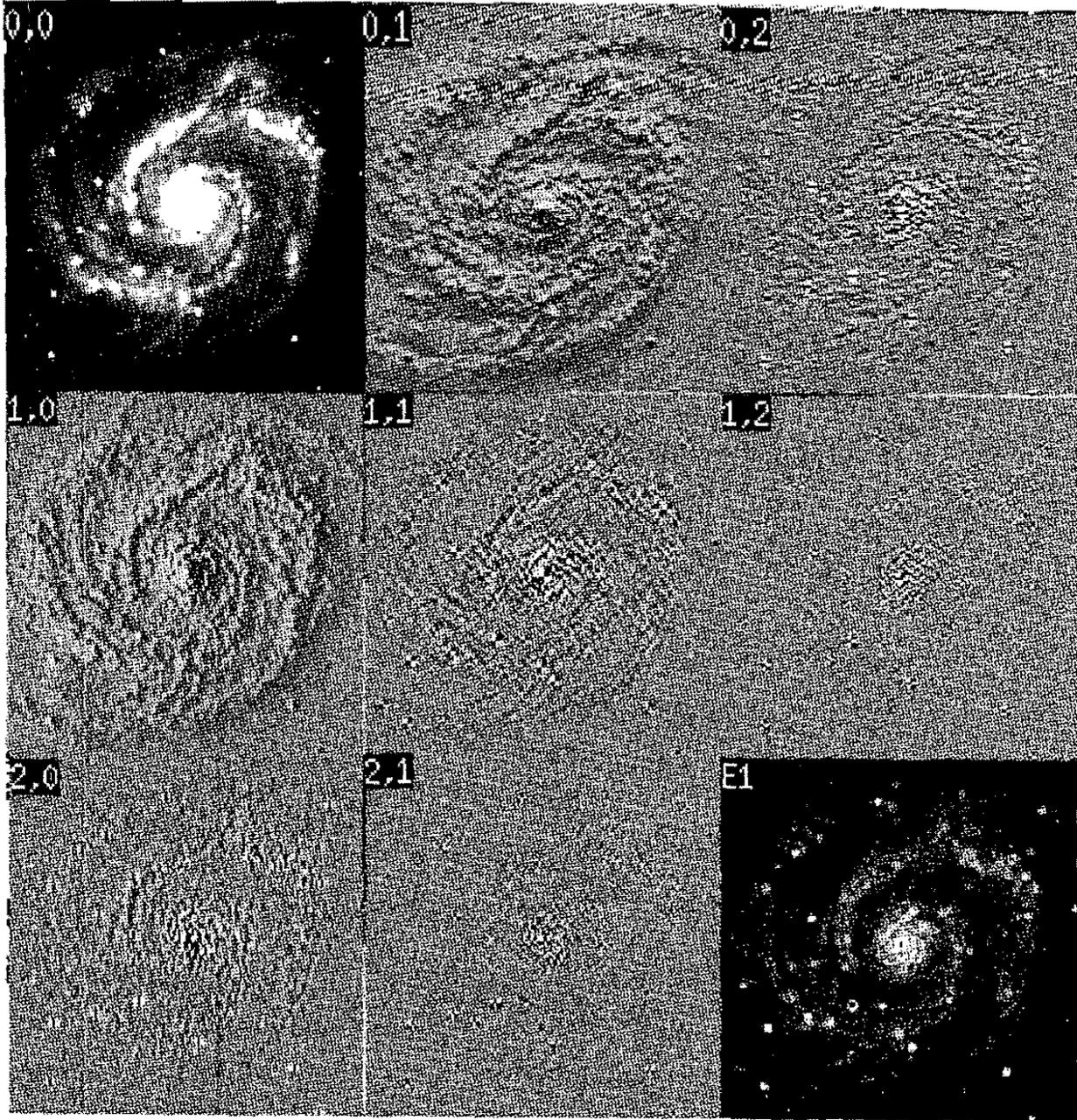


FIGURA 4.4.1

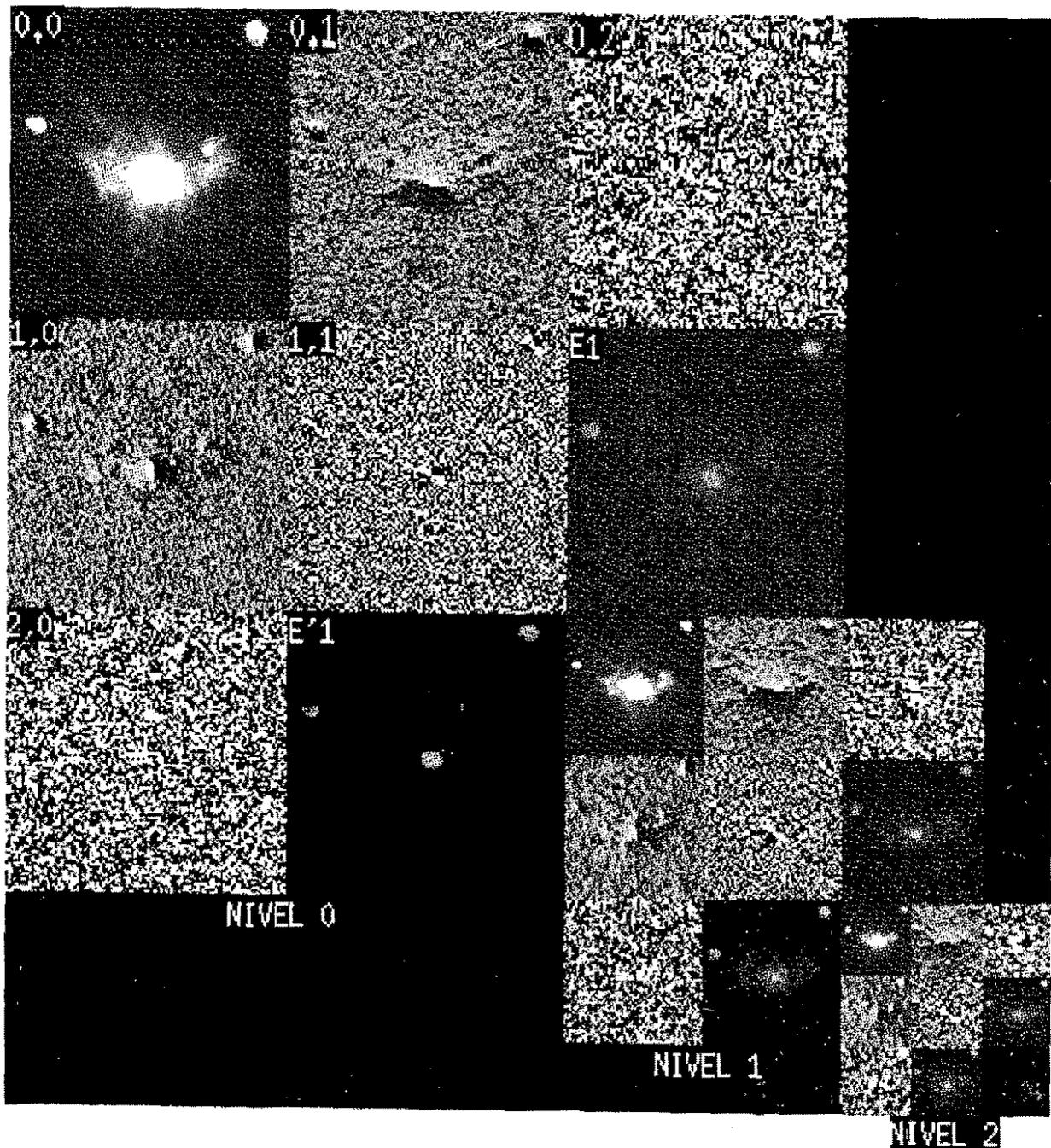


FIGURA 4.4.2

En la figura 4.4.2 se muestra la expansión polinomial de segundo orden en una imagen (galaxia NGC 1275) sobre una estructura piramidal [17] [18]. En el nivel 0 de la figura se muestra el arreglo mátricial correspondiente a una transformación polinomial de segundo orden con desviación estandar $\sigma = 1$ (en base a una representación binomial con longitud de la ventana de 3 pixeles), también se muestran las energías de primer orden E_1 (que se obtiene a partir de los coeficientes polinomiales de primer orden 0,1 y 1,0, ec. 4.1.1) y E'_1 (que es el resultado de discriminar los bordes más agudos de la imagen). El arreglo del nivel 1 presenta el mismo orden de imágenes que el arreglo del nivel 0, pero la expansión polinomial del nivel 1 se genera a partir del coeficiente polinomial de orden cero del nivel 0 (imagen 0,0), y así sucesivamente se genera el siguiente nivel de la pirámide, nivel 2. Como se menciona en la sección 4.3, ahora se puede observar en los coeficientes polinomiales de primer orden (imágenes 0,1 y 1,0) las estructuras con contenido frecuencial diferente entre sí, para cada nivel de análisis sobre la pirámide.

En la figura 4.4.3 se muestra la imagen original (galaxia n3783H α) y los resultados de los procesos a los que se sometió la imagen original. En la imagen original (superior-izquierda) se puede observar que en las regiones fuera del núcleo del objeto la relación señal a ruido SNR es tan pequeña que impide detectar y localizar (si es que hay algo) las estructuras que rodean al núcleo. En la imagen inferior izquierda se muestra el resultado de haber sometido la imagen original a un filtro de mediana de 3x3 [pixel], se puede observar que los bordes tienden a notarse, pero el ruido también se preserva, dificultando la localización de los bordes. En la imagen inferior derecha, como proceso opuesto al anterior, se muestra el resultado de someter la imagen original al algoritmo de L. B. Lucy (software en el IAUNAM, técnica iterativa para la rectificación de distribuciones observadas); la imagen efectivamente muestra la presencia de estructuras alrededor del núcleo del objeto, pero presenta el aspecto de haberse sometido a un filtro pasa bajas demasiado severo que impide la definición de los bordes. En la imagen superior derecha se muestra el resultado de someter la imagen al presente algoritmo (en base a una representación binomial con longitud de la ventana de 3 pixeles, transformación polinomial de orden 2, desviación estandar $\sigma_i = 1$ para cada uno de los 4 niveles de la pirámide $i = 0, 1, 2, 3$, como se describe en el presente capítulo). En esta imagen se puede detectar y localizar la presencia de estructuras alrededor del núcleo, la mayoría de las cuales corresponden a emisiones de energía de la galaxia, sin embargo también se pueden detectar puntos de ruido debido a las limitaciones del algoritmo de detección de bordes.

En la figura 4.4.4 se ilustra una secuencia de imágenes similarmente a la figura 4.4.3.

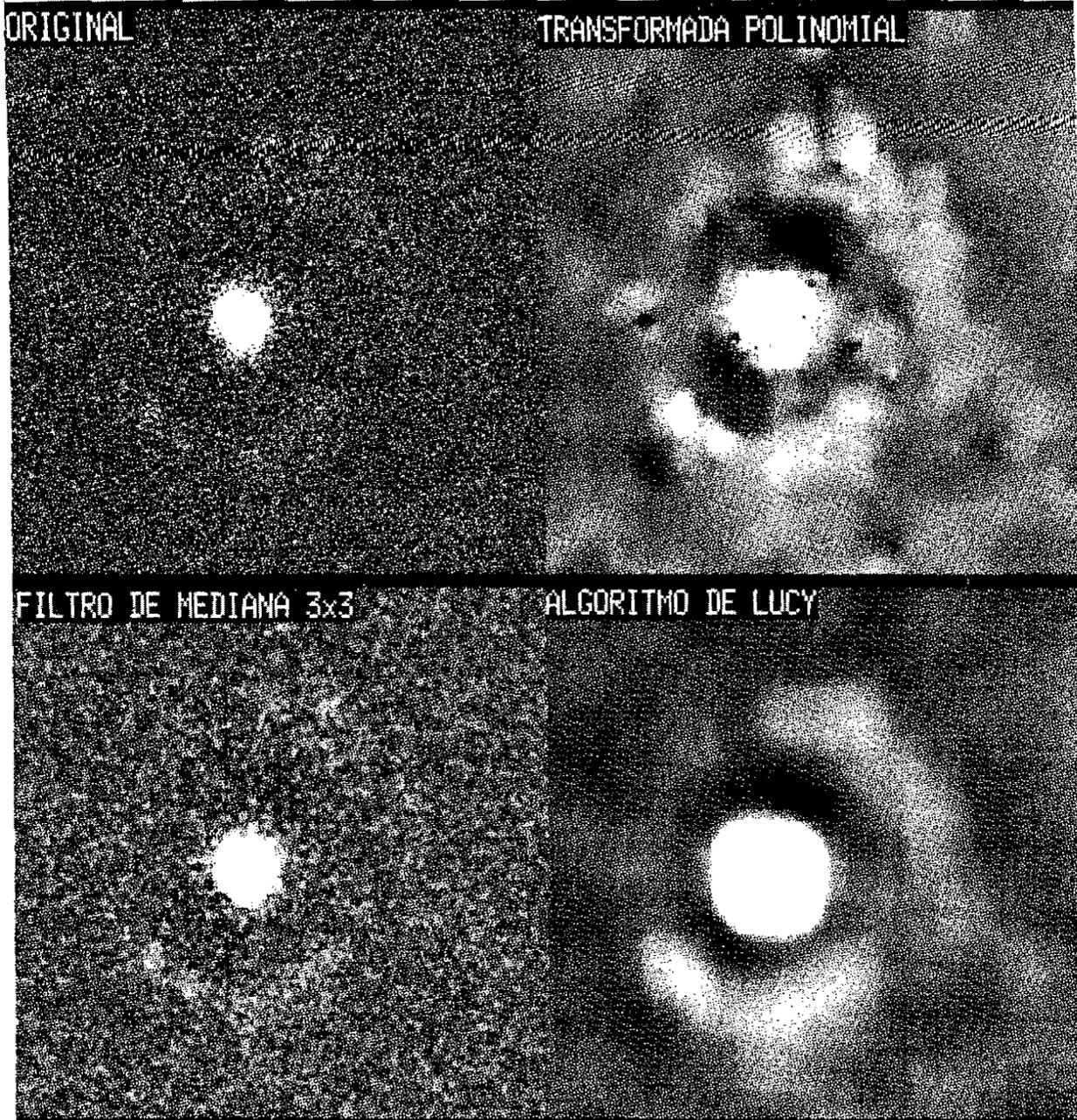


FIGURA 4.4.3

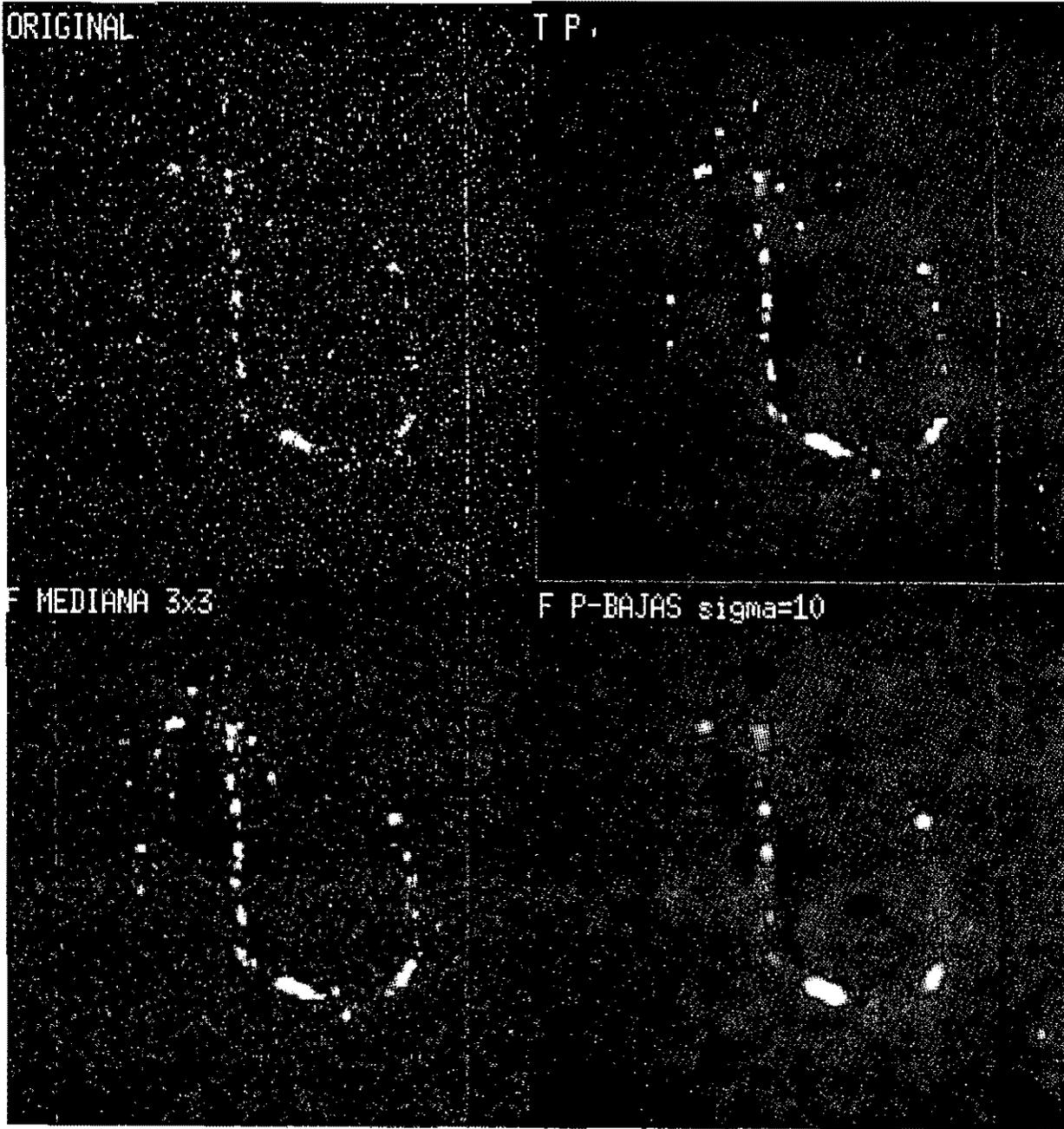


FIGURA 4.4.4

5. PERFILACION DE IMAGENES

5.1 Modelo de difuminación

En el caso de imágenes astronómicas o médicas, la difuminación (blur) de la calidad de la imagen dificulta su interpretación; la difuminación es una propiedad inherente de los sistemas de formación de imágenes (es una convolución de la imagen con el instrumento, la atmósfera, el edificio del telescopio, etc.). La difuminación de una imagen se interpreta como la convolución de la imagen no difuminada con un kernel de difuminación.

Si se mide el tamaño de la zona de afectación realizada por un kernel de transformación en diferentes puntos de una imagen, es posible trazar el mapa de profundidades de toda la imagen. Este mapa se usa en tareas tales como reconocimiento de objetos e interpretación de la escena a partir de la cual se obtiene una imagen en visión computacional [31].

La difuminación Gaussiana es una de las más comunes, se ha mostrado que la difuminación debido a una cámara desenfocada se puede aproximar por un kernel Gaussiano de dos dimensiones [31]. En el primer módulo del modelo de formación de imágenes astronómicas (sección 2.4), la respuesta del telescopio se describe por una función Bessel de orden 0 que se puede aproximar con una función Gaussiana.

Lo anteriormente mencionado es la razón para considerar en el presente capítulo un modelo de difuminación Gaussiano.

5.2 Estimación de la imagen no difuminada

Sobre imágenes difuminadas, las regiones de bordes y líneas son las que presentan mayor daño, mientras que las regiones uniformes de la imagen permanecen esencialmente sin cambio. Por lo tanto, las regiones de bordes son candidatos disponibles para la estimación de la difuminación.

Un borde se caracteriza completamente por su posición, contraste y orientación. La estimación de los parámetros de la difuminación, consiste en la localización y estimación de los bordes no difuminados.

Se ha mostrado [13] que es posible estimar la imagen no difuminada a partir de la imagen difuminada, de acuerdo a lo siguiente:

Sea la imagen $L'(x, y)$ afectada por un kernel $b(x, y)$,

$$L'(x, y) = L(x, y) * b(x, y). \quad 5.2.1$$

La transformación polinomial directa de la imagen difuminada se interpreta como la descomposición de la imagen por medio de un banco de filtros $a_{m,n-m}(-x, -y)$ [4]. Por lo tanto, los coeficientes polinomiales de la señal degradada se presentan como

$$\begin{aligned} &L'_{m,n-m}(p, q) \\ &= [(L(x, y) * b(x, y)) * a_{m,n-m}(-x, -y)]_{(p,q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [L(x, y) * (b(x, y) * a_{m, n-m}(-x, -y))]_{(p, q)} \\
&= [L(x, y) * a'_{m, n-m}(-x, -y)]_{(p, q)}, \tag{5.2.2}
\end{aligned}$$

en donde

$$a'_{m, n-m}(x, y) = a_{m, n-m}(x, y) * b(x, y) \tag{5.2.3}$$

es la función de análisis afectada por el kernel. En otras palabras, los coeficientes polinomiales de una imagen difuminada por un kernel $b(x, y)$, empleando las funciones de análisis $a_{m, n-m}(x, y)$, son los mismos coeficientes polinomiales de una imagen no difuminada que se obtiene con funciones de análisis afectadas $a'_{m, n-m}(x, y)$.

Específicamente, si $b(x, y)$ es un kernel Gaussiano dado por

$$b(x, y) = \frac{1}{\pi \sigma_b^2} \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{\sigma_b^2} \right] \tag{5.2.4}$$

entonces

$$a'_{m, n-m}(x, y) = a_{m, n-m}(x, y; \sigma) * \frac{1}{\pi \sigma_b^2} \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{\sigma_b^2} \right] \tag{5.2.5}$$

en donde [13]

$$\begin{aligned}
&a_{m, n-m}(x, y; \sigma) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n m! (n-m)!} \pi \sigma^2} H_m \left(\frac{x}{\sigma} \right) H_{n-m} \left(\frac{y}{\sigma} \right) \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{\sigma^2} \right]. \tag{5.2.6}
\end{aligned}$$

Utilizando como herramienta la transformada de Fourier de (5.2.6) en (5.2.5) se obtiene

$$a'_{m,n-m}(x,y;\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}} \right)^n a_{m,n-m} \left(x, y, \sigma \sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2} \right). \quad 5.2.7$$

Si (5.2.7) se aplica en la expresión

$$L_{m,n-m}(p,q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x,y) a_{m,n-m}(x-p,y-q) dx dy, \quad 5.2.8$$

entonces los coeficientes de la imagen difuminada $L'_{m,n-m}(p,q;\sigma)$ se pueden definir como

$$L'_{m,n-m}(p,q;\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}} \right)^n L_{m,n-m} \left(p, q, \sigma \sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2} \right). \quad 5.2.9$$

En otras palabras, los coeficientes de una imagen difuminada con un kernel Gaussiano con parámetro σ_b , obtenidos con una ventana de desviación estándar σ , son los mismos coeficientes de una imagen no difuminada empleando una ventana con desviación estándar $\sigma \sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}$, ponderando los coeficientes con un factor de $(1/\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2})^n$.

5.3 Resultados

En la parte superior izquierda de la figura 5.3.1 se muestra la imagen original (1 [byte/pixel], 512x512 [pixel]). En la parte superior derecha se muestra la localización de las regiones, en base a una representación binomial con longitud de la ventana de 3 pixeles (ver sec. 3.4) que tienden a ser afectadas en mayor grado por la respuesta no perfecta de un sistema de adquisición de imágenes. En la imagen inferior derecha se muestra la difuminación de la imagen original en base a una ventana con desviación estandard $\sigma_b = 1$, y en la parte inferior izquierda se muestra el realce de la imagen difuminada (inferior derecha) en base a una síntesis (sobre la expansión polinomial de la imagen difuminada) con desviación estandard compensatoria $\sigma_b, \sigma = 1.41$ y ponderación sobre los coeficientes polinomiales con $(\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2})^n$ (de la expresión 5.2.9), en donde n es el orden del polinomio generador.

En la figura 5.3.2 se muestran representaciones similares a la figura 5.3.1 sobre una imagen astronómica (2 [bytes/pixel], 512x512 [pixel]), la columna (izquierda) de imágenes b1, b2, y b3 son el resultado de la difuminación de la imagen en base a ventanas con desviaciones estandard de 2, 1.41, y 1 respectivamente. En la columna (derecha) de imágenes e1, e2, y e3 se pueden observar las distintas localizaciones de las regiones que tienden a ser difuminadas en mayor proporción. Es claro que en la imagen e3 se detecten los bordes más agudos en base a una representación binomial con longitud de la ventana de 3 pixeles, y en la columna (central) de imágenes r1, r2, y r3 se muestran las imagenes realzadas b1, b2, y b3 respectivamente en base a síntesis (sobre las expansiones polinomiales de las imágenes difuminadas) con desviaciones estandard compensatorias (expresión 5.2.9) de 2.24, 1.73, y 1.41 respectivamente. Se puede observar que las imágenes de la columna central son más nítidas, pero cuando la difuminación es severa es obvio que no se puede realzar información que no existe (imágenes b1, r1, e1).

En ambas figuras 5.3.1 y 5.3.2 la localización de los bordes se realizó en base a los coeficientes polinomiales de primer orden [29] [30].



FIGURA 5.3.1

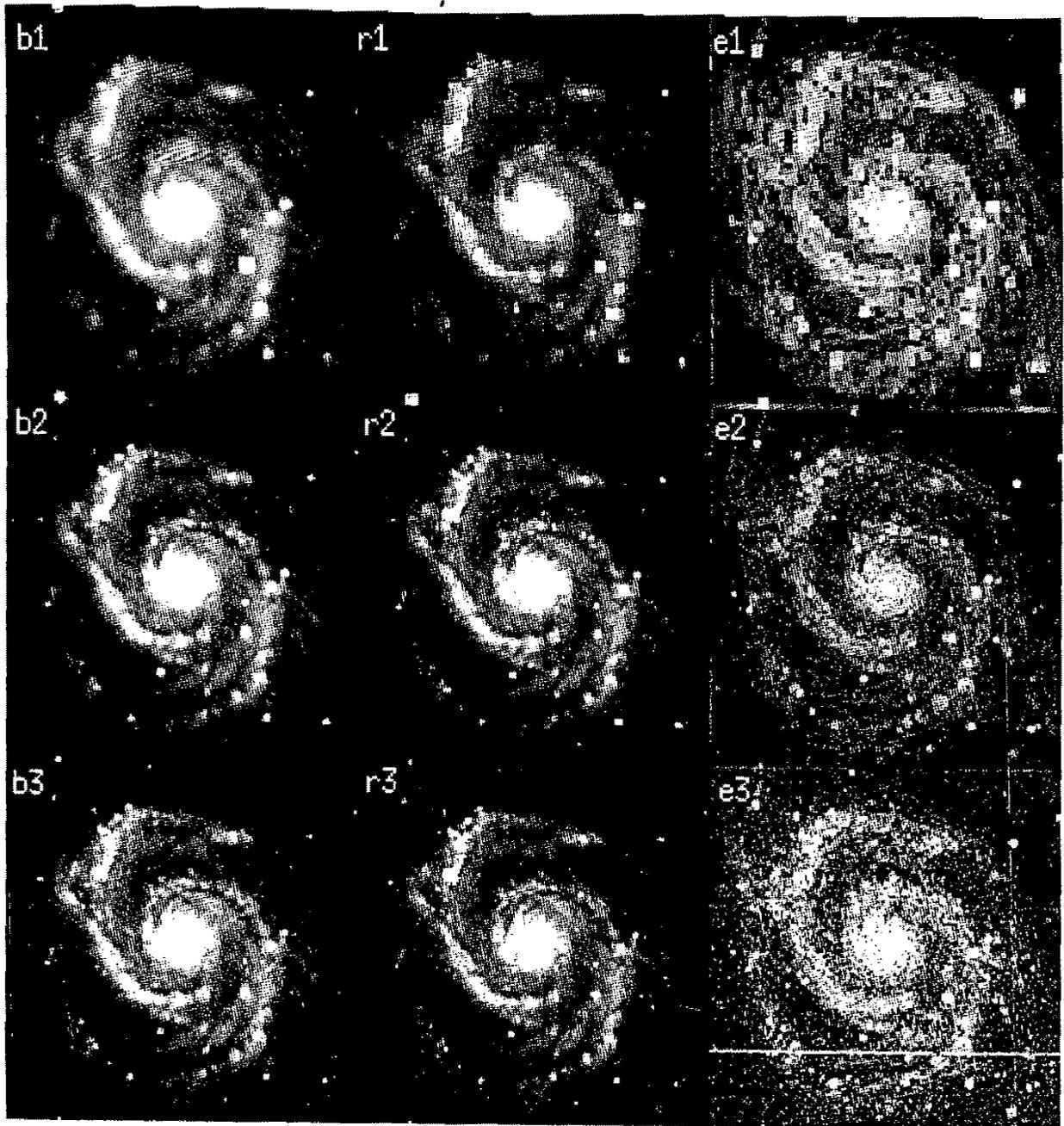


FIGURA 5.3.2

6. CODIFICACION DE IMAGENES

6.1 Esquema de predicción

La interpretación que se puede dar a los algoritmos de codificación de imágenes, es que representan una imagen con la descomposición de la misma en base a menor información. En la práctica, esto se hace a menudo determinando una aproximación óptima de la imagen de entrada por una suma ponderada de patrones elegidos a priori. Los pesos de los patrones de contribución constituyen la descripción de la imagen de entrada. Con estos coeficientes se sintetiza una aproximación de la imagen original.

Con el propósito de que la descripción de la imagen sea eficiente, es necesario que los patrones elegidos a priori estén bien adaptados a la imagen, esto es, que la imagen original se aproxime (localmente) con un número limitado de patrones. Sin embargo, como es grande la variedad de características que ocurren en imágenes naturales, es muy poco probable que un conjunto de patrones pueda ofrecer una descripción eficiente de todas esas características. Distintas estructuras espaciales, tales como regiones homogéneas, bordes, líneas, texturas, etc., es probable que requieran descripciones distintas. La situación es más complicada por el hecho de que esas estructuras tengan tamaño diferente (escala espacial) y puedan variar en un rango de velocidades (escala temporal).

Una aproximación posible es el uso de varios conjuntos de patrones, elegidos para las diferentes características que puedan ocurrir en una imagen. Por ejemplo, para cada conjunto de patrones se realiza un análisis y síntesis de la imagen. La imagen subsecuentemente se segmenta en regiones seleccionando la descripción más eficiente en cada punto de la imagen (como se muestra en el capítulo siete). Esta aproximación se ha adoptado en codificación basada en segmentación [32].

Este esquema general se simplifica en el caso de que los diferentes conjuntos de patrones resulten ordenados (durante su generación) de manera jerárquica. Si se tiene el caso de dos conjuntos de patrones que decrecen en su complejidad de descripción, se inicia examinando la descripción de la imagen por el conjunto más simple. Este conjunto ofrece una descripción eficiente. La imagen que se aproxima con la síntesis del segundo conjunto de patrones, se compara subsecuentemente con la imagen original. Únicamente se codifican las diferencias en las dos descripciones.

Se han hecho trabajos sobre codificación de imágenes, como por ejemplo: Pirámide Laplaciana [18], analizando la imagen en varias escalas sobre estructuras piramidales, en donde los diferentes conjuntos de patrones difieren por el espacio de muestreo. A continuación se propone un esquema en base a transformaciones polinomiales sobre estructuras piramidales.

En el capítulo anterior, se describe la manera de perfilar la respuesta de un sistema de adquisición de imágenes (deblurring). En base a esa perfilación es posible lograr la codificación de imágenes.

En la figura 6.1 se propone la codificación de imágenes por medio de transformaciones polinomiales sobre una estructura piramidal. En este caso la difuminación de la imagen (G_{σ_b}) se hace intencionalmente con una ventana Gaussiana que simula al sistema de adquisición de imágenes, pero con desviación estándar σ_b predefinida. Posteriormente, se submuestra la imagen y se pasa por un cuantizador (Q_I). A partir de este instante la imagen se procesa de manera similar a la perfilación de imágenes, es decir, se realiza la descomposición de la imagen (A_σ) con filtros de desviación estándar σ y

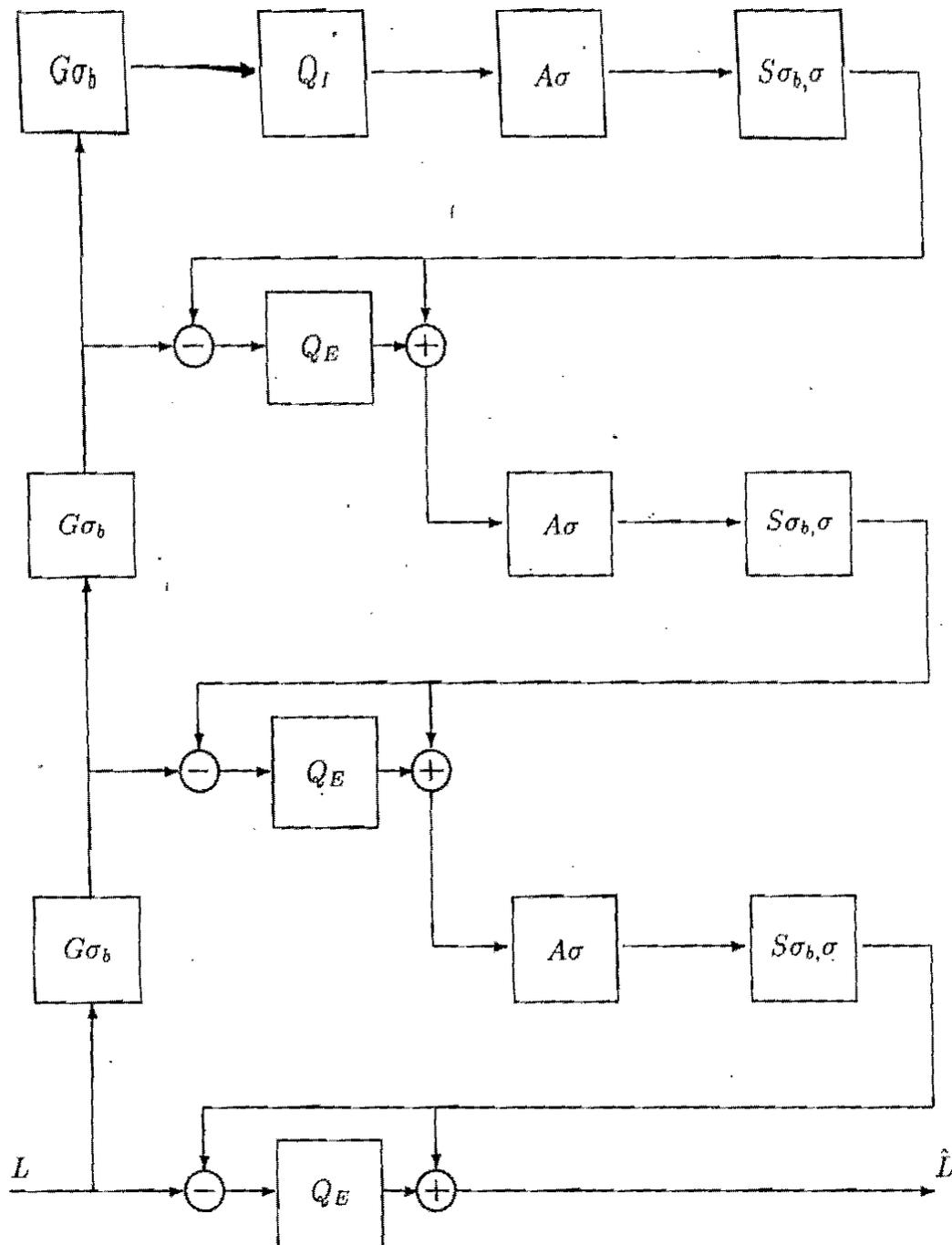


Fig. 6.1 Algoritmo multiescala de codificación.

se sintetizan los coeficientes polinomiales ($S_{\sigma_i, \sigma}$) con los filtros de desviación estándar compensatoria $\sigma_i \sigma$. Finalmente, se obtiene el error de predicción (Q_E), al substraer la aproximación de la imagen original.

El número de niveles de la estructura piramidal, el tipo de cuantizador, la degradación de la imagen (con σ_i), y la descomposición de la imagen (con σ), son las alternativas que ofrece el esquema.

6.2 Transformación polinomial jerárquica

El esquema de codificación de la figura 6.1 muestra el caso de análisis multiescala en donde los diferentes conjuntos de patrones difieren únicamente en (espacial) escala y/o (temporal) espaciado. Esto incluye descripciones en base a ondículas (wavelets) [16] [22], con codificación piramidal [18] y codificación de subbandas [15] como casos especiales. Las condiciones de ortogonalidad que se usan en descripciones de ondículas son el resultado de una clase específica de predicción entre los diferentes niveles de un codificador jerárquico.

En el caso de ventanas binomiales, el esquema de la figura 6.1 realiza una predicción perfecta para algunos coeficientes de un nivel a otro en la reconstrucción de la imagen, mientras que, en los coeficientes restantes no se hace predicción. La alternativa paralela propone la codificación de los coeficientes de un nivel i para llegar a un nivel j con predicción sobre todos los coeficientes como caso general. La aplicación de la codificación jerárquica a transformaciones polinomiales es una ilustración del caso general.

En el caso específico de ventanas Gaussianas, cada función ventana $V_i(x)$ se especifica por el parámetro desviación estándar (o escala) σ_i .

Si se aplica una transformación Hermite de escala σ_{ij} , con $\sigma_{ij}^2 = \sigma_j^2 - \sigma_i^2$, a la señal

$$L_n(x, \sigma_i) = L(x) * D_n(x, \sigma_i) \quad 6.2.1$$

entonces se genera la siguiente expansión de la señal [10]

$$L_n(qT_i, \sigma_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_p L_{n+m}(pT_j, \sigma_j) \cdot d_{n,m}(\sigma_i, \sigma_j) P_m(qT_i - pT_j, \sigma_{ij}) \quad 6.2.2$$

para $n = 0, 1, \dots, N_i$ y q entero. Las distancias de muestreo en las escalas σ_i y σ_j se denotan por T_i y T_j , respectivamente. El resultado se deriva de la propiedad de combinación de las derivadas de los filtros Gaussianos $D_n(x, \sigma_i)$ y $D_m(x, \sigma_{ij})$ que resultan en $D_{n+m}(x, \sigma_j)$. El factor de proporcionalidad es igual a [5]

$$d_{n,m}(\sigma_i, \sigma_j) = \sqrt{\frac{(n+m)!}{n!m!}} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_j}\right)^n \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_j}\right)^m \quad 6.2.3$$

En el caso de la transformación Hermite discreta, se puede describir la transición entre los coeficientes de las transformaciones con ventanas binomiales de longitud M_j y M_i por la expresión [10]

$$L_n(qT_i, M_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_p L_{n+m}(pT_j, M_j) \cdot d_{n,m}(M_i, M_j) P_m(qT_i - pT_j, M_{ij}) \quad 6.2.4$$

la cual es similar a (6.2.2). Y los coeficientes de escalamiento se definen como [5]

$$d_{n,m}(M_i, M_j) = \frac{\sqrt{\binom{M_i}{n}} \sqrt{\binom{M_{ij}}{m}}}{\sqrt{\binom{M_j}{n+m}}} \quad 6.2.5$$

en donde $M_{ij} = M_j - M_i$, es la diferencia entre las longitudes de las ventanas binomiales.

La ventana binomial más pequeña es $M_1 = 2$. Si $T_1 = 2$, se obtiene una reconstrucción perfecta para cualquier transformación discreta de orden $N_1 = 2$. El proceso de predicción de la escala M_2 a la escala M_1 que se expresa en (6.2.4), se reduce a una interpolación simple si T_2 es un múltiplo de T_1 .

La transformación Hermite jerárquica (discreta) consiste de un conjunto de coeficientes Hermite $L_n(kT_i, M_i)$, para $n = 0, 1, \dots, N_i$ y k entero en un número de escalas diferentes M_i , para $i = 1, \dots, I$. En la mayoría de los casos es recomendable considerar transformaciones de orden $N_i \leq 3$ en todos los niveles. Los coeficientes de orden dos son suficientes para describir los bordes y líneas de una imagen.

6.3 Resultados

La figura 6.3.1 ilustra el esquema de codificación de la figura 6.1. Se presenta el método basado en la transformación polinomial para estimar una imagen a partir de una imagen filtrada y submuestreada. La imagen más pequeña de la figura es el resultado de haber pasado la imagen original por los bloques G_{σ_b} del esquema (dos niveles), a partir de esta imagen se realiza la predicción de la imagen del nivel anterior (similar a la perfilación de imágenes, capítulo 5, pero con la ventaja de conocer σ_b) en base a una expansión polinomial con el bloque A_σ del esquema, seguida de una

síntesis compensatoria con el bloque $S_{\sigma_b, \sigma}$. La imagen intermedia de cada nivel en la figura, es el error de predicción que se obtiene al substraer la predicción (imagen izquierda) de la imagen original (imagen derecha). Este método (perfilar) se comparó con otros métodos tales como: Pirámide Laplaciana [18], Espacio Escalar [19], e Interpolación [14], obteniéndose los resultados de las entropías que se muestran en la siguiente tabla. En la obtención de tales resultados se utilizó la expresión (6.3.1)

$$H(p) = - \sum_{j=0}^{J-1} p_j \log p_j \quad 6.3.1$$

donde $J = 256$ [niveles de intensidad de gris] y p_j es la frecuencia relativa del nivel j .

[bits/pixel]	Error nivel 1	Error nivel 2	Imagen nivel 3	Total
P.Laplaciana	4.3355	4.2103/4	7.1420/16	5.8345
Perfilación	4.1134	4.3521/4	7.1420/16	5.6478
E.Escalar	3.8896	4.1658/4	7.2108/16	5.3817
Interpolación	3.8842	3.9672/4	7.1420/16	5.3224

En la figura 6.3.2, en la parte superior derecha de la figura se muestra un acercamiento de la imagen original, en la parte superior izquierda se muestra el resultado de pasar la imagen original por el bloque G_{σ_b} del esquema de la figura 6.1, en la parte inferior derecha se muestra la predicción de la imagen original en base al método de interpolación a partir de la imagen filtrada y submuestreada (L0;0,0), y en la parte inferior izquierda se muestra la predicción de la imagen original en base al método de perfilación a partir de la imagen filtrada y submuestreada (L0;0,0). Como se puede observar en la figura, en cuanto a percepción visual presenta un resultado más nítido la predicción en base a la perfilación (deblurring) con respecto a la predicción en base al método de interpolación. Esto contrasta con los resultados de la tabla anterior que muestra una entropía total más baja para la imagen que resulta del método de interpolación.

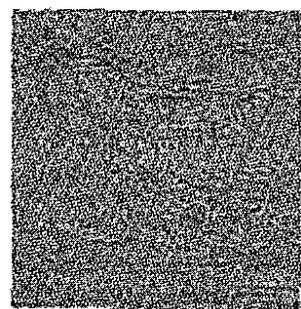
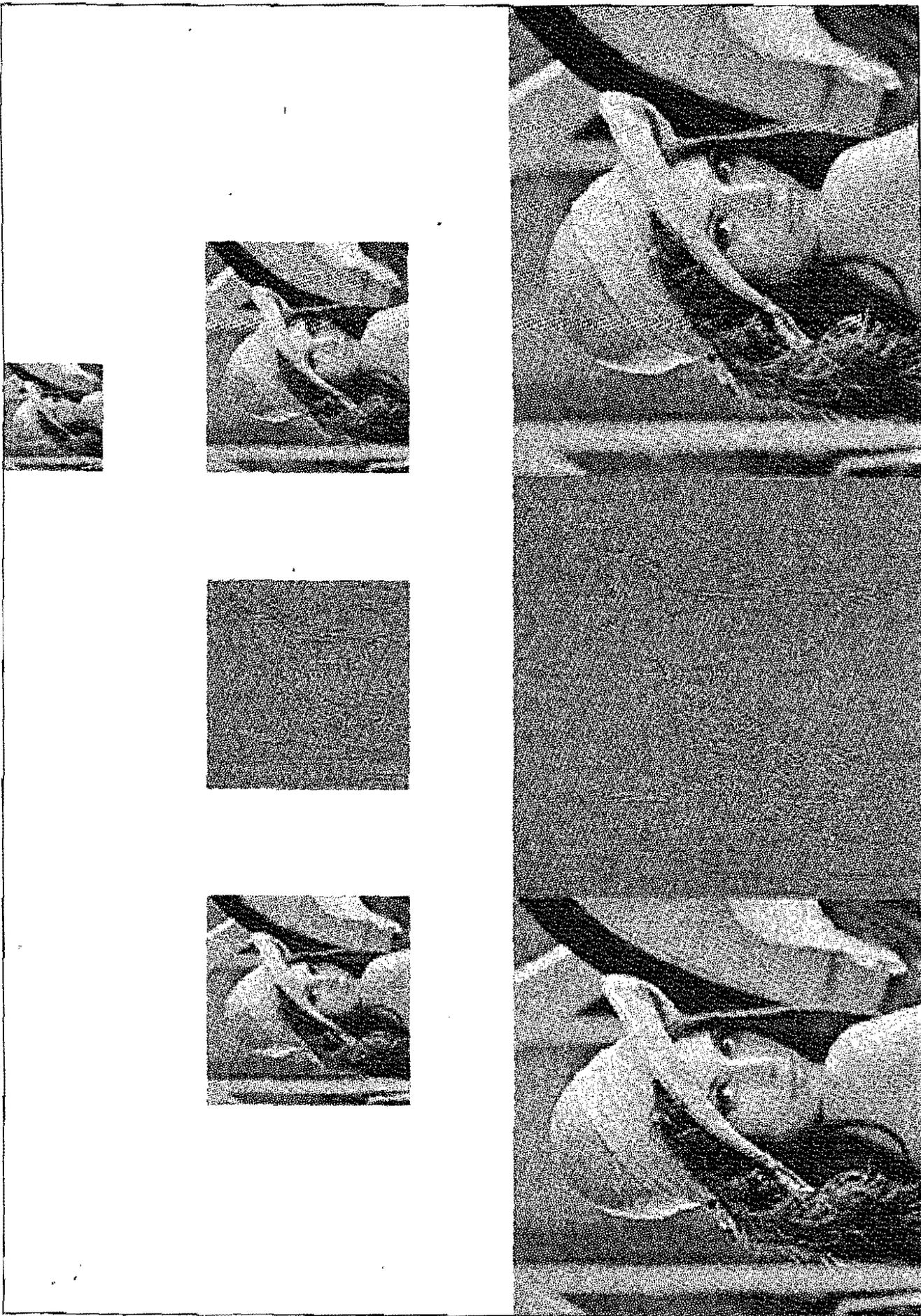


FIGURA 6.3.1

42 x 293 = 295

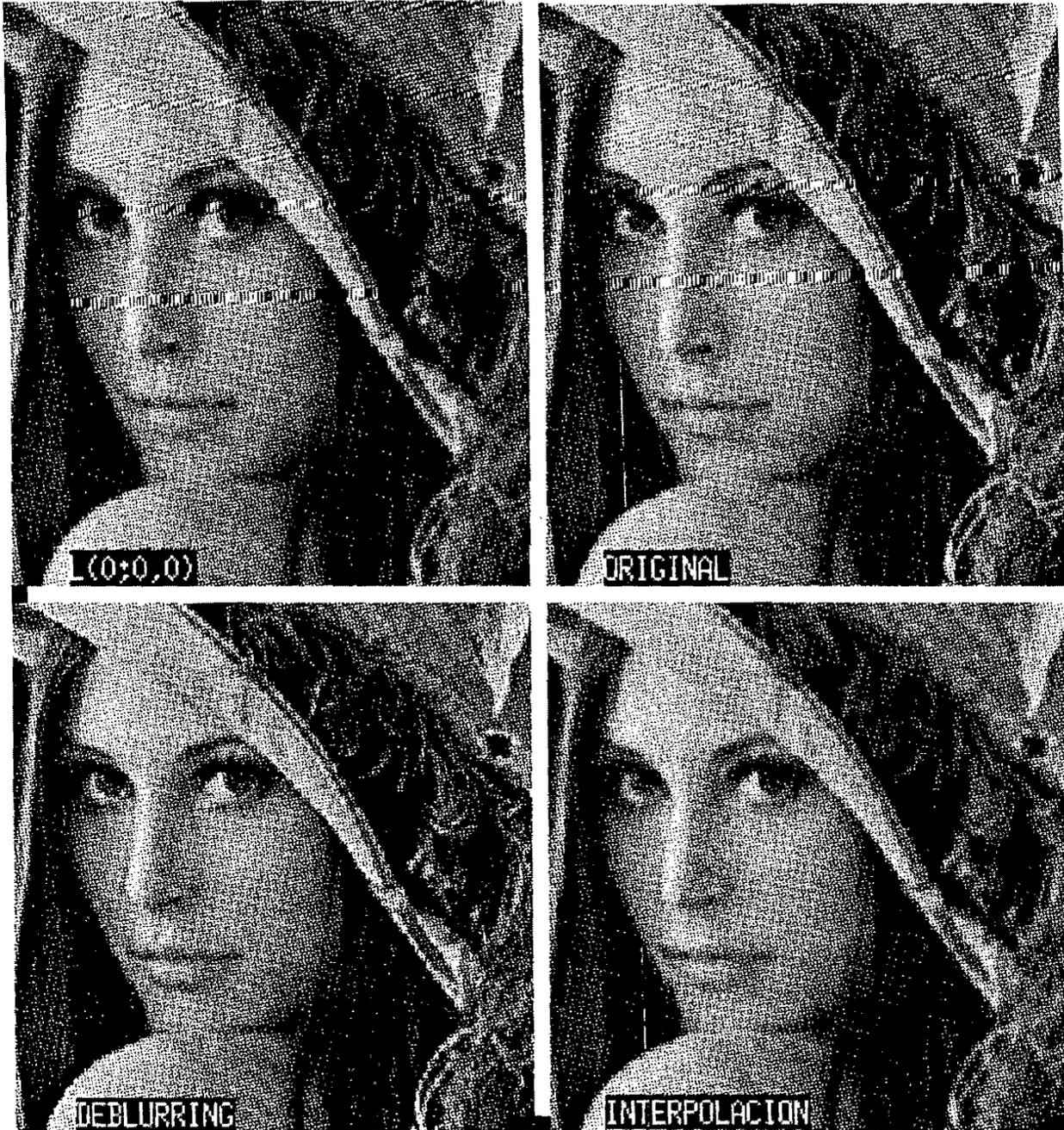


FIGURA 6.3.2

7. PROCESAMIENTO INTEGRAL

7.1 Perfilación adaptiva

La difuminación de las imágenes debido al sistema de adquisición, impide definir los detalles en las regiones de bordes. Esto hace necesario, con el fin de apreciar, utilizar y/o asesorar las imágenes, perfilar en mayor grado aquellas regiones críticas de la imagen que son cruciales para su interpretación, es decir, líneas, bordes, y en general, cambios locales de luminancia.

El método que adaptamos es el siguiente: se realiza la descomposición de la señal por medio de filtros de análisis, posteriormente se detectan los bordes en base a los coeficientes de primer orden, finalmente se reconstruyen las regiones homogéneas de la imagen con el fin de reducir ruido en la imagen, mientras que se perfilan aquellas regiones de la imagen que se localizaron previamente con los coeficientes de primer orden.

En este capítulo se presenta la perfilación adaptiva como una relación práctica del método de reducción de ruido (capítulo cuatro) y la perfilación de imágenes (capítulo cinco). La perfilación adaptiva requiere como objetivo la caracterización de los bordes ideales y bordes difuminados [23].

Los coeficientes polinomiales de un borde ideal para una ventana $v(x, y)$ centrada en el origen se dan por [13]

$$L_{m,n-m} = L_n \sqrt{\frac{n!}{m!(n-m)!}} \cos^m \theta \sin^{n-m} \theta, \quad 7.1.1$$

en donde L_n son los coeficientes unidimensionales y θ es la orientación del borde

$$L_0 = l_c + \frac{\Delta l}{2} E_0(d) \quad 7.1.2$$

$$L_n = \frac{\Delta l}{2} E_n(d) \quad 7.1.3$$

con

$$E_n(d) = \int_d^{+\infty} G_n(x) v^2(x) dx - \int_{-\infty}^d G_n(x) v^2(x) dx, \quad 7.1.4$$

para $n = 0, 1, \dots, \infty$, $m = 0, \dots, n$, en donde $G_n(x)$ es el polinomio ortonormal de grado n sobre $v^2(x)$, d distancia al origen, y θ la orientación. De la definición de energía y (7.1.1), la energía de orden n de un borde se da por

$$e_n^2 = |L_n|^2 \quad 7.1.5$$

o su equivalente, $e_n = |L_n|$.

En el caso específico de emplear ventanas Gaussianas con desviación estandar σ , centradas en el origen, se generan los coeficientes [13]

$$L_n = \frac{\Delta l \cdot \sigma}{\sqrt{2n}} a_{n-1}(d; \sigma), \quad 7.1.6$$

para $n = 1, \dots, \infty$, en donde $a_n(-d; \sigma)$ es la derivada de orden n de una función Gaussiana [5]. Si se desarrolla la expresión anterior se obtienen los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned}
 L_0 &= l_e - \frac{\Delta l}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{d}{\sigma} \right] \\
 L_1 &= \frac{\Delta l}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d}{\sigma} \right)^2 \right] \\
 L_2 &= \frac{\Delta l}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{\sigma} \exp \left[- \left(\frac{d}{\sigma} \right)^2 \right] \\
 L_3 &= \frac{\Delta l}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \left(\frac{d}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) \exp \left[- \left(\frac{d}{\sigma} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Es posible obtener los coeficientes de un borde difuminado a partir del borde ideal [5] [13]. De la ecuaciones (5.2.9), (7.1.1) y (7.1.6) se obtienen los coeficientes de un borde difuminado, en donde el kernel de difuminación está dado por (5.2.4). Los coeficientes de un borde difuminado son (en forma similar a la ecuación (7.1.1))

$$L'_{m,n-m} = L'_n \sqrt{\frac{n!}{m!(n-m)!}} \cos^m \theta \sin^{n-m} \theta. \tag{7.1.8}$$

en donde los coeficientes unidimensionales L'_n para $n = 0, 1, 2, 3$ están dados por [13]:

$$L'_0 = l_e - \frac{\Delta l}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{d/\sigma}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}} \right]$$

$$L'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}} \right) \frac{\Delta l}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(d/\sigma)^2}{1 + (\sigma_b/\sigma)^2} \right]$$

$$L'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}} \right)^2 \frac{\Delta l}{\sqrt{2\pi}} \frac{d/\sigma}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^3}} \exp \left[-\frac{(d/\sigma)^2}{1 + (\sigma_b/\sigma)^2} \right]$$

$$L'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}} \right)^3 \frac{\Delta l}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{2(d/\sigma)^2}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}} - 1 \right) \exp \left[-\frac{(d/\sigma)^2}{1 + (\sigma_b/\sigma)^2} \right]$$

7.1.9

Las energías resultantes se dan por $(e'_n)^2 = |L'_n|^2$. Cuando $\sigma_b = 0$, la ecuación (7.1.9) se reduce a la ecuación (7.1.7).

De los coeficientes de la expresión (7.1.9) se escogen los coeficientes de orden uno porque son buenos detectores de bordes. De acuerdo a la ecuación (7.1.5) se obtiene

$$e_1 = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}} \right) \frac{\Delta l}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(d/\sigma)^2}{1 + (\sigma_b/\sigma)^2} \right] \right|, \quad 7.1.10$$

a partir de la cual se detectan bordes relevantes mediante un umbral predefinido. La perfilación se realiza únicamente en estas regiones en los que se han detectado bordes importantes.

En la práctica, inicialmente se hace la descomposición de la imagen por medio de transformaciones polinomiales y posteriormente se seleccionan las regiones críticas en base a su energía de primer orden e_1 . Siguiendo un proceso similar al algoritmo de reducción de ruido se efectúa una síntesis adaptativa, pero el proceso de reconstrucción de regiones críticas (bordes), a diferencia del algoritmo de reducción de ruido, queda

definido por la utilización de filtros de síntesis contruidos con ventanas Gaussianas con desviación estandard $\sigma\sqrt{1 + (\sigma_b/\sigma)^2}$ (perfilación) y σ .

7.2 Codificación adaptiva

En el caso de imágenes astronómicas en donde la cantidad de información manejable llega a sobrepasar las capacidades de almacenamiento de los dispositivos, se requiere de algún preprocesamiento que cumpla con el compromiso de reducir la cantidad de información sin perder detalles relevantes de la imagen original.

Es común que en imágenes para uso científico se empleen técnicas de pseudocoloración para detectar los contornos de las estructuras contenidas dentro de la imagen, esto puede verse como la generación de mapas de niveles. Sin embargo, el empleo de estas técnicas de pseudocoloración, lejos de facilitar la visualización de las imágenes originales (con presencia de ruido adquirido en su generación), generan estructuras falsas que disminuyen la credibilidad de la imagen.

Si se emplean técnicas convencionales de codificación de imágenes, aquellas que responden a distintos grados de resolución sobre las transiciones de luminancia, es probable que se cometa el error de perder detalle en regiones críticas (bordes y líneas) o que se mantenga información redundante de ciertas regiones influenciadas por el ruido [1]. En esta sección se plantea la integración del filtrado en la codificación de imágenes.

El planteamiento del problema genera un esquema de codificación adaptiva, esto quiere decir que se presentan distintos grados de codificación en la imagen. El resultado final es una imagen en donde se preservan las estructuras relevantes de la imagen original en base a menor información. La figura 7.1 ilustra la secuencia de procesamiento, las salidas de los módulos G_{σ_b} y E_1 son las fuentes de información para la reconstrucción de $\hat{L}(x, y)$. Si el módulo opcional M contiene un diagrama de proceso integral anidado, entonces la figura 7.1 representa un diagrama multiescala de proceso.

El esquema de codificación de imágenes que se muestra en la figura 6.1 es similar para el nuevo planteamiento. La localización de los bordes en base a los coeficientes polinomiales de primer orden, hace posible efectuar una segmentación sobre todos los coeficientes polinomiales (aquellos que se generan con el módulo A_σ de la figura 6.1) y sobre los errores de predicción. Y en base al término L'_1 de la expresión (7.1.9) se establece el grado de predicción que se desea lograr, ya que la difuminación de la imagen se hace intencionalmente con el módulo G_{σ_b} de la figura 6.1. Esto trae como resultado la reconstrucción perfecta sobre las regiones críticas (bordes y líneas) mientras que las regiones homogéneas se reconstruyen a una menor resolución.

Si se considera que la respuesta del sistema de adquisición de imágenes es una función Bessel de orden 0 que se puede aproximar como una función Gaussiana con desviación estándar σ_s , la difuminación que realiza el módulo G_{σ_b} de la figura 6.1 presenta desviación estándar σ_c . De acuerdo a la ecuación (7.1.10) se hace la síntesis en las regiones críticas con filtros de interpolación con desviación estándar

$$\sigma_i = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_s}{\sigma \sqrt{1 + (\sigma_c/\sigma)^2}}\right)^2}, \quad 7.2.1$$

y en las regiones no críticas con filtros de interpolación con desviación estándar

$$\sigma_i = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2}. \quad 7.2.2$$

La imagen resultado, \hat{L} , presenta diferentes grados de aproximación en lugar de contener únicamente uno homogéneo. Las regiones de interés en la imagen \hat{L} presentan reconstrucción perfecta. Lo anterior se resume en la siguiente expresión

$$L(x, y) = \hat{L}(x, y) + E_0(x, y; e_1) \quad 7.2.3$$

en donde E_0 es el error final, y e_1 es la energía de los coeficientes polinomiales de primer orden.

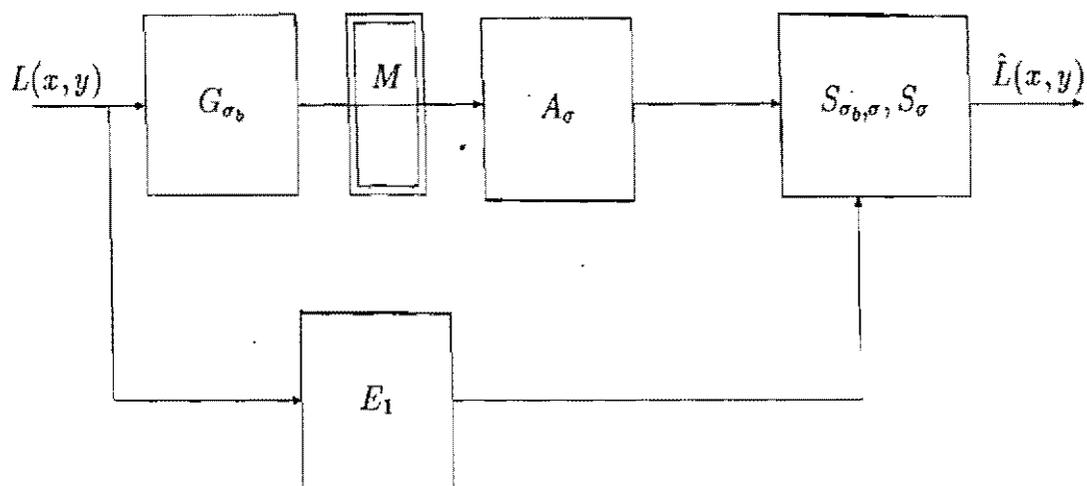


Fig. 7.1 Algoritmo de procesamiento integral

7.3 Resultados

En la figura 7.3.1 se ilustran algunos de los problemas más comunes (imágenes de 4 [bytes/pixel], 970 x 970 [pixel]) que se encuentran en imágenes astronómicas con relación señal a ruido (SNR) baja debido al ruido que se genera en su adquisición (capítulo 1). Al visualizarlas con pseudocoloración el problema se incrementa al no poder identificar las estructuras contenidas en la imagen. En el caso de la imagen n3783H α (inferior izquierda) aparentemente contiene grandes regiones sin información relevante, sin embargo, si se recorta la imagen se corre el riesgo de truncar estructuras que no son visibles a simple vista (esta imagen se muestra con reducción de ruido en los resultados del capítulo 4).

En la figura 7.3.2 se ilustra la posibilidad de combinar la reducción de ruido con la codificación, en base a una subregión homogénea predefinida (carente de bordes). En este caso, se alcanza una tasa de compresión de 60 a 1. En la imagen superior izquierda se muestra la imagen original (4 [byte/pixel], 970x970 [pixel]). En la imagen pirámide de predicción (inferior izquierda) se muestra la expansión polinomial sobre una estructura piramidal con $\sigma_i = 1$ para $i = 1, 2, \text{ y } 3$; la imagen muestra la detección y localización de las diferentes estructuras para cada nivel de la pirámide. En la imagen predicción (superior derecha) se muestra el resultado de efectuar la síntesis únicamente con el coeficiente polinomial de orden cero del tercer nivel de la pirámide, y además se realizó una síntesis compensatoria ($\sigma_{i,b}, \sigma_i = 1.41$ para cada nivel) sobre las estructuras que se detectaron en las energías de primer orden de los niveles 1, 2, y 3 de la pirámide.

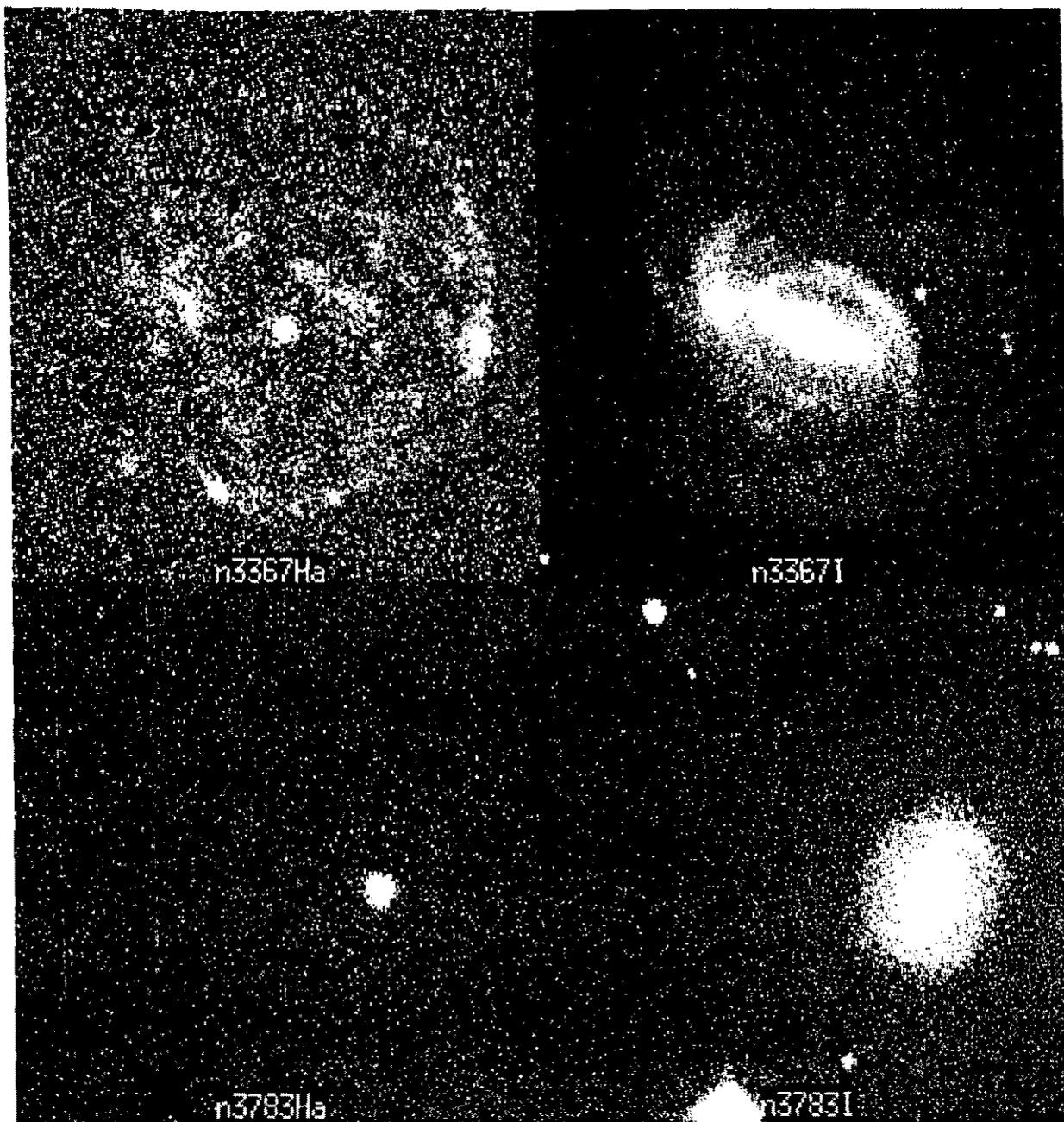


FIGURA 7.3.1

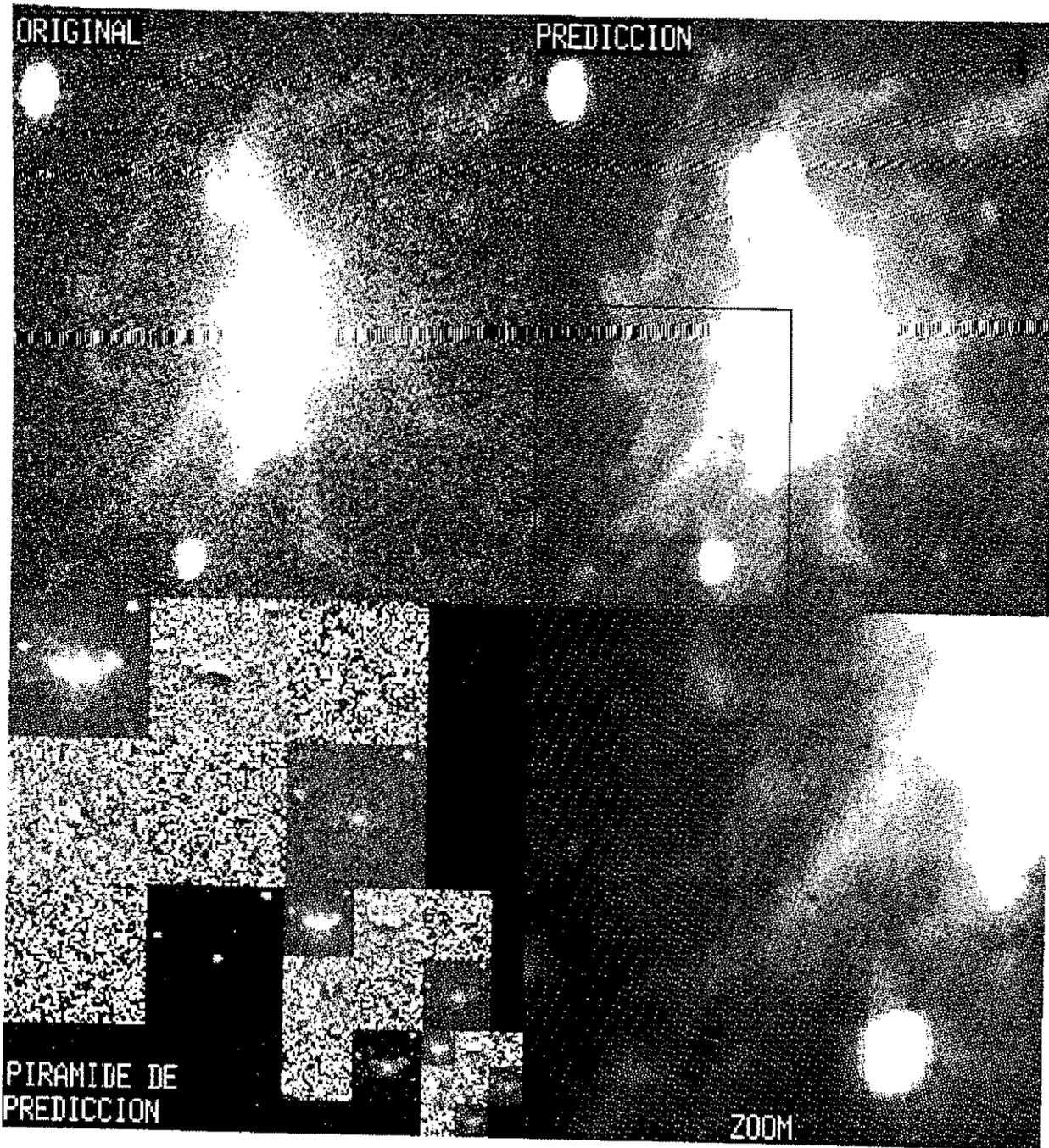


FIGURA 7.3.2

CONCLUSIONES

El presente trabajo muestra la importancia de la detección de estructuras en distintas aplicaciones del procesamiento de imágenes y así como en la codificación de imágenes mismos que se pueden tratar en base a la reciente teoría de las transformaciones polinomiales. Una ventaja importante de esta técnica de transformación es que utiliza operadores que permiten una buena interpretación de las imágenes [5], especialmente la facilidad de detectar localmente patrones.

La técnica de expansión de Gabor [20], similarmente, realiza un análisis local sobre las imágenes. Las transformaciones polinomiales que se han introducido en este trabajo difieren de las expansiones de Gabor porque realizan descomposiciones polinomiales localmente y se ha demostrado [4] que la transformación Hermite es una transformación polinomial con función ventana Gaussiana que construye una mejor representación en el modelado visual humano [26] que las expansiones de Gabor.

Desde los primeros capítulos se argumenta la importancia del tamaño de las funciones ventana. Este factor importante también se propone en las aplicaciones, en base a la forma en que las transformaciones polinomiales se pueden incorporar en análisis multiescala como paso necesario en el propósito de completar la analogía de esta transformación con el sistema visual humano, también ha permitido su comparación con otros esquemas de codificación/análisis de imágenes.

En las imágenes que se han mostrado, la capacidad para distinguir detalles decrece cuando el ruido está presente, sobre todo, el ruido puede cubrir las características de bajo contraste de una imagen; en el caso específico de las imágenes astronómicas la interpretación de la imagen se dificulta al emplear técnicas de pseudocoloración. Es de vital importancia el procesamiento digital de imágenes para distinguir detalles aun en la presencia de ruido. Algunos algoritmos remueven la mayor parte del ruido, pero únicamente a costa de la difuminación (blurring) de las características de la imagen. El algoritmo de reducción de ruido que aquí se propone (capítulo 4), busca la distinción entre los bordes y las regiones homogéneas. La definición de borde y región homogénea es muy importante y es claro que según el tamaño de la función ventana se pueda hacer dicha distinción que definitivamente

no es la única. Esta es la razón por la cual en los esquemas de análisis multiescala en imágenes astronómicas se trabaja inicialmente con ventanas de longitud mínima de representación (estrellas y núcleos de las galaxias) hasta detectar y localizar las regiones homogéneas (caracterizadas así en los primeros niveles de las estructuras piramidales) como si fuesen bordes (nubes de gas).

Una desventaja de trabajar las transformaciones polinomiales sobre estructuras piramidales es que se pierda cierta información de la imagen (estructuras con contenido frecuencial alto); si se incorporan métodos de realce se ponen en evidencia los defectos (overshoot) que se generan en la imagen. Sin embargo, su eficiencia es una gran ventaja. El resultado del esquema de codificación de imágenes (basado en la perfilación) que se propone en este trabajo muestra la ventaja en la percepción visual, generando imágenes codificadas con calidad superior a la imagen original. La entropía relativamente alta que resulta en el error de predicción es el efecto que se introduce en los bordes, la ventaja que se le puede dar está en transmisiones progresivas.

En base a la localización de patrones que se realiza con las transformaciones polinomiales, se presenta en el capítulo 7 la idea de construir resultados con reducción de ruido a partir de una predicción con la desventaja de que se generen artefactos en la imagen final.

Las aplicaciones, en base a la teoría de las transformaciones polinomiales al procesamiento digital de imágenes, dejan las bases para continuar el procesamiento de imágenes como sería la segmentación y la caracterización de las mismas.

REFERENCIAS

- [1] Kristian, Jerome and Blouke, Morley. "Charge-Coupled Devices in Astronomy". *Scientific American*, October, 1982.
- [2] Aikens. Richard S., Epperson. Patrick M., Denton. M. Bonner. "Techniques for Operating Charge Coupled Devices (CCD's) in Very High Speed Framing Mode". *Proceedings of the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers* 501 1984.
- [3] Janesick, James, Blouke, Morley, "Sky on a Chip", *Sky and Telescope*, September, 1987.
- [4] J.-B Martens, "The Hermite transform - Theory", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-38*, pp. 1595-1606, 1990.
- [5] J.-B Martens, "The Hermite transform - Applications, ", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-38*, pp. 1607-1618, 1990.
- [6] R. Young, "The Gaussian derivative theory of spatial vision: Analysis of cortical cell receptive field line-weighting profiles", *General Motors Research Technical Report GMR-4920*, 1985.
- [7] R. Young, "The Gaussian derivative model for spatial vision: I. Retinal mechanisms", *Spatial Vision* 2, pp. 273-293, 1987.
- [8] B. Escalante-Ramírez and J.-B. Martens, "Noise reduction in Computerized Tomography images by means of polynomial transforms", *Journal of Visual Communication and Image Image Representation* 3, pp. 272 - 285, 1992.
- [9] G. Szegő *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI, 1959.
- [10] R. Boas and R. Buck, "*Polynomial Expansions of Analytical Functions*". New York: Springer, 1985.

- [11] A. Watson, "Efficiency of a model human image code", *J. Opt. Soc. Amer. A*, vol. 4, pp. 2401-2417, 1987.
- [12] J. Koenderink, "The structure of images", *Biological Cybernetics* 50, pp. 363 - 370, 1984.
- [13] V. Kayargadde and J.-B. Martens, "Estimation of edge parameters and image blur using polynomial transforms", submitted to *CVGIP: Image Processing*, 1992.
- [14] B. Escalante-Ramírez, "Technique for image interpolation using polynomial transforms", *Visual Communications and Image Processing '93*. Proc. SPIE-2094, pp. 522 - 528, 1993.
- [15] J. Woods, "Subband coding of images", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, pp. 1278-1288. 1986.
- [16] S.G. Mallat. "Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models." *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 12, pp. 2091-2110, Dic. 1989.
- [17] M. Kunt, A. Ikonomopoulos, and M. Kocher, "Second generation image-coding techniques", *Proceedings IEEE* 73, pp. 549 - 574, 1985.
- [18] P. Burt and E. Adelson, "The Laplacian pyramid as a compact image code", *IEEE Transactions on Communications* COMM-31, pp. 532 - 540, 1983.
- [19] J.-B. Martens and G.M.M. Majoor, "The perceptual relevance of scale space image coding", *Signal Processing* 17, pp. 353-364, 1989.
- [20] M. Bastiaans "Gabor's signal expansion and degrees of freedom of a signal", *Opt. Acta*, vol.29, pp. 1223-1229, 1982.
- [21] M. Porat and Y. Zeevi, "The generalized Gabor scheme of image representation in biological and machine vision", *IEEE Trans. Pattern Analysis Mach. Intel.*, vol. 10, pp. 452-467, July 1988.

- [22] S. Mallat, "A theory for multiscale signal decomposition: The scale change representation", Univ. of Pennsylvania, Dep. Comput. Inform. Sci., GRASP Lab Tech. Memo, 1987.
- [23] D. Marr and E. Hildreth, "Theory of edge detection", in *Proc. Roy. Soc. London B*, vol. 207, pp. 187-217, 1980.
- [24] B. Sakitt and H. Barlow, "A model for the economical encoding of the visual image in cerebral cortex", *Biolog. Cybern.*, vol. 43, pp. 97-108, 1982.
- [25] J. Bevington and R. Mersereau, "Differential operator based edge and line detection", in *Proc. ICASSP*, pp. 249-252, 1987.
- [26] R. Young, "Simulation of human retinal function with the Gaussian derivative model", in *Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vision Pattern Recog.*, June 1986.
- [27] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1965.
- [28] E. C. Hildreth, "The detection of intensity changes by computer and biological vision systems", *Comput. Vision Graphics Image Process.* v. 22, pp. 1-27, 1983.
- [29] J. F. Canny, "Finding Edges and Lines in Images", *MIT Artificial Intelligence Laboratory Technical Report AI-TR-720*, 1983.
- [30] J. Canny, "A computational approach to edge detection", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* PAMI-8, pp. 679-698, 1986.
- [31] A. Pentland, "A new sense for depth of field", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 9, pp. 523-531, 1987.
- [32] M. Kunt, M. Bénard, and R. Leonardi, "Recent results in high compression image coding", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 34, pp. 1306-1336, Nov. 1987.

REFERENCIAS ADICIONALES EN BASE AL PRESENTE TRABAJO.

- [33] S. Venegas-Martínez, B. Escalante-Ramírez, J.A. García-Barreto, "Procesamiento de imágenes astronómicas con el algoritmo DEPFI", Instituto de Astronomía, UNAM, *Instrumentación y computo*, pp.16, enero 1995.
- [34] B. Escalante-Ramírez, S. Venegas-Martínez and F. García-Ugalde, "Pyramidal predictive image coding with polynomial transforms", *Still-Image Compression*, Proc. IS&T/SPIE Vol. 2418, 1995.
- [35] S. Venegas-Martínez, B. Escalante-Ramírez, F. García-Ugalde, and J.A. García-Barreto, "Image restoration, deblurring and coding by means of polynomial transforms", Sometido a *Applications of digital image processing XVIII*, Proc. SPIE, 1995.
- [36] J.A. García-Barreto, R. Carrillo, S. Venegas-Martínez and B. Escalante-Ramírez, "R, I, and H α Images of Barred Spiral Galaxies", En preparación para *The Astrophysical Journal Supplements*, *The American Astronomical Society*, 1995.