



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

01173
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

DETERMINACION NUMERICA DE LAS CARACTERISTICAS DEL FLUJO
EN TOBERAS CONVERGENTES-DIVERGENTES EN UNA DIMENSION.

TESIS DE MAESTRIA

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA MECANICA

PRESENTADA POR
Martín Villegas Gómez

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Arón Jazcilevich Diámant

CIUDAD UNIVERSITARIA
MARZO DE 1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

D E D I C A T O R I A S

Bárbara, es poco lo que puedo escribir aquí para que sea solo una dedicatoria para ti. Gracias por todo el apoyo que me diste, los buenos momentos que me motivaron a concluir este trabajo y sobre todo, gracias por tus sentimientos.

A mis padres, por la ayuda que ofrecieron durante la realización de este trabajo, Abelardo y Cecilia.

A mis hermanos y cuñada Abelardo y Norma, Rosa, Ma. Magdalena, Bartolo, José y David.

A todas las personas que en forma desinteresada me apoyaron en la realización de este trabajo.

A G R A D E C I M I E N T O S

En forma muy sincera, al Dr. Arón Jazcilevich Diamant, por la dirección y asesoría durante esta investigación y además por el apoyo que siempre me ha brindado.

A mis maestros de la DEFFI-UNAM, Dr. Luis Reyes y Dr. Jorge Carrera por sus clases que fueron verdaderas cátedras en su materia.

Al Dr. Francisco Solorio, Dr. Rogelio González y Dr. Luis Ferrer quienes formaron parte del jurado revisor.

Al Dr. Guillermo Marshall por su colaboración para la realización del programa de cómputo.

CONTENIDO.

NOMENCLATURA.	iii
INTRODUCCION.	1
CAPITULO 1. BASES TEORICAS	5
1.1 Definición de los conceptos de onda de choque, rare- facción y discontinuidad de contacto.	5
CAPITULO 2. EL METODO DE GLIMM Y ALGUNOS TRABAJOS REFERENTES AL FLUJO EN TOBERAS.	15
2.1 Conclusiones	52
CAPITULO 3. APLICACION DEL METODO DE GLIMM PARA RESOLVER LAS ECUACIONES EN UNA DIMENSION QUE DESCRIBEN EL FLUJO EN TOBERAS CONVERGENTES-DIVERGENTES Y DIVERGENTES.	53
3.1 Ecuaciones que determinan el flujo en toberas.	53
3.2 Método de Glimm.	55
3.2.1 El problema de Riemann.	58
CAPITULO 4. COMPARACION DEL MODELO PROPUESTO CON LOS ENCONTRADOS EN LA LITERATURA.	64
4.1 Comparación del modelo para el problema del flujo con simetría cilíndrica con los resultados de Sod [8].	64

4.2 Comparación del modelo para la determinación del flujo en toberas convergentes-divergentes y divergentes. . .	74
4.2.1 Tobera convergente-divergente.	74
4.2.2 Tobera divergente.	83
CAPITULO 5 CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS.	91
REFERENCIAS.	93

NOMENCLATURA.

- A.- área de la tobera;
- c.- velocidad del sonido;
- e.- energía del flujo;
- h.- intervalo de espacio;
- k.- intervalo de tiempo;
- m.- números primos enteros; momentum;
- M.- cantidad definida en (3.10);
- n.- número entero
- p.- presión del flujo;
- p.- presión en la solución del problema de Riemann.
- P.- punto muestra función de la variable aleatoria θ ;
- s.- velocidad de la discontinuidad;
- S.- estado constante del gas;
- t .- tiempo
- u.- velocidad del flujo;
- u.- velocidad en la solución del problema de Riemann.
- W.- vector del gas;
- x .- variable del espacio;

Subíndices.

- i.- espacio; variable que toma valores de 0,1,2,3....
- j.- variable que toma valores de 0,1,2,3,...
- n.- tiempo
- L.- lado izquierdo;

R.- lado derecho;
t.- derivada con respecto al tiempo;
x.- derivada con respecto al variable x;
0.- inicio;
1.- final;
*.- en el estado intermedio;

Superíndices.

T.- transpuesta;

Símbolos griegos.

α .- función variación del área de una tobera; constante
 ϵ .- energía interna por unidad de masa;
 Δ .- incremento;
 γ .- constante politrópica del gas;
 Γ .- invariante de Riemann;
 θ .- variable aleatoria;
 Σ .- sumatoria; curva suave;
 ρ .- densidad;
 $\underline{\rho}$.- densidad solución del problema de Riemann;
 ϕ .- función definida en la ecuación (3.16);

INTRODUCCION.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un método computacional, capaz de aproximar el comportamiento del flujo de gas en una dimensión, a través de toberas en régimen sónico y supersónico. Este problema presenta discontinuidades agudas en las variables de estado del flujo y esto dificulta la solución numérica de métodos tales como diferencias finitas y elemento finito. Aquí se utiliza el método de Glimm [1], capaz de manejar eficientemente en una dimensión la presencia de choques sónicos y supersónicos sin introducir ni difusión ni dispersión numérica.

En las figuras i y ii se pueden observar las soluciones de un problema en una dimensión por los métodos de Godunov [3] y Glimm [1]. Obsérvese como en el primer caso no se presenta un valor pico de la densidad y se suaviza la solución en las discontinuidades perdiéndose resolución, mientras que el método de Glimm reproduce fielmente las discontinuidades.

Este trabajo, sienta las bases para una infraestructura computacional relacionada con el estudio de flujos y toberas de turbinas de gas y compresores, así como su posible aplicación a problemas de hidráulica. El presente trabajo hizo posible obtener resultados como los que se muestran en la fig. iii al resolver el flujo supersónico-sónico en una tobera sobre la base de lo establecido en el capítulo 3.

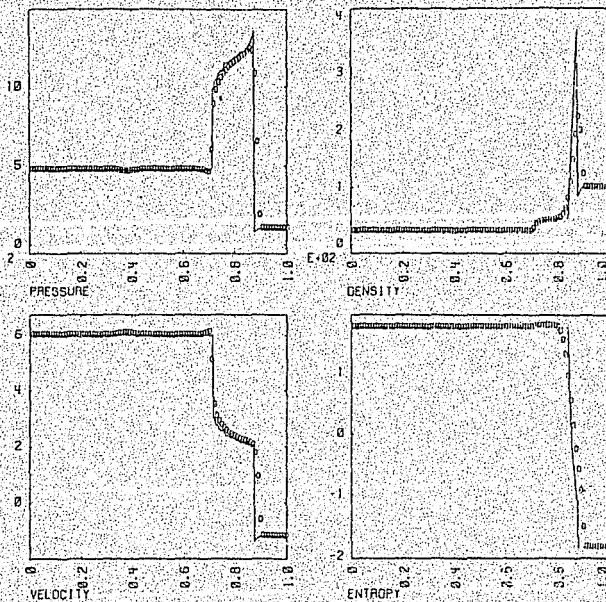


Fig. i. Solución en una dimensión mediante el método de Godunov.

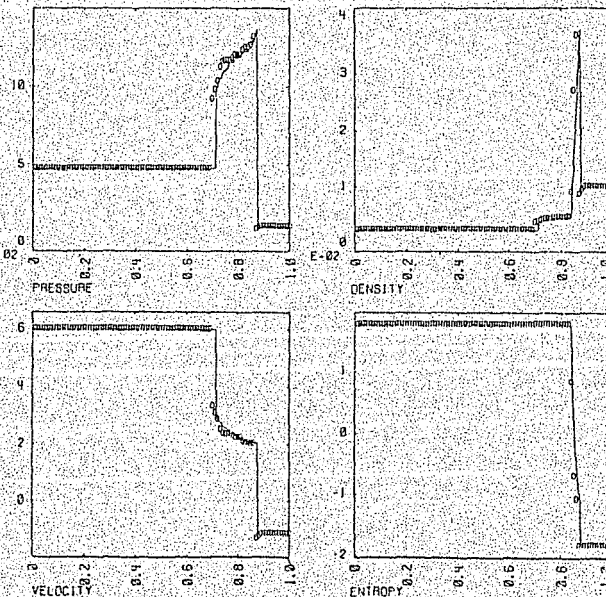


Fig. ii. Solución en una dimensión mediante el método de Glimm.

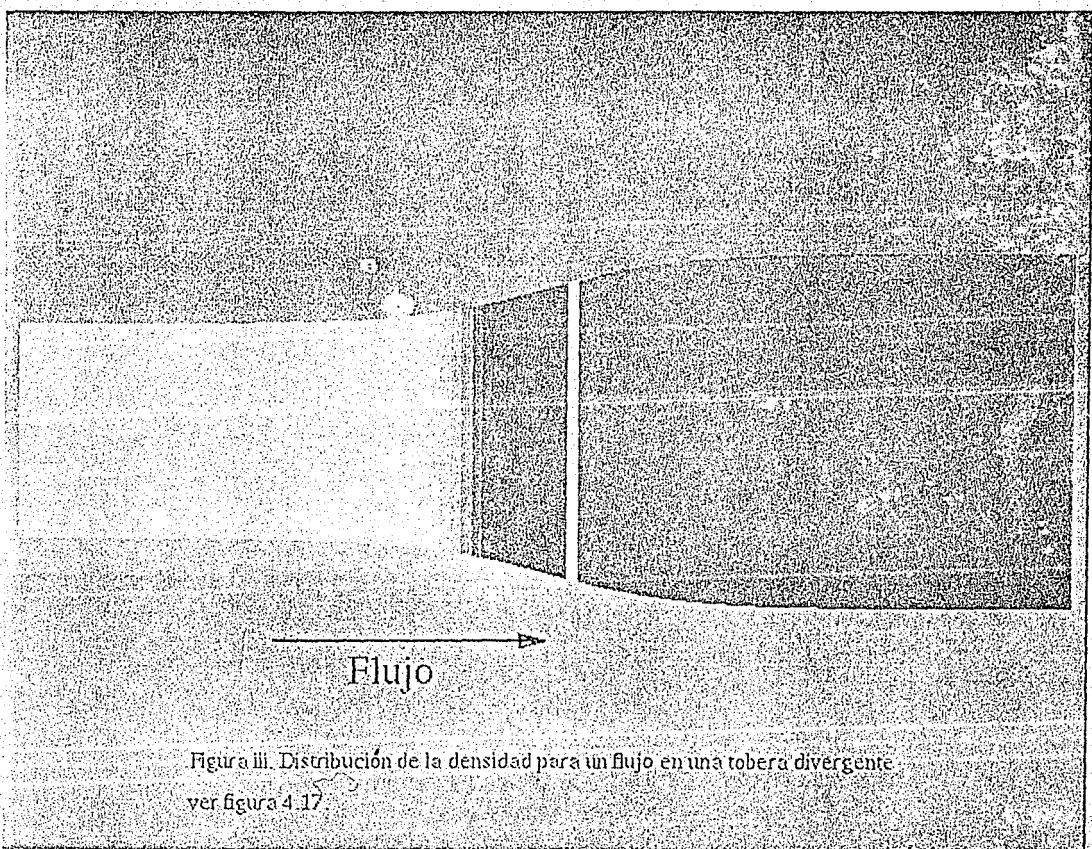
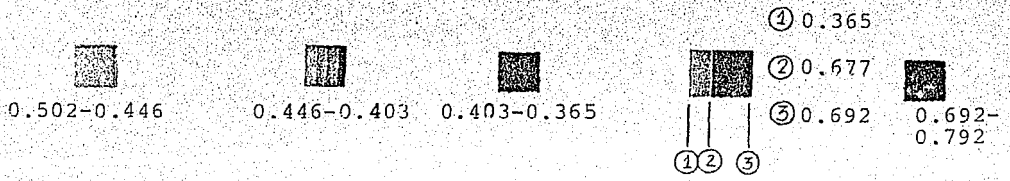


Figura iii. Distribución de la densidad para un flujo en una tobera divergente ver figura 4.17

FALLA DE ORIGEN

El trabajo comprende cinco capítulos. En el primero se presenta una descripción de los fenómenos de ondas de choque, línea de deslizamiento y ondas de rarefacción.

El segundo presenta una revisión bibliográfica de los trabajos publicados concernientes al análisis y aplicación del método de Glimm. El tercer capítulo contiene la presentación del modelo matemático que se utiliza para determinar el flujo en toberas y la aplicación del método de Glimm para resolverlo.

En el capítulo cuatro se presenta una comparación del método de Glimm, aquí desarrollado, con resultados obtenidos en la literatura de la especialidad.

En el capítulo cinco se presentan las conclusiones que se obtuvieron de esta investigación.

CAPITULO 1.

BASES TEORICAS.

1.1 Definición de los conceptos de onda de choque, rarefacción y discontinuidad de contacto.

Para definir estos conceptos se requiere establecer el concepto de solución débil de una ecuación no-lineal conservativa que en forma genérica expresamos como

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (1.1)$$

Sea $F = (f(u), u)$, entonces (1.1) se puede expresar como

$$\text{Div } F = 0$$

Sea ϕ una función suave de prueba con soporte compacto en el plano (x,t) . Si integramos (1.1) multiplicado por ϕ , o sea,

$$\int \phi \text{div} F \, dxdt = 0$$

Integramos por partes, obtenemos

$$\int \nabla \phi \cdot F \, dxdt = 0 \quad (1.2)$$

Si u es suave, entonces (1.1) y (1.2) son equivalentes, pero si u no es suave, entonces (1.2) se puede satisfacer aun cuando (1.1) no tenga sentido, ver [21].

Se define una solución débil de (1.1) a una función u que satisface (1.2) para toda ϕ suave.

Ahora nos referiremos a las propiedades de la solución débil de

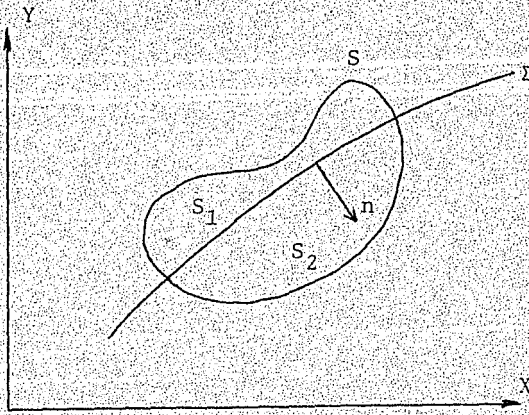


Fig. 1.1 Región S .

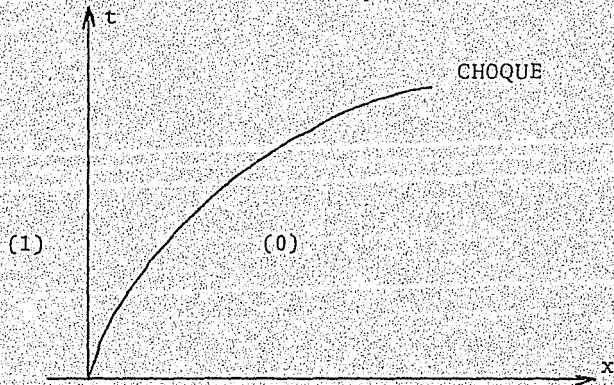


Fig. 1.2 Discontinuidad en el plano (x,t) .

la ley de conservación (1.1) cerca de una discontinuidad de salto. Sea u una solución débil con discontinuidad de salto a través de una curva suave Σ en el plano (x,t) . Sea φ una función suave que desaparece fuera de la región S mostrada en la figura 1.1. Podemos entonces escribir

$$\int \nabla \varphi \cdot F dx dt = \int_{S_1} \nabla \varphi \cdot F dx dt + \int_{S_2} \nabla \varphi \cdot F dx dt \quad (1.3)$$

por lo que

$$\int_{S_1} \nabla \varphi \cdot F dx dt = \int_{\Sigma} \varphi F_1 \cdot n ds$$

y de la misma manera

$$\int_{S_2} \nabla \varphi \cdot F dx dt = - \int_{\Sigma} \varphi F_2 \cdot n ds$$

Sustituyendo en (1.3) obtenemos

$$\int_{\Sigma} \varphi (F_1 - F_2) \cdot n ds = 0$$

Ya que esto es valido para toda ϕ

$$[F n] = 0 \text{ sobre } \Sigma \quad (1.4)$$

Sea Σ parametrizada por $x = x(t)$ tal que $s = dx/dt$ es la velocidad de la discontinuidad. Entonces (1.4) se convierte

$$-s[u] + [f(u)] = 0 \quad \text{sobre } \Sigma \quad (1.5)$$

donde $[]$ denota el salto en una cantidad producida cuando (x,t) atraviesa de S_1 a S_2 . La ecuación 1.5 denota la condición de salto que debe de satisfacer una solución débil en presencia de una discontinuidad.

Nuestro sistema de leyes de conservación se puede escribir, de acuerdo con Chorin y Marsden [21], como

$$\begin{aligned} \rho_t + m_x &= 0 \\ m_t + \left[\frac{m^2}{\rho} + p \right]_x &= 0 \\ e_t + \left[(e+p) \frac{m}{\rho} \right]_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Aplicando las condiciones de salto (1.5) al sistema de leyes de conservación (1.6), encontramos que las relaciones de salto para las variables de estado a través de una discontinuidad Σ en el plano (x,t) con velocidad $dx/dt=s$ están dadas por

$$\begin{aligned} s[\rho] &= [m] \\ s[m] &= [m^2/\rho + p] \\ s[e] &= [(e+p)u] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Estas son las llamadas relaciones de Rankine-Hugoniot.

Escojamos un sistema coordenado cuya velocidad en algún tiempo $t_0 = 0$, es igual a la velocidad de la discontinuidad, ver fig. 1.2

En este sistema coordenado, las relaciones Rankine-Hugoniot en el origen son

$$\begin{aligned} \rho_0 u_0 &= \rho_1 u_1 \\ \rho_0 u_0^2 + p_0 &= \rho_1 u_1^2 + p_1 \\ (e_0 + p_0)u_0 &= (e_1 + p_1)u_1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Sea $M = \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1$. Si $M = 0$ llamamos a esta discontinuidad una discontinuidad de contacto o línea de deslizamiento. Si M es diferente de cero la discontinuidad es un choque. Ya que las velocidades en las regiones 0 y 1, de la fig. 1.2, son diferentes de cero, el gas está cruzando el choque, o bien, el choque está moviéndose a través del gas. El lado del gas que no ha cruzado el choque es llamado frente del choque y se identifica por el subíndice 0. El otro lado, identificado por el subíndice 1 es llamado la espalda.

Al resolver leyes de conservación del tipo (1.1) bajo condiciones iniciales, la solución se puede representar como en las figs. 1.3 y 1.4. El choque o el abanico de rarefacción separa las características. Un choque se dice que obedece la condición de entropía si las dos características que intersectan sobre cada punto pueden continuar hacia las condiciones iniciales. El choque que no obedece la condición de entropía se llama choque de rarefacción. Para lograr unicidad en la solución, así como guardar solución con el mundo físico, se descarta el choque de rarefacción como posible solución y solo aceptamos soluciones que obedecen la ley de entropía.

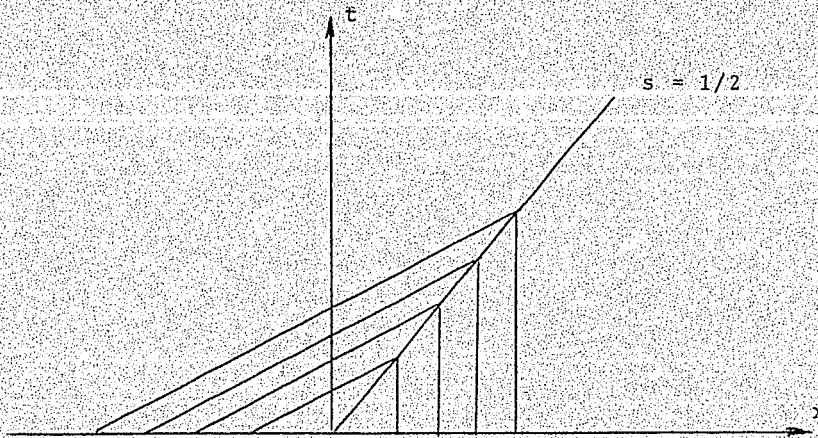


Fig. 1.3 Solución que obedece la condición de entropía.

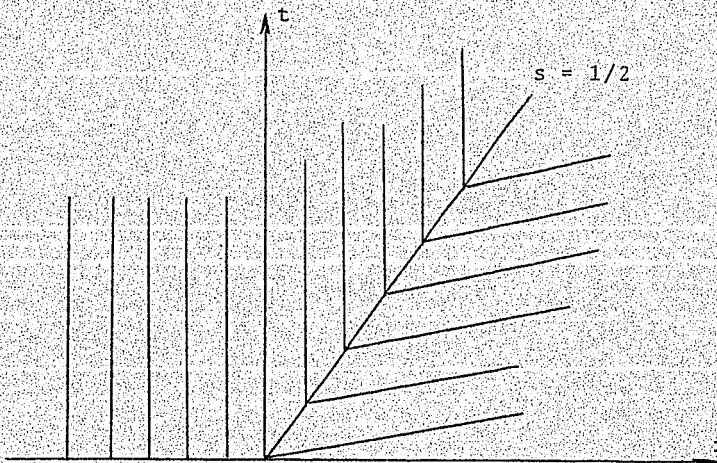


Fig. 1.4 Solución que no obedece la condición de entropía.

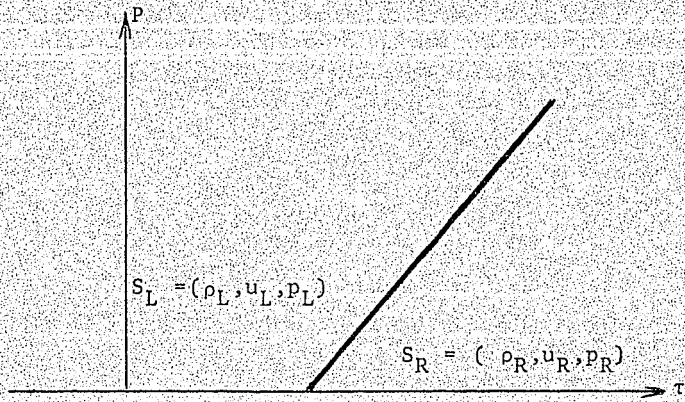


Fig. 1.5 Estados S_L y S_R conectados através de un choque.

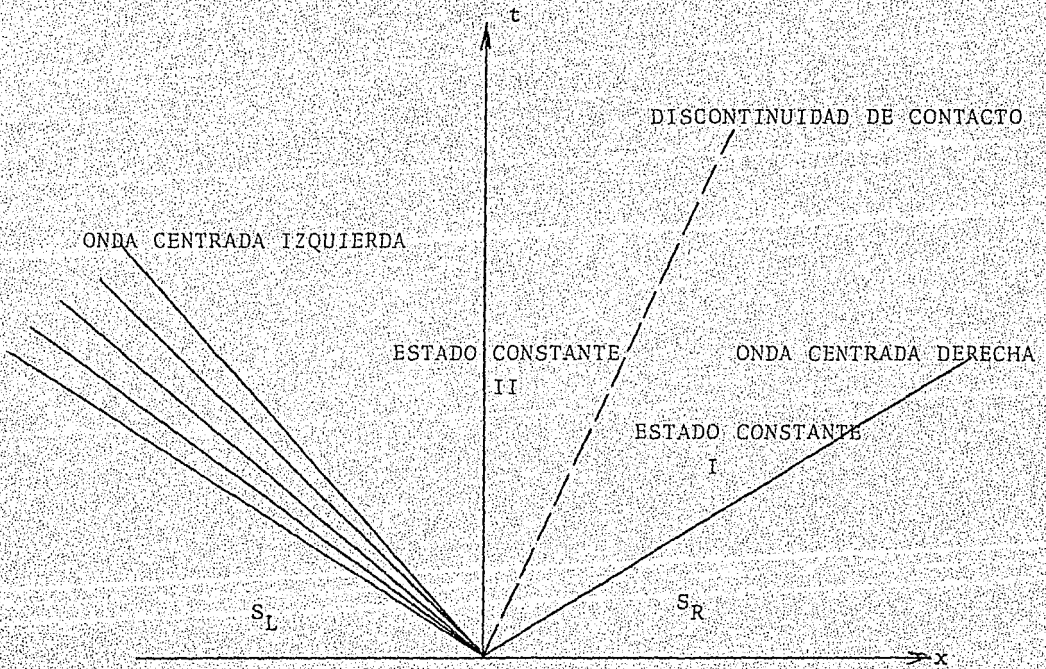


Fig. 1.6 Estados S_L y S_R conectados por una onda centrada izquierda, un estado constante II, una línea de deslizamiento, un estado constante I y una onda centrada derecha.

La relación de Hugoniot produce una curva sobre la cual se relacionan estados que pueden ser conectados a S_R por un choque, fig 1.5. Además un choque que separa dos estados constantes puede ser una línea recta en el plano (x,t) , ya que ambos $[f(u)]$ y $[u]$ son constantes en el tiempo y $s[u] + [f(u)] = 0$, entonces $s =$ constante.

Se define una onda centrada como un choque de línea recta o una rarefacción centrada isentrópica. Entonces dado un estado derecho S_R y una presión $p_L > 0$ en el estado izquierdo S_L , podemos encontrar p_L y u_L tal que S_L sea conectado a S_R por una rarefacción centrada. Se define como problema de Riemann cuando un sistema de leyes de conservación (1.6) está sujeto a condiciones iniciales del tipo $u(x,0) = u_R$ para $x > 0$ y $u(x,0) = u_L$ para $x < 0$, donde $u = (\rho \ u \ e)^T$ y el subíndice R y L denotan estados constantes del gas a la derecha e izquierda respectivamente.

Sean las regiones en el plano (x,t) denotadas por S_R y S_L , la frontera de S_R es una característica o una discontinuidad de salto que emana del origen, fig 1.6.

Se dará una razón plausible explicando porque se puede conectar S_R a S_L , ver fig. 1.6, a través de una onda centrada derecha, un estado constante I, una línea de deslizamiento, un estado constante II y una onda centrada izquierda, la prueba formal se puede ver en Godunov [3]. Una onda centrada derecha es un choque mirando a la derecha o una onda de rarefacción centrada

isentrópica. De igual manera una onda centrada izquierda es una onda de choque mirando a la izquierda o una rarefacción isentrópica.

Dado el estado derecho S_R se puede encontrar una familia de estados constantes I, la cual puede ser conectada a S_R por una onda centrada derecha. Se nota que si S_R es un estado constante, $p\rho^{-\gamma}$ es una constante en S_R , y si la onda derecha es una rarefacción, $p\rho^{-\gamma}$ es también constante en la rarefacción; entonces es consistente permitir solamente ondas de rarefacción isentrópica en la definición de onda centrada derecha. Ya que la densidad es la única cantidad que puede ser discontinua a través de la línea de deslizamiento, tenemos una familia de estados constantes II que puede ser conectada a través de una línea de deslizamiento, un estado constante I y una onda centrada derecha a S_R . Continuando una vez más, tenemos una familia de estados que pueden ser conectados a S_R por una onda centrada izquierda, un estado constante II, una línea de deslizamiento, un estado constante I y una onda centrada derecha.

De esta manera se puede encontrar la solución exacta para un problema de Riemann en el caso de las ecuaciones de Euler que será explotada por el método de Glimm que se describirá en los siguientes capítulos.

CAPITULO 2.

EL METODO DE GLIMM Y ALGUNOS TRABAJOS REFERENTES AL FLUJO EN TOBERAS.

Al resolver sistemas de ecuaciones hiperbólicas no lineales nos encontramos con soluciones discontinuas. Estas se producen por condiciones iniciales no suaves o bien, pueden desarrollarse en el dominio aun cuando las condiciones iniciales sean suaves. Los sistemas que revisaremos son del tipo de leyes de conservación, como los que se encuentran en dinámica de gases al referirse a las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía.

La unicidad de las soluciones se obtiene cuando el sistema hiperbólico de leyes de conservación no lineal satisface las relaciones de Rankine-Hugoniot y las condiciones de entropía en la discontinuidad, como se discutió en el capítulo 1.

En dinámica de gases, al resolver sistemas de leyes de conservación, las discontinuidades aparecen cuando se presentan ondas de choque, rarefacción y líneas de deslizamiento. Un ejemplo de este fenómeno es el problema de choque en un tubo en el cual dos gases en reposo, con diferentes presiones y densidades, separados por un diafragma, se ponen en contacto súbitamente al eliminar el diafragma; el gas con presión mayor se expande hacia la región de presión menor, produciendo una onda de choque y línea de deslizamiento, así como una onda de rarefacción que viaja en sentido contrario. De la misma manera se puede describir

el flujo a través de una tobera, sin embargo, la curvatura de ésta influencia el sistema de leyes de conservación que describen el flujo, introduciendo un término fuente originando un sistema no homogéneo.

EL método de Glimm ha demostrado tener ventajas sobre los métodos tradicionales tales como diferencias finitas y elemento finito para resolver sistemas de leyes de conservación en una dimensión, ver Colella [2]. Su principal ventaja es la eliminación de disipación y difusión numérica. La técnica de Glimm, que algunos autores la denominan de muestreo, es de desarrollo reciente en comparación con los métodos de diferencias finitas y no ha sido sujeta al estudio, del cual este último se ha beneficiado.

En la siguiente sección se presentan las tendencias de las investigaciones acerca del análisis y aplicación del Método de Glimm.

En los años sesenta, Glimm [1] inicia una técnica de muestreo para resolver sistemas homogéneos de ecuaciones hiperbólicas en una dimensión. Este método, también conocido como de selección aleatoria, se originó para probar la existencia de la solución para todo tiempo de sistemas hiperbólicos.

Chorin [4], aplica el método en forma numérica para resolver un sistema de leyes de conservación y determinar el flujo en dos dimensiones sujeto a ondas de choque en un canal con una pared oblicua. Como se puede ver en Glimm J. et al. [9], la base del método de Glimm es aproximar el problema dividiéndolo en flujos

elementales, denominados problemas de Riemann que definiremos a continuación.

Sea el sistema conservativo

$$W_t + f(W)_x = 0 \quad (2.1)$$

sujeto a condiciones iniciales

$$W(x, 0) = \begin{cases} W_R & x \geq 0 \\ W_L & x \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

donde W_L y W_R son estados constantes. A este problema se le conoce como problema de Riemann.

En nuestro caso.

$$W_R = \begin{bmatrix} \rho_R \\ u_R \\ e_R \end{bmatrix}, \quad W_L = \begin{bmatrix} \rho_L \\ u_L \\ e_L \end{bmatrix}$$

y son los estados constantes del gas.

La solución del problema de Riemann para las ecuaciones de Euler consiste de tres estados del gas; un estado constante derecho, un estado constante izquierdo y un estado intermedio separados por ondas de choque, rarefacción y una línea de deslizamiento o discontinuidad de contacto, como se ve en la fig. 2.1. Chorin [4] utiliza el procedimiento de Godunov [3] para obtener la solución del problema de Riemann. Dada la solución exacta del problema de Riemann, ésta se muestrea mediante una variable aleatoria equidistribuida entre $[-h/2, h/2]$. La solución aproximada de las ecuaciones de Euler en la etapa intermedia de tiempo es la solución del problema de Riemann evaluada en el punto escogido en

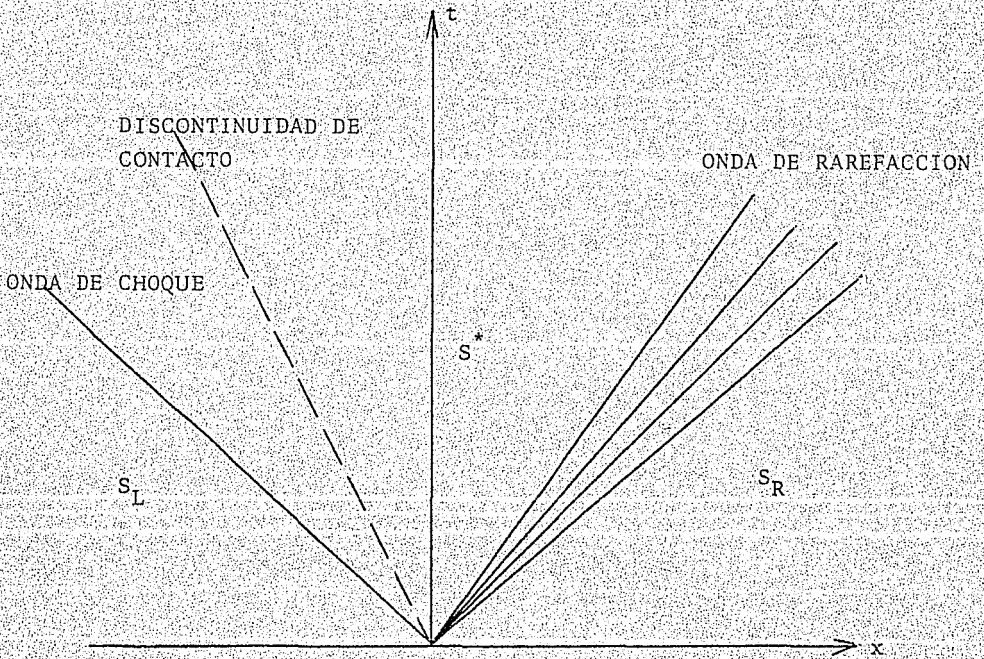


Fig. 2.1 Solución al problema de Riemann.

forma aleatoria. Se avanza a la segunda etapa de tiempo en forma similar.

La manera de obtener la variable aleatoria determina el comportamiento de la solución. Chorin [4] propuso escoger una variable θ para cada etapa de tiempo y destaca la importancia de que los valores escogidos tengan una tendencia tan rápida como sea posible para obtener la equipartición sobre $[-1/2, 1/2]$.

A partir de esto establece la siguiente fórmula que corrige θ

$$\theta_i = ((n_i + \theta_{i-1} + 1/2) / m_2) - (\frac{1}{2}) \quad (2.3)$$

$$n_{i+1} = (m_1 + n_i) \pmod{m_2} \quad i=1, 2, \dots$$

donde $\theta_1, \theta_2, \dots$ son valores aleatorios de una secuencia, $m_1, m_2, m_1 < m_2$ son dos números primos enteros y n_0 es dado inicialmente. Colella [2] propone el uso de la fórmula de van der Corput para obtener la variable θ , demostrando que con ésta se obtiene la mejor representación de la propagación de onda en el método de Glimm. Chorin [4] destaca la presencia de 4 casos que se consideran según la ubicación del punto muestreado.

- 1) El punto muestra se encuentra a la izquierda de la línea de deslizamiento y la onda derecha es de choque.
- 2) El punto muestra se encuentra a la derecha de la línea de deslizamiento y la onda derecha es una rarefacción.
- 3) El punto muestra está a la izquierda de la línea de deslizamiento y la onda izquierda es de choque.
- 4) El punto muestra se encuentra a la izquierda de la línea de

deslizamiento y la onda izquierda es una rarefacción.

Las condiciones de frontera se establecen por simetría, es decir, se considera un punto frontera $x = b$ con un fluido a la izquierda. Las condiciones se establecen sobre un punto cercano a b , por ejemplo $i_0 h$.

Un estado falso en $(i_0 + 1/2)h$ se crea con

$$\begin{aligned} \rho_{i_0+1/2} &= \rho_{i_0-1/2} \\ U_{i_0+1/2} &= -U_{i_0-1/2} \\ P_{i_0+1/2} &= P_{i_0-1/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Recomienda utilizar una variable θ diferente en las fronteras de la calculada internamente o de lo contrario las ondas reflejadas de las paredes nunca entrarán al interior del dominio.

El modelo en dos dimensiones se basa en el método de pasos fraccionados, originando dos grupos de ecuaciones; uno para el barrido en dirección x y otro para el barrido en y . Ambos contienen las ecuaciones de Euler en una dimensión.

Concluye que sus resultados son superiores en calidad a los obtenidos con los métodos corriente arriba presentados en [3], además, especifica que el método de selección aleatoria o de Glimm debe usarse en problemas que involucren patrones complejos de ondas de choque y líneas de deslizamiento.

En una aplicación adicional del método de selección aleatoria, Chorin [5] analiza el flujo de gas cuando en éste se llevan a cabo reacciones químicas y producen efectos dinámicos. Propone la aplicación en dos dimensiones siguiendo el procedimiento de [4]

con la integración de los efectos de capa límite y turbulencia. Sod [8], plantea un problema de flujo de gas con simetría esférica o cilíndrica denominado flujo cuasi-unidimensional por Glimm et al. [9]. El esquema de la solución es por medio de una combinación de los métodos de Glimm y pasos fraccionados.

Establece un sistema de leyes de conservación no homogéneo (2.5), esto último como producto de los efectos de curvatura de la forma.

$$W_t + f(W)_x = g(x, W) \quad (2.5)$$

donde

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad f(W) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ \left(\frac{m}{\rho}\right)(e+p) \end{pmatrix}$$

$$g(x, W) = (\alpha - 1) \begin{pmatrix} m \\ x \\ \frac{m^2}{\rho x} \\ \left(\frac{m}{\rho x}\right)(e+p) \end{pmatrix}$$

ρ es la densidad, m es el momentum, e es la energía y α es una constante que es igual 2 para simetría cilíndrica y 3 para simetría esférica.

El método de pasos fraccionados lo utiliza para separar el término no homogéneo, creando dos sistemas de ecuaciones; uno que contiene la ecuación de Euler homogénea y otro que contiene

una ecuación diferencial ordinaria. Utiliza el método de Glimm para resolver el primero y un esquema de Cauchy-Euler en el segundo.

Al igual que Chorin [4], el esquema de Glimm avanza en el tiempo desde n hasta $n+1/2$ y en el espacio desde i hasta $i+1/2$, además, el problema de Riemann se resuelve como en [4], pero a diferencia de éste, Sod [8] genera la variable aleatoria a partir de números aleatorios que son tomados de cálculos internos de la computadora. Las condiciones de frontera se toman igual que en [4].

El modelo mostrado por Sod [8] se aplica para determinar el comportamiento de una onda de choque cilíndrica convergente, toma como base el problema de choque en un tubo. La etapa de tiempo es seleccionada de tal manera que la condición de Courant-Friedrichs-Lewy es satisfecha.

$$\max(\text{abs}(u) + c)\Delta t/\Delta x \leq 1 \quad (2.6)$$

donde c es la velocidad del sonido.

Los resultados de Sod [8] muestran que el choque aparece como una rápida variación de la presión, velocidad, densidad y energía interna, siguiendo la tendencia de los resultados obtenidos experimentalmente por Perry et. al. [11], donde la onda de choque aumenta en intensidad conforme se acerca a la frontera. Se observa que cuando el choque de presión llega a la frontera, se refleja, su intensidad sube y un choque divergente aparece, fig. 2.2, fig. 2.3, fig. 2.4, fig. 2.5. La fig. 2.3, muestra los resultados de la distribución de la velocidad, el comportamiento

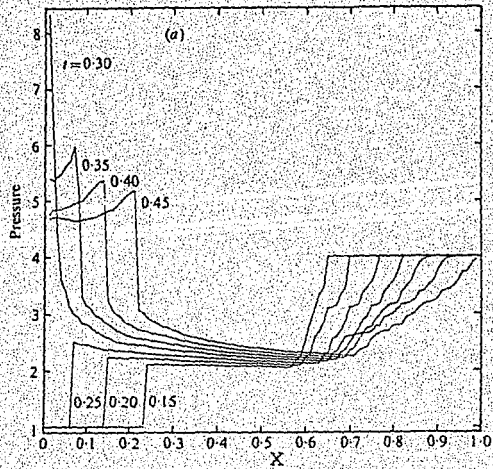


Fig. 2.2 Distribución de la presión con respecto a x para un flujo con simetría cilíndrica, Sod [8].

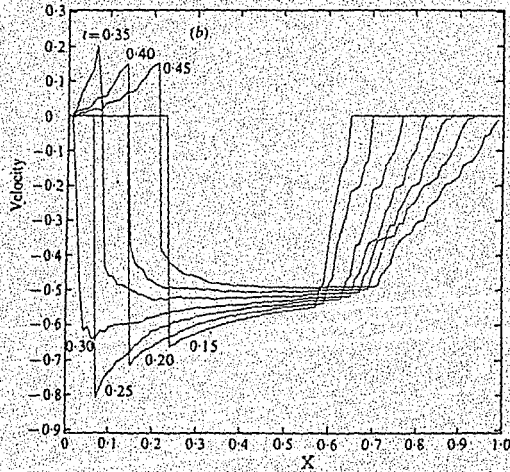


Fig. 2.3 Distribución de la velocidad con respecto a x para un flujo con simetría cilíndrica, Sod [8].

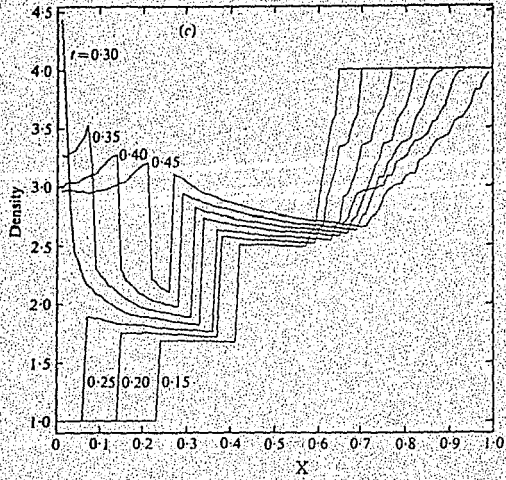


Fig. 2.4 Distribución de la densidad con respecto a x para un flujo con simetría cilíndrica, Sod [8].

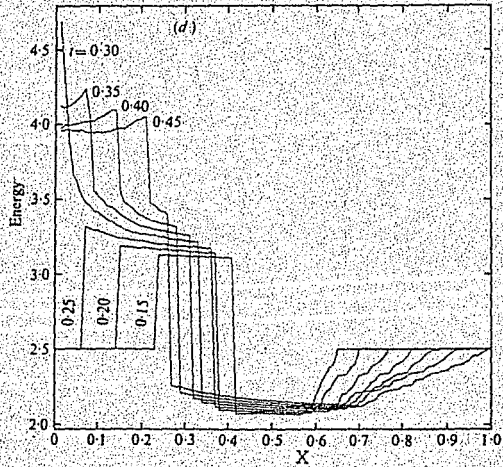


Fig. 2.5 Distribución de la energía interna con respecto a x para un flujo con simetría cilíndrica, Sod [8].

es similar al de la presión excepto que el choque convergente disminuye la velocidad desde cero a un valor negativo. Cuando el choque se refleja tiene el efecto de producir una velocidad positiva. Con respecto a la variación de la densidad y energía se observa que aparece una discontinuidad de contacto propia del uso del esquema de Glimm.

Concluye que en general sus resultados se acercan, inclusive en el tiempo en que tardan alcanzar la frontera, con los obtenidos por Abarbanel y Goldber [12].

Concus et. al [6], modelan un flujo en una y en dos dimensiones de dos fluidos inmiscibles a través de un medio poroso en ausencia de capilaridad y fuerzas gravitacionales. Utiliza la ecuación de Buckley y Leverett para el modelo en una dimensión, considerando el flujo de aceite y agua a través de arena.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad (2.7)$$

donde u es la saturación del agua en la arena.

La solución de la ecuación se basa también en el método de selección aleatoria, el cual avanza en el tiempo de n hasta $n+1/2$ y en el espacio de i hasta $i+1/2$. La condición de Courant-Friedrichs-Lewy es $k/h \max(\text{abs}(a(u))) < 1$ donde $a(u)$ es la derivada con respecto a u de $f(u)$.

El problema de Riemann se resuelve en forma particular para un modelo de función flujo especial $f(u)$, propio de flujo bifásico inmiscible. Siguiendo las recomendaciones de Chorin [4], [5] el mismo valor de θ es usado una vez por cada etapa de tiempo, así

mismo, en las fronteras θ se obtiene de la siguiente manera:

En la primera mitad de la etapa de tiempo

$$\theta_{j+1/2} = (n_{2j+1} + \theta'_{j+1/2}) / m_2 - 1 \quad (2.8)$$

En la segunda mitad de la etapa de tiempo

$$\theta_{j+1} = (n_{2j+2} + \theta'_{j+1}) / m_2 \quad (2.9)$$

Las cantidades $\theta'_{j+1/2}$ y θ'_{j+1} son seleccionadas en forma aleatoria de la distribución uniforme $[0,1]$ y m_2 es definido en la ecuación (2.3).

El modelo bidimensional se basa en el método de etapas fraccionales en forma semejante a [4], escogiendo un nuevo valor de θ para cada barrido en x o y .

Destaca que la solución de la ecuación en una dimensión por medio de diferencias finitas presentada por otros autores [13], se excede en el uso de etapas de tiempo pequeñas lo que provocó requisitos de cómputo excesivos sin obtener resultados satisfactorios. De los resultados numéricos resalta el patrón de choque agudo que sigue la onda para $t > 0$, obtiene un valor promedio de la velocidad de la onda de choque, 1.48, que compara con el resultado exacto, 1.49, por lo que concluye que se obtuvieron buenos resultados.

Siguiendo con la misma aplicación, el método de selección aleatoria también fue utilizado por Glimm y Marchesin [7] para calcular la interface agua-aceite descrita por ecuaciones bidimensionales del flujo bifásico en un medio poroso. A diferencia de [6] se acoplan dos ecuaciones; la ecuación elíptica

que describe la presión, donde se utiliza elemento finito para resolverla, y la ecuación hiperbólica que describe la saturación, resuelta con el esquema de selección aleatoria mediante el uso del método de pasos fraccionados.

Considera que aunque este último método degrada la solución discontinua de las ondas, se puede aplicar debido a que el campo de velocidad es esencialmente en una dimensión, la componente en x está entre 0.01 y 0.1 de la componente en y , además, las soluciones tienen frentes de onda paralelos a la malla tanto en dirección x o dirección y , por lo que considera que el uso del método de pasos fraccionados es permitido, ya que solamente la componente normal de la velocidad es responsable del movimiento del frente de onda. El problema de Riemann es resuelto como en [6] y el método de selección aleatoria es de una etapa en el tiempo, mientras que la variable aleatoria se determina por $\theta = (n + \text{cte.}) 2^{1/2}$.

Glimm J. et al. [14], analiza las fuentes de error en la posición de la discontinuidad en el método de selección aleatoria aplicado a la ecuación de Burger, y en el contexto de este método propone dos métodos "tracking" (seguimiento) y otro dentro del esquema de Lax-Wendroff.

El Método de selección aleatoria avanza en el tiempo desde n hasta $n+1$ a diferencia de Chorin [4] y Sod [8] y la generación de la variable aleatoria, al igual que en [2], es por medio de la fórmula de van der Corput. Establece que la primera fuente de error son las fluctuaciones en la posición de cada onda y la

segunda se origina de la posición incorrecta de las ondas de la misma familia. Otras fuentes de error son: la posición incorrecta de las ondas de otras familias y por el hecho de que la velocidad en la posición de la onda es calculada por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de exactitud. Estos errores son pequeños en comparación con las fuentes primarias y secundarias por los que se resalta la importancia de éstas.

Los métodos propuestos se denominan, de refinación de la malla por un punto y, de ajuste del choque de primer orden. Los compara con el método, " tracked Lax-Wendroff". Al resolver la ecuación de Burger con estos esquemas encuentra que los métodos "tracking" dan resultados que se acercan más a la solución exacta, como se observa en las fig. 2.6 .

Concluye que en la solución de las ecuaciones hiperbólicas el método de selección aleatoria ocasiona errores de $\pm 2.5 h$, donde h es el incremento en x , mientras que el método de Lax-Wendroff produce errores de la misma magnitud.

Además, considera que aunque estas conclusiones se basan en la ecuación de Burger pueden extenderse a dinámica de gases.

Marshall y Méndez [15], modelan el flujo que surge cuando un dique se rompe y éste separa dos fluidos de las mismas características pero de diferentes alturas. Para esto utilizan las ecuaciones llamadas de aguas someras, que forman un sistema hiperbólico cuasi-lineal que gobierna un flujo incompresible de superficie libre considerando la altura del fluido pequeña. En la solución de estas ecuaciones aparecen las discontinuidades cuando

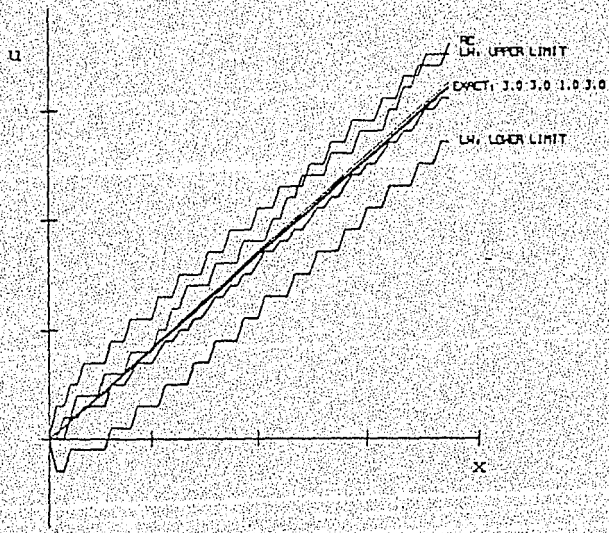


Fig. 2.6 Posición del choque con la solución de la ecuación de Burger calculada con los 5 métodos [14].

los saltos hidráulicos están presentes. Establecen la analogía del problema del choque en un tubo que surge cuando se retira el diafragma que divide dos gases, con el problema del flujo cuando se rompe el dique. Consideran que en dinámica de gases la presencia de un choque compresivo implica un incremento de la entropía en el choque, la cual es exclusivamente definida por las leyes de conservación de masa, momentum y energía. En la analogía con aguas someras, a través del salto hidráulico hay una pérdida de energía la cual depende de las leyes de conservación de masa y momentum. Al igual que Chorin [4] y Sod [8], utilizan el método de selección aleatoria que avanza en el tiempo de n hasta $n+1/2$ y en el espacio de i hasta $i+1/2$. El problema de Riemann se resuelve por el método iterativo de Godunov [3].

Sus resultados numéricos los compara con los obtenidos por Stoker [16], solución teórica, y Ré [17], encontrando en estos últimos una distorsión en la amplitud y velocidad de propagación de la onda de choque y ausencia de un estado constante adelante del choque, lo cual sí se encontró en sus resultados así como una onda depresiva indicada por [16]. También se observó en éstos que la localización del choque y la onda depresiva no fueron exactas, esto lo atribuye al carácter aleatorio del método en concordancia con lo establecido por Glimm J et al. [14].

Concluye confirmando que el método de selección aleatoria es muy apropiado para el tratamiento de discontinuidades y propone utilizarlo en coordenadas rectangulares en dos dimensiones.

Por su parte Colella [2], propone un procedimiento para determinar la variable aleatoria θ en los modelos unidimensionales basado en la secuencia de van der Corput (2.10).

$$\theta = \sum_{k=0}^m i_k 2^{-(k+1)} \quad i_k = 0,1 \quad (2.10)$$

Destaca que esta secuencia tiene como propiedad especial, que el comportamiento de la parte continua de la solución se conserve en la solución aproximada [19].

En su artículo, analiza un procedimiento de pasos fraccionados, y construye un método para encontrar soluciones a sistemas de leyes de conservación multidimensionales.

Resalta que los métodos de diferencias finitas de mayor orden, también utilizados para resolver sistemas de conservación, generan oscilaciones atrás de la onda de choque como lo confirma Sod [18], fig. 2.7, mientras que los de primer orden con difusión numérica causarán soluciones pobres en las partes continuas del flujo.

El planteamiento del método de Glimm es diferente al seguido por Chorin [4] y Sod [8]. Colella [2] establece avanzar en el tiempo desde n hasta $n+1$ y la malla permanece fija sin recorrerse la mitad del intervalo espacial como sucede con [4] y [8]. La condición de Courant-Friedrichs-Lewy es

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \sigma \max(|u_j^n| + c_j^n) \quad (2.11)$$

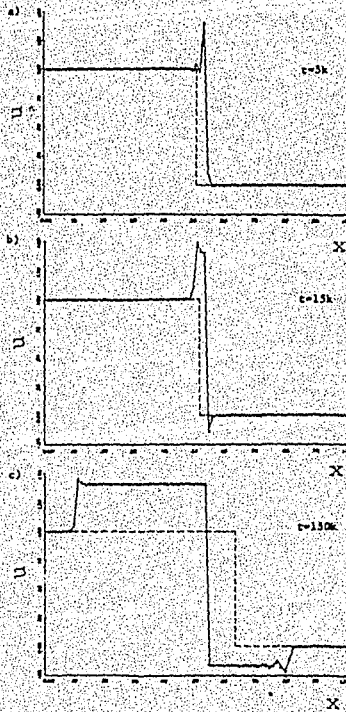


Fig. 2.7 Solución con el método de Lax Wendroff para una ley de conservación hiperbólica, obsérvese las oscilación atrás del choque [18].

donde σ es una constante, $0 < \sigma < 0.5$

Resolvió un sistema de leyes de conservación en una dimensión con el método de selección aleatoria, utilizando tres formas diferentes de calcular la variable θ , 1) secuencia de muestreo aleatorio, en base a un generador de números aleatorios obtenidos internamente de la computadora, 2) muestreo aleatorio estratificado y 3) secuencia de muestreo van der Corput. Encontró los resultados siguientes: En la primera, fig. 2.8, los resultados mostraron discrepancias propias de las fluctuaciones aleatorias. La segunda, fig. 2.9, calcula los perfiles más suaves, cercanos a la solución exacta que los obtenidos con la primera, pero aún así, en la distribución de la densidad y entropía se muestra una desviación. Los cálculos hechos con la secuencia de van der Corput fig. 2.10, fueron los más cercanos a la solución exacta, teniendo una diferencia de 0.5%, destacando la forma aguda de la discontinuidad del choque. Esto garantiza el buen comportamiento del método de Glimm. En resultados con una malla burda, fig. 2.11, Collella [2], señala que el tamaño y forma de las ondas, los cuales son más sensibles al error introducido por el muestreo, se conserva cerca de la solución exacta.

Apartir de esto, Colella [2] realiza una comparación del método de Glimm, utilizando la secuencia de van der Corput, fig. 2.12, contra dos métodos de diferencias finitas, el método de Godunov fig. 2.13, y el código MUSCL, fig. 2.14, éste basado en el esquema de van Leer [20]. Se observa que ninguno de los métodos de diferencias finitas son capaces de calcular correctamente un

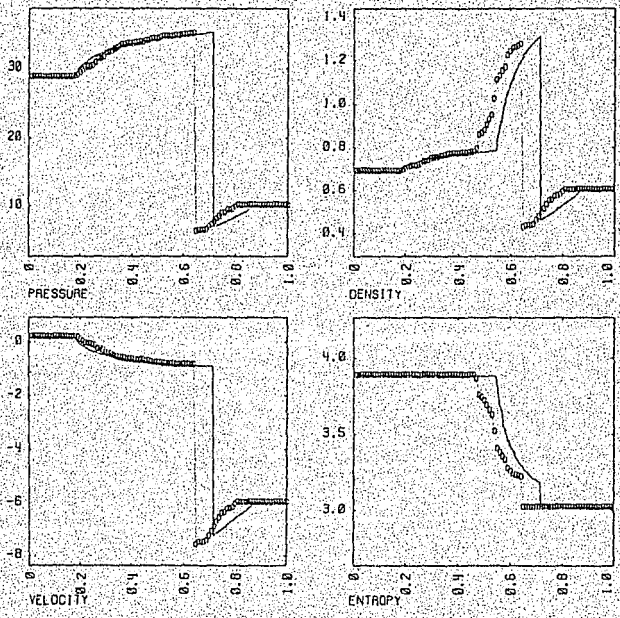


Fig. 2.8. Solución calculada, marcas con círculos, de la presión, densidad, velocidad, entropía con respecto a x (eje horizontal) utilizando una secuencia de muestreo aleatorio interna de la computadora [2].

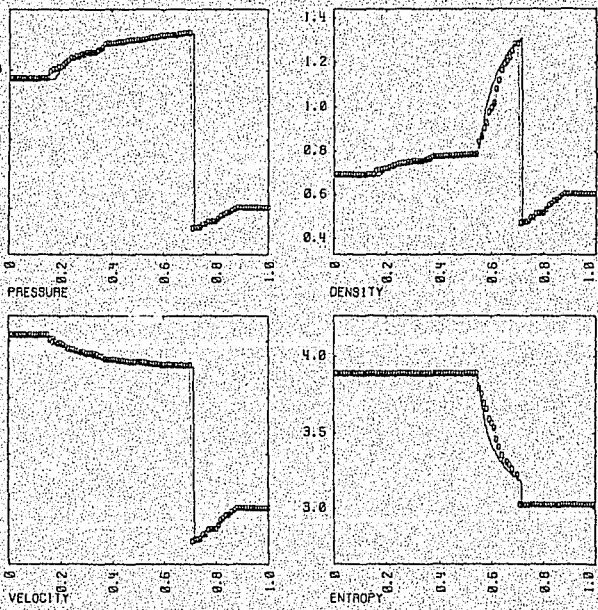


Fig. 2.9 Solución calculada, marcas con círculos, de la presión, densidad, velocidad y entropía con respecto a x (eje horizontal) con muestreo aleatorio estratificado [2].

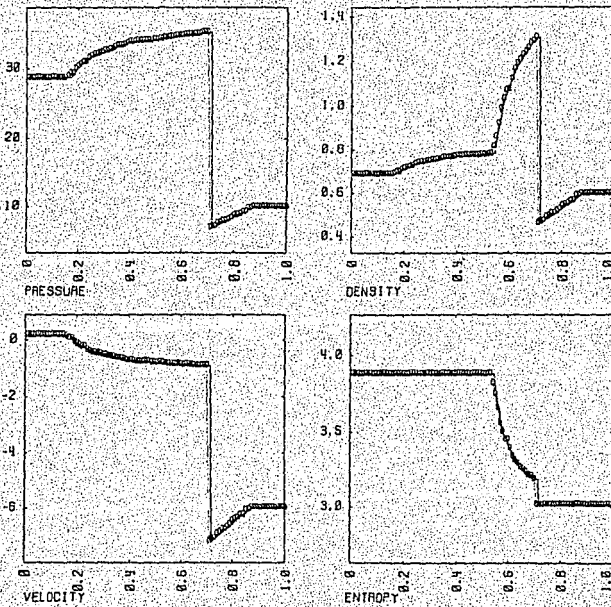


Fig. 2.10 Solución calculada, marcas con círculos, de la presión, densidad, velocidad y entropía con respecto a x (eje horizontal) con la secuencia de van der Corput [2].

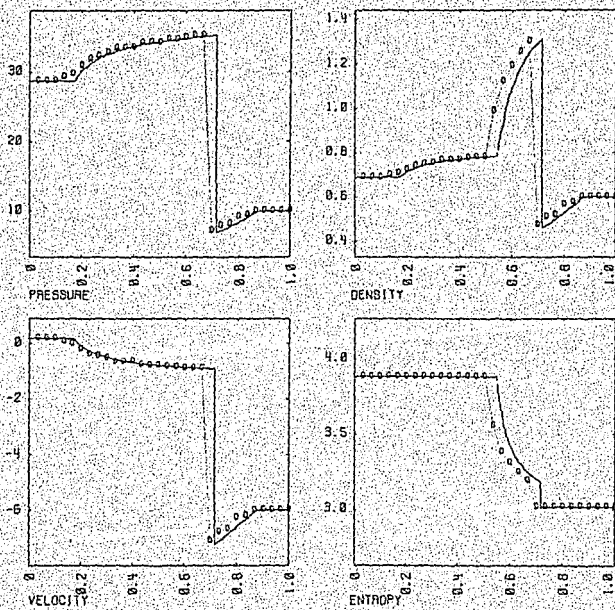


Fig. 2.11 Solución calculada, marcas con círculos, de la presión, densidad, velocidad y entropía con respecto a x (eje horizontal) con la secuencia de van der Corput, malla burda [2].

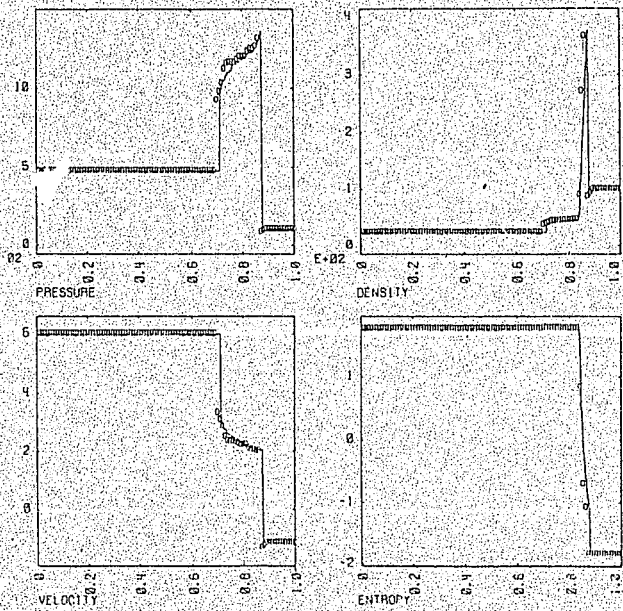


Fig. 2.12 Solución calculada con el método de Glimm en una dimensión para la presión, densidad, velocidad y entropía con respecto a x (eje horizontal) utilizando la secuencia de van der Corput [2].

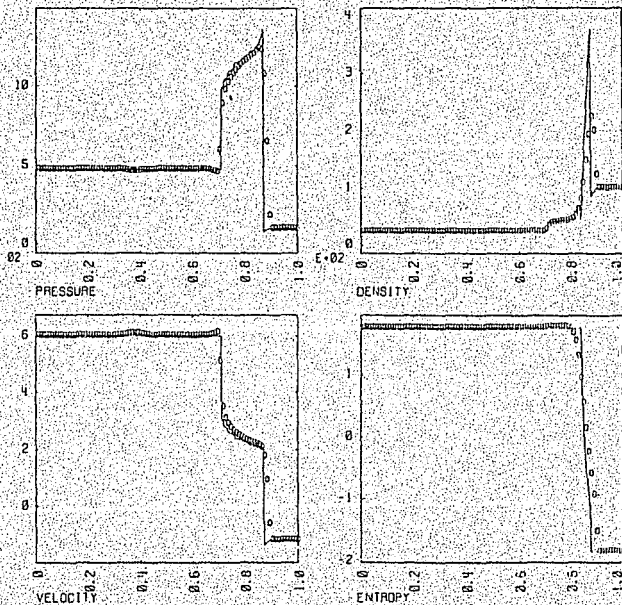


Fig. 2.13 Solución calculada, marcas con círculos, para la presión, densidad, velocidad y entropía con respecto a x (eje horizontal) con el método de Godunov en una dimensión [2].

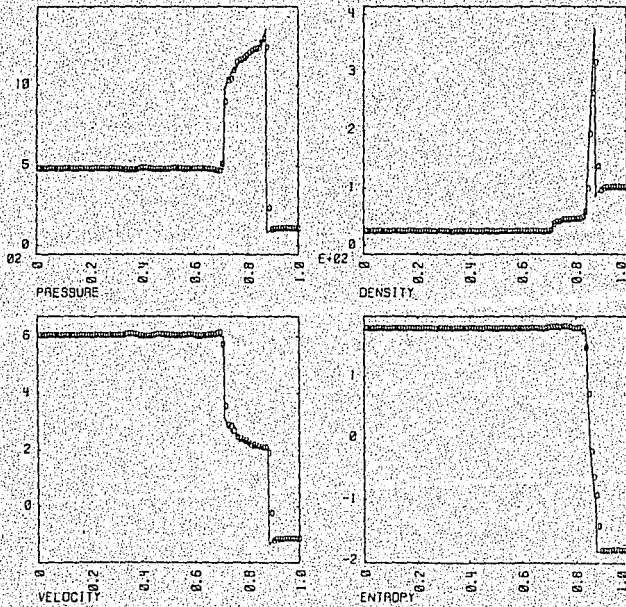


Fig. 2.14 Solución calculada, marcas con círculos, para la presión, densidad, velocidad y entropía con respecto a x (eje horizontal) con el código MUSCL en una dimensión [2].

valor pico de la densidad, que se muestra en los resultados de la solución exacta, fig. 2.12 .

Colella [2] sobre la base establecida por Chorin [4] desarrolla un procedimiento para modelar un flujo en dos dimensiones. Resuelve el sistema de leyes de conservación mediante el método de Glimm, encontrando severas distorsiones al momento de solucionar la discontinuidad en la presión y velocidad. Para corregir este problema reemplaza el método de Glimm por el método de Godunov [3] en las partes discontinuas, encontrando en sus resultados mejoras relevantes cuando resolvió el problema del choque en un tubo, fig. 2.15 . El método híbrido Glimm-Godunov pudo mostrar la solución aguda del choque y la presencia de las tres ondas, lo que no se logró en los cálculos usando solamente Glimm, fig. 2.16 o Godunov, fig. 2.17.

Colella [2] propone investigar más aplicaciones del método de Glimm con respecto a dinámica de gases con términos fuente o flujo elástico-plástico.

Siendo los primeros en estudiar el flujo en una tobera a través del método de selección aleatoria, Glimm et al. [9], modelan un flujo unidimensional influenciado por geometrías curvas como las que se presentan en una tobera de Laval, fig. 2.18. Consideran que las soluciones de los problemas de Riemann para estos flujos presentan una mayor intensidad o debilidad en las ondas así como una curvatura en éstas. Los efectos de la curvatura recaen sobre el sistema de leyes de conservación, introduciendo un término fuente que origina ecuaciones no homogéneas (2.12) y cambia la

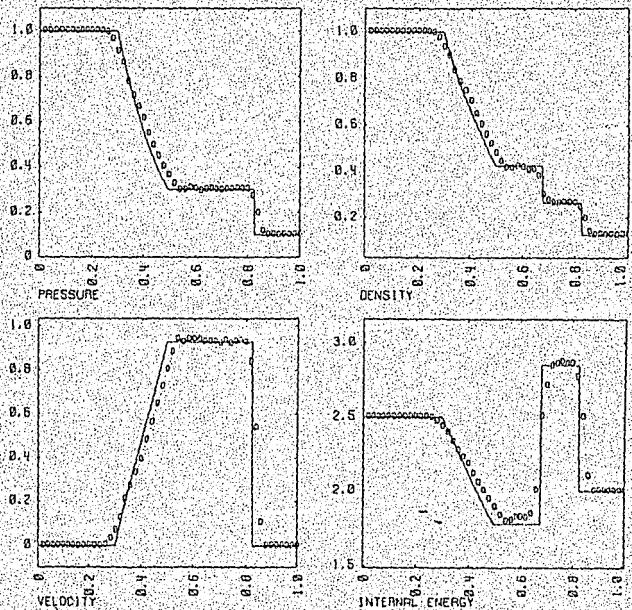


Fig. 2.15 Solución del problema del choque en un tubo utilizando el método híbrido Glimm-Godunov. Problema en dos dimensiones [2]. Se presenta la variación de la presión, densidad, velocidad y energía interna con respecto a x solamente (eje horizontal).

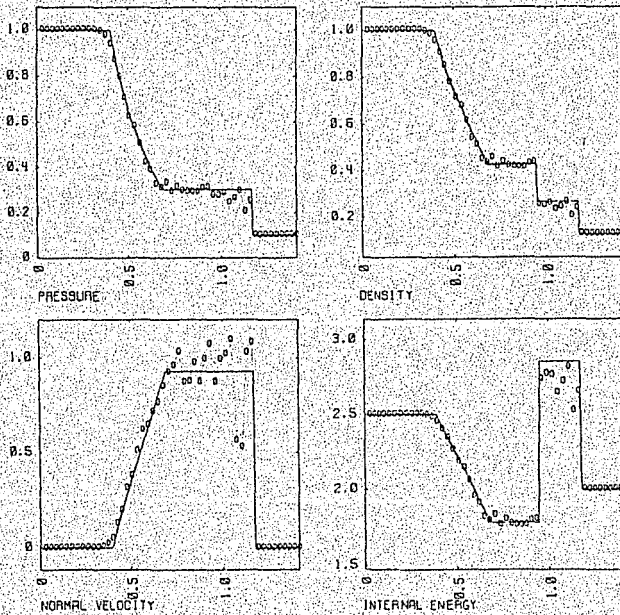


Fig. 2.16 Solución del problema del choque en un tubo utilizando el método de Glimm. Problema en dos dimensiones [2]. Se presenta la variación de la presión, densidad, velocidad y energía interna con respecto a x solamente (eje horizontal).

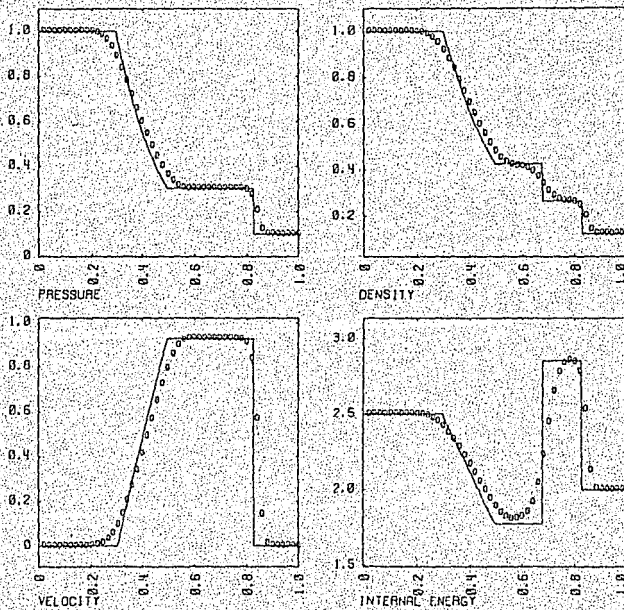


Fig. 2.17 Solución del problema del choque en un tubo utilizando el método de Godunov. Problema en dos dimensiones [2]. Se presenta la variación de la presión, densidad, velocidad y energía interna con respecto a x solamente (eje horizontal).

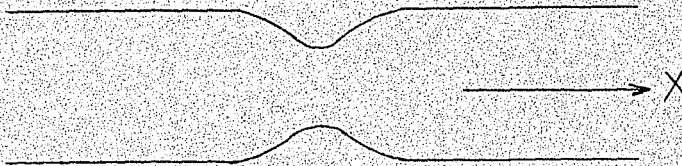


Fig. 2.18 Tobera de Laval.

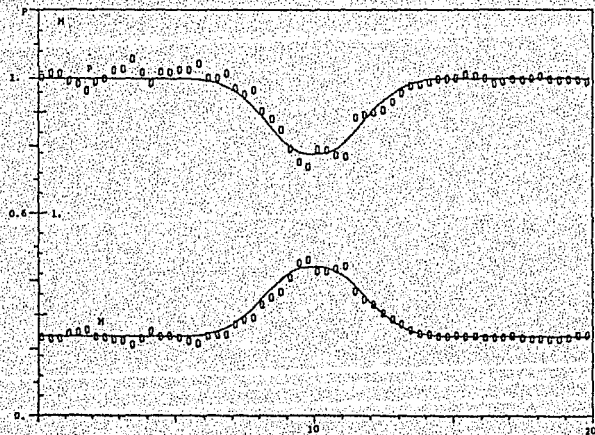


Fig. 2.19 Variación de la presión (p) y número de Mach (M) con respecto a x obtenidas con el método de pasos fraccionados, Sod [8]. Primer problema [9].

intensidad de las ondas. Este problema se describe mediante el sistema conservativo de la forma

$$W_t + f(W)_x = g(x, W) \quad (2.12)$$

donde

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad f(W) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ \left(\frac{m}{\rho}\right)(e+p) \end{pmatrix}$$

$$g(x, W) = -\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} \\ \left(\frac{m}{\rho}\right)(e+p) \end{pmatrix}$$

$\alpha(x)$ es el area de la sección transversal de la tobera en x .

Debido a que las ecuaciones son cuasilineales, la velocidad de la onda depende de la intensidad de la onda misma y entonces las trayectorias de las ondas de sonido y de choque no son líneas rectas cuando se dibujan en el plano espacio-tiempo. Además consideran, que la posición de la onda depende sobre el término fuente en segundo orden de exactitud en el tiempo.

A partir de esto, Glimm et al. [9], para incluir la exactitud de segundo orden, propone utilizar lo que denomina problema de Riemann generalizado: un problema de valores iniciales con condiciones iniciales que consisten de dos soluciones estado estacionario separadas por una discontinuidad de salto. De esta manera, extiende el nombre a método de selección aleatoria

generalizado, en donde la solución en cada etapa de tiempo es aproximada por un flujo estacionario, a diferencia de los establecido hasta ahora por Chorin [4] y [5], Sod [8], Concus et. al [6] y Marshall y Méndez [15] que aproximaron mediante un estado constante. Se avanza a la siguiente etapa de tiempo, resolviendo un problema de Riemann generalizado de segundo orden en el tiempo formado por flujos estacionarios sobre intervalos de malla adyacentes. El flujo estacionario aproximado de la nueva etapa de tiempo es obtenido por muestreo de la solución en un punto escogido aleatoriamente.

La curvatura de la onda de choque se obtiene al resolver la ecuación diferencial ordinaria para la posición del choque $dx/dt = \xi(x)$ donde $\xi(x)$ es la velocidad del choque. De la misma manera, la curvatura de la rarefacción se encuentra resolviendo $dx/dt = v(x) - c(x)$, donde la variación de v y c en x se determinan resolviendo las ecuaciones en estado estacionario con condiciones iniciales que surgen de la solución del problema de Riemann ordinario.

Glimm et al. [9] prueban computacionalmente su método mediante dos experimentos numéricos. El primero maneja solo flujo subsónico a través de la tobera de Laval, mientras que el segundo contempla condiciones subsónicas a la entrada, flujo sónico en la garganta y una onda de choque después de la garganta. Los resultados se compararon con los obtenidos mediante el método pasos fraccionados seguido por Sod [8], encontrándose que en los resultados de éste se aprecian fluctaciones con respecto a la

solución exacta mientras que el uso del método de selección aleatoria generalizado originó mejores resultados, a pesar de tomar mucho tiempo para obtenerlos fig. 2.19, fig. 2.20, (1125 etapas de tiempo), fig. 2.21, fig. 2.22, (500 etapas de tiempo), fig. 2.23 y fig. 2.24, (1500 etapas de tiempo).

En este artículo se propone el uso del método de selección aleatoria generalizado sobre todo por las ventajas en la reducción de fluctuaciones producto del muestreo aleatorio.

----- o -----
Con la intención de comparar los resultados de la investigación que se presentan en este trabajo, también se hace referencia a los artículos de Meng-Sing et al. [22] y Shubin et al. [23]. El primero modela el flujo de gas real en toberas convergentes- divergentes, y lo compara con una solución exacta para gas ideal, que se escogerá para confrontar los resultados de este trabajo. Shubin et al. [23], calcula la variación de las características del flujo estacionario en una tobera divergente mediante un metodo de diferencias finitas de marcha en el tiempo. Su modelo se basa en un sistema de leyes de conservación no homogéneo, el cual elimina la dependencia del tiempo para resolver el sistema resultante.

Aunque Shubin et al. [23] analiza un flujo estacionario, sus resultados se consideran un caso particular del problema al que se evoca esta investigación.

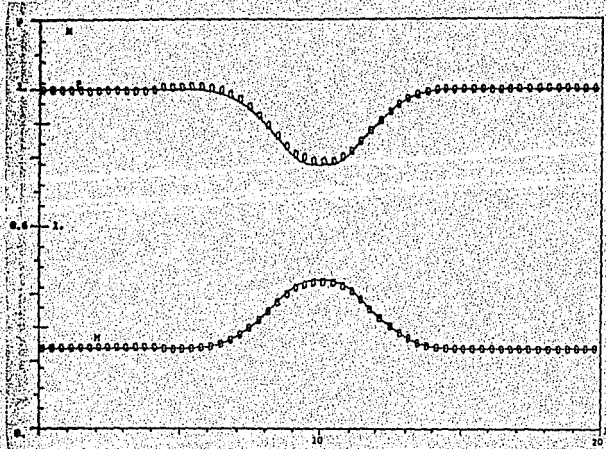


Fig. 2.20 Variación de la presión (p) y número de Mach (M) obtenidos con el método de selección aleatoria generalizado. Primer problema [9].

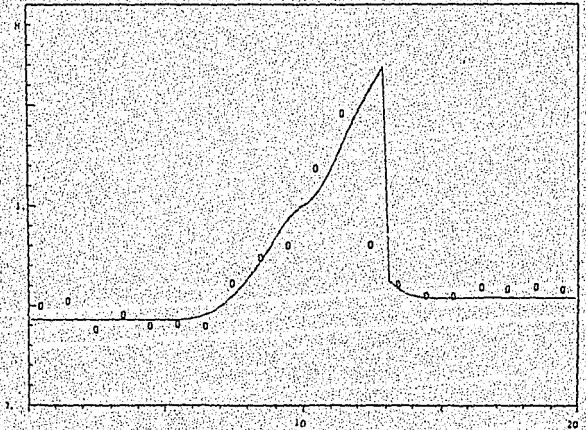


Fig. 2.21 Variación del número de Mach (M) obtenido con el método pasos fraccionados, Sod [8]. Malla burda. Segundo problema [9].

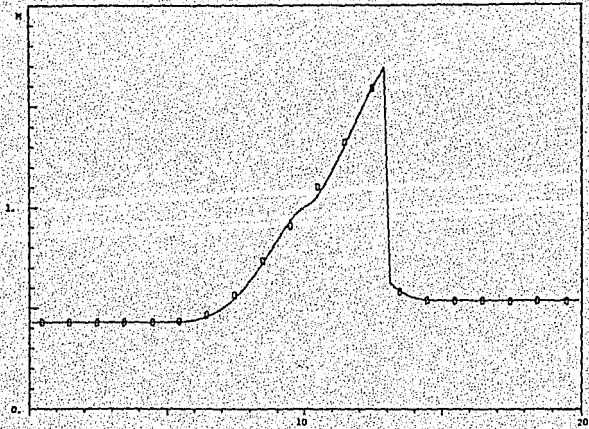


Fig. 2.22 Variación del número de Mach (M) obtenido con el método de selección aleatoria generalizado. Malla burda. Segundo problema [9].

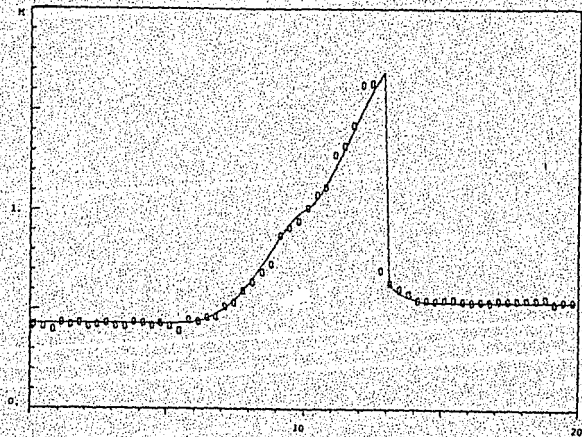


Fig. 2.23 Variación del número de Mach (M) obtenido con el método pasos fraccionados, Sod [8]. Malla fina. Segundo problema [9].

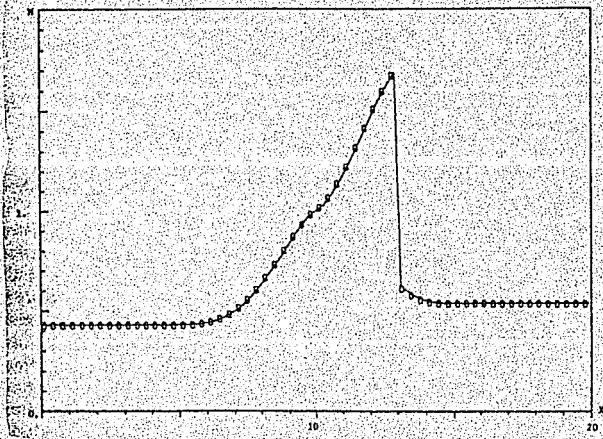


Fig. 2.24 Variación del número de Mach (M) obtenido con el método de selección aleatoria generalizado. Malla fina. Segundo problema [9].

2.1 CONCLUSIONES.

De la revisión bibliográfica se puede establecer que el método de Glimm es capaz de resolver satisfactoriamente las ecuaciones de Euler no homogéneas, utilizadas para modelar flujo sónico y subsónico en toberas de área variable. Se destaca la eliminación de difusión y dispersión numérica.

Además se concluye que para implementar el método de Glimm, conviene utilizar el esquema de Chorin-Godunov [4] para resolver los problemas de Riemann y que para generar la variable aleatoria equidistribuida θ , el método de van der Corput resulta ser el más conveniente.

Los artículos y experimentos numéricos para el caso no homogéneo [8] y [9], han sido relativamente pocos y aplicados solo a toberas con variación de área no compleja.

Persiste la necesidad de una implementación eficiente del método de Glimm en dos y tres dimensiones.

CAPITULO 3.

APLICACION DEL METODO DE GLIM PARA RESOLVER LAS ECUACIONES EN UNA DIMENSION QUE DESCRIBEN EL FLUJO EN TOBERAS CONVERGENTES-DIVERGENTES Y DIVERGENTES.

La determinación de las características del flujo como, presión, velocidad, densidad y energía interna para el caso de toberas convergentes y convergentes-divergentes, se llevará acabo empleando la metodología de Sod [8]. Añadiremos aspectos que no se consideraron en ésta, como la determinación de la variable aleatoria θ por medio de la secuencia de van der Corput y la variación del área de la tobera con respecto a x , tanto para toberas convergentes-divergentes como divergentes solamente. Primeramente mostraremos el modelo matemático sobre la base de Glimm J. et al. [9], así como el esquema del método de pasos fraccionados.

Posteriormente presentaremos el método de Glimm [1], y se expondrá el problema de Riemann y sus solución.

3.1 Ecuaciones que determinan el flujo en toberas.

La curvatura de las toberas introduce un término fuente en las leyes de conservación que describen el flujo, obteniendo un sistema de ecuaciones no-homogéneas.

Considerando el flujo de gas unidimensional, no viscoso y politrópico, las ecuaciones que describen este flujo se pueden escribir de acuerdo con Glimm J. et al. [9] como

$$W_t + f(W)_x = g(x, W) \quad (3.1)$$

donde

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} \frac{m}{\rho} + p \\ (\frac{m}{\rho}) (e+p) \end{pmatrix}$$

$$g(x, W) = -\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \begin{pmatrix} \frac{m}{\rho} \\ (\frac{m}{\rho}) (e+p) \end{pmatrix}$$

Aquí ρ es la densidad, m es el momentum, e es la energía y $\alpha(x)$ es el área de la sección transversal de la tobera en x .

Tenemos que $e = \rho \epsilon + 1/2(\rho u^2)$ donde ϵ es la energía interna por unidad de masa, si el gas es politrópico entonces

$$\epsilon = \left(\frac{1}{\gamma-1} \right) \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

Para resolver el sistema (3.1) utilizamos el método de pasos fraccionados para remover el término $g(x, W)$ de (3.1), resolvemos el sistema

$$W_t + f(W)_x = 0 \quad (3.2)$$

$$W_t = g(x, W) \quad (3.3)$$

El método que se utiliza para resolver (3.2) es el de Glimm [1], y se muestra en la siguiente sección. La solución obtenida en (3.2) es utilizada para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.3) mediante la aproximación de Cauchy-Euler,

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \Delta t g(v_i^{n+1})$$

donde v_i es la solución aproximada de (3.2).

3.2 Método de Glimm.

Consideremos el sistema no lineal de ecuaciones (3.2) donde W es el vector solución y los subíndices denotan diferenciación. Se divide el tiempo en intervalos de longitud Δt y el espacio en intervalos Δx . La solución es evaluada en los tiempos $n\Delta t$ donde n es un número entero no negativo, en los puntos espaciales $i\Delta x$ donde $i=0, i_1, i_2, i_3, \dots$, y en los tiempos $(n+1/2)\Delta t$ en $(i+1/2)\Delta x$.

Se consideran 2 etapas en el método. Sea $W(i\Delta x, n\Delta t)$ denotada por w_i^n y $W((i+1/2)\Delta x, (n+1/2)\Delta t)$ denotado por $w_{i+1/2}^{n+1/2}$ en (3.2).

Para encontrar la solución $w_{i+1/2}^{n+1/2}$ se considera el sistema (3.2) junto con las condiciones iniciales

$$W(x, n\Delta t) = \begin{cases} w_{i+1}^n & x > (i + \frac{1}{2})\Delta x \\ w_i^n & x < (i + \frac{1}{2})\Delta x \end{cases} \quad (3.4)$$

Esto da una secuencia de problemas de Riemann. El valor w_i^n es llamado estado izquierdo y el valor w_{i+1}^n es llamado estado derecho del problema de Riemann. La solución a los problemas de Riemann se explicará posteriormente. Sea $V(x,t)$ la solución exacta al problema de Riemann y sea θ_i un valor de la variable aleatoria θ equidistribuida en $[-1/2, 1/2]$ entonces

$$w_{i+1/2}^{n+1/2} = V((i + \theta_i)\Delta x, (n+1/2)\Delta t) \quad (3.5)$$

ver fig. 3.1 y 3.1a.

Con la misma construcción encontramos w_i^{n+1} a partir de $w_{i+1/2}^{n+1/2}$. La exactitud del método depende de la solución del problema de Riemann y de la selección correcta de los números aleatorios. Estos se calculan por medio de la fórmula de van der Corput (3.6) que se explicará a continuación.

La expansión binaria de $n = 1, 2, \dots$ es

$$n = \sum_{k=0}^b i_k 2^k \quad i_k = 0, 1 \quad (3.6)$$

$$\theta^n = \sum_{k=0}^b i_k 2^{-(k+1)}$$

La variable θ se calcula una vez por etapa de tiempo.

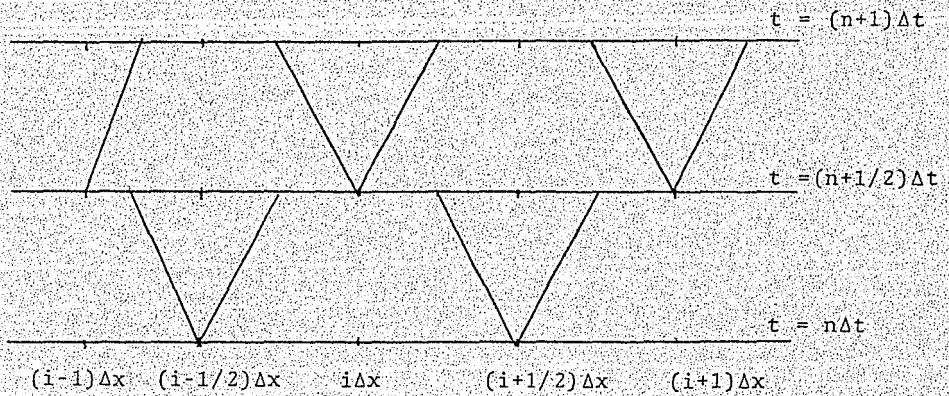


Fig. 3.1 Secuencia de los problemas de Riemann sobre la malla.

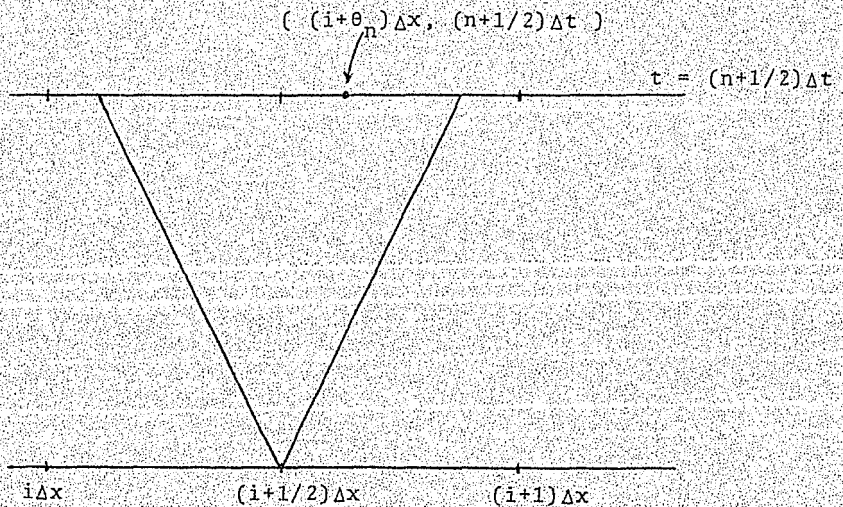


Fig. 3.1a Procedimiento de muestreo por el esquema de Glimm.

3.2.1 El problema de Riemann.

El problema de Riemann es el problema de valores iniciales para (3.7) junto con las condiciones iniciales (3.8).

$$W_t + f(W)_x = 0 \quad (3.7)$$

$$W(x, 0) = \begin{cases} W_R & x \geq 0 \\ W_L & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

donde

$$W_R = \begin{bmatrix} \rho_R \\ u_R \\ e_R \end{bmatrix}, \quad W_L = \begin{bmatrix} \rho_L \\ u_L \\ e_L \end{bmatrix}$$

son los estados constantes del gas del lado derecho e izquierdo respectivamente.

El sistema (3.7) se puede escribir como $W_t + A(W)W_x = 0$ donde $A(W)$ es el Jacobiano de f . $A(W)$ tiene tres eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, correspondientes a tres características dadas por las curvas

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i \quad i=1, 2, 3 \quad (3.9)$$

En el sistema 3 X 3 de dinámica de gases tenemos $\lambda_1 = u + c$, $\lambda_2 = u - c$, $\lambda_3 = u$ donde c es la velocidad del sonido.

El plano $x-t$ se puede dividir en 4 regiones, fig. 3.2, I, II, III, IV donde $W(x, t)$ es cte.

Estas 4 regiones son conectadas por 3 ondas, cada una asociada con una de las velocidades características. Estas son: una onda sónica mirando hacia atrás, asociada con $u - c = \lambda_1$, entre $l_{1,b}$ y $l_{2,b}$; una discontinuidad de contacto asociada con $u = \lambda_2$,

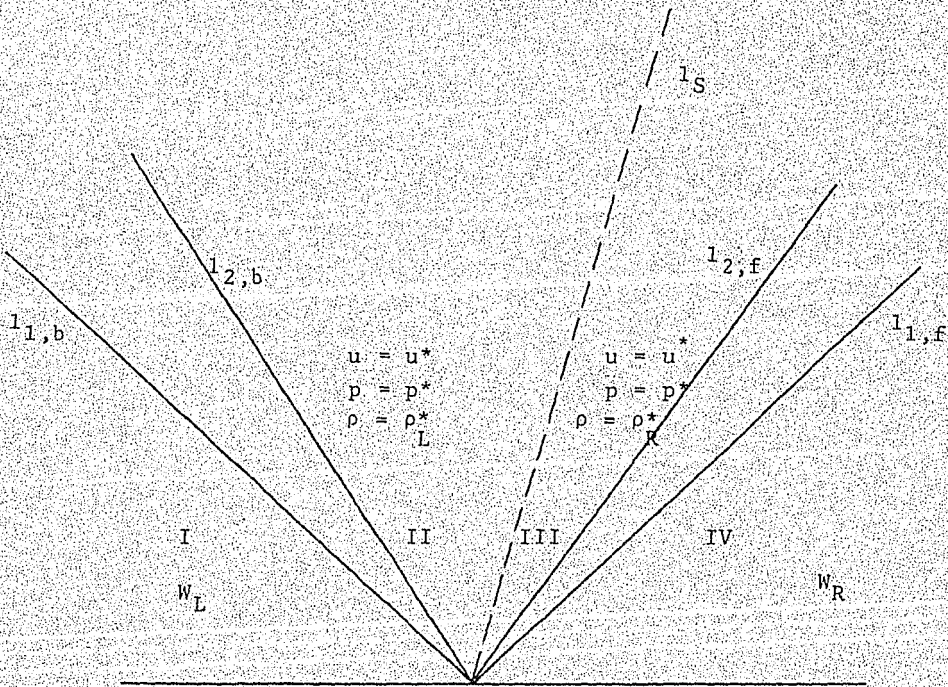


Fig. 3.2 Solución del problema de Riemann.

ocurriendo a través de la línea l_g ; y una onda sónica mirando hacia delante asociada con $u + c = \lambda_3$, entre $l_{1,f}$ y $l_{2,f}$. La presión y la velocidad son continuas a través de l_g de tal manera que son iguales a un valor p_* y u_* en II y III. Solamente la densidad cambia. Se busca la solución ρ , u y p en el punto muestra $P = ((i+\theta_i)\Delta x, (n+1/2)\Delta t)$.

La primera etapa de la solución del problema de Riemann es evaluar p_* , u_* en S^* . Esto se hace por el método debido a Godunov. Se define la cantidad

$$M_L = \frac{p_L - p_*}{u_L - u_*} \quad (3.10)$$

Si la onda izquierda es un choque, usamos la condición de salto $U_L[\rho] = [\rho u]$ para obtener

$$M_L = \rho_L (u_L - U_L) = \rho_* (u_L - U_L) \quad (3.11)$$

donde U_L es la velocidad del choque izquierdo y ρ_* es la densidad en la porción S^* junto al choque izquierdo. Similarmente definimos la cantidad

$$M_R = \frac{p_R - p_*}{u_R - u_*} \quad (3.12)$$

Si la onda derecha es un choque, usando la condición de salto $U_R[\rho] = [\rho u]$ obtenemos

$$M_R = -\rho_R (u_R - U_R) = -\rho_* (u_* - U_R) \quad (3.13)$$

donde U_R es la velocidad del choque derecho y ρ_* es la densidad en

la porción de S^* junto al choque derecho.

En cualquiera de los casos (3.10) ó (3.11) para M_L y (3.12) ó (3.13) para M_R , obtenemos

$$M_L = (\rho_L p_L)^{1/2} \phi \left(\frac{p_*}{p_L} \right) \quad (3.14)$$

$$M_R = (\rho_R p_R)^{1/2} \phi \left(\frac{p_*}{p_R} \right) \quad (3.15)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \left(\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\gamma-1}{2} x \right)^{1/2}, & x \geq 1 \\ \frac{\gamma-1}{2\gamma^{1/2}} \frac{1-x}{1-x^{\gamma-0.5\gamma}}, & x \leq 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Eliminando u_* de (3.10) y (3.12) obtenemos

$$p_* = \frac{u_L - u_R + \frac{p_L}{M_L} + \frac{p_R}{M_R}}{1/M_L + 1/M_R} \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.17) son 3 ecuaciones con tres incógnitas para las cuales hay una solución real. Después de escoger un valor de inicio p_*^0 iteramos usando estas tres ecuaciones.

Después que p_* , M_L y M_R han sido determinados obtenemos u_* , eliminando p_* de (3.10) y (3.11)

$$u_* = \frac{P_L - P_R + M_L u_L + M_R u_R}{M_L + M_R} \quad (3.18)$$

Hay 4 casos que se deben de considerar.

- 1) El punto muestra $P = ((1 + \theta)\Delta x, (n+1/2)\Delta t)$ está a la izquierda de la línea de deslizamiento y la onda derecha es un choque, $p_* \geq p_R$.
- 2) El punto muestra P está a la derecha de la línea de deslizamiento y la onda derecha es una rarefacción $p_* \leq p_R$.
- 3) El punto muestra está a la izquierda de la línea de deslizamiento y la onda izquierda es un choque, $p_* \geq p_L$.
- 4) El punto muestra está a la izquierda de la línea de deslizamiento y la onda izquierda es una rarefacción $p_* \leq p_L$.

Caso 1. La velocidad U_R del choque derecho se puede encontrar mediante la ecuación (3.13). Si el punto muestra se encuentra a la derecha de la línea de choque $dx/dt = U_R$ tenemos $\rho = \rho_R$, $u = u_R$, $p = p_R$. Si P está a la izquierda del choque $\rho = \rho_*$, $u = u_*$, $p = p_*$ puede ser encontrado de la segunda ecuación de (3.13).

Caso 2. Sea $c = (\gamma p / \rho)^{0.5}$ la velocidad del sonido. La rarefacción es limitada en la derecha por la línea $dx/dt = u_R + c_R$ con $c_R = (\gamma p_R / \rho_R)^{0.5}$ y sobre la izquierda por la línea $dx/dt = u_* + c_*$ donde $c_* = (\gamma p_* / \rho_*)^{0.5}$ puede ser encontrada usando la invariante de Riemann

$$\Gamma_R = 2c_*(\gamma - 1)^{-1} - u_* = 2c_R(\gamma - 1)^{-1} - u_R \quad (3.19)$$

Si P está a la derecha de la rarefacción $\rho = \rho_R$, $u = u_R$, $p = p_R$; si P está a la izquierda de la rarefacción $\rho = \rho_*$, $u = u_*$, $p = p_*$. Si P está dentro de la rarefacción, igualamos las pendientes de las características $dx/dt = u+c$ a la pendiente de la línea a través del origen y P, obteniendo $u + c = 2 \theta \Delta x / \Delta t$, la Γ_R y $(p\rho)^\gamma = \text{cte.}$ junto con la definición de $c = (\gamma p / \rho)^{0.5}$ producen ρ , u y p . Los casos 3 y 4 son imágenes de 1 y 2.

De esta manera encontramos la solución exacta del problema de Riemann la cual se utiliza para conocer la solución aproximada en (3.5) de la ecuaciones de Euler (3.2).

CAPITULO 4.

COMPARACION DEL MODELO PROPUESTO CON LOS ENCONTRADOS EN LA LITERATURA.

Para la comparación de los resultados obtenidos utilizando el método de Glimm para resolver el sistema de leyes de conservación no-homogéneo se utilizaron los resultados de algunos autores. Se escogieron aquellos que proporcionaron datos que ayudaran a describir mejor las condiciones iniciales y de frontera que solicita el programa desarrollado. La primera parte de la comparación es con los resultados de Sod [8] y para la segunda se consideraron los resultados de Meng-Sing et al. [22] y Shubin et al. [23].

4.1 Comparación del modelo para el problema de flujo con simetría cilíndrica con los resultados de Sod [8].

Se considera que inicialmente un diafragma cilíndrico separa dos regiones uniformes de gas en reposo como en un tubo con choque, la presión y la densidad de un lado del diafragma son mas grandes que la presión y densidad del otro lado.

Del artículo de Sod [8]

$$P_R = 4.0 \quad u_L = 1.0$$

$$\rho_R = 4.0 \quad \rho_L = 1.0$$

$$u_R = 0.0 \quad u_L = 0.0$$

Al igual que en [8] se toma $\Delta x=0.01$. La etapa de tiempo se escoge de tal manera que la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (4.1)

$$\max(|u|+c) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.1)$$

sea satisfecha, donde c es la velocidad del sonido.

Las figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 muestran las variaciones de la presión, velocidad, densidad y energía interna obtenidas por Sod [8] para diferentes tiempos.

Los resultados calculados con el programa aquí desarrollado, que incluyen la obtención de la variable θ por medio de la secuencia de van der Corput se muestran en las figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8.

Se observa que al igual que Sod [8], cuando el tiempo se incrementa, la onda de choque se propaga hacia las fronteras aumentando la intensidad del choque, contrariamente a lo que sucede con la onda de rarefacción. También podemos confirmar, que al llegar a la frontera, el choque se refleja y su intensidad aumenta apareciendo un choque divergente.

Con respecto a la velocidad las figs. 4.2 y 4.6, muestran valores negativos. Después de reflejarse el choque en las fronteras los resultados son positivos por el efecto del choque divergente.

Para la variación de la densidad y energía las figs. 4.7 y 4.8 muestran las discontinuidades de contacto al igual que en Sod [8]. Los cálculos realizados con el programa desarrollado producen

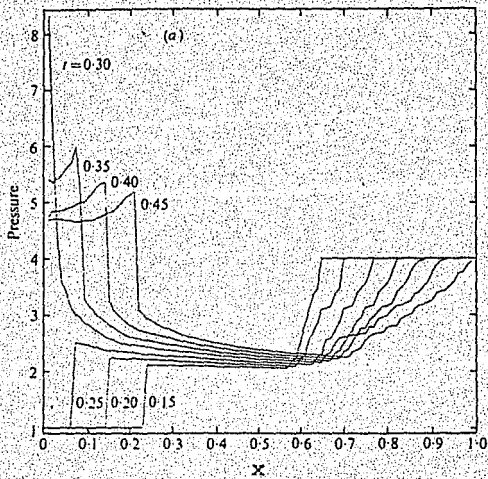


Fig. 4.1 Distribución de la presión con respecto a x para un flujo con simetría cilíndrica, Sod [8].

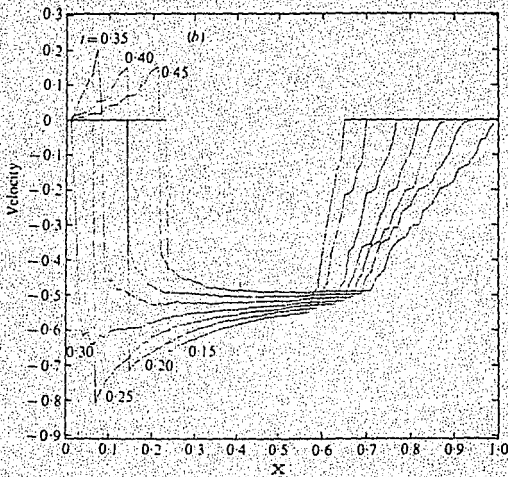


Fig. 4.2 Distribución de la velocidad con respecto a x para un flujo con simetría cilíndrica, Sod [8].

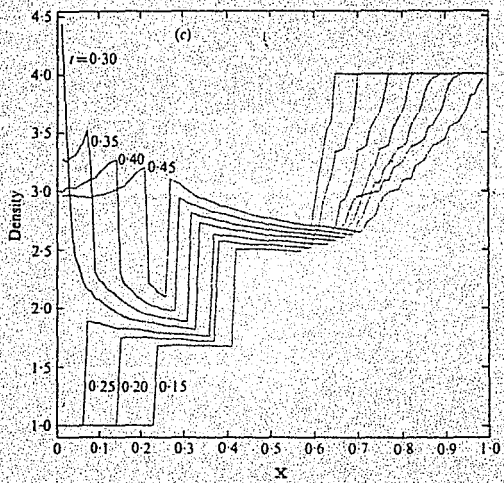


Fig. 4.3 Distribución de la densidad con respecto a x para un flujo con simetría cilíndrica, Sod [8].

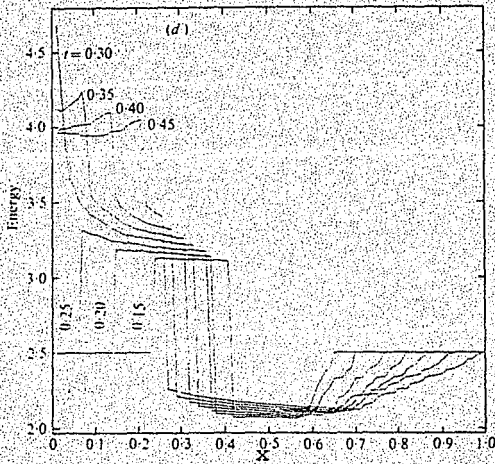


Fig. 4.4 Distribución de la energía interna con respecto a x para un flujo con simetría cilíndrica, Sod [8].

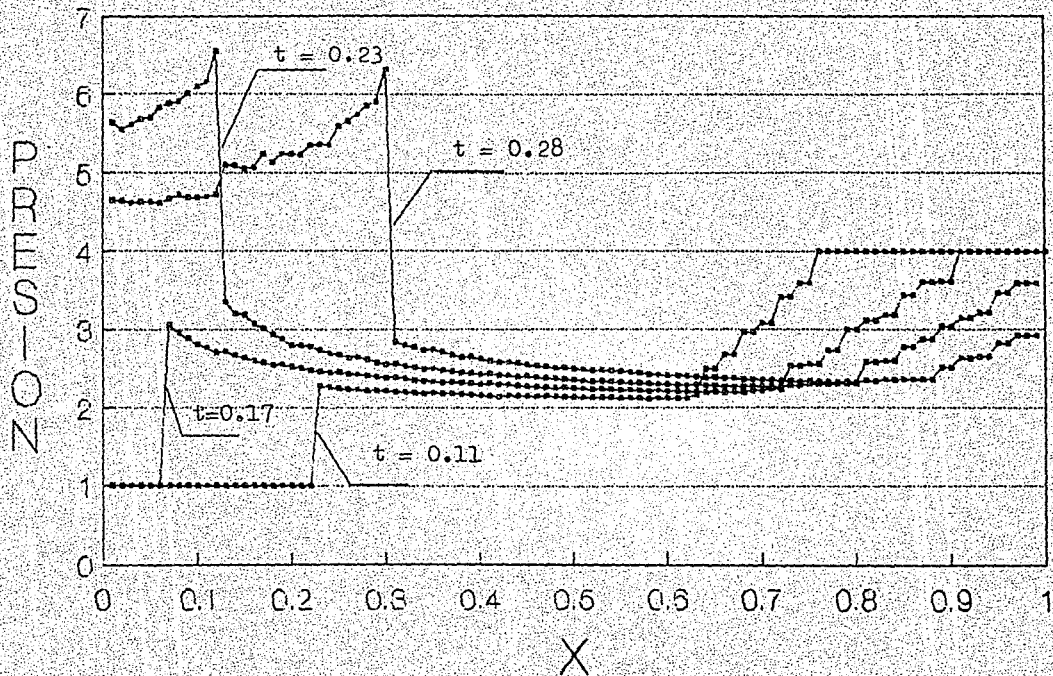


Fig. 4.5 Distribucion de la presión para un flujo con simetría cilíndrica.

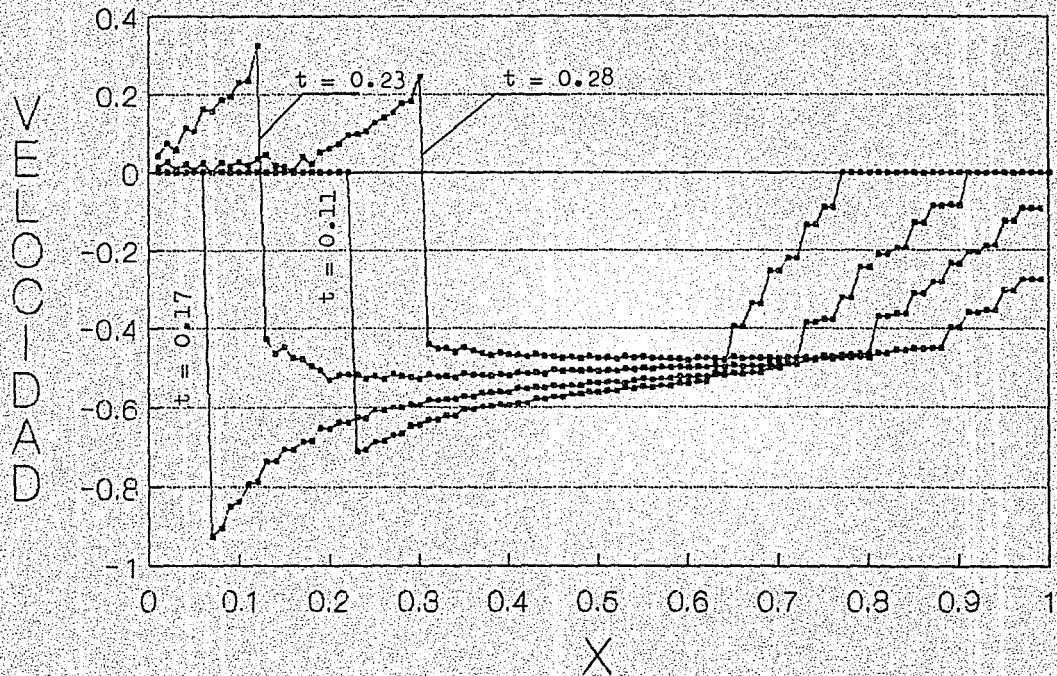


Fig. 4.6 Distribución de la velocidad para un flujo con simetría cilíndrica.

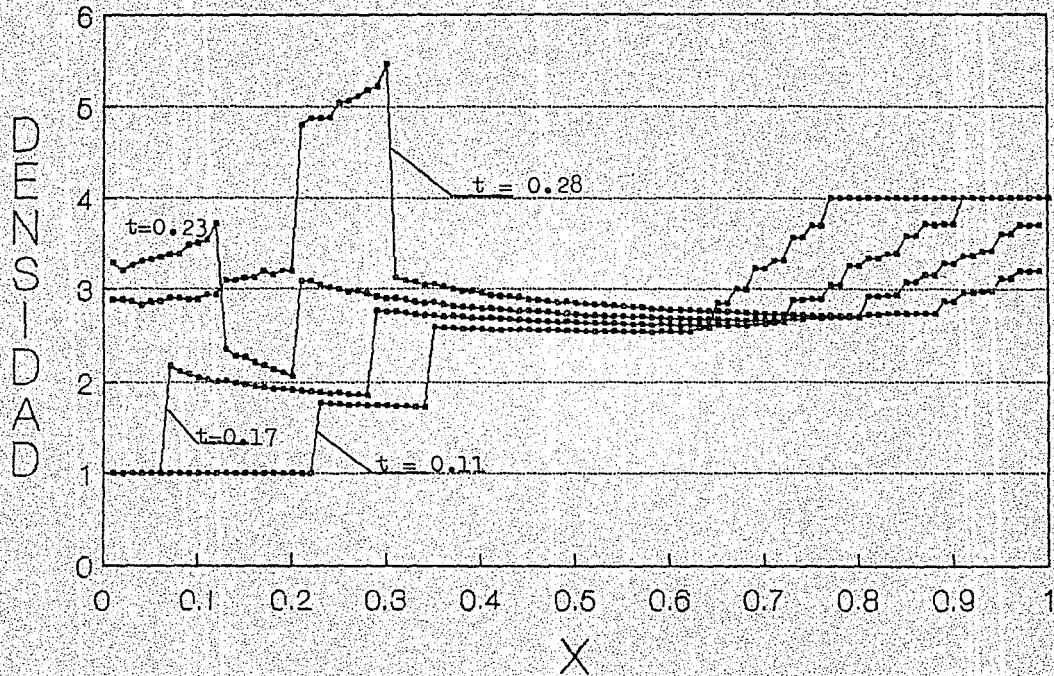


Fig. 4.7 Distribución de la densidad para un flujo con simetría cilíndrica.

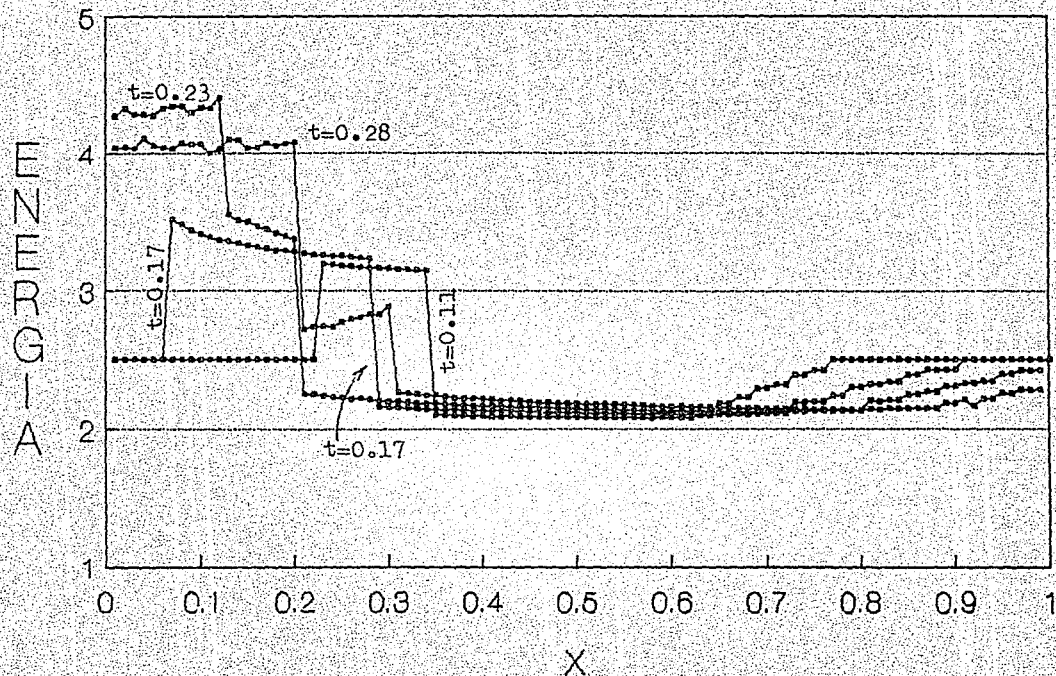


Fig. 4.8 Distribución de la energía para un flujo con simetría cilíndrica.

resultados semejantes a los de Sod [8], pero en menor tiempo. Compárese para $t=0.11$ y Sod [8] para $t=0.15$. Resalta la forma aguda del choque y la discontinuidad de contacto en los cuatro casos. A diferencia de Sod [8], en la variación de la densidad, después de reflejarse el choque y la discontinuidad de contacto, hay un cambio de dirección en éstos, vease figs. 4.7, $t = 0.28$. Así mismo, se encontró que los resultados mostraban choques de mayor intensidad, en comparación con los de Sod [8], en la presión y velocidad, mientras que en la densidad y energía sucede lo contrario.

4.2 Comparación del modelo para la determinación del flujo en toberas convergentes-divergentes y divergentes.

4.2.1 Tobera convergente-divergente.

El término fuente de las leyes de conservación no homogéneas depende de la relación entre las funciones distribución del área $A(x)$ y la derivada con respecto a x de ésta, $A'(x)$, ecuación (3.1). Meng-Sing [22] utiliza para sus cálculos la variación del área siguiente:

$$A(x) = 5.5 - 4.5 \cos\left(\frac{x-4}{6}\pi\right), \quad 4 \leq x \leq 10$$

$$A(x) = 1.2 - 0.2 \cos\left(\frac{x-4}{4}\pi\right), \quad x \leq 4$$

fig. 4.9. Los resultados de la distribución de la densidad, velocidad, presión y energía para un flujo en estado estacionario se muestran en la fig. 4.10, de éstos solamente se consideran las variaciones de la solución que se denomina exacta, con línea continua.

Las condiciones de frontera son

$$\begin{array}{ll} x = 10 & x = 0 \\ p = 0.3 & p = 0.9 \\ \rho = 0.4 & \rho = 1.3 \\ u = 0.4 & u = 0.5 \end{array}$$

Se inicia con un flujo subsónico a la entrada de la tobera. Conforme avanzamos por la tobera continua aumentando la velocidad y con esto el número de Mach, hasta encontrarse con un flujo sónico en la garganta. Este se encuentra aproximadamente en $x = 4$. Como se observa las condiciones del flujo son críticas en la garganta, la presión decae abruptamente y la velocidad aumenta en la misma forma. Después de la garganta se presenta el choque y pasando éste, la velocidad disminuye y la presión aumenta hasta encontrarse las condiciones de salida.

Los resultados que se calcularon con el programa desarrollado se muestran en las figuras 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 para la presión, densidad, velocidad y energía interna respectivamente. Estos se obtuvieron con 160 etapas de tiempo. Se utilizó un $\Delta x = 0.01$ y el incremento del tiempo se escogió de tal manera que la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (4.1) sea satisfecha. Para nuestro programa utilizamos el intervalo espacial $[0,1]$ que después

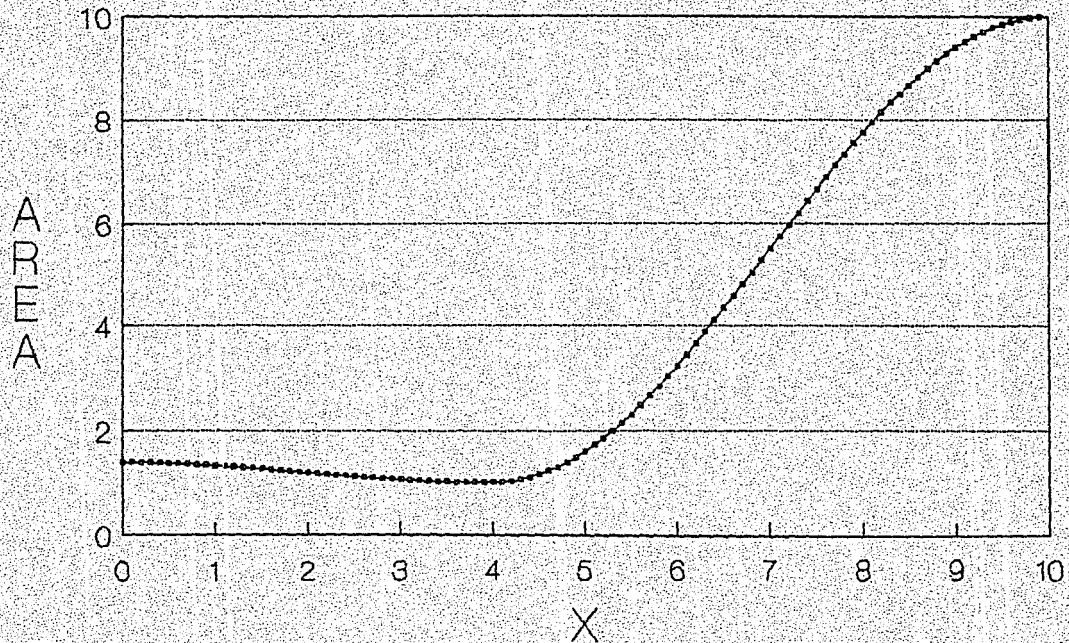


Fig. 4.9 Distribución del área para una tobera convergente-divergente, Meng-Sing et al. [22].

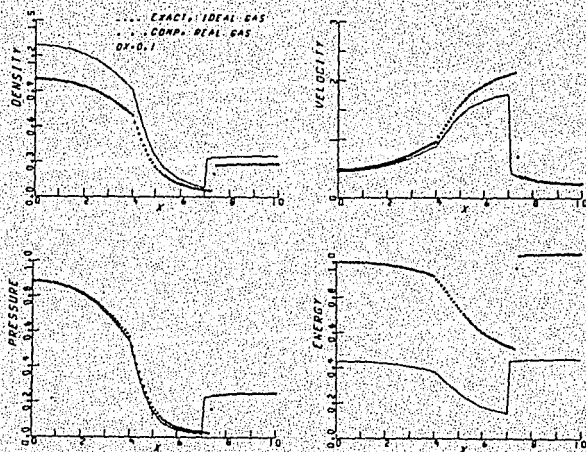


Fig. 4.10 Distribución de la densidad, velocidad, presión y energía interna con respecto a x para un flujo estacionario en una tobera convergente-divergente, fig. 4.9, según Meng-Sing et al. [22]. Para comparación considérese la línea continua.

(- - -) Sol. exacta, Meng-Sing et al.
[22], Flujo estacionario.

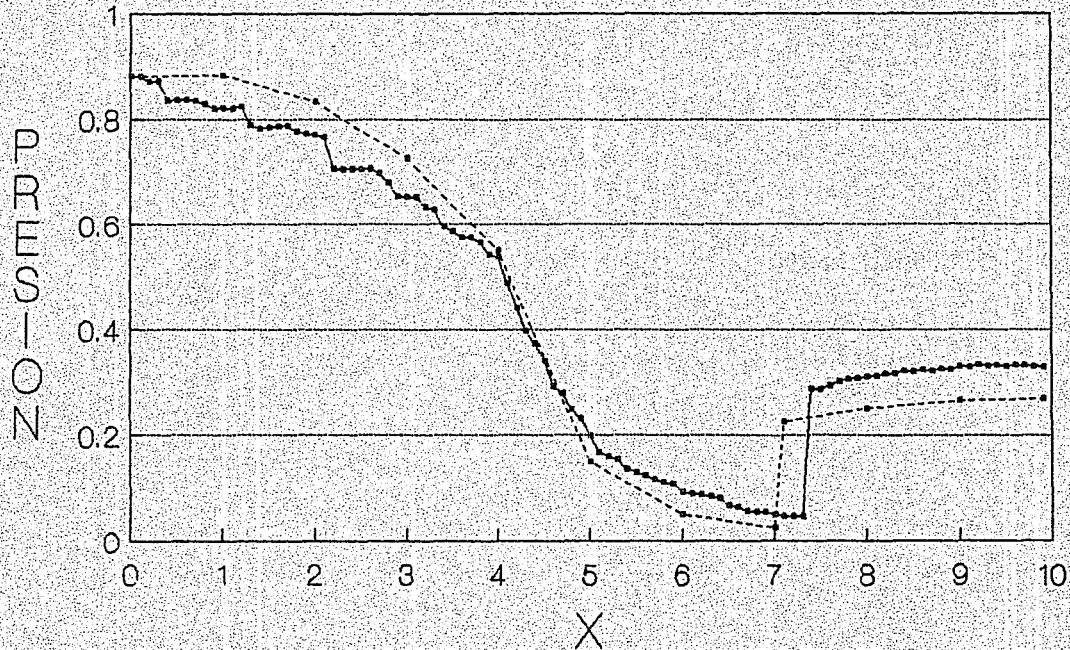


Fig. 4.11 Variación de la presión de un flujo en una tobera convergente-divergente. $t = 0.62$

(- - -) Sol. exacta Meng Sing et al.
[22]. Flujo estacionario.

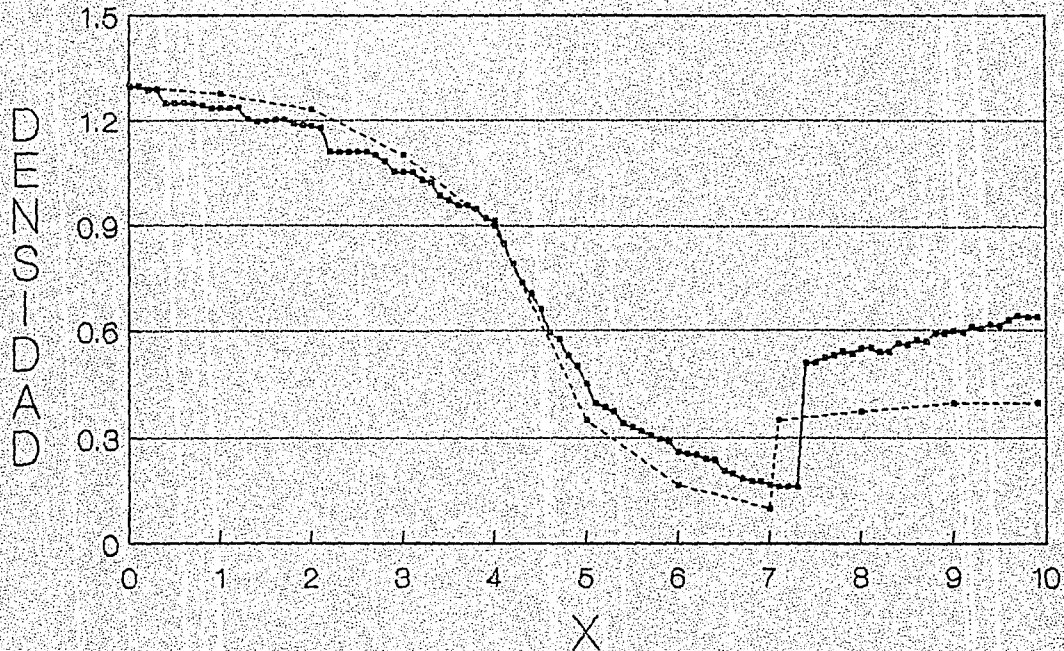


Fig. 4.12 Variación de la densidad
de un flujo en una tobera convergente-
divergente. $t = 0.62$.

(- - -) Sol. exacta. Meng-Sing et al.
[22]. Flujo estacionario.

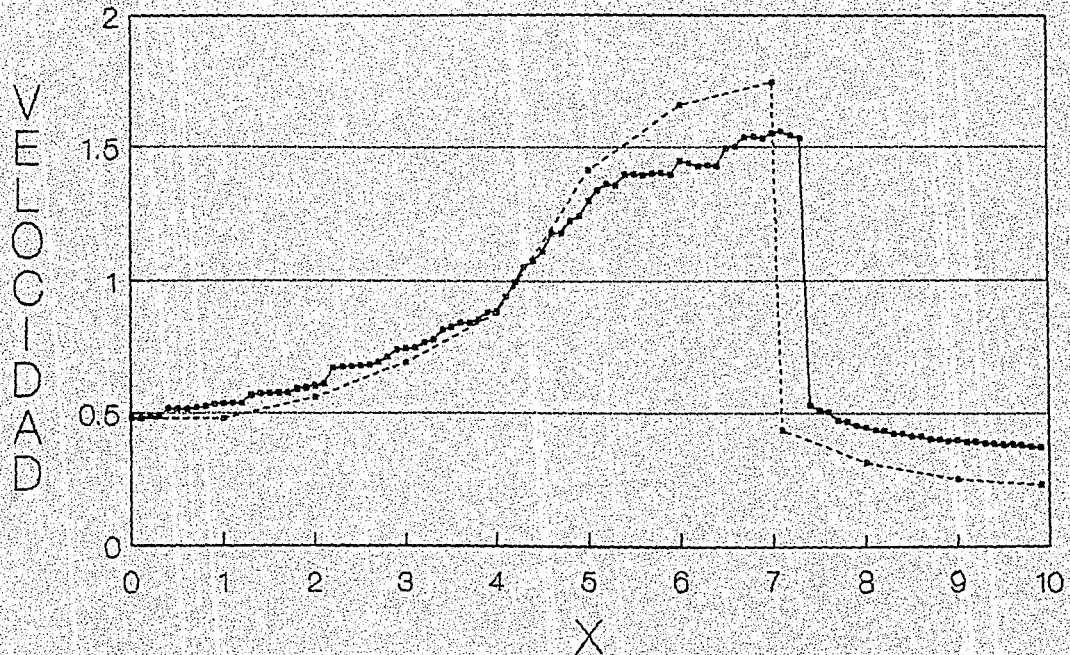


Fig. 4.13 Variación de la velocidad de un flujo en una tobera convergente-divergente. $t = 0.62$

ESTÁ TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

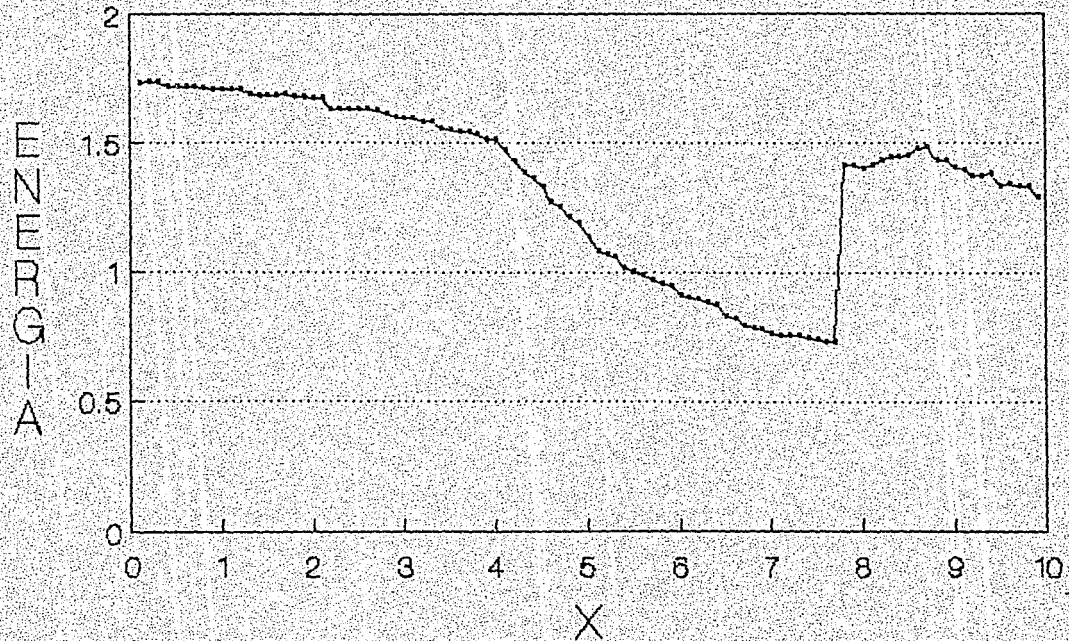


Fig. 4.14 Distribución de la energía interna para un flujo en una tobera convergente-divergente.

transformamos al intervalo $[0,10]$ para comparar con Men-Sing [22]. Como se observa en la fig. 4.11, la distribución de presiones es muy semejante a la que expone Meng-Sing [22] como solución exacta en estado estacionario. Se observa la misma tendencia; un flujo subsónico prevalece desde la entrada de la tobera, la presión disminuye gradualmente y de la misma manera aumenta la velocidad, hasta $x = 4$ donde aproximadamente está la garganta, fig. 4.13. Desde aquí el flujo en condiciones críticas experimenta un aumento súbito de la velocidad por lo que la presión disminuye hasta que ésta entra al choque, donde se observa un aumento de la presión con la correspondiente disminución de la velocidad. La densidad se comporta también como lo muestran los resultados de la solución exacta en estado estacionario.

Las fluctuaciones que se presentan en los resultados son propias del carácter aleatorio del método de Glimm. El método resuelve en forma correcta el choque presentándolo como un salto agudo, aunque éste no se encuentre en la misma posición del choque de la solución exacta, nuestros resultados lo ubican entre $x = 7.5$ y $x = 8.0$. Sin embargo, el desplazamiento de la solución numérica con respecto a la exacta es igual a cero en promedio. Es decir, de haberse repetido este experimento en forma independiente en varias ocasiones, la solución se acumulará alrededor de la posición exacta del choque.

4.2.2 Tobera divergente.

Los cálculos obtenidos con el programa desarrollado aplicado a esta clase de geometrías se compararon con los de Shubin et al. [23]. Este utilizó la variación del área siguiente:

$$A(x) = 1.398 + 0.347(\tanh(0.8x - 4.0))$$

fig. 4.15.

Los resultados presentados por [23] solamente muestran la distribución de la densidad para un flujo en estado estacionario, fig. 4.16. Las condiciones de entrada y de salida en la tobera que se presentan son:

$x = 0$	$x = 10$
$e = 1.897$	$\rho = 0.776$
$\rho = 0.502$	
$u = 1.299$	

Puesto que el programa desarrollado necesita la presión, velocidad y densidad a la entrada y salida de la tobera, los demás valores se calcularon a partir de los datos que se tienen.

Los resultados de Shubin et al. [23] calculan el choque para un flujo que inicialmente se desarrolla como supersónico, hasta encontrar condiciones críticas en la garganta, aproximadamente en $x = 3$, después aparece el choque en $x = 4.8$, al pasar através de éste el flujo experimenta cambios bruscos en la densidad hasta finalmente encontrarse con la salida en condición subsónica.

Los resultados generados a partir del programa desarrollado se muestran en las figuras 4.17, 4.18, 4.19 y 4.20, para la distribución de la densidad, presión, velocidad y energía interna

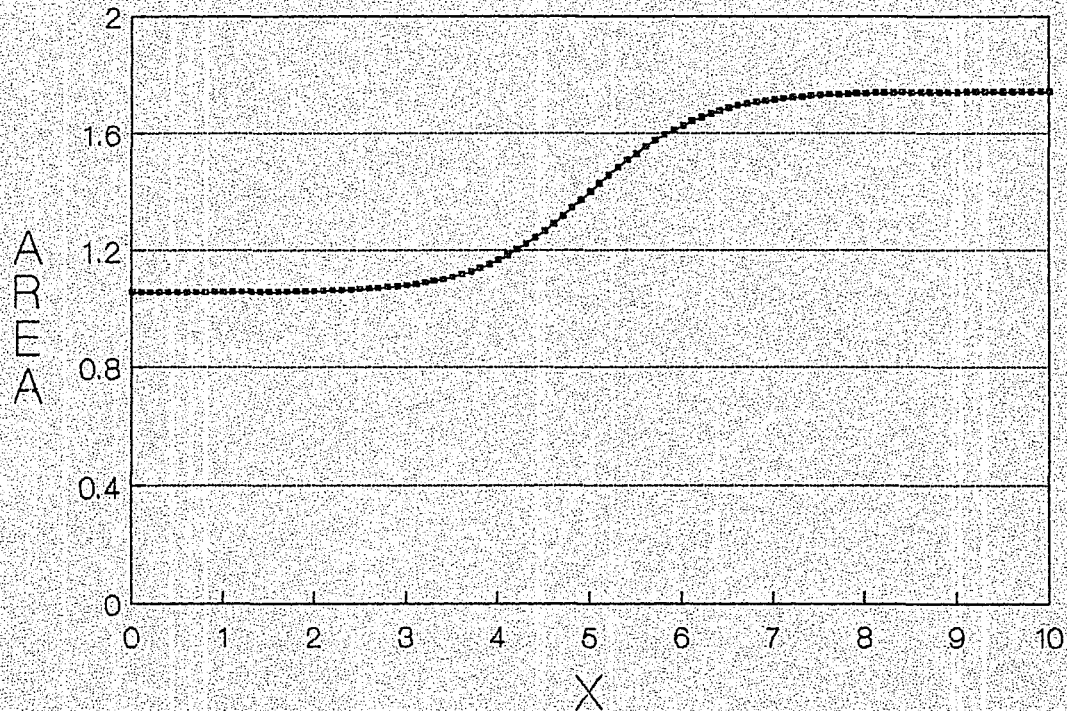


Fig. 4.15 Distribución del area para una tobera divergente, Shubin et al. [23].

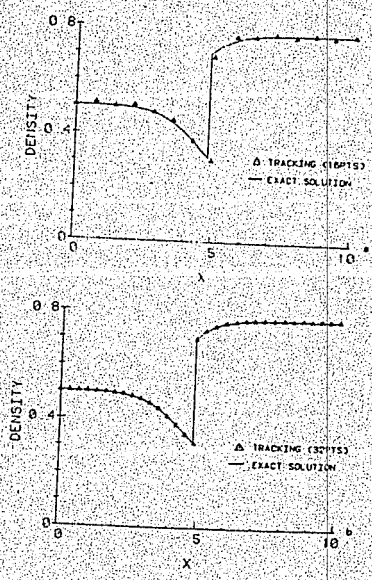


Fig. 4.16 Distribución de la densidad con respecto a x de un flujo estacionario para una tobera divergente, fig. 4.15, según Shubin et al. [23].

(- - -) Sol. exacta. Shubin et al.
[23]. Flujo estacionario.

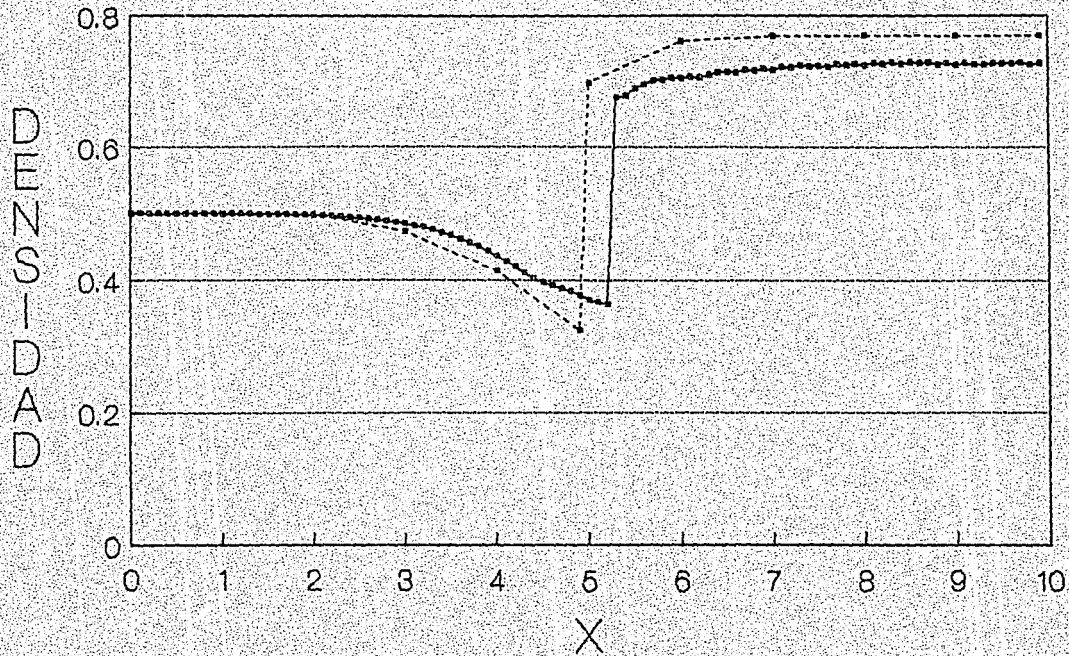


Fig 4.17 Distribución de la densidad
para un flujo en una tobera divergente.
 $t = 0.49$

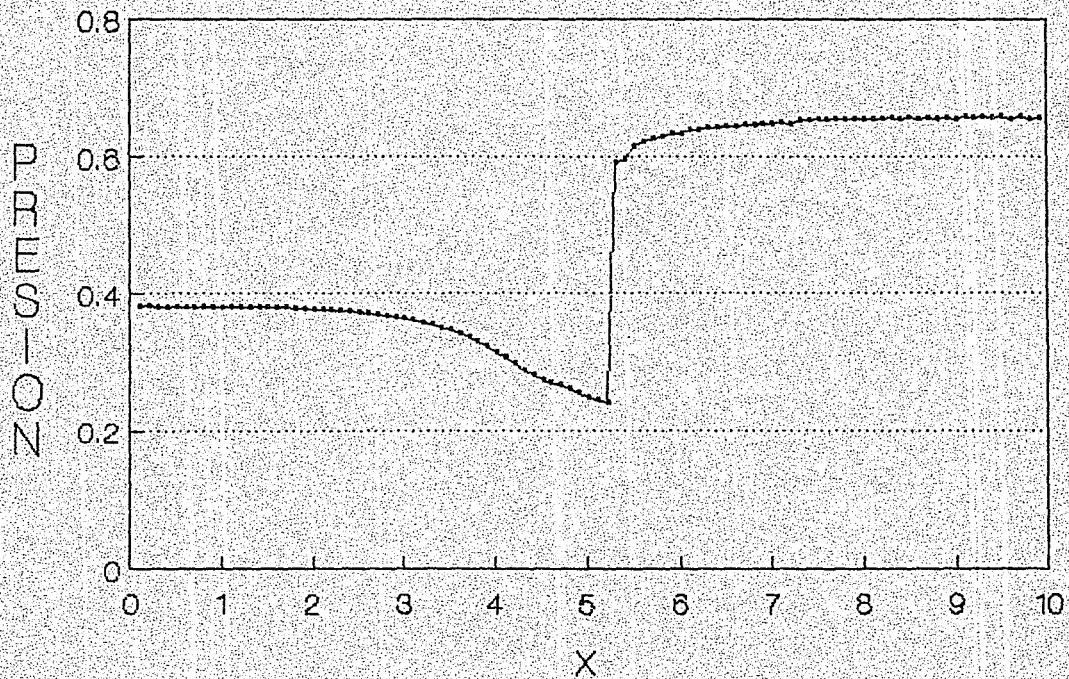


Fig. 4.18 Distribución de la presión para un flujo en una tobera divergente.

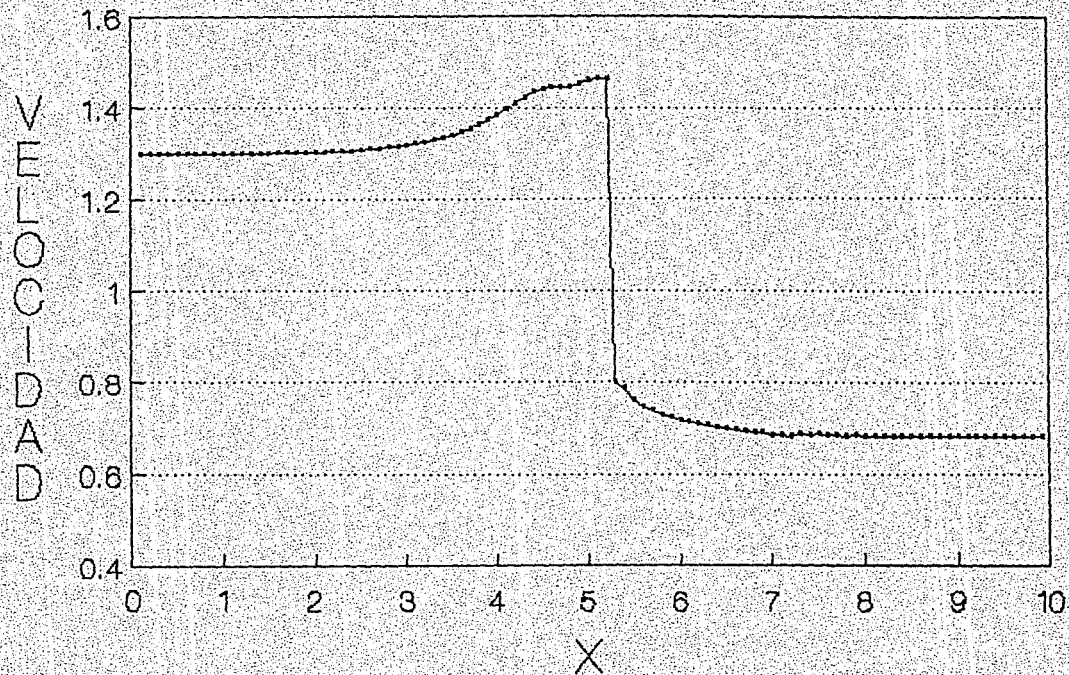


Fig. 4.19 Distribución de la velocidad para un flujo en una tobera divergente.

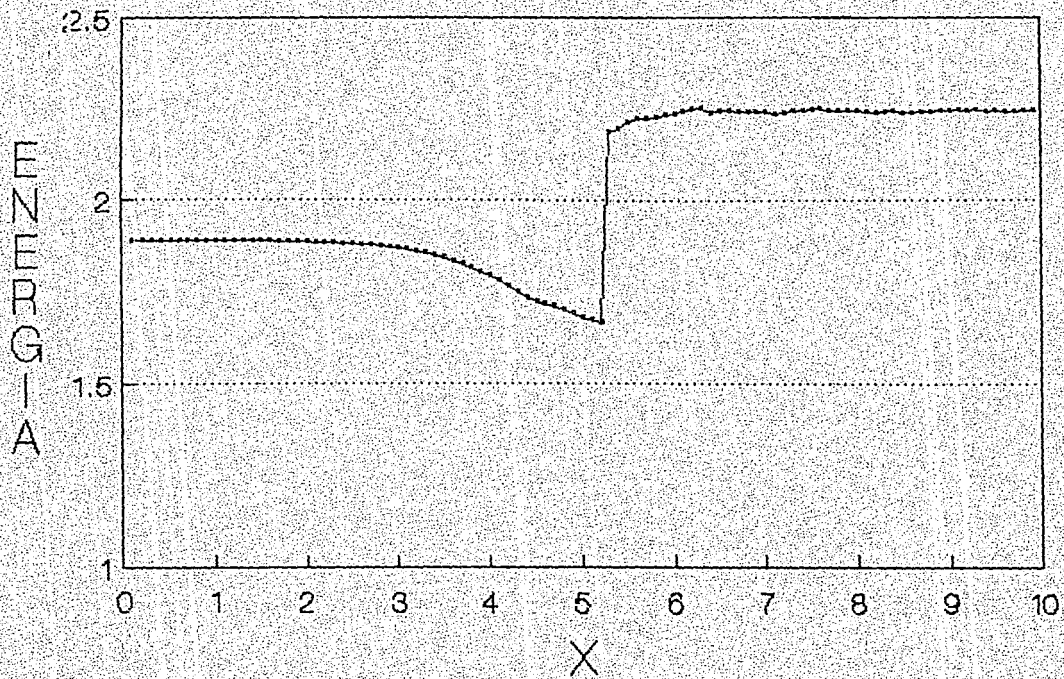


Fig. 4.20 Distribución de la energía interna para un flujo en tobera divergente

respectivamente. Estos se obtuvieron con 150 etapas de tiempo. Se observa que los cálculos son muy parecidos a los de Shubin et al. [23]. También se resuelve el choque en forma aguda. El desarrollo de flujo comienza en forma constante, hasta aproximadamente $x = 3.0$ donde la presión disminuye gradualmente y de la misma manera incrementa la velocidad, después estas variables resienten cambios bruscos por la presencia del choque, éstos se manifiestan con el aumento agudo de la presión y lo contrario con la velocidad, hasta volverse otra vez un flujo suave a la salida. Se destaca que en estos cálculos no se presentaron fluctuaciones como en el flujo de las toberas convergentes-divergentes, figs. 4.11 - 4.14, la intensidad del choque es similar al que presenta Shubin et al. [23], y que la posición del choque se resolvió con mayor exactitud que en los primeros resultados, pero se perdió exactitud en los cálculos de las variables en la zona después del choque, fig. 4.17 - 4.20. Esto se debe a la poca información de las condiciones de salida de la tobera divergente presentada por Shubin et al. [23]; ya que se ha observado que el programa desarrollado aquí arroja resultados buenos cuando se cuenta con condiciones de frontera correctas.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS.

Esta investigación muestra que el método de Glimm se puede aplicar para obtener una solución confiable del modelo que determina el comportamiento del flujo unidimensional en toberas en condiciones críticas, en presencia de discontinuidades severas en la densidad, presión, velocidad y energía interna.

La utilización de la secuencia de van der Corput para generar la variable aleatoria θ para el modelo de Glimm, demostró ser la más adecuada para representar la propagación de la onda.

Después de comparar los resultados obtenidos en el capítulo 4 con los presentados en artículos que versan sobre el mismo tema, se puede concluir que con el método de Glimm se obtienen resultados con buena aproximación. En las toberas divergentes los resultados no presentaron fluctuaciones, sin embargo, se perdió exactitud en la solución en la zona después del choque, esto debido a la poca información de las condiciones de salida en la tobera.

La posibilidad de mejorar la solución del modelo matemático es suponer que la onda de choque, rarefacción y discontinuidad de contacto sean curvas, ver Glimm J. et al. [9], además de considerar problemas de Riemann formados por estados estacionarios sobre intervalos de malla adyacentes, sin embargo, estas suposiciones llevan finalmente a obtener buenos resultados pero con más etapas

de tiempo, como se indica en el capítulo 2, lo que es una desventaja cuando se requieren resultados rápidos y con menos equipo de cómputo como en los sistemas de monitoreo.

Se destaca la solución aguda que propicia el método de Glimm para las discontinuidades en las variables en una dimensión del flujo en toberas, sin embargo, en el campo de la aplicación del método de Glimm es necesario llevar a cabo todavía una mayor cantidad de investigaciones, sobre todo tratar de implementar el método para encontrar soluciones de sistemas de leyes de conservación en dos y tres dimensiones, así como aplicarlo a modelos de flujo en dinámica de otros medios diferentes al gas, como ejemplo flujo elástico-plástico.

Dentro de su aplicación al flujo en toberas de turbinas de gas y compresores, se deben de analizar modelos que incluyan variaciones complejas del área como las que se presentan en estas máquinas, así mismo, implementar las soluciones por el método de Glimm con sistemas acoplados donde se encuentran tanto ecuaciones hiperbólicas como parabólicas y elípticas.

REFERENCIAS.

- [1] Glimm J., Solutions in the large for nonlinear hiperbolic systems of equations, Comm. Pure Appl. Math. 18, 697, 1965.
- [2] Colella P., Glimm's method for gas dynamics, SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 3, No. 1, March 1982.
- [3] S. K. Godunov, Mat. Sb., 47, 271, 1959.
- [4] Chorin A. J., Random choice solutions of hyperbolic systems, J. Comp. Phys., 22, 517, 1976.
- [5] Chorin A. J., Random choice methods with applications to reacting gas flow, J. Comp. Phys., 25, 253, 1977.
- [6] Concus and Proskurowski, Numerical solution of a nonlinear hiperbolic equations by the random choice method, J. Comp. Phys., 30, 153-156, 1979.
- [7] Glimm and Marchesin, A numerical method for two phase flow with an unstable interface, J. Comp. Phys., 39, 179-200, 1981.
- [8] Sod G, A numerical study of a converging cylindrical shock, J. Fluid Mech., vol. 83, 785-794, 1977.
- [9] Glimm J. et al., A generalized Riemann problem for quasi-one-dimensional gas flow, Advances in Applied Mathematics 5, 1-30, 1984.
- [10] Lax P., Nonlinear partial diferencial equations and computing, SIAM Review, vol. 11, No. 1, January 1969.
- [11] Perry R. W. and Kantrowitz A., The production and stability of converging shock waves, J. Appl. Phys., 22, 878, 1956.
- [12] Abarbanel S and Goldberg M, Numerical solution of quasi-

conservative hyperbolic systems- the cylindrical shock problem, J. Comp. Phys. 10, 1 1972.

[13] Peaceman D. W., Numerical solution of the nonlinear equations for two-phase flow through porous media in Nonlinear partial differential equations, Academic Press, New York, 1967.

[14] Glimm et al., Subgrid resolution of fluid discontinuities, II, J. Appl. Phys., 37, 336-354, 1980.

[15] Marshall G. and Mendez R., Computational aspects of the Random Choice method for shallow water equations, J. Appl. Phys., 39, 1-21, 1981.

[16] J.J. Stoker, The formation of breakers and bores, Comm. Pure Appl. Math., 1, 1948.

[17] Ré R. Etude du lacher instantané d'une retenue d'eau dans un canal par la methode graphique, La Houille Blanche 3, 1946, 181-187.

[18] Sod A., Numerical methods in fluid dynamics: initial and initial boundary-value problems, Cambridge University Press, 1985, pp 301-303.

[19] Colella P., An analysis of the effect of operator splitting and of the sampling procedure on the accuracy of Glimm's method, Ph. D. Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1979.

[20] B. van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's methods, J. Comp. Phys., 32, 101-136, 1979.

[21] Chorin and Marsden, A mathematical introduction to fluid mechanics, second Edition, Springer-Verlag graduate texts in

Mathematics, 1990.

[22] Meng-Sing et al. Splitting of Inviscid fluxes for real gases, J. Com. Phys, 87, 1-24, 1990.

[23] Shubin et al., Steady shock tracking and Newton's method applied to one dimensional duct flow, J. Com. Phys, 39, 364 - 374, 1981.