

32

2Ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACION DE LA TEORIA DE NUDOS AL ESTUDIO DEL ADN

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MATEMATICA
PRESENTA
MARIA ELENA VAZQUEZ MELKEN



MEXICO, D. F.



1995

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE**

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron LA pasante(s) María Elena Vázquez Melken

con número de cuenta 9052427-7 con el Título: \_\_\_\_\_

Aplicación de la Teoría de Nudos al Estudio del ADN.

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Doctor	Max	Neumann Coto	<i>[Firma]</i>
Director de Tesis Doctor	Francisco Javier	González Acuña	<i>[Firma]</i>
Doctor	Mario	Eudave Muñoz	<i>[Firma]</i>
Doctor	Luis	Montejano Peimbert	<i>[Firma]</i>
Suplente Doctor	José Carlos	Gómez Larrañaga	<i>[Firma]</i>
Suplente			<i>[Firma]</i>

A Papá José  
con todo mi amor y admiración

## Agradecimientos.

A Max por ser siempre tan paciente y tan jovial y por enseñarme la belleza de éstas matemáticas con toda la pasión que él les tiene.

A Luis Montejano y de nuevo a Max por darme toda la Topología que sé y que siento.

A Richy por hacerme creer que las matemáticas son más difíciles de lo que parecen y a Xavier por hacerme creer lo contrario. A los dos por su gran compañía y cariño de toda una carrera.

A Richy por estar siempre allí sin lo que yo no habría podido sobrellevar las largas travesías diarias; y por todo su amor.

A mis papás por apoyarme como nadie, por alimentar mi amor por la Ciencia y nunca truncar mi camino con intereses adversos.

A Luis y a Julieta por enseñarme que además de hacer matemáticas a los matemáticos también les gusta bailar.

Claramente no me hice sola, de hecho ésta lista no acabaría nunca pero quisiera cerrarla por ahora recordando a grandes maestros como Luis Briseño, Ángel Carrillo, Luis Montejano, Alberto Barajas, Javier Páez, y a los compañeros de siempre Mauricio, Luis y Criel, quienes hicieron que mi amor por éste oasis que es la Facultad de Ciencias en la UNAM sea ahora inmortal.

Agradezco también a mis sinodales Francisco González Acuña, Mario Eudave, José Carlos Gómez Larrañaga y Luis Montejano por haber aceptado éste trabajo.

« No puede ser más simple.  
Solo con el corazón se puede  
ver bien; lo esencial es irvi-  
sible para los ojos.  
Lo que hace más importante  
a tu vida es el tiempo que  
te has perdido con ella. Los  
hombres han olvidado esta  
verdad. Tú no debes olvidarla. »  
El zorro al Principito.

<b>2.5.2 Clasificación de 4-plats</b> .....	<b>55</b>
<b>2.6 Resultados generales</b> .....	<b>66</b>
<b>2.7 Apéndice A: Cubiertas cíclicas ramificadas</b> .....	<b>78</b>
<b>Capítulo 3.</b>	
<b>Detectando Racionalidad.</b>	<b>81</b>
<b>3.1 Ecuaciones de ovillos y soluciones racionales</b> .....	<b>81</b>
<b>3.2 La <math>Tn3</math> resolvasa: el modelo de ovillos</b> .....	<b>105</b>
<b>3.2.1 Presentación del modelo</b> .....	<b>105</b>
<b>3.2.2 Demostración del modelo</b> .....	<b>109</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>123</b>

# Índice

<b>Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>Capítulo 1.</b>	
<b>Motivación.</b>	<b>5</b>
1.1 ADN y Enzimas .....	5
1.1.1 La doble hélice de ADN. ....	5
1.1.2 Técnicas de laboratorio. ....	6
1.2 Topoisomerasas y experimentos .....	9
<b>Capítulo 2.</b>	
<b>Herramienta Matemática: definiciones y resultados.</b>	<b>19</b>
2.1 Nudos .....	19
2.2 Ovillos .....	23
2.2.1 Operaciones .....	25
2.3 Clasificación de ovillos racionales .....	28
2.3.1 Giros de Dehn .....	44
2.4 Espacios Lente y Cirugía en nudos .....	49
2.4.1 Espacios Lente .....	49
2.4.2 Cirugía de Dehn .....	50
2.5 Clasificación de 4-plats .....	53
2.5.1 4-plats o nudos de 2 puentes .....	53

<b>2.5.2 Clasificación de 4-plats</b> .....	<b>55</b>
<b>2.6 Resultados generales</b> .....	<b>66</b>
<b>2.7 Apéndice A: Cubiertas cíclicas ramificadas</b> .....	<b>78</b>
<b>Capítulo 3.</b>	
<b>Detectando Racionalidad.</b>	<b>81</b>
<b>3.1 Ecuaciones de ovillos y soluciones racionales</b> .....	<b>81</b>
<b>3.2 La <math>Tn^3</math> resolvasa: el modelo de ovillos</b> .....	<b>105</b>
<b>3.2.1 Presentación del modelo</b> .....	<b>105</b>
<b>3.2.2 Demostración del modelo</b> .....	<b>109</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>123</b>

## INTRODUCCIÓN

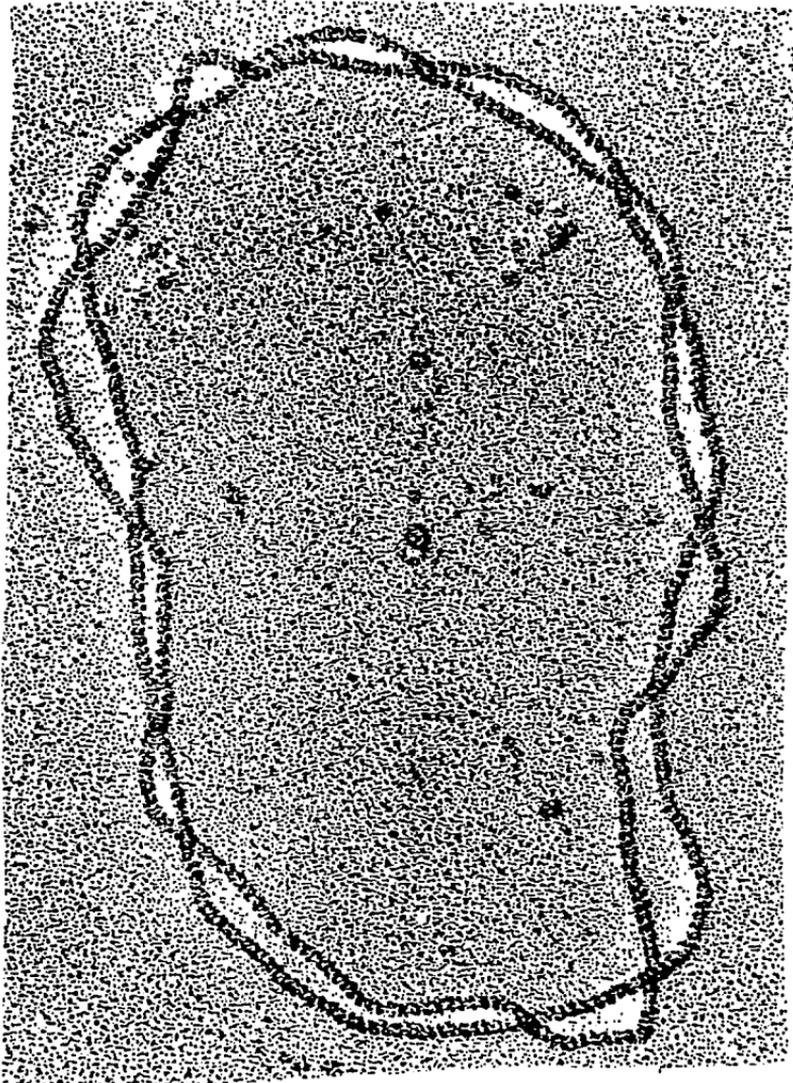
Aparentemente la Teoría de Nudos vió sus inicios en la Física del siglo XIX con un trabajo de electromagnetismo de Gauss y Listing, pero quizá el inicio más real fue a raíz del modelo atómico de Kelvin en 1867. Sin embargo, desde ese entonces la teoría de los nudos tomó un cauce totalmente abstracto volviéndose así uno de los ejemplos más claros de las matemáticas puras. Ahora, más de un siglo después, vuelve a sus inicios al verse aplicada a la descripción y al cálculo de ciertas configuraciones moleculares y, así, al análisis de ciertos experimentos de ADN. Esta teoría es así un ejemplo más de lo que Edward E. David describió como "la aparentemente inevitable utilidad de aquellas matemáticas concebidas de manera simbólica sin ninguna relación con el mundo real".

La tesis se basa en los trabajos de De Witt Sumners y el interés primordial radica en dar una descripción de la herramienta matemática y utilizarla para atacar los problemas que surgen a raíz de ciertos experimentos de recombinación.

En el primer capítulo se habla de los experimentos en ADN circular desde el punto de vista biológico y de su traducción a un problema de nudos y ovillos.

En el capítulo 2 se da la clasificación de ovillos racionales, de nudos de dos puentes y se dan algunos resultados generales para la solución de ecuaciones de ovillos racionales.

Finalmente, en el capítulo 3 se aplican herramientas de 3-variedades (incluyendo ciertos resultados recientes como el teorema de cirugía cíclica ) para encontrar las soluciones a ciertas ecuaciones de ovillos, y se muestra que bajo algunas suposiciones matemáticas y biológicas ésta es la única explicación posible a los resultados de los experimentos.



## Capítulo 1

# Motivación

### 1.1 ADN y Enzimas.

#### 1.1.1 La doble hélice de ADN:

La doble hélice de ADN de Watson y Crick consta de dos hebras hechas con unidades alternantes de fósforo y azúcar. Las hebras están orientadas de forma antiparalela. A cada azúcar se encuentra ligada una de las 4 bases siguientes: A adenina, T timina, C citosina, G guanina. El listón helicoidal se forma gracias a la presencia de un puente de hidrógeno que liga a cada base de una hebra con alguna de la otra hebra. La base A solo se liga con T, y C solo con G. El listón resultante tiene giro helicoidal de mano derecha.

La molécula de ADN tiende a desear una estabilidad de 10.5 pares de bases por cada giro completo de la hélice. Si el eje de la molécula es plano se dice que está *relajada* y se observa en ese caso la estabilidad mencionada anteriormente.

La doble hélice de ADN puede existir en forma circular cerrada en cuyo caso se forma con el listón una banda torcida, orientable. Gracias a las propiedades químicas de la molécula es imposible que se forme una banda de Möbius. Así, las dos hebras se pueden ver como un enlace de 2 componentes en la frontera de un toro sólido que es vecindad regular del eje del listón. Así, la frontera de la banda consiste de dos hebras circulares. La superficie del listón forma un marco matemático para el haz normal del eje central de la molécula. Dada cualquier

configuración inicial para una molécula de ADN circular ésta puede ser relajada haciendo un pequeño corte en una de las hebras por medio de la enzima *DNasa*. Cabe observar que este corte no cambia en nada el tipo de nudo del eje de la doble hélice. A través del corte la molécula pierde la tensión (los cabos sueltos de la hebra dividida se ponen a girar) y una vez que la molécula se ha relajado se resella con la enzima *ligasa* obteniendo así una molécula relajada sin cortes en las hebras. Si orientamos el eje de la cadena de ADN e inducimos la misma orientación a cada una de las dos hebras (ignorando así la orientación química antiparalela que tienen) entonces el número de enlace de las hebras en estado relajado,  $Lk_0$ , se puede pensar como aquel que mide que tanto se enrosca una hebra al rededor de la otra y es aproximadamente  $\frac{N}{10.4}$ , donde  $N$  es el número de pares de bases que tiene la molécula circular relajada de ADN. Además se sabe que para virus pequeños se tiene  $N \cong 10^3$  y para bacterias  $N \cong 10^6$  y entonces  $Lk_0 \in [10^2, 10^5]$ .

Este número  $Lk_0$  puede ser usado como punto de referencia para medir el efecto de las enzimas *topoisomerasas* sobre el ADN, pero de esto hablaremos más adelante.

Finalmente cabe observar que en términos matemáticos:

un listón es un encaje suave  $f : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

el eje del listón corresponde a  $f(S^1 \times \{0\})$

Se denota al listón por:  $R = f(S^1 \times [-1, 1])$ .

El estudio matemático del ADN involucra al estudio de la geometría diferencial de listones  $R$  en  $\mathbb{R}^3$ , sin embargo nosotros fijaremos nuestra atención en la topología de las moléculas circulares más que en su geometría.

### 1.1.2 Técnicas de laboratorio:

Los dos métodos principales para determinar la estructura de nudo y enlace en la configuración tridimensional del ADN son la *electroforesis de gel* y la *microscopía electrónica*. A pesar de que la microscopía da una estereoestructura completa de las moléculas en forma individual, la electroforesis provee una visión global más rápida y cuantitativa de una población de moléculas de modo que

es preferible utilizar los dos métodos.

Un gel es un medio de proteínas obstructivo a través del cual las moléculas de ADN pueden ser forzadas bajo la influencia de un campo eléctrico. Es importante observar que el ADN tiene una carga neta negativa. Así, cuando se pone un sustrato de ADN en un gel donde existe una diferencia de potencial electrostático entonces las moléculas emigran a través del gel hacia el electrodo con carga positiva. Se pone una muestra de ADN en la punta de una columna de gel, moléculas similares emigran en el campo eléctrico con velocidades similares formando así bandas discretas en el momento en que se apaga el campo eléctrico.

La velocidad con que se mueven las moléculas en el medio es una función tanto de su masa molecular como de su carga y de su forma. En la electroforesis de gel, dadas moléculas de misma carga - topoisómeros (tienen gráficas moleculares isomorfas pero encaje no isotópicos) - las moléculas más compactas (enredadas, anudadas...) emigran más rápido que las moléculas no anudadas y de hecho si consideramos moléculas con el mismo tipo de nudo las relajadas emigran con menor velocidad que las otras en estado no relajado. Las bandas discretas en que se divide la migración son observables al colorear el gel y viéndolo después con luz ultravioleta. Bajo el microscopio electrónico las moléculas de ADN circular provenientes de la naturaleza aparecen muy contorsionadas. Estas moléculas son más veloces en la centrifugación y en la electroforesis de gel que las mismas moléculas en estado relajado. Vinograd conjeturó en 1965 que esto se debe a que el ADN en su estado natural tiene torceduras negativas con respecto a su estado relajado, es decir que :

$$Lk - Lk_0 < 0.$$

Donde  $Lk$  es el número de enlace de las hebras de la molécula no relajada siendo éstas orientadas como antes.

Si consideramos dos fragmentos ya sea de un mismo listón de ADN o de dos diferentes y los hacemos girar uno sobre el otro entonces a cada giro completo se le llama *superposición*. Una superposición de la cadena abarca aproximadamente 158 pares de bases, así, una superposición es mucho más fácil de detectar

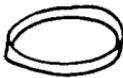
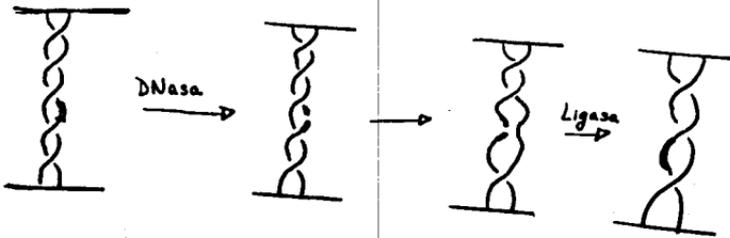
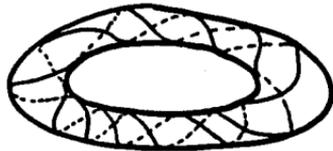
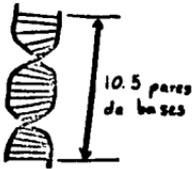
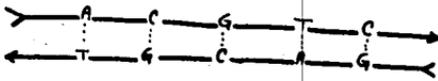




el giro positivo

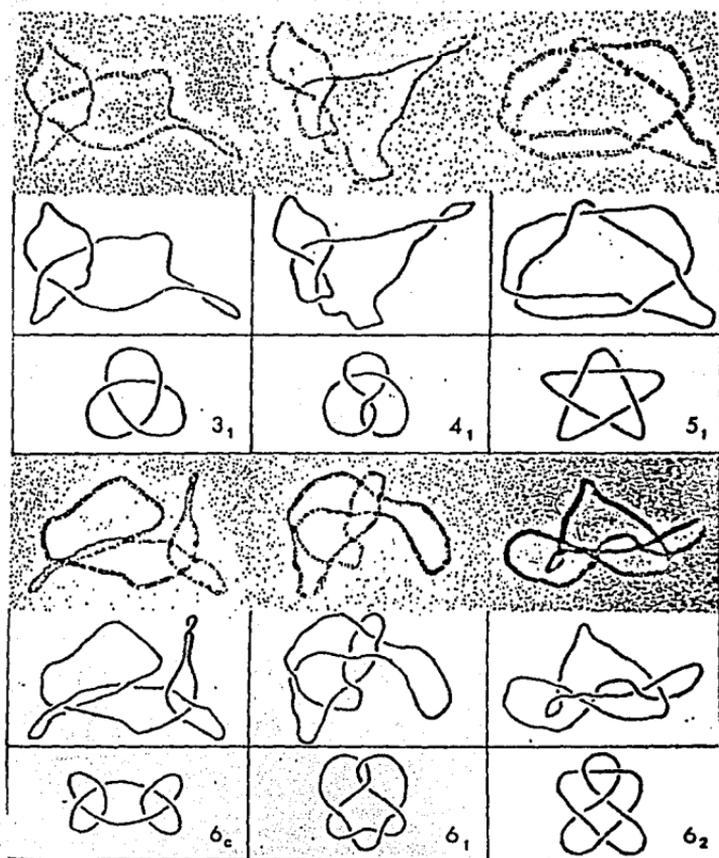
en el microscopio electrónico que un giro completo entre las dos hebras de una misma molécula ( de aquí en adelante nos referiremos a éste simplemente como *giro*). Para una molécula de ADN circular que cambia del estado relajado a otro estado distinto en un tiempo finito por causa de algún factor externo la diferencia  $[Lk - Lk_0]$  es observable puesto que un cambio de  $\pm 1$  en ésta se traduce en  $\pm 1$  superposiciones en la molécula. Esto es porque la molécula tiende a desear el estado de menos tensión correspondiente a un promedio de 10.5 pares de bases por giro. En moléculas de ADN desanudado la distribución a través del gel depende del número de superposiciones, y de hecho se puede detectar una diferencia de 1 en este número.

Existe una técnica de observación, relativamente nueva, llamada microscopía electrónica por recubrimiento con *recA*. Esta técnica hace posible una análisis detallado de la topología de las moléculas. *RecA* es una proteína de *Escherichia Coli* que se adhiere al ADN afín de mejorar las observaciones en el microscopio electrónico. En su estado natural la doble hélice de ADN tiene aproximadamente 20 angstroms de diámetro, una vez cubierta por la *recA* alcanza los 100 angstroms permitiendo, al ser oscurecida la molécula, la determinación sin ambigüedad de los cruces vistos a través del microscopio. Este proceso de recubrimiento engorda, tensa y estira al ADN de modo que desaparecen ciertos cruces como rizados por ejemplo y la proyección del nudo se aproxima a una proyección mínima. Por otra parte, con la molécula engordada resulta fácil la visualización de su estructura helicoidal de mano derecha. De este modo se evitan errores al estudiar al ADN a través de las fotografías hechas con el microscopio donde el error principal consistiría en hacer el estudio de la imagen en el espejo de nuestra molécula. En términos matemáticos esto no representa ningún problema si el nudo observado es *amfiquiral* (es decir que existe una isotopía ambiental entre éste y su imagen en el espejo), pero si por el contrario el nudo es *queiral* entonces desde el punto de vista de la matemática se estarían estudiando dos objetos distintos y así mismo desde el punto de vista de la química se estaría estudiando el enantiómero de la molécula original cuyas propiedades pueden diferir de manera radical.



≠





Topo I. de Escherichia Coli

El método de recubrimiento por recA ha sido mejorado de forma que se permite una caracterización de cantidades menores a un nanogramo de ADN anudado. Se ha desarrollado también una técnica para determinar la orientación de las cadenas engordadas de modo que ya resulta posible determinar totalmente la topología de cualquier cadena de ADN. Así, todos los tipos posibles de nudos y cadenas pueden ser identificados y analizados con la microscopía electrónica.

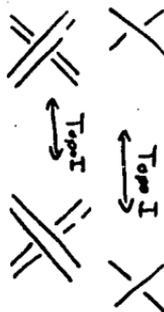
## 1.2 Topoisomerasas y experimentos.

Las *topoisomerasas* son enzimas que alteran el encage del ADN en el espacio ambiente. Estas enzimas facilitan los eventos genéticos de *replicación*, *transcripción* y *recombinación* a través de una manipulación geométrica de las moléculas. Las topoisomerasas abundan en la naturaleza. La topoisomerasa de tipo I, o *TOPO I*, actúa creando un corte temporal en una hebra de ADN y haciendo pasar a través de ese corte ya sea otra hebra de ADN o una doble hélice. La topoisomerasa de tipo II, o *TOPO II*, actúa haciendo pasar una doble hélice de ADN a través de un corte temporal hecho en este caso sobre las dos hebras de una doble hélice. (ver diagrama)

Se sabe que una enzima TOPO I de *Escherichia Coli* relaja superposiciones negativas en dobles hélices circulares de ADN por incrementos de uno. Puede así cambiar el número de enlace de las dos hebras de la molécula. Se sabe también que hace y deshace nudos a partir de ADN circular de una sola hebra y que forma enlaces a partir de círculos de una sola hebra cada uno y no enlazados. Pero es importante ver que TOPO I solo puede cambiar el tipo de nudo o enlace de dobles hélices de ADN si existe de entrada un pequeño corte en una de las hebras de cada molécula. Por otra parte la TOPO II altera el número de enlace de la doble hélice circular en incrementos de dos, y puede crear nudos y enlaces a partir de moléculas desanudadas o que no están enlazadas.

Las células de todos los organismos prokariotes (ej: bacterias que son organismos cuyo material genético no está contenido en un núcleo) y de los organismos eucariotes (ej: el hombre) contienen tanto TOPO I como TOPO II.

La teoría de nudos ha sido utilizada de manera no trivial en la elucidación



de las diferencias entre topoisomerasas procariotes y eucariotes, y entre TOPO I y TOPO II.

Como un ejemplo podemos mencionar que el  $LK_0$  de una molécula relajada puede ser utilizado como marco de referencia para medir el efecto de las topoisomerasas en el ADN. En el caso de la acción de una TOPO I en una sola doble hélice de ADN circular se tiene que, después de pasar las hebras una a través de la otra el número de enlace resultante toma un nuevo valor  $Lk$ . Para dobles hélices circulares desanudadas el cambio en el número de enlace, debido a la acción enzimática,

$$\Delta Lk = (Lk_0 - Lk),$$

es observable en la electroforesis por lo que ya se dijo anteriormente.

La estrategia experimental consiste en observar los cambios causados por la enzima en la geometría euclideana (superposiciones) y en la topología (anudamiento y enlazamiento) del ADN, y deducir el mecanismo de la enzima a partir de estos cambios. La geometría y la topología del sustrato son variables que pueden ser controladas de manera experimental, y ya vimos que la geometría y topología del producto son observables en el laboratorio.

*In vitro* (en el laboratorio) los experimentos suelen ser como se describe a continuación:

Se prepara un sustrato que consiste de una colección de ADN circular artificial donde todas las moléculas tienen el mismo tipo de nudo, y este es en general el nudo trivial. La secuencia genética del sustrato puede ser controlada y se arregla de forma que cumpla con los requisitos del experimento en cuestión. Otra variable controlable es la cantidad de superposiciones con que cuentan las moléculas del sustrato (*densidad de superposiciones*).

Se hace reaccionar al sustrato con enzimas purificadas provenientes de células vivas. Posteriormente se fraccionan los productos de la reacción por medio de la electroforesis de gel. En este caso las moléculas tienen todas la misma masa molecular de modo que la diferencia en velocidad en el movimiento a través del gel se debe a diferencias en la geometría y topología de las moléculas. Cuando se trabaja con ADN anudado y enlazado, como son en este caso los

productos de la reacción, las moléculas deben ser llevadas a su estado relajado antes de la electroforesis para evitar confusiones en la interpretación del comportamiento del gel.

Para moléculas relajadas la velocidad esta determinada por el número de cruces del nudo o enlace; nudos y enlaces con el mismo número de cruces emigran en el gel llevando prácticamente la misma velocidad.

Una vez obtenidas, las bandas discretas de gel son separadas. Para cada banda se sacan las moléculas y se engordan con la proteína recA. Se observan después bajo el microscopio electrónico y se toman micrografías. Dadas las micrografías de los productos de la reacción se establecen las distribuciones frecuenciales de los tipos de nudo y enlace.

Describiremos ahora tres experimentos llevados a cabo en 1985 en los laboratorios de N.R.Cozzarelli en Berkeley y de A.Stasiak en Zurich. En su artículo del mismo año escriben:

"En un acercamiento topológico a la enzimología, el mecanismo de una enzima se deduce a partir de los cambios topológicos que la enzima introduce en su sustrato. Dada la enorme variedad de tipos de nudo y enlace, puede ser recopilada mucha más información acerca de una reacción a partir del tipo de nudo o enlace de los productos que a partir de la estructura primaria o enroscamiento de éstos. Además, las estructuras de nudo o enlace son invariantes topológicos contrariamente a la manera de enredarse formando superposiciones, y de este modo, tales estructuras no pueden cambiar al analizar y trabajar con el ADN."

#### Experimento 1.-:

Se estudiará la acción de anudamiento de la TOPO I en dobles hélices circulares de ADN con un corte en una de las hebras. Observemos que este corte asegura el estado relajado del ADN.

Así, el **sustrato** consiste de dobles hélices de ADN circular, desanudado, con un solo corte en un sitio específico de una de las hebras.

Se trata al substrato con TOPO I de *Escherichia Coli* y el producto de la reacción se somete a la electroforesis de gel formando una escalera de bandas de gel. De cada peldaño se aísla el ADN y se estudia siguiendo el método antes descrito. Una vez obtenidas las micrografías es necesario someterlas al juicio de dos o tres observadores para determinar, sin que haya lugar a duda, el signo de cada uno de los cruces.

De las observaciones se concluye que la movilidad electroforética queda determinada por el número de cruces independientemente de la variedad de tipos de nudos existente para  $n$  cruces, donde  $n$  es un número natural fijo.

Se detectaron nudos de hasta 9 cruces y se catalogaron según estructura y quiralidad.

Obsérvese que en general sucede lo siguiente:

*El número de los tipos posibles de nudos con  $n$  cruces para alguna  $n$  fija es igual a la suma de dos veces el número de nudos queirales con  $n$  cruces, más, el número de nudos amfiquirales con  $n$  cruces, más, el número de nudos compuestos con  $n$  cruces.*

Fueron observados un total de 136 nudos con estructuras distintas. Contando imágenes en el espejo (enantiómeros) y nudos compuestos existen 15 nudos distintos (no orientados) de 6 o menos cruces. Todos éstos fueron observados. También fueron observados 10 de los 16 nudos que hay de 7 cruces. En el caso de nudos queirales se detectaron ambos enantiómeros en 8 de 9 de los casos en que más de un nudo fue observado.

Se concluye además que TOPO I no tiene ninguna preferencia particular para crear cruces positivos en vez de negativos, o vice versa.

Se conjetura entonces que TOPO I produce todos los nudos posibles. Se hizo una simulación por computadora de la probabilidad de anudamiento de una cadena circular de la misma longitud que la cadena de ADN de nuestro experimento, encajada al azar en el espacio ambiente. Se obtiene que la cantidad de nudos no triviales producidos de esta manera es del dos por ciento sobre el total, y que de éstos todos son tréboles. Entonces TOPO I produce muchos más nudos no triviales (tiene una producción del diez por ciento) y más complejos

de lo que podría esperarse. De aquí que se concluya que TOPO I debe provocar deformación y torcimiento de la molécula para crear cruces así como también debe invertir algunos cruces haciendo cortes que lo permitan. Además al hacer ésto debe fijar de alguna manera los demás cruces pues de lo contrario los nudos más complicados quedarían desfavorecidos y se desanudarían por los cambios aleatorios de cruces que suceden en el medio ambiente.

TOPO I debe reconocer la orientación biológica natural de la hebra que rompe pues en este experimento la enzima forma cortes temporales unicamente frente al sitio del corte ya existente. TOPO I no reconoce el signo de los cruces que invierte puesto que produce una distribución equitativa de enantiómeros.

TOPO I actúa de manera diferente a otras topoisomerasas. Por ejemplo la lambda-phage integrasa solo produce nudos toroidales con un número par de cruces, y la Tn3 resolvasa no produce nudos de 3 o 5 cruces. Es a esta última enzima a quien le dedicaremos la mayor parte de nuestra atención.

### **Experimentos 2.- y 3.-, las recombinasas:**

Aquí hablaremos de manera breve de dos experimentos de recombinación de sitio específico correspondientes a las enzimas lambda-phage integrasa (*Int*) y *Tn3 resolvasa*.

La recombinación de sitio específico es una de las formas que utiliza la naturaleza para alterar el código genético del organismo ya sea moviendo un bloque de ADN a otra posición distinta a la que ocupaba en la molécula (ésto está hecho por enzimas llamadas *Transposasas*), o bien integrando a la cadena un bloque de ADN ajeno a esta molécula (hecho por enzimas llamadas *Integrasas*).

Daremos a continuación la definición de algunos términos que nos serán de mucha utilidad posteriormente.

**Definición 1 .Recombinasa:** cualquier enzima mediadora de un evento de recombinación de sitio específico.

**.Sitio de recombinación ( de resolución):** consiste, para una recombinasa fija, de un segmento lineal corto (abarca aproximadamente 10 ó 15 pares de bases) cuyo código genético es reconocido por la enzima.

**..Sinapsis:** momento de la reacción en que los dos sitios iguales son atados por la enzima.

**..Complejo sináptico local:** Es la parte del sustrato que se pega a la enzima.

**..Complejo sináptico:** consta de la enzima y de toda la parte de la molécula involucrada en la sinapsis (incluyendo algunas partes que nunca se adhieren a la recombinasa).

Después de formar el complejo sináptico local, la enzima realiza dos cortes de doble hélice (es decir que corta las dos hebras) y recombina los extremos tal y como se ve en la figura ( la doble hélice de ADN está representada por una sola hebra y se omiten las superposiciones de la molécula). Cada enzima actúa de manera diferente, específica, dependiendo de la diferencia del complejo sináptico relativo a esa enzima. Después de la recombinación la molécula es liberada.

Como antes, se escoge un sustrato (ADN pre-recombinación) de moléculas circulares afin de captar los cambios topológicos que tienen lugar. En el laboratorio se pueden sintetizar moléculas con dos copias de un sitio de recombinación particular.

En suma, si se considera un nudo, o enlace de dos componentes, con dos sitios de resolución, uno en cada componente. Un evento sencillo de recombinación en esta configuración consiste básicamente de dos movimientos:

- Un movimiento global en que los sitios de recombinación son alineados en paralelo dentro de una pequeña 3-bola por medio de una isotopía ambiental en  $\mathbb{R}^3$ . Obsérvese que la 3-bola solo intersecta a la configuración en las dos hebras paralelas.

- Un movimiento local en el interior de la 3-bola en el cual las dos hebras paralelas se rompen en los dos sitios de resolución y son recombinados. En esta etapa la parte del nudo que queda fuera de la 3-bola queda intacta.

Obsérvese que la sucesión de pares de bases que forma el sitio de resolución le dá a la molécula una orientación biológica natural, y entonces dados dos sitios de resolución en una misma molécula de una sola componente (nudo ) pueden inducir en ésta la misma orientación u orientaciones opuestas. En el primer caso se habla de que los sitios estan en *repetición directa* y el resultado de un evento

de recombinación es un enlace de dos componentes, y en el segundo caso se dice que los sitios están en *repetición invertida* y el resultado de la recombinación es un nudo.

La Tn3 resolvase solo opera en sitios de repetición directa mientras que la recombinación hecha con Int es mucho menos disciplinada y opera en cualquiera de los dos casos además de actuar también con sitios pertenecientes a moléculas diferentes formando productos que abarcan una gama muy grande en la colección de los nudos y enlaces existentes. La Tn3 no actúa entre componentes no enlazadas.

#### Experimento 2.-

Bacteriophage lambda es un virus que ataca a las bacterias introduciendo su propio material genético en el de ellas. El mecanismo de esta inserción genética es una recombinación de sitio específico llevada a cabo por la enzima Int.

Se prepara un sustrato con dobles hélices de ADN, circulares, con dos copias del sitio de recombinación en cada una de ellas.

El primer experimento se hace con sitios de repetición invertida y el siguiente con sitios de repetición directa.

Se sabe que la enzima, después de haber atrapado a los sitios, media un y solo un evento de recombinación antes de soltar a la molécula, no puede haber recombinaciones iteradas pues un evento rompe las secuencias de los sitios.

Una vuelta de recombinación produce una familia sorprendente de productos:

Para sitios de repetición invertida se observó la familia de nudos 4-plats  $\{(- (2k + 1)) / 0 \leq k \leq 11\}$ .

Para sitios de repetición directa fue observada la familia de enlaces 4-plats  $\{(- (2k)) / 0 \leq k \leq 11\}$ .

De los 4-plats hablaremos en el capítulo siguiente y por el momento nos basta con decir que los obtenidos son nudos que se pueden inscribir en un toro bidimensional y que son de la forma mostrada en la *figura*

La razón para que de un experimento hecho sobre moléculas con el mismo tipo de nudo (el trivial en este caso) resulten distintos elementos de una misma

familia muy particular de nudos es que en el sustrato las moléculas aparecen con distintos grados de enroscamiento (número de superposiciones) y parte de éste se ve atrapado por la reacción de maneras distintas dependiendo de la molécula. Es decir que el número de superposiciones atrapadas en el complejo sináptico local es variable a causa de las colisiones al azar y se crean así nudos y enlaces diferentes en cada caso.

Este mecanismo de colisiones al azar fue establecido por dos líneas de evidencia. Primero, la complejidad promedio de los productos es directamente proporcional a la densidad de superposiciones del sustrato. Segundo, los 100 nudos y enlaces que fueron sometidos a la microscopía electrónica pertenecen todos a la familia predicha, se enroscan todos en el toro con giro de mano derecha, y tienen mismo signo (que es + para los nudos).

Si se trabaja con dobles hélices a quienes se les hizo un pequeño corte en una de las hebras se obtienen de la reacción nudos y enlaces casi en la misma proporción, tréboles del experimento con sitios de repetición invertida, y enlaces triviales del experimento con sitios de repetición directa. Dado que las moléculas están relajadas y que la enzima introduce un solo cruce nuevo durante la recombinación, entonces los cruces de los productos deben provenir de la manera en que se pega la Int. Todos los tréboles del producto fueron positivos, esto se explica de manera fácil si una superposición negativa entre los dominios se ve atrapada en el complejo sináptico. Con argumentos tanto biológicos como matemáticos se llega a confirmar que esto corresponde al caso real, sin embargo no entraremos más en detalle en lo que a la Int se refiere.

### Experimento 3.-

Recordemos que en el caso de la Tn3 resolvasa solo hay reacción si las moléculas son dobles hélices circulares con dos sitios de resolución que son de repetición directa.

La complejidad geométrica de los productos de la recombinación en parte depende de los cruces de cada componente del sustrato, donde por cruces nos referimos tanto a cruces dentro de un mismo nudo como a cruces entre dos componentes enlazadas.

Se escogen para el substrato moléculas desanudadas y se tratan con Tn3 resolvasa.

Se obtiene como producto principal el enlace de dos componentes desanudadas con número de enlace -1, y como producto minoritario el enlace figura 8 con un cruce positivo en el centro.

Recordemos que las moléculas de ADN no poseen una orientación natural. Se desarrolla entonces una prueba muy ingeniosa para ver que siempre que el mecanismo produce enlaces triviales estos tienen número de enlace -1:

Los puentes de hidrógeno que ligan a los pares de bases de la forma A-T son más fáciles de romper que los de los otros. Se inyectan entonces en la molécula regiones ricas en A-T y luego se desnaturaliza parcialmente a la molécula creando así burbujas allí donde se rompieron los puentes. Dado un círculo con tres burbujas distintas se puede ya determinar una orientación. Se lleva a cabo el experimento y se determinan ya sin ambigüedad los signos de los cruces en los productos.

Se sabe que Tn3 no actúa entre dos moléculas no enlazadas. En general Tn3 actúa de manera dipersiva, es decir que se pega a la molécula circular, se lleva a cabo un evento de recombinación y luego la enzima suelta al producto enlazado. Sin embargo una vez sobre veinte la acción es progresiva, es decir que se dan varios intercambios de las hebras antes de que la enzima suelte al producto creando así configuraciones topológicamente más complejas.

Par evitar contaminación de las bandas resultantes de la electroforesis a las moléculas producto, se les hace a estas últimas un corte en una de sus hebras. Así la electroforesis separa los productos de la reacción por número de cruces en la proyección mínima.

Se observa que los nudos emigran a menor velocidad que los enlaces con el mismo número de cruces.

Se propone un modelo para el mecanismo de ésta enzima, que implica la siguiente configuración inicial para un encuentro entre ADN desanudado y Tn3 resolvasa: se trata de un nudo trivial con tres cruces negativos que se adhieren a la enzima (ver la figura).

**El modelo se expone a continuación:**

En un encuentro simple entre el sustrato y Tn3 resolvase, la enzima se pega a la molécula y fija tres cruces negativos. Durante este encuentro cada evento de recombinación produce un único cruce positivo en el dominio. Al final del encuentro la enzima suelta a la molécula.

Suponiendo que el modelo funciona, el primer evento de recombinación produciría el enlace (-1) (queiral), el segundo evento progresivo produciría el nudo figura 8 (amfi-queiral), el tercero el enlace figura 8(+) (queiral) y del cuarto evento sucesivo resultaría el nudo  $\Theta_2$  (queiral). Además los tres cruces negativos iniciales permanecen ligados a la enzima durante todo el encuentro (ya sea progresivo o dispersivo) y son soltados al final.

La electroforesis de gel aplicada a productos de un experimento hecho con moléculas dobles de ADN, circulares, desanudadas y relajadas revelan que hasta este punto el modelo funciona. Además, en la banda correspondiente a 6 cruces se encontraron once nudos y todos ellos fueron  $\Theta_2$ . Siendo que existen un total de 8 tipos distintos de nudos de 6 cruces, contando compuestos y enantiómeros, si Tn3 produjera nudos de 6 cruces al azar la probabilidad de obtener el mismo resultado que en el experimento sería aproximadamente de  $1.2 \times 10^{-10}$ . Este es un argumento probabilístico para afirmar que el modelo propuesto funciona en general, siempre y cuando se respeten las condiciones por él requeridas.

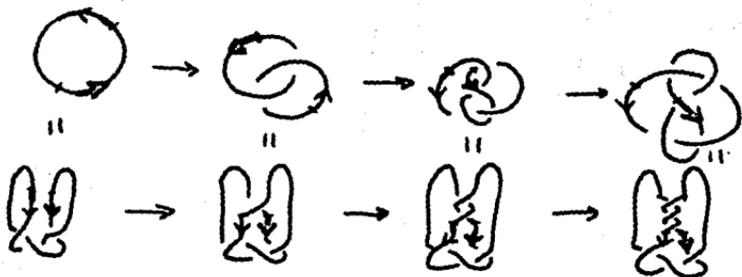
El propósito de este trabajo es armar un modelo matemático en el contexto de la teoría de nudos y veremos que ciertos argumentos de esta teoría probaran que el modelo es el único posible siempre y cuando se tomen como ciertas algunas suposiciones hechas sobre la acción enzimática. Se prueba, por ejemplo, la siguiente:

**CONJETURA:** Es imposible ir del nudo trivial a la cadena figura 8 (+) a través de un solo evento de recombinación.

Una vez ubicado el problema desde sus orígenes biológicos dispongamonos a preparar toda la herramienta matemática de que haremos uso para plantear modelo completo y demostrar su eficacia.

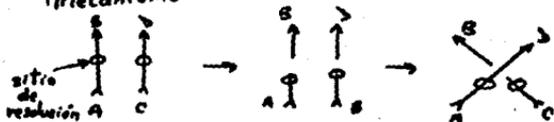
# Modelo

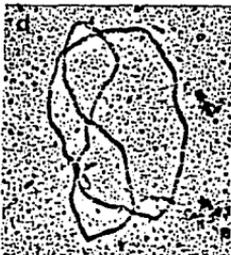
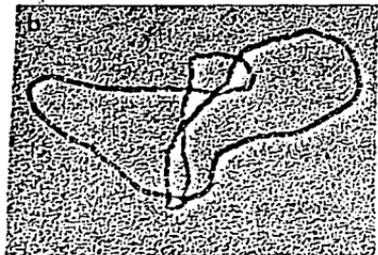
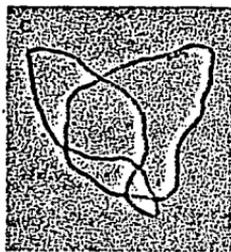
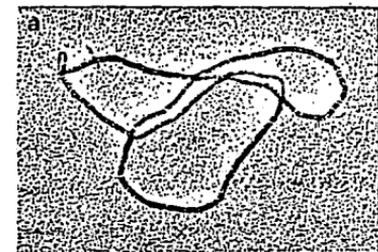
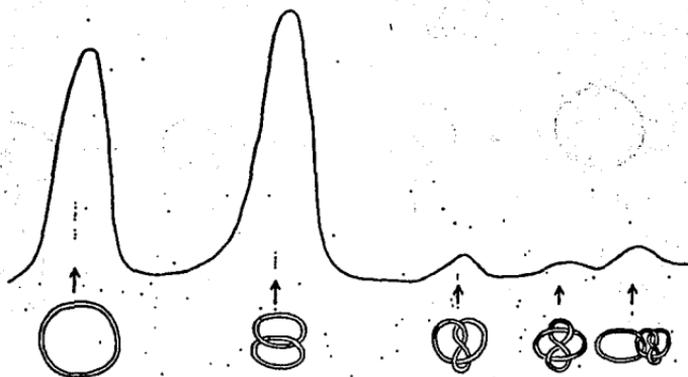
## Configuración Inicial



## Tn3 resolvase

### Mecanismo





*Contrariamente a un rey, un matemático solo triunfa si tiene dudas, si procura humilde e incesantemente disminuir la inmensa extensión de lo desconocido.*

*Leopold Infeld  
El elegido de los dioses.*

## Capítulo 2

# Herramienta matemática, definiciones y resultados.

### 2.1 Nudos.

**Definición 2** Un nudo es un encaje<sup>1</sup> suave de un círculo  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$  o en la 3-esfera  $S^3$ ,

$$f: S^1 \hookrightarrow K \subset \mathbb{R}^3 \text{ o } S^3$$

**Definición 3**  $K_1$  y  $K_2$  son equivalentes

$\iff$  Existe un homeomorfismo que preserve la orientación  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $h(K_1) = K_2$ .

Se denota:  $K_1 \approx K_2$ .

**Observación 1** Se hará un cierto abuso de lenguaje pues cuando hablemos de nudos nos estaremos refiriendo ya sea a encajes, o a las imágenes de estos encajes, o bien a clases de equivalencia de cualesquiera de los dos anteriores.

**Definición 4** Una isotopía ambiental entre dos encajes  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  es un encaje  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$ ,  $H(y, t) = (h_t(y), t)$  tal que  $f_1 = h_1 \circ f_0$  y  $h_0 = Id_Y$ .

Llamaremos deformación a toda isotopía ambiental.

<sup>1</sup>Si  $X$  y  $Y$  son espacios de Hausdorff, una función  $f: X \rightarrow Y$  es un encaje si  $f: X \rightarrow f(X)$  es un homeomorfismo.

Y surge así el siguiente:

**Teorema 1**  $K_1 \approx K_2$  si y sólo si hay una deformación de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  que lleve un nudo en el otro.

Además de con nudos trataremos también con cadenas de nudos y con composiciones de nudos.

**Definición 5** Un enlace de  $n$  componentes es la imagen bajo un encaje suave de una unión de  $n$  círculos.

### NUDOS



### ENLACES



**Definición 6** (Vease la figura 2.1.) Sea  $K$  un nudo que interseca a un plano  $E$  en 2 puntos  $A$  y  $B$ . Se cierra a cada uno de los arcos de  $K$  que van de  $A$  a  $B$  por medio de un arco en  $E$  para obtener los nudos  $K_1$  y  $K_2$ . Al nudo  $K$  se le llama producto de  $K_1$  y  $K_2$  y se denota:  $K_1 \natural K_2$ . También se dice que  $K$  es un nudo compuesto con factores  $K_1$  y  $K_2$ .

**Observación 2** La operación  $\natural$  aplicada a nudos, también llamada suma conexa es asociativa, es decir que

$$K_1 \natural (K_2 \natural K_3) = (K_1 \natural K_2) \natural K_3$$

Además si llamamos  $i$  al nudo trivial entonces

$$K \natural i = K, \forall K.$$

**Proposición 1**  $(K_1|K_2) \approx i \implies K_1 \approx i$  y  $K_2 \approx i$ .

**Definición 7** Un nudo  $K$  que resulta de la composición de dos nudos no triviales se llama nudo compuesto. Un nudo no-trivial que no es nudo compuesto se llama nudo primo.

Los nudos y enlaces viven en el espacio de tres dimensiones  $S^3$ . Dado un nudo o enlace  $K$  nosotros trabajaremos con alguna proyección bonita de  $K$  sobre un plano de dos dimensiones metido en  $S^3$ . Se demuestra que es equivalente trabajar directamente con el nudo que trabajar con una "buena" proyección de éste, en la siguiente definición vemos a lo que nos estamos refiriendo al hablar de una "buena" proyección.

**Definición 8** Se dice que una proyección  $p$  de un nudo  $K$  sobre un plano  $E$  es regular si:

- 1) El conjunto de puntos múltiples<sup>2</sup> en la proyección es finito  $\{P_i | 1 \leq i \leq n\}$  y todos los puntos múltiples son puntos dobles, es decir que  $|p^{-1}(P_i)| = 2, \forall i$ .
- 2) En cada punto doble la intersección es transversal.

La figura 2.1<sub>2</sub> da ejemplos de lo que no ocurre en una proyección regular de un nudo.

Las proyecciones de nudos se clasifican por número de cruces.

**Definición 9** Sea un nudo  $K$ . Se dice que  $K$  es de  $n$  cruces si existe una proyección regular de  $K$  con exactamente  $n$  puntos dobles, también llamados cruces, y de modo que en cualquier otra proyección regular de  $K$  el número de cruces es mayor o igual a  $n$ .

Dado un nudo  $K$ , el conjunto de todas las proyecciones regulares de éste es abierto y denso en el espacio de todas las proyecciones de  $K$ .

**Teorema 2** Dos diagramas del nudo  $K$  representan nudos equivalentes si se puede ir del uno al otro por medio de una sucesión finita de movimientos de Reidemeister  $\Omega_i, i = 1, 2, 3$  o sus inversos  $\Omega_i^{-1}$ . Los movimientos de Reidemeister son descritos en la figura 2.1<sub>3</sub>.

---

<sup>2</sup>Se dice que un punto  $x$  en la proyección de  $K$  sobre  $E$  es múltiple si  $|p^{-1}(x)| > 1$ .

El problema de saber cuando dos nudos son equivalentes no es nada fácil, de modo que han ido surgiendo invariantes de nudos desde el número de cruces ya mencionado hasta algunos invariantes algebraicos mucho más complicados.

**Definición 10** Sea  $K$  un nudo con una orientación pre-establecida. Al nudo obtenido al invertir la orientación de  $K$  lo denotamos por  $(-K)$ . Al nudo obtenido al reflejar a  $K$  con respecto a un plano se le llama imagen en el espejo de  $K$  y se denota  $\bar{K}$ .

Se dice que  $K$  es invertible si  $K \approx (-K)$ , y que  $K$  es amfiquiral si  $K \approx \bar{K}$ . En el caso en que  $K \not\approx \bar{K}$  se dice que  $K$  es un nudo queiral.

El ser queiral o amfiquiral es un invariante del nudo.

Para estudiar un nudo en  $S^3$  tenemos el problema de estar tratando con un objeto matemático de dimensión 1 quien, visto como espacio topológico, no nos da información de la manera en que está encajado en  $S^3$ . Se obtiene mucha más información al estudiar el espacio resultante de considerar a  $S^3$  con una perforación hecha a lo largo del nudo.

**Definición 11** Dado un nudo  $K \subset S^3$  el complemento de  $K$  es  $S^3 - K$  y el exterior de  $K$  es  $S^3 - N(K)$  donde  $N(K)$  es una vecindad regular abierta de  $K$ . Obsérvese que el complemento de un nudo es un subconjunto abierto de  $S^3$  y que el exterior es cerrado.

**Definición 12** Sea una curva cerrada simple orientada  $\alpha \in S^3 - K$ , el número de enlace de  $K$  con  $\alpha$  es:

$$Lk(\alpha, K) = \sum c_i$$

donde  $|c_i| = 1$  cada vez que  $\alpha$  cruza a  $K$  por abajo y cero en otro caso. La convención para el signo de  $c_i$  se muestra en la figura 2.14.

Otra forma de decir ésto es: dado un enlace de dos componentes orientadas  $K_1$  y  $K_2$ , el número de enlace entre las componentes se define como:

$$Lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum c_i$$

Figura 2.11

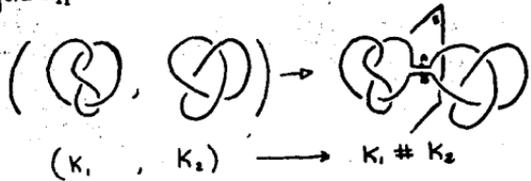


Figura 2.12



Figura 2.13 (movimientos de Reidemeister)

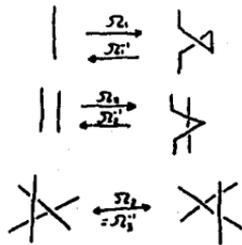
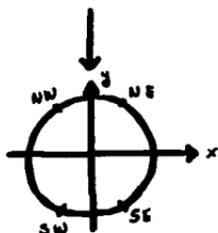
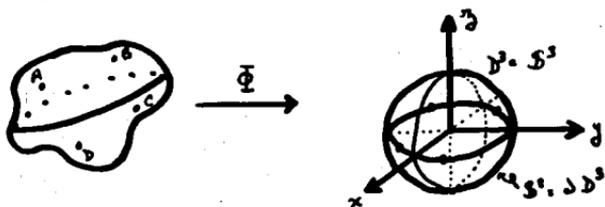
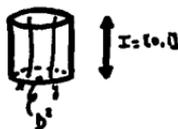


Figura 2.21:



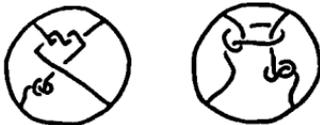
a)



a')



b)



c)



donde los  $c_i$  son los cruces entre las dos componentes.

Figura 2.14 (convención de cruces)



Puede verse que  $Lk(K_1, K_2)$  no cambia al hacer los movimientos de Reidemeister, por lo tanto es un invariante del enlace.

**Proposición 2** Todo nudo o enlace  $K \subset \mathbb{R}^3$  es frontera de una superficie compacta, conexa, orientable  $S$  encajada en  $\mathbb{R}^3$ . A  $S$  se le llama superficie de Seifert de  $K$ .

Introduciremos ahora otros objetos matemáticos que utilizaremos constantemente a lo largo de este trabajo.

## 2.2 Ovillos.

John H. Conway introdujo el concepto de ovillo en 1967 en [C]. Se darán a continuación las definiciones principales de ovillos y se podrán ver ejemplos, en la figura 2.2, de cada uno de los objetos que se definan.

Sea  $D^3$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^3 = XYZ$  con  $S^2 = \partial D^3$  y  $(S^2 \cap XY)$  el ecuador. Se piensa al eje  $Y$  positivo como el norte y al eje  $X$  positivo como el este, y sean  $\{NE, NW, SE, SW\}$  cuatro puntos ecuatoriales privilegiados de  $D^3$ .

**Definición 13** Un ovillo en  $D^3$  es una pareja  $(D^3, t)$  de dos arcos no orientados  $(t)$  con extremos  $\{NE, NW, SE, SW\}$ , encajados en  $(D^3)$  y de forma que  $t \cap S^2 = \{NE, NW, SE, SW\}$ .

Resulta natural pensar que dos ovillos  $(D^3, t_1)$  y  $(D^3, t_2)$  son equivalentes si los arcos de  $t_1$  se pueden superponer a los de  $t_2$ .

**Definición 14**  $(D^3, t_1)$  y  $(D^3, t_2)$  son equivalentes si y sólo si existe un homeomorfismo

$$H : (D^3, t_1) \rightarrow (D^3, t_2) \cdot \exists H/S^2 = Id_{S^2}.$$

Para poder generalizar el concepto de ovillo a una 3-bola cualquiera necesitamos identificar de algún modo a la bola con  $D^3$ . Así:

Un ovillo es una configuración  $(B^3, t, \Phi)$  donde  $B^3$  es una tres-bola,  $t$  son dos arcos propiamente encajados en  $B^3$ , y  $\Phi$  es un homeomorfismo fijo  $\Phi : B^3 \rightarrow D^3$  que manda los extremos de  $t$  en los puntos  $NE, NW, SE, SW$ . El homeomorfismo fijo  $\Phi$  permite considerar a cada ovillo como contenido en  $D^3$ . Y entonces podemos decir que:

$(B^3, t_1, \Phi_1)$  y  $(B^3, t_2, \Phi_2)$  son equivalentes si y sólo si  $(D^3, \Phi_1(t_1))$  y  $(D^3, \Phi_2(t_2))$  son equivalentes.

Si  $A$  y  $B$  son ovillos isomorfos escribiremos  $A = B$ .

Sea  $p : D^3 \rightarrow D^2 \subset XY$  la proyección de  $D^3$  sobre el plano ecuatorial  $XY$ , y escojamos un homeomorfismo  $\Psi : B^3 \rightarrow D^3$  tal que  $(\Psi/\partial B^3) = (\Phi/\partial B^3)$  y de manera que la imagen de los arcos  $t$  bajo  $p \circ \Psi$  es una proyección regular en el interior de  $D^2$ .

Un diagrama de ovillos es la imagen de  $(B^3, t)$  bajo  $p \circ \Psi$ . Dos diagramas representan ovillos isomorfos si y solo si difieren entre ellos por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister en el interior de  $D^2$ .

Los ovillos se clasifican como racionales, localmente anudados y primos, de acuerdo a las siguientes definiciones:

**Definición 15** (figura 2.2, a') Un ovillo  $(D, t)$  es racional si existe un homeomorfismo de parejas  $h : (D, t) \rightarrow (D, t_0)$  donde  $(D, t_0)$  es el ovillo de la figura 2.2, a) al que denotaremos por  $(\infty)$ . Observemos que el homeomorfismo dado puede mover la frontera.

**Definición 16** (figura 2.2, b) Un ovillo  $(D, t)$  es localmente anudado si existe una 2-esfera  $S$  en  $D$  que intersecta a  $t$  de manera transversal en 2 puntos y

tal que la 3-bola que  $S$  bordea en  $\mathbb{R}^3$  intersecta a  $t$  en un arco anudado con extremos en  $S$ . Haciendo un esfuerzo por formalizar esta idea nos queda la siguiente definición:

$(D, t)$  es localmente anudado si  $\exists B_0$  una 3-bola con  $B_0 \subset D$  tal que  $B_0 \cap t = t'$  es un arco, y si cerramos  $t'$  por medio de un arco  $t'' \subset \partial B_0$  entonces  $t' \cup t''$  es un nudo no trivial.

**Observación 3** Se dice que un ovillo es localmente desanudado si para toda 3-bola  $B_0 \subset D$  que intersecte al ovillo en un arco  $t'$  entonces el nudo  $K$  obtenido al cerrar a  $t'$  por medio de un arco  $t'' \subset \partial B_0$  es un nudo trivial.

**Observación 4** Los ovillos racionales son localmente desanudados.

**Definición 17** (figura 2.2, c)) Un ovillo es primo si no es ni racional ni localmente anudado.

Observemos que todo ovillo es de uno, y sólo uno, de los tres tipos definidos.

### 2.2.1 Operaciones:

◊ Dados dos ovillos  $A$  y  $B$  definimos la suma de ovillos como lo indica la figura 2.2, (NE de  $A$  se pega a NW de  $B$ , y SE de  $A$  se pega a SW de  $B$ )

Propiedades de la suma: (ver figura 2.2)

i)  $(+)$  es asociativa:  $\forall A, B, C$  ovillos se tiene:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

ii)  $(+)$  no es conmutativa.

iii)  $A$  y  $B$  ovillos racionales no implica  $(A + B)$  racional.

Observemos que una suma de ovillos no siempre es un ovillo pues  $(A + B)$  puede contener una curva cerrada simple. Cabe aquí introducir el concepto de *paridad*.

**Definición 18** Dado un ovillo  $(A, t)$ , se dice que:

-  $A$  tiene paridad  $(0)$  si los arcos de  $t$  unen NW con NE y SW con SE.

- *A* tiene paridad (1) si los arcos van de NW a SE y de SW a NE.
- *A* tiene paridad ( $\infty$ ) si los arcos van de NW a SW y de NE a SE.

Es fácil ver que dados dos ovillos *A* y *B*, su suma ( $A + B$ ) es un ovillo a menos que tanto *A* como *B* tengan paridad ( $\infty$ ).

◊ Las construcciones del numerador y del denominador aplicadas a un ovillo *A* son mostradas en la figura 2.2, y denotadas  $N(A)$  y  $D(A)$  respectivamente. De estas construcciones pueden resultar tanto nudos como enlaces de dos componentes. Si *A* y *B* son ovillos se definen  $N(A + B)$  y  $D(A + B)$  de manera análoga. Nótese que en el caso de que ( $A + B$ ) no sea un ovillo los resultantes pueden llegar a ser enlaces de hasta tres componentes.

**Observación 5** *El nudo o enlace  $N(A + B)$  es topológicamente equivalente al obtenido al pegar *A* con *B* a lo largo de su frontera haciendo corresponder el NE de *A* con el NW de *B* y el SE de *A* con el SW de *B* (por la suma), y el NW de *A* con el NE de *B* y los dos restantes uno con el otro. Recordemos además que el espacio  $S^3$  se puede ver como el resultado de pegar dos 3-bolas a lo largo de su frontera común.*

El enfoque topológico a los problemas biológicos que se mencionaron en el capítulo anterior requiere entender ciertas características importantes de los ovillos racionales. Por ello, a lo largo de la siguiente sección de este capítulo trataremos de hacer un análisis global de este tipo de ovillos y nuestro primer objetivo será clasificarlos. Sin embargo este es un problema que queda lejos de ser trivial y para resolverlo necesitamos introducir alguna herramienta matemática fuerte.

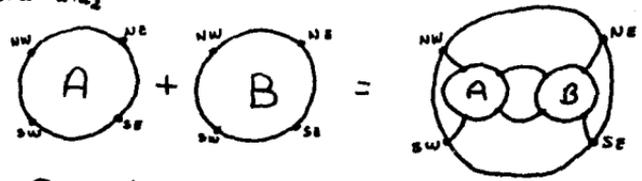
Existe además una clase muy grande y bien estudiada de nudos y enlaces de dos componentes desanudadas, los 4-plats, que están fuertemente relacionados con los ovillos racionales:

Si *A* y *B* son ovillos racionales

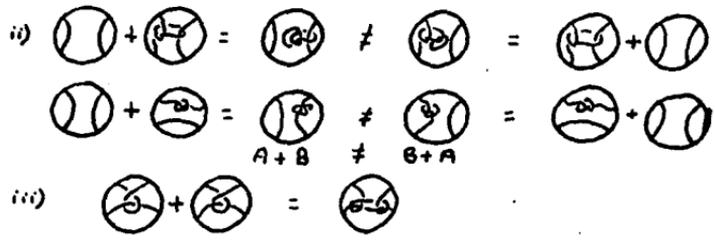
$$\implies N(A + B) \text{ es un 4-plat.}$$

De esta clase especial hablaremos más tarde y se dará también una clasificación de 4-plats.

Figura 2.2



Propiedades:



Paridad:



Figura 2.3

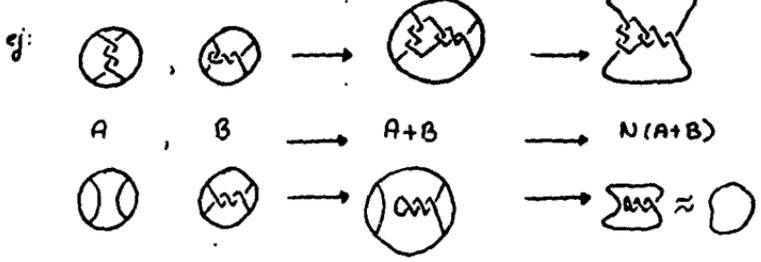


Figura 2.2.:

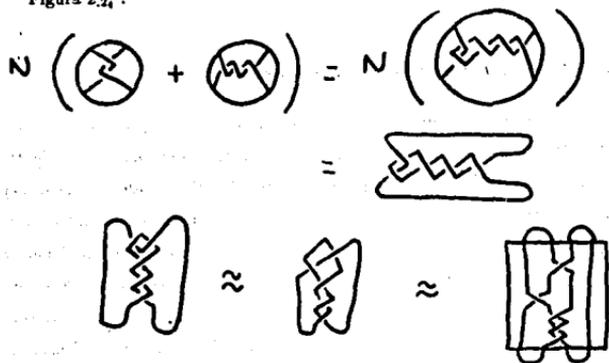
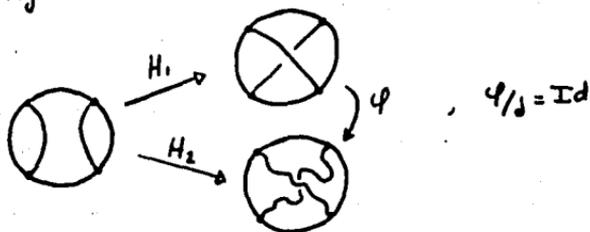


Figura 2.3.



### 2.3 Clasificación de ovillos racionales.

La tarea de clasificar a los ovillos racionales resulta ser muy laboriosa. Para hacer esta clasificación en  $D^3$  necesitamos estudiar los homeomorfismos de  $D^3$  en si mismo que fijan los cuatro puntos ecuatoriales distinguidos  $\{A, B, C, D\}$  y entender cuando dos homeomorfismos definen el mismo ovillo. Observaremos primero que basta fijarse en las restricciones de esos homeomorfismos a homeomorfismos de  $S^2$  en si mismo que fijan  $\{A, B, C, D\}$ , y que hay una correspondencia 1 a 2 entre éstos y los homeomorfismos de  $T^2$  en si mismo que conmutan con cierta involución  $\rho : T^2 \rightarrow T^2$ . Estos homeomorfismos inducen a su vez automorfismos de  $\Pi_1(T^2)$  que estan representados por matrices  $\begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix}$  con entradas enteras y determinante uno. Veremos finalmente que dos homeomorfismos de  $D^3$  en si mismo definen el mismo ovillo si y sólo si las matrices correspondientes coinciden en la primera columna. Así, a cada ovillo le podemos hacer corresponder un único número  $\frac{1}{2} \in Q \cup \{\infty\}$  que lo clasifica.

Para evitar confusiones ocasionadas por la notación, denotaremos con mayúsculas a los homeomorfismos entre espacios de 3 dimensiones y con minúsculas a aquellos entre espacios de 2 dimensiones. Por otra parte, dada una curva  $\gamma \subset X$ , con  $X$  espacio topológico, denotamos por  $[\gamma]$  a la clase de homotopía de  $\gamma$ .

Recordemos que por la Definición 15, un ovillo  $(D, t)$  es racional si hay un homeomorfismo que manda al ovillo  $(\infty) = (D, t_0)$  en  $(D, t)$ . Es decir que todo homeomorfismo de este tipo determina algún ovillo racional y dado cualquier ovillo racional existe al menos un homeomorfismo así. De aquí que el problema de clasificar ovillos racionales se puede traducir al de clasificar ciertos homeomorfismos de la bola en la bola. Recordemos ahora la Definición 14 que dice que dos ovillos  $(D, t_1)$  y  $(D, t_2)$  son equivalentes si existe un homeomorfismo que preserva la orientación  $\varphi : (D, t_1) \rightarrow (D, t_2) \cdot \exists \cdot \varphi/\partial = Id$ . De aquí que para la clasificación podemos considerar el diagrama de la figura 23. No

olvidemos observar que el diagrama no conmuta puesto que en general  $H_2 \circ H_1^{-1}$  no fija la frontera.

Si  $H_1$  y  $H_2$  definen ovillos equivalentes entonces denotamos:

$$H_1 \sim H_2$$

Para poder seguir necesitamos antes conocer ciertos resultados básicos sobre los homeomorfismos de la bola.

Sean  $X, Y$  espacios topológicos tales que existen homeomorfismos

$$g_1 : X \rightarrow Y$$

$$g_2 : X \rightarrow Y.$$

No puedo asegurar en general que haya una isotopía entre  $g_1$  y  $g_2$ .

**Ejemplo 1** Consideremos el homeomorfismo del toro bidimensional en él mismo que manda a la curva  $\lambda$  en  $\mu + \lambda$ . Para hacer ésto hubo que cortar al toro y volver a pegar como lo muestra la figura 2.3.3. No existe ninguna isotopía del toro que lleve a  $\lambda$  en  $\mu + \lambda$ .

Sin embargo cuando tratamos con dos homeomorfismos de la 3-bola en sí misma que preservan la orientación sí podemos afirmar que hay una isotopía entre ellos.

El problema de clasificar ovillos racionales se traduce al de clasificar cierto tipo de homeomorfismos de la 2-esfera en sí misma. Surje la siguiente:

**Observación 6** 1) Si  $H_1(t_0) = H_2(t_0)$  entonces  $H_1 \sim H_2$ . La función  $\varphi = Id$  es la que sirve para la prueba.

2) Si  $H_1/\partial = H_2/\partial$  entonces  $H_1$  y  $H_2$  definen ovillos equivalentes. Esto es pues  $(H_2 \circ H_1^{-1})/\partial = Id$  y por lo tanto la equivalencia entre los ovillos está dada por  $\varphi = H_2 \circ H_1^{-1}$ .

Ahora consideremos un homeomorfismo cualquiera  $H : D^3 \rightarrow D^3$  y su restricción  $h$  a la 2-esfera.

**Proposición 3** Dado el homeomorfismo  $h$  puedo recuperar a  $H$  salvo isotopía que es la identidad en la frontera.

**DEMOSTRACIÓN:** Primero observemos que todo homeomorfismo  $h : S^2 \rightarrow S^2$  se puede extender a uno  $H' : D^3 \rightarrow D^3$  del siguiente modo:

$$\begin{array}{l} \text{Defino} \\ H' : D^3 \rightarrow D^3 \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} h(x_0) \text{ si } x = x_0 \in \partial D^3 \\ \alpha h(x_0) \forall x \in D^3 - \partial D^3 \\ \text{donde } x = \alpha x_0 \text{ p.a. } x_0 \in S^2 \text{ y } \alpha \in [0, 1] \end{array} \right\} \end{array}$$

aquí estamos pensando en los puntos  $x$  como vectores en la bola unitaria de dimensión 3.

Claramente  $H'$  es continua pues  $h$  lo es. En éste caso se dice que extendiendo  $h$  a todo  $D^3$  por cáscaras. Observemos que

$$(H^{-1} \circ H') / \partial D^3 = Id$$

Entonces, dado que el Teorema de Alexander Tietze [BZ, ch. I] afirma que todo homeomorfismo  $H : D^3 \rightarrow D^3$ ,  $\exists \cdot h = H / \partial D^3 = Id_{\partial D^3}$  es isotópico a  $Id_{D^3}$  ( se denota  $H \approx Id$ ) y la isotopía deja la frontera fija, se tiene que

$$H^{-1} \circ H' \approx Id$$

$$\implies H \approx H' \text{ fijando la frontera.}$$

□

Se concluye de la proposición 3 que basta estudiar a los homeomorfismos  $h = H / \partial D^3$ .

Por otra parte tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 4** Si  $h_1$  y  $h_2$  son isotópicos fijando los cuatro puntos ecuatoriales distinguidos  $\{A, B, C, D\}$  entonces  $H_1$  y  $H_2$  definen

ovillos equivalentes.

**DEMOSTRACIÓN:**

Para la prueba observamos que  $H_2 \circ H_1^{-1} : (D, t_1) \rightarrow (D, t_2)$  fija los cuatro puntos  $\{A, B, C, D\}$  pero no fija la frontera.

Por hipótesis  $\varphi = h_2 \circ h_1^{-1} : S^2 \rightarrow S^2$  es isotópico a la identidad fijando los cuatro puntos  $\{A, B, C, D\}$ .

Demos otros nombres a los 4 puntos ecuatoriales distinguidos para simplificar la notación, sean así  $(A, B, C, D) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ . Consideremos al ovrillo  $(D^3, t_2)$  y sea  $C$  un collar de  $\partial D^3$  aplastado en los puntos  $a_i$  y que no toque a los arcos  $t_2$  más que en esos puntos. Para ver a  $C$  nos fijamos en la figura 2.3, y pensamos en él como

$$C = S^2 \times [0, 1] / \sim$$

donde

$$(a_i, t) \sim (a_i, s), \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall r, s \in I.$$

y

$$S^2 \times \{1\} = \partial D^3$$

Ahora, sea

$$\Phi : D^3 \rightarrow D^3$$

$$\exists \cdot \Phi(z) / D^3 - C = Id$$

y  $\Phi/C$  se define como:

$$\Phi((z, t) / \sim) = \Phi(z, t)$$

donde  $\Psi : S^2 \times [0, 1] \rightarrow S^2 \times [0, 1]$  es la isotopía que relaciona a  $\varphi$  con la identidad, donde

$$\Psi(z, 0) = (z, 0)$$

$$\Psi(z, 1) = (\varphi(z), 1)$$

$$\Psi(a_i, t) = (a_i, t), \forall i, \forall t.$$

Observemos que:

$$[\Phi^{-1} \circ (H_2 \circ H_1^{-1})] / \partial D^3 = Id$$

y es un homeomorfismo de  $D^3$  que manda  $(D, t_1)$  en  $(D, t_2)$ .  $\square$

Podemos afirmar a partir de aquí que dos homeomorfismos fijos  $H_i : (D, t_0) \rightarrow (D, t_i)$ ,  $i = 1, 2$  que son isotópicos sin mover los puntos  $\{A, B, C, D\}$  generan ovillos equivalentes. Sin embargo si tenemos dos ovillos equivalentes y dos homeomorfismos fijos que los generan entonces no podemos asegurar que éstos sean isotópicos sin mover los puntos  $\{A, B, C, D\}$ . De hecho existe otro tipo de homeomorfismos que llevan  $t_1$  en  $t_2$ .

Dividamos a  $D^3$  en tres rebanadas tal y como lo muestra la figura 2.3.4 (a). Ahora sea  $\tau$  una torcedura vertical de  $D^3$  a quien definimos como la identidad en las tapas y, viendo la rebanada central como  $D^2 \times [0, 1]$  definamos a  $\tau$  allí como

$$\tau(x, s) = (x \cdot e^{2\pi i s}, s)$$

El resultado de  $\tau$  es torcer la bola como se muestra en 2.3.4 (b).

Surge así la siguiente:

**Observación 7** Dado  $H : (D, t_0) \rightarrow (D, t)$  un homeomorfismo cualquiera se tiene que

$$H \sim H \circ \tau^n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Se llega fácilmente a ésto observando que  $\tau(t_0) = t_0$  y aplicando el inciso 1) de la Observación 6.

En éste punto nos servirá la herramienta de dobles cubiertas cíclicas ramificadas del Apéndice A de este capítulo.

**Observación 8** Sea  $T^3$  el toro sólido dibujado en la figura 2.3.5. A las curvas  $\mu_0$  y  $\lambda_0$  les llamamos el meridiano y la longitud del toro. Si  $\rho$  es la rotación de  $180^\circ$  a lo largo del eje  $X$  y consideramos la acción de  $\rho$  sobre el toro entonces el espacio cociente  $T^3/\rho$  es homeomorfo a  $D^3$ . La proyección  $p : T^3 \rightarrow D^3$  envía a

Figura 2.32

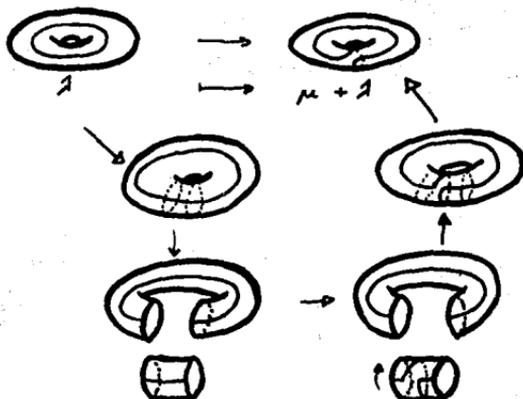


Figura 2.33

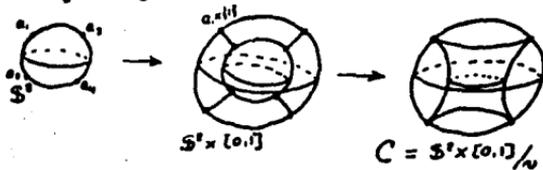


Figura 2.34

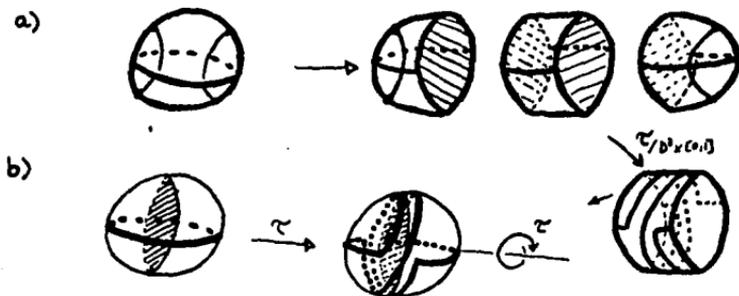


Figura 235

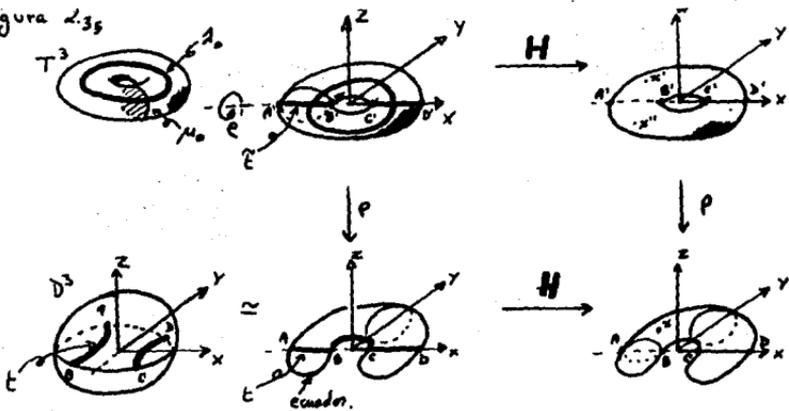
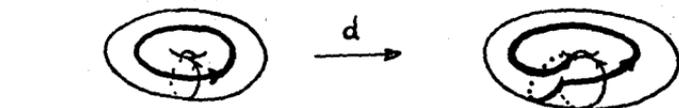


Figura 236



los arcos de  $\bar{t} = T^3 \cap (\text{eje } X)$  en los arcos  $t$  del ovillo y a los puntos  $A', B', C', D'$  en los puntos  $A, B, C, D$  respectivamente. Además  $\mu_0$  y  $\lambda_0$  se proyectan sobre los arcos  $AB$  y  $BC$  de  $D^3 \cap XY$ . De éste modo se ve a  $T^3$  como a la cubierta doble de  $D^3$  ramificada en  $t$ . Y a  $\partial T^3 = T^2$  como una doble cubierta de  $S^2$  ramificada en  $\{A, B, C, D\}$ . Todo  $x \in D^3 - t$  se levanta a dos puntos  $x'$  y  $x''$  en  $T^3 - \bar{t}$  y se tiene que  $x' = \rho(x'')$ .

Consideremos a continuación el siguiente:

**Lema 1** 1) Todo homeomorfismo  $h : \partial D^3 \rightarrow \partial D^3$  se levanta a dos homeomorfismos  $h^* : \partial T^3 \rightarrow \partial T^3$  tales que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \partial T^3 & \xrightarrow{h^*} & \partial T^3 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \partial D^3 & \xrightarrow{h} & \partial D^3 \end{array}$$

donde  $p$  es la proyección cubriente que se mencionó antes.

2) Todo homeomorfismo  $H : (D^3, t_0) \rightarrow (D^3, t_0)$  se levanta a dos homeomorfismos  $H^* : T^3 \rightarrow T^3$  tales que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{H^*} & T^3 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ D^3 & \xrightarrow{H} & D^3 \end{array}$$

Y es claro que los dos levantamientos están relacionados por la rotación  $\rho$ .

#### DEMOSTRACIÓN:

Recordando las afirmaciones sobre levantamientos de cubiertas vistas en el Apéndice de éste capítulo llegamos a que:

$h$  se levanta a  $h^*$  pues el subgrupo de  $\Pi_1(S^2 - \{A, B, C, D\})$  correspondiente a ésta cubierta está formado por los lazos con número de intersección par con  $ABUCD$ , y este conjunto es invariante bajo cualquier homeomorfismo

$$h : S^2 - \{A, B, C, D\} \rightarrow S^2 - \{A, B, C, D\}.$$

$H$  se levanta a  $H^*$  pues el subgrupo de  $\Pi_1(D^3 - t)$  correspondiente a ésta cubierta está formado por los lazos con número de enlace par con  $t$ , y este conjunto es invariante bajo cualquier homeomorfismo

$$H : (D, t_0) \rightarrow (D, t_0). \quad \square$$

**Teorema 3**  $H_1 : (D, t_0) \rightarrow (D, t_1)$  y  $H_2 : (D, t_0) \rightarrow (D, t_2)$  definen ovillos equivalentes si y sólo si  $h_1^*(\mu_0)$  y  $h_2^*(\mu_0)$  son curvas homotópicas (salvo orientación) en  $T^2$ .

**DEMOSTRACIÓN:**

$\Rightarrow$   $H_1 \sim H_2 \Rightarrow \exists \varphi : (D, t_1) \rightarrow (D, t_2) \cdot \exists \cdot \varphi / \partial = Id$ . Consideremos el homeomorfismo  $H_2^{-1} \circ \varphi \circ H_1 : D^3 \rightarrow D^3$ . Por el Lema 1 éste se levanta a un homeomorfismo  $(H_2^{-1} \circ \varphi \circ H_1)^* : T^3 \rightarrow T^3$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{(H_2^{-1} \circ \varphi \circ H_1)^*} & T^3 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ D^3 & \xrightarrow{H_2^{-1} \circ \varphi \circ H_1} & D^3 \end{array}$$

donde  $p$  es la proyección ya definida a través de  $\rho$ . Pero dado que todo homeomorfismo de  $T^3$  en sí mismo envía meridianos en meridianos, y aquí por meridiano nos referimos a una curva en  $\partial T^3$  que bordea un disco en  $T^3$ , y como:

$$(H_2^{-1} \circ \varphi \circ H_1)^* / \partial T^3 = (h_2^{-1})^* \circ (\varphi / \partial T^3)^* \circ (h_1)^* = (h_2^{-1})^* \circ (h_1)^*$$

entonces  $(h_2^{-1})^* \circ (h_1)^*$  debe enviar meridianos en curvas homotópicas a meridianos (salvo orientación), es decir:

$$[\mu_1 = ((h_2^{-1})^* \circ (h_1)^*)(\mu_0)] = [\mu_0]$$

Esto implica que  $(h_2)^*(\mu_0)$  y  $(h_1)^*(\mu_0) = (h_2)^* \circ ((h_2^{-1})^* \circ (h_1)^*)(\mu_0)$  son homotópicos salvo orientación.

⇐] Para ésta parte se utilizará un resultado muy fuerte el cual será probado bajo la forma de un lema más tarde:

**Resultado I:** Todo homeomorfismo  $h : \partial T^3 \rightarrow \partial T^3$  que envi meridiano y longitud en curvas homotópicas es isotópico a la identidad. Además si  $h \circ \rho = \rho \circ h$  entonces la isotopía conmuta con  $\rho$ .

Utilizaremos también un segundo resultado mucho más débil:

**Resultado II:** Todo homeomorfismo  $h : \partial T^3 \rightarrow \partial T^3$ ,  $\exists \cdot h(\mu_0) = \mu_1$  donde  $[\mu_0] = [\mu_1]$  puede descomponerse como

$$h = h' \circ d^\alpha \text{ para alguna } \alpha \in \mathbb{Z}$$

donde  $d$  es un giro como se muestra en la figura 2.3.8 (un giro así se llama *giro de Dehn*, y de éstos hablaremos más tarde) y  $h'$  es un homeomorfismo que manda meridiano y longitud en curvas homotópicas.

Para probar ésto último observemos que

$$\begin{aligned} h(\mu_0) &\in [\mu_0], y, \\ h(\lambda_0) &\in [\lambda_0] + \alpha[\mu_0] \end{aligned}$$

pero entonces

$$\begin{aligned} h \circ d^{-\alpha}([\mu_0]) &= [\mu_0], y, \\ h \circ d^{-\alpha}([\lambda_0]) &= [\lambda_0] \end{aligned}$$

y  $h$  se escribe como

$$h = (h \circ d^{-\alpha}) \circ d^\alpha.$$

Volviendo al teorema, tenemos que si  $(h_1)^*$  y  $(h_2)^*$  mandan al meridiano  $\mu_0$  en dos curvas homotópicas, entonces  $(h_2^{-1})^* \circ (h_1)^*$  manda meridiano en meridiano y entonces, por el **Resultado II** se tiene que:

$$\begin{aligned} (h_2^{-1})^* \circ (h_1)^* &= h^* \circ d^* \\ \Rightarrow (h_1)^* &= (h_2)^* \circ h^* \circ d^* \end{aligned}$$

y por el **Resultado 1 h\*** es isotópico a la identidad. Entonces:

$$\Rightarrow h_1 = h_2 \circ h \circ \tau$$

donde  $\tau$  es una torcedura vertical y  $h \approx Id$  fijando los 4 puntos ecuatoriales distinguidos, por lo que  $\tau$  y  $h$  definen al mismo ovillo que  $Id$  y entonces podemos concluir que  $H_1$  y  $H_2$  definen al mismo ovillo, es decir

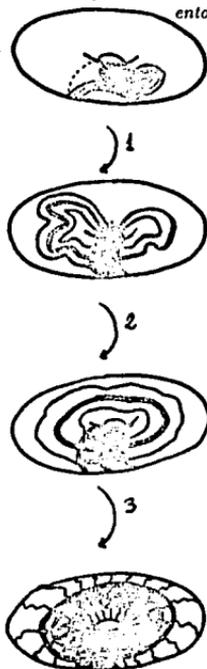
$$H_1 \sim H_2.$$

□

Demostremos ahora lo que quedó pendiente:

**Lema 2** *Todo homeomorfismo  $h : \partial T^3 \rightarrow \partial T^3$  que envía meridiano y longitud en curvas homotópicas es isotópico a la identidad. Además si  $h \circ \rho = \rho \circ h$  entonces la isotopía conmuta con  $\rho$ .*

Figura 2.3<sub>2</sub>:



DEMOSTRACIÓN:

Sea  $h : T^2 \rightarrow T^2$  que envía meridiano en meridiano y longitud en longitud. Lo que se quiere probar es que existe una isotopía  $F$  de  $T^2$  que lleve  $h$  en  $Id$ . La idea de la demostración es modificar a  $h$  con una isotopía ambiental hasta convertirla en la identidad sobre subconjuntos cada vez más grandes de  $T^2$ . Ésto se hace a lo largo de 3 pasos que quedan ilustrados en la figura 2.3, y que describiremos, sin demostración alguna, a continuación: (para los detalles de la demostración remitirse a [R, p.20-26])

1> Por hipótesis  $[h(\mu_0)] = (0,1)$  y entonces puedo enderezar con una isotopía a  $h(\mu_0)$  hasta que coincida con  $\mu_0$ . Con ésto tengo  $h(\mu_0) = \mu_0$  y como ésta curva es un disco encajado en el toro entonces puedo arreglar el homeomorfismo de modo que  $h/\mu_0 = Id$ .

2> Afirmamos que dado  $A = \{z/1 \leq z \leq 2\}$  en el plano complejo y  $\alpha : [1,2] \rightarrow A$  un encaje tal que  $\alpha[1,2] \cap \partial A = \{\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 2\}$  entonces si  $\alpha$  es homotópico, con los extremos fijos, a la inclusión

$j : [1, 2] \rightarrow A$  existe  $F_i : A \rightarrow A$  isotopía ambiental tal que  $F_0 = Id$ ,  $F_i/\partial A = Id$  y  $F_i \circ \alpha = j$ . Ahora considero el anillo  $T^2 - \{\mu_0\}$ . Usando el resultado enunciado podemos cambiar a  $h$  con una isotopía de modo que enderece a  $h(\lambda_0)$  y entonces  $h/\{\mu_0 \cup \lambda_0\} = Id$ . Además  $\lambda_0$  es isotópica a la derecha en  $T^2 - \{\mu_0\}$  sin mover la frontera del anillo.

Hasta ahora se ha logrado que  $h$  lleve  $\mu_0$  en  $\mu_0$  y  $\lambda_0$  en  $\lambda_0$  con la identidad:

3> La cerradura de lo que queda por ser enderezado es un disco  $D$  y  $h/\partial D = Id$  pero en éste caso podemos asegurar que existe una isotopía de  $D$  que lleva  $h$  a la identidad y que no mueve a  $\partial D$ .

En suma, se obtiene una isotopía ambiental que lleva  $h$  a la identidad.  $\square$

Definimos la siguiente relación entre homeomorfismos de  $T^2$  en  $T^2$  que conmutan con  $\rho$ :

$$h_1^* \sim'_* h_2^* \iff \left\{ \begin{array}{l} h_1^*(\mu_0) = \{h_2^*(\mu_0)\} \\ \exists i \in \mathbb{Z} \cdot \exists \mathcal{F} \text{ isotopía que conmuta con } \rho \text{ y} \\ \text{que lleva } h_1^* \text{ en } (h_2^*)^* \text{, donde } h_2^* = (h_2^*)^* \circ (d)^i \end{array} \right\}$$

La relación  $\sim'_*$  es de equivalencia.

Hemos probado lo siguiente:

$$H \sim H' \iff h^* \sim'_* (h')^*$$

Por otra parte, veremos ahora que hay correspondencia entre los homeomorfismos de  $T^2$  y los automorfismos  $\Pi_1(T^2)$ . Recordemos que  $\Pi_1(T^2)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , donde las clases de homotopía del meridiano y la longitud están representadas por  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  respectivamente, y que si  $h^* : T^2 \rightarrow T^2$  es un homeomorfismo, entonces éste induce de manera natural un isomorfismo  $\Phi_{h^*} : \Pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Ahora, sea  $\Phi : Z \oplus Z \rightarrow Z \oplus Z$  un isomorfismo, afirmamos que podemos construir  $h^* : T^2 \rightarrow T^2$  de modo que  $h^*$  induce a  $\Phi$ . Cabe aquí preguntarse como son los isomorfismos de  $Z \oplus Z$ .

**Afirmación:** Todo isomorfismo  $\Phi : Z \oplus Z \rightarrow Z \oplus Z$  es una transformación lineal que está totalmente determinado por una matriz  $M = \begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(Z) \cdot \ni \cdot \det(M) = \pm 1$ , donde  $(b, a)$  y  $(a', b')$  son las imágenes de  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  respectivamente (ver figura 2.3<sub>a</sub>). E inversamente a toda matriz de este tipo corresponde un automorfismo de  $Z \oplus Z$ .

Sea una matriz  $M = \begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix} \cdot \ni \cdot |\det M| = 1$ . Dado que  $Z \oplus Z = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle \Rightarrow \forall (m, n) \in Z \oplus Z$  y  $\forall \Phi : Z \oplus Z \rightarrow Z \oplus Z$  isomorfismo,  $\Phi(m, n) = m\Phi((1, 0)) + n\Phi((0, 1))$ . Definimos entonces  $\Phi \cdot \ni \cdot \Phi((1, 0)) = (b, a)$  y  $\Phi((0, 1)) = (a', b')$ . Entonces  $\forall (m, n) \in Z \oplus Z$ ,  $\Phi(m, n) = m(b, a) + n(a', b')$ . Además,  $\Phi$  isomorfismo  $\Rightarrow (b, a)$  y  $(a', b')$  son linealmente independientes  $\Rightarrow \Phi(Z \oplus Z) = \langle (b, a), (a', b') \rangle \square$ .

Así, por el Teorema 3, dos homeomorfismos  $H_1 : (D^3, t_0) \rightarrow (D^3, t_1)$  y  $H_2 : (D^3, t_0) \rightarrow (D^3, t_2)$  generan al mismo ovillo si y sólo si las matrices asociadas a  $h_1^*$  y  $h_2^*$  coinciden en la primera columna, salvo quizás por el signo. Observemos además que como los homeomorfismos originales preservan la orientación entonces las matrices asociadas tienen determinante +1.

Queremos ver ahora que toda matriz de éste tipo proviene de algún homeomorfismo  $H : D^3 \rightarrow D^3$  y para ésto basta ver que la matriz proviene de un homeomorfismo  $h^* : T^2 \rightarrow T^2$  que conmuta con  $\rho$  ya que entonces  $h^*$  se proyecta a  $h : \partial D^3 \rightarrow \partial D^3$  que puede extenderse a un  $H : D^3 \rightarrow D^3$ .

Consideremos la acción en  $\mathbb{R}^2$  dada por el grupo de traslaciones enteras que es precisamente  $Z \oplus Z$  y tomemos el cociente de ésta acción.

**Afirmación:**

$$\mathbb{R}^2 / (Z \oplus Z) = T^2.$$

Sea  $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  la proyección cubriente correspondiente.

Dada una matriz  $\begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix}$  con determinante 1 consideremos la transformación lineal  $\Phi^*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  asociada,  $\Phi^*$  es un homeomorfismo, queremos ver que el diagrama de la figura 2.3<sub>a</sub> define un homeomorfismo  $h^*$  de  $T^2$  en  $T^2$ . Dado  $x \in T^2$ , tomemos  $x' \in q^{-1}(x)$ , apliquémosle  $\Phi^*$  y proyectemos nuevamente definiendo así

$$h^*(x) = q \circ \Phi^*(x')$$

**Afirmación:** La  $h^*: T^2 \rightarrow T^2$  está bien definida y es homeomorfismo.

Dem: Dado que los elementos del conjunto  $q^{-1}(x)$  difieren, en  $\mathbb{R}^2$ , por vectores enteros, entonces sus imágenes bajo  $\Phi^*$  difieren por vectores enteros pues  $\Phi^*$  es lineal. Así, todos los elementos de  $\Phi^*(q^{-1}(x))$  se proyectan bajo  $q$  al mismo punto en  $T^2$ .

$h^*$  es continua puesto que  $\Phi^*$  es continua y  $q$  es un homeomorfismo local.

Para probar que es biyectiva basta ver que tiene inversa. Observemos entonces que como  $M = \begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix}$  tiene entradas enteras y determinante 1 entonces la  $M^{-1}$  también tiene entradas enteras y determinante 1 y por lo tanto podemos definir, igual que como definimos  $h^*$  para  $M$ , un mapeo continuo  $g^*: T^2 \rightarrow T^2$  y es claro que, por construcción,

$$g^* \circ h^* = h^* \circ g^* = Id$$

□

Observemos que los homeomorfismos de  $T^2$  en  $T^2$  definidos de ésta manera conmutan con  $\rho$ .

En suma, hemos visto que a cada homeomorfismo  $H_1: (D^3, t_0) \rightarrow (D^3, t_1)$  le corresponden dos homeomorfismos  $h_1^*$  y  $(h_1^*)^*$  de  $T^2$  en  $T^2$  tales que  $(h_1^*)^* =$

$h_1 \circ \rho$ , y, por lo tanto, dos matrices  $\begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} -b & -a' \\ -a & -b' \end{pmatrix}$ . Vimos también que dos homeomorfismos  $H_1$  y  $H_2$  definen el mismo ovrillo, si y sólo si las matrices asociadas coinciden en la primera columna, salvo por el signo de ésta. Nos preguntamos ahora de qué forma son todas las matrices enteras, con determinante 1, que coinciden en la primera columna salvo por el signo:

Sean  $\begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} b & a'' \\ a & b'' \end{pmatrix}$  tales que

$$bb' - aa' = 1$$

$$bb'' - aa'' = 1$$

restado las ecuaciones tenemos:

$$b(b' - b'') - a(a' - a'') = 0$$

y como  $(a, b) = 1$  entonces forzosamente  $\exists k \in \mathbb{Z} \ni$

$$b - b'' = ka$$

y

$$a - a'' = kb$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} b & a'' \\ a & b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a' + kb \\ a & b' + ka \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que  $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  es la matriz que corresponde al homeomorfismo

$$d^k : T^2 \rightarrow T^2.$$

Por otro lado tenemos el siguiente resultado:

Figura 2.38

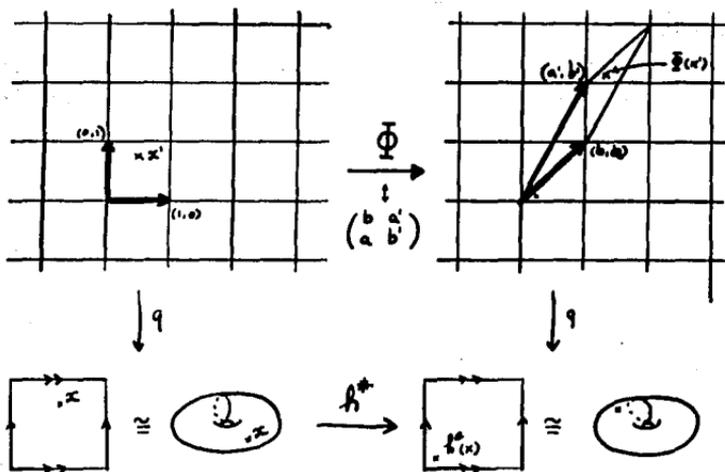
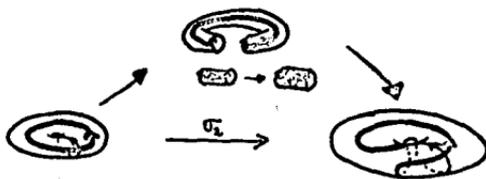


Figura 2.39: Giros de Dehn

Id:



Giro 2



$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$

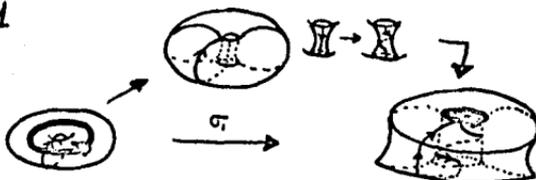
$p \downarrow$

$\downarrow$

$p \downarrow$



Giro 1



$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$

$p \downarrow$

$\downarrow$

$p \downarrow$



**Teorema 4** Toda matriz  $M = \begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix} \cdot \exists \cdot \{a, b, c, d\} \in \mathbb{Z}, bb' - aa' = 1$  y  $b \neq 0$  admite una expansión como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

donde  $a_i, k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, m \in \mathbb{N}$ , y el  $\pm$  es el signo de  $b$ .

Además podemos elegir todas las  $a_i$  del mismo signo y  $a_i \neq 0, \forall i \geq 2$  y con estas condiciones la expansión  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  es única y está dada por la expresión de  $\frac{b}{a}$  como fracción continuada de la forma:

$$\frac{b}{a} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

#### DEMOSTRACIÓN:

La matriz de la extrema derecha sirve para pasar entre matrices con la misma primera columna salvo signo, de modo que nos podemos restringir a resolver:

$$\begin{pmatrix} b & * \\ a & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_m & 1 \end{pmatrix}$$

con  $b > 0$ .

Fijándonos en el lado derecho de la igualdad de matrices del enunciado definamos la sucesión de enteros  $(r_0, r_1, \dots, r_m)$  como sigue, empezando por:

$$\begin{pmatrix} b & * \\ a & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & * \\ r_1 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & * \\ r_1 & * \end{pmatrix}$$

y entonces

$$r_0 = r_2 + a_1 r_1$$

$$\Rightarrow b = a_1 a + r_2$$

luego:

$$\begin{pmatrix} r_2 & * \\ r_1 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & * \\ r_3 & * \end{pmatrix}$$

en general:

$$\begin{pmatrix} r_{2i-2} & * \\ r_{2i-1} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{2i-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{2i} & * \\ r_{2i-1} & * \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots\}$$

$$\begin{pmatrix} r_{2i} & * \\ r_{2i-1} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{2i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{2i} & * \\ r_{2i+1} & * \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots\}$$

Obtenemos, de estas ecuaciones de matrices, el sistema:

$$\begin{aligned} r_0 &= a_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_2 r_2 + r_3 \\ r_2 &= a_3 r_3 + r_4 \\ &\dots \dots \dots \\ r_{m-2} &= a_{m-1} r_{m-1} + r_m \\ r_{m-1} &= a_m r_m \\ r_m &= 1 \end{aligned}$$

Donde  $m$  es par. Tomemos  $a$  y  $b$  enteros positivos distintos de cero (el caso en que  $a$  es cero es inmediato) el algoritmo de la división aplicado a  $r_0 = b$  y  $r_1 = a$  da soluciones enteras positivas  $r_i, a_i$  a un sistema como el anterior con  $a_m \geq 2$  pero donde  $m$  puede ser impar. En este caso podemos reescribir

$$\begin{aligned} r_{m-1} &= (a_m - 1)r_m + r_{m+1} \\ r_{m+1} &= 1 \cdot r_m \\ r_{m+1} &= 1 \end{aligned}$$

para obtener una solución de longitud par al sistema. Si llamamos  $r_2 = b'$  entonces observemos que si  $a > b$  entonces  $a_1 = 0$  y  $a_i \neq 0, \forall i \neq 1$ , y si  $b > a$  entonces  $a_i \neq 0, \forall i$  y de hecho  $b'$  es la parte entera de  $\frac{b}{a}$ .

Así, hemos probado que el sistema tiene solución ahora quisieramos ver que la solución como la que queremos es única.

Se puede mostrar que los  $a_i$  de cualquier solución del sistema dan una expresión de  $\frac{b}{a}$  como fracción continuada:

$$\frac{b}{a} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

donde  $a_1$  puede ser cero. Se sabe que la expansión de  $\frac{b}{a}$  como fracción continua, donde  $b$  y  $a$  son enteros positivos cualesquiera, con  $a_1 \geq 0$ ,  $a_i > 0$ ,  $\forall i \geq 2$  y  $m$  par es única.

Las soluciones para  $a < 0$  y  $b > 0$  se obtienen a partir de las soluciones para  $-a$  y  $b$  cambiando el signo a todas las  $a_i$ .  $\square$

**Observación 9** Como  $\forall a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{a_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_i & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{a_i} = \begin{pmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , entonces toda matriz  $M = \begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix} \cdot \exists \cdot \det M = 1$  admite una expansión como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{a_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{a_2} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{a_{2m}} \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

donde todas las  $a_i$  son del mismo signo y distintas de cero excepto por  $a_1$  que puede ser cero.

Si  $M$  representa un isomorfismo  $\Phi$  de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  en sí mismo, el expresarla de ésta forma equivale a mostrar a una  $\Phi'$  donde

$$[\Phi'(\mu)] = [\Phi(\mu)],$$

como composición de isomorfismos  $\Phi' = \Phi_m \circ \Phi_{m-1} \circ \dots \circ \Phi_1$  y mostraremos que equivalentemente muestra a  $h$  como composición finita de homeomorfismos de  $S^2$  en  $S^2$ :

$$h = h_n \circ h_{n-1} \circ \dots \circ h_1.$$

Pero éstos homeomorfismos serán de un tipo muy especial y ésta descomposición nos dará una clasificación de los ovillos racionales.

Las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  representan homeomorfismos muy particulares en el toro llamados *Giros de Dehn*. (ver la figura 2.3<sub>a</sub>)

Y dado un giro de Dehn en la doble cubierta ramificada de la esfera con 4 puntos de ramificación éste se proyecta en un homeomorfismo de la esfera que deja fijos los puntos de ramificación y que es isotópico a una "torcedura" como se muestra en la figura 2.3<sub>b</sub>.

De éste modo todo ovillo racional se puede crear a partir del ovillo  $(D^3, t_0)$  aplicándole a éste una composición de una sucesión finita de éstas "torceduras", y entonces al ovillo le podemos asociar de manera única una matriz  $\begin{pmatrix} b & a' \\ a & b' \end{pmatrix}$  construida por el teorema anterior a partir de la expansión como fracción continua  $\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$  y a quien corresponde también de manera única un vector  $(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1)$ .

Veamos todo ésto con un poco más de detalle:

### 2.3.1 Giros de Dehn:

Sea  $\Phi_1 : Z \oplus Z \rightarrow Z \oplus Z$  un isomorfismo representado por la matriz  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Esta matriz lo que nos está diciendo es que  $\Phi_1((1,0)) = (1,1)$  y que  $\Phi_1((0,1)) = (0,1)$ , es decir que  $\Phi_1$  manda a la clase de homología del meridiano  $\mu = (1,0)$  de  $T^2$  en la clase  $(1,1)$  de la curva en el toro que da una vuelta meridionalmente y una longitudinalmente, las dos en sentido positivo; y a la clase de homología de la longitud  $\lambda$  la deja fija. Análogamente si el isomorfismo  $\Phi_2$  está representado por la matriz  $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  lo que nos dice es que  $\Phi_2$  manda a la clase de  $\lambda$  en la clase  $(1,1)$  de curvas en el toro, y deja a la clase de  $\mu$  fija. A éstos homeomorfismos del toro les llamamos giros de Dehn y los denotamos por  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  respectivamente. (ver figura 2.3<sub>a</sub>)

Obsérvese que las matrices operan por la izquierda es decir que para una clase  $(a, b)$  de curvas se tiene:

$$\Phi_1((a, b)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b+a \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2((a, b)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a \\ a \end{pmatrix}$$

Como toda matriz  $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$  con determinante 1 es producto de matrices

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  entonces todo homeomorfismo del toro bidimensional en sí mismo se puede ver como composición de potencias de los homeomorfismos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , es decir que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  generan todos los homeomorfismos de  $T^2$  en  $T^2$ .

Surge una nueva pregunta:

*¿Dado uno de los homeomorfismos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  del toro, a qué clase de homeomorfismos de la esfera en la esfera se bajan por vía del mapeo cubriente?*

La figura 2.3<sub>9</sub> nos da la respuesta a esta pregunta. En  $S^2$ ,  $\sigma_1$  se ve como  $h_1$  y  $\sigma_2$  como  $h_2$ . Así, en cualquier clase de homeomorfismos del toro en el toro que fijan  $\{A', B', C', D'\}$  y conmutan con  $\rho$ , hay un representante que se puede expresar como:

$h^* = (\sigma_2^{a_1}) \circ (\sigma_1^{a_2}) \circ (\sigma_2^{a_3}) \circ \dots \circ (\sigma_1^{a_n})$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , y donde,  $i \in \{1, 2\}$ , donde todas las  $a_i$  son de mismo signo y solo  $a_1$  puede ser cero.

Y entonces la clase correspondiente a  $[h^*]$  de homeomorfismos de la esfera en sí misma que fijan  $\{A, B, C, D\}$  tiene como representante a un homeomorfismo  $h$  que se expresa como:

$h = (h_2^{a_1}) \circ (h_1^{a_2}) \circ \dots \circ (h_1^{a_n})$ , donde todas las  $a_i$  son de mismo signo y solo  $a_1$  puede ser cero.

De éste modo queda probado que para todo ovrillo racional existe un ovrillo canónico equivalente a él que es como en la figura 2.3<sub>10</sub> y que está definido por la sucesión de enteros  $a_1, a_2, \dots, a_m$  obtenidos en el teorema. Los  $a_i$  están totalmente determinados por

$$\frac{b}{a} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_m}}}$$

sabiendo que tienen el mismo signo, que salvo por  $a_1$  son distintos de cero y que  $m$  es par. Si observamos que

$$a_m = a_m \pm 1 + \frac{1}{\pm 1}$$

entonces concluimos que sin pérdida de generalidad podemos cambiar la última condición por la condición  $|a_m| \geq 2$ .

Se puede mostrar que si  $m$  es impar, el desarrollo

$$\frac{b}{a} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_m}}}$$

da una solución de

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  es la matriz asociada al homeomorfismo

$$H : (D, t_0) \rightarrow (D, t_1)$$

que es el que se muestra en la figura 2.3<sub>11</sub>. El oவில்lo que corresponde a este caso en que  $m$  es par es como el de la figura 2.3<sub>10</sub>, a), y el que corresponde a  $m$  impar es el de 2.3<sub>10</sub>, b).

Obtenemos así la convención de Conway según la cual toda clase de equivalencia de oவில்los racionales puede ser representada por un único vector estándar con entradas enteras  $(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1)$  donde:

$$- a_i \neq 0 \forall 2 \leq i \leq m.$$

$$- a_i a_j > 0 \forall i, j.$$

$$- |a_m| > 1$$

Esta convención excluye los cuatro oவில்los excepcionales  $\{(0), (1), (-1), (0, 0)\}$  que se muestran en la figura 2.3<sub>12</sub>. Al vector estándar para un oவில்lo racional le llamamos *Símbolo de Conway* para el oவில்lo y se toman a los cuatro vectores de

arriba como los símbolos de Conway para los cuatro ovillos excepcionales.

**Teorema 5 Clasificación de ovillos racionales:**

*Existe una correspondencia uno a uno entre las clases de equivalencia de ovillos racionales y los números racionales extendidos  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  con  $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\beta \in \mathbb{Z}$  y  $(\alpha, \beta) = 1$ .*

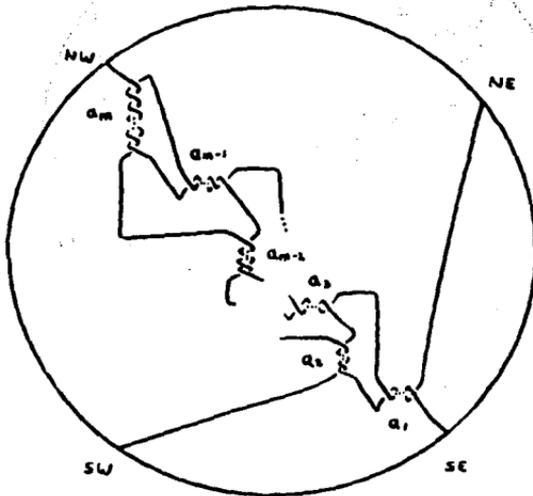
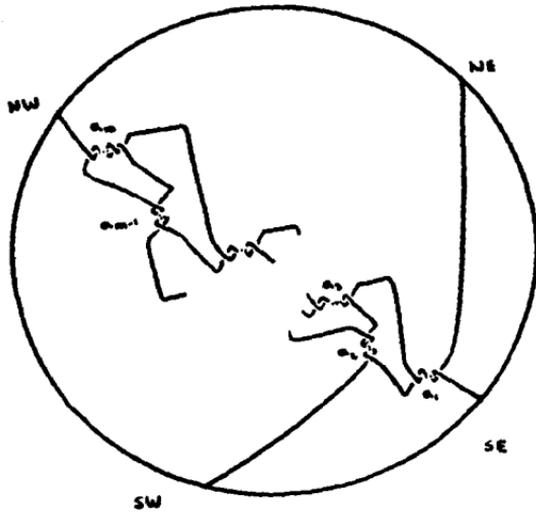


Figura 2.3.10 :



## 2.4 Espacios Lente y Cirugía en Nudos.

### 2.4.1 Espacios Lente:

**Definición 19** Sea  $T$  un toro sólido en  $S^3$ . Decimos que una curva cerrada simple  $\mu \in \partial T$  es un meridiano si  $\mu$  es frontera de un disco encajado en  $T$ . Definimos como longitud de  $T$  a toda curva, cerrada, simple  $\lambda \in \partial T$  que interseca a  $\mu$  en un punto, y como longitud preferente de  $T$  a una longitud cuyo número de enlace con el alma del toro es cero.

Recordemos que  $\Pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  donde  $\langle \mu \rangle = (1, 0)$  y  $\langle \lambda \rangle = (0, 1)$  y que un elemento  $\langle a, b \rangle \in \Pi_1(T^2)$  está representada por un encaje  $S^1 \hookrightarrow T^2$  si y sólo si  $\langle a, b \rangle = (a, b)$  o  $\langle a, b \rangle = 1$ .

Veamos ahora como se construye un espacio lente:

Sean  $V_1$  y  $V_2$  dos toros sólidos. Si  $h: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$  es un homeomorfismo, podemos formar el espacio  $M^3 = V_1 \cup_h V_2$  como resultado de identificar cada  $x \in \partial V_2$  con  $h(x) \in \partial V_1$  en la unión disjunta de  $V_1$  con  $V_2$ .

**Afirmación:**  $M^3$  es una 3-variedad cerrada, conexa y orientable que depende, salvo homeomorfismo, únicamente de la clase de homotopía de  $h(\mu_2)$  en  $\partial V_1$ , donde  $\mu_2$  es un meridiano de  $V_2$ .

**Definición 20** Escogiendo generadores  $\lambda_1, \mu_1$ , longitud-meridiano, fijos para  $\Pi_1(\partial V_1)$ , podemos escribir  $h(\mu_2) = p\lambda_1 + q\mu_1$  donde  $p, q \in \mathbb{Z}$ .  $\exists \cdot (p, q) = 1$ . Al espacio resultante se le llama Espacio Lente de tipo  $(p, q)$ , y se denota:  $M^3 = L(p, q)$ .

Así, un espacio  $L(p, q)$  lente es el resultado de pegar dos toros sólidos  $T_1$  y  $T_2$  por la frontera de forma que el meridiano de  $\partial T_1$  se pega a la curva que llamaremos  $\frac{1}{p}$  en  $\partial T_2$ .

**Proposición 5** Una 3-variedad es un espacio lente si y solo si contiene un toro sólido tal que la cerradura de su complemento también es toro sólido.

**Afirmación:**

$$L(p, q) \cong L(p, -q) \cong L(-p, q) \cong L(p, q + kp) \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Por convención consideraremos siempre  $0 < q < p$ . Esto incluye a todos los espacios lente de este grupo, excluyendo a  $S^3$  y a  $S^2 \times S^1$ .

**Afirmación:**  $\Pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}_p$ .

Dado que el grupo fundamental es un invariante para espacios topológicos entonces de la afirmación anterior podemos concluir que  $L(p, q) \cong L(p^*, q^*) \implies p = p^*$

**Observación 10** Existen repeticiones bajo homeomorfismo dentro del conjunto  $\{L(p, 1), L(p, 2), \dots, L(p, p-1)\}$  de todos los espacios lente con grupo  $\mathbb{Z}_p$ .

**Teorema 6**  $L(p, q) \cong L(p^*, q^*) \iff \pm q^* \equiv q^{\pm 1} \pmod{p}$ .

Otra manera de ver al espacio lente  $L(p, q)$  es como resultado de mover una vecindad tubular de un nudo trivial en  $S^3$  y repegarla de forma que un meridiano se identifique con una curva en  $T^2$  de clase  $(p, q)$ , es decir, una curva en la frontera del toro que tiene número de enlace  $p$  con el nudo trivial y que da  $q$  vueltas longitudinalmente.

En esta subsección dimos una rápida ojeada a ciertos objetos fundamentales de la teoría de nudos. El resultado más importante fue el del teorema 6 que da una clasificación completa de los espacios lente. La demostración de este teorema es muy larga y complicada y es por eso que nos limitaremos a utilizar el resultado.

El teorema de clasificación de espacios lente se usa para la clasificación de los 4-plats, de quienes hablaremos posteriormente dando tanto definición como clasificación de ellos, pero antes introduzcamos el concepto de cirugía que se usará en el capítulo 3:

### 2.4.2 Cirugía de Dehn:

Al proceso de sumar dos toros sólidos a lo largo de su frontera se le llama *Cirugía de Dehn*. Veamos primero un par de ejemplos que motivarán la definición:

Considerense los toros sólidos  $A, B, C$  y las curvas  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , como lo muestra la figura 2.41. Si identificamos las fronteras de  $A$  y  $B$  de tal forma que  $\gamma_1$  se pegue con  $\gamma_2$ , obtenemos un espacio homeomorfo a  $S^2 \times S^1$ . Si, por otra parte, la identificación es ahora de  $A$  con  $C$  de forma que  $\gamma_1$  se pega a  $\gamma_3$  entonces obtengo  $S^3$ . Así,  $S^3$  es la unión de dos toros sólidos identificando sus fronteras de un modo particular.

Consideremos ahora un nudo cualquiera  $K$ . Una vecindad regular de  $K$  se puede ver como un toro encajado en el espacio ambiente. La cirugía de Dehn sobre  $K$  consiste en considerar al nudo junto con su vecindad regular  $V^\circ(K)$ , tomar  $S^3 - V^\circ(K)$  y en el "hueco" que le queda al espacio meter de nuevo a  $V^\circ(K)$  pero identificando la frontera de alguna otra manera.

**Definición 21** (ver la figura 2.42).

Sea  $K$  un nudo no trivial,  $V^\circ$  una vecindad toroidal abierta de  $K$ ,  $C(K) = S^3 - V^\circ$  el complemento del nudo, y defino un sistema de coordenadas fijo en  $\partial V^\circ = \partial C(K)$ , sea  $(\mu, \lambda)$  meridiano y longitud, donde la longitud es una "longitud preferente", es decir que  $lk(\lambda, K) = 0$ .

Para  $p, q \in \mathbb{Z} \ni \cdot(p, q) = 1$ , sea  $M = \text{srg} \left( S^3, K, \frac{p}{q} \right)$  la 3-variedad cerrada  $[C(K) \cup_f V']$  donde  $V'$  es un toro sólido con meridiano  $\mu'$  y  $f$  es un homeomorfismo de pegado

$$\begin{aligned} f : \partial V' &\rightarrow \partial C(K) \\ f(\mu') &\sim p\mu + q\lambda \text{ en } \partial C(K) \end{aligned}$$

Se dice entonces que  $M$  se obtiene de  $S^3$  por cirugía  $\frac{p}{q}$  en  $K$ .

La pendiente  $\frac{p}{q}$  es lo que caracteriza a la cirugía.

**Notación:**  $K_{\frac{p}{q}}$  = cirugía  $\frac{p}{q}$  hecha sobre el nudo  $K$ .

Los ejemplos dados al principio corresponderían a decir que si  $K_0$  es el nudo trivial entonces:

$$-(K_0)_\infty = S^3$$

$$-(K_0)_0 = S^2 \times S^1$$

Observemos que:

$$-(K_0)_1 = S^3 \text{ y esto es pues si vemos a las curvas } \delta_0 \text{ y } \delta_1 \text{ de la figura 2.43,}$$

éstas son iguales en el toro sólido de modo que da lo mismo pegar, en la cirugía, un meridiano a  $\delta_0$  que a  $\delta_1$ . Podemos entonces hacer la siguiente:

**Afirmación:**

$$(K_0)_1 = S^3, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Cabe ahora preguntarse que forma tiene  $(K_0)_1$ . En este caso la función de pegado manda a  $\mu'$  en  $2\mu + \lambda$ . Pero  $\mu'$  bordea un disco en  $V'$  de modo que en el espacio resultante la curva  $\delta_1 = 2\mu + \lambda$  va a ser borde de un disco y por lo tanto homotópicamente trivial. De ésta forma, si

$$H_1(S^3 - K) = (a, \dots) = \mathbb{Z}$$

entonces ahora:

$$H_1((S^3 - K) \cup V') = \langle a, a^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2$$

y entonces la homología del espacio que resulta de hacer cirugía  $\frac{1}{2}$  sobre el nudo trivial es  $\mathbb{Z}_2$ . Y de manera análoga se llega a afirmar que

$$H_1((K_0)_m) = \mathbb{Z}_m \neq 0 \forall m \in \mathbb{N} - \{1\}$$

y de hecho

$$(K_0)_m = L(m, n)$$

y entonces toda cirugía sobre el nudo trivial da o bien un espacio lente, ó  $S^3$ , ó  $S^2 \times S^1$ , y

$$(K_0)_m = S^3 \Leftrightarrow m = 1, n \in \mathbb{Z}.$$

Existen resultados muy importantes en relación con las cirugías sobre nudos. Por ejemplo tenemos los siguientes:

**Teorema 7** *Toda 3-variedad es resultado de alguna cirugía sobre un enlace.*

**Teorema 8** [Gordon-Luecke]

*Si  $K$  es un nudo no trivial entonces ninguna cirugía no trivial sobre  $K$  produce*

Figura 2.41

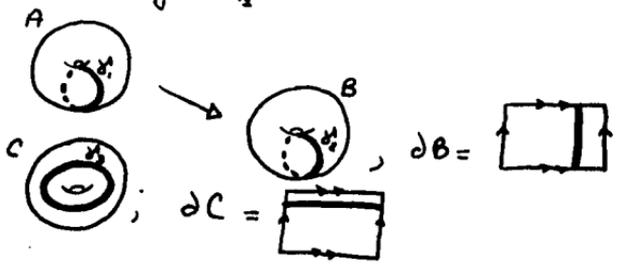


Figura 2.42

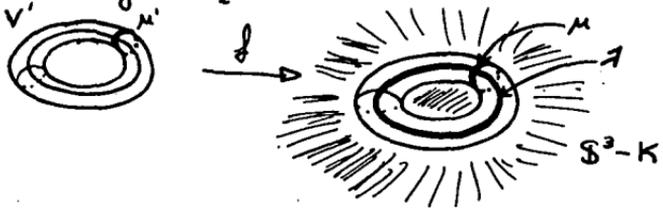
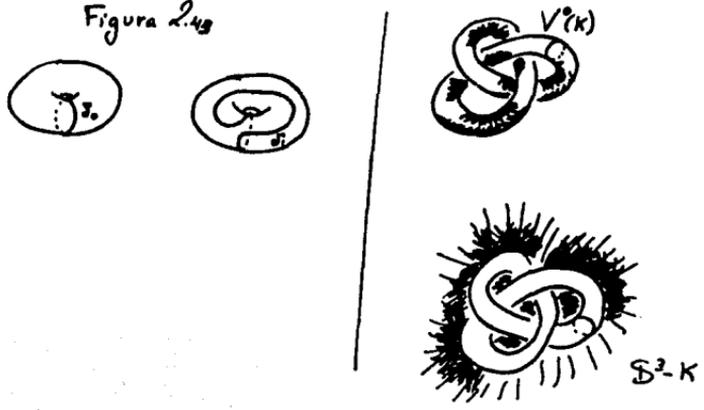


Figura 2.43



$S^3$ .

Dado que  $H_1(K_m) = Z_m$  y que  $H_1(S^3) = 0$  entonces en los únicos casos en que cabe preguntarse si  $K_m = S^3$  es cuando  $m = 1$ . Sin embargo lo más lejos que podemos llegar con la homología es a esto. No sabemos comparar, con homología, a  $K_{\frac{1}{n_1}}$  y  $K_{\frac{1}{n_2}}$  si  $n_1 \neq n_2$ . Con esto nos podemos dar una idea de la complejidad de éste último teorema. En el capítulo 3 se enunciará otro teorema muy importante que sirvió para probar éste último, se trata del *Teorema de Cirugía Cíclica*, pero por ahora concentremos nuestra atención en los siguientes resultados.

## 2.5 Clasificación de 4-plats.

### 2.5.1 4-plats o nudos de dos puentes.

#### Nudos de $m$ puentes.

Shubert clasificó nudos y enlaces orientados de dos puentes, y mostró que cada nudo de éstos se puede representar de manera normal. Se observa que si se los considera como nudos no orientados su clasificación puede verse como parte de la clasificación de los espacios lente de 3 dimensiones y además está íntimamente relacionada con la clasificación de ovillos racionales.

**Definición 22** (figura 2.5<sub>1</sub>) Sea  $K$  un nudo o enlace en  $\mathbb{R}^3$  que interseca a algún plano  $E \subset \mathbb{R}^3$  en  $2m$  puntos de forma que los arcos contenidos en cada semiespacio relativo a  $E$  poseen proyecciones ortogonales sobre  $E$  que son simples y disjuntas.

Se dice que  $(K, E)$  es una **presentación con  $m$  puentes** para  $K$ .

Se define el **número de puentes de  $K$**  como el mínimo  $m$  tal que  $K$  admite una presentación con  $m$  puentes.

**Observación 11** (ver figura 2.5<sub>2</sub>)

i) Dado un nudo  $K$ , una proyección regular  $p(K)$  con  $n$  cruces admite una

presentación con  $n$  puentes relativa al plano de proyección. Y si la proyección regular del nudo es no alternante<sup>3</sup> entonces el número de puentes de  $K$  es menor que  $n$ .

El único nudo con un puente es el nudo trivial.

### Trenzas .

La idea geométrica de trenza introduce una nueva representación para nudos y enlaces. Daremos una definición constructiva de trenza:

#### Definición 23 (ver la figura 2.5<sub>3</sub>)

Considérese un rectángulo  $R \subset \mathbb{R}^3$  y tórnense en dos lados opuestos de  $R$  puntos equidistantes  $P_i, Q_i$  con  $1 \leq i \leq n$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ .

Sean  $f_i, 1 \leq i \leq n$ ,  $n$  arcos poligonales simples y disjuntos en  $\mathbb{R}^3$  de forma que para cada  $i$ ,  $f_i$  empieza en  $P_i$  y termina en  $Q_{\sigma(i)}$  donde  $\sigma \in P_n$  con  $[P_n = \{\text{permutaciones de } n \text{ elementos}\}]$ . Las  $f_i$  deben ir estrictamente "hacia abajo", es decir que para cualquier plano  $\mathcal{P}$  ortogonal a los lados del rectángulo que no contienen ningún  $P_i$  o  $Q_i$ , se tiene:  $|f_i \cap \mathcal{P}| \leq 1$ .

Al conjunto:  $\{f_i / 1 \leq i \leq n\}$  se le llama trenza.

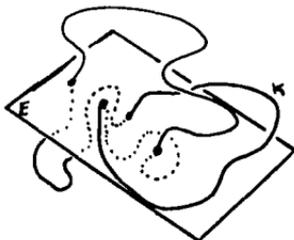
A  $R$  se le llama marco de la trenza.

Las clases de isotopía de  $n$ -trenzas forman un grupo llamado el grupo de trenzas  $B_n$  con la multiplicación dada en la figura 2.5<sub>4</sub>. El grupo de trenzas  $B_4$  es generado por 3 generadores  $\zeta_i$  ilustrados en la misma figura, es decir que cada trenza aparece como el producto de las trenzas elementales  $\zeta_i$  y  $\zeta_i^{-1}$ .

Una trenza puede ser cerrada con respecto a un eje  $h$ . De hecho cada trenza  $\xi$  define una trenza cerrada  $\xi^h$  que representa un enlace de  $\mu$  componentes donde  $\mu$  representa el número de ciclos de la permutación de la trenza  $\xi$  (ver figura 2.5<sub>5</sub>).

<sup>3</sup> La proyección de un nudo es alternante si los cruces por arriba y los cruces por abajo se alternan al recorrer el nudo. Un nudo  $K$  es alternante si posee una proyección alternante.

Figura 2.51:



$(K, E)$

Figura 2.52:



$p(K)$

$n = 8$   
 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$n = 8$   
 $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$

Figura 2.53

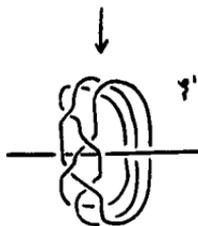
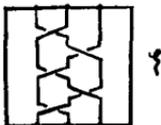
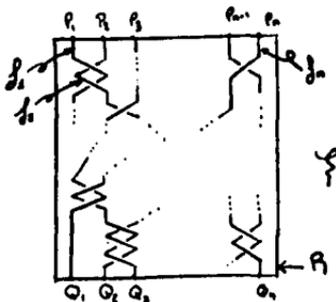


Figura 2.54

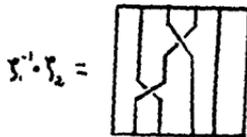
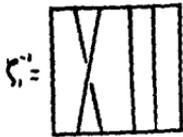
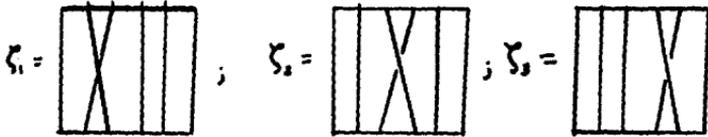
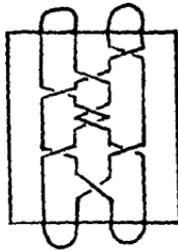


Figura 2.55:



Dada una  $m$ -trenza  $\xi_m$ , podemos "cerrar" a  $\xi_m$  para crear un enlace. La manera de "cerrar" que nos interesa es pegandole  $2m$  arcos simples:

$$(P_{2i+1} P_{2i+2}) \forall 0 \leq i \leq m-1$$

y

$$(Q_{2i+1} Q_{2i+2}) \forall 0 \leq i \leq m-1$$

como lo muestra la figura 2.5. El enlace resultante es un  $2m$ -plat.

Se probará en la siguiente sección que:

$$\{K/K \text{ es de 2 puentes}\} = \{K/K \text{ es 4-plat}\}.$$

Presenta muchas ventajas estudiar a los nudos de dos puentes como 4-plats.

### 2.5.2 Clasificación de 4-plats:

Para clasificar los 4-plats se dará también un vector representativo o símbolo de Conway del nudo en cuestión. En esta sección utilizaremos las herramientas introducidas de 4-plats, de nudos de 2 puentes y de espacios lente.

**Proposición 6**

$$\begin{array}{ccc}
 K \text{ es 4-plat} & \rightarrow & K \text{ es de 2 puentes} & \rightarrow & K = N(A+B) \\
 & & & & A, B \text{ ovillos racionales} \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & K \text{ es un 4-plat con} & & \\
 & & \text{una hebra desanudada} & & 
 \end{array}$$

**DEMOSTRACIÓN:**

$$\{K \text{ es 4-plat} \Rightarrow K \text{ es de dos puentes}\}$$

Dem:

$$\text{P.D. } \{K/K \text{ es 4-plat}\} \subseteq \{K/K \text{ es de 2 puentes}\}.$$

□] Por definición  $K$  es de dos puentes si no es el nudo trivial y existe un 2-plano  $E \ni \cdot |E \cap K| = 4$  y en cada semiespacio de  $\mathbb{R}^3$  determinado por  $E$  se encuentran dos arcos simples y desanudados de  $K$  que admiten proyecciones ajenas en  $E$ .

Al método utilizado para ver a un 4-plat  $K$  como nudo de dos puentes le llamaremos *método del plano inclinado*: (ver la figura 2.5<sub>1</sub>)

Sea  $Q$  un plano que contiene al marco de la trenza que genera al 4-plat. Intersectamos a  $Q$  con un plano  $T \neq Q$  que forma un ángulo  $\theta \neq 90^\circ$  con  $Q$  y tal que la arista inferior del marco está en  $T \cap Q$ . Así, en el semiespacio superior de  $\mathbb{R}^3$  determinado por  $T$ , llamado  $T^+$ , quedan toda la trenza y los dos arcos que la cierran por arriba, y en el semiespacio inferior solo los dos arcos que la cierran por abajo. Nos olvidamos por un momento de la existencia del semiespacio inferior a  $T$ , llamado  $T^-$ . Dada la definición de trenza que tenemos podemos dividirla en niveles ortogonales a los arcos de modo que en cada nivel  $i$  queda 1 cruce entre dos de las cuatro hebras. Si contamos las  $i$  de  $T$  hacia  $T^+$  entonces lo que queremos es deshacer los cruces en ese orden. Una vez deshecho el cruce del nivel  $i$  sabemos que en los niveles anteriores no hay ningún cruce y procedemos a deshacer los de  $i + 1$  garantizando que al hacerlo las hebras no se atorán en ningún lado, tienen el camino libre. Empezamos por el cruce más cercano al plano  $T$  y lo jalamos hacia abajo hasta llegar a  $T$ . De allí se extiende el arco sobre  $T$  del lado donde el ángulo entre  $Q$  y  $T$  es mayor a  $90^\circ$ . Del mismo modo se deshacen los demás cruces. A partir del segundo cruce, el arco tendrá que rodear el camino que siguió el primero hasta encontrar un lugar sobre  $T$ . Se logra, después de un número finito de movimientos, pegar parte de la trenza a  $T$  sin que se superpongan las hebras, pues en un  $\mathbb{R}^2$  siempre hay espacio para acomodar un número finito de arcos simples sin que se superpongan, además como de este modo se fueron deshaciendo todos los cruces

Figura 56

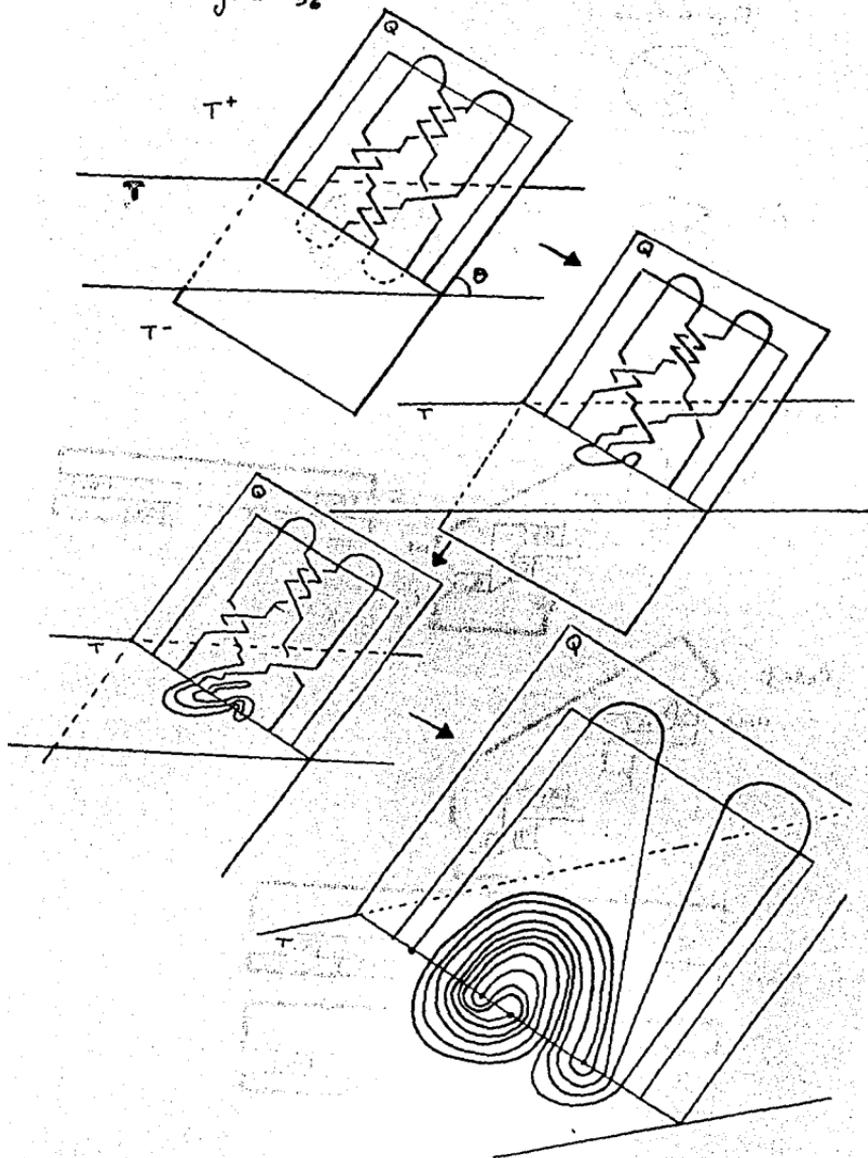


Figura 2.57

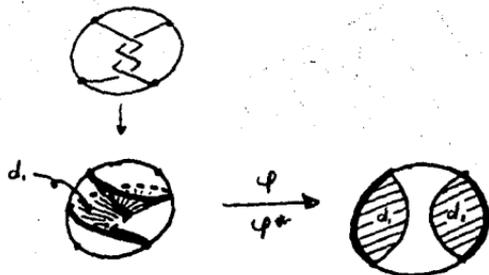
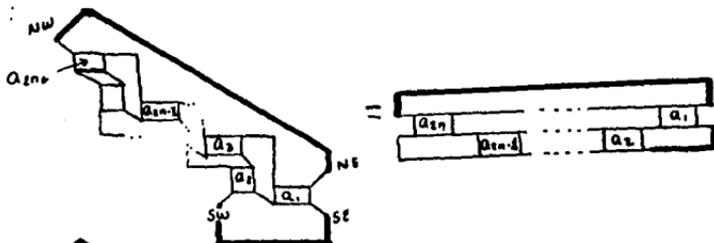
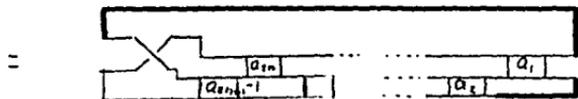
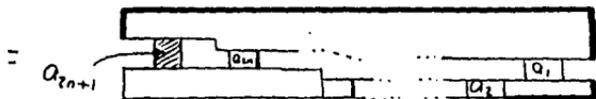
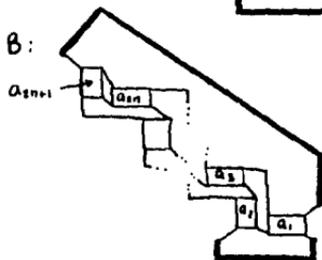


Figura 2.58

Caso A:



Caso B:



de la trenza podemos asegurar que la parte que se quedó en  $Q$  se proyecta ortogonalmente sobre  $T$  sin presentar puntos múltiples.

Afirmamos que lo que queda del 4-plat en  $T^+ \cup T$  consta de 2 arcos. El suponer que es uno contradice la definición de trenza pues el arco único tendría que "bajar" y volver a "subir". El suponer que son más de dos también nos lleva a una contradicción pues la intersección de  $K$  con  $T \cap Q$  tiene solo 4 puntos y si hubiera más arcos habría cabos sueltos en  $T^+$  o en  $T$  o bien habría un arco cerrado sin tocar a  $T \cap Q$  lo que vuelve a contradecir la definición de trenza por la misma razón del principio.

Así, de esta operación resulta un encaje de  $K \cap T^+$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que su proyección ortogonal sobre  $T$  consta de dos arcos ajenos, simples y desanudados. Es claro que sucede lo mismo para  $K \cap T^-$ , y, por lo tanto  $K$  es nudo de dos puentes.

- [  $K$  es de 2 puentes  $\Rightarrow K = N(A + B)$ ,  $A$  y  $B$  ovillos racionales ]

Dem: Recordemos que  $K$  es de 2 puentes si existe un plano  $P$ .  $\exists \cdot |P \cap K| = 4$  y que en cada semiespacio determinado por  $P$  quedan dos arcos que admiten proyecciones ortogonales, simples y disjuntas sobre  $P$ . Considero  $S^2 = P \cup \{\infty\}$ ,  $S^2$  divide a  $S^3$  en dos bolas, cada una con dos arcos cuyos extremos están en la frontera de la bola y el resto en el interior. Es decir que tenemos dos ovillos  $A$  y  $B$ , quisieramos probar que son racionales. Pero por definición, dado cualquiera de los ovillos, como los arcos correspondientes admitían proyecciones ortogonales simples y disjuntas sobre  $P$  entonces esto equivale a decir que las hebras del ovillo se pueden pegar a la frontera de la bola sin que se crucen. Hay entonces dos discos  $d_1$  y  $d_2$  que unen a cada uno de los arcos del ovillo con un arco en la frontera y así,  $d_1$  y  $d_2$  determinan un par de arcos en  $S^2$ . Existe un homeomorfismo  $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$  que endereza los arcos como se ve en la figura 2.57. Queremos extender  $\varphi$  a un  $\varphi^*: D^3 \rightarrow D^3$ . Empezamos por mandar

a los discos  $d_1$  y  $d_2$  en dos discos derechos como en la figura, esto me determina que los arcos interiores iniciales van a dar a otros arcos pero que esta vez estan derechos. Ya tenemos entonces definida a  $\varphi$  en la esfera y en  $d_1$  y  $d_2$ , para lo que falta observemos que si por  $V(\partial D^3 \cup \{\text{discos chuecos}\})$  nos referimos a una vecindad regular abierta, entonces  $D^3 - V(\partial D^3 \cup \{\text{discos chuecos}\})$  es una bola sólida y entonces puedo ahora extender a  $\varphi$  enviando a esta bola en la bola que resulta de tomar  $D^3 - V(\partial D^3 \cup \{\text{discos derechos}\})$ . Obtengo así un homeomorfismo  $H_A : (D, t_A) \rightarrow (D, t_0)$ , con  $(D, t_0) = (\infty)$  y por lo tanto el ovrillo  $A$  es racional. Análogamente  $B$  es un ovrillo racional y queda así demostrada la proposición.

$$K = N(A + B), A \text{ y } B \text{ ovrillos racionales}$$

$$\Rightarrow K \text{ se puede ver como 4-plat con una hebra desanudada.}$$

Dem: Sean  $A$  y  $B$  dos ovrillos racionales. Sabemos que  $N(A + B) \subset S^3$ , puedo entonces ver a  $S^3$  como la unión de dos bolas

$$S^3 = B_1 \cup B_2, \partial \cdot A = (B_1, t_A), B = (B_2, t_B).$$

Por convención decimos que  $A$  está "adentro" y  $B$  "afuera".

$B$  racional  $\Rightarrow \exists H_B : (B_2, t_B) \rightarrow (B_2, t_0)$ . Al aplicar este homeomorfismo se enderezan los arcos  $t_B$  y se mueve la frontera  $\partial B_2$ . Considero al homeomorfismo  $h = H_B / \partial B_2 : S^2 \rightarrow S^2$  y lo extiendo a  $B_1$ , sea  $h' : B_1 \rightarrow B_1$  el homeomorfismo resultante. Claramente como  $A$  es racional, entonces  $A' = h'(A)$  es un ovrillo racional así que existe un homeomorfismo  $H_{A'} : (B_1, t_0) \rightarrow (B_1, t_{A'})$  que lo define. De la clasificación de ovrillos racionales sabemos que  $(H_{A'}) / \partial$  es equivalente a una composición de dos tipos de torceduras muy específicas en la esfera que llamamos "torceduras de Dehn":  $(h_{A'}) = (h_2^{a_2}) \circ (h_1^{a_1}) \circ \dots \circ (h_1^{a_1})$ , donde todas las  $a_i$  son positivas,  $i, j = 1, 2 \forall j$ . La Imágen, bajo esta composición, del ovrillo  $(D, t_0)$  es el ovrillo  $A'_0$  equivalente a  $A'$  que es como se muestra en la figura 2.5.

y que define de manera canónica a  $A'$ .

Se ve en la figura que al hacer la construcción del numerador sobre un ovillo de éste tipo el nudo obtenido es un 4-plat con una hebra desanudada. y con esto queda demostrada esta implicación.

[ $K$  es 4-plat con una hebra desanudada  $\Rightarrow K$  es 4-plat]

Esta última afirmación es inmediata.  $\square$

Observemos que en particular queda demostrado que todo nudo de dos puentes es un 4-plat, y vice-versa.

Vayamos ahora hacia la clasificación de los nudos de 2 puentes. Sea  $K$  un nudo de dos puentes. Entonces  $S^3$  se puede ver como la unión de dos 3-bolas  $B_1$  y  $B_2$  pegadas a lo largo de su frontera y tales que el conjunto  $t_i = K \cap B_i$  consiste, para cada  $i$ , de dos arcos propiamente encajados en  $B_i$ ; desanudados y no enlazados entre sí. Ahora, la doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada a lo largo de  $K$  es claramente la unión de las dobles cubiertas de las  $B_i$  ramificadas en  $t_i$ . Pero la doble cubierta cíclica de una 3-bola ramificada a lo largo de dos arcos triviales es un toro sólido. De allí que:

**Proposición 7** *La doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada a lo largo de un nudo de dos puentes, es un espacio lente.*

Pero lo que aún no ha quedado claro es de que modo se lleva a cabo el pegado de los toros para poder así determinar con exactitud los espacios lente resultantes.

Consideremos una bola  $B$  y sea  $t$  el conjunto de dos arcos en  $B$  desanudados y no enlazados entre sí y de modo que los extremos de los arcos están en la frontera de la bola y el resto está en el interior. Tomemos dos copias  $(B_i, t_i)$  de  $(B, t)$ . Si pegamos  $B_2$  a  $B_1$  con  $Id: \partial B_2 \rightarrow \partial B_1$  obtenemos todo  $S^3$  y la unión de  $t_1$  y  $t_2$  es el enlace trivial de dos componentes (ver la figura 2.5<sub>2</sub>). Ahora, la doble cubierta de  $B_i$  ramificada a lo largo de  $t_i$  es un toro sólido  $T_i$ . En éste caso particular, los toros sólidos  $T_1$  y  $T_2$  están pegados por la identidad en sus

fronteras de modo que la unión es  $S^2 \times S^1$ . Concluimos entonces que la doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada a lo largo del enlace trivial es  $S^2 \times S^1$ .

Ahora veamos lo que pasa en un caso en que las bolas no se pegan con la identidad. Sea  $h_1 : \partial B \rightarrow \partial B$  un homeomorfismo que es la identidad fuera del disco  $D$  mostrado en la figura 2.5.10, y que dentro de éste hace girar las cosas de modo que dos de los puntos de ramificación se ven intercambiados con un giro que va con las manecillas del reloj. La doble cubierta de un disco ramificada a lo largo de dos puntos es un anillo y se ve en la figura 2.5.10 que el homeomorfismo  $h_1/D : D \rightarrow D$  se levanta a un homeomorfismo  $(h_1/D)^*$  de giros en los anillos. De este modo el homeomorfismo inicial  $h_1$  se levanta a un homeomorfismo  $h_1^* : \partial T \rightarrow \partial T$  que manda al meridiano en la curva  $(1, 1)$  tal y como lo muestra la figura. Si vemos ahora a  $h_1$  como el homeomorfismo de pegado de  $B_1$  y  $B_2$  entonces  $B_1 \cup_{h_1} B_2 = S^3$  y el conjunto de ramificación  $t_1 \cup_{h_1} t_2$  es el nudo trivial. Y arriba tenemos a la doble cubierta de  $S^3$  expresada como la unión de dos toros sólidos pegados a lo largo de su frontera por un giro de Dehn longitudinal cuya matriz asociada es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . De allí que la doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada a lo largo del nudo trivial es  $L(1, 1) \cong S^3$ .

Si ahora aplicamos el homeomorfismo  $h_1$  varias veces, digamos  $p$  veces, entonces siguiendo el mismo procedimiento que antes llegamos a que la doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada a lo largo del nudo  $K$ , que es como se muestra en la figura 2.5.11, es el espacio lente  $L(p, 1)$  y en la cubierta los toros  $T_1$  y  $T_2$  se pegan por un homeomorfismo de sus fronteras cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

De manera análoga un homeomorfismo  $h_2$  de la frontera de la 3-bola que es la identidad fuera de un disco  $D_0$  como lo muestra la figura 2.5.12 y que dentro de éste hace girar a los dos puntos de ramificación que contiene pero ésta vez en sentido contrario a las manecillas del reloj, se levanta a un giro de Dehn

Figura 2.5<sub>9</sub>

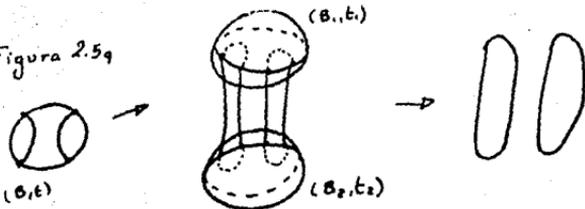
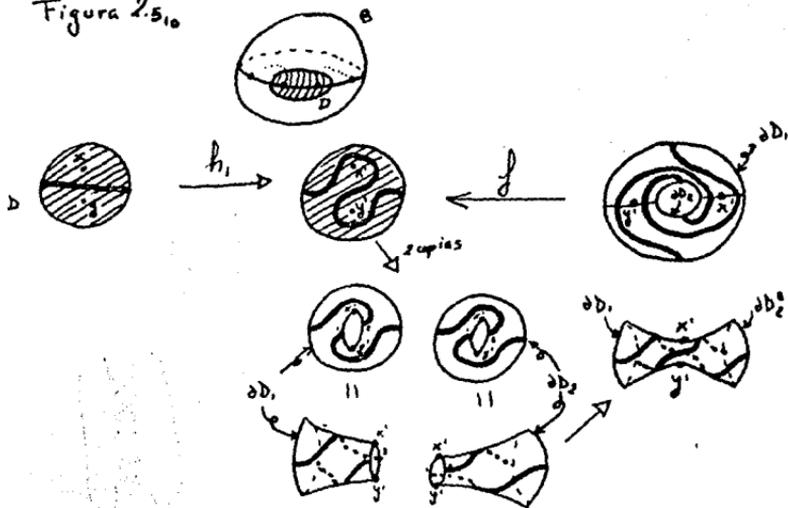


Figura 2.5<sub>10</sub>



en suma:

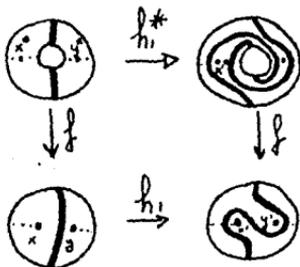
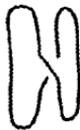
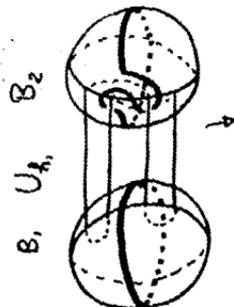
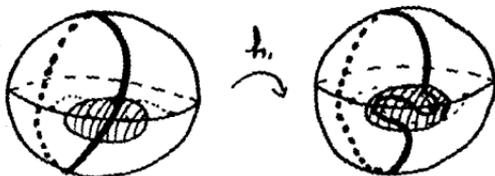
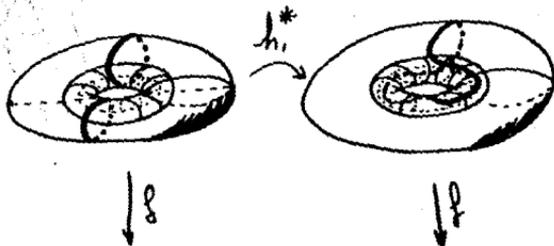


Figura 2.5.10

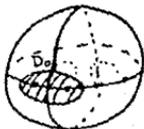


$$B_1 \cup_{h_1} B_2 =$$

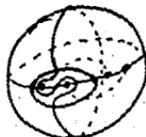


Figura 2.5.11

Figura 2.5.12



$h_2$



meridional representado por la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  o alguna potencia de ella.

Por otra parte, ya se probó que todo nudo de 2 puentes es también un 4-plat, y de la definición de 4-plats sabemos que éstos son generados por alguna 4-trenza. La equivalencia, inducida por la proposición 6, entre 4-plats y 4-plats con una hebra desanudada corresponde a la afirmación siguiente:

**AFIRMACIÓN:** Cualquier 4-plat en  $S^3$  se puede escribir en términos de los generadores  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  del grupo de trenzas  $B_4$ .

Resulta claro que si vemos a  $S^3$  como la unión de dos bolas pegadas a lo largo de su frontera entonces los generadores del grupo de trenza al crear al 4-plat corresponden precisamente a los homeomorfismos  $h_1$  y  $h_2^{-1}$  que ya describimos y se levantan a giros de Dehn en  $(S^1 \times S^1)$ . Entonces todo 4-plat con una hebra desanudada, y por lo tanto todo nudo de 2 puentes, puede ser construido con  $h_2, h_1$  y  $h_2^{-1}, h_1^{-1}$ . Es decir que puedo construir a cualquiera de éstos nudos por medio de la composición de alguna sucesión finita de los homeomorfismos antes mencionados. Esta sucesión queda determinada por el número de cruces entre cada par de hebras. Al 4-plat con una hebra desanudada le asocio un vector con entradas enteras  $(c_1, c_2, \dots, c_{2n+1})$  donde los  $c_i$  son los enteros que indican el número de cruces tal y como lo muestra la figura 2.5.13. En esta figura solo aparecen cruces positivos afin de mostrar cual es la convención. Cabe observar que al enlace trivial le corresponde el (0) y al nudo trivial puede ser tanto el (1) como el (-1). Entonces dado el nudo  $K$  el homeomorfismo que lo genera es  $h = h_1^{c_{2n+1}} \circ h_2^{c_{2n}} \circ \dots \circ h_2^{c_2} \circ h_1^{c_1}$ , y la doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada a lo largo de  $K$  es el espacio lente que resulta de pegar dos toros sólidos con un homeomorfismo cuya matriz asociada es

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{c_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{c_2} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{c_{2n+1}} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2n+1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$p$  y  $q$  quedan determinados por la fracción continuada

$$\frac{p}{q} = c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \frac{1}{\dots}}}$$

y la cubierta es entonces el espacio lente  $L(p, q)$ . Observemos que el enlace trivial admite un solo vector posible y por lo tanto la cubierta queda determinada sin ambigüedad, en el caso del nudo trivial no hay contradicción tampoco pues las dos elecciones posibles de vector llevan al mismo espacio lente puesto que vimos ya que  $L(1, 1) = L(1, -1)$ . Sin embargo para otro tipo de nudos no está claro que dos representaciones distintas del mismo nudo nos lleven por este método al mismo espacio lente.

En 1970 Conway probó que queda con este método establecida una correspondencia 1 a 1 entre los nudos de dos puentes y los espacios lente salvo homeomorfismo. Para probarlo veamos de nuevo a  $K$  como nudo de dos puentes. Le damos a  $K$  una orientación. Cerramos al plano dado por la definición para formar una esfera  $S^2$ .  $\exists \cdot K \cap S^2 = \{A, B, C, D\}$  y quedan dos arcos en cada una de las bolas bordeadas por  $S^2$ , sean  $w_1 = AB$ ,  $w_2 = CD$  los de adentro y  $v_1, v_2$  los de afuera, y de hecho, gracias a la definición de nudos de dos puentes, podemos considerar a estos arcos de modo que se pueden adherir a la frontera  $S^2$  sin que se intersecten dos arcos de adentro ni dos arcos de afuera. Por el teorema de Schönflies<sup>4</sup>  $w_1$  y  $w_2$  se pueden estirar. Quisieramos acomodar a  $v_1$  y  $v_2$  de alguna forma especial, canónica.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $v_1$  interseca primero a  $w_2$  pues todo primer punto sobre  $w_1$  se puede remover con una isotopía ambiental de la esfera. Podemos además lograr que cada arco  $v_i$  interseque a los  $w_j$  de manera alternante, y de manera análoga que cada  $w_j$  interseque a los  $v_i$  de manera alternante. Sea  $\alpha - 1$  el número de puntos dobles sobre  $w_1$ ; por construcción hay el mismo número de puntos dobles sobre  $w_2$ . Así, el número de puntos dobles en un diagrama reducido es par. Le asociamos un número a

<sup>4</sup>Teorema de Schönflies: Si  $J$  es una curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^2$ , la cerradura de una de las componentes de  $\mathbb{R}^2 - J$  es homeomorfa al disco unitario  $D^2$ .

cada punto doble de cada  $w_i$  contando en sentido inverso a la orientación de  $w_i$ . El resultado de esta construcción se puede ver en la figura 2.5<sub>14</sub>. Observemos que si  $K$  es nudo y si  $v_1$  parte de  $B$ , entonces el otro extremo de  $v_1$  debe ser  $C$  o  $D$  en cuyo caso se marcan un número par de puntos dobles en cada  $w_i$ ; pues el arco  $v_1$  da varias vueltas completas, y lo mismo pasa con el  $v_2$  correspondiente, ésto implica que  $\alpha - 1 = 2n$  y por lo tanto  $\alpha$  es impar. Análogamente si  $K$  es enlace entonces  $v_1 = AB$ ,  $v_2 = CD$  y  $\alpha$  es par.

Pasando a la doble cubierta cíclica de  $S^2$  ramificada en  $\{A, B, C, D\}$  que sabemos es un toro bidimensional  $T^2$ , observamos que  $w_i$  se levanta a  $\{w_i^*, \rho(w_i^*)\}$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,  $w_i^* - \rho(w_i^*) = w_i^*(1 - \rho)$  es una curva cerrada simple en  $T^2$ , además,  $w_1^*(1 - \rho)$  y  $w_2^*(1 - \rho)$  son isotópicas en  $T^2$ .

Del mismo modo  $v_1^*(1 - \rho)$  y  $v_2^*(1 - \rho)$  son dos curvas cerradas simples en el toro. Cada  $v_j^*(1 - \rho)$  intersecciona a las  $w_i^*(1 - \rho)$  de manera alternante y para ello debe ir dando vueltas al rededor del hoyo del toro, entonces se tiene que:

$$|\{v_j^*(1 - \rho)\} \cap \{w_i^*(1 - \rho)\}| = \alpha \dots \dots (1)$$

Por otra parte en la figura 2.5<sub>15</sub>, se ve claramente que si consideramos una pequeña vecindad tubular del arco  $w_i$  en  $S^2$  y a la frontera de esta vecindad le llamamos  $\partial_\epsilon(w_i)$  y le damos la orientación inducida por la de la esfera, entonces esta curva se levanta a dos curvas isotópicas a  $w_i^*(1 - \rho)$  en  $T^2$ . De manera similar, dado el arco  $(BD) \subset S^2$  resulta que  $p^{-1}(\partial_\epsilon((BD)))$  consiste de dos curvas isotópicas  $l_0^*$  y  $l_1^*$ . Es claro que podemos tomar a  $m_0^* = w_1^*(1 - \rho)$  y a  $l_0^*$  como generadores canónicos de  $H_1(T^2)$ . A  $m_0^*$  lo llamo meridiano y a  $l_0^*$  longitud.

Ahora, volviendo al problema inicial, supongamos  $\alpha > 1$  (excluímos aquí al nudo trivial y al enlace trivial de dos componentes). Por lo anterior:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} \cdot \exists v_i^*(1 - \rho) = bm_0^* + al_0^*$$

pero, por (1):

$$a = \alpha.$$

Y  $\beta = b \succ 0$  si en el primer punto doble de  $v_1$  el arco  $w_2$  cruza de izquierda derecha en el punto doble con número  $|\beta|$ , de no pasar ésto se tiene  $\beta \prec 0$ . Por construcción  $|\beta| \prec \alpha$  y  $(\alpha, \beta) = 1$ . Se dice que el 4-plat  $K$  tiene un diagrama reducido con números  $\alpha, \beta$ . Se denota  $K = b(\alpha, \beta)$ . El número de componentes de  $b(\alpha, \beta)$  es  $\mu \equiv \alpha \pmod{2}$ ,  $1 \leq \mu \leq 2$ .

**Proposición 8** Para cada par  $\alpha, \beta$  de enteros tales que satisfacen:  $\alpha \succ 0$ ,  $-\alpha \prec \beta \prec \alpha$ ,  $(\alpha, \beta) = 1$ ,  $\beta$  impar, existe un nudo o enlace con dos puentes  $K = b(\alpha, \beta)$  con un diagrama reducido con números  $\alpha, \beta$ .

De éste modo la doble cubierta de  $S^3$  ramificada en  $K$  es el espacio resultante de pegar dos toros sólidos por su frontera de forma que el meridiano  $m_0^+$  de uno se pega con la curva  $\gamma = \beta m_0^+ + \alpha l_0^+$  a quien denotaremos  $(\alpha, \beta)$  o simplemente  $\frac{\beta}{\alpha}$ . El espacio lente resultante es  $L(\alpha, \beta)$  y es cubierta del 4-plat  $b(\alpha, \beta)$ .

Sabemos que dados dos nudos equivalentes  $K_1$  y  $K_2$ , las dobles cubiertas cíclicas de  $S^3$  ramificadas en cada uno de los nudos son espacios homeomorfos. Así, si  $K_1$  y  $K_2$  son 4-plats podemos hacer la siguiente afirmación:

**Afirmación:**

$$b(\alpha_1, \beta_1) \sim b(\alpha_2, \beta_2) \Rightarrow L(\alpha_1, \beta_1) \cong L(\alpha_2, \beta_2).$$

Recordemos el teorema 6:

$$L(p, q) \cong L(p^*, q^*) \iff p = p^*y \pm q^* \equiv q^{\pm 1} \pmod{p}.$$

De aquí que:

$$b(\alpha_1, \beta_1) \sim b(\alpha_2, \beta_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 \\ y, \pm \beta_2 \equiv (\beta_1)^{\pm 1} \pmod{\alpha} \end{array} \right\}$$

Nosotros lo que queremos es que también se dé el inverso, es decir que espacios lente homeomorfos sean cubierta de nudos equivalentes.

Observemos que la construcción "del caracol" que hicimos no fue simétrica con respecto a las bolas  $B_1$  y  $B_2$ . Si se cambia el papel de las bolas entonces

$(m_0^*, l_0^*)$  y  $(m_1^*, l_1^*)$  deben intercambiar papeles. Entonces ahora  $(m_1^*, l_1^*)$  es la base canónica, y recordemos que  $m_1^*$  está definido por:

$$m_1^* = v_1^*(1 - \rho) = \beta m_0^* + \alpha l_0^*$$

además,

$$l_1^* = \alpha' m_0^* + \beta' l_0^*$$

donde

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 1.$$

Se sigue que

$$m_0^* = \beta' m_1^* - \alpha l_1^*.$$

Como  $B_1$  y  $B_2$  inducen en su frontera común orientaciones opuestas debemos escoger a  $(m_1^*, -l_1^*)$  como curvas canónicas en  $T$ . Con todo ésto llegamos a que

$$\beta\beta' - \alpha\alpha' = 1, \text{ i.e. } \beta\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha},$$

$$\Rightarrow b(\alpha, \beta) = b(\alpha, \beta').$$

**Teorema 9**  $b(\alpha, \beta)$  y  $b(\alpha, \beta')$  son equivalentes como nudos o enlaces no orientados si y solo si

$$\alpha = \alpha', \beta^{\pm 1} \equiv \beta' \pmod{\alpha}.$$

Por lo que vimos al principio, dado un nudo de 2 puentes probamos que su cubierta era el espacio lente  $L(p, q)$  donde  $p$  y  $q$  salen de un vector obtenido al poner a  $K$ , como 4-plat con una hebra desanudada. Entonces todo nudo  $b(\alpha, \beta)$  tiene un vector asociado  $(c_1, c_2, \dots, c_{2n+1})$ , donde a  $(c_1, c_2, \dots, c_{2n+1})$  le corresponde el racional  $\frac{p}{q}$ . Entonces por el teorema de clasificación necesitamos  $p = \alpha$  y  $q \equiv \beta^{\pm 1} \pmod{\alpha}$ . Dado que por construcción  $0 < \beta < \alpha$  y  $0 < q < p$  entonces lo que se requiere es  $q = \beta$  o  $q = \alpha - \beta$ . El primer caso nos dice que

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{q}{p} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

y en el segundo resulta ser que:

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{c_{2n+1} + \frac{1}{c_{2n} + \frac{1}{\dots}}}$$

Y como el desarrollo en fracciones continuadas de un número racional es único y los únicos casos posibles son los dos anteriores entonces:

**Proposición** *Dos sucesiones  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , y  $(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$  definen el mismo nudo o enlace si y solo si  $n = n'$  y  $c_i = c'_i$  o  $c_i = c'_{n-i} \forall 1 \leq i \leq n$ .*

Con ésto damos por terminada la clasificación de los 4-plats. Veremos a continuación ciertos resultados generales que relacionan a los ovillos racionales con los 4-plats y que nos seran de mucha utilidad en el desarrollo de nuestro problema.

## 2.6 Resultados generales.

**Lema 3** *Dados dos ovillos racionales  $A_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  y  $A_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$  entonces  $N(A_1 + A_2)$  es un 4-plat  $K = b(\alpha, \beta)$  donde  $\alpha = |\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1|$  y  $\beta$  queda determinado como sigue:*

(i)  $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 1$ .

(ii)  $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 1$ .

(iii)  $\alpha > 1$

$\Rightarrow \beta$  queda determinado de manera única por:  $0 < \beta < \alpha$  y

$\beta \equiv \sigma(\alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2) \pmod{\alpha}$  donde  $\sigma$  es el signo de  $(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$  y  $\alpha'_2, \beta'_2$  son las entradas en la segunda columna de cualquier matriz representativa para el ovillo  $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ .

### DEMOSTRACIÓN:

Probemos que efectivamente el 4-plat es de la forma propuesta.

Sean  $(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  y  $(b_1, b_2, \dots, b_{2r})$  dos vectores (de longitud par) representativos para los ovillos  $A_1$  y  $A_2$ . Estos vectores se

Figura 2.513 :

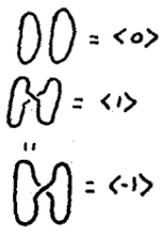
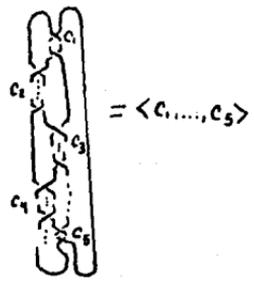
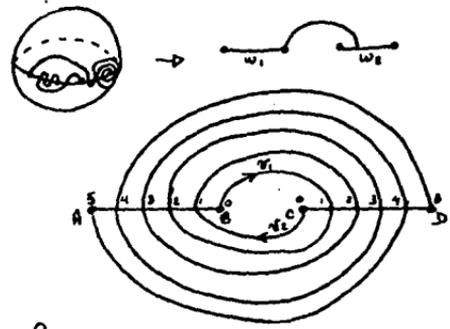


Figura 2.514



$\cdot 5 = d - 1$   
 $\Rightarrow d = 6$   
 $\cdot \beta = 1$

Figura 2.515

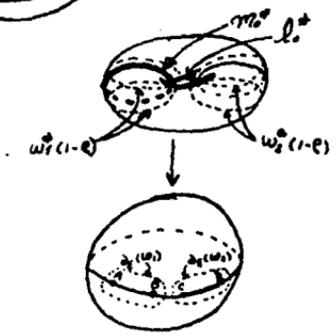
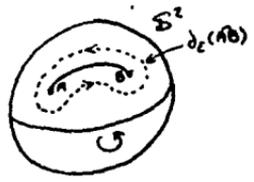


Figura 2.61

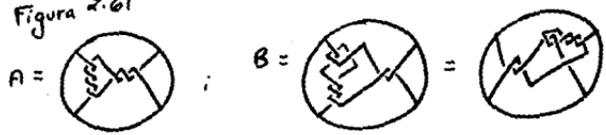
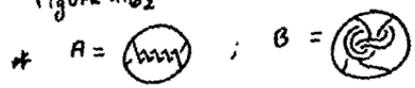


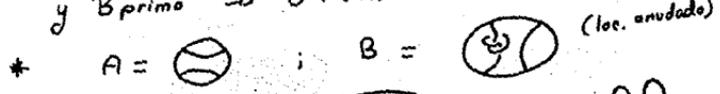
Figura 2.62



$N(B) =$    $=$   trivial

$\Rightarrow N((B+(-A))+A) = K$  trivial

y  $B$  primo  $\Rightarrow B+(-A)$  primo



$N(A+B) =$    $=$    $=$    
 4 plet  
 (2 puntos)

pueden obtener a partir del símbolo de Conway relajando la condición que dice que el valor absoluto de la primera entrada debe ser mayor o igual que 2. Observando la figura 2.6<sub>1</sub> podemos afirmar que  $K = N(A_1 + A_2)$  puede ser representado por alguno de los siguientes vectores:

$$(b_1, \dots, b_{2r-1}, b_{2r} + a_{2m}, a_{2m-1}, \dots, a_1)$$

ó

$$(a_1, \dots, a_{2m-1}, a_{2m} + b_{2r}, b_{2r-1}, \dots, b_1)$$

Observemos que las  $a_i$  y las  $b_i$  pueden ser de signos opuestos y entonces  $b_{2r} + a_{2m}$  puede ser cero.

Por otra parte de la clasificación de 4-plats sabemos que

$$(b(\alpha, \beta))^* = L(\alpha, \beta) = T_1 \cup_h T_2$$

con  $T_1, T_2$  toros sólidos y  $h^* : \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$  el homeomorfismo que es la composición de giros de Dehn dada por el vector canónico que representa a  $K$ . La representación matricial que se le asocia a  $h^*$  determina a  $\alpha$  y  $\beta$  de la siguiente manera:

$$(1) \dots \begin{pmatrix} \beta & \alpha' \\ \alpha & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & b_{2r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

y tenemos

$$\beta\beta' - \alpha\alpha' = 1$$

Observemos además que si para  $(b_1, b_2, \dots, b_{2r})$  se tiene:

$$\begin{pmatrix} \beta_2 & \alpha_2' \\ \alpha_2 & \beta_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{2r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \beta'_2 & \alpha'_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & b_{2r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y así el producto (1) resulta ser:

$$(1') \cdots \begin{pmatrix} \beta & \alpha' \\ \alpha & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'_2 & \alpha'_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha'_1 \\ \alpha_1 & \beta'_1 \end{pmatrix}$$

de donde resulta inmediato afirmar que:

$$\alpha = \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2$$

y

$$\beta = \alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2$$

Pero estos valores de  $\alpha$  y  $\beta$  no están normalizados pues  $\alpha$  puede ser negativo, o,  $\alpha < \beta$ . Nosotros queremos tener soluciones  $\alpha$  y  $\beta$  únicas tales que  $0 < \beta < \alpha$ .

Como  $L(\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta + k\alpha) \forall k \in \mathbb{Z}$  entonces si

$$\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 > 1$$

las soluciones son  $\{(\alpha, \beta) / \alpha = \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 \text{ y } \beta \equiv (\alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2) \pmod{\alpha}\}$   
y si  $\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 < -1$  entonces como

$$L(\alpha, \beta) = L(-\alpha, -\beta + k\alpha) \forall k \in \mathbb{Z}$$

las soluciones son  $\{(\alpha, \beta) / \alpha = -(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) \text{ y } \beta \equiv -(\alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2) \pmod{\alpha}\}$ .

Y esto no es otra cosa que afirmar que si  $\alpha = |(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)| > 1$  entonces  $\beta \equiv \sigma(\alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2) \pmod{\alpha}$  donde  $\sigma$  es el signo de la expresión  $(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)$ . Haciendo esta consideración entonces dado  $\alpha > 1$  y  $\sigma$  podemos determinar a  $\beta$  de manera única.

Figura 2.63

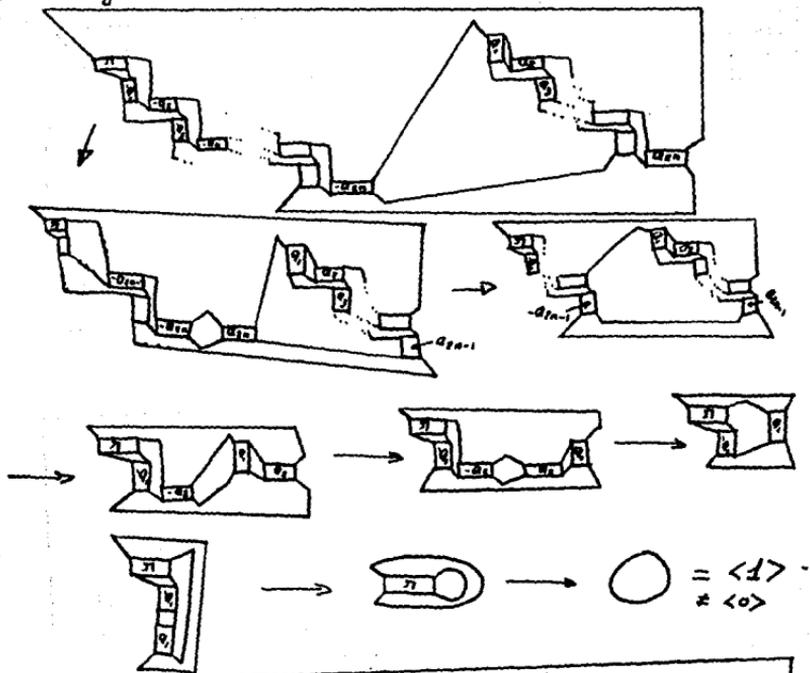
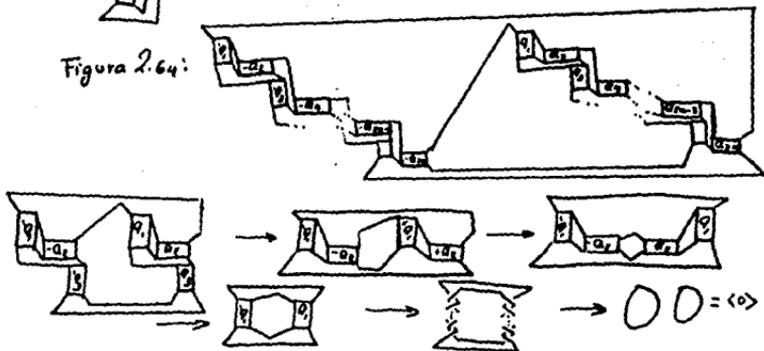
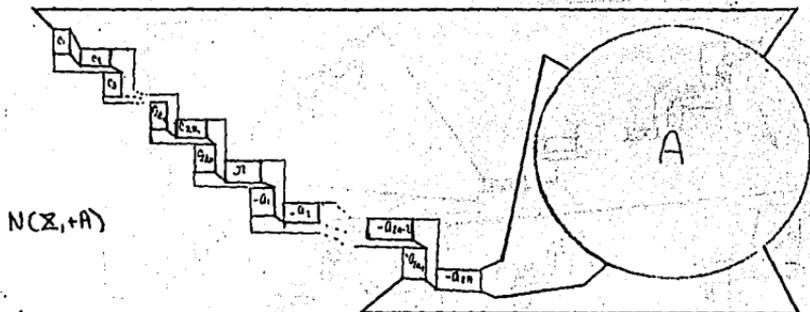


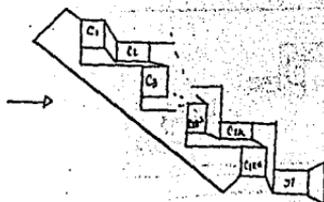
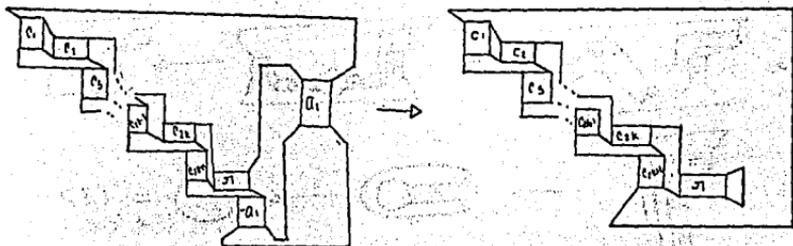
Figura 2.64:



$$K = \langle c_1, \dots, c_{2k+1} \rangle \neq \langle 0 \rangle, \quad H = \langle a_1, \dots, a_{2n} \rangle, \quad Z = \langle c_1, \dots, c_{2k+1}, \gamma_1, -a_1, \dots, -a_{2n} \rangle \quad (4)$$



En el mismo proceso visto anteriormente hacemos desaparecer las  $-a_k$  con las  $c_k$  hasta llegar a:



$$= D(c_1, \dots, c_{2k+1}, \gamma_1) = \langle c_1, \dots, c_{2k+1} \rangle = K.$$

$\therefore X_1$  es solución a la ecuación  $N(X+A) = \langle c_1, \dots, c_{2k+1} \rangle$

Análogamente  $X_2$  es sol. a  $N(X+A) = \langle c_{2k+1}, \dots, c_1 \rangle$

Por otro lado como  $L(\pm 1, \beta) = S^3$  entonces si  $|\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2| = 1$  definimos  $\alpha = 1, \beta = 1$ .

Si  $\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 = 0$  entonces estamos tratando con el enlace trivial de dos componentes, cuya doble cubierta cíclica ramificada  $L(0, 1) = S^1 \times S^2$ . En este caso definimos  $\alpha = 0, \beta = 1$ .

Observemos que las condiciones (i),(ii),(iii) implican que dado  $\alpha$ , entonces  $\beta$  queda determinado de manera única.  $\square$

Sean  $A$  y  $B$  ovillos racionales, sabemos que el numerador de la suma de estos dos ovillos racionales es un 4-plat  $K = N(B + A)$ . Surje entonces la siguiente pregunta:

Si  $A$  es racional y  $K$  es 4-plat:

¿Qué ovillos  $X$  satisfacen la ecuación  $K = N(X + A)$ ?

¿De ser solución, es  $X$  racional?

La respuesta a la última pregunta es negativa en general y para eso veamos el ejemplo que se muestra en la figura 2.6<sub>2</sub> en que  $A$  es racional,  $B$  es primo y  $K$  es el nudo trivial. A los nudos que, como  $A$ , consisten de un renglón horizontal de cruces se les llama *nudos enteros*. Si  $A$  es entero, la ecuación  $K_0 = N(X + A)$  donde  $K_0$  es el nudo trivial tiene una infinidad de soluciones primas de la forma  $(B + (-A))$  donde  $B$  es un ovillo primo tal que  $N(B) = K_0$ .

Sin embargo en caso de existir soluciones racionales a la ecuación de ovillos  $K = N(X + A)$ , sí hay forma de conocerlas y ésta nos la dá el siguiente teorema.

**Teorema 10** Sean

$$A = \frac{g}{c} = (a_1, a_2, \dots, a_{2m}) \text{ un ovillo racional, y,}$$

$$K = (c_1, c_2, \dots, c_{2k+1}) \neq (0) \text{ un 4-plat}$$

Entonces la ecuación  $K = N(X + A)$  tiene como soluciones racionales para  $X$

a:

$$X_1 = (c_1, c_2, \dots, c_{2k+1}, r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$$

$$X_2 = (c_{2k+1}, c_{2k}, \dots, c_1, r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$$

para toda  $r \in \mathbb{Z}$ , y éstas son las únicas.

Si  $K = \langle 0 \rangle$  la única solución es  $X = (-a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$ .

#### DEMOSTRACIÓN:

La prueba está dividida en dos partes:

1) Ver que efectivamente las  $X_i$  propuestas son solución para toda  $r \in \mathbb{Z}$ , y  $X$  para  $K = \langle 0 \rangle$ .

2) Probar que el conjunto de soluciones es completo.

1) Esta parte está totalmente basada en las figuras  $2_{s_3}, 2_{s_4}, 2_{s_5}$ . En  $2_{s_3}$  se considera el caso en que  $K = \langle 0 \rangle$  y  $A = \frac{a}{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{2m})$  y se prueba que  $X = (r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$  no es solución si  $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$  pues en esos casos  $N(X+A) = \langle 1 \rangle$  = nudo trivial. En  $2_{s_4}$  se muestra que  $X = (-a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$  es solución a

$$N(X+A) = \langle 0 \rangle.$$

Finalmente en  $2_{s_5}$  se prueba que si  $K = \langle c_1, c_2, \dots, c_{2k+1} \rangle \neq \langle 0 \rangle$  entonces  $X_1$  es solución a la ecuación  $N(X+A) = \langle c_1, c_2, \dots, c_{2k+1} \rangle$ , y análogamente  $X_2$  es solución a  $N(X+A) = \langle c_{2k+1}, c_{2k}, \dots, c_1 \rangle$ .

2) Recordemos que si  $K = \langle c_1, c_2, \dots, c_{2k+1} \rangle$  es el símbolo de Conway para el 4-plat  $K$  entonces  $\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  que caracteriza a  $K$  donde  $\frac{p}{q} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_{2k+1}}}}}$  y se denota  $K = b(p, q)$ . Además si  $K = \langle c_1, c_2, \dots, c_{2k+1} \rangle$  entonces  $K \approx K' \Leftrightarrow K' = \langle c_1, c_2, \dots, c_{2k+1} \rangle$  o  $K' = \langle c_{2k+1}, c_{2k}, \dots, c_1 \rangle$ . Además si  $K \neq \langle 0 \rangle$  y  $K \neq \langle 1 \rangle$  entonces  $0 < q < p$  y  $(p, q) = 1$ .

Supongamos  $K \neq \langle 0 \rangle$  y  $K \neq \langle 1 \rangle$ . Dados los símbolos de Conway  $\langle c_1, c_2, \dots, c_{2k+1} \rangle$  y  $\langle c_{2k+1}, c_{2k}, \dots, c_1 \rangle$  posibles para  $K$  obtenemos dos

ecuaciones como de hizo en el lema 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2k+1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q' & p' \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2k+1} & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \dots (\circ)$$

Y se tiene  $qq' - pp' = 1$  es decir  $qq' \equiv 1 \pmod{p}$  es decir

$$q' \equiv q^{-1} \pmod{p}.$$

Observemos que  $\exists! q' \in \{1, 2, \dots, p-1\} \cdot \ni \cdot qq' \equiv 1 \pmod{p}$ .

Por otro lado:

$$K = \langle 1 \rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \langle 0 \rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, para cada  $k$ -plata  $K$  se tiene  $K = b(p, q)$  donde  $\{p, q, q'\}$  son enteros totalmente determinados por el símbolo de Conway de  $K$ .

La doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada en  $b(p, q)$  es el espacio lente  $L(p, q) = T_1 \cup_{\theta} T_2$  donde el homeomorfismo de pegado  $h^*$  está determinado por  $\begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix}$  o por  $\begin{pmatrix} q' & p' \\ p & q \end{pmatrix}$ . Nos interesa saber que forma tendrá cualquier otro pegado entre los toros que nos lleve al mismo espacio lente  $L(p, q)$ . Recordemos que al pegar basta con saber, en las fronteras de los toros, quien es la imagen de un meridiano pues la curva a la que va a dar una longitud no cambia al espacio resultante del pegado. Así, cualquier otro pegado se puede ver como una alteración de alguna de las matrices anteriores, producida por un cambio de coordenadas que preserve la orientación,

de la siguiente forma:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{Z}$$

Geométricamente, si vemos a estas como transformaciones entre  $\delta T_1$  y  $\delta T_2$  resulta que tenemos que  $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  cambia la longitud  $(0, 1)$  en  $(s, 1)$  (ver la figura 2.6<sub>a</sub>) y no mueve el meridiano. Como, para obtener  $L(p, q)$  solo me interesa que  $\begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix}$  manda  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$  entonces el aplicar primero  $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  no cambia a  $L(p, q)$ , y lo mismo si después aplico  $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Por otra parte observemos que:

$$\begin{aligned} - \left[ \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] &= \begin{bmatrix} -1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -r \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y  $\begin{pmatrix} -1 & -r \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  manda  $(1, 0)$  en  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$  en  $(-r, -1)$ . Es decir que manda al meridiano en otro igual pero recorrido en sentido opuesto, y a la longitud en  $(-r, -1)$  de forma que el cambio de coordenadas preserva la orientación como lo podemos constatar en la figura 2.6<sub>b</sub>. Todo ésto da lugar a dos familias de matrices de

pegado, con dos parámetros  $r, s \in \mathbb{Z}$ :

$$\{G_q(r, s) / s, r \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \exists \varepsilon = \pm 1, s, r \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$\{G_q'(r, s) / s, r \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' & p' \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \exists \varepsilon = \pm 1, s, r \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

y éstas son todas las matrices de dos por dos que describen pegados que preservan la orientación dando lugar a un espacio homeomorfo a  $L(p, q)$  o a  $L(p, q')$ .

Volvamos al problema inicial: queremos encontrar un ovrillo racional  $X$ , tal que

$$K = N(X + A) \dots (*)$$

Recordemos que  $A = (a_1, \dots, a_{2m}) \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta & \alpha' \\ \alpha & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}$ .

De (\*) y por el lema 3 resulta que la función de pegado para  $L(p, q)$  está descrita por

$$\begin{pmatrix} \beta' & \alpha' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix}$$

donde  $X = \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix}$ . Observemos además que:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \beta & \alpha' \\ \alpha & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} \beta' & \alpha' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} \beta' & \alpha' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ & = \left[ \begin{pmatrix} 1 & a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right] \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} \beta' & \alpha' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además recordemos (o) de la página 71. Así, para algunas  $r, s \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \cdot G_q(r, s) \\ = & \pm \begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \quad \quad \quad \text{ó} \\ & \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \cdot G_{q'}(r, s) \\ = & \pm \begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' & p' \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde llamamos a la primera ecuación ( $E_1$ ) y a la segunda ( $E_2$ ).

Pero observemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & qs + p' \\ p & ps + q' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} q + pr & s(q + rp) + p' + rq' \\ p & ps + q' \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q + pr & s(q + rp) + p' + rq' \\ p & ps + q' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \beta(q + pr) - \alpha'p & * \\ -\alpha(q + pr) + \beta'p & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix}$$

por lo que para determinar  $(u, v)$ , y por lo tanto  $X$ , no necesitamos conocer a  $s$ . Así, sin pérdida de generalidad tomamos  $s = 0$  y entonces:

$$(E_1) \dots \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p' \\ p & q' \end{pmatrix}$$

$$(E_2) \dots \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \beta' & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' & p' \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$(E_1) \dots \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & -a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2k+1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E_2) \dots \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & -a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2k+1} & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto  $(u, v) \in Z \times Z$  provienen de  $X_1 = (c_1, c_2, \dots, c_{2k+1}, r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$

y  $X_2 = (c_{2k+1}, c_{2k}, \dots, c_1, r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$  con  $r \in Z$ .

Y antes de concluir observemos que:

$$\begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2k+1} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} -u & -v' \\ -v & -u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2k+1} & 1 \end{pmatrix}$$

y ésto dice simplemente que  $-\frac{u}{v}$  se obtiene de las  $X_1$  y  $X_2$  antes enunciadas, es decir que, dado que  $\frac{-u}{-v} = \frac{u}{v}$ , tomando los valores negativos se llega al mismo resultado.

En el caso en que  $K = (0)$ ,  $K$  está representado por la matriz identidad  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y en este caso las ecuaciones  $(E_1)$  y  $(E_2)$  se reducen a una sola:

$$\begin{aligned} (E) \cdots \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} &= \pm \begin{pmatrix} 1 & -a_{2m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \pm \begin{pmatrix} \beta & -\alpha' \\ -\alpha & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (E) \cdots \cdots \cdots \begin{pmatrix} u & v' \\ v & u' \end{pmatrix} &= \pm \begin{pmatrix} \beta & \beta r - \alpha' \\ -\alpha & -\alpha r + \beta' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

así  $\frac{u}{v} = -\frac{\beta}{\alpha}$  y no dependen de  $r$  de modo que podemos tomar  $r = 0$  sin pérdida de generalidad. Entonces la ecuación  $(E)$  viene de  $X = (-a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$  y es la única solución.

Concluimos que las soluciones  $X_1$  y  $X_2$  propuestas son las únicas posibles, y con ésto queda demostrado el teorema.  $\square$

**Observación 12** Podríamos considerar la posibilidad de no separar el caso  $K = (0)$  de los demás. Entonces tendríamos  $c_1 = 0$  y las soluciones propuestas coinciden con  $X = (0, r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$ . Pero

$$(0, r, -a_1, -a_2, \dots, -a_{2m}) \sim (-a_1, -a_2, \dots, -a_{2m}) \forall r \in Z.$$

Por lo tanto  $X = (-a_1, -a_2, \dots, -a_{2m})$  es la única solución.

La observación queda ilustrada en la figura 2.6<sub>a</sub>.

En términos de los números racionales que clasifican a los ovillos, las soluciones racionales para las ecuaciones en el teorema 10 están dadas por las fracciones siguientes:

$$\frac{x}{v} = \frac{\beta(q+pr) - \alpha'p}{-\alpha(q+pr) + \beta'p}$$

y

$$\frac{x}{v} = \frac{\beta(q'+pr) - \alpha'p}{-\alpha(q'+pr) + \beta'p}$$

El teorema anterior afirma entonces que una ecuación de ovillos con una incógnita tiene una infinidad de soluciones racionales siempre y cuando  $K \neq (0)$ . Veremos ahora que es lo que pasa cuando se tiene un sistema de dos ecuaciones con una incógnita.

**Corolario 1** Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos ovillos racionales distintos, y sean  $K_1$  y  $K_2$  dos 4-plats. Hay a lo más dos soluciones racionales al sistema:

$$(i) \dots N(X + A_1) = K_1$$

$$(ii) \dots N(X + A_2) = K_2$$

**DEMOSTRACIÓN:**

Sean  $A_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ ,  $A_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ ,  $K_1 = b(\alpha, \beta)$ ,  $K_2 = b(\alpha', \beta')$ , y sea  $X = \frac{x}{v}$  la incógnita. Por el lema 3 se tiene que:

$$\alpha = |u\alpha_1 + v\beta_1|$$

y

$$\alpha' = |u\alpha_2 + v\beta_2|$$

En el plano  $uv$  cada una de estas ecuaciones se ve representada por dos rectas paralelas. Las rectas resultantes tienen a lo más 4 puntos de intersección que son simétricos por parejas con respecto al origen. Dado que  $\frac{x}{v} = \frac{-x}{-v}$  entonces los puntos de intersección representan a lo más dos ovillos racionales que son soluciones distintas para las ecuaciones del sistema.  $\square$

Puede suceder que un sistema como el anterior no tenga soluciones racionales para  $X$  como lo muestra el ejemplo siguiente:

$$(i) \dots N(X + (0)) = (1)$$

$$(ii) \dots N(X + (1)) = (1, 1, 1, 1, 1)$$

que no tiene soluciones de ningún tipo (ni racionales, ni primas, ni loc. anudadas) como se verá en el próximo capítulo.

En cambio, si tomamos  $A_1 = \frac{1}{3}$ ,  $A_2 = \frac{1}{17}$ ,  $K_1 = b(5, 3)$ ,  $K_2 = b(29, 17)$ , entonces las dos soluciones para  $X$  son  $X = -\frac{70}{236}$  y  $X = -\frac{78}{214}$ .

Con ésto terminamos este capítulo donde fue introducida la herramienta matemática básica que necesitaremos para continuar, en la primera parte del capítulo siguiente, con resultados más específicos que serán aplicados, en la segunda parte, al problema biológico.

## 2.7 APÉNDICE A: Cubiertas cíclicas ramificadas.

Recordemos las siguientes definiciones:

**Definición 24** *Un espacio cubriente es una terna  $(\tilde{A}, p, A)$  donde:*

- i)  $p: \tilde{A} \rightarrow A$  es continua;
- ii)  $\tilde{A}$  y  $A$  son arcoconectables;
- iii) Existe una cubierta abierta  $\{U_\alpha\}$  de  $A$  tal que cada componente conexa de  $p^{-1}(U_\alpha)$  es homeomorfa bajo  $p$  a  $U_\alpha$ .

Notación:

- $A$  es la base.
- $\tilde{A}$  es el Espacio Total o Cubierta.
- $p^{-1}(z)$  es la fibra de  $z \forall z \in A$ .

Se dice que la cubierta es de orden  $n$  si  $p^{-1}(U_\alpha)$  tiene  $n$  componentes para cada  $\alpha$ .

**Afirmación:** Las cubiertas de  $A$  están en correspondencia uno a uno con los subgrupos del grupo fundamental de  $A$ .

Figura 2.66 :

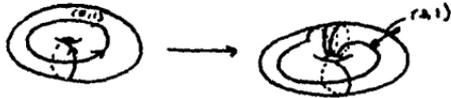


Figura 2.67

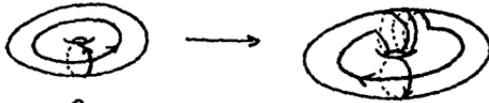
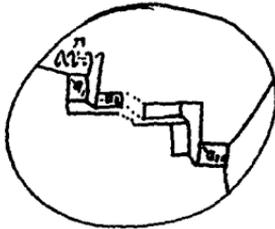
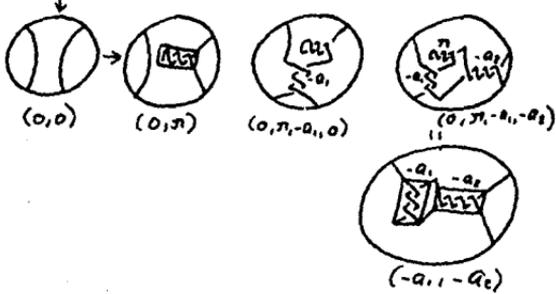


Figura 2.68



$$X = (0, \pi, -a_1, \dots, -a_{2n})$$



**Afirmación:** Si  $f : A \rightarrow B$  es una función continua y  $p : \tilde{B} \rightarrow B$  es una cubierta, entonces  $f$  se levanta a una función  $\tilde{f} : A \rightarrow \tilde{B}$  si y sólo si

$$f^*(\Pi_1(A)) \subset p^*(\Pi_1(B)).$$

**Definición 25** Una cubierta ramificada de una variedad  $N$  es una variedad  $M$  junto con una función  $f : M \rightarrow N$  tal que para una subvariedad  $K \subset N$ , con  $\dim(K) = \dim(N) - 2$ ,  $(M - f^{-1}(K), f, N - K)$  es espacio cubriente. A  $K$  se le llama conjunto de ramificación de la cubierta.

Otra manera de ver las cubiertas es la siguiente:

Una variedad  $M$  cubre a otra variedad  $N$  si hay un grupo  $G$  actuando en  $M$  de forma que el cociente  $M/G = N$ . Y, para que la acción cubriente esté bien definida se pide que no haya puntos fijos. Por ejemplo un grupo de rotaciones en el plano no actúa de la manera requerida. Al relajar esta última condición se obtienen las cubiertas ramificadas, y el conjunto de ramificación consiste exactamente de los puntos fijos. Para un ejemplo de esto nos fijamos en la figura 2.4, que nos muestra al toro bidimensional como doble cubierta de la esfera ramificada en cuatro puntos. En este caso  $G = \{ \text{Id}, \text{rot}180^\circ \}$ .

Si  $p : \tilde{B} \rightarrow B$  es una cubierta ramificada de una superficie entonces queda totalmente determinada por la cubierta correspondiente

$$p : \tilde{B} - p^{-1}(K) \rightarrow B - K$$

donde  $K$  es el conjunto de ramificación que consiste de un número finito de puntos.

De manera análoga, dada una cubierta ramificada de una 3-variedad sobre un nudo ésta está totalmente determinada por la cubierta correspondiente en el complemento del nudo.

Para cada nudo  $K \subset S^3$  hay una única doble cubierta de  $S^3$  ramificada sobre  $K$  y ésta es la correspondiente al subgrupo de  $\Pi_1(S^3 - K)$  formado por

los lazos cuyo número de enlace con  $K$  es congruente con 0 módulo 2. Ésta se llama *doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada en  $K$* .

Construcción de la doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada en el nudo  $K$ : (ver fig. 2.A<sub>2</sub>)

Quiero una cubierta para  $S^3-K$ . Debo cortar  $S^3-K$  a lo largo de alguna superficie que no puede ser cerrada pues una superficie cerrada separa<sup>5</sup> al espacio. Escojo así a una superficie de Seifert  $S$  de  $K$ . Cortamos a  $S^3$  a través de  $S$ . Engordamos a  $S$  tomando  $S \times [-1, 1] = S_0$ , luego considero dos copias de  $S^3-S_0$  sean  $Y_0 \subset S \times \{-1\}$  y  $Y_1 \subset S \times \{1\}$  y pego a  $Y_0$  en  $S \times \{-1\}$  y a  $Y_1$  en  $S \times \{1\}$ . La resultante es una cubierta doble cíclica del complemento de  $K$ . Si relleno el espacio con  $K$  entonces en los puntos de  $K$  ya no es cubierta pues cada uno de ellos tiene una única preimagen bajo la transformación cubriente mientras que todos los demás puntos tienen dos preimágenes. Queda entonces la *doble cubierta cíclica de  $S^3$  ramificada en  $K$*  a quién llamamos también *doble cubierta cíclica ramificada de  $K$* .

Análogamente dado un ovillo  $(D^3, t)$  hay una única cubierta doble de  $D^3$  ramificada en  $t$  y ésta corresponde al subgrupo de  $\Pi_1(D^3 - t)$  formado por los lazos cuyo número de enlace con  $t$  es congruente con 0 módulo 2.

<sup>5</sup>Dada una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , se dice que una superficie  $F$  separa a  $M$  si existen  $M_1$  y  $M_2$  subconjuntos ajenos de  $M$ , con  $M = M_1 \cup M_2$ , y tales que no se puede ir de  $M_1$  a  $M_2$  sin tocar a  $F$ .

Figura 2A<sub>1</sub>

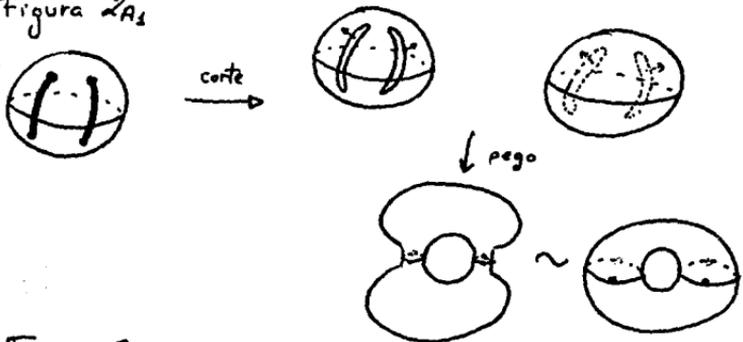
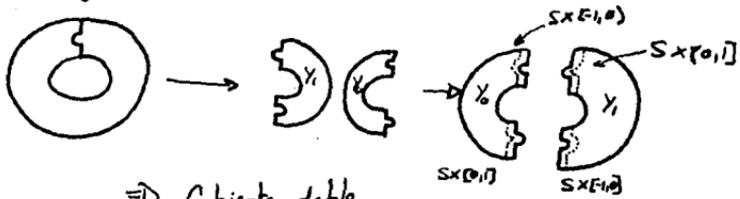


Figura 2A<sub>2</sub>



$\Rightarrow$  Cubierta doble

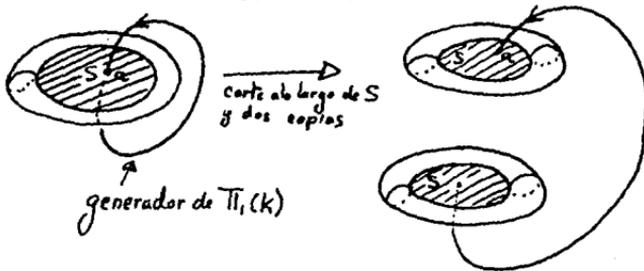
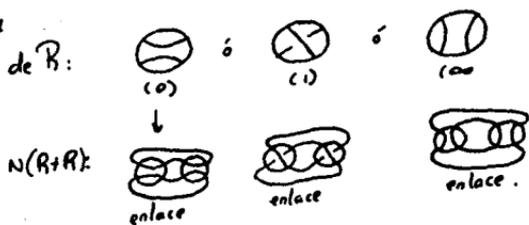


Figura 3.14  
 paridad de  $\mathbb{R}$ :



No era sino la primera  
noche pero una penitencia de siglos  
la había ya precedido.  
Rafael Canino Acosta.

## Capítulo 3

# Detectando Racionalidad.

### 3.1 Ecuaciones de ovillos y soluciones racionales.

Veremos primero ciertos resultados que son muy ilustrativos del comportamiento de los ovillos bajo la suma:

**Lema 4** a) Si  $R$  es un oவில்lo racional, entonces  $R + R$  es localmente desanudado. Más aún:

b) si  $R$  es racional y  $R + R$  es racional entonces  $R$  es un oவில்lo entero. Inversamente:

c) si  $R$  es racional pero no es entero y no tiene la paridad ( $\infty$ ), entonces  $R + R$  es primo.

#### DEMOSTRACIÓN:

a) P.D.  $R$  racional  $\Rightarrow R + R$  localmente desanudado.

$R$  tiene paridad (0), (1) ó ( $\infty$ ). Observando la figura 3.1, vemos que en cualquiera de los tres casos  $N(R + R) = K$  resulta ser un enlace de dos componentes. Además sabemos que  $K$  es un 4-plat, o, lo que es lo mismo, es de dos puentes. Pero para que un enlace de dos componentes sea de dos puentes entonces debe de haber un puente en cada componente, es decir que cada una de ellas es un nudo de un puente y por lo tanto un nudo trivial. Así, un enlace 4-plat es un enlace con dos componentes desanudadas. De aquí que

podemos afirmar que  $N(R + R)$  es localmente desanudado y por lo tanto  $R + R$  es localmente desanudado.

b) P.D.  $R$  racional y  $R + R$  racional  $\Rightarrow R$  es ovillo entero.

Observemos que si  $R$  tiene paridad  $(\infty)$  entonces  $R + R$  no es ovillo y entonces no procede trabajar sobre éste caso. En los dos casos restantes  $R + R$  es ovillo y  $D(R + R)$  siempre resulta ser un nudo. Además tenemos la siguiente:

Afirmación:

$$R \text{ es ovillo entero} \Leftrightarrow D(R) \text{ es trivial.}$$

Observemos que si  $R$  es ovillo entero entonces  $R + R$  es ovillo entero.

Supongamos que  $R$  no es ovillo entero. Por otra parte observemos que

$$D(R + R) = D(R) + D(R)$$

pero esto representa a  $D(R + R)$  como la suma conexa del nudo  $D(R)$  consigo mismo. Si  $D(R)$  no es el nudo trivial entonces  $D(R + R)$  es un nudo compuesto y esto es una contradicción pues  $D(R + R)$  es de dos puentes y los nudos de dos puentes son primos. Concluimos, por la "Afirmación" que  $R$  debe ser ovillo entero.

c) P.D.

$R$  racional, no entero y paridad  $(R) \neq (\infty)$

$$\Rightarrow R + R \text{ es primo.}$$

Ya vimos porque se pide paridad  $(R) \neq (\infty)$ . Por el inciso b):

$$R \text{ no entero} \Rightarrow R + R \text{ no es racional.}$$

Además, por a):

$R$  racional  $\Rightarrow R + R$  localmente desanudado.

Pero si  $R + R$  no es ni racional ni localmente desanudado, entonces es primo.  $\square$

Por otro lado:

Sean  $A$  y  $B$  ovillos y  $K$  un 4-plat tales que  $N(A + B) = K$ .

**Proposición 10** Si  $K = (0)$  ó  $K = (1)$  entonces  $A$  y  $B$  son localmente desanudados.

**DEMOSTRACIÓN:**

Sin pérdida de generalidad supongamos que existe un nudo local en  $A$ , es decir que  $\exists S_1^2 \subset A \cdot \exists \cdot |S_1^2 \cap A| = 2$  y tal que  $S_1^2$  bordea una 3-bola que contiene un nudo local. Ésto quiere decir que  $K$  se puede ver como suma conexa de un nudo no trivial  $K_0$  con otro nudo  $K_1$ . Pero ésta es una contradicción pues ni  $K = (0)$  ni  $K = (1)$  se pueden descomponer como suma conexa de dos nudos donde uno de ellos es un nudo primo no trivial. Concluimos entonces que  $A$  y  $B$  son localmente desanudados.  $\square$

Antes de continuar enunciaremos y probaremos ciertas caracterizaciones importantes de los ovillos por medio de sus dobles cubiertas ramificadas.

**Definición 26** Sea  $M$  una 3-variedad, se dice que:

1)  $M$  es irreducible si toda 2-esfera encajada en  $M$  es frontera de una 3-bola en  $M$ .

2)  $M$  tiene frontera incompresible si ninguna curva esencial<sup>1</sup> en la frontera bordea un disco en  $M$ .

2') En general se dice que una superficie orientable  $S$ , distinta de  $S^2$ , en el interior de  $M$  es incompresible si ninguna curva esencial en la superficie

---

<sup>1</sup>Se dice que la curva  $\gamma$  es esencial en una superficie  $S$  si no bordea ningún disco  $D^2$  en  $S$ .

bordea un disco en  $M$ . Se puede probar que una superficie  $S$  es incompresible en  $M$  si y solo si el homomorfismo inducido de  $\Pi_1(S)$  en  $\Pi_1(M)$  es inyectivo.  
 3) Se dice que una superficie orientable  $S$  en el interior de  $M$  es compresible si no es incompresible.

Figura 3.12

**Ejemplo 2** (ver figura 3.12)

1)  $S^3$  es irreducible.

$T = D \times S^1$  es irreducible.

2)  $T = D \times S^1$  tiene frontera compresible pues el meridiano es una curva esencial en  $\partial T$  que bordea un disco en  $T$ .



**Teorema 11** Sea  $X = (D, t)$  un ovillo y  $X'$  su doble cubierta ramificada, entonces:

- |    |                           |                   |  |
|----|---------------------------|-------------------|--|
| 1) | $X$ es racional           | $\Leftrightarrow$ | $X'$ es toro sólido.   |
| 2) | $X$ es primo              | $\Leftrightarrow$ | $\left\{ \begin{array}{l} X' \text{ es irreducible y tiene} \\ \text{frontera incompresible.} \end{array} \right.$ |
| 3) | $X$ es localmente anudado | $\Leftrightarrow$ | $X'$ no es irreducible.  |

#### DEMOSTRACIÓN:

Sabemos ya que un ovillo es de una, y solo una de las formas siguientes: racional, primo o localmente anudado.

Por otra parte las condiciones de ser "toro sólido", "irreducible y con frontera incompresible" y "no irreducible" también son excluyentes. Ésto es ya que si  $X'$  es variedad irreducible con frontera un toro compresible entonces si cortamos  $X'$  a lo largo de un disco de compresión obtenemos una variedad con frontera una esfera, quién, por ser irreducible, debe ser una bola sólida así que si pegamos nuevamente a lo largo del mismo disco obtenemos un toro sólido.

De éste modo, para la demostración del teorema basta probar la "ida" ( $\Rightarrow$ ) de cada una de las afirmaciones 1), 2) y 3).

1) P.D.  $X$  es racional  $\Rightarrow$   $X'$  es toro sólido.

En general si  $X = (D^3, i)$  es un ovillo racional entonces sabemos que existe un homeomorfismo  $h$  que lleva a  $X$  en un ovillo trivial. Así que podemos encontrar un disco  $D$  en  $D^3$  con frontera en  $S^2$  que divida a  $D^3$  en dos bolas  $B_1$  y  $B_2$  de modo que en cada una de ellas queda un arco trivial tal y como se muestra en la figura 3.1<sub>1</sub>. En la doble cubierta ramificada del ovillo,  $D$  se levanta a dos discos  $D'$  y  $D''$  encajados en  $X'$ , y  $X'$  es la unión de la doble cubierta de  $B_1$  ramificada en un arco trivial con la de  $B_2$  ramificada en otro arco trivial pegados a lo largo de los discos  $D'_i$  y  $D''_i$ . Sabemos que la doble cubierta ramificada de una bola sobre un arco desanudado es una bola, por lo tanto, tal y como lo muestra la figura 3.1<sub>4</sub>,

$$X' = B'_1 \cup_{\sim} B'_2 \cong D^2 \times S^1 = (\text{toro sólido}).$$

Concluimos que:

$$X \text{ racional} \Rightarrow X' \text{ toro sólido.}$$

$$2) \text{P.D. } X \text{ es primo} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X' \text{ es irreducible y tiene} \\ \text{frontera incompresible.} \end{array} \right.$$

Supongamos que  $X'$  no es irreducible, es decir que existe una esfera esencial en  $X'$ , es decir una esfera que no bordea una 3-bola. Como  $X'$  es doble cubierta ramificada de  $X$  con proyección cubriente  $p$ , entonces la función que a cada punto de ramificación de  $X'$  lo manda en sí mismo y dado cualquier otro  $x_1 \in X'$  lo manda en el  $x_2 \in X'$ ,  $\exists \cdot p(x_1) = p(x_2)$  es una involución<sup>2</sup>. Por el *teorema de la esfera equivariante*<sup>3</sup> podemos afirmar que existe una esfera esencial equivariante  $S'$ . Como  $S'$  es equivariante, se proyecta en una esfera  $S$  encajada en  $X$ .

<sup>2</sup>Dada  $X$  una variedad, una involución de  $X$  es un homeomorfismo distinto de la identidad  $h: X \rightarrow X$ ,  $\exists \cdot h \circ h = Id$ .

<sup>3</sup>Sea  $X'$  una 3-variedad compacta y orientable que admite una involución  $i$ . Si  $X'$  contiene una esfera esencial, entonces  $X'$  contiene una esfera esencial equivariante  $S'$ , es decir una esfera tal que  $i(S) \cap S = \emptyset$  e  $i(S) \cap S = S$ .

Observemos que surgen los tres casos siguientes (ver la figura 3.14):

$$|S \cap t| = 0 \dots\dots\dots [1]$$

$$|S \cap t| = 2 \dots\dots\dots [2]$$

$$|S \cap t| > 2 \dots\dots\dots [3]$$

En el caso [1] a  $S$  la llamamos  $S_1$  y sea  $S_1 = \partial B_1$ .  $S_1$  es una esfera encajada en  $X$  que bordea una bola  $B_1$  en  $X$  que no interseca al conjunto de ramificación de modo que el conjunto preimágen de  $B_1$  en  $X'$  consiste de dos bolas y  $S_1'$  es frontera de una de ellas y por lo tanto  $S_1'$  es trivial.

En el caso [2] a  $S$  la llamamos  $S_2$  y sea  $S_2 = \partial B_2$ .  $S_2$  es una esfera encajada en  $X$  que interseca a los arcos del oவில் en dos puntos y entonces  $S_2$  bordea una bola que interseca al oவில் en un arco desanudado (pues  $X$  es localmente desanudado por ser primo), y la doble cubierta cíclica ramificada de una bola sobre un arco desnudado es una bola, pero aquí hay de nuevo una contradicción a la suposición de que  $S'$  es no trivial. Observemos además que la doble cubierta ramificada de  $B_2$  sobre un arco desanudado consta de una única bola.  $B_2$  no puede levantarse a dos bolas pues  $t \cap S_2 = \{x_1, x_2\}$  y las preimágenes de  $x_1$  y de  $x_2$  constan de un solo punto para  $x_1$  y uno solo para  $x_2$ .

Antes de seguir con el caso [3] observemos que para toda esfera  $S$  encajada en  $X$  se tiene que

$$|S \cap X| = 2m, \text{ para alguna } m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ahora sí, afirmamos que el caso [3] es imposible pues la doble cubierta de una esfera ramificada en  $2m$  puntos es una superficie de género  $m-1$  y entonces si  $m \geq 2$  se tiene una contradicción al hecho de que:

$$\partial B_3' = (\partial B_3)' = (S_3)'$$

Figura 3.13:

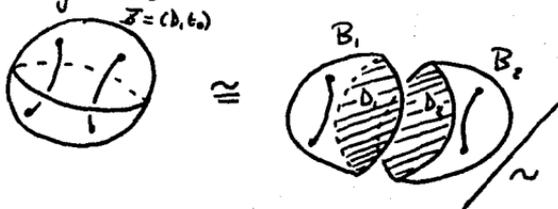


Figura 3.14

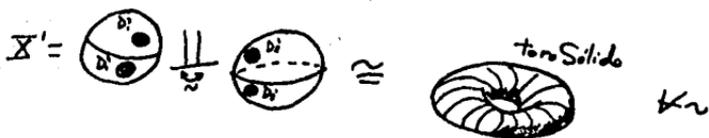


Figura 3.15



Figure 3.16



$\Sigma$   $\Sigma$



Fig 3.17



~



Fig. 3.18

$X' = X'' \parallel \odot$



y



Fig 3.19



.



donde  $(S_3)'$  es la cubierta de  $S_3$  con  $2m$  puntos de ramificación.

Concluimos que  $X'$  es irreducible. Falta probar que tiene frontera incompresible.

Supongamos que  $X'$  tiene frontera compresible, es decir que existe un lazo  $\gamma \subset \partial X'$  que es esencial en  $\partial X'$  y que bordea un disco en  $X'$ , a éste disco se le llama disco de compresión para  $\partial X'$ . Aplicando el *teorema del lazo equivariante*<sup>4</sup> afirmamos que hay un disco de compresión equivariante, es decir que  $\exists \gamma_0 \hookrightarrow \partial X'$  lazo esencial en  $\partial X'$  que bordea un disco  $D'_0 \subset X'$ .  $\exists \cdot p(D'_0)$  es un disco encajado en  $X$ . Surgen de nueva cuenta tres posibilidades que quedan ilustradas en la figura 3.14:

$$|t \cap D_0| = 0 \dots\dots\dots [1]$$

$$|t \cap D_0| = 1 \dots\dots\dots [2]$$

$$|t \cap D_0| > 1 \dots\dots\dots [3]$$

En cada caso [i] a  $(\gamma_0, D_0)$  los llamo  $(\gamma_i, D_i)$ .

Para el caso [1] observemos que  $D_1$  no puede partir en dos a  $X$  de forma que quede un solo arco de cada lado pues  $X$  es un ovollo primo, por lo tanto, la única posibilidad es la que muestra la figura 3.14, es decir que podemos empujar a  $D_1$  a la frontera  $\partial X$ . Obtengo entonces algo como lo que se muestra en la figura. Es decir que en  $X'$ ,  $\gamma_1$  se levanta a un lazo no esencial y ésto es una contradicción. Concluimos que no puede suceder [1].

En el caso [2],  $\gamma_2$  bordea a  $D_2$  con  $|t \cap D_2| = 1$ . Y para ésto hay un solo caso posible que es el que se ve en la figura 3.14. Pero este disco con un punto de ramificación se levanta a un disco en  $\partial X'$  tal y como lo muestra la figura 3.14, y éste tiene como frontera a  $\gamma_2$ . Se contradice así la hipótesis de  $\gamma_2$  esencial en la frontera y por lo tanto el caso [2] no procede.

<sup>4</sup> Teorema del lazo equivariante:

Sea  $X$  una variedad compacta y orientable que admite una involución  $i$ . Si  $X$  contiene un disco de compresión para  $\partial X$ , entonces contiene un disco de compresión equivariante.

Para el caso [3] veamos primero que es lo que sucede si  $|t \cap D_3| = 2$ . Se presentan dos ejemplos de éste caso en la figura 3.1<sub>o</sub>.

$D_3$  es entonces un disco en  $X$  con dos puntos de ramificación y su doble cubierta cíclica ramificada es un anillo. Pero ésto es una contradicción ya que la preimágen de  $D_3$  es el disco  $D'_0$ .

Si  $|t \cap D_3| > 2$  entonces la cubierta ramificada de  $D_3$  es una superficie plana con varios hoyos, entonces volvemos a tener una contradicción. De aquí que [3] es imposible.

Dado que [1], [2], [3] son imposibles entonces  $X'$  tiene frontera incompresible. Concluimos entonces que  $X$  es primo  $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X' \text{ es irreducible y tiene} \\ \text{frontera incompresible.} \end{array} \right\}$

Finalmente:

3) P.D.  $X$  es localmente anudado  $\Rightarrow X'$  no es irreducible.

Supongamos que  $X'$  es irreducible, es decir que toda esfera  $X'$  bordea una 3-bola.

Recordemos que la definición de ovillo localmente anudado nos da una 2-esfera  $S$  encajada en  $X$  que intersecta a uno de los arcos en dos puntos y el segmento de arco que encierra está anudado. La doble cubierta de  $S$  ramificada en dos puntos es una esfera  $S'$  en  $X'$  y bordea entonces una 3-bola en  $X'$  y ésta bola es la doble cubierta ramificada de la bola  $B \subset X$  bordeada por  $S$  en  $X$ .

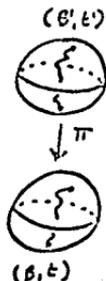
**Lema 5** Sea  $(B, t)$  una 3-bola donde  $t$  representa a un solo arco. Entonces

$(B, t)'$  es una bola  $\Leftrightarrow t$  es un arco desanudado.

Con éste lema llegamos rápidamente a una contradicción y queda entonces probada la implicación 3). Pero falta probar el lema:

Observemos que  $\Leftarrow$  es inmediata.

$\Rightarrow$  Se tienen  $(B, t)$  y  $(B, t)' = (B', t')$  dos bolas, si  $p$  es la transformación cubriente entonces  $p$  es un homeomorfismo tal que  $p/t' = Id$  es decir que  $p(t') = t$ . (ver la figura).



Entonces  $p$  es una involución y además

$$A = \{x \in B' / p(x) = x\} = t'$$

entonces por la *Conjetura de Smith*<sup>5</sup>  $t'$  está desanudado y por lo tanto  $t$  está desanudado.  $\square$

Queda así demostrado el teorema 11.  $\square$

Una vez vistas estas generalidades podemos seguir con ciertos resultados más particulares que nos serán de mucha utilidad.

**Teorema 12** Sea  $K$  el nudo trivial, y  $A, B$  ovillos tales que  $N(A+B) = K$  entonces  $A$  ó  $B$  es racional.

#### DEMOSTRACIÓN:

La doble cubierta cíclica ramificada del nudo trivial es  $X' = S^3$ .

Por la proposición 10 los ovillos  $A$  y  $B$  son localmente desanudados. Supongamos que  $A$  y  $B$  son ovillos primos, entonces por el teorema 11  $A'$  y  $B'$  son irreducibles y con frontera incompresible. Y por otra parte  $\partial A' = \partial B' = T^2$  es un toro bidimensional. Pero si  $T^2$  es incompresible en  $A'$  y en  $B'$  entonces  $T^2$  es incompresible en  $A' \cup_{T^2} B' = X'$  y por lo tanto  $\exists G \prec \Pi_1(X') \cdot \ni G \simeq Z \oplus Z = \Pi_1(T^2)$ . Ésto es una contradicción pues  $X' = S^3 \Rightarrow \Pi_1(X')$  es trivial y por lo tanto no puede tener un subgrupo isomorfo a  $Z \oplus Z$ .

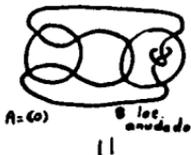
Así concluimos que como  $A$  y  $B$  deben ser localmente desanudados y no pueden ser los dos primos a la vez entonces al menos uno de  $A$  ó  $B$  debe ser racional.  $\square$

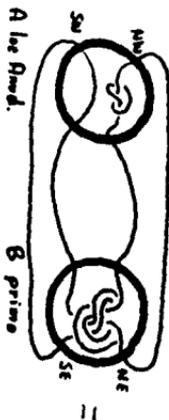
**Observación 13** Si  $K$  es un nudo no trivial en general no podemos concluir que  $A$  y  $B$  sean localmente desanudados y encontramos un ejemplo de ésto en la figura 3.11<sub>0</sub>. Por otra parte si alguno de  $A$  o  $B$  es localmente anudado no

<sup>5</sup> Conjetura de Smith:

Si  $h: B^3 \rightarrow B^3$  es una involución de una 3-bola donde  $A = \{x \in B^3 / h(x) = x\}$  es un arco entonces  $A$  está desanudado.

Fig 3.11<sub>0</sub>





11

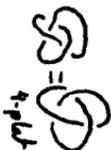


Figura 3.111

podemos afirmar que el otro sea racional y de hecho podemos ver un ejemplo en la figura 3.111

**Proposición 11** Dados  $A$  y  $B$  ovillos y  $K$  un 4-plat tal que  $N(A+B) = K$  entonces a lo más uno de  $A$  ó  $B$  es localmente anudado.

**DEMOSTRACIÓN:**

Los casos  $K = (0)$  y  $K = (1)$  ya fueron demostrados.

Supongamos que  $A$  y  $B$  son localmente anudados, es decir que  $\exists S_1 \subset A$  y  $\exists S_2 \subset B$  con  $S_1 \cong S_2 \cong S^2$  que encierran nudos locales, es decir que  $S_1$  intersecciona a los arcos de  $A$  en solo dos puntos y encierra un arco que está anudado, y análogamente para  $S_2$  con  $B$ .

Por otra parte sabemos que los 4-plats son nudos y enlaces primos. Y recordemos que un enlace  $K$  de curvas cerradas, simples y disjuntas en  $S^3$  es primo si no existe ninguna 2-esfera  $S \subset S^3$  que separe a las componentes de  $K$ , y toda 2-esfera que interseccione a  $K$  en dos puntos, transversalmente, es frontera en  $S^3$  de una y solo una bola que intersecciona a  $K$  en un único arco desanudado cuyos extremos están en la 2-esfera.

Así,  $S_1$  debe dejar de un lado un arco desanudado y del otro uno anudado. Por hipótesis el del interior es no trivial y por lo tanto el del exterior debe ser trivial y entonces bordea un disco sin autointersecciones  $D$ . Veremos que esto es imposible ya que el arco exterior contiene al nudo local encerrado por  $S_2$ .

Si  $S_1 = \partial B_1$  con el arco anudado en  $B_1^i$ , y si  $K$  es primo, entonces  $K \cap (S^3 - B_1) = t$  es un arco desanudado cuyos extremos  $\{a, b \in S\}$ . Dado cualquier arco simple  $t_0 \subset S_1$  que vaya de  $(a)$  a  $(b)$  se tiene que  $t_0 \cup t = \gamma$  bordea un disco  $D$  sin autointersecciones. Considero el conjunto  $D \cap S_2$ . Observemos que un subarco de  $\gamma$  es un arco anudado encerrado por  $S_2$  y éste tiene por extremos a los puntos  $(c)$  y  $(d)$  en  $S_2$ . Entonces, forzosamente  $D \cap S_2$  contiene un arco simple

3.112

(pues el disco es encajado) que va de (c) a (d). El resto de  $D \cap S_2$  consiste de curvas cerradas simples como lo muestra la figura 3.112. De hecho si hubiera otro arco abierto en la intersección entonces sus extremos formarían parte de  $\gamma$ , y entonces habría otro subarco de  $\gamma$  encerrado por  $S_2$  lo que dice que  $|S_2 \cap K| > 2$  !!!!. Por otra parte las intersecciones circulares pueden ser removidas con una isotopía de  $D$  pues toda curva cerrada simple en  $D^\circ$  bordea un disco  $D_1 \subset D^\circ$  y además esa misma curva bordea un disco  $D_2 \subset S_2$ . Finalmente  $D_1 \cup D_2$  es frontera de una 3-bola que no contiene puntos de  $K$ , y que por ello se puede remover con una isotopía de  $D$ .



Así entonces nos queda  $D \cap S_2$  con un solo arco abierto cuyos extremos son los mismos que los del arquito anudado en  $B_2^1$ , pero entonces hay un disco que conecta al arco del interior con el de la frontera de  $B_2$ . Esta es una contradicción pues esa es justamente la definición de un arco desanudado metido en una bola y se había supuesto que  $S_2$  encerraba un arco no trivial.  $\square$

**Teorema 13** Si  $N(A+B)$  es un 4-plat, y  $A$  y  $B$  son localmente desanudados entonces  $A$  ó  $B$  es racional.

**DEMOSTRACIÓN:**

$$N(A+B) = K \text{ un 4-plat} \Rightarrow K' = L(p,q) \text{ p.a. } p,q \in Z$$

$$\Rightarrow \Pi_1(K') = Z_p.$$

Supongamos que  $A$  y  $B$  son primos, entonces por el teorema 11,  $A'$  y  $B'$  son irreducibles y con frontera incompresible, además  $\partial A' = \partial B' = T^2$ . Del mismo modo que en la demostración del teorema 12 concluimos que  $T^2$  es incompresible en  $A' \cup_{T^2} B' = K'$  y por lo tanto  $\exists G \triangleright \Pi_1(K') = Z_p \ni \cdot G \simeq Z \oplus Z$  !!!

Concluimos que  $A$  ó  $B$  es racional.  $\square$

Sean ahora los ovillos  $A_0, A_1$  y  $B$  tales que:

- 1)..... $N(A_0+B) = K_0 =$  nudo trivial
- 2)..... $N(A_1+B) = X =$  4-plat

Sabemos que  $X'$  es un espacio lente, cabe entonces preguntarse como son  $A'_0, A'_1$  y  $B'$ . Sabemos que  $\partial A'_1 \cong \partial A'_0 \cong \partial B' \cong T^2$ . Además por el teorema 11 tenemos:

$A, B$  racionales  $\Leftrightarrow A', B'$  son toros sólidos.

Y dadas las ecuaciones 1) y 2) sabemos, por la proposición 10, que  $A_0$  y  $B$  son localmente desanudados, además sabemos que uno de  $A_0$  ó  $B$  es racional, y que, si  $A_1$  es localmente desanudado entonces uno de  $A_1$  ó  $B$  es racional. Queremos saber ahora cuando  $B$  es racional.

Supongamos que  $B$  no es racional y veamos que pasa:

$B$  no racional  $\Rightarrow A_0$  racional

además

$$K'_0 = S^3 = A'_0 \cup_{T^2} B' = T \cup B$$

donde  $T^2 = \partial T$ , por lo tanto

$B'$  es el exterior de un nudo  $K$

Por otra parte,

$$N(A_1 + B) = X \Rightarrow X' = A'_1 \cup B' = \text{espacio lento.}$$

$$\Rightarrow A'_1 \cup B' = L(p, q) \text{ p.a.p. } p, q \in \mathbb{Z}$$

Pero  $\Pi_1(X') = \mathbb{Z}_p$  para alguna  $p \in \mathbb{N} \Rightarrow T^2$  no puede ser incompresible para ambos lados.

Por otra parte, por (\*),  $K$  debe ser no trivial pues de lo contrario  $B'$  sería toro sólido y entonces  $B$  sería racional contradiciendo así nuestra hipótesis inicial. Tenemos además el siguiente resultado:

**Afirmación:**

$K$  no trivial  $\Rightarrow$  el exterior de  $K$  es irreducible y con frontera incompresible.

Así que  $A'_1$  tiene frontera compresible de modo que si suponemos que  $A_1$  es localmente desanudado entonces  $A_1$  es irreducible y por lo tanto es un toro sólido y entonces, por el teorema 11,  $A_1$  no puede ser primo, es decir que  $A_1$  es racional. Pero

$$A_1 \text{ racional} \Rightarrow A'_1 \text{ toro sólido}$$

En suma, suponiendo, en las ecuaciones 1) y 2),  $A_1$  localmente desanudado y  $B$  no racional, tenemos que  $A_0$  y  $A_1$  son racionales y por lo tanto  $A'_0$  y  $A'_1$  son toros sólidos. Y por lo tanto:

*$X'$  es un espacio lente que se obtiene  
haciendo cirugía en un nudo no trivial.*

Enunciaremos ahora el *Teorema de Cirugía Cíclica*, a quién llamaremos TCC para abreviar. El TCC nos asegura que hay pocas cirugías que dan espacios con homología cíclica:

**Teorema 14** *Se afirma lo siguiente:*

- (1) *Sea  $K$  un nudo no toroidal. Entonces la cirugía  $r$  sobre  $K$ , denotada  $K_r$ , puede tener grupo fundamental cíclico finito solo si  $r \in \mathbb{Z}$ .*
- (1') *Si hay dos enteros  $r_1$  y  $r_2$  tales que  $K_{r_1}$  y  $K_{r_2}$  tienen grupo fundamental cíclico finito entonces  $r_1$  y  $r_2$  deben ser sucesivos.*
- (2) *Si  $K$  es un nudo no trivial y  $r \neq \pm 1$  entonces  $K_r$  no es simplemente conexo. Además  $K_1$  y  $K_{-1}$  no pueden ser ambos simplemente conexos.*

**Observación 14 a)** *En (1) pedir  $r \in \mathbb{Z}$  implica que la curva que determina a la cirugía puede ir longitudinalmente solo una vez.*

**b)** *En (1') que  $r_1$  y  $r_2$  sean sucesivos significa que las curvas que determinan cada una de las cirugías se intersectan una sola vez.*

**c)** *El inciso (2) nos dice que la única forma de que el grupo fundamental sea finito es que  $r = -1$  ó  $r = +1$  pero no los dos.*

¿Cómo aplicamos el TCC a lo que vimos antes?

**Lema 6** Supongamos que dado un ovillo  $B$  existen ovillos  $A_i$  con  $1 \leq i \leq 3$  con  $A_2$  y  $A_3$  localmente desanudados, y tales que:

$$N(B + A_1) = b(1, 1) \dots \dots \dots (1)$$

$$N(B + A_2) = b(\alpha, \beta); \alpha \succ 1 \dots \dots \dots (2)$$

$$N(B + A_3) = b(\alpha', \beta'); \alpha' \succ 1 \dots \dots \dots (3)$$

Entonces  $|\alpha - \alpha'| \succ 1 \Rightarrow B'$  es el exterior de un nudo toroidal.

**DEMOSTRACIÓN:**

Observemos que  $\alpha \leq 1 \Rightarrow b(\alpha, \beta)$  es trivial,  $L(1, \beta) = S^3, \forall \beta$ .

Por ésta razón pedimos  $\alpha \succ 1$  y  $\alpha' \succ 1$ .

Si  $B$  es racional entonces  $B'$  es el exterior de un nudo trivial y ya acabamos.

Supongamos que  $B$  no es racional:

Entonces  $A_1, A_2, A_3$  son racionales y por lo tanto  $A'_1, A'_2, A'_3$  son toros sólidos.

Si  $A'_1$  es toro sólido entonces (1) implica que  $B'$  es el exterior de un nudo no trivial  $K$ . Y  $A'_2, A'_3$  toros sólidos y, (2) y (3), implican que  $b(\alpha, \beta)$  y  $b(\alpha', \beta')$  se obtienen por cirugía en  $K$ .

Supongamos ahora que  $B'$  es el exterior de un nudo no toroidal, entonces por el TCC las cirugías que generan a  $b(\alpha, \beta)$  y a  $b(\alpha', \beta')$  son enteras y sucesivas. Pero,

$$\Pi_1(b(\alpha, \beta)) = Z_\alpha \Rightarrow H_1(b(\alpha, \beta)) = Z_\alpha$$

ya que el meridiano del toro va, en la cirugía, pegado a una curva que representa  $\alpha$  veces el generador de la homología del exterior de  $K$ , de modo que las cirugías que producen a  $b(\alpha, \beta)$  y a  $b(\alpha', \beta')$  son  $\frac{\alpha}{\alpha}$  y  $\frac{\alpha'}{\alpha}$  respectivamente, con  $\alpha$  primo relativo a  $\alpha$ . Lo anterior me dice que:

$$H_1(K_{\frac{\alpha}{\alpha}}) = Z_\alpha$$

Pero,

$$H_1(b'(\alpha, \beta)) = Z_\alpha$$

y

$$H_1(b'(\alpha', \beta')) = Z_{\alpha'}$$

Por el TCC,  $b'(\alpha, \beta)$  y  $b'(\alpha', \beta')$  provienen de cirugías  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}'$  sobre  $K$  y, las curvas  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}'$  se intersectan una sola vez, es decir que las distancias entre ellas es 1, es decir

$$|\alpha - \alpha'| = 1$$

Esto es una contradicción pues tenemos como hipótesis del lema  $|\alpha - \alpha'| > 1$ .

Concluimos entonces que ya sea  $B$  racional o primo,  $B'$  es el exterior de un nudo toroidal.  $\square$

Reformulemos el lema 6 añadiendo una condición más:

**Lema 7** *Supongamos que dado un ovillo  $B$  existen ovillos  $A_i$  con  $1 \leq i \leq 3$  con  $A_2$  y  $A_3$  localmente desanudados, y tales que:*

$$N(B + A_1) = b(1, 1) \dots \dots \dots (1)$$

$$N(B + A_2) = b(\alpha, \beta); \alpha > 1 \dots \dots \dots (2)$$

$$N(B + A_3) = b(\alpha', \beta'); \alpha' > 1 \dots \dots \dots (3)$$

Entonces si  $|\alpha - \alpha'| > 1$ , y si además  $\alpha$  ó  $\alpha'$  es 2, 3 ó 4 entonces  $B'$  es toro sólido.

#### DEMOSTRACIÓN:

Sabemos ya por el lema 6 que  $B'$  es exterior de un nudo toroidal, y cabe destacar que la cirugía en nudos toroidales está bien estudiada. Utilizaremos para la demostración la siguiente afirmación:

**Afirmación:** En el nudo toroidal no trivial  $(r, s)$ , donde podemos pedir sin pérdida de generalidad  $1 < r < s$  (se excluye al 1 pues se está suponiendo que el nudo no es trivial), la cirugía con pendiente

$\frac{p}{q}$  da un espacio lente si y solo si  $|rsq + p| = 1$ . Y el espacio lente que se obtiene es  $L(p, qs^2)$ .

Entonces, suponiendo cierta esta afirmación y si sabemos que la cirugía con pendiente  $\frac{p}{q}$  da un espacio lente entonces procede lo siguiente:

Observemos que  $1 \prec r \prec s \Rightarrow r \cdot s \geq 6$  Además:

$$|rsq + p| = 1 \Leftrightarrow rsq + p = \pm 1$$

y como  $|q| \geq 1$ :

$$\begin{aligned} rsq + p &= \pm 1 \\ \Rightarrow p &\equiv \pm 1 \pmod{(r \cdot s)} \end{aligned}$$

pero si  $p > 0$  entonces

$$\begin{aligned} p &\equiv \pm 1 \pmod{(r \cdot s)} \\ \Rightarrow p &\geq 5 \end{aligned}$$

Y de este modo afirmamos que  $p$  no puede ser ni 2, ni 3, ni 4.

Aplicando ésto a nuestro problema, dado que sabemos que las cirugías con pendiente  $\frac{p}{q}$  y  $\frac{p'}{q'}$  sí nos dan espacios lente y que  $B'$  es exterior de un nudo toroidal  $K$ , y supusimos además que una de  $\alpha$  o  $\alpha'$  es 2, 3 ó 4 entonces concluimos que el nudo  $K$  debe ser trivial y por lo tanto que  $B'$  es un toro sólido.  $\square$

Daremos ahora un resultado más general:

**Lema 8** *Supongamos que dado un oவில்lo  $B$  existen oவில்los  $A_i$  con  $1 \leq i \leq 3$  con  $A_2$  y  $A_3$  localmente desanudados, y tales que:*

$$N(B + A_1) = b(1, 1) \dots \dots \dots (1)$$

$$N(B + A_2) = b(\alpha, \beta); \alpha > 1 \dots \dots \dots (2)$$

$$N(B + A_3) = b(\alpha + 2, \beta') \dots \dots \dots (3)$$

$$N(B + A_3) = b(\alpha + 4, \beta'') \dots \dots \dots (4)$$

*Si  $|\alpha - \alpha'| > 1$  entonces  $B'$  es toro sólido y por lo tanto  $B$  es oவில்lo racional.*

### DEMOSTRACIÓN:

Sabemos, gracias al lema 6, que  $B$  es el exterior de un nudo toroidal  $M = (r, s)$ . Supongamos que  $M$  es no trivial. Además existen pendientes  $r_1, r_2, r_3 \ni$

$$K_{r_1} = L(\alpha, \beta)$$

$$K_{r_2} = L(\alpha + 2, \beta')$$

$$K_{r_3} = L(\alpha + 4, \beta'')$$

Por la afirmación hecha en el lema anterior, si ponemos  $p = \alpha$ ,  $p' = \alpha + 2$  y  $p'' = \alpha + 4$  entonces:

$$\Rightarrow \begin{cases} |rsq + \alpha| = 1 \\ |rsq' + \alpha + 2| = 1 \\ |rsq'' + \alpha + 4| = 1 \\ |\alpha| = |rsq| \pm 1 \\ |\alpha + 2| = |rsq'| \pm 1 \\ |\alpha + 4| = |rsq''| \pm 1 \end{cases}$$

Observemos que  $\alpha$  no puede ser 1 ó -1 pues en esos casos

$$L(\alpha, \beta) = S^3$$

y entonces  $M$  sería trivial y  $B$  racional.

Si suponemos  $\alpha > 0$ :

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \pmod{(r \cdot s)} \\ \alpha + 2 = \pm 1 \pmod{(r \cdot s)} \\ \alpha + 4 = \pm 1 \pmod{(r \cdot s)} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \pmod{(r \cdot s)} \\ \alpha = -3, -1 \pmod{(r \cdot s)} \\ \alpha = -5, -3 \pmod{(r \cdot s)} \end{cases}$$

y éste sistema no tiene solución pues  $(r \cdot s) \geq 6$ .

Si ahora  $\alpha < 0$  Se revisan de manera análoga los otros casos,  $\alpha \leq -4$  y  $-4 < \alpha \leq 2$  y se llega al mismo sistema de soluciones. Se concluye que el sistema nunca tiene solución y por lo tanto  $B'$  es el exterior de un nudo trivial, es decir que es toro sólido y, por tanto,  $B$  es ovillo racional.  $\square$

Ahora, consideremos sistemas más particulares:

**Lema** Sea  $X$  un ovillo cualquiera tal que

$$N(X + (\infty)) = (1)$$

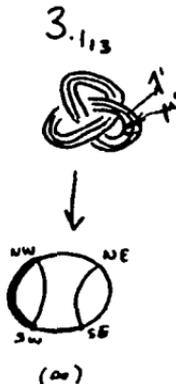
$$N\left(X + \frac{p}{q}\right) = b(p, q)$$

entonces  $L(p, q)$  se obtiene por cirugía  $\frac{p+sq}{q}$  en un nudo y  $p = |\beta + sq|$ .

**DEMOSTRACIÓN:**

Como  $N(X + (\infty)) = (1) \Rightarrow [N(X + (\infty))]' = S^2$  y  $(\infty)'$  es un toro sólido entonces  $X'$  es el complemento de un nudo  $K$ , queremos entonces saber de que nudo se trata (en principio  $X'$  podría ser complemento de varios nudos distintos).

Los arcos  $NW$  a  $SW$ , y  $SW$  a  $SE$  en  $\partial(\infty)$  se levantan en la cubierta, respectivamente a un meridiano  $\mu'$  y una longitud  $\lambda'$  en  $\partial(\infty)'$ , como lo muestra la figura 3.1.13. Además sabemos que  $S^3 = X' \cup_g (\infty)'$  donde  $g : \partial(\infty)' \rightarrow \partial X'$  es el homeomorfismo de pegado que determina la cirugía. Debo escoger meridiano y longitud en  $\partial X'$ . Puedo ver a  $(\infty)'$  como vecindad regular de un nudo en  $S^3$  y  $X'$  el exterior de ese nudo. Así, el meridiano  $\mu'$  de  $(\infty)'$  se identifica con el meridiano  $\mu$  del nudo, y la longitud  $\lambda'$  de  $(\infty)'$  difiere de la longitud preferente  $\lambda$  del nudo en un número fijo de meridianos, es decir que la curva  $\lambda'$  de  $\partial(\infty)'$  es alguna longitud del nudo y entonces, la longitud preferente para el nudo es isotópica a  $\lambda' + s\mu'$ , para alguna  $s \in \mathbb{Z}$ .



Por otra parte como  $\frac{\beta}{\alpha}$  es un ovrillo racional entonces existe un homeomorfismo  $f: (\infty) \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ . Sea ahora

$$F = f/\theta: \theta(\infty) \rightarrow \theta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

En el capítulo anterior vimos que nos podemos limitar a trabajar con  $F$ . Entonces consideremos

$$F': \theta(\infty)' \rightarrow \theta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)'$$

que es un homeomorfismo del toro en sí mismo y, por la sección de clasificación de ovrillos racionales, si  $\mu'$  es el meridiano en  $\theta(\infty)'$  entonces

$$F'(\mu') = \beta\mu' + \alpha\lambda' = \mu''.$$

Nos preguntamos ahora a quien se pega el meridiano  $\mu''$  del toro  $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)'$  en el exterior de  $K$  para formar, por cirugía sobre ese nudo, al espacio lente correspondiente. Fijándonos en el cambio de coordenadas dado por  $g$ , el homeomorfismo de pegado es ahora:

$$\begin{aligned} h: \theta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)' &\rightarrow \theta X' \\ \cdot \ni \cdot h(\mu'') &= g(\beta\mu' + \alpha\lambda') = \beta g(\mu') + \alpha g(\lambda') \\ \Rightarrow h(\mu'') &= \beta\mu + \alpha\lambda - \alpha s\mu = (\beta - \alpha s)\mu + \alpha\lambda \end{aligned}$$

de donde concluimos que la cirugía es  $\left(\frac{\beta - \alpha s}{\alpha}\right)$  y entonces la homología del  $L(p, q)$  obtenido es  $Z_{|\beta - \alpha s|}$ , por lo que  $p = |\beta - \alpha s|$ . Y como  $s$  es un entero arbitrario entonces queda así demostrado el lema.  $\square$

**Lema 10** Sea  $X$  un ovrillo cualquiera tal que

$$\begin{aligned} N(X + (0)) &= (1) \\ & \quad \quad \quad y \\ N\left(X + \frac{\beta}{\alpha}\right) &= b(p, q) \end{aligned}$$

3.1.14



entonces  $L(p, q)$  se obtiene por cirugía  $\frac{\alpha + s\beta}{\beta}$  en un nudo y  $p = |\alpha + s\beta|$ .

#### DEMOSTRACIÓN:

Como podemos observar en la figura 3.1.14, cuando  $T = (0)$ , longitud y meridiano cambian de papel con respecto al caso en que  $T = (\infty)$  y entonces ahora

$$\mu'' = \alpha\mu' + \beta\lambda'$$

de donde que  $\mu''$  expresada en términos de la base  $(\mu', \lambda')$  para  $\partial(0)'$  resulta ser ahora de la forma:

$$(\alpha + s\beta)\mu + \beta\lambda$$

donde  $s$  es algún entero.  $\square$

Tenemos ya información sobre la cirugía y sobre  $p$ , pero nos gustaría saber también algo acerca de  $q$ . Para poder hacer ésto necesitamos antes introducir el concepto llamado *Número de Enlace Racional*.

En  $S^3$  dadas dos curvas cerradas simples  $a$  y  $b$  podemos definir el número de enlace entre  $a$  y  $b$  como la suma algebraica de las intersecciones con signo de  $b$  con una superficie de Seifert  $S_a$  para  $a$ .

Se demuestra que este número queda bien definido, que no depende de la elección de la superficie de Seifert que se haga, ni de si se toma para una curva o para la otra, y se demuestra también que esta definición es equivalente a la que fue dada en el capítulo anterior.

En general no tiene sentido hablar de número de enlace entre dos curvas en una 3-variedad arbitraria. Sin embargo supongamos que  $M$  es tal que

$$H_1(M) = \mathbb{Z}_p$$

para alguna  $0 < p < \infty$ . Entonces

$$\begin{aligned} \forall \gamma_1 \subset M \text{ curva cerrada simple} \\ \Rightarrow p \cdot \gamma_1 \text{ es homóloga a cero.} \end{aligned}$$

Entonces  $p \cdot \gamma_1$  es frontera de una superficie contenida (¿encajada?) en la 3-variedad. Dadas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos curvas cerradas simples en  $M$ . Sea

$$\mathcal{L}(p\gamma_1, \gamma_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{número de intersección algebraica} \\ \text{de } \gamma_2 \text{ con } S_{\gamma_1}. \end{array} \right\}$$

donde  $S_{\gamma_1}$  es una superficie encajada en  $M$  y con frontera  $\gamma_1$ . Y definamos:

$$\mathcal{L}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\mathcal{L}(p\gamma_1, \gamma_2)}{p}$$

Observemos que como  $H_1(M)$  es finito entonces  $H_2(M) = 0$ , de modo que  $\mathcal{L}(p\gamma_1, \gamma_2)$  no depende de la elección de  $S_{\gamma_1}$ . Se ve también que

$$\mathcal{L}(p\gamma_1, \gamma_2) = \mathcal{L}(p\gamma_2, \gamma_1)$$

y que si  $\gamma_2$  es homóloga a  $\gamma_2'$  entonces

$$\mathcal{L}(p\gamma_1, \gamma_2) = \mathcal{L}(p\gamma_1, \gamma_2') + np, \text{ p.a. } n$$

por lo que  $\mathcal{L}(\gamma_1, \gamma_2)$  y  $\mathcal{L}(\gamma_1, \gamma_2')$  difieren por un entero. De éste modo se puede definir el *Número de Enlace Racional* como

$$\mathcal{L}(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

y es una forma bilineal bien definida en clases de homología.

Una vez definido el número de enlace racional para 3-variedades con homología cíclica finita probemos el siguiente resultado:

**Lema 11** Sea  $X$  un ovillo cualquiera tal que

$$N(X + (\infty)) = (1)$$

$$\text{y}$$

$$N\left(X + \frac{q}{p}\right) = b(p, q)$$

entonces

$$q \equiv \alpha t^2 \pmod{p} \text{ para algún entero } t.$$

**DEMOSTRACIÓN:**

Por lo que hemos aprendido hasta ahora podemos afirmar primero que por la definición de espacio lente,  $L(p, q)$  se obtiene por cirugía  $\frac{q}{p}$  sobre el nudo trivial.

**Afirmación:** Sea  $M$  una 3-variedad que se obtiene por cirugía  $\frac{q}{p}$  en un nudo  $K \subset S^3$ , entonces

$$\mathcal{L}(\mu, \mu) = \frac{q}{p}$$

donde  $\mu$  es el generador de  $H_1(M)$  que representa un meridiano para  $K$ .

Observemos que  $H_1(M) = \mathbb{Z}_p$ . Entonces para probar la afirmación hay primero que encontrar una superficie de Seifert para  $p \cdot \mu$ , y por definición

$$\mathcal{L}(\mu, \mu) = \frac{\mathcal{L}(p \cdot \mu, \mu)}{p}$$

De todo esto, tomando  $M = L(p, q)$ , se concluye que existe un generador  $g$  de  $H_1(L(p, q))$  tal que

$$\mathcal{L}(g, g) = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Pero por hipótesis y por el lema anterior  $L(p, q)$  se obtiene por cirugía  $\frac{q+\alpha p}{p}$  sobre algún nudo  $K$  donde  $p = \pm(\beta + s\alpha)$ . Esto es

que

$\exists h$  generador de  $Z_p$

$$\exists \cdot \mathcal{L}(h, h) = \frac{\alpha}{\beta + \alpha} = \pm \frac{\alpha}{p}$$

Cabe preguntarse ahora como son  $g$  y  $h$ . Como los dos son generadores de  $Z_p$  entonces

$$\exists t \in \{1, 2, \dots, p-1\} \cdot \exists \cdot g = th.$$

y por lo tanto, recordando que el número de enlace racional es una forma bilineal, se tiene que:

$$\mathcal{L}(g, g) = \mathcal{L}(th, th) = t\mathcal{L}(h, th) = t^2\mathcal{L}(h, h)$$

y entonces

$$\pm \frac{\alpha}{p} t^2 = \frac{\alpha}{p} \Rightarrow t^2 \equiv \pm 1 \pmod{p} \quad \square$$

De manera análoga se prueba el siguiente:

**Lema 12** Sea  $X$  un ovillo cualquiera tal que

$$N(X + (0)) = \langle 1 \rangle$$

$$N\left(X + \frac{q}{p}\right) = b(p, q)$$

entonces

$$q \equiv \beta t^2 \pmod{p} \text{ para algún entero } t.$$

Para terminar veremos el siguiente corolario que se debe al Dr. M.Boileau:

**Corolario 2** Si  $T$  es un ovillo tal que  $T = (0)$  ó  $T = (\infty)$  entonces no existe ningún ovillo  $X$  tal que

$$N(X + T) = \langle 1 \rangle$$

y

$$N(X + (\pm 1)) = \langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle = b(8, 5).$$

**DEMOSTRACIÓN:**

Se tiene:

$$\alpha = \beta = \pm 1$$

$$p = 8, q = 5$$

por el lema anterior llegamos a que si el sistema tiene solución entonces:

$$5 \equiv \pm t^2 \pmod{8} \text{ para algún entero } t.$$

Sin embargo esta congruencia no tiene solución en  $\mathbb{Z}$ , pues para cualquier entero  $t$  se tiene que, módulo 8,

$$t^2 \in \{0, 1, 4\}. \quad \square$$

Con esto podemos ya regresar a revisar el problema biológico, plantear un modelo y probar su eficacia, tal parece que la herramienta matemática necesaria ha sido expuesta ya en su totalidad.

## **3.2 La Tn3 Resolvasa: el modelo de ovillos.**

### **3.2.1 Presentación del modelo.**

Recordemos que al final del capítulo 1 de este trabajo se propuso a grandes rasgos un modelo para la acción enzimática de la Tn3, nos proponemos dar ahora una descripción más precisa de aquel modelo desde el punto de vista matemático. Cabe recalcar que el objetivo del modelo es el de captar la topología de todo el complejo sináptico en un evento de recombinación tanto antes como después de la acción enzimática, dada la topología de sustrato y producto.

Recordemos toda la terminología que se introdujo en el capítulo I. Allí vimos que en la recombinación de sitio específico sobre un sustrato circular de ADN hay dos tipos de movimientos:

1.- Una isotopía ambiental global del espacio  $S^3$  en que se un par de sitios de recombinación se ponen en paralelo, y se adhiere entonces la enzima a la molécula formando así el complejo sináptico.

2.- Un movimiento local, que se atribuye totalmente a la acción enzimática, y que tiene lugar una vez concluida la sinápsis:

en la región por ella controlada, la enzima rompe en cada sitio al nudo o enlace formado por la molécula y recombina los extremos con un intercambio de hebras.

Fijemos toda nuestra atención en la estructura del complejo sináptico local antes de que se lleve a cabo la recombinación, y justo después de ésta.

En las micrografías electrónicas se ven frecuentemente pares de hebras de ADN girando una al rededor de la otra. Tanto los ovillos racionales como los 4-plats están formados al hacer girar pares de hebras así y se ven como el ADN en las micrografías. Además resulta que muchos de los productos de experimentos

de recombinación sobre sustratos de moléculas circulares no anudadas resultan ser 4-plats. Veamos a la esfera de influencia de la enzima como una 3-bola  $B^3 \subset S^3$  y observemos que el complejo sináptico local que consiste de la pareja "enzima-ADN cubierto" forma un ovillo de dos arcos en  $B^3$ . En 1986 surgió entonces la idea de modelar la acción de las enzimas sobre el ADN usando lo que sabemos sobre ovillos, y, dado que se observó que los ovillos de interés son usualmente racionales y que en esos casos los productos son 4-plats entonces los experimentos se pueden describir con ecuaciones de ovillos del tipo de las que ya aprendimos a resolver.

Antes de continuar debemos hacer una serie de suposiciones matemáticas y biológicas que forman parte del modelo de ovillo y sin las cuales nuestro trabajo pierde sentido. La mayoría de éstas suposiciones suelen estar implícitas en los análisis que se hacen de resultados de experimentos con enzimas.

**Suposición biológica 1.-:** *El mecanismo de la enzima es constante para cada evento simple de recombinación, independiente de la geometría euclídeana (superposiciones) y topología (anudamiento y enlazamiento) que son variables en la población del sustrato. Más aún, toda la recombinación se lleva a cabo solo dentro de  $B^3$ , y la configuración del sustrato fuera de ésta bola permanece fija durante el evento en que las hebras son separadas y recombinadas en el interior y en la frontera de  $B^3$ .*

Observemos que la Suposición Biológica lo que está diciendo es que si dos complejos sinápticos locales, llamados también *sinaptosomas*, vistos antes de la recombinación son "iguales", donde por iguales me refiero a que representan ovillos equivalentes, entonces podemos suponer también que los sinaptosomas después de la recombinación son iguales.

En un evento de recombinación podemos hacer distinción matemática entre distintas partes del ADN involucrado. Surgen tres tipos distintos:

1) El ADN en los sitios de resolución y cerca de ellos allí donde la ruptura del ADN se está llevando a cabo.

2) El resto del ADN adherido a la enzima pero que queda invariante durante un evento de recombinación.

3) El ADN en el complejo sináptico que no está adherido a la enzima y que no cambia durante la recombinación.

Acerca de los tipos 1) y 2) podemos hacer la siguiente:

**Suposición matemática 1.-:** *El sinaptosoma es un ovillo y puede ser subdividido como la suma de dos ovillos.*

Al ovillo que contiene al ADN de la forma 1) se le llama ovillo paterno o de sitio y se denota por T. Al otro ovillo se le denota por  $O_b$  y es aquel que está dentro del dominio de acción de la enzima pero que no cambia durante el evento de recombinación.

El ADN de tipo 3) se ve como un ovillo al que llamamos ovillo libre  $O_f$  y es quien no toca a la enzima además de no ver su estructura alterada por la recombinación.

Finalmente podemos decir que la acción enzimática se ve, a nivel del sinaptosoma, como el simple hecho de reemplazar un ovillo por otro, también llamado "cirugía de ovillos": el ovillo T pre-recombinante es reemplazado por un ovillo post-recombinante que llamaremos R. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{sinaptosoma pre-recombinante} &= (O_b + T) \\ \text{sinaptosoma post-recombinante} &= (O_b + R).\end{aligned}$$

**Suposición matemática 2.-:** *Todo el complejo sináptico se puede ver como:*

$$\begin{aligned}N(O_f + \text{sinaptosoma}) &= N(O_f + (O_b + T)) \\ &\quad \text{ó} \\ N(O_f + \text{sinaptosoma}) &= N(O_f + (O_b + R))\end{aligned}$$

Si nos fijamos en el complejo sináptico pre-recombinante sin la enzima obtenemos el sustrato del experimento, y análogamente el complejo sináptico post-recombinante sin la enzima da el producto. Por otra parte, llamemos

$O = O_f + O_b$  al ovillo de afuera u ovillo de substrato. Entonces el nudo resultante en el substrato se puede pensar como  $N(O + T)$ , análogamente para el producto donde se obtiene  $N(O + R)$ , y  $O$  no cambia por la **Suposición Biológica 1.-**. Así, la estructura topológica de substrato y producto genera ecuaciones de ovillos donde las variables son justamente  $O, T$  y  $R$ . En un evento simple de recombinación sobre una única molécula de ADN doble, circular y desanudada del substrato produce las dos ecuaciones siguientes:

$$N(O + T) = \text{substrato} \dots \dots \dots (i)$$

$$N(O + R) = \text{producto} \dots \dots \dots (ii)$$

Para resolver estas ecuaciones para las variables  $\{O, T, R\}$  necesitamos cierta información experimental. El cambio topológico entre substrato y producto puede ser utilizado para determinar al ovillo  $O$ . Para determinar la descomposición de  $O$  en  $O_f$  y  $O_b$ , debemos tener información de la estructura del ADN del complejo sináptico que no está pegado a la enzima, y ésta puede provenir de las micrografías electrónicas del complejo sináptico, de su velocidad en el gel, o del conocimiento del espectro de estructura (tipos de nudo y de enlace) de la población del substrato. En cuanto a  $T$  y  $R$  hacemos la siguiente:

**Suposición matemática 3.-:**  $T$  y  $R$  son constantes determinadas por la enzima, independientes de la geometría variable de  $O$ .

Generalmente contamos con una cantidad suficiente de información para resolver las ecuaciones (i) y (ii). Podemos tener por ejemplo información sobre los resultados de la recombinación hecha en substratos distintos.

Pero también se mencionó que en el caso de la  $Tn3$  resolvasa pueden, en un mismo experimento, ocurrir múltiples vueltas de recombinación ya sea de manera distributiva ( la enzima se adhiere a la molécula, lleva a cabo uno o más movimientos recombinantes, suelta la molécula, y otra copia de la enzima se pega a esta molécula ya liberada, efectúa la recombinación, suelta la molécula, y así sucesivamente) o, una vez sobre 20, de manera consecutiva. Este último caso encuentra una interpretación matemática más simple que el anterior y

proporciona resultados muy representativos desde el punto de vista biológico. En éste caso los resultados de varias vueltas de recombinación llevadas a cabo en un único encuentro nos dan mucha información siempre y cuando hagamos la siguiente:

**Suposición matemática 4.-:** Para  $n$  vueltas de recombinación consecutiva, el sinaptosoma post-recombinación es  $(O_b + nR)$ . Es decir que la recombinación consecutiva actúa por adición de ovillos.

Esta suposición lo que dice es que, después de la primera vuelta de recombinación en que  $T$  es reemplazado por  $R$ , cada nueva recombinación llevada a cabo durante un único encuentro de la enzima con la molécula lo que hace es sumarle al sinaptosoma el ovillo recombinante  $R$ , y entonces después de  $n$  vueltas lo que se hizo fue reemplazar, en  $(O_b + T)$ , a  $T$  por  $nR = R + R + \dots + R$ . Así la ecuación (ii) correspondiente a éste caso es:

$$N(O + nR) = \text{producto de } n \text{ vueltas} \dots \dots (ii).$$

De este modo en el experimento hecho con Tn3 resolvasa algunas de la variables aparecen un tal número de veces como para que nos permitamos afirmar que podemos obtener suficiente información para probar que  $O$ ,  $T$  y  $R$  deben ser racionales y para resolver las ecuaciones de la recombinación obteniendo soluciones que concuerdan con las observaciones.

### 3.2.2 Demostración del modelo.

Resumiendo lo que se ha mencionado hasta ahora acerca de la enzima que nos interesa, podemos decir que la Tn3 resolvasa es una recombinasa de sitio específico que actúa sobre ciertos substratos de dobles hélices de ADN circular desanudado con sitios de resolución de repetición directa. Sabemos también que esta enzima no actúa sobre sitios que no se encuentren en la misma cadena en caso de que las dos cadenas no están enlazadas. Se cree que ésto se debe a que la enzima no logra en estos casos poner los sitios de resolución en paralelo.

Al hacer actuar a la Tn3 resolvasa sobre un substrato de moléculas de ADN

como el ya descrito se observan, en el producto, distintos tipos de nudo de los cuales se observa un producto mayoritario (en cantidad) y varios productos menores.

En la mayor parte de los casos, al hacer actuar a la resolvasa sobre un substrato dado, ésta actúa de manera dispersiva, es decir que se lleva a cabo una sola vuelta de recombinación antes de que la molécula suelte al producto. El producto principal observado corresponde entonces a esta reacción y es el enlace de Hopf que es un 4-plat con símbolo de Conway (2). Se observa que si le damos una orientación al nudo trivial del que partimos y le hacemos heredar esta orientación al enlace de Hopf entonces éste tiene siempre número de enlace (-1). Sin embargo sabemos que la resolvasa a veces actúa en forma consecutiva, y resulta que mientras más vueltas de recombinación ocurran en un mismo encuentro, menor es la frecuencia de aparición del producto de esta reacción, y de hecho la frecuencia decrece exponencialmente con el aumento del número de recombinaciones consecutivas. De este modo los productos, que son los siguientes: ( figura 3.2,)

- nudo figura ocho =  $(2, 1, 1)$
- enlace de Whitehead =  $(1, 1, 1, 1, 1)$
- nudo  $\theta_2 = (1, 1, 1, 2, 1)$ ,

se cree que son respectivamente los resultados de dos, tres y cuatro vueltas consecutivas de recombinación.

El descubrimiento del producto  $(1, 1, 1, 2, 1)$  obtenido sentó las bases para el modelo de que se ha hablado y que describe el mecanismo de la Tn3. Se dará una prueba matemática de que este modelo es la única explicación posible de la estructura del complejo sináptico para los primeros tres productos observados de recombinación con Tn3 dadas las suposiciones que se hicieron, donde cabe destacar que el papel más fuerte lo juega la **Suposición Matemática 4.-**

Se probará primero que los resultados experimentales de las primeras 2 vueltas de recombinación consecutiva de Tn3 producen ecuaciones de ovillos con cuatro soluciones para *O* y *R*. A continuación se verá que la tercera vuelta de recombinación se puede utilizar para descartar tres de las soluciones antes

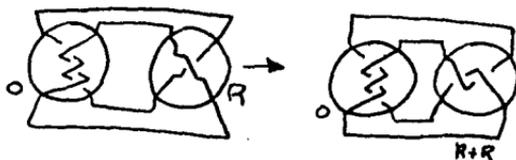
molécula K

ovillo exterior O

ovillo de sitio T



Producto



Las Ecuaciones

$$N(O+T) = \text{[Diagram of O and T linked]} = \text{[Diagram of a circle]} = \langle 1 \rangle \text{ nudo trivial}$$

$$N(O+R) = \text{[Diagram of O and R linked]} = \text{[Diagram of a Hopf link]} = \langle 2 \rangle \text{ enlace de Hopf}$$

$$N(O+R+R) = \text{[Diagram of O, R, and R linked]} = \text{[Diagram of a trefoil knot]} = \langle 2, 1, 1 \rangle \text{ nudo figura 8}$$

$$N(O+R+R+R) = \text{[Diagram of O, R, R, and R linked]} = \langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle \text{ enlace de Whitehead}$$

$$N(O+R+R+R+R) = \text{[Diagram of O, R, R, R, and R linked]} = \langle 1, 1, 1, 1, 2, 1 \rangle$$

6<sub>2</sub>

encontradas dejando una que se cree es la solución correcta biológicamente hablando.

Antes de continuar demos un lema que tiene como corolario un resultado que será fuertemente utilizado en una parte de la prueba del teorema que nos proporciona las soluciones a un sistema conocido de ecuaciones de ovillos.

**Lema 13** Sean  $A$  y  $B$  ovillos tales que  $A + B$  es un ovillo racional, entonces sucede una de las siguientes situaciones:

$A$  y  $B$  son racionales, o,

si uno es primo entonces el otro debe ser el ovillo ( $\infty$ ).

#### DEMOSTRACIÓN:

Observación:  $A + B = R$  racional  $\Rightarrow A$  y  $B$  son localmente desanudados.

Consideremos las dobles cubiertas cíclicas ramificadas de  $A$ ,  $B$  y  $A + B$  que denotamos por  $A'$ ,  $B'$  y  $(A + B)'$ . Sabemos que  $(A + B)'$  es un toro sólido y que, por la observación,  $A'$  y  $B'$  son variedades irreducibles cuya frontera es un toro bidimensional.

Como  $A + B = A \cup_d B$  donde  $d$  es un disco que toca a los arcos del ovillo en dos puntos, entonces  $(A + B)' = A' \cup_{d'} B'$  donde  $d'$  resulta ser un anillo esencial en  $\partial A'$  y  $\partial B'$ . Tenemos dos casos posibles para  $d'$  y éstos son que sea compresible en alguno de  $A' \circ B'$ , o bien que sea incompresible en las dos.

2)  $d'$  es incompresible en  $A'$  y  $B'$ .

En éste caso  $d'$  es también incompresible en  $A' \cup_{d'} B'$ . Recorde-mos los siguientes resultado de tres variedades:

Sea  $M$  una 3-variedad y  $S$  una superficie que separa a  $M$  como  $M = X \cup_S Y$ . Si  $S$  es incompresible en  $X$  y en  $Y$  entonces además de que

$$\Pi_1(S) \hookrightarrow \Pi_1(X)$$

y

$$\Pi_1(S) \hookrightarrow \Pi_1(Y)$$

se tiene que  $S$  es incompresible en todo  $M$  de modo que

$$\Pi_1(S) \hookrightarrow \Pi_1(M)$$

y

$$\Pi_1(X) \hookrightarrow \Pi_1(M)$$

$$\Pi_1(Y) \hookrightarrow \Pi_1(M)$$

Aplicando ésto a nuestro problema, como  $d$  es un anillo entonces

$\Pi_1(d) = Z$  y tenemos que:

$$\Pi_1(d) = Z \hookrightarrow \Pi_1(A')$$

y

$$\Pi_1(d) = Z \hookrightarrow \Pi_1(B')$$

y  $\Pi_1(A')$  y  $\Pi_1(B')$  se inyectan en el grupo  $\Pi_1((A+B)') = Z$ .

Entonces:

$$\Pi_1(A') = Z$$

y

$$\Pi_1(B') = Z$$

así que  $A'$  y  $B'$  son toros sólidos, es decir que  $A$  y  $B$  son racionales.

Ahora, si suponemos que alguno de los dos no es racional, lo que en este caso significa que es primo, sucede que:

2) Si  $d'$  es compresible en  $A'$ .

Esto significa que hay una curva esencial en  $d'$  que es homológicamente cero en  $A'$ , pero dado que  $d' \subset \partial A'$  entonces podemos afirmar que  $A'$  tiene frontera compresible, y como además sabemos que  $A'$  es irreducible y que  $\partial A'$  es un toro, entonces  $A'$  es un toro sólido. Entonces  $A$  es un ovillo racional. Y además si  $A'$  es toro sólido y  $d'$  es compresible en  $A'$ , y como todas las curvas esenciales en  $d'$  son paralelas, podemos afirmar que  $\partial d'$  está formada por dos meridianos del toro  $A'$ ,  $m_1$  y  $m_2 = \rho m_1$ . Como los arcos del ovillo  $A$  se levantan a los arcos del toro sólido  $A'$  que se muestran en la figura

3.2, entonces sabemos que podemos elegir un disco  $d'_1 \ni \partial d'_1 = m_1$  que no interseca a las preimágenes de los arcos del ovillo ni tampoco a su rotado  $\rho(d'_1)$  (observemos que  $\partial[\rho(d'_1)] = m_2$ ). En éste caso  $d'_1$  se proyecta en un disco encajado en  $A$ , con la misma frontera que  $d_1$ , y que separa a las dos hebras del ovillo mostrando así que  $A$  está forzado a ser el ovillo trivial  $(\infty)$ .  $\square$

**Corolario 3** Si  $A$  y  $B$  son ovillos tales que  $A$  es primo,  $B$  es localmente desanudado y  $B \neq (\infty)$ , entonces  $A + B$  es primo.

**DEMOSTRACIÓN:**

Supongamos que  $A + B$  es racional, entonces por el lema anterior, con la hipótesis de que  $A$  es primo, se llega a que  $B = (\infty)$ . Como esto contradice las hipótesis entonces  $A + B$  debe ser primo.  $\square$

Enunciemos ahora sí el teorema que nos lleva a probar que, una vez hechas las suposiciones biológicas y matemáticas de las que ya hemos hablado, el modelo propuesto es correcto.

**Teorema 15** Supóngase que los ovillos  $O, T$  y  $R$  satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$N(O + T) = (1) \dots\dots\dots (i)$$

$$N(O + R) = (2) \dots\dots\dots (ii)$$

$$N(O + R + R) = (2, 1, 1) \dots\dots (iii)$$

Entonces

$$\{O, R\} \in \left\{ \begin{array}{l} \{(-3, 0), (1)\}; \{(3, 0), (-1)\}; \\ \{(-2, -3, -1), (1)\}; \{(2, 3, 1), (-1)\} \end{array} \right\}$$

**DEMOSTRACIÓN:**

Observemos que como  $(2)$  y  $(2, 1, 1)$  son 4-plats amfiquirales entonces dada una solución  $\{O, R\}$  al sistema formado por las ecuaciones  $(i), (ii), (iii)$  entonces  $\{-O, -R\}$  también es solución.

Primero probaremos que  $R$  debe ser un ovillo racional:

$N(O + T) = \langle 1 \rangle \Rightarrow O$  y  $T$  son localmente desanudados por la proposición 10.

$N(O + R) = \langle 2 \rangle \Rightarrow$  a lo más uno de  $O$  ó  $R$  es localmente anudado, y por lo anterior a lo más  $R$  es localmente anudado, pero ésto es imposible pues  $\langle 2 \rangle$  es un enlace de dos componentes desanudadas. Entonces  $R$  es localmente desanudado.

Ahora, si  $R$  tiene paridad  $(\infty)$  entonces  $N(O + R + R)$  debe ser un enlace de dos o tres componentes. Dado que por hipótesis ésto no sucede sino que  $N(O + R + R)$  es un nudo entonces  $R$  no puede tener paridad  $(\infty)$ . De este modo  $R$  debe tener paridad  $(0)$  ó  $(1)$ . Observemos además que  $O$  debe ser distinto de  $(\infty)$ . Ésto último se debe a que si suponemos  $O = (\infty)$  entonces como se puede ver en la figura 3.2:

$$N(O + R) = D(R), \forall R \text{ ovillo.}$$

Y la única manera de que  $D(R)$  sea un enlace de dos componentes es teniendo a un  $R$  de paridad  $(\infty)$ . Así, se concluye que  $O \neq (\infty)$ .

Supongamos que  $R$  es primo y entonces como  $O$  es localmente desanudado y  $O \neq (\infty)$ , entonces por el corolario al lema 13 afirmamos que  $O + R$  es primo. Pero dado que la ecuación (iii) dice:

$$N(O + R + R) = N((O + R) + R) = \langle 2, 1, 1 \rangle$$

entonces por el lema 13 uno de  $(O + R)$  ó  $R$  es racional lo cual es una contradicción.

En suma sabemos que  $R$  es localmente desanudado y suponer que es primo nos lleva a una contradicción, por lo tanto  $R$  debe ser racional.

Demostremos ahora que  $O$  es racional:

Sabemos que es localmente desanudado, supongamos entonces

que es primo. Pero

$$\begin{aligned} O \text{ primo} &\Rightarrow T \text{ racional por (i)} \\ &\Rightarrow O' \text{ es complemento de un nudo en } S^3. \end{aligned}$$

$O'$  denota la doble cubierta cíclica ramificada de  $O$ .

Del mismo modo, por el teorema 12

$$\begin{aligned} N(O + (R + R)) &= (2, 1, 1) \\ &\Rightarrow (R + R) \text{ es racional} \end{aligned}$$

Y entonces se tiene que  $R$  y  $(R + R)$  son racionales y por lo tanto  $R'$  y  $(R + R)'$  son toros sólidos. Además  $(2) = b(2, 1)$  y  $(2, 1, 1) = b(5, 3)$  y entonces

$$\begin{aligned} [N(O + R)]' &= L(2, 1) \\ [N(O + R + R)]' &= L(5, 3) \end{aligned}$$

y podemos afirmar  $L(2, 1)$  y  $L(5, 3)$  se obtienen por cirugía de Dehn en el complemento  $O'$  de algún nudo.

Ahora aplicando los lemas 6 y 7 a las ecuaciones (i), (ii) y (iii) se tiene que como  $|2 - 5| > 1$  entonces  $O'$  es complemento de un nudo toroidal, y como además existe  $r$  tal que  $O'_r = L(2, 1)$  entonces  $O'$  es toro sólido y por lo tanto  $O$  es ovillo racional lo cual es una contradicción pues se supuso que ese ovillo era primo.

Así, como  $O'$  no puede ser ni primo ni localmente anudado entonces es racional.

Tenemos entonces que los ovillos  $O$  y  $R$  que sean solución al sistema deben ser ovillos racionales.

Ahora hay que probar que uno de estos dos ovillos tiene que ser un ovillo entero. Si suponemos que ninguno de los dos es entero entonces  $N(O + R + R)$  resulta ser un nudo de Montesinos no trivial y por lo tanto no puede ser 4-plat, lo que es una contradicción.

Sabemos que  $R$  no tiene la paridad ( $\infty$ ). Supongamos que  $R$  es el ovillo entero ( $r$ ). Suponiendo que  $R = (0)$  tendríamos:

$$(2) = N(O + (0)) = N(O + (0) + (0)) = (2, 1, 1)$$

lo cual es claramente una contradicción y por lo tanto si  $R$  es entero se tiene  $r \neq 0$ .

Suponiendo que  $R = (r)$  y  $O = \frac{2}{r}$  son soluciones a las ecuaciones propuestas entonces por el lema 2.1 se tiene que:

$$|u + rv| = 2$$

y

$$|u + (2r)v| = 5$$

Resolvamos entonces éste sistemita:

Sea  $x = rv$ , entonces haciendo este cambio y elevando las ecuaciones al cuadrado obtenemos las siguientes:

$$u^2 + 2ux + (x^2 - 4) = 0$$

$$u^2 + 4ux + (4x^2 - 25) = 0$$

y las soluciones a cada una de éstas ecuaciones de segundo grado son respectivamente:

$$u = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(x^2 - 4)}}{2} = -x \pm 2$$

y

$$u = \frac{-4x \pm \sqrt{16x^2 - 4(4x^2 - 25)}}{2} = -2x \pm 5$$

es decir

$$u \in \{-x + 2; -x - 2\} \cap \{-2x + 5; -2x - 5\}$$

y las soluciones  $\{u, x\}$  posibles son

$$\{(-1, 3); (1, -3); (9, -7); (-9, 7)\}$$

y para cada par simétrico de éstas se tienen varias soluciones  $\{\frac{x}{v}, r\}$ , por ejemplo:

$$\{u, x\} = \{-1, 3\} \text{ ó } \{1, -3\} \Rightarrow \\ \{\frac{x}{v}, r\} \in \left\{ \left\{ \frac{-1}{3}, 1 \right\}; \left\{ \frac{-3}{-3}, -1 \right\}; \{-1, 3\}; \{1, -3\} \right\}$$

Es fácil verificar que de estas cuatro soluciones,  $\{-1, 3\}$  y  $\{1, -3\}$  no son solución de (iii), y solo lo son  $\{-\frac{1}{3}, 1\} = \{(-3, 0), (1)\}$  y  $\{\frac{1}{3}, -1\} = \{(3, 0), (-1)\}$  quienes son entonces soluciones al sistema inicial.

De manera análoga partiendo de  $\{u, x\} = \{9, -7\}$  ó  $\{-9, 7\}$  se obtienen de nuevo cuatro posibilidades de las cuales solo dos son solución al sistema inicial y ellas son:  $\{\frac{9}{7}, -1\} = \{(2, 3, 1), (-1)\}$  y  $\{-\frac{9}{7}, 1\} = \{(-2, -3, -1), (1)\}$ . Obtengo así que si  $R$  es un ovillo entero el sistema tiene cuatro soluciones posibles para  $\{O, R\}$ . Además observemos que las soluciones que fueron descartadas por no satisfacer la ecuación (iii) corresponden al caso en que tanto  $R$  como  $O$  son enteros. De éste modo  $O$  y  $R$  no pueden ambos ser ovillos enteros.

Ahora supongamos que  $O = (s)$  un ovillo entero y que  $R = \frac{v}{v}$  con  $v > 1$ . Entonces por el Lema 2.1 tenemos

$$|u + sv| = 2$$

Como  $O$  es un ovillo entero podemos afirmar que:

$$N((O + R) + R) = N(R + (R + O)) = (2, 1, 1)$$

y el ovillo  $(R + O)$  está clasificado por el número racional  $(s + \frac{x}{v})$  de forma que si volvemos a aplicar el lema 2.1 obtenemos:

$$|2uv + sv^2| = v|2u + sv| = 5$$

de modo que como  $v > 1$  y 5 es primo entonces

$$v = 5$$

Así, dadas las ecuaciones

$$|u + 5v| = 2$$

y

$$|2u + 5v| = 1$$

encontramos como soluciones a

$$(u, s) = \left\{ \left( -1, \frac{3}{5} \right), \left( 1, -\frac{3}{5} \right), (-3, 1), (3, -1) \right\}$$

de las cuales podemos de entrada descartar las dos primeras donde  $s$  no es entero, y con un poco más de trabajo se verifica que las soluciones  $\{O, R\}$  propuestas por las demás no satisfacen la ecuación (iii).  $\square$

Llegamos entonces a tener cuatro soluciones posibles al sistema de tres ecuaciones propuesto. Nosotros quisieramos tener una sola que sea correcta desde el punto de vista biológico. Para ésto hace falta más evidencia experimental y de hecho se necesita un nuevo producto que esta vez sea queiral pues de lo contrario las soluciones vienen por parejas. Afortunadamente se encontró el enlace de Whitehead que es queiral y que parece ser el resultado de tres vueltas consecutivas de recombinación. Con éste dato final podemos encontrar una única solución para  $\{O, R\}$  y se puede predecir el producto de una cuarta vuelta consecutiva que también ha sido observado.

**Corolario 4** *Supóngase que los ovillos  $O, T$  y  $R$  satisfacen las siguientes ecuaciones*

ciones:

$$N(O + T) = (1) \dots\dots\dots (i)$$

$$N(O + R) = (2) \dots\dots\dots (ii)$$

$$N(O + R + R) = (2, 1, 1) \dots\dots\dots (iii)$$

$$N(O + R + R + R) = (1, 1, 1, 1) \dots\dots (iv)$$

Entonces

$$\{O, R\} = \{(-3, 0), (1)\}$$

y además

$$N(O + R + R + R + R) = (1, 1, 1, 2, 1) \dots\dots (v)$$

#### DEMOSTRACIÓN:

Es fácil ver que de las cuatro soluciones encontradas en el teorema 15 la única que satisface la ecuación (iv) es  $\{O, R\} = \{(-3, 0), (1)\}$ .  $\square$

Observemos que, dados los sistemas anteriores, no hemos obtenido ninguna información acerca del ovillo  $T$ . Recordemos por otra parte que si asignamos una orientación a cada nudo trivial del substrato y observamos con cuidado la orientación inducida en cada uno de los productos, entonces vemos que los productos debidos a una sola vuelta de recombinación encontrados son, en todos los casos, el enlace de Hopf con número de enlace  $(-1)$ . Afirmamos que si en el corolario anterior aumentamos las siguientes dos hipótesis:

- La paridad de  $T$  es cero

- El número de enlace de  $N(O + R)$  es  $(-1)$

entonces las ecuaciones (i) y (ii) son suficientes para determinar la solución correcta, desde el punto de vista biológico, de  $\{O, R\}$  y para predecir los resultados de todas las siguientes vueltas de recombinación consecutiva.

El conocer  $\{O, R\}$  y el número de enlace del producto de la primera vuelta de recombinación consecutiva podemos obtener cierta información acerca del ovillo  $T$ .

**Corolario 5** Supóngase que el ovillo  $T$  satisface las siguientes ecuaciones:

$$N((-3,0) + T) = (1) \dots\dots\dots (i)$$

$$N((-3,0) + (1)) = (2), \text{ con número de enlace } -1 \dots\dots (ii)$$

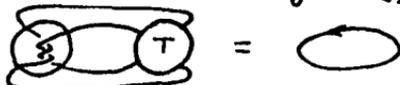
Entonces  $T$  tiene paridad  $(0)$  y, si  $T$  es racional entonces

$$T = (2z, 3, 0)$$

Figura 3.22

para algún entero  $z$ .

a)



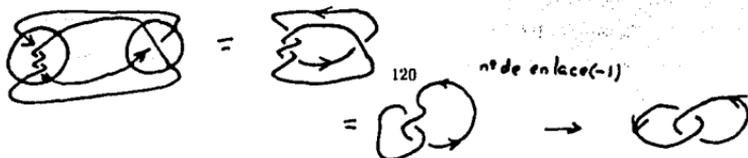
**DEMOSTRACIÓN:**

Observemos que  $T$  no puede ser de paridad  $(1)$  pues, suponiendo que lo fuera entonces como  $(-3,0)$  también tiene paridad  $(1)$  entonces  $N((-3,0) + T)$  sería un enlace de al menos dos componentes, cosa que no sucede.

$T$  tiene entonces paridad  $(0)$  o  $(\infty)$ . Demos ahora una orientación al nudo trivial, ésta debe inducir una tanto en  $(-3,0)$  como en  $T$ . Si no conocemos a  $T$  ni su paridad entonces de entrada solo podemos dar una orientación a uno de los arcos de  $(-3,0)$  tal y como lo muestra la figura 3.22(a). Este arco orientado induce una orientación en una de las componentes del enlace  $(2)$  obtenido en la ecuación (ii), y como sabemos que  $(2)$  tiene número de enlace  $(-1)$  entonces podemos determinar la orientación de la otra componente y de éste modo saber cual es la del segundo arco de  $(-3,0)$ , tal y como se ve en la figura 3.22(b). De aquí resulta que, dada la orientación en el nudo trivial, necesitamos que  $T$  sea de paridad  $(0)$ , y observamos que si la paridad fuera  $(\infty)$  obtendríamos en la ecuación (ii) el enlace de Hopf con número de enlace  $(-1)$ .

Ahora si  $T$  es además un ovillo racional entonces por el teorema  $T = (2z, 3, 0)$  para algún entero  $z$ . Y cabe destacar que si  $z = 0$  entonces  $T = (0)$ .  $\square$

b)



Muchos biólogos tienden a pensar que  $T = (0)$  y de hecho se dice que existe un argumento biomatemático para sustentar este hecho. Si suponemos que  $T = (0)$  es cierto entonces se puede determinar el mecanismo enzimático y la estructura del complejo sináptico a partir del conocimiento de los productos de una y dos vueltas de recombinación.

**Corolario 6** *Supóngase que los ovillos  $\{O, R\}$  satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$N(O + (0)) = (1) \dots\dots\dots (i)$$

$$N(O + R) = (2), \text{ con número de enlace } -1 \dots\dots (ii)$$

$$N(O + R + R) = (2, 1, 1) \dots\dots\dots (iii)$$

entonces:

$$\{O, R\} = \{(-3, 0), (1)\}$$

$$N(O + R + R + R) = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$N(O + R + R + R + R) = (1, 1, 1, 2, 1)$$

DEMOSTRACIÓN:

Del teorema 15 tenemos que hay a lo más 4 soluciones para  $\{O, R\}$  y son

$$\{(-3, 0), (1)\}, \{(3, 0), (-1)\}, \\ \{(2, 3, 1), (-1)\}, \{(-2, -3, -1), (1)\}.$$

Observemos en la figura 3.2<sub>3</sub> que las últimas dos soluciones propuestas no satisfacen la ecuación (i). Y, por el corolario anterior, de las dos primeras soluciones propuestas la única que satisface la ecuación (ii) donde el producto tiene número de enlace (-1) es  $\{(-3, 0), (1)\}$ . Y se vio en el corolario 4 que  $\{O, R\} = \{(-3, 0), (1)\}$  satisface:

$$N(O + R + R + R) = (1, 1, 1, 1, 1)$$

y

$$N(O + R + R + R + R) = (1, 1, 1, 2, 1) \square$$



Con ésto se vé que, haciendo ciertas suposiciones biológicas y matemáticas más o menos fuertes, se prueba que el modelo propuesto en el capítulo 1 para la acción de la enzima recombinasa Tn3 resolvasa es correcto y es el único posible. Ahora sólo queda esperar a que surja evidencia biológica suficiente para demostrar que las suposiciones son ciertas en general para este tipo de experimentos. Esto último no es nada evidente y nos impide afirmar sin lugar a dudas que nuestro modelo es "el" correcto, sin embargo da una buena aproximación de la realidad.

## Bibliografía

- [BZ] G.Burde yH.Zieschang. *Knots*.  
de Gruyter Studies in Mathematics (1985).
- [L] W.B.R.Lickorish. *Prime Knots and Tangles*.  
Transactions of the American Mathematical Society Volume 267, Number 1, (September 1981). 321-332.
- [R] D.Rolfsen. *Knots and Links*.  
Publish or Perish (1976).
- [DW1] D.W.Sumners. *The role of Knot Theory in DNA research*.  
Geometry and Topology (Marcel Dekker, 1987) p297-318.
- [DW2] D.W.Sumners. *Untangling DNA*.  
The Mathematical Intelligencer 12 (1990). 71-80.
- [DW3] C.Ernst y D.W.Sumners. *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*.  
Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,108(1990), 489-515.
- [DW4] D.W.Sumners. *Knot Theory and DNA*.  
Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Volume 45(1992), 39-72.
- [C] J.H.Conway. *On enumeration of knots and links and some of their related properties*.  
Computational Problems in Abstract Algebra; Proc. Conf. Oxford 1967. Pergamon (1970), 329-358.

- [CF] R.H.Crowell y R.H.Fox. *Introduction to Knot Theory*.  
Graduate Texts in Mathematics 57, Spriger-Verlag (1977).
- [K] L.H.Kauffman. *On knots*.  
Princeton University Press (1987).
- [WC] S.A.Wasserman y N.R.Cozzarelli. *Biochemical topology: applications to DNA recombination and replication*.  
Science **232**(1986), 951-960.
- [S] Lubert Stryer. *Molecular design of life*.  
W.H.Freeman and Company.(1989).
- [D] R.E.Dickerson. *The DNA helix and how it is read*.
- [Ci] Barry A.Cipra. *To Have and to Have Knot: When Are Knots Alike?*  
Science **241**(1988), 1291-1292.

La gente se figura que algunas cosas son el colmo de la dificultad, y por eso aplauden a los trapucadas, o a mí. Yo no sé que se imaginan.

En realidad las cosas verdaderamente difíciles, son otras tan distintas.

Julio Cortázar.

Todos consideran claras las  
ideas que tienen el mismo  
grado de confusión que  
las suyas. Marcel Brouet.



**IMPRESOS MARTINEZ**

TESIS URGENTES • COMPUTADORA • MAQUILAS

ATENCION PERSONAL DE RAUL MARTINEZ RAMOS

REP. DE CUBA No. 99-28-A 2da. PISO  
MEXICO, D.F. TELS.: 521-2073 Y 512-2324