32
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELACION DE SISTEMAS DE LINEAS DE ESPERA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A

CESAR GALINDO ARANZA

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

MEXICO, D. F. MARZO 1995

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron EL pasante(s) CESAR GALINDO ARANZA

con número de cuenta 8525029-9 con el Título:

MODELACION DE SISTEMAS DE LINEAS DE ESPERA

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de ACTUARIO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
ACT.	JOSE ROBERTO	BAUTISTA ATENOGENES	
Director de Tesis			
MAT.	JORGE FRANCISCO	DE LA VEGA GONGORA	
MAT.	HUGO	VILLASEÑOR HERNANDEZ	
ACT.	CLAUDIA	LARA PEREZ SOTO	
Suplente			
ACT.	NOE MOACYR	VALLEJO GONZALEZ	
Suplente			

A QUIENES MAS DEBO EN ESTA VIDA:

MIS PADRES (MAMA, PAPA Y TIA) POR SU APOYO INCONDICIONAL, SINCERO E INVALUABLE QUE NUNCA PODRE PAGAR EN SU TOTALIDAD.

A ROBERTO POR SU VALIOSO TIEMPO PRESTADO EN LA DIRECCION DE ESTA TESIS.

A MIS SINODALES POR SU AYUDA EN LA REVISION DE ESTE TRABAJO.

A TERE POR SU NOTABLE APOYO Y SUGERENCIAS.

MODELACION DE SISTEMAS DE LINEAS DE ESPERA

C O N T E N I D O

INTRODUCCION

En la actualidad, cada vez resulta más frecuente encontrar situaciones en las que al requerirse de un servicio determinado, se tiene que esperar turno para ser atendido. Las causas de tal problema son varias: alta demanda del servicio, con instalaciones inadecuadas; tiempo ocioso de los servidores; trámites demasiado extensos, que involucren mayor tiempo de consumo; etc.

Por tal razón y en respuesta a ésto, se ha desarrollado una teoría, que permite predecir las situaciones de demanda a partir de datos de observación, para así establecer un modo de proceder que permita un mejor funcionamiento del sistema.

La teoría de colas o sistemas de líneas de espera tiene sus orígenes en 1909, año en que A.K.ERLANG con su análisis de congestión de tráfico telefónico en COPENHAGUE para optimizar el servicio, da las bases para su desarrollo. La importancia de esta teoría, se debe a que muchos problemas pueden caracterizarse como de congestión llegada - salida, por ejemplo: tráfico de comunicaciones (teléfono, fax, etc); tráfico de transporte (aéreo, marítimo, terrestre); inventarios; procesos industriales; etc. De tal suerte que en un sistema de colas el término cliente puede referirse a:

- Gente esperando para recibir un servicio .
- Máquinas esperando para ser reparadas.
- Aviones esperando aterrizar, etc.

El término instalaciones de servicio puede referirse a:

- Líneas telefónicas .
- Talleres de reparación.
- Pistas de aeropuerto, etc.

En general un sistema de colas se caracteriza por las siguientes propiedades:

1.- Pauta de llegadas, es decir frecuencia media de llegadas por unidad de tiempo.

2.- Mecanismos de servicio: tiempos de servicio, disponibilidad, capacidad del sistema, etc.

3.- Política de servicio, ésto es la forma de seleccionar a los clientes para atenderlos.

Puesto que las propiedades anteriores conllevan a una gran variedad de modelos, el presente trabajo tiene como finalidad mostrar algunos de ellos, para tal propósito se juzgó conveniente la siguiente estructura:

- En el capítulo I, se dan los resultados más importantes de procesos estocásticos, en especial de cadenas de Markov y se termina el capítulo con los procesos de nacimiento - muerte y Poisson;

- En el capítulo II, se caracterizan a los sistemas de líneas de espera y se desarrollan los modelos clásicos: llegadas Poisson, tiempos de servicio exponencial, capacidad finita, población finita para posteriormente llegar a los modelos generales en donde las llegadas y los tiempos de servicio siguen una distribución arbitraria;

- En el capítulo III, se da una pequeña aplicación de un modelo de reparación de máquinas y se simula en un programa una situación específica, en la que la finalidad es determinar el número óptimo de servidores.

- Finalmente se anexan tres apéndices relacionados con el tema.

CAPITULO I

PROCESOS ESTOCASTICOS

En esta sección se define lo que se entiende por un proceso estocástico y se dan resultados concernientes a una clase especial de ellos llamados cadenas de Markov.

<u>Definición 1:</u> Por un proceso estocástico se entiende una sucesión de variables aleatorias $\{ X_t \mid t \in T \}$ indexada por $t\in\mathbf{R}$. Formalmente X es un proceso estocástico si $X:\Omega x T \to \mathbf{R}$, $T\in\mathbf{R}$ tal que $\forall\ t\in T$ se tiene que $X(w,t)$ es una v.a. comúnmente $X(w,t)$ es representado por X_t.

Como ejemplos se tienen:

i) La cantidad X_t de agua en una presa en el tiempo t.

ii) Número de nacimientos X_t en una población en el tiempo t.

iii) El número de clientes esperando en fila para recibir un servicio en un tiempo t.

iv) La cantidad de Reserva necesaria que requiere una Compañía Aseguradora para hacer frente a las reclamaciones de los asegurados en un tiempo t.

Dado X un proceso estocástico, el conjunto T es llamado conjunto parametral o índice y el conjunto de posibles valores del proceso denotado S es llamado espacio de estados.

Se dice que un proceso estocástico es de Markov si para un conjunto cualquiera de constantes $t_1<t_2<...<t_n$, $t_i \in T$ la distribución condicional de X_{tn} para valores dados $X_{t1},...,X_{tn-1}$ dependen sólo de X_{tn-1}. Formalmente

$$P[X_{tn} \le X_n \mid X_{t1} = x_1,...,X_{tn-1} = x_{n-1}] = P[X_{tn} \le X_n \mid X_{tn-1} = x_{n-1}]$$

intuitivamente lo anterior dice que la probabilidad de la conducta futura está ligada al conocimiento exacto del comportamiento presente y no se modifica al saber el comportamiento pasado.

De acuerdo a la naturaleza del conjunto de índices T y del espacio de estados S los procesos de Markov aceptan la siguiente clasificación :

ESPACIO DE ESTADOS S

ESPACIO PARAMETRAL	NUMERABLE	NO NUMERABLE
NUMERABLE	CADENA DE MARKOV DE PARAMETRO DISCRETO	PROCESO DE MARKOV DE PARAMETRO DISCRETO
NO NUMERABLE	CADENA DE MARKOV DE PARAMETRO CONTINUO	PROCESO DE MARKOV DE PARAMETRO CONTINUO

Para el caso de una cadena de Markov de parámetro discreto se define

$$P_{i\,j}^{m\,n} = P[\ X_n = j \mid X_m = i\ ]$$

como la probabilidad de transición de i a j, si n=m+1 se tiene

$$P_{i\,j}^{m\,m+1} = P[\ X_{m+1} = j \mid X_m = i\ ]$$

la cual es llamada probabilidad de transición en un paso.

Con respecto a estas probabilidades y a la función de distribución inicial $P[\ X_0 = i\ ] = P_i$ de la cadena de Markov se tiene que la distribución de probabilidad de la cadena está completamente determinada por estas probabilidades, precisando se tiene el siguiente teorema:

<u>Teorema 1:</u> Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una cadena de Markov entonces

$$P(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_{i_{n-1} i_n}\, P_{i_{n-2} i_{n-1}} \cdots P_{i_0 i_1} P_{i_0}$$

Obsérvese que las probabilidades de transición, no solamente son funciones del estado inicial i y del estado final j sino también del tiempo. Cuando las probabilidades de transición en un paso son independientes del tiempo, se dice que la cadena de Markov tiene probabilidades de transición estacionarias o que es homogénea. De la observación anterior se puede dar la siguiente definición de estacionalidad para un proceso estocástico arbitrario.

<u>Definición 2:</u> considérese T un conjunto de índices cerrado bajo sumas, es decir si $s,t\in T$, $s+t\in T$. Se dice que un proceso estocástico es estacionario de orden k, $k \in Z^+$, si para $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$ $i=1,\ldots,k$ y cualquier $h \in T$ los vectores aleatorios de k dimensiones $(\ X_{t1}, \ldots, X_{tk}\ )$ y $(\ X_{t1+h}, \ldots, X_{tk+h}\ )$ están distribuidos idénticamente. Y si para cualquier $k \in Z^+$ es estacionario de orden k, se dice que el proceso es estacionario.

Cuando las probabilidades de transición $P_{i\,j}^{n\,n+1}$ no dependen de n simplemente se escribirá P_{ij}.

Obsérvese que como S es numerable entonces P_{ij} se puede arreglar en forma matricial de la siguiente manera.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \ldots \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
P_{00} & P_{01} & P_{02} & \ldots \\
P_{10} & P_{11} & P_{12} & \ldots \\
P_{20} & P_{21} & P_{22} & \ldots \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \ldots
\end{array}\right] \end{array} = P = \| P_{ij} \|$$

donde

$$\sum_j P_{ij} = 1 \ \forall \ i$$

$$P_{ij} \geq 0 \ \forall \ i,j$$

Una matriz P que cumpla las condiciones anteriores es llamada matriz de probabilidad de transición en un paso.

Concerniente a P y $P[\ X_0 = i\ ] = P_i$ (la distribución de probabilidad inicial) se tiene el siguiente:

<u>Teorema 2</u> (de existencia): Dada P y P_i existe una cadena de Markov cuyas medidas de probabilidad de transición componen a P y con medida de probabilidad inicial P_i, esta cadena de Markov tiene probabilidades de transición estacionarias.

Se define ahora la probabilidad de que una cadena de Markov que estaba inicialmente en el estado i pase después de n-pasos al estado j de la siguiente manera:

$$P_{i\,j}^{n} = P[\ X_n = j \mid X_0 = i]$$

y para n = 0

$$P_{i\,j}^{0} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

Una relación útil que satisfacen las probabilidades de transición, la da el siguiente teorema:

<u>Teorema 3</u> (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov):

$\forall$ m y l $\in Z^+$

$$P_{ij}^{(l+m)} = \sum_k P_{ik}^{(l)} P_{kj}^{(m)}$$

En particular

$$P_{ij}^{n} = \sum_k P_{i\,k}^{n-1} P_{kj}^{1}$$

Es decir, la probabilidad de pasar de i a j en l+m pasos es equivalente a pasar del estado i a un estado k intermedio en l pasos y en los restantes m pasos pasar del estado k al estado j, claro está considerando todas los posibles estados intermedios k; es importante notar que esta última probabilidad no depende de la forma en que se haya alcanzado el estado intermedio k.

Así como las probabilidades P_{ik} constituyen la entrada (i,k) de la matriz de transición en un paso P, es posible poner en forma matricial las probabilidades.

P^n_{ij} de la siguiente manera

$$P^n = \begin{bmatrix} P^n_{00} & P^n_{01} & P^n_{02} & \cdots \\ P^n_{10} & P^n_{11} & P^n_{12} & \cdots \\ P^n_{20} & P^n_{21} & P^n_{22} & \cdots \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ P^n_{n0} & P^n_{n1} & P^n_{n2} & \cdots \\ \cdot & & & \cdot \end{bmatrix}$$

cumpliéndose

$$\sum_j P^n_{ij} = 1 \quad \forall\ j$$

$$P^n_{ij} \geq 0 \quad \forall\ i,j$$

De esta manera las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov expresan las conocidas leyes matriciales para el producto, a saber

$$P^n = P^{n-1}\, P$$

$$P^{l+m} = P^l\, P^m$$

1.1 CLASIFICACION DE ESTADOS DE UNA CADENA DE MARKOV

<u>Definición 3:</u> Un estado j de una cadena de Markov $\{X_n | n=0,1,\ldots\}$, es llamado accesible desde un estado i si el estado j puede ser tomado por la cadena desde i en un número finito de pasos. Si dos estados i y j son accesibles uno de otro entonces se dice que se comunican.

Probabilísticamente:

$i \to j$ (j es accesible desde i) si para algún $n \geq 0$ $P_{ij}^n > 0$.

$j \to i$ (i es accesible desde j) si para algún $n \geq 0$ $P_{ji}^n > 0$.

$i \leftrightarrow j$ (i y j se comunican) si para algunos $n,m \geq 0$ $P_{ij}^n > 0$ $P_{ji}^m > 0$.

equivalentemente

$i \not\to j$ (j no es accesible desde i) si para todo $n \geq 0$ $P_{ij}^n = 0$.

$j \not\to i$ (i no es accesible desde j) si para todo $n \geq 0$ $P_{ji}^n = 0$.

$i \not\leftrightarrow j$ (i y j no se comunican) si $P_{ij}^n = 0$; $P_{ji}^m = 0$ $\forall$ $m,n \geq 0$

o $P_{ij}^n = 0$ y $P_{ji}^m = 0$ $\forall$ $m,n \geq 0$

Como consecuencia de la definición se tiene que la relación de comunicación " $\leftrightarrow$ " es una relación de equivalencia, es decir $\forall$ i,j $\in$ S

i) $i \leftrightarrow i$

ii) $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$

iii) $i \leftrightarrow j\ j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$.

Por consiguiente esta relación de equivalencia induce una partición en clases de S. En este punto es conveniente dar las siguientes definiciones:

Definición 4: Dado un estado j de una cadena de Markov la clase comunicante C(j) es el conjunto de todos los estados k en la cadena que se comunican con j, es decir $k \in C(j) \Leftrightarrow k \leftrightarrow j$.

Obsérvese sin embargo que una vez que la cadena sale de un estado j, es posible que este estado ya no sea accesible con ningún otro, ni siquiera con el mismo. Precisando se tiene la siguiente:

Definición 5: Si j no se comunica con ningún estado (ni siquiera consigo mismo) j es llamado estado sin retorno. Si $j \leftrightarrow j$, j es llamado estado con retorno.

Definición 6: Si $C(j) = C$ donde $C \neq \emptyset$ es una clase de estados entonces C es llamada clase comunicante.

Con base en lo anterior, se tienen los siguientes resultados dados a manera de teoremas:

Teorema 4: Si C_1, C_2 son clases comunicantes $\Rightarrow C_1=C_2$ o $C_1C_2=\emptyset$

Teorema 5: Si S el espacio de estados de una cadena de Markov entonces

$$S=C_1+C_2+\ldots+C_n+\ldots \qquad C_jC_i = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

y en donde cada C_i es una clase comunicante de estados o contiene exactamente un estado sin retorno.

Cuando un conjunto de estados $C \neq \emptyset$ es tal que $\forall$ $j \in C$ y $k \notin C$ $P_{jk}^n=0$ $\forall$ n=0,1,... se dice que C es cerrada.

Cuando la relación de comunicación induce una sola clase comunicante se tiene la siguiente:

Definición 7: Una cadena de Markov de parámetro discreto es llamada irreducible si todos los estados se comunican, es decir si existe n,m≥0 tal que $P_{ij}^n>0$ y $P_{ji}^m>0$ $\forall$ (i,j) o equivalentemente si la relación "$\leftrightarrow$" induce una sola clase.

Se define ahora el período de un estado i denotado d(i) de la siguiente manera:

Definición 8: El período de un estado i es el máximo común divisor (M.C.D) de todos los enteros n≥1 tales que $P_{ii}^n>0$.

En el caso en que (M.C.D) es 1, es decir en que i tenga período 1 el estado i es llamado aperiódico. Como consecuencia de esto, se tiene la siguiente:

Definición 9: Una cadena es llamada aperiódica si todos sus estados son aperiódicos. Para estados periódicos o aperiódicos se tienen los siguientes resultados dados a manera de:

Teorema 6: Si el estado i tiene período d_i(≥1) entonces existe un entero N tal que para todo entero n≥N $P_{ii}^{nd_i}>0$, es decir el retorno al estado i puede ocurrir en todos los múltiplos suficientemente grandes del período d_i.

Corolario 1: Si $P_{ji}^m>0$ entonces existe un entero positivo N tal que $\forall$ n≥N $P_{ji}^{(m+nd_i)}>0$

De la aplicación de los resultados anteriores se tiene:

Teorema 7: Si $i\leftrightarrow j$ entonces i y j tienen el mismo período, es decir la periodicidad es una propiedad de clase.

1.2 RECURRENCIA

Dada una cadena de Markov de parámetro discreto se define f_{ij}^n como la probabilidad condicional de que la primera visita desde i hasta j ocurra exactamente en n pasos. Precisando

$$f_{ij}^n = P[X_n=j,\ X_r\neq j\ r=(1..n-1)\ |\ X_0=i] \quad \text{y} \quad f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n$$

es la probabilidad condicional de visitar alguna vez al estado j dado que la cadena de Markov estaba inicialmente en i.

Frecuentemente f_{ij}^n es llamada probabilidad de primer paso desde el estado i al j en el instante n, mientras que f_{ij} es la probabilidad de un primer paso desde i a j.

El siguiente teorema proporciona una relación entre las probabilidades de primer paso y las probabilidades de transición en n pasos.

Teorema 8: Para cualesquiera estados j y k y $n \geq 1$ $n \in Z$

$$P_{jk}^{n} = \sum_{m=1}^{n} f_{jk}^{m} P_{kk}^{n-m} \qquad \text{donde} \qquad P_{jk}^{0} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Obsérvese que $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{n}$ implica que $f_{ii} \leq 1$, es decir

iniciando en el estado i existe una probabilidad positiva de que el proceso no pueda retornar a este estado o bien el retorno al estado i es seguro.

Con base en la observación anterior se tiene la siguiente:

Definición 10: Un estado i es llamado recurrente si y solo si iniciando en i el retorno al estado i es seguro. En términos de probabilidad el estado i es recurrente si y solo si $f_{ii}=1$. Si $f_{ii}<1$; i es llamado estado transitorio.

Para un estado i recurrente se define su tiempo medio de recurrencia por la siguiente expresión

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{n}$$

es decir μ_i es el número esperado de pasos que se requieren para retornar por primera vez al estado i.

Un estado recurrente puede clasificarse en función de su tiempo medio de recurrencia, precisando se tiene la siguiente

Definición 11:

i) Un estado i es recurrente nulo si y solo si su tiempo medio de recurrencia es infinito, es decir

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f^{n}_{ii} = \infty$$

ii) Un estado i es recurrente positivo si y solo si su tiempo medio de recurrencia es finito, es decir

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f^{n}_{ii} < \infty$$

Es posible dar un criterio de clasificación de estados recurrentes o transitorios, por medio de las probabilidades p^n_{ii}. Con esta finalidad se da el siguiente:

<u>Teorema 9:</u> Para un estado i cualquiera en una cadena de Markov

$$f_{ii}<1 \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P^n_{ii} < \infty$$

$$f_{ii}=1 \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P^n_{ii} = \infty$$

ahora si se considera una clase C de estados es conveniente dar la siguiente

<u>Definición 12:</u>

i) C es recurrente si $\forall\ i\epsilon C\ f_{ii}=1$

ii) C es transitoria si $\forall\ i\epsilon C\ f_{ii}<1$

Con respecto a la definición anterior se tienen los siguientes teoremas:

<u>Teorema 10:</u> Sea C una clase comunicante de estados de una cadena de Markov, entonces C es recurrente o no recurrente precisando:

1) si $i\epsilon C$ es tal que $f_{ii} = 1 \rightarrow f_{jj} = 1 \quad \forall\ j\epsilon C$

2) si $i\epsilon C$ es tal que $f_{ii} < 1 \rightarrow f_{jj} < 1 \quad \forall\ j\epsilon C$

Obsérvese que el teorema anterior afirma que la propiedad de recurrencia (no recurrencia) es una propiedad de clase

<u>Teorema 11:</u> Una clase comunicante recurrente es cerrada. Una clase comunicante cerrada no recurrente posee infinitos estados.

<u>Teorema 12</u> (de descomposición): El conjunto S de estados de retorno de una cadena de Markov se puede escribir como la unión de clases comunicantes ajenas, es decir

$$S = C_1 + C_2 + \ldots + C_r + \ldots$$

donde C_r es recurrente cerrada; no recurrente cerrada o bien no recurrente no cerrada.

Obsérvese que si la cadena de Markov es finita, del teorema 11 se tiene que no hay clases comunicantes no recurrentes cerradas.

Otro criterio para determinar si una clase es recurrente la da el siguiente:

Teorema 13: Sea C una clase comunicante cerrada de estados y sea k un estado fijo de C, se tiene entonces que:

$$C \text{ es recurrente si y solo si } \forall\, j\epsilon C\ ,\ j\neq k\quad f_{jk} = 1$$

Antes de continuar resulta conveniente dar las siguientes definiciones:

Definición 13: Un estado i es llamado absorbente si $P_{ii}=1$

Definición 14: Un estado i es ergódico si es recurrente positivo y aperiódico.

Obsérvese que cuando i es absorbente $f_{ii}=p_{ii}= 1$ y $\mu_i=1$, es decir i es recurrente positivo.

Finalmente se enuncian los siguientes teoremas que serán de utilidad posteriormente.

Teorema 14: Una cadena de Markov irreducible con espacio de estados C es no recurrente si y solo si existe un estado $k\epsilon C$ tal que el sistema de ecuaciones

$$V_j = \sum_{i\neq k} P_{ji}V_i \quad \forall \text{ estado } j\neq k$$

posee una solución acotada $[V_i]$ que no sea idénticamente igual a cero.

Teorema 15: Una cadena de Markov $[X_n]$ irreducible y aperiódica es recurrente positiva (ergódica) si existe una solución no negativa del sistema

$$\sum_j P_{ij}X_j \leq X_i - 1 \ (i\neq 0) \text{ tal que } \sum_j P_{0j}X_j < \infty$$

Teorema 16: Una cadena de Markov X_n irreducible y aperiódica es positiva recurrente(ergódica) si y solo si existe una solución no nula de las ecuaciones

$$\sum_j X_jP_{ji} = X_i \ \ i=0,1,2,... \text{ tal que } \sum_j |X_j| < \infty$$

Teorema 17: Una cadena de Markov $\{X_n\}$ con espacios de estados finito, irreducible y aperiódica es ergódica.

1.3 CADENAS DE MARKOV DE PARAMETRO CONTINUO

Considérese una cadena de Markov $\{X_t \mid t \geq 0\}$ de parámetro continuo. Sea

$$P_{ij}(s,t) = P[X_t = j | X_s = i]$$

la probabilidad de transición de los estados i y j en los instantes $t \geq s \geq 0$, en forma análoga al caso de cadenas de Markov de parámetro discreto se tiene la siguiente definición de estacionalidad.

<u>Definición 15:</u> Una cadena de Markov $\{X_t | t \geq 0\}$ es estacionaria si $\forall$ i y j $\in$ S $P[X_{t+h} = j | X_t = i]$ es independiente de t.

Dada una cadena de Markov homogénea, se define una matriz de transición de la cadena como un arreglo finito o infinito pero numerable de funciones $(P_{ij}(t))$, o simplemente (P_{ij}) $i,j \in S$ satisfaciendo $\forall$ $i,j \in S$

i) $P_{ij}(t) \geq 0$

ii) $\sum_j P_{ij}(t) = 1$

iii) $\sum_k P_{ik}(s) P_{kj}(t) = P_{ij}(t+s)$

Si además la matriz de transición (P_{ij}) es tal que

$$\lim_{t \to 0^+} P_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$\forall$ i y j, entonces se dice que la matriz (P_{ij}) es estándar.

Obsérvese que la última condición implica que los $P_{ij}(t)$ son continuas por la derecha en 0.

En los resultados dados a continuación se suponen matrices estándar.

Con la finalidad de dar algunas propiedades de las probabilidades de transición de las cadenas de Markov homogéneas de parámetro continuo se dan los siguientes resultados a manera de:

<u>Teorema 18:</u> Sea $\{X_t | t \geq 0\}$ una cadena de Markov homogénea de parámetro continuo con probabilidades de transición $P_{ij}(t)$, si i y j son fijos en S entonces $P_{ij}(t)$ es uniformemente continua como función de t, $t \geq 0$.

Teorema 19: Sea $\{X_t|t\geq 0\}$ una cadena de Markov homogénea de parámetro continuo con probabilidades de transición $P_{ij}(t)$ entonces para todo $i \in S$

$$q_{ii} = -P'_{ii}(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t}$$

existe pero puede ser infinita.

Teorema 20: Suponiendo lo mismo que en el teorema anterior pero ahora tomando $i\neq j\in S$

$$q_{ij} = P'_{ij}(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{P_{ij}(t)}{t}$$

existe y es finita.

Obsérvese que las cantidades q_{ii} y q_{ij} son no-negativas pero no necesariamente están entre cero y uno, y por tanto no siempre pueden ser interpretadas como probabilidades. Sin embargo q_{ij} está relacionada con las transiciones de un estado i a un estado j y q_{ii} esta relacionado con las transiciones de un estado i a otro estado arbitrario. Precisando estas probabilidades tienen la siguiente interpretación:

Las probabilidades de transición dentro de un intervalo de longitud h son asintóticamente proporcionales a h, es decir la probabilidad $1 - P_{ii}(h)$ de una transición desde un estado i a otro durante un intervalo de longitud h es igual a hq_{ii} más un resto $\theta(h)$ tal que el

$$\lim_{h\to 0} \frac{\theta(h)}{h} = 0$$

mientras que la probabilidad $P_{ij}(h)$ de transición de i a j durante un intervalo de longitud h es igual a $hq_{ij} + \theta(h)$ donde

$$\lim_{h\to 0} \frac{\theta(h)}{h} = 0$$

A q_{ii} se le llama intensidad de paso de la cadena de Markov dado que la cadena está en i. Y q_{ij} es llamada intensidad de transición a j dado que la cadena está en i.

De las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, se tiene que

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k\in S} P_{ik}(t)P_{kj}(s)$$

si se hace $s = \Delta t$ se tiene

$$P_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k\in S} P_{ik}(t)P_{kj}(\Delta t)$$

$$= P_{ij}(t)P_{jj}(\Delta t)+\sum_{k\neq j} P_{ik}(t)P_{kj}(\Delta t)+P_{ij}(t)-P_{ij}(t)$$

$$\rightarrow \frac{P_{ij}(t+\Delta t)-P_{ij}(t)}{t} = \sum_{k\neq j} \frac{P_{ik}(t)P_{kj}(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{P_{ij}(t)(P_{jj}(\Delta t)-1)}{\Delta t}$$

sacando límite cuando $\Delta t\rightarrow 0$ y suponiendo que el paso del límite en la Σ es uniforme con respecto a j se tiene

$$P'_{ij}(t) = -q_{jj}P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)q_{kj}$$

Estas ecuaciones diferenciales para i fijo son llamadas ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante.

Análogamente para $t=\Delta s$

$$P_{ij}(\Delta s+s) = \sum_{k\in S} P_{ik}(\Delta s)P_{kj}(s)$$

$$= P_{ii}(\Delta s)P_{ij}(s) + \sum_{k\neq i} P_{ik}(\Delta s)P_{kj}(s) + P_{ij}(s) - P_{ij}(s)$$

trasponiendo términos, dividiendo entre s, tomando s=t y aplicando límite cuando $\Delta s\rightarrow 0$ $(\Delta t\rightarrow 0)$

$$P'_{ij}(t) = -q_{ii}P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{ik}P_{kj}(t)$$

estas ecuaciones diferenciales para j fijo son llamadas ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás.

Obsérvese que en el paso del límite en el último desarrollo no se supone que sea uniforme con respecto a i.

1.4 TEOREMAS LIMITES DE CADENAS DE MARKOV.

En esta sección se dan resultados relacionados con el comportamiento límite de probabilidades de transición de Cadenas de Markov.

<u>Definición 16:</u> Se dice que una cadena de Markov con espacio de estados S, tiene distribución estacionaria si existe una distribución de probabilidad $\{\Pi_i,\ i\in S\}$ que satisface la ecuación matricial

$\Pi=\Pi P$ donde $\Pi_i\geq 0$ y $\sum \Pi_i =1$ es decir si $\Pi_j=\sum_i \Pi_i P_{ij}$ $j=0,1,2\ldots$

<u>Definición 17:</u> Se dice que una cadena de Markov con espacio de estados S posee una distribución de larga duración si existe una distribución de probabilidad $\{\Pi_k,\ k\in C\}$ que tenga la propiedad de que para todo j y $k\in S$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P^n_{jk} = \Pi_k$$

Una vez hecho esto, se dan dos importantes teoremas que serán de utilidad en el desarrollo del capítulo siguiente:

Teorema 21: Sea $\{X_n | n=0,1,2,\ldots\}$ una cadena de Markov irreducible y aperiódica entonces el $\lim_{n\to\infty} P[X_n=j] = \prod_j$ $\forall j$ siempre existe y es independiente de la distribución inicial. Si todos los estados son positivos recurrentes (ergódicos), entonces $\prod_j > 0$ $\forall j$ y $\{\prod_j\}$ es una distribución de probabilidad con $\prod_j = 1/\mu_j$ y la distribución límite es la única solución al sistema estacionario de ecuaciones.

$$\prod_j = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_i P_{ij} \quad \forall j=0,1,2,\ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_i = 1$$

Obsérvese que de la última parte de la conclusión cuando la cadena es ergódica la distribución estacionaria y la distribución de larga duración son la misma.

Para cadenas de Markov de Parámetro continuo se tiene:

Teorema 22: Si $\{X_t \mid t\geq 0\}$ es una cadena de Markov irreducible el límite de la distribución, $\lim_{t\to\infty} P_n(t)=\prod_n$ existe y es independiente de las condiciones iniciales del proceso. El límite $\{\prod_n, n\epsilon S\}$ es tal que todos ellos se anulan idénticamente, es decir $\prod_n = 0$ $\forall n\epsilon S$ o son todos positivos y forman una distribución de probabilidad, es decir $\prod_n > 0$ $\forall$ $n\epsilon S$ y $\sum \prod_n = 1$

1.5 PROCESO DE NACIMIENTO-MUERTE.

Para este proceso supóngase que dos tipos de eventos ocurren y los siguientes postulados:

Considérese un nacimiento como un evento que signifique un incremento en la población y una muerte como un decremento en la población, además:

1) Si la población es igual a n $(n\geq 0)$ en el tiempo t, la probabilidad de que ocurra un nacimiento en un intervalo $(t,t+h)$ es igual a $\lambda_n h+\theta(h)$ y de que no ocurra un nacimiento es igual a $1-\lambda_n h+\theta(h)$, además la probabilidad de que ocurra más de un nacimiento en el intervalo $[t,t+h]$ es $\theta(h)$ donde $\theta(h)$ es tal que
$$\lim_{h\to 0} \frac{\theta(h)}{h} = 0.$$

Considérese también que los nacimientos ocurridos en $(t,t+h)$ son independientes del tiempo desde la última ocurrencia.

2) Si la población es igual a $n(n \geq 0)$ en el tiempo t, la probabilidad de que ocurra una muerte en un intervalo $(t,t+h)$ es $\mu_n h + \theta(h)$ y la probabilidad de que no haya una muerte es $1-\mu_n h + \theta(h)$, además la probabilidad de que más de una muerte ocurra en $(t,t+h)$ es $\theta(h)$. Al igual que en 1 supóngase que las muertes ocurridas en $(t, t+h)$ son independientes del tiempo de la última ocurrencia y que $\lim_{h\to 0} \frac{\theta(h)}{h} = 0$

3) Para población del mismo tamaño, nacimientos y muertes ocurren independientes unas de otras.

Sea $N(t)$ la población en el tiempo t y $P_{in}(s,t)=P[N(t)=n|N(s)=i]$ $k>s$.

Obsérvese que el proceso $N(t)$ es homogéneo y por tanto se puede escribir:

$P_n(t)=P_{in}(0,t)=P[N(t)=n|N(0)=i]$ de los postulados 1-3 se tiene

$$P_{nn-1}(t,t+h) = (\mu_n h + \theta(h))[1-\lambda_n h+\theta(h)]$$
$$= \mu_n h + \theta(h)$$

$$P_{nn}(t,t+h) = [1-\lambda_n h+\theta(h)][1-\mu_n h+\theta(h)]$$

$$= 1-\lambda_n h -\mu_n h + \theta(h)$$

$$P_{nn+1}(t,t+h) = [\lambda_n h+\theta(h)][1-\mu_n h+\theta(h)]$$

$$= \lambda_n h + \theta(h)$$

$$\sum_{j\neq n-1,n,n+1} P_{nj} (t,t+h) = \theta(h)$$

de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, se tiene que:

$$P_{in} (0,t+h) = \sum_{k\in S} P_{ik} (0,t)P_{kn} (t,t+h)$$

Para n=0

$$P_{i0}(0,t+h) = P_{i0}(0,t)P_{00}(t,t+h) + P_{i1}(0,t)P_{10}(t,t+h) + \theta(h)$$

y para n>0

$$P_{in}(0,t+h) = P_{in-1}(0,t)P_{n-1n}(t,t+h) + P_{in}(0,t)P_{nn}(t,t+h) +$$
$$P_{in+1}(0,t)P_{n+1n}(t,t+h) + \theta(h)$$

haciendo $P_{in}(0,t+h) = P_n(t+h)$ y sustituyendo las probabilidades respectivas.

$$P_0(t+h) = P_0(t)[1-\lambda_0 h+\theta(h)] + P_1(t)[\mu_1 h+\theta(h)]$$

$$= P_0(t) + P_0(t)[-\lambda_0 h+\theta(h)] + P_1(t)[\mu_1 h+\theta(h)]$$

$$P_n(t+h) = P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}h+\theta(h)] + P_n(t)[1-\lambda_n h-\mu_n h+\theta(h)] +$$

$$P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}h+\theta(h)] + \theta(h)$$

$$\therefore \quad \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = P_0(t)[-\lambda_0+\frac{\theta(h)}{h}] + P_1(t)[\mu_1+\frac{\theta(h)}{h}]$$

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}+\frac{\theta(h)}{h}] + P_n(t)[-\lambda_n h-\mu_n h+\frac{\theta(h)}{h}] +$$

$$P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}+\frac{\theta(h)}{h}] + \frac{\theta(h)}{h}$$

haciendo que $h\to 0$ se tiene que

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t)\mu_1 \qquad n=0$$

$$P'_n(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t)$$

satisfaciendo la condición inicial

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=i \\ 0 & \text{si } n\neq i \end{cases}$$

Por el teorema 22

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = \Pi_n$$

$$\therefore \quad \lim_{t\to\infty} P'_n(t) = 0$$

así

1) $0 = -(\lambda_n + \mu_n)\Pi_n + \lambda_{n-1}\Pi_{n-1} + \mu_{n+1}\Pi_{n+1} \qquad n\geq 1$

2) $0 = -\lambda_0\Pi_0 + \mu_1\Pi_1$

$$\rightarrow \Pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\Pi_0$$

Para n=1 sustituyendo Π_1 en (1)

$$0 = -(\lambda_1 + \mu_1)\frac{\lambda_0\Pi_0}{\mu_1} + \lambda_0\Pi_0 + \mu_2\Pi_2$$

$$\rightarrow \Pi_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\Pi_0$$

procediendo de esta manera se tiene

$$\Pi_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\Pi_0$$

puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n = 1$ se tiene $\Pi_0 = [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}]^{-1}$

Observe que $\{\Pi_n\}$ es solución no nula sólo si $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} <\infty$

1.6 PROCESO DE POISSON

Considérese ahora el proceso $\{N(t)|t\geq0\}$ donde $N(t)$ representa el número de eventos que ocurren en el intervalo $(0,t]$, sea

$$P_{ij}(s,t) =P[N(t)=j|N(s)=i] \text{ con } s<t$$

Supóngase que se cumplen los siguientes postulados:

1) Los eventos que ocurren en intervalos que no se traslapan son independientes unos de otros.

2) Para intervalos de tiempo t existe una constante λ tal que la probabilidad de ocurrencia de un evento en $(t,t+\Delta t)$ está dada como sigue:

   i) $P_{ii}(t,t+\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + \theta(\Delta t)$

   ii) $P_{i\,i+1}(t,t+\Delta t) = \lambda\Delta t +\theta(\Delta t)$

   iii) $\sum_{j=i+2}^{\infty} P_{ij}(t,t+\Delta t) = \theta(\Delta t)$

   iv) $P_{ij}(t,t+\Delta t) = 0 \quad j<i$

   donde $\lim_{\Delta t\to0} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

bajo estas condiciones la función de distribución del proceso N(t) tiene una distribución de Poisson dada por:

$$P_n(t) = P[N(t)=n|N(0)=0] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n=0,1,\ldots$$

además si el proceso ha sido observado inicialmente en el tiempo s>0 en el cual N(s)=i

$$P_{in}(s,t) = e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^{n-i}}{(n-i)!}$$

CAPITULO II

MODELOS DE TEORIA DE COLAS

2.1 CARACTERISTICAS DE LINEAS DE ESPERA

Se define a la Teoría de Colas como una rama de la Matemática Aplicada, que ha sido desarrollada con el fin de predecir las fluctuaciones de la demanda, a partir de datos de observación, para así establecer un modo de proceder que proporcione a los "clientes" un servicio adecuado con un tiempo de espera determinado. Esto se hace con la finalidad de desarrollar sistemas cuya organización esté basada en predicciones -como por ejemplo número de clientes que esperan en la cola en un instante dado, tiempos de servicio, etc. - que sirvan para anticiparse a situaciones que provoquen congestión y tomar medidas apropiadas para un mejor funcionamiento.

En general una cola o línea de espera se forma por alguna restricción en el servicio. Por ejemplo:

Si se consideran N artículos que llegan a un departamento de prueba donde solo hay m trabajadores ($N > m$) la restricción en el servicio consiste en que solamente un número limitado de artículos (a lo más m) pueden ser atendidos a la vez y la línea de espera surge debido a que los artículos no atendidos deben esperar para recibir servicio.

Sin embargo también pueden deberse a otras causas; por ejemplo llegadas irregulares, trámites demasiado extensos, ociosidad de los servidores, etc.

Así se tiene que en general la formación de una cola o línea de espera en el sistema depende esencialmente de las irregularidades (comportamiento de clientes, llegadas irregulares, etc.) en el mismo y no solamente de las propiedades en él (capacidad del sistema, instalaciones insuficientes, etc). Como campos de aplicación de esta teoría se tienen el tráfico de comunicaciones, teléfono, telégrafos, fax; tráfico de transporte , aéreo, marítimo, terrestre; inventarios y procesos industriales, mantenimiento, líneas de montaje; procesos físicos, movimiento de partículas hacia un desagüe; crecimiento en la población, etc.

En cuanto a la caracterización de las líneas de espera se tiene:

1) La pauta de llegada, es decir la frecuencia media de llegadas de los clientes por unidad de tiempo (tasa media de arribo). En este punto se contemplan:

   i) llegadas regulares.- en estas los clientes llegan uno a uno en instantes igualmente espaciados con c unidades de tiempo entre si y donde la frecuencia de llegada es $a = 1/c$ por unidad de tiempo.

ii) llegadas completamente al azar, en éste los clientes llegan en orden aleatorio como por ejemplo las llamadas que llegan a una central telefónica en un tiempo t o bien llegadas de aviones a un aeropuerto etc.

iii) llegadas independientes generalizadas.- en este caso se toman como independientes los intervalos entre llegadas con una función de distribución general G(x). Es decir si un intervalo entre dos llegadas es particularmente largo o corto, la distribución del siguiente intervalo no se afecta. Por ejemplo cuando los clientes llegan a una cola inmediatamente después de haber sido atendidos en una cola precedente en la que la estación de servicio nunca esta desocupada.

iv) llegadas en grupo.- en este caso se considera que los clientes llegan en grupo como por ejemplo cuando cierto número de llamadas telefónicas se presentan simultáneamente ante una telefonista.

v) llegadas continuas.- son aquellas en las que se supone flujo continuo de clientes. Como por ejemplo, la llegada de un fluido en forma continua con una frecuencia constante o variable a un sistema de almacenamiento.

2) El mecanismo de servicio se refiere a establecer cuando esta disponible el servicio, cuantos clientes pueden atenderse a la vez y cuanto tiempo toma el proporcionar el servicio. En este punto hay que considerar tres aspectos.

i) Tiempo de servicio.- es decir el tiempo que se tarda en dar servicio a un cliente, donde se supone que estos tiempos de servicio son variables aleatorias con cierta función de distribución de probabilidad (exponencial, determinística, gamma) pudiéndose también tener el cliente su propia distribución de tiempo de servicio.

ii) Capacidad del sistema.- ésta se define como el número máximo de clientes que pueden ser atendidos simultáneamente pudiéndose tener sistemas con capacidad finita, como por ejemplo en una central telefónica con un número finito de líneas o bien sistemas de capacidad ilimitada, frecuentemente la capacidad del sistema esta constituida por canales de servicio en paralelo, algunos de los cuales pueden estar en serie con otros y en donde se atiende a los clientes simultáneamente.

iii) Disponibilidad del servicio.- La cual puede ser completa es decir cuando los canales de servicio están siempre listos para atender a los clientes que esperan o incompleta, la cual denota que el sistema solo esta disponible para un cierto número de clientes como en el caso de llamadas telefónicas en horas pico.

3) Política de servicio, en este punto se especifica cómo van a seleccionarse los clientes para darles servicio. La política más común de servicio es aquella en la que el primero en llegar es el primero en ser atendido. También es posible que los clientes sean atendidos según ciertas prioridades, como por ejemplo el caso de telégrafos en el que un mensaje urgente es transmitido primero o bien en la atención de enfermos en un hospital en donde los casos de urgencia son atendidos inmediatamente. Existen también sistemas en los que el orden de llegadas de los clientes es indiferente y las unidades se escogen por el servicio al azar (orden aleatorio). Puede también considerarse aquella en la que el último en llegar es primero en ser atendido como el caso en que las unidades que llegan se apilan y la última unidad de arriba es la primera en ser atendida.

2.2 NOTACION BASICA

Una vez caracterizadas las líneas de espera es conveniente introducir la notación que se usa en la exposición. Se empieza por mencionar que un proceso de colas es descrito por una serie de símbolos y diagonales tales como A \ B \ C \ D donde A indica la distribución de los tiempos de interarrivo, B la distribución de los tiempos de servicio, C el número de canales de servicio y D la restricción de la capacidad del sistema, en las tablas 1 y 2 se da la notación básica de teoría de colas.

Caracteíaticas	Símbolos	Explicación
Distribución de tiempos de interarrivo (A)	M	Exponencial.
	D	Determinístico.
	E_K	Tipo k-Erlang.
	GI	General indep.
Distribución de tiempos de servicios (B)	M	Exponencial
	D	Determinística (constante)
	E_K	Tipo k-Erlang.
	G	General
Número de estaciones de servicio (c).	1,2,...∞	
Restricción de la capacidad del sistema (D).	1,2,...∞	
Disciplina de cola	FIFO	Primero en llegar primero en salir.
	LIFO	Ultimo en llegar primero en salir.
	SIRO	Servicio en orden aleatorio
	PRI	Prioridad.
	CID	Disciplina general.

TABLA 1

NOTA: DURANTE TODO EL TRABAJO SE UTILIZA LA PRIMERA DISCIPLINA

NOTACION BASICA DE TEORIA DE COLAS

C .- número de servidores en el sistema.

L .- número esperado de clientes en el sistema $E(N)$ incluyendo los que están siendo servidos.

L_q .- número esperado de clientes en la cola (no incluyendo los que están siendo servidos) $E(N)$.

λ .- tasa de arribos de clientes al sistema $L = 1/E(t)$

μ .- tasa de servicio $\mu = 1/E(t_s)$

$N(t)$.- variable aleatoria que describe el número de clientes en el sistema en el tiempo t.

N .- número de clientes en el sistema.

$N_q(t)$.- número de clientes en la cola en el tiempo t.

N_q .- número de clientes en la cola (esperando en línea).

$N_s(t)$.- número de clientes recibiendo servicio en el tiempo t.

N_s .- número de clientes en servicio.

$P_n(t)$.- probabilidad de que haya n clientes en el sistema de colas en el tiempo t asumiendo un numero inicial en el tiempo $t = 0$.

P_n .- probabilidad de que haya n clientes en el sistema.

t_q .- v.a. que describe el tiempo que espera un cliente en la cola antes de recibir servicio.

ρ .- utilización de servicio. $\rho = \lambda/c\mu$

t_s .- v.a. que describe el tiempo de servicio.

t .- v.a. que describe el tiempo de interarribo.

T_T .- v.a. que describe el tiempo total que los clientes están en el sistema incluyendo el tiempo de espera en la cola para obtener servicio y el tiempo de servicio. $W = T_q + T_s = T_T$

$W = E(w)$.- tiempo esperado en el sistema $E(w) = E(t_q) + E(t_s)$

$W_q = E(W_q)$.- tiempo esperado en el sistema excluyendo el tiempo de servicio $E(t_q) = W - E(t_s)$.

$W_s = E(t_s)$.- tiempo esperado de servicio.

$w_q(t)$.- distribución de probabilidad del tiempo de espera en la cola.

$w(t)$.- distribución de probabilidad del tiempo de espera en el sistema.

$W(t)$.- función de distribución acumulativa del tiempo de espera en el sistema $W(t) = P\ [t_T \leq t\ ]$.

$W_q(t)$.- función de distribución acumulativa del tiempo esperado en la cola. $W_q(t) = P\ [\ t_q \leq t\ ]$.

TABLA 2

2.3 MODELACION DE LINEAS DE ESPERA.

En esta sección se realiza la construcción de algunos modelos de espera en donde la política de servicio es: primero en llegar primero en ser atendido; se empieza con el estudio de una cola determinística, es decir donde se toma como fijos los tiempos de servicio y de llegadas y se considera un solo servidor, se dan intuitivamente las condiciones bajo las cuales el sistema se estabiliza (es decir no se forma cola infinita), así mismo se desarrollan los modelos clásicos, $M|M|1$, $M|M|C$, $M|M|\infty$, posteriormente se utiliza el proceso de nacimiento y muerte para desarrollar otros modelos de colas (con capacidad finita, población potencial finita, con renuncia, etc.) y se formalizan las condiciones para que el sistema alcance el equilibrio estadístico, finalmente se construyen los modelos generales $M|G|1$ y $Gl|M|1$.

2.3.1 MODELO DETERMINISTICO

CARACTERISTICAS

En este modelo se toman como fijos los tiempos de llegada y servicios, supóngase que las llegadas ocurren a intervalos regulares de tiempo de longitud a (tasa de llegada 1/a) y son atendidos a intervalos regulares de tiempo de longitud b (tasa de servicio 1/b), que solo hay un servidor y que el primero en llegar es primero en ser atendido, además los clientes que llegan esperan para recibir servicio.

Sea $N(t)$ el número de clientes en el tiempo t, se esta interesado en $P_{n(t)} = P[\ N(t) = n\ ]$, la probabilidad de que haya n clientes en la cola en el tiempo t, y en la cantidad de tiempo requerido para servir a todos.

Obsérvese que:

i) si $b < a$ es decir $b/a < 1$ en algún momento no habrá espera (pues los tiempos de servicio son mas cortos que los de llegadas).

ii) si $a < b$ es decir $b/a > 1$ el número de clientes esperando crecerá indefinidamente.

iii) si $a = b$ no habrá espera si la operación comienza vacía en caso contrario la cola será constante.

Supóngase que $b/a < 1$ y que la operación comienza con una cola de i clientes, $i \geq 2$ obsérvese que como se comienza con i clientes todos estos serán atendidos al final de un intervalo de tiempo de longitud ib y en este tiempo $[ib/a]$ ($[\cdot]$ máximo entero) habrán llegado y tendrán que esperar, supóngase que el último cliente en llegar espera en la instalación. también el tiempo de servicio de estos clientes es b[ib/a] y de nuevo durante este tiempo [ib/a + [ib/a](b/a - 1)] clientes habrán llegado (obsérvese que se está considerando a los clientes que llegan durante el tiempo ib y durante b[ib/a] menos el último cliente que llega y espera en la instalación), similarmente el tiempo de servicio de estos clientes es b[ib/a + [ib/a](b/a - 1)] y de nuevo durante este tiempo habrán llegado

$$\{[ib/a + [ib/a](b/a - 1)] + [ib/a + [ib/a](b/a - 1)(b/a - 1)]\},$$

continuando con este proceso se llega al momento en que los clientes que llegan no necesitan esperar.

Para ver que pasa esto, obsérvese que como $b/a < 1$

$$\left[\frac{ib}{a} + \left[\frac{ib}{a}\right]\left(\frac{b}{a} - 1\right)\right] < \left[\frac{ib}{a}\right] \quad \text{pues} \quad \left(\frac{b}{a} - 1\right) < 0, \quad \left[\frac{ib}{a} - 1\right] > 0$$

$$\therefore \left[\frac{ib}{a}\right]\left(\frac{b}{a} - 1\right) < 0, \text{ también}$$

$$\left[\frac{ib}{a} + \left[\frac{ib}{a}\right]\left(\frac{b}{a} - 1\right) + \left[\frac{ib}{a} + \left[\frac{ib}{a}\right]\left(\frac{b}{a} - 1\right)\right]\left(\frac{b}{a} - 1\right)\right] <$$

$$\left[\frac{ib}{a} + \left[\frac{ib}{a}\right]\left(\frac{b}{a} - 1\right)\right]$$

De tal suerte que a medida que pasa el tiempo la cola se extingue y los clientes que llegan no necesitan esperar.

Ejemplificando:

Si se hace $i = 30$, $b = 1$, $a = 3$. El tiempo que tardan en ser servidos los 30 clientes es de 30 unidades de tiempo y durante este tiempo llega $[30/3] = 10$ clientes que requieren 10 unidades de tiempo para ser servidos durante los cuales llegan

$$[10 + 10(-2/3)] = [3.33] = 3$$

requiriendo 3 unidades de tiempo para ser servidos durante los cuales llegan

$$[10 - 20/3 + 3(-2/3)] = [1.33] = 1 \text{ cliente},$$

y a partir de entonces no habrá espera.

Con base en lo anterior se tiene que el número total de clientes que han esperado, incluyendo al primero de los i-clientes que empiezan, es de 44.

Obsérvese que

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$ pues en el tiempo inicial se empieza con i unidades además para $t > 0$

$$P_n(t)=P[N(t)=n] = \begin{cases} 1 \text{ si hay } n \text{ clientes en } t \\ 0 \text{ si el número de clientes es distinto de } n \end{cases}$$

Con todo a partir de $t_0 > 0$ para $t > t_0$ no habrá ya cola. Si se considera ahora que ocurren M nuevas llegadas las cuales esperan en línea se tiene que la llegada siguiente, es decir $(M + 1)$ ocurre después del tiempo de servicio de $(i + M)$ clientes ésto es $b(i + M) \leq a(M + 1) \rightarrow ib - a \leq M(a - b)$ obsérvese que $M = [ib-a/a-b] + 1$ satisface tal requerimiento, de donde el tiempo requerido para servir a todos los clientes que esperan es:

$$b[i + (ib-a/a-b) + 1] = b(i + ib-a/a-b + 1) = b(ia-b/a-b)$$

Obsérvese que si $|a - b| < \epsilon$, con ϵ suficientemente pequeña, entonces mas clientes tendrán que esperar.

2.3.2 MODELO M|M|1

CARACTERISTICAS

Supóngase que los clientes arriban según un proceso Poisson con tasa λ y media $1/\lambda$ y son atendidos por un solo servidor, con la política, primero en llegar primero en ser atendidos y donde los tiempos de servicio tienen una distribución exponencial con tasa μ y media $1/\mu$.

Se considera el proceso $\{ N(t)/ t \geq 0 \}$ donde $N(t)$ representa el número de clientes en el tiempo t y se está interesado en calcular la probabilidad de que haya n clientes en el sistema i.e. $P_n(t) = P[N(t) = n]$. Para esto supóngase las siguientes:

HIPOTESIS

P_r[un arribo ocurra en un intervalo de longitud Δt | n clientes] $= \lambda_n \Delta t + \theta(\Delta t)$.

P_r[más de un arribo en Δt | n clientes] $= O(\Delta t)$.

P_r[un servicio completo en Δt | n clientes] $= \mu_n \Delta t + \theta(\Delta t)$.

P_r[más de un servicio completo en Δt | n clientes] = $\theta(\Delta t)$.

Y donde $\theta(\Delta t)$ es una función tal que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Obsérvese que los tiempos de servicio y los tiempos de llegadas son los mismos independientemente de cuantos haya en la población

i.e. $\mu = u_n,\ \lambda_n = \lambda \quad \forall\ n = 1,2,\ldots$

DESARROLLO

Si se indica con la variable ϵ_n que hay n clientes en el sistema, entonces se tiene que:

P_r[sistema este en ϵ_n en el tiempo $t + \Delta t$] =

P_r[sistema este en ϵ_n en t y no ocurran arribos durante Δt y no haya servicios completos durante Δt] + P[sistema este en ϵ_n en t y un arribo ocurra durante Δt y un servicio sea completo en Δt] + P_r[sistema este en ϵ_{n+1} en t y un servicio completo ocurra durante Δt y no haya arribos en Δt] + P_r[sistema este en ϵ_{n-1} en t y ocurra un arribo en Δt y no haya servicios completos en Δt] + $\theta(\Delta t)$. Se sigue que:

$P_n[t + \Delta t] = P_n(t) \cdot P_r$[no arribos en Δt]$\cdot P_r$[no servicios completos en Δt] + $P_n(t) \cdot P_r$[un arribo en Δt]$\cdot P_r$[un servicio en Δt] + $P_{n+1}(t) \cdot P_r$[un servicio completo en Δt]$\cdot P_r$[no arribos en Δt] + $P_{n-1}(t) \cdot P_r$[un arribo en Δt]$\cdot P_r$[no servicios completos en Δt] + $\theta(\Delta t)$.

es decir,

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) = {} & P_n(t)[1-\lambda\Delta t+\theta(\Delta t)][1-\mu\Delta t+\theta(\Delta t)] + \\ & P_n(t)[\lambda\Delta t+\theta(\Delta t)]\ [\mu\Delta t+\theta(\Delta t)] + \\ & P_{n+1}(t)[\mu\Delta t+\theta(\Delta t)][1-\lambda\Delta t+\theta(\Delta t)] + \\ & P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t+\theta(\Delta t)]\ [1-\mu\Delta t+\theta(\Delta t)]+\theta(\Delta t). \end{aligned}$$

Si denotamos con $\theta(\Delta t)$ a todos los términos que tengan a $\Delta^2 t$ y $\theta(\Delta t)$ se tiene:

1) $P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t] + P_{n+1}(t)[\mu\Delta t] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t] + \theta(\Delta t) \qquad n \geq 1.$

2) $$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= P_0(t)[1-\lambda\Delta t-\theta(\Delta t)] + \\ &\quad P_1(t)[1-\lambda\Delta t-\theta(\Delta t)][\mu\Delta t+\theta(\Delta t)] + \theta(\Delta t) \\ &= P_0(t)[1-\lambda\Delta t] + P_1(t)[\mu\Delta t] + \theta(\Delta t) \end{aligned}$$

Si en las ecuaciones transponemos términos y hacemos que $\Delta t \to 0$ se tiene:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad n \geq 1$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \qquad n=0.$$

Considerando la intensidad de trafico $\rho = \lambda/\mu < 1$, eliminando el tiempo e igualando a cero las ecuaciones se tiene:

1) $0 = -(\lambda+\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \qquad n \geq 1$

2) $0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \qquad n = 0$

Si se hace $n = 1$ se tiene de (2)

$P_1 = \lambda/\mu P_0$ y de (1) sustituyendo P_1 y haciendo operaciones

$0 = -(\lambda+\mu)\lambda/\mu P_0 + \mu P_2 = -(\lambda^2/\mu)P_0 - \lambda P_0 + \mu P_2 + \lambda P_0$

Por consiguiente $P_2 = (\lambda/\mu)^2 P_0$

Para $n = 2$

$$0 = -(\lambda+\mu)P_2 + \lambda P_1 + \mu P_3$$

de donde sustituyendo P_2 y P_1 resulta

$$P_3 = (\lambda/\mu)^3 P_o.$$

.
.
.

Para $n = k-1$

$$P_k = (\lambda/\mu)^k P_0$$

Se afirma que $P_n = (\lambda/\mu)^n P_0$. La prueba se realiza por inducción.

P.d. que vale para $n = 1$.

Como $P_1 = \lambda/\mu P_0$ se tiene el resultado.

Ahora, suponemos que es valido para $k = n-1$.

P.d. que vale para $k = n$. Como $P_n = (\lambda/\mu)^n P_0$, para $k = n$ se tiene:

$0 = -(\lambda+\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$

$\to 0 = -(\lambda+\mu)(\lambda/\mu)^n P_0 + \lambda(\lambda/\mu)^{n-1} P_0 + \mu P_{n+1}$

así

$P_{n+1} = (\lambda/\mu)^{n+1}P_0$ $\quad\therefore$ vale para k = n.

ahora como $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/\mu)^n P_0 = 1$

$\Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/\mu)^n = 1$ como $\lambda/\mu < 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/\mu)^n = 1/\ 1-\lambda/\mu$

$\Rightarrow P_0 = 1/1/1-\rho = 1-\rho$ $\quad\therefore P_n = (1-\rho)\rho^n$ donde $\rho = \lambda/\mu$,

de donde el número de esperado de clientes en el sistema viene dado por

$$L = E(N) = (1-\rho)\rho/(1-\rho)^2 = \rho/(1-\rho) = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda/\mu}{\mu-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

y

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = L - (1-P_0) = \rho^2/1-\rho$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Si se considera ahora $W_q(t)$ la función de distribución del tiempo de permanencia en cola hay que considerar lo siguiente:
si un cliente que arriba encuentra el sistema vacío, entonces

$$W_q(t) = P[t_q=0] = P[N=0] = 1-\rho.$$

Sin embargo si un cliente que arriba encuentra n clientes en el sistema ($n \geq 1$) el tiempo consumido por un cliente hasta recibir servicio es la suma de los tiempos de servicios de cada uno de los clientes, los cuales tienen una distribución exponencial $\mu e^{-\mu t}$ como estos tiempos son v.a. independientes se tiene que la suma tiene una distribución n-Erlang.

Así

$$t_q = t_{s1}+t_{s2}+\ldots+t_{sn}$$

y

$$f_q(t) = \frac{\mu e^{-\mu t}(\mu t_q)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad t \geq 0$$

Por consiguiente por ley de probabilidad total

$$W_q(t) = P(t_q \leq t) = P[t_q = 0] + P[0 < t_q < t\ ] =$$

$$P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P[N = n]\ P[0 < t_q < t \mid N = n] =$$

$$P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \int_0^t \frac{\mu e^{-\mu y}(\mu y)^{n-1}}{n-1!}\, dy = (1-\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^n \int_0^t \frac{e^{-\mu y}\mu^n y^{n-1}}{n-1!}\, dy$$

$$= (1-\rho) + (1-\rho)\rho\mu \int_0^t e^{-\mu y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho\mu y)^{n-1}}{n-1!} dy$$

$$= (1-\rho) + (1-\rho)\rho\mu \int_0^t e^{-\mu y} e^{\rho\mu y} dy$$

$$= 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)t} \quad \text{si } t>0, \text{ y } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$\therefore \quad W_q(t) = \begin{cases} 1-\rho & t = 0 \\ 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)t} & t > 0 \end{cases}$$

de donde $W_q'(t) = \rho(\mu-\lambda)e^{(\mu-\lambda)t}$

así $E(t_q) = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$ $\quad$ $var(t_q) = \dfrac{2\rho-\rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2}$

y para la distribución del tiempo total en el sistema se tiene que

$$W_T(t) = \int_0^t \mu\ e^{-\mu s}\ w_q(t-s)ds$$

$$= \int_0^t \mu\ e^{-\mu s}\ (1-\rho e^{-(\mu-\lambda)(t-s)})\ ds$$

$$= \int_0^t \mu\ e^{-\mu s}\ ds - \int_0^t \rho\mu\ e^{-\mu s}\ e^{-(\mu-\lambda)(t-s)} ds$$

$$= 1- \ e^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$W'_T(t) = (\mu-\lambda)\ e^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$\therefore E(T_t) = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad \text{y} \quad V(T_t) = \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}$$

Ejemplo:

1) Supóngase que una refinería cuenta con una bomba diesel en donde los automóviles van a abastecerse, según estudios hechos la llegada de los automóviles que cargan diesel muestran una distribución Poisson, mientras que la duración de servicios muestra una distribución exponencial. El promedio de llegadas a la bomba diesel es de 5 automóviles por hora, mientras que los servicios promedio de la bomba son de 7 por hora. Suponiendo que sólo se puede atender un automóvil a la vez y se atiende según el orden de llegadas determínese:

a) La probabilidad de que un automovilista que llegue entre a cargar diesel inmediatamente.

b) La probabilidad de encontrar un automóvil cargando y otros 3 en cola.

c) El número esperado de automóviles que hacen cola.

$$= (1-\rho) + (1-\rho)\rho\mu \int_0^t e^{-\mu y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho\mu y)^{n-1}}{n-1!} dy$$

$$= (1-\rho) + (1-\rho)\rho\mu \int_0^t e^{-\mu y} e^{\rho\mu y} dy$$

$$= 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)t} \quad \text{si } t>0, \text{ y } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$\therefore \; W_q(t) = \begin{cases} 1-\rho & t = 0 \\ 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)t} & t > 0 \end{cases}$$

de donde $W_q'(t) = \rho(\mu-\lambda) e^{(\mu-\lambda)t}$

así $E(t_q) = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$ $\quad var(t_q) = \dfrac{2\rho-\rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2}$

y para la distribución del tiempo total en el sistema se tiene que

$$W_T(t) = \int_0^t \mu\, e^{-\mu s}\, W_q(t-s)ds$$

$$= \int_0^t \mu\, e^{-\mu s}\, (1-\rho e^{-(\mu-\lambda)(t-s)})\, ds$$

$$= \int_0^t \mu\, e^{-\mu s}\, ds - \int_0^t \rho\mu\, e^{-\mu s}\, e^{-(\mu-\lambda)(t-s)} ds$$

$$= 1- \quad e^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$W'_T(t) = (\mu-\lambda)\; e^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$\therefore\; E(T_t) = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad \text{y} \quad V(T_t) = \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}$$

Ejemplo:

1) Supóngase que una refinería cuenta con una bomba diesel en donde los automóviles van a abastecerse, según estudios hechos la llegada de los automóviles que cargan diesel muestran una distribución Poisson, mientras que la duración de servicios muestra una distribución exponencial. El promedio de llegadas a la bomba diesel es de 5 automóviles por hora, mientras que los servicios promedio de la bomba son de 7 por hora. Suponiendo que sólo se puede atender un automóvil a la vez y se atiende según el orden de llegadas determínese:

a) La probabilidad de que un automovilista que llegue entre a cargar diesel inmediatamente.

b) La probabilidad de encontrar un automóvil cargando y otros 3 en cola.

c) El número esperado de automóviles que hacen cola.

d) El número esperado de automóviles en el sistema.

e) El tiempo promedio de espera en la cola.

f) El tiempo promedio para dejar el sistema(cargar diesel y abandonar la gasolinería).

g) La probabilidad de que en el sistema se encuentre más de 3 automóviles.

h) La probabilidad de que la espera en cola sea mayor que 0.5.

i) La probabilidad de que un automóvil espere en el sistema 1 hora o más antes de abandonarla.

Solución:

Tomando como unidad de tiempo la hora, se tiene que

$$\lambda=5 \qquad \mu=7 \qquad \rho= 5/7 < 1$$

a) un automovilista llega a cargar diesel inmediatamente si no hay un automóvil en la gasolinería, así

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{5}{7} = 0.29$$

b) la probabilidad de que hay un automóvil cargando y 3 en cola está dada por

$$P_4 = P_0 \left(\frac{5}{7}\right)^4 = 0.075$$

c) el número esperado de automóviles en cola es:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{25}{14} = 1.79$$

d) el número esperado de automóviles en el sistema es

$$N = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{5}{2} = 2.5 \quad \text{automóviles}$$

e) el tiempo promedio de espera es

$$E(T_q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{14} = 0.36 \quad \text{de hora}$$

es decir, casi 22 minutos.

f) el tiempo promedio para dejar el sistema es

$$E(w) = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{2}$$

es decir, el tiempo promedio de espera en cola y ser atendido es de 30 minutos.

g) La probabilidad de que en el sistema se encuentren más de 3 automóviles es:

$$P[N>3] = (1-\rho) \sum_{n=4}^{\infty} \rho^n = (1-\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j+4} = (1-\rho)\ \rho^4 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j$$

$$= (1-\rho)\ \rho^4 \frac{1}{1-\rho} = \rho^4$$

Así $P[N>3] = (5/7)^4 = 0.26$

h) la probabilidad de que la espera en cola se mayor que 0.5 es

$$P[T_q>0.5] = (5/7)e^{-7(1-5/7)0.5} = 0.26$$

finalmente la probabilidad de que un automóvil espere 1 hora o más antes de abandonar el sistema es:

$$P[w>1] = e^{-2} = 0.13$$

2.3.3 MODELO M|M|C

CARACTERISTICAS

En este modelo se considera un sistema en donde los clientes son atendidos en el orden en que llegan, cuando los servidores están ocupados los clientes esperan para recibir servicio, se supone que los tiempos entre sucesivas llegadas y tiempos de servicio son iguales que en el modelo M|M|1 pero ahora se consideran c servidores en el sistema.

Se puede suponer al igual que el MODELO M|M|1 las siguientes:

HIPOTESIS

P[un arribo ocurra en un intervalo de longitud Δt|n-clientes] =

$$\lambda_n \Delta t + \theta(\Delta t)$$

P[ocurra mas de un arribo en Δt| n-clientes] = $\theta(\Delta t)$

P[ocurra un servicio completo en $\Delta t |$ n-clientes] =

$$= \begin{cases} n\mu\Delta t + \theta(\Delta t) & \text{si } 1 \leq n \leq c-1 \\ c\mu\Delta t + \theta(\Delta t) & \text{si } n \geq c \end{cases}$$

Obsérvese que la última probabilidad depende del número de servidores en el sistema, de ahí que resulte lo anterior. También $\lambda_n = \lambda$ puesto que de llegadas no depende del número de clientes que hay en sistema.

DESARROLLO

Procediendo de manera similar que en el modelo anterior se tiene que:

$$1)\ \frac{dP_n(t)}{dt} = \begin{cases} -(\lambda+n\mu)P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) & 1 \leq n \leq c-1 \\ -(\lambda+c\mu)P_n(t) + c\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) & n \geq c \end{cases}$$

$$2)\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \qquad n=0$$

Por consiguiente igualando a cero y eliminando el tiempo

$$0 = \begin{cases} -(\lambda+n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} & 1 \leq n \leq c-1 \\ -(\lambda+c\mu)P_n + c\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} & n \geq c \end{cases} \qquad (1)$$

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \qquad n=0 \qquad (2)$$

así para n=1 y $1 \leq n \leq c-1$

$$0 = -(\lambda+\mu)P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

si se sustituye P_1 en la primera ecuación.

$$0 = -(\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\mu} P_0 + \lambda P_0 + 2\mu P_2$$

$$\rightarrow P_2 = \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2\mu^2} = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

si ahora n=2 $n \leq c-1$

$$0= -(\lambda+2\mu)P_2 + \lambda P_1 + 3\mu P_3$$

sustituyendo P_1, y P_2

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{1\cdot 2\cdot 3\mu^3} P_0 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

.

.

.

Finalmente para n=c-1 se tiene

$$P_c = \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c P_0 \qquad (3)$$

Si se considera ahora $n \geq c$ de (2)

$$0= -(\lambda+c\mu)P_c + \lambda P_{c-1} + c\mu P_{c+1}$$

sustituyendo P_c y P_{c-1} y haciendo operaciones

$$0 = -\frac{\lambda^{c+1}}{c!\mu^c} P_0 + c\mu P_{c+1}$$

$$\rightarrow \quad P_{c+1} = \frac{\lambda^{c+1}}{\mu^{c+1} c!c} P_0$$

si ahora n=c+1 de (2)

$$0 = -(\lambda+c\mu)P_{c+1} + \lambda P_c + c\mu P_{c+2}$$

sustituyendo P_c y P_{c+1} y haciendo operaciones

$$P_{c+2} = \frac{1}{c!c^2}\frac{(\lambda)^{c+2}}{\mu^{c+2}} P_0$$

.

.

.

finalmente para n-1 se tiene que

$$P_n = \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad (4)$$

por consiguiente

$$P_n = \begin{cases} P_0 \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & \text{si } n<c \\ P_0 \dfrac{1}{c!c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n = P_0 \dfrac{c^c}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu c}\right)^n & n \geq c \quad \text{si } \dfrac{\lambda}{c\mu} < 1 \end{cases}$$

puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$\Rightarrow \quad 1 = P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{c^c}{c!}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n - \frac{c^c}{c!}\sum_{n=0}^{c-1} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n \right]$$

$$= P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!\ (1-\lambda/c\mu)} \right]$$

$$\therefore \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}$$

Obsérvese que si $\frac{\lambda}{c\mu} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \infty$ por lo cual es necesario

que $\frac{\lambda}{c\mu} < 1$, haciendo $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ se tiene que:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & 0 \le n < c \\ P_c\ \rho^{n-c} & n \ge c \end{cases}$$

Para el número esperado de clientes en el sistema se tiene que:

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{c} nP_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \sum_{n=c+1}^{\infty} nP_c\ \rho^{n-c}$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=1}^{c} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} + P_c \sum_{j=1}^{\infty} (j+c)\rho^n$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{c-1} P_n + P_c\left[\frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{c\rho}{1-\rho} \right]$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{P_c}{1-\lambda/c\mu}\right) + P_c\left[\frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{c\rho}{1-\rho} \right]$$

$$= c\rho + \frac{\rho P_c}{(1-\rho)^2}$$

si se considera ahora $w_q(t)$ la función de distribución del tiempo en cola, obsérvese que

$$t_q = \begin{cases} 0 & \text{si } n<c \\ ts_1 + ts_2 + \ldots + ts_{n-c+1} & \text{si } n \ge c \end{cases}$$

donde ts_1 representa el tiempo de la primera salida (suponiendo que hay c-clientes siendo atendidos) ts_2 el tiempo entre la primera y la segunda salida,... ts_n el tiempo entre la (n-1)-ésima y la n-ésima salida.

Obsérvese que si un cliente llega y encuentra c-clientes siendo atendidos sólo espera ts_1 (el cual es el mínimo de los tiempos que tarda cada uno en ser atendido, teniendo una distribución exponencial $c\mu e^{-c\mu x}$), si al llegar encuentra c+1-clientes, es decir c siendo atendidos y uno esperando su tiempo de espera es $ts_1 + ts_2$; similarmente si hay n-c+1 el cliente tendrá que esperar $ts_1 + ts_2 + \ldots + ts_{n-c+1}$, por consiguiente $ts_1 + ts_2 + \ldots + ts_{n-c+1}$ tiene una distribución n-c+1-Erlang.

Así

$$w_q(t) = P(t_q \le t) = P(t_q = 0) + P(o < t_q \le t) = P(n<c) + \sum_{n=c}^{\infty} P(N=n)\, P(0<t_q\le t \mid N=n)$$

$$= P(n<c) + \sum_{n=c}^{\infty} P_n \int_0^t \frac{e^{-c\mu y}(c\mu)^{n-c+1} y^{n-c}}{(n-c)!}$$

$$= P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{\infty} P_c \rho^{n-c} \int_0^t \frac{e^{-c\mu y}(c\mu)^{n-c+1} y^{n-c}}{(n-c)!}\, dy$$

$$= P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + P_c c\mu \int_0^t e^{-c\mu y} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^{n-c}}{c\mu^{n-c}}\, \frac{(c\mu)^{n-c} y^{n-c}}{(n-c)!}$$

$$= P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + c\mu P_c \int_0^t e^{-c\mu y} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^r}{r!}$$

$$= P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + c\mu P_c \int_0^t e^{-c\mu y + \lambda y}$$

$$\therefore\quad w_q(t) = P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{P_c}{1-\rho}\left(1 - e^{-t(c\mu-\lambda)}\right)$$

ya que $w_q(0) = P(t_q=0) = P(N \le c-1) = \sum_{n=0}^{c-1} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$

se tiene que $\qquad P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = 1 - \frac{P_0(\lambda/\mu)^c}{c!\,(1-\lambda/c\mu)}$

$$\therefore\; w_q(t) = 1 - \frac{P_c}{(1-\rho)} + P_c\left(\frac{1 - e^{-t(c\mu-\lambda)}}{1-\rho}\right)$$

$$\therefore\; w_q(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{c}{c!}\,\dfrac{(\lambda/\mu)^c}{(c-\lambda/\mu)}\, P_0 = 1 - \dfrac{P_c}{1-\rho} & t=0 \\[2ex] 1 - \dfrac{P_c e^{-t(c\mu-\lambda)}}{(1-\rho)} & t>0 \end{cases}$$

de donde $w_q = E(t_q) = \int_0^{\infty} t\, dw_q(t)$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t P_c\, e^{-t(c\mu-\lambda)}}{(1-\rho)} (c\mu-\lambda)\, dt$$

$$= \frac{P_c}{(1-\lambda/c\mu)} (c\mu-\lambda) \int_0^{\infty} t\, e^{-t(c\mu-\lambda)}\, dt$$

$$= \frac{\mu(\lambda/\mu)^c P_0}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2}$$

así $$W_q = \frac{(\lambda/\mu)^c P_0 \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2}$$

Para encontrar la distribución del tiempo total en el sistema hay que considerar los siguientes casos.

Si un cliente que llega tiene que esperar es decir si todos los servidores están ocupados entonces.

$$T_t = T_q + t_s$$

y así la función de densidad del tiempo total de espera esta dado por

$$W_{Tt}(t) = \int_0^t w_q(t-y)\; w_s(y)\; dy$$

$$= \int_0^t \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c e^{-\mu(c-\lambda/\mu)(t-y)}}{c-1!} P_0\; \mu\; e^{-\mu y}\; dy$$

$$= \int_0^t \frac{\mu\; r^c\; e^{-\mu(c-r)(t-y)}}{c-1!} \mu\; e^{-\mu y}\; P_0\; dy \qquad \text{donde } r = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\mu^2 r^c P_0}{c-1!} \int_0^t e^{-\mu((c-r)(t-y)+y)}\; dy$$

$$= \frac{\mu^2 r^c P_0}{c-1!} e^{-\mu(c-r)t} \int_0^t e^{-\mu[(r-c)y+y]}\; dy$$

$$= \frac{\mu^2 r^c P_0}{c-1!} e^{-\mu t}\left[\frac{1}{c-r-1} - \frac{e^{-\mu t(c-r-1)}}{c-r-1}\right]$$

Sin embargo puesto que un cliente puede llegar y entrar inmediatamente a servicio es decir $t_q=0$ se tiene que como $(t_q=0) \Leftrightarrow (n<c)$ entonces la probabilidad de que esto suceda es

$p(n<c) = 1 - \frac{(\lambda/\mu)^c P_0}{c!(1-\rho)}$ y así la distribución de el tiempo total de

espera en el sistema es esta probabilidad multiplicada por la probabilidad del tiempo que tarde en ser servido como este se distribuye exponencialmente finalmente se tiene que

$$W_{Tt}(t) = \left[1 - \frac{(\lambda/\mu)^c P_0}{c!(1-\rho)}\right] \mu e^{-\mu t} + \frac{\mu\; (\lambda/\mu)^c P_0\; e^{-\mu t}}{c-1!\; c-\lambda/\mu-1}\left[1 - e^{-\mu t(c-\lambda/\mu-1)}\right]$$

$$= \mu e^{-\mu t}\left[1 - \frac{(\lambda/\mu)^c P_0}{c!(1-\rho)} + \frac{(\lambda/\mu)^c P_0}{c-1!\;(c-\lambda/\mu-1)}\right] - \frac{\mu\; (\lambda/\mu)^c P_0}{c-1!(c-\lambda/\mu-1)} e^{-\mu t(c-\lambda/\mu-1)} \qquad t>0$$

si ahora se quiere conocer el tiempo esperado en cola

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) P_n = \sum_{k=0}^{\infty} k P_{k+c}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} kP_c\rho^{k+c-c}$$

$$= P_0 \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^k$$

$$= \frac{P_0}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda}{c\mu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k\right] \qquad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$= \frac{P_0}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda}{c\mu} \left[\frac{(1-\rho) - \rho(-1)}{(1-\rho)^2}\right]$$

$$\therefore \qquad L_q = \frac{P_0}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda}{c\mu} \left[\frac{1}{(1-\rho)^2}\right] = P_c \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

multiplicando por $c\mu/c\mu$ la ecuación anterior

$$L_q = \frac{P_0}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left[\frac{\lambda\mu}{(c\mu-\rho)^2}\right]$$

y para el tiempo promedio de espera en el sistema se tiene que

$$\begin{aligned} E(T_T) &= E(T_q + T_s) \\ &= E(T_q) + E(T_s) \\ &= W_q + 1/\mu \end{aligned}$$

Así

$$E(T_T) = \frac{1}{\mu} + \left[\frac{(\lambda/\mu)^c}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2}\right] P_0$$

Ejemplo:

En una estación de gasolina situado en los límites de la ciudad de Durango los automóviles llegan a tres bombas diesel con una distribución que se aproxima a la Poisson mientras que los servicios tienen una distribución exponencial, el promedio de llegadas es de 8 autobuses por hora mientras que se proporcionan 7 servicios en una hora. Sólo se puede proporcionar servicio a un autobús a la vez en cada bomba y la disciplina de servicio es, primero en llegar primero en ser servido. Encuéntrese:

a) la probabilidad de que haya 3 autobuses en la gasolinería.

b) el número esperado de autobuses en cola.

c) el número esperado de autobuses en la gasolinería (esperando y recibiendo servicio).

d) tiempo medio de espera en cola.

e) tiempo medio de espera en el sistema.

Solución:

Tomando como unidad de tiempo la hora.

$\lambda=8$ $\mu=7$ $c=3$ $\rho=8/21 < 1$

a) la probabilidad de que haya 3 autobuses en el sistema es

$$P_3 = P_0 \frac{1}{3!} \left(\frac{8}{7} \right)^3$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!} \left(\frac{8}{7} \right)^n + \frac{1}{3!} \left(\frac{8}{7} \right)^3 \left(\frac{3(7)}{3(7)-8} \right)}$$

$$= \frac{1}{3.1976} = 0.3127$$

Así

$$P_3 = \frac{0.3127}{6} \left(\frac{8}{7} \right)^3 = 0.077$$

b) el número esperado de autobuses en cola es

$$L_q = \frac{(8/7)^3(8)(7)}{2!\ (21-8)^2}\ 0.3127 = 0.077$$

Es decir, podría pensarse que no hay espera en cola.

c) el número esperado de autobuses en la gasolinería es

$$L = 3 \left(\frac{8}{21} \right) + \frac{\left(\frac{8}{21} \right) P_3}{\left(1 - \frac{8}{21} \right)^2}$$

$$= 1.2193$$

d) el tiempo promedio de espera en cola es

$$E(t_q) = \frac{(8/7)^3(7)}{338}\ (0.3127)$$

$$= 0.0096 \text{ de hora}$$

es decir, el tiempo de permanencia en cola es de 5 minutos.

e) el tiempo esperado en el sistema es

$$E(W) = \frac{1}{7} + 0.0096 = 0.152$$

es decir, el tiempo de permanencia en el sistema es de 9 minutos.

2.3.4. MODELO $M|M|\infty$

CARACTERISTICAS

En este modelo se suponen las mismas hipótesis que en los modelos anteriores con excepción del número de servidores que ahora se suponen que son un número ilimitado bajo estas condiciones se tienen las siguientes:

HIPOTESIS

* **P[un arribo ocurra en un intervalo de longitud $\Delta t|$ n-clientes]= $\lambda_n \Delta t + \theta(\Delta t)$**
* **P[ocurra mas de un arribo en $\Delta t|$ n-clientes] = $\theta(\Delta t)$**
* **P[ocurra un servicio completo en $\Delta t|$ n-clientes] = $n\mu\Delta t + \theta(\Delta t)$ si $n\geq 1$**
* **P[ocurra mas de un servicio completo en $\Delta t|$n clientes]=$\theta(\Delta t)$**

donde $\theta(\Delta t)$ es una función .э. $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

DESARROLLO

Procediendo como en los modelos anteriores

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda+n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} && 1\geq n \\ 0 &= -\lambda P_0 + \mu P_1 && n=0. \end{aligned} \qquad (2)$$

del modelo anterior

$$P_n = P_0 \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

puesto que $1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$

$$= P_0 e^{\lambda/\mu}$$

$$\therefore \quad P_0 = \frac{1}{e^{\lambda/\mu}}$$

$$\therefore \quad P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\lambda/\mu} = \frac{1}{n!}\rho^n e^{-\rho} \qquad \text{con } \rho = \lambda/\mu$$

$$\therefore \quad L = E(N) = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Obsérvese que en este caso ρ no tiene que ser menor que 1. Como hay un número infinito de servidores se tiene que no hay clientes esperando en cola.

Así $L_q = 0$ y $W_q = 0$

y para el tiempo esperado en el sistema se tiene que

$$
\begin{aligned}
E(T_t) &= E(T_q) + E(T_s) \\
&= W_q + E(T_s) \\
&= 0 + \frac{1}{\mu}
\end{aligned}
$$

también como $T_t = T_q + T_s$ y $T_q = 0$

entonces $w(t)=P[T_T \leq t] = P[T_s \leq t] = 1-e^{-\mu t}$.

Ejemplo

Supóngase que los encargados de un sistema telefónico que cuenta con un gran número de líneas para atender todas las llamadas que llegan, desean conocer el número promedio de líneas en uso del sistema, para ésto, según estudios hechos recientemente se sabe que las llamadas llegan según un proceso de Poisson con una tasa de 200 llamadas por hora y que la duración de estas se distribuyen exponencialmente con una duración de tres minutos en promedio. Determinar el número promedio de líneas en uso.

Solución:

Tomando como unidad del tiempo la hora.

$\lambda = 200$

$\frac{1}{\mu} = \frac{3}{60} \Rightarrow \mu = 20$

por consiguiente el número promedio de líneas en uso es

$$\rho = \frac{200}{20} = 10$$

2.3.5 PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE ADAPTADO A SISTEMAS DE LINEAS DE ESPERA.

En esta sección se hace uso del proceso de nacimiento y muerte para modelar algunos sistemas de colas interesantes. Para esto supóngase lo siguiente:

1) Si el número de clientes en el sistema en el tiempo t es n entonces

P_r[haya una llegada en el intervalo $(t,t+\Delta t)|$ n en el sistema]= $\lambda_n\Delta t + \theta(\Delta t)$.

Así

P_r[ningún cliente llegue en $(t,t+\Delta t)|$ n en el sistema]= $1-\lambda_n\Delta t + \theta(\Delta t)$

También P[haya más de una llegada en $(t,t+\Delta t)|$ n en el sistema]= $\theta(\Delta t)$ donde $\theta(\Delta t)$ es tal que $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Supóngase además que las llegadas en $(t,t+\Delta t)$ son independientes del tiempo en que ocurra la última llegada.

2) Si el número de clientes en el sistema en el tiempo t es n

entonces

P_r[haya un servicio completo en $(t,t+\Delta t)|$ n en el sistema]= $\mu_n\Delta t + \theta(\Delta t)$.

Así P_r[no haya un servicio completo $(t,t+\Delta t)|$ n en el sistema]=1- $\mu_n\Delta t + \theta(\Delta t)$, donde $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Supóngase además que la completación del servicio es independiente del tiempo en que se inicio.

3) La dependencia entre llegadas y salidas (servicios completos) sólo está restringida a los puntos 1 y 2.

Sobre estas consideraciones el proceso de colas definido anteriormente es un proceso de nacimiento y muerte. Así si N(t) es el número de clientes en el sistema en el tiempo t y si

$P_n(t) = P[N(t)=n|N(0)=i]$ se tiene que

1) $P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t)+\mu_1 P_1(t)$

2) $P'_n(t) = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)$

con las condiciones iniciales

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=i \\ 0 & \text{si } n\neq i \end{cases}$$

Por el teorema 22 se tiene que $\lim_{t\to\infty} P_n(t)=P_n$

pudiendo ser $P_n = 0$ $\forall$ $n\epsilon N$ (si todos los estados son transitorios o recurrentes nulos) o bien $P_n > 0$ $\forall$ $n\epsilon N$ (si la cadena es ergódica) y ser una distribución de probabilidad .

Que el $\lim_{t\to\infty} P_n(t)=P_n$ es equivalente $\lim_{t\to\infty} P'_n(t) = 0$

se tiene entonces que

1) $0 = -\lambda_0 P_0+\mu_1 P_1$

2) $0 = -(\lambda_n+\mu_n)P_n+\lambda_{n-1}P_{n-1}+\mu_{n+1}P_{n+1}$ para $n\geq 1$

por consiguiente

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1\lambda_0 P_0}{\mu_n\cdots\mu_3\mu_2\mu_1}$$

lo cual se prueba por inducción:

para n=1 $\quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$

suponemos valido para n=k-1 $P_k = \frac{\lambda_{k-1}\cdots\lambda_2\lambda_1\lambda_0 P_0}{\mu_k\cdots\mu_3\mu_2\mu_1}$

P.D. que vale para n=k

para n=k de 2)

$$0 = -(\lambda_k+\mu_k)P_k+\lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1}$$

simplificando y sustituyendo los valores de las P_k se tiene que

$$P_{k+1} = \frac{\lambda_k\cdots\lambda_2\lambda_1\lambda_0 P_0}{\mu_{k+1}\cdots\mu_3\mu_2\mu_1}$$

y así vale para n=k $\therefore$ vale $\forall$ $k\epsilon N$

A fin de obtener el valor de P_0 obsérvese que

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1\lambda_0 P_0}{\mu_n\cdots\mu_3\mu_2\mu_1}$$

finalmente $P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0 P_0}{\mu_n \cdots \mu_3 \mu_2 \mu_1} \right]^{-1}$

de donde $\{P_n\}$ es una solución no nula si y solo si

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_3 \mu_2 \mu_1} < \infty$$

en particular los tres modelos anteriores se deducen tomando

M|M|1

$\lambda_n=\lambda$ para $n=0,1,\ldots$

$\mu_n=\mu$ para $n=1,2,\ldots$

M|M|c

$\lambda_n=\lambda$ para $n=0,1,\ldots$

$\mu_n=n\mu$ para $n\leq c-1$
$=c\mu$ para $n\geq c$

M|M|∞

$\lambda_n=\lambda$ para $n=0,1,\ldots$

$\mu_n=n\mu$ para $n=1,2,\ldots$

2.3.6 MODELO M|M|1|K

Se considera ahora el caso de que un número máximo de clientes pueden ser almacenados, en particular se supone que el sistema puede tener cabida a lo más para k-clientes (incluyendo al que está en servicio). Si un cliente llega cuando hay k clientes en el sistema no se le permite la entrada y parte sin ser atendido. Se supone que las llegadas se distribuyen mediante un proceso Poisson con tasa λ (pero sólo aquellas que encuentran al sistema con menos de k clientes entran), la política de servicio es según el orden de llegadas y los clientes son atendidos exponencialmente con tasa μ por un sólo servidor.

Bajo estas condiciones se tiene un proceso de nacimiento y muerte donde

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0\leq n\leq k-1 \\ 0 & n\geq k \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & 0<n\leq k \\ 0 & \text{si } n\geq k+1 \end{cases}$$

Se tiene entonces que:

$$P_n = \begin{cases} \overset{n \text{ veces}}{\dfrac{\lambda\lambda\ldots\lambda}{\mu\mu\ldots\mu}}\, P_0 = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & \text{si } 0 \le n \le k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

o bien $P_n = P_0\,\rho^n$ donde $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Para encontrar P_0 obsérvese que como $\sum_{n=0}^{k} P_n = 1$ se tiene

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k} \rho^n}$$

Así

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{k+1} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

$\therefore$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\,\rho^n & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{k+1} & \text{si } \rho = 1 \end{cases} \qquad \text{Para } n=0,1,2,\ldots,k$$

Obsérvese que aquí no hay ninguna restricción sobre

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ Así si $\lambda > \mu$ o $\rho > 1$

intuitivamente se espera que el número en el sistema aumente y permanezca cerca de su valor máximo k, en cambio si $\rho<1$ entonces se espera que el número en el sistema sea pequeño y se pierdan menos clientes, si $\rho=1$ entonces la probabilidad de encontrar n-clientes en el sistema es constante y es igual a $1/(k+1)$. Para el caso en que $\rho<1$

el $\lim_{k\to\infty} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\,\rho^n = (1-\rho)\rho^n$

lo cual concuerda con el modelo M|M|1.
para el número esperado de clientes en el sistema se tiene que:
para $\rho \neq 1$

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{k} nP_n = \sum_{n=0}^{k} n\,\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\,\rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\,\rho \sum_{n=0}^{k} n\rho^{n-1}$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \rho \sum_{n=0}^{k} \frac{d\rho^n}{d\rho} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{k} \rho^n$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}$$

$$= \frac{-(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} + \frac{\rho}{1-\rho}$$

y cuando $\rho=1$

$$L = \sum_{n=0}^{k} nP_n = \frac{1}{k+1} (1+2+3+\ldots+k) = \frac{1}{k+1} \left[\frac{k(k+1)}{2}\right] = \frac{k}{2}$$

por tanto

$$L = \begin{cases} \dfrac{-(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} + \dfrac{\rho}{1-\rho} & \text{si} \quad \rho \neq 1 \\ \dfrac{k}{2} & \text{si } \rho=1 \end{cases}$$

y para la longitud esperada de la cola se tiene que :

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

$$= L - \left[1 - \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}\right]$$

$$= L - \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}} \qquad \text{si} \quad \rho \neq 1$$

y para $\rho=1$

$$L_q = \frac{k}{2} - [1 - 1/(k+1)] = \frac{k}{2} - 1 + \frac{1}{k+1}$$

$\therefore$

$$L_q = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1} + \rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}} & \\ \dfrac{k}{2} - 1 + \dfrac{1}{k+1} & \text{para } k \geq 2 \end{cases}$$

Para calcular las distribuciones de T_q y T_t para $n=0,1,2,\ldots k-1$. sea q_n la probabilidad de que haya n clientes en el sistema justamente antes de que un cliente que llegue entre al sistema entonces $q_n \neq p_n$ ya que $q_k=0$ y $p_k \neq 0$. Considérese ahora

$q_n = P_r$ [n clientes en el sistema | esté por ocurrir una llegada] por la regla de Bayes se tiene que

$$q_n = \frac{P_r[\text{n clientes en el sistema}]\ P_r[\text{esté por ocurrir una llegada}|\text{hay n en el sistema}]}{\sum_{n=0}^{k} P_r[\text{n clientes en el sistema}]\ P_r[\text{esté por ocurrir una llegada}|\text{ hay n en el sistema}]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{P_n\,[\lambda h + \theta(h)]}{\sum_{n=0}^{k-1} P_n\,[\lambda h + \theta(h)] + p_k \cdot 0}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{P_n\left[\lambda + \frac{\theta(h)}{h}\right]}{\sum_{n=0}^{k-1} P_n\left[\lambda + \frac{\theta(h)}{h}\right]}$$

$$q_n = \frac{\lambda P_n}{\sum_{n=0}^{k-1} P_n \lambda} = \frac{P_n}{1-P_k}$$

Obsérvese que $$\sum_{n=0}^{k-1} q_n = \frac{1}{1-P_k}\left[\sum_{n=0}^{k-1} P_n\right] = 1$$

$\therefore$ q_n es una distribución de probabilidad .

Sea ahora N_q la v.a. que representa el número de clientes justamente antes de que un cliente que llegue entre al sistema, es decir $N_q = 0,1,\ldots,k-1$ y $q_n = P[N_q = n]$.

Se tiene entonces que la función de distribución del tiempo de espera en cola esta dado por

$$P[t_q \le t] = w_q(0) + \sum_{n=1}^{k-1} P[t_q \le t \mid N_q = n] q_n$$

$$= q_0 + \sum_{n=1}^{k-1} q_n \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x}\, dx$$

$$= q_0 + \sum_{n=0}^{k-2} q_{n+1} \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x}\, dx$$

$$= q_0 + \sum_{n=0}^{k-2} q_{n+1} - \sum_{n=0}^{k-2} q_{n+1} \int_t^\infty \frac{\mu(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x}\, dx$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{k-2} q_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t}$$

O equivalentemente

$$W_q(t) = P[t_q \leq t] = q_0 + \sum_{n=1}^{k-1} q_n \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{n-1!} e^{-\mu x}\, dx$$

$$= q_0 + \sum_{n=1}^{k-1} q_n \left| 1 - \int_t^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{n-1!} e^{-\mu x} \right| dx$$

$$= q_0 + \sum_{n=1}^{k-1} q_n - \sum_{n=1}^{k-1} q_n \int_t^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{n-1!} e^{-\mu x}\, dx$$

$$\therefore W_q(t) = 1- \sum_{n=1}^{k-1} q_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^i}{i!}$$

y para la función de distribución del tiempo total en el sistema se tiene que:

$$W_T(t) = \sum_{n=0}^{k-1} P[T\leq t | N_q=n]\ P[N_q=n]$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \left| \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x} \right| dx \quad q_n$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \left| 1 - \int_t^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x} \right| dx \quad q_n$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} q_n - \sum_{n=0}^{k-1} q_n \int_t^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x}\, dx$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{k-1} q_n \sum_{i=0}^{n} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^i}{i!}$$

Para calcular el tiempo promedio de espera en cola y en el sistema obsérvese que un cliente no es admitido en el sistema con probabilidad P_k pues ya hay k clientes en el sistema por consiguiente si λ' es la tasa media de que un cliente entre al sistema se tiene que $\lambda' = \lambda(1-P_k) = \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{k-1} \lambda P_n = \lambda[1-P_k]$

Por consiguiente de las formulas reducidas se tiene que

$W = E(T_T) = \dfrac{L}{\lambda'}$ $\qquad\qquad$ $W_q = E(T_q) = \dfrac{L_q}{\lambda'}$

Ejemplo

Supóngase que la única ventanilla de un banco que proporciona servicio a los clientes en sus respectivos automóviles opera con los siguientes características: la llegada de los clientes tiene una distribución de Poisson con valor medio de 8 por hora. El tiempo de servicio tiene una distribución exponencial con valor medio de 4 minutos. El espacio frente a la ventanilla tiene capacidad para un máximo de 4 automóviles, incluyendo al automóvil que se le esta proporcionando servicio.

Encontrar:

a) la probabilidad de que un automóvil maneje directamente a la ventanilla sin formar cola.

b) la probabilidad de que un automovilista tenga que esperar en cola.

c) el tiempo promedio de espera antes de que se proporcione servicio al automovilista.

d) el tiempo promedio total de estancia en el sistema.

Solución:

a) la probabilidad de que un automovilista maneje directamente a la ventanilla sin formar cola es P_0, por consiguiente si se toma como unidad de tiempo la hora

$$\lambda=8 \qquad \mu=15 \qquad y \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{15} < 1$$

$$P_0 = \frac{1 - 8/15}{1 - (8/15)^5} = \frac{0.466}{0.9568} = 0.487$$

Así la probabilidad de que un automovilista ser servido de inmediato es de 18%.

b) la probabilidad de que un automovilista tenga que esperar en cola es $1 - P_0 = 1 - 0.487 = 0.513$.

c) el tiempo promedio de espera antes de que se proporcione servicio es

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'} = \frac{0.3948}{8(.961)} = \frac{0.3948}{7.68} = 0.0519$$

donde

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{(1-\rho)^{k+1}} = \frac{8/15}{1-8/15} - \frac{5(8/15)^5}{1-(8/15)^5} = \frac{0.53}{0.46} - \frac{0.215}{0.9568} = 0.9271$$

y

$$L_q = L - \frac{\rho[1-\rho^k]}{1-\rho^{k+1}} = 0.9271 - \frac{0.53(1-0.39)}{1-(8/15)^5} = 0.3948$$

es decir, cerca de 4 minutos un automovilista espera en cola.

d) el tiempo total que un automovilista pasa en el banco es

$$W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{0.9271}{7.68} = 0.1247$$

es decir, aproximadamente 7 minutos.

2.3.7 MODELO M|M|C|K

Supóngase las mismas hipótesis del modelo anterior, pero ahora considérense C servidores bajo estas consideraciones se tiene un proceso de nacimiento y muerte con los siguientes parámetros:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0 \le n \le k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 < n \le c \\ c\mu & c \le n \le k \end{cases}$$

$$\therefore P_n = \begin{cases} \frac{P_0}{n!} (\lambda/\mu)^n & \text{si } 0 \le n < c \\ \frac{P_0}{c!c^{n-c}} (\lambda/\mu)^n & \text{si } c \le n \le k \quad \ldots (1) \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

Para encontrar P_0 obsérvese que como $\sum_{n=0}^{k} P_n = 1$ se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{k} P_n = \sum_{n=0}^{c-1} P_n + \sum_{n=c}^{k} P_n = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 + \sum_{n=c}^{k} \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} P_0 = 1$$

$$\Rightarrow \qquad P_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=c}^{k} \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} \right) = 1$$

por consiguiente observando que:

$$\sum_{n=c}^{k} \frac{1}{C^{n-c}\,C!} (\lambda/\mu)^n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \dfrac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!} (k-c+1) & \text{si } \rho = 1 \end{cases} \qquad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

Se tiene :

$$P_o = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{1}{n!} (\lambda/\mu)^n + \dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \dfrac{1-(\rho)^{k-c+1}}{1-\rho} \right]^{-1} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{1}{n!} (\lambda/\mu)^n + \dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!} (k-c+1) \right]^{-1} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

Considérese ahora

$$L_q = \sum_{n=c}^{k} (n-c)\ P_n$$

$$\therefore \qquad L_q = \sum_{n=c}^{k} (n-c)\ P_o \left[\frac{1}{c!\ c^{n-c}} (\lambda/\mu)^n \right]$$

$$= \frac{P_0 c^c}{c!} (\lambda/\mu c)^{c+1} \sum_{n=c}^{k} (n-c)(\lambda/\mu c)^n (\lambda/\mu c)^{-c-1}$$

$$= \frac{P_0 c^c}{c!} (\lambda/\mu c)^{c+1} \sum_{i=0}^{k-c} i(\lambda/\mu c)^{i-1}$$

$$= \frac{P_0 c^c}{c!} (\rho)^{c+1} \left(\sum_{i=0}^{k-c} \frac{d}{d\rho} \rho^i \right)$$

$$= \frac{P_0 c^c}{c!} (\rho)^{c+1} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho} \right) \right]$$

$$= \frac{P_0 c^c}{c!} (\rho)^{c+1} \left[\frac{1-\rho^{k-c+1} - (1-\rho)(k-c+1)\rho^{k-c}}{(1-\rho)^2} \right] \quad \ldots (3)$$

Y para L se tiene que:

$$L_q = \sum_{n=c}^{k} (n-c)\ P_n = \sum_{n=0}^{k} n\ P_n - \sum_{n=0}^{c-1} n\ P_n - c \sum_{n=c}^{k} P_n$$

$$= L - \sum_{n=0}^{c-1} n\, P_n - c \left(1 - \sum_{n=0}^{c-1} P_n \right)$$

$$\therefore \quad L = L_q + c - \sum_{n=0}^{c-1} (n-c)\, P_n$$

Para encontrar las funciones de distribución del tiempo de espera en la cola y en el sistema. Sea N_q la v.a. que representa el número de clientes en el sistema justamente antes de que un cliente que arribe, entre al sistema, es decir, $N_q = 0,1,\ldots,k-1$ y $P[N_q = n] = q_n$.

Se tiene entonces que:

$$q_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n \dot{P}_0}{n!} & 0 \le n < c \\[2ex] \dfrac{c^c (\lambda/c\mu)^n \dot{P}_0}{c!} & c \le n \le k-1 \end{cases}$$

donde $\quad \hat{P}_0 = \dfrac{P_0}{1-P_k}$

así por la ley de probabilidad total

$$W_q(t) = P[t_q \le t] = W_q(0) + \sum_{n=c}^{k-1} P[t_q \le t \mid N_q = n]\, P[N_q = n]$$

$$= W_q(0) + \sum_{n=c}^{k-1} \left[\int_0^t \frac{c\mu (c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x} \right] q_n$$

$$= W_q(0) + \sum_{n=c}^{k-1} \left[1 - \int_t^{\infty} \frac{c\mu (c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x} \right] q_n$$

$$= W_q(0) + \sum_{n=c}^{k-1} q_n - \sum_{n=c}^{k-1} q_n \int_t^{\infty} \frac{c\mu (c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x}\, dx$$

$$= W_q(0) + \sum_{n=c}^{k-1} q_n - \sum_{n=c}^{k-1} q_n \sum_{k=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^k}{k!} e^{-c\mu t}$$

$$\therefore W_q(t) = P[t_q \le t] = \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{k-1} q_n - \sum_{n=c}^{k-1} q_n \sum_{k=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^k}{k!} e^{-c\mu t}$$

$$= 1 - \sum_{n=c}^{k-1} q_n \sum_{k=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^k}{k!} e^{-c\mu t}$$

Obsérvese que el resultado anterior es consistente con el modelo M|M|1|k pues si c=1

$$w_q(t) = 1 - \sum_{n=1}^{k-1} q_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}$$

lo cual concuerda con lo ya obtenido.

Para calcular la función de densidad del tiempo total de espera en el sistema, obsérvese que si hay menos de c clientes en el sistema, un cliente que llega no espera y en caso de haber n(n>c) clientes, un cliente que llega debe esperar la suma de los tiempos de servicio de n-c+1 la cual tiene una distribución (n c+1) Erlang. Sea pues $w(t_q)$ la función de densidad del tiempo de espera en cola y $w(t_q|n)$ la función de densidad condicional del tiempo de espera en cola dado que hay n clientes en el sistema se tiene entonces:

$$w(t_q) = \sum_{n=0}^{k-1} w(t_q \mid n)\ q_n$$

aplicando transformada de Laplace de ambos lados:

$$\mathcal{L}(w(t_q)) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathcal{L}(w(t_q \mid n))\ q_n$$

lo cual puede ser expresado como:

$$\mathcal{L}(w(t_q)) = \sum_{n=0}^{c-1} \mathcal{L}(\delta t_q-0)\ q_n + \sum_{n=c}^{k-1} (c\mu/c\mu+s)^{n-c+1}\ q_n$$

Obsérvese que el primer término de la derecha representa que un cliente no espera y que es utilizada la función Delta de Dirac que es útil en estos casos, (ver apéndice A). El segundo término representa la transformada de Laplace del tiempo que un cliente debe esperar, en este punto recuérdese que la transformada de la distribución de una suma de variables aleatorias independientes es el producto de las transformadas de cada una de las variables de la suma, y como se tienen n-c+1 variables aleatorias distribuidas exponencialmente con parámetros $c\mu$ se tiene el resultado de la derecha, así:

$$\mathcal{L}(w(t_q)) = \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{k-1} (c\mu/c\mu+s)^{n-c+1}\ q_n$$

Ahora para obtener la función de densidad de $w(T_t)$ obsérvese que $T_t = T_q + T_s$ y T_q , T_s son independientes entonces la transformada de Laplace de $w(T_t)$ es igual al producto de las transformadas de $w(T_q)$ y $w(T_s)$ de donde:

$$\mathcal{L}(w(t_t)) = \sum_{n=0}^{c-1} (\mu/\mu+s) q_n + \sum_{n=c}^{k-1} (\mu/\mu+s)\ (c\mu/c\mu+s)^{n-c+1}\ q_n$$

antes de continuar obsérvese que

$$q_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!}\,\hat{P}_0 & n=0,1,\ldots,c \\ \dfrac{c^c\,\rho^n}{c!}\,\hat{P}_0 = q_c\,\rho^{n-c} & n=c+1,c+2,\ldots,k-1 \end{cases}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w(t_q)) &= \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{k-1} (c\mu/c\mu+s)^{n-c+1}\, q_n \\ &= \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \frac{q_c}{\rho} \sum_{n=c}^{k-1} (c\mu/c\mu+s)^{n-c+1}\,\rho^{n-c+1} \\ &= \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \frac{q_c}{\rho}\left[\sum_{n=c}^{k-1} ((\lambda/c\mu+s))^{n-c+1} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \frac{q_c}{\rho} \sum_{n=1}^{k-c} ((\lambda/c\mu+s))^{n} \end{aligned}$$

Así

$$\mathcal{L}(w(t_t)) = \sum_{n=0}^{c-1} (\mu/(\mu+s))q_n + \frac{q_c}{\rho} \sum_{n=1}^{k-c} ((\lambda/(c\mu+s)))^n(\mu/(\mu+s))$$

aplicando transformada de Laplace inversa se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}(u/(u+s)) = \mu\mathcal{L}^{-1}(1/(s+\mu)) = \mu e^{-\mu t}$$

y para

$$\sum_{n=1}^{k-c} ((\lambda/(c\mu+s)))^n(\mu/(\mu+s)) = \left[\left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right) + \left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)^2\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right) + \ldots + \left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)^{k-c}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right]$$

Aplicando transformada inversa a cada término

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right] = \lambda\mu\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(c\mu+s)(\mu+s)}\right)$$

como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)}\right] = e^{-c\mu t} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\mu+s)}\right] = e^{-\mu t}$$

aplicando convolución se tiene que

$$\lambda\mu\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)(\mu+s)}\right] = \lambda\mu\int_0^t e^{-c\mu T}\, e^{-\mu(t-T)}\, dT$$

$$= \lambda\mu\left[\frac{e^{-\mu t}}{c\mu-\mu} - \frac{e^{-tc\mu}}{(c\mu-\mu)}\right]$$

ahora: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)^2}\right] = te^{-c\mu t}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\mu+s}\right) = e^{-\mu t}$

$$\therefore \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\lambda^2\mu}{(c\mu+s)^2\,(\mu+s)}\right] = \lambda^2\mu\int_0^t Te^{-c\mu T}\, e^{-\mu(t-T)}\, dT$$

$$= \lambda^2\mu\left[-\frac{te^{-tc\mu}}{c\mu-\mu} - \frac{e^{-Tc\mu}}{(c\mu-\mu)^2} + \frac{e^{-T\mu}}{(c\mu-\mu)^2}\right]$$

Para $\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)^3\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right] = \lambda^3\mu\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)^3\,(\mu+s)}\right]$

como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)^3}\right] = \frac{t^2 e^{-c\mu t}}{2!} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\mu+s)}\right] = e^{-\mu t}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3\mu\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)^3(\mu+s)}\right] = \lambda^3\mu\int_0^t \frac{T^2 e^{-c\mu T}}{2!}\, e^{-\mu(t-T)}\, dT$$

$$= \lambda^3\mu\left[\frac{e^{-t\mu}}{(c\mu-\mu)^3} - \left(\frac{t^2 e^{-tc\mu}}{2!(c\mu-\mu)} + \frac{te^{-tc\mu}}{(c\mu-\mu)^2} + \frac{e^{-tc\mu}}{(c\mu-\mu)^3}\right)\right]$$

y para

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)^4\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right] = \lambda^4\mu\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)^4(\mu+s)}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)^4}\right] = \frac{t^3 e^{-c\mu t}}{3!} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\mu+s)}\right] = e^{-\mu t}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)^4\,(\mu+s)}\right] = \int_0^t \frac{T^3}{3!}\, e^{-c\mu T}\, e^{-\mu t}\, e^{\mu T}\, dT$$

$$= \frac{e^{-t\mu}}{(c\mu-\mu)^4} - \left[\sum_{l=1}^{4}\frac{t^{4-l}\, e^{-tc\mu}}{(4-l)!\,(c\mu-\mu)^l}\right]$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)^4\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right] = \lambda^4\mu\left[\frac{e^{-t\mu}}{(c\mu-\mu)^4} - \left(\sum_{l=1}^{4}\frac{t^{4-l}\, e^{-tc\mu}}{(4-l)!\,(c\mu-\mu)^l}\right)\right]$$

continuando de esta manera

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)^{k-c}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right] = \lambda^{k-c}\mu\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(c\mu+s)^{k-c}\,(\mu+s)}\right]$$

$$= \lambda^{k-c}\mu\left[\frac{e^{-t\mu}}{(c\mu-\mu)^{k-c}} - \left(\sum_{l=1}^{k-c}\frac{t^{k-c-l}\,e^{-tc\mu}}{(k-c-1)!\,(c\mu-\mu)^{l}}\right)\right]$$

así

$$w(T_t) = \mu e^{-t\mu}\sum_{n=0}^{c-1} q_n + \frac{q_c}{\rho}\sum_{n=1}^{k-c}\mu\lambda^n\left[\frac{e^{-t\mu}}{(c\mu-\mu)^n} - \sum_{l=1}^{n}\frac{t^{n-l}\,e^{-tc\mu}}{(n-1)!\,(c\mu-\mu)^{l}}\right]$$

como un último comentario obsérvese que utilizando este método también podemos calcular la función de densidad de tiempo de espera en cola, para ver ésto considérese:

$$\mathscr{L}(w(t_q)) = \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{k-1}(c\mu/c\mu+s)^{n-c+1}\,q_n$$

$$= \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \frac{q_c}{\rho}\sum_{n=1}^{k-c}(\lambda/(c\mu+s))^n$$

y aplicando transformada inversa a cada término de la segunda suma

$$\sum_{n=1}^{k-c}((\lambda/(c\mu+s)))^n = \left[\left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right) + \left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{c\mu+s}\right)^{k-c}\right]$$

se tiene que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\lambda}{(c\mu+s)}\right] = \lambda e^{-c\mu t}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\lambda^2}{(c\mu+s)\,(c\mu+s)}\right] = \lambda^2 t\, e^{-c\mu t}$$

también

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\lambda^3}{(c\mu+s)^3}\right] = \frac{\lambda^3 t^2\, e^{-c\mu t}}{2!}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\lambda^4}{(c\mu+s)^4}\right] = \frac{\lambda^4 t^3\, e^{-c\mu t}}{3!}$$

Finalmente

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\lambda^{k-c}}{(c\mu+s)^{k-c}}\right] = \frac{\lambda^{k-c}t^{k-c-1}\,e^{-c\mu t}}{(k-c-1)!}$$

así

$$w(t_q) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{c-1} q_n & t_q = 0 \\ \\ \frac{q_c}{\rho} \sum_{n=1}^{k-c} \rho^n \frac{(c\mu)^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-c\mu t} & t_q > 0 \end{cases}$$

$$y \; W_q(t) = P[0 \le T_q \le t] = P[T_q = 0] + P[0 < T_q < t]$$

$$= W_q(0) + \frac{q_c}{\rho} \sum_{n=1}^{k-c} \rho^n \left[\int_0^t \frac{(c\mu)^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-c\mu t} \, dt \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{(n)!} \hat{P}_0 + \frac{q_c}{\rho} \sum_{n=1}^{k-c} \rho^n - \frac{q_c}{\rho} \sum_{n=1}^{k-c} \rho^n \int_t^\infty \frac{(c\mu)^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-c\mu t} \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{(n)!} \hat{P}_0 + \sum_{n=c}^{k-1} \frac{c^c \rho^n \hat{P}_0}{c!} - \frac{q_c}{\rho} \sum_{n=c}^{k-1} \rho^{n-c+1} \int_t^\infty \frac{(c\mu)^{n-c+1}}{(n-c)!} t^{n-c} e^{-c\mu t} \, dt$$

$$= 1 - \sum_{n=c}^{k-1} q_c \, \rho^{n-c} \int_t^\infty \frac{(c\mu)^{n-c+1}}{(n-c)!} t^{n-c} e^{-c\mu t} \, dt$$

$$= 1 - \sum_{n=c}^{k-1} q_n \left[\sum_{i=0}^{n=c} \frac{e^{-c\mu t} (c\mu t)^i}{i!} \right]$$

lo cual concuerda con lo que había dado anteriormente.

Por lo que respecta al tiempo promedio de espera en cola y en el sistema se tiene por las fórmulas reducidas.

$$W = \frac{L}{\lambda'} \qquad \lambda' = \lambda \, (1 - P_k)$$

y

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} \quad \text{ó} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

EJEMPLO M|M|C|K

En un consultorio pequeño con dos doctores llegan pacientes para recibir tratamientos con una distribución Poisson y a un ritmo medio de 4 por hora se proporciona atención médica a los pacientes de uno en uno, sobre la base de orden llegada. El tiempo que se pasa con cada cliente tiene una distribución exponencial con un tiempo medio de 20 minutos. Supóngase que en la sala de espera sólo pueden estar cinco pacientes incluyendo los que están siendo servidos, se pide determinar:

a) La probabilidad de que haya 3 pacientes en el consultorio (dos siendo atendidos y uno esperando).

Solución:

$$\lambda = 4 \quad y \quad \frac{1}{\mu} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \rightarrow \mu = 3 \qquad \frac{4}{6} < 1$$

$$\therefore \quad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{(4/3)^n}{n!} + \frac{(4/3)^2}{2!} \frac{[1-(4/6)^{5-2+1}]}{1-(4/6)} \right]^{-1}$$

$$= [4.463]^{-1} = 0.2240$$

$$\text{así } P_3 = \frac{0.2240}{2!2^1} \left(\frac{4}{3} \right)^3 = \frac{0.2240}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^3 = 0.132$$

es decir, la probabilidad de que haya tres pacientes en el consultorio es del 13% aproximadamente.

b) El número esperado de pacientes esperando servicio es:

$$L_q = \frac{P_0}{2!} 2^2 \quad (4/6)^3 \left[\frac{1 - (4/6)^4 - [1 - (4/6)](4)(4/6)^3}{[1 - (4/6)]^2} \right]$$

$$= 0.298 \left[\frac{0.803 - 0.390}{0.1089} \right] = 1.13 \text{ pacientes}$$

es decir, el número de pacientes esperando servicio es uno.

c) El número esperado de pacientes en el consultorio (esperando y recibiendo consulta) es:

$$L = 1.13 + 2 - 0.2240 \sum_{n=0}^{1} \frac{(2-n)}{n!} (4/3)^n$$

$$= 3.13 - 0.2240 [2+(4/3)] = 2.38$$

es decir, aproximadamente 2.

d) El tiempo que espera un paciente para ser atendido es:

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda(1-P_k)} = \frac{1.13}{4(1-P_5)} = \frac{1.13}{4(0.9411)} = 0.300$$

donde $P_5 = \dfrac{Po}{(2)(2)^3} (4/3)^5 = \dfrac{0.2240}{16} (4.21) = 0.0589$

es decir, un cliente espera 18 minutos para ser atendido.

e) El tiempo promedio para que un paciente abandone el consultorio es:

$$W = \frac{2.38}{3.764} = 0.63$$

así un cliente permanece en el consultorio aproximadamente 38 minutos.

2.3.8 MODELO M|M|C|C

Este modelo es un caso especial del modelo anterior con k=c, este sistema es comúnmente llamado M|M|C sistema con perdida ya que los clientes que llegan cuando todos los servidores están ocupados no son admitidos y son perdidos.

Se tiene entonces del modelo anterior tomando k=c

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{P_o}{n!} (\lambda/\mu)^n & n \le c \\ 0 & n > c \end{cases}$$

donde $P_o = \left[\sum_{n=0}^{c} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{1}{n!} \right]^{-1}$

por consiguiente

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n / n!}{\sum_{n=0}^{c} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{1}{n!}} & n \le c \\ 0 & \text{o.l} \end{cases}$$

la distribución anterior es llamada "distribución Poisson Truncada", además en particular la probabilidad de que todos los servidores estén ocupados es:

$$P_c = \frac{(\lambda/\mu)^c \,/\, c!}{\sum_{n=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}}$$

Comúnmente P_c es llamada fórmula de Erlang de pérdida.

Si ahora λ' es la tasa media de arribo al sistema se tiene

$$\lambda' = \lambda\ (1 - P_c)$$

Obsérvese que como la capacidad del sistema es c y hay c servidores $W_q = L_q = 0$ puesto que solo es permitida la entrada al sistema siempre que haya menos de c clientes.

Por lo que respecta a L se tiene:

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{c} nP_n = P_o \sum_{n=1}^{c} n(\lambda/\mu)^n \frac{1}{n!}$$

$$= P_o(\lambda/\mu) \sum_{n=1}^{c} (\lambda/\mu)^{n-1} \frac{1}{n-1!}$$

$$= (\lambda/\mu) \sum_{j=0}^{c-1} P_o(\lambda/\mu)^j \frac{1}{j!}$$

$$= \lambda/\mu\ [1-P_c]$$

para W se tiene

$$W = E(T_t) = \frac{L}{\lambda'_a} = E(T_s)$$

Obsérvese que lo anterior se deduce del hecho de que en este modelo no hay espera, también como

$$T_t = t_q + t_s \rightarrow T_t = T_s \text{ pues } T_q=0$$

se tiene que $W(t) = P[T_t \leq t] = P[T_s \leq t] = 1 - e^{-\mu t}$.

2.3.9 M|M|1|M|M POBLACION FINITA

A diferencia de los modelos anteriores en donde se supone que la población de donde los clientes llegan al sistema es infinita, en este modelo se supone que la población de clientes potenciales es M ($M<\infty$). Cuando el número de clientes potenciales en el sistema es n ($n=0,1,\ldots,M$) existen sólo ($M-n$) clientes potenciales fuera. Se supone que todos los miembros de la población potencial se encuentran alternativamente dentro y fuera del sistema de colas. Finalmente supóngase que el tiempo fuera de cada miembro (ésto es el tiempo que pasa desde que deja el sistema hasta que regrese) se distribuye exponencialmente con parámetros λ y que los tiempos de servicio se distribuyen exponencialmente con parámetros μ. Además todos los clientes actúan independientemente unos a otros.

Obsérvese que cuando n miembros están dentro, ($M-n$) están fuera y así la distribución de probabilidad actual del tiempo que falta para la próxima llegada al sistema, es la distribución del mínimo de los tiempos restantes afuera para esos miembros, siendo esta exponencial con parámetros $\lambda(M-n)$.

Bajo estas condiciones se tiene un proceso de nacimiento y muerte donde:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda\,(M-n) & 0 \le n \le M \\ 0 & n > M \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu \qquad n=0,1,\ldots,M$$

Así

$$P_n = P_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda(M-i)}{\mu} = P_0\ \lambda(M/\mu)\ \ \lambda[(M-1)/\mu]\ldots\lambda[(M-(n-1))/\mu]$$

$$P_n = \begin{cases} P_0(\lambda/\mu)^n \dfrac{M!}{(M-n)!} & 0<n\le M \\ 0 & \text{o.l.} \end{cases}$$

$$\text{como } \sum_{n=0}^{M} P_n = 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{M} (\lambda/\mu)^n \frac{M!}{(M-n)!} P_0 = 1$$

$$\therefore\quad P_0 = \left[\ \sum_{n=0}^{M} (\lambda/\mu)^n \frac{M!}{(M-n)!}\ \right]^{-1}$$

Para el número esperado de clientes en el sistema se tiene por definición.

$$L = \sum_{n=0}^{M} nP_n = \sum_{n=0}^{M} n(\lambda/\mu)^n \frac{M!}{(M-n)!} P_0$$

$$= P_o \sum_{n=0}^{M} n(\lambda/\mu)^n \frac{M!}{(M-n)!}$$

y para el número esperado de clientes en cola se tiene que

$$L_q = \sum_{n=1}^{M} (n-1)P_n = \sum_{n=1}^{M} nP_n - \sum_{n=1}^{M} P_n$$

$$= L - \sum_{n=1}^{M} P_n$$

Si ahora se quiere encontrar las funciones de distribución de t_q y T_t. Sea q_n la probabilidad de que haya n clientes en el sistema justamente antes de que un cliente que llegue entre al sistema con n=0,1,...M-1, se tiene por la regla de Bayes que:

$$q_n = P_r \text{ (n clientes en el sistema | esté por ocurrir una llegada)}$$

$$= \frac{\text{Pr (n clientes en el sistema) Pr (esté por ocurrir una llegada | n en el sistema)}}{\sum_{n=0}^{M} \text{Pr (n clientes en el sistema) Pr (esté por ocurrir una llegada | n)}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{P_n \left| (M-n)\lambda + \frac{\theta(h)}{h} \right|}{\sum_{n=0}^{M} P_n \left| (M-n)\lambda + \frac{\theta(h)}{h} \right|}$$

$$= \frac{(M-n)P_n}{M\sum_{n=0}^{M} P_n - \sum_{n=0}^{M} nP_n} = \frac{(M-n)P_n}{M - L}$$

Obs.- $$\sum_{n=0}^{M} q_n = \sum_{n=0}^{M} \frac{(M-n)P_n}{M - L} = 1$$

por consiguiente

$$P[t_q \le T] = w_q(0) + \sum_{n=1}^{M-1} P[t_q \le T \mid N_q = n]q_n$$

$$= q_o + \sum_{n=1}^{M-1} q_n \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x}\, dx$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{M-1} q_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}$$

$$y \quad P[T_t \le T] = \sum_{n=0}^{M-1} P[T_t \le t \mid N_q = n]\, P[N_q = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} \left[\int_0^t \frac{\mu(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x}\, dx \right] q_n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{M-1} q_n \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\mu t}\ (\mu t)^k}{k!}$$

Para obtener el tiempo de espera en el sistema y el tiempo de espera en cola, obsérvese que si en el sistema hay n clientes entonces M-n están fuera, así la tasa media de arrivos de cada cliente es $(m-n)\lambda$ y por consiguiente la tasa media de arrivos para todo el sistema es:

$$\lambda' = \sum_{n=0}^{M} (M-n)\lambda P_n = \sum_{n=0}^{M} M\lambda P_n - \sum_{n=0}^{M} n\lambda P_n$$

$$= \lambda M \sum_{n=0}^{M} P_n - \lambda \sum_{n=0}^{M} nP_n$$

$$\lambda' = \lambda(M - L)$$

Por consiguiente por las fórmulas reducidas:

$$W = \frac{L}{\lambda(M-L)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(M-L)}$$

EJEMPLO M|M|I|M|M

Supóngase que un ingeniero en computación está encargado del mantenimiento de 4 máquinas. Para cada máquina el tiempo medio entre requerimientos de servicio es de 10 horas y se supone que tiene una distribución exponencial. El tiempo de reparación tiende a seguir también una distribución exponencial y tiene un tiempo medio de 2 horas, se supone que el ingeniero sólo atiende una máquina a la vez, encuéntrese:

a) La probabilidad de que ninguna máquina esté descompuesta.

b) La probabilidad de que una máquina se encuentre en mantenimiento y otra en espera.

c) Número esperado de máquinas que esperan servicio en una hora.

d) El número esperado de máquinas en el sistema.

e) Tiempo promedio de espera en cola.

f) El tiempo promedio de espera en el sistema (esperando y recibiendo servicio).

Solución:

Puesto que el tiempo medio entre requerimientos de servicio es de 10 horas, entonces

$$\frac{1}{\lambda} = 10 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0.1$$

también $\frac{1}{\mu} = 2 \rightarrow \mu = 0.5$ donde se toma como unidad de tiempo la hora.

$$\text{así} \quad Po = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=4} \left(\frac{0.1}{0.5} \right)^n \frac{4!}{4-n!}}$$

$$= \frac{1}{2.5104} = 0.3983$$

$$\approx 0.4$$

Es decir hay un 40% de probabilidad de que no se encuentre ninguna máquina en compostura.

b) La probabilidad de que una máquina se encuentre en mantenimiento y otra en espera es:

$$P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} (0.2)^2 (0.4) = 0.192$$

c) El número esperado de máquinas que esperan servicio en una hora.

$$L_q = \Sigma (n-1)P_n = (0)P_1 + (1)P_2 + (2)P_3 + (3)P_4$$

$$= 0.192 + 2(0.0768) + 3(0.01536) = 0.39168$$

donde

$$P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} (0.2)^3 (0.4) = 0.0768$$

$$P_4 = \frac{4!}{(4-4)!} (0.2)^4 (0.4) = 24 (0.2)^4 (0.4) = 0.01536$$

Es decir el número promedio de máquinas que esperan servicio en una hora es: 0.39 de máquina.

d) El número promedio de máquinas en compostura.

$$L = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4$$

$$= 0.32 + 2(0.192) + 3(0.0763) + 4(0.01536)$$

$$= 0.99584 \approx 1$$

Esto aproximadamente una máquina está en compostura y tres funcionando.

e) El tiempo promedio que una máquina espera en cola para ser atendida es:

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda(M-L)} = \frac{0.46848}{0.1(4-0.99584)} = \frac{0.46848}{0.300416} = 1.55943$$

O sea aproximadamente una hora y media.

f) El tiempo promedio de espera en el sistema (esperando y recibiendo servicio).

$$W = \frac{L}{\lambda(M-L)} = \frac{0.99384}{0.300416} = 3.314$$

O sea aproximadamente 3 horas con 18 minuto

2.3.10 MODELO M|M|C|M|M

En este modelo se supone lo mismo que en el anterior pero ahora se consideran c servidores al igual que el modelo M|M|1|M, se tiene un proceso de nacimientos y muerte con:

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda & 0 \le n \le M \\ 0 & n > M \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 < n \le c \\ c\mu & n > c \end{cases}$$

así

$$P_n = \begin{cases} P_0 \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n & 0 \le n \le c \\ P_0 \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} \dfrac{n!}{c!\ c^{n-c}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n & c \le n \le M \end{cases}$$

como $\sum_{n=0}^{M} P_n = 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{c-1} P_0 \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} (\lambda/\mu)^n + \sum_{n=c}^{M} P_0 \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} \frac{n!}{c!\ c^{n-c}} (\lambda/\mu)^n = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} (\lambda/\mu)^n + \sum_{n=c}^{M} \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} \dfrac{n!}{c!\ c^{n-c}} (\lambda/\mu)^n}$$

Para L por definición se tiene que:

$$L = \sum_{n=0}^{M} nP_n = \sum_{n=0}^{M} n \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} (\lambda/\mu)^n P_0 + \sum_{n=c}^{M} n \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} \frac{n!}{c!\ c^{n-c}} (\lambda/\mu)^n P_0$$

Para L_q

$$L_q = \sum_{n=c}^{M} (n-c) P_n$$

$$= \sum_{n=c}^{M} nP_n \quad - c \sum_{n=c}^{M} P_n$$

$$= \sum_{n=c}^{M} nP_n + \sum_{n=0}^{c-1} nP_n - \sum_{n=0}^{c-1} nP_n \quad - c \sum_{n=c}^{M} P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{M} nP_n - \sum_{n=0}^{c-1} nP_n - c \, [1 - \sum_{n=0}^{c-1} P_n \,]$$

$$= L - c + \sum_{n=0}^{c-1} (c-n) Pn$$

$$\therefore \quad L_q = L - c + Po \sum_{n=0}^{c-1} (c-n) \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Para encontrar las distribuciones de t_q y t_t considérese q_n como en el modelo anterior.

$$w_q \, (t) = w_q \, (0) + \sum_{n=c}^{M-1} P[t_q \le t \mid N_q = n] \; P[N_q = n]$$

$$= w_q(0) + \sum_{n=c}^{M-1} \left[\int_0^t \frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}}{n-c!} \; e^{-c\mu x} \; q_n \; dx \right]$$

$$= w_q(0) + \sum_{n=c}^{M-1} q_n - \sum_{n=c}^{M-1} q_n \sum_{k=0}^{n-c} \frac{e^{-c\mu t} \quad (c\mu t)^k}{k!}$$

$$= \quad 1 - \sum_{n=c}^{M-1} q_n \sum_{k=0}^{n-c} \frac{e^{-c\mu t} \quad (c\mu t)^k}{k!}$$

Para calcular la función de distribución del tiempo total de espera en el sistema, obsérvese que un cliente que llega no tiene que esperar si hay algún servidor desocupado, de otro modo esperará hasta que uno de ellos se desocupe, se tiene pues que la función de densidad del tiempo de espera puede ser expresada como:

$$w(t_q) = \sum_{n=0}^{M-1} w(t_q|n) q_n$$

aplicando transformada de Laplace a ambos lados se tiene que:

$$\mathcal{L}(w(t_q)) = \sum_{n=0}^{M-1} \mathcal{L}(w(t_q \mid n)) \ q_n$$

lo cual puede ser expresado como:

$$\mathcal{L}(w(t_q)) = \sum_{n=0}^{c-1} \mathcal{L}(\delta(t_q-0)) \ q_n + \sum_{n=c}^{M-1} (c\mu/c\mu+s)^{n-c+1} \ q_n$$

puesto que $\mathcal{L}(\delta(t_q-0)) = 1$ se tiene que:

$$\mathcal{L}(w(t_q)) = \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{M-1} (c\mu/c\mu+s)^{n-c+1} \ q_n$$

y como $T_T = T_q + T_s$

$$\mathcal{L}(w(T_T)) = \mathcal{L}(w(t_s)) \ \mathcal{L}(w(t_q))$$

donde: $\mathcal{L}(w(t_s)) = \dfrac{\mu}{\mu + s}$

y $\mathcal{L}(w(t_q)) = \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=c}^{M-1} (c\mu/c\mu+s)^{n-c+1} \ q_n$

por consiguiente:

$$\mathcal{L}(w(T_T)) = \sum_{n=0}^{c-1} (\mu/\mu+s) \ q_n + \sum_{n=c}^{M-1} (\mu/\mu+s)(c\mu/c\mu+s)^{n-c+1} \ q_n$$

Por analogía con el modelo $M|M|C|k|$ se llega a que:

$$w(T_t) = \mu e^{-\mu T t} \sum_{n=0}^{c-1} q_n + \sum_{n=1}^{M-c} \mu (c\mu)^n \left[\frac{e^{-\mu T t}}{(c\mu-\mu)^n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{T_t^{n-j} \ e^{-c\mu T t}}{(n-j)!\,(c\mu-\mu)^j} \quad q_{n+c-1} \right]$$

y para el tiempo promedio de espera en cola y en el sistema se tiene que:

$$W = \frac{L}{\lambda(M-L)} , \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda(M-L)}$$

EJEMPLO M|M|C|M|M

Suponga que una pequeña flota de aviones cuenta con 4 aviones de tipo Jumbo 747.

Se ha venido observando el comportamiento de estos aviones desde 1985 y en especial las fallas de las turbinas. Los datos indican que las fallas de cualquier avión es una variable aleatoria exponencial y que el tiempo promedio entre dos fallas consecutivas de cualquier avión es de un año. El tiempo promedio de revisión y compostura de la falla de la turbina es de 45 días (un octavo de año). Supóngase que se tienen dos equipos humanos de expertos para dar servicio y se proporciona servicio bajo la política de servicio "primero en llegar primero en atenderse". Durante el periodo de mantenimiento el avión no vuela. Determínese:

a) La probabilidad de que ningún avión esté descompuesto.

b) La probabilidad de que se encuentren dos aviones en mantenimiento y uno en espera.

c) El número promedio de aviones en el sistema.

d) Tiempo promedio de estancia en el sistema.

Solución:

a) La probabilidad de que ningún avión esté descompuesto.

Tomando como unidad de tiempo un año se tiene que:

$$\frac{1}{\lambda} = 1 \rightarrow \lambda=1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{8} \rightarrow \mu=8 \quad \text{y} \quad M=4 \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{8}$$

$$\text{así } p = \frac{\lambda}{2(\mu)} = \frac{1}{2(8)} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} (4!/n!(4-n)!)(1/8)^n + \sum_{n=2}^{4} (4!/4-n!) \frac{1!}{2!\ 2^{n-2}} (1/8)^n}$$

$$\text{así } P_o = \frac{1}{1.606} = 0.622$$

por consiguiente hay un 62% de probabilidad de que no se encuentre ningún avión descompuesto.

b) La probabilidad de que se encuentren dos aviones en mantenimiento y uno en espera

$$P_3 = P_0 \binom{4}{3} \frac{3!}{2!\,2^{3-2}} \left(\frac{1}{8}\right)^3 = 0.0072$$

Así la probabilidad de que se encuentren dos aviones en mantenimiento y uno en espera es: 0.0072

c) El número promedio de aviones en el sistema (esperando y recibiendo).

$$l = P_0 \left[\sum_{n=0}^{1} n \binom{4}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=2}^{4} n \binom{4}{n} \frac{n!}{2!\,2^{n-2}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$= 0.622\ [0.5 + 0.18756 + 0.0351 + 0.00288]$$

$= 0.451$ de avión. (ningún avión en cola)

d) El tiempo promedio de estancia en el sistema (recibiendo servicio y esperando para recibir servicio) es:

$$w = \frac{0.451}{(4 - 0.451)} = 0.1270$$ es decir aproximadamente 46 días

2.3.11 MODELO M|M|C CON RENUNCIA

En este modelo se supone lo mismo que en los anteriores pero ahora se considera que los clientes pueden decidir no entrar al sistema porque la cola es demasiado grande.

Supóngase que:

Pr [Un cliente que llega en el tiempo t se una al sistema | N(t)=n] = b_n con $n \geq o$

Por consiguiente:

Pr [Un cliente que llega en t no se una a la cola|N(t)=n] = $1-b_n$ Obsérvese que $\{b_n\}_{n \in N}$ es una sucesión decreciente, pues a medida que aumenta n, la probabilidad de que un cliente que llegue se una al sistema se hace pequeña, también $b_o=b_1=b_{c-1}=1$ ya que la probabilidad de unirse al sistema, cuando hay menos de c clientes, es muy alta. Finalmente obsérvese que la tasa media de que un cliente se una al sistema es: $\lambda' = \lambda b_n$.

Al igual que los modelos anteriores este sistema puede ser modelado como un proceso de nacimiento y muerte con:

$$\lambda = \{ \lambda b_n \quad (n \geq o)$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 < n \leq c \\ c\mu & n \geq c \end{cases}$$

Por consiguiente se tiene que:

$$P_n = P_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda\, b_i}{(i+1)\mu} \quad \text{si } o \leq n \leq c$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{b_0 . b_1 . \;\ldots\; . b_{n-1}}{n!} = P_0 \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

y para $n \geq c$

$$P_n = P_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda\, b_i}{(i+1)\mu} \prod_{j=c}^{n-1} \frac{\lambda}{c\mu} b_j$$

así $P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{c!\ c^{n-c}} b_c . b_{c+1} \ldots b_{n-1}$

si se hace $D_n = b_c . b_{c+1} \ldots b_{n-1}$ $n \geq c+1$ y $D_c = 1$
se tiene que:

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{c!\ c^{n-c}} D_n \qquad \text{con } n \geq c$$

$\therefore$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{P_0}{n!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n & \text{con } 0 \leq n \leq c \\ P_0 \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n \dfrac{1}{c!\ c^{n-c}} D_n = P_0 \left(\dfrac{\lambda}{c\mu} \right)^n \dfrac{c^c}{c!} D_n & \text{con } n \geq c \end{cases}$$

Obsérvese que:

$$P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{c!\ c^{n-c}} D_n = \frac{P_0}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^{n-c} D_n$$

$$= P_c\, \rho^{n-c} D_n \qquad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$\therefore P_n = \begin{cases} \dfrac{P_0}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & \text{con } 0\leq n\leq c \\ P_c\,\rho^{n-c}\,D_n & \text{con } n\geq c \end{cases}$$

Para encontrar el valor de P_0 como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \rightarrow P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + P_c \sum_{n=c}^{\infty} \rho^{n-c} D_n\right] = 1$$

si se supone que $\sum_{n=c}^{\infty} \rho^{n-c} D_n$ converge entonces

$$P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + P_c \sum_{n=c}^{\infty} \rho^{n-c} D_n}$$

si se quiere $L = E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{nP_0}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{\infty} nP_c\, D_n\, \rho^{n-c}$

y para la longitud de la cola

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)P_n = \sum_{n=c}^{\infty} nP_n + \sum_{n=c}^{\infty} cP_n$$

$$= \sum_{n=c}^{\infty} nP_c\, D_n\, \rho^{n-c} - \sum_{n=c}^{\infty} cP_c\, D_n\, \rho^{n-c}$$

Obsérvese que las relaciones anteriores no pueden ser simplificadas sin conocer D_n.

Si un cliente que llega al sistema decide unirse a la cola y esperar para recibir servicio se tiene que la función de distribución del tiempo de permanencia en la cola viene dada por:

$$P[t_q\leq t] = w_q(0) + \sum_{n=c}^{\infty} P[t_q\leq t|N=n]\, P[N=n]$$

$$= P[t_q\leq c-1] + \sum_{n=c}^{\infty} P_n\left[\int_0^t \frac{(c\mu)^{n-c+1}\, e^{-c\mu x}}{n-c!}\, X^{n-c}\, dx\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{c-1} P_n + \sum_{n=c}^{\infty} P_c\, \rho^{n-c}\, D_n\left[1 - \int_t^{\infty} \frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}\, e^{-c\mu x}}{n-c!}\, dx\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{c-1} P_n + \sum_{n=c}^{\infty} P_c\, \rho^{n-c}\, D_n - \sum_{n=c}^{\infty} P_c\, \rho^{n-c}\, D_n \left[\sum_{k=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^k\, e^{-c\mu t}}{k!} \right]$$

En el caso en que haya un único servidor se tiene que:

$$\lambda_n = \{ \lambda b_n \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n = \{ \mu \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Por consiguiente:

$$P_n = P_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda b_i}{\mu}$$

$$= P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \prod_{i=0}^{n-1} b_i \qquad \text{donde } b_0 = 1$$

$$\text{y} \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n b_0 b_1 \ldots b_{n-1}}$$

Ejemplo:

Supóngase que una gasolinería cuenta con una bomba, en donde los automóviles que requieren abastecerse llegan de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa media de 20 por hora. Sin embargo, si la cola es demasiado larga estos clientes pueden desistir unirse a la cola (ir a otra gasolinería) en particular si hay n automóviles en la gasolinería la probabilidad de que un automóvil que llega se una a la cola es 1/(n+1) con n=0,1,2,...

Supóngase además que el tiempo que se necesita para servir un automóvil tiene una distribución exponencial con media de 6 minutos.

Encuentre la probabilidad de que haya n clientes en el sistema y la longitud esperada de automóviles en el sistema.

Solución:

Tomando como unidad de tiempo la hora $\lambda = 20$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \rightarrow \mu = 10$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{20}{10}\right) + \left(\frac{20}{10}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{20}{10}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{20}{10}\right)^4 \frac{1}{4!} + \ldots + \left(\frac{20}{10}\right)^n \frac{1}{n!} + \ldots}$$

$$\therefore\ P_0 = e^{-2}$$

$$\therefore\ P_0 = e^{-2}\, 2^n \prod_{i=0}^{n-1} b_i \;=\; e^{-2}\, 2^n \frac{1}{n!}$$

Es decir la probabilidad de encontrar n automóviles en el sistema sigue una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 2$

Así $L = E(N) = 2$ es decir el número esperado de gentes en el sistema es 2.

2.3.12 ALGUNOS EJEMPLOS ADICIONALES

Como primer ejemplo de esta Sección considérese la situación en la cual un servidor tiene dos tasas medias de servicio. Supóngase que un servidor trabaja con una tasa μ_1 hasta que hay k clientes en el sistema y que a partir de este punto (k) la tasa media de servicio cambia a μ, así la tasa media de servicio μ_n depende ahora del estado del sistema. Supóngase que las llegadas ocurren según un proceso Poisson y los tiempos de servicio son exponenciales con tasa μ_1 y μ respectivamente se sigue que este modelo puede ser representado como un proceso de nacimiento y muerte con

$$\lambda_n = \{\ \lambda \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & 1 \le n < k \\ \mu & n \ge k \end{cases}$$

suponiendo $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ se tiene que para $n<k$

$$P_n = \frac{\overbrace{\lambda \ldots \lambda}^{k-1 \text{ veces}}}{\mu_1 \ldots \mu_1} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n P_0 \qquad 0 \le n < k$$

y para $n \ge k$

$$P_n = \frac{\overbrace{\lambda \ldots \qquad \lambda}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{\mu_1\ \mu_1 \ldots \mu_1}_{k-1 \text{ veces}}\ \underbrace{\mu \ldots \mu}_{n-k+1 \text{ veces}}} = \frac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1}\ \mu^{n-k+1}} P_0$$

Para encontrar el valor de P_0 puesto que

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ se tiene que $\sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\mu_1} \right)^n P_0 + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1} \mu^{n-k+1}} P_0 = 1$

$$\therefore P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\mu_1} \right)^n + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1} \mu^{n-k+1}}}$$

Puesto que $\sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\mu_1} \right)^n = \frac{1-(\lambda/\mu_1)^k}{1-\lambda/\mu_1}$

$$y \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1} \mu^{n-k+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_1^{k-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+k}}{\mu^{j+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^k}{\mu_1^{k-1}\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\mu^j} = \frac{\lambda^k}{\mu_1^{k-1}\mu(1-\lambda/\mu)}$$

así $P_0 = \dfrac{1}{\dfrac{1-(\lambda/\mu_1)^k}{1-\lambda/\mu_1} + \dfrac{\lambda^k}{\mu_1^{k-1}\mu(1-\lambda/\mu)}}$

$$\therefore P_n = \begin{cases} (\lambda/\mu_1) P_0 & 0 \le n < k \\ \dfrac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1} \mu^{n-k+1}} P_0 & n \ge k \end{cases}$$

El siguiente ejemplo supone que la tasa media de servicio se ve modificada cada vez que cambia el tamaño del sistema. Esta modificación en las tasas de servicios puede deberse a la presión que ejercen los clientes que están formados en la cola, es decir puede suceder que si un servidor ve que hay muchos clientes esperando, realice mas rápido el servicio o en caso contrario si hay poca cola puede ser que tarde mas en servir a un cliente. Se supone que las llegadas ocurren según un proceso Poisson con tasa λ, que los tiempos de servicio son exponenciales con $\mu_n = n^c\mu$ y que hay un servidor. Se tiene pues un proceso de nacimiento y muerte con

$\lambda_n = \{ \lambda \qquad n=0,1,2,\ldots$

$\mu_n = \{ n^c \mu \qquad n=1,2,\ldots$

aquí

n =número de clientes en el sistema.

μ_n =tasa media de servicio cuando hay n clientes en el sistema.

$\frac{1}{\mu}$ = tiempo de servicio normal esperado: tiempo promedio para servir a un cliente cuando es el único en el sistema.

c =coeficiente de presión: constante positiva que indica el grado en que la tasa de servicio del sistema resulta afectada así si c=1 la reducción del tiempo de servicio es proporcional a λ.

Se tiene entonces que:

$$P_n = \frac{\overbrace{\lambda \ldots \lambda}^{n \text{ veces}}}{1^c\mu \; 2^c \ldots n^c\mu} P_0 = \frac{\lambda^n}{(n!)^c \mu^n} P_0 = \frac{1}{(n!)^c}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

a fin de determinar el valor de P_0 como $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$\Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^c}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

haciendo $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ se tiene que:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^c \rho^n}$$

esto tiene sentido solo si $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^c \rho^n$ converge.

obsérvese que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^c} \rho^n$ converge si c>0 ya que por la prueba de la razón para series

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!^c}}{\frac{\rho^n}{n!^c}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!^c \rho^{n+1}}{(n+1)!^c \rho^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho}{(n+1)^c} = 0 < 1$$

así $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^c} \rho^n$ converge absolutamente para $c<0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\rho}{(n+1)^c} > 1$ y por tanto la serie diverge.

Así $P_n = \frac{1}{(n!)^c}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$

con $P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$ con $c>0$

En particular si $c=1$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1} = e^{-\rho} \text{ y } P_n = \frac{P_0(\lambda/\mu)^n}{n!} = e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$$

lo cual nos da modelo $M|M|\infty$.

2.3.13 MODELO M| G| 1

En este modelo se considera un sistema inmediatamente después de que el servicio de un cliente es completado y el servicio esta por comenzar para el siguiente. Se supone que el sistema tienen un proceso $[N_t|t\geq 0]$ de llegadas POISSON con tasa λ y los tiempos de servicio son independientes e idénticamente distribuidos con una distribución de probabilidad arbitraria; diferentes clientes tiene independientes tiempos de servicios. Sea $\{y(t)|t\geq 0\}$ el proceso que denota el número de clientes en el sistema en el tiempo t y $t_1<t_2<\ldots$, los tiempos en los cuales los clientes completan un servicio, por consiguiente $x_n=y(t_n)$ $n=0,1,2,\ldots$ es un proceso de tiempos discretos donde $x_n=y(t_n)$ representa el número de clientes en el sistema justamente después de que el n-ésimo cliente deja el sistema. Obsérvese que si T es el instante de la n-ésima salida y $S=S_{n+1}$ es el tiempo de servicio del (n+1) cliente. Si $X_n>0$ durante el tiempo de servicio del (n+1) cliente iniciado en T y finalizado en T+S llegan $N_{T+S}-N_T$ arribos y por consiguiente el tamaño de la cola justamente después de la (n+1) salida es $X_n+(N_{T+S}-N_T)-1$. Si ahora $X_n=0$ entonces el servidor permanece desocupado hasta que el (n+1) cliente arriba, digamos en el tiempo r entonces durante este servicio que inicio en r y terminó en r+s hay $N_{r+s}-N_r$ arribos (siendo éstos los que quedan detrás de la n-ésima salida).

así

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n+(N_{T+s}-N_T)-1 & \text{si } X_n>0 \\ N_{r+s}-N_r & \text{si } X_n=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Así de la independencia del proceso de arribos, de los tiempos de servicios y del hecho de que en el proceso Poisson el numero de arribos durante un intervalo de longitud S tiene una distribución que solo depende de S se tiene que

$P[N_{T+s}-N_T=k|x_0,\ldots,x_n,T]=P[N_s=k]$

también $P[N_{r+s}-N_r|x_0,\ldots,x_n,r]=P[N_s=k]$

así X_{n+1} depende solo de N_s y x_n y no de $x_0,\ldots,x_{n-1}$ por consiguiente la cadena $[x_n]$ es de Markov.

Sea ahora $k_n=P[N_s=n]=\int_0^\infty P[N_s=n|s=t]dw_s(t)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dw_s(t)$

donde $w_s(t)$ es la función de distribución del tiempo de servicios

si i=0 de 1

$P[X_{n+1}=j|X_n=0]=P[N_{r+s}-N_r=j]=P[N_s=j]=k_j$

también si i>0 de 1

$P[X_{n+1}=j|X_n=i]=P[N_{t+s}-N_t=j+1-i]=P[N_s=j+1-i] = \begin{cases} k_{j+1-i} & j\geq i-1 \\ 0 & j<i-1 \end{cases}$

$$P[X_{n+1} = j|X_n = i] = \begin{cases} k_j & i=0 \quad j\geq 0 \\ k_{j+1-i} & i>0 \quad j\geq i-1 \\ 0 & \text{o.1} \end{cases} \qquad (2)$$

Sea ahora $P=[P_{ij}]$ y $k_n=P_r$ [haya n llegadas durante un tiempo de servicio s=t]

$$=P[N_s=n]=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dw_s(t)$$

Por 2

$$P=P_{ij}] = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ k_0 & k_1 & k_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdot & \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Es intuitivo que el sistema es estable si $E(N_s)<1$ es decir si el numero promedio de clientes que arriban durante un período de servicio es menor que 1. Por definición

$$E(N_s)=\sum_{n=0}^{\infty} nk_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\,dw_s(t) \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} n \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} dw_s(t)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} dw_s(t)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m+1}}{m!} dw_s(t)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\lambda t[e^{\lambda t}]dw_s(t) = \lambda\int_0^{\infty} t dw_s(t) = \lambda E(s) = \rho \qquad (4)$$

Así ρ es el número promedio de clientes que arriban durante un período de servicio nótese que $k_n>0$ $\forall$ n de tal suerte que la cadena es irreducible y que P_r[pasar k a k en una transición]$=P^{(1)}_{kk}>0$ $\forall$ k y por consiguiente el período de k definido como el máximo común divisor del conjunto $\{n|P^{(n)}_{kk}>0\}$ es uno, como consecuencia la cadena es aperiódica. Se muestra a continuación que si $\rho<1$ entonces la cadena es ergódica para esto supóngase que

$$\rho<1 \text{ y } x_i= \frac{i}{1-\rho} \qquad i=0,1,2,\ldots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}x_j = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} \frac{j}{1-\rho} = \sum_{j=i-1}^{\infty} k_{j-i+1}\left(\frac{j}{1-\rho}\right)$$

$$= \frac{k_0(i-1)}{1-\rho} + \frac{k_1 i}{1-\rho} + \frac{k_2(i+1)}{1-\rho} +\ldots$$

$$= \frac{k_0(i-1)}{1-\rho} + \frac{k_1(i-1)}{1-\rho} + \frac{k_2(i-1)}{1-\rho} +\ldots +\frac{k_1}{1-\rho} + \frac{2k_2}{1-\rho} +\ldots$$

$$=\frac{1}{1-\rho} [k_0(i-1)+k_1(i-1)+k_2(i-1)+\ldots]+\frac{1}{1-\rho} [k_1+2k_2 +\ldots]$$

$$=\frac{(i-1)}{1-\rho} \sum_{j=0}^{\infty} k_j+\frac{1}{1-\rho} \sum_{j=0}^{\infty} jk_j$$

$$=\frac{i-1}{1-\rho} .1 + \frac{1}{1-\rho} \rho =\frac{i-1+\rho}{1-\rho} =x_i-1 \qquad \begin{matrix} x_i\geq 0 \\ 1-\rho)>0 \end{matrix}$$

$$\text{Además } \sum_{j=0}^{\infty} P_{oj}\, x_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{1-\rho} kj =\frac{1}{1-\rho} \sum_{j=0}^{\infty} jk_j =\frac{\rho}{1-\rho} <\infty$$

Así por Teorema 15 $[X_n]$ es ergódica y por el Teorema 22 tiene una distribución de probabilidad en equilibrio estadístico.

Como consecuencia si $\rho<1$ la cadena $[X_n]$ tiene una distribución $\Pi_n=(\Pi_0,\Pi_1,\ldots)$ $\Pi_i>0$ $\forall$ i y tal que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1 \text{ y } \Pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i P_{ij} \qquad j=0,1,\ldots \qquad (5)$$

Obs.

$$(\Pi_0,\Pi_1,\ldots,\Pi_j\ldots)=(\Pi_0,\Pi_1,\ldots,\Pi_j\ldots)\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & . & . & . & k_i & . & . \\ k_0 & k_1 & k_2 & . & . & . & k_i & . & . \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & . & . & k_{i-1} & k_i & . \\ 0 & 0 & k_0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$\Pi_i=\Pi_0 k_i+\Pi_1 k_i+\Pi_2 k_{i-1}+\ldots+\Pi_{i+1}k_{i-i}$$

así $\Pi_i=\Pi_0 k_i+\sum_{j=1}^{i+1}\Pi_j k_{i-j+1} \quad i=0,1,2,\ldots \quad (6)$

Sean $\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i z^i \quad |z| \leq 1$ -la función generatriz para Π (7)

$k(z) = \sum_{i=0}^{\infty}k_i z^i$ - la función generatriz para k (8)

entonces multiplicando (6) por z^i

$$\Pi_i z^i=\Pi_0 k_i z^i+\sum_{j=1}^{i+1}\Pi_j k_{i-j+1}z^i$$

$$=\Pi_0 k_i z^i+\sum_{j=0}^{i+1}\Pi_j k_{i-j+1}z^i-\Pi_0 k_{i+1}z^i$$

$$=\Pi_0 k_i z^i+\frac{1}{z}\left(\sum_{j=1}^{i+1} \Pi_j k_{i-j+1}z^{i+1}-\Pi_0 k_{i+1}z^{i+1}\right)$$

de donde $\sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty}\Pi_0 k_i z^i+\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i+1}\Pi_j k_{i-j+1} z^{i+1}-\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{\infty}\Pi_0 k_{i+1}z^{i+1}$

obsérvese que $\sum_{j=0}^{i+1}\Pi_j k_{i+1-j}$ es una convolución de donde :

$$\Pi(z)=\Pi_0 k(z)+\frac{1}{z}\left(\sum_{i=0}^{\infty}C_{i+1}z^{i+1}\right) - \Pi_0 \frac{1}{z}\sum_{i=0}^{\infty}k_{i+1}z^{i+1}$$

$$=\Pi_0 k(z)+\frac{1}{z}[k(z)\Pi(z)-\Pi_0 k_0]-\frac{\Pi_0}{z}[k(z)-k_0]$$

$$\therefore \Pi(z)=\Pi_0 k(z)+\frac{1}{z}k(z)\Pi(z)-\frac{\Pi_0 k(z)}{z}$$

$\therefore\ \Pi(z)(1-\frac{1}{z}k(z))=\Pi_0k(z)-\frac{\Pi_0k(z)}{z}=\Pi_0(k(z)-\frac{k(z)}{z})$

así $\Pi(z) = \frac{\Pi_0\ (k(z)-k(z)/z)}{1-(1/z)k(z)} = \frac{\Pi_0(zk(z)-k(z))}{z-k(z)}$

Finalmente $$\Pi(z) = \frac{\Pi_0[1-z]k(z)}{k(z)-z} \tag{9}$$

de (7) $\Pi(z)=\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i z^i \rightarrow \Pi(1)=\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i=1 = \sum_{i=0}^{\infty} k_i=k(1)$

también Teorema A.1.2

$k'(1)=E(N_s)=\sum_{n=0}^{\infty} nk_n=\rho$

de $\Pi(z)= \frac{\Pi_0(1-z)k(z)}{k(z)-z}$ se tiene por la regla de L'Hopital

$$1=\Pi(1) =\lim_{z\to 1} \Pi(z) =\lim_{z\to 1} \frac{\Pi_0[(1-z)k'(z)-k(z)]}{k'(z)-1}$$

$$=\lim_{z\to 1} \frac{\Pi_0[(1-z)k'(z)]-\Pi_0[k(z)]}{k'(z)-1}$$

$$=\frac{-\Pi_0k(1)}{k'(1)-1} =\frac{\Pi_0}{1-\rho}$$

o $\Pi_0 =1-\rho$

Nótese que la probabilidad de que el sistema este vacío $1-\rho$ es la misma que para el modelo M M 1.

Antes de continuar con el desarrollo se demuestra que la distribución de probabilidad encontrada es decir la probabilidad de encontrar n en el sistema en un punto de salida es igual a la probabilidad de encontrar n en el sistema en un punto arbitrario.

Se empieza por hacer las siguientes observaciones, si se sigue el estado del sistema (número de clientes en el) de manera continua para un tiempo suficientemente pequeño las transiciones de este es únicamente a sus vecinos mas próximos. En particular si E_n es el estado del sistema cuando hay n clientes entonces sólo son posibles las transiciones $E_n\rightarrow E_{n+1}$, $E_n\rightarrow E_{n-1}$ (donde la última sólo es posibles si $(k\geq 1)$. Una vez hecho esto considérese un intervalo de tiempo de longitud T y sea $A_n(t)$ el número de transiciones de $E_n\rightarrow E_{n+1}$ en un intervalo de tiempo $(0,t)$ pudiéndose entender esta como el número de arribos individuales ocurridos en $(0,t)$ y sea $D_n(t)$ el número de transiciones de $E_n\rightarrow E_{n-1}$ en un intervalo de tiempo $(0,t)$ entendiéndose esto como el número de salidas individuales ocurridas en (0,t). Puesto que las llegadas ocurren individualmente, los clientes son servidos individualmente y se supone flujo continuo en el sistema (esto es llegada-salida, salida-llegada) se tiene que:

$$|A_n(T)-D_n(T)| \leq 1 \qquad (1)$$

Suponiendo que el sistema no se satura ($\rho<1$) después de que el sistema esta en operación una longitud arbitraria de tiempo el número de transiciones hacia arriba (arribos) debe ser prácticamente igual al número de transiciones hacia abajo (salidas) esto es

$$\lim_{T\to\infty} \frac{D(T)}{A(T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{A(T)}{D(T)} = 1 \quad \text{o} \quad \lim_{T\to\infty} \frac{A(T)}{D(T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{A(T)}{A(T)} = 1 \quad \text{con probabilidad 1} \qquad (2)$$

dividiendo 1 por A(T) y tomando límite cuando $T\to\infty$ se tiene

$$\lim_{T\to\infty} \left| \frac{A_n(T)}{A(T)} - \frac{D_n(T)}{A(T)} \right| \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{A(T)}$$

puesto que $\lim_{T\to\infty} A(T) = \infty$ se tiene que

$$\lim_{T\to\infty} \left| \frac{A_n(T)}{A(T)} - \frac{D_n(T)}{A(T)} \right| \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \left| \frac{A_n(T)}{A(T)} - \frac{D_n(T)}{A(T)} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{A_n(T)}{A(T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{D_n(T)}{A(T)} \qquad (3)$$

usando 2 se tiene que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A_n(T)}{A(T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{D_n(T)}{A(T)} .1 = \lim_{T\to\infty} \frac{D_n(T)}{A(T)} . \lim_{T\to\infty} \frac{A(T)}{D(T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{D_n(T)}{A(T)} . \frac{A(T)}{D(T)}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{D_n(T)}{D(T)} \qquad (4)$$

Puesto que los arribos ocurren en puntos de un proceso Poisson operando independientemente de el estado del sistema, se tiene que $\lim_{T\to\infty} \frac{A_n(T)}{A(T)} = P_n$ además puesto que por definición $\lim_{T\to\infty} \frac{D_n(T)}{D(T)} = \Pi_n$

de 4 se tiene finalmente que $\Pi_n = \lim_{T\to\infty} \frac{D_n(T)}{D(T)} = \lim_{T\to\infty} \frac{A_n(T)}{A(T)} = P_n$

$\therefore \Pi_n = P_n$

Una vez hecho lo anterior resulta que

$$\Pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = P(z)$$

así $\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)k(z)}{k(z)-z}$ (10)

entonces por el Teorema A.1.2 puesto que $\Pi'(1)=E(N)=L$

se tiene que

$$\Pi'(z) = \frac{(k(z)-z)(1-\rho)[(1-z)k'(z)-k(z)]-(1-\rho)(1-z)k(z)[k'(z)-1]}{(k(z)-z)^2}$$

$$\Pi'(1) = \frac{(k(1)-1)(1-\rho)[0-k(1)]-(1-\rho)(1-1)(k(1))[k'(1)-1]}{(k(1)-1)^2} = \frac{0}{0}$$

aplicando otra vez regla de H'opital y simplificando términos

$$\Pi''(z) = \frac{(1-\rho)[(k(z)-z)[(1-z)k''(z)-2k'(z)]-[1-z]k(z)k''(z)}{2(k(z)-z)(k'(z)-1)}$$

$$\therefore \lim_{z\to 1} \Pi''(z) = \frac{(1-\rho)[-2k'(1)]}{2(k(1)-1)} - \lim_{z\to 1} \frac{(1-\rho)[1-z]k(z)k''(z)}{2(k(z)-z)[k'(z)-1]}$$

$$= -\frac{(1-\rho)[2\rho]}{2(\rho-1)} - (1-\rho)\lim_{z\to 1}\frac{(1-z)k(z)}{2(k(z)-z)} \cdot \lim_{z\to 1}\frac{k''(z)}{k'(z)-1}$$

$$= \rho - (1-\rho) \cdot \lim_{z\to 1}\frac{(1-z)k(z)}{2(k(z)-z)} \cdot \frac{k''(1)}{\rho-1}$$

obs. $\lim_{z\to 1} \frac{[1-z]k(z)}{2(k(z)-z)} = \frac{0}{0}$

Por lo tanto aplicando H'opital

$$\lim_{z\to 1} \frac{[1-z]k(z)}{2(k(z)-z)} = \lim_{z\to 1} \frac{[1-z]k'(z)-k(z)}{2(k'(z)-1)}$$

$$= \frac{-k(1)}{2(\rho-1)} = \frac{1}{2(1-\rho)}$$

$$\therefore \lim_{z\to 1} \Pi''(z) = \rho+(1-\rho)\left(\frac{1}{2(1-\rho)} \cdot \frac{k''(1)}{(1-\rho)}\right)$$

$$= \rho + \frac{k''(1)}{2(1-\rho)} \qquad (11)$$

Por consiguiente

$$L=\Pi'(1) = \rho + \frac{k''(1)}{2(1-\rho)}$$

Para encontrar el valor de $k''(1)$ considérese la transformada de Laplace de s denotada $\mathcal{L}(w_s(\theta))=(w_s^*(\theta))$ por el Teorema A.1.3

$$E(s) = -\frac{dw_s^*(\theta)}{d\theta}\Big/_{\theta=0} = -w_s^{*\prime}(0) \qquad (12)$$

$$E(s^2) = \frac{d^2 w_s^*(\theta)}{d\theta^2}\Big/_{\theta=0} = w_s^{*''}(0) \qquad (13)$$

de $k(z)=k_0+k_1z+k_2z^2+\ldots=\sum_{j=0}^{\infty} k_j z^j \quad |z|<1$ la función generatriz de k

se tiene que $k'(z)=\sum_{j=1}^{\infty} jk_j z^{j-1}$

$$k''(z)=\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)k_j z^{j-2}$$

así $k''(1)=\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)k_j =E(N_s(N_s-1))=E(N_s^2)-E(N_s)$

$\therefore\ E(N_s^2)=k''(1)+k'(1)$

o también

$$k(z)=\sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n =\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda tz)^j}{j!}\, dw_s(t)$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, e^{\lambda tz} dw_s(t) =\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda z)t}\, dw_s(t)$$

$$=w_s^*(\lambda-\lambda z) \qquad (14) \qquad (1)$$

Esto es la función generatriz de $[k_n]$ puede ser representada como la transformada de Laplace-Stieljes $w_s^*(\theta)$ del tiempo de servicio s calculado en $\theta=\lambda(1-z)$ de (14) se tiene que:

$$k'(z)=-\lambda w_s^{*'}(\lambda-\lambda z) \text{ y } k''(z)=\lambda^2 w_s^{*''}(\lambda-\lambda z) \qquad (15)$$

de 12 y 13 se tiene que:

$$k'(1)=-\lambda w_s^{*'}(0)=\lambda E(s)=\rho \qquad (16)$$

$$k''(1)=\lambda^2 w_s^{*''}(0)=\lambda^2 E(s)=\lambda^2 E(s^2) \qquad (17)$$

sustituyendo 17 en 11 se tiene que:

$$L=E(N)=\rho+\frac{\lambda^2 E(s^2)}{2(1-\rho)} =\rho+\frac{\lambda^2[E(s^2)-[E(s)]^2]+\lambda^2[E(s)]^2}{2(1-\rho)}$$

$$=\rho+\frac{\lambda^2 Var(s)+\rho^2}{2(1-\rho)} \qquad (18)$$

y para calcular $E(N_s^2)$ se tiene $E(N_s^2)=k''(1)+k'(1)$
$=\lambda^2 E(s^2)+\rho$

y así es posible saber la varianza de la v.a. N_s.

Ahora por la ley de probabilidad total

$$P_n=\int_0^\infty P[n \text{ arribos durante } w|w=t]dw(t)$$

donde w(t) es la función de distribución del tiempo de espera en el sistema obsérvese que

$$P[n \text{ arribos durante } w|w=t]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Por lo tanto se tiene que

$$P_n=\Pi_n=\int_0^\infty P[n \text{ arribos durante } w|w=t]dw(t)$$
$$=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\,dw(t)$$

de donde

$$\Pi(z)=P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\,dw(t)z^n$$
$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda tz)^n}{n!}\,dw(t)$$
$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,e^{(\lambda tz)}dw(t)=\int_0^\infty e^{-\lambda t(1-z)}\,dw(t)$$
$$=w^*[\lambda(1-z)] \qquad (19)$$

donde $w^*(\theta)$ es la transformada de Laplace -Stieljes para el tiempo de espera en el sistema

por consiguiente $$\frac{dP(z)}{dz}=\frac{dw^*(v)}{dv}\frac{dv}{dz}\Bigg/_{v=\lambda(1-z)} = \frac{-\lambda dw^*(v)}{dv}\Bigg/_{v=\lambda(1-z)}$$
$$=\lambda\int_0^\infty te^{-\lambda t(1-z)}\,dw(t)$$

así por el Teorema A.1.2

$$L= E(N)=\frac{dP(z)}{dz}\Bigg/_{z=1}=\lambda\int_0^\infty tdw(t)=\lambda E(w)=\lambda w.$$

finalmente se relacionan las formulas encontradas mediante las cuales es posible encontrar P_n, $w_q(t)$, $w_T(t)$

Sustituyendo 14 en 10 se tiene

$$\Pi(z)=p(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)w_s^*[\lambda(1-z)]}{w_s^*[\lambda(1-z)]-z}$$ ecuación transformada de I Pollaczek-khintchine

sustituyendo 19 en I

$$w^*(\lambda(1-z))=\frac{(1-\rho)(1-z)w_s^*[\lambda(1-z)]}{w_s^*[\lambda(1-z)]-z} \quad \text{haciendo } \theta=\lambda(1-z)$$

$$=\frac{(1-\rho)\lambda(1-z)w_s^*(\theta)}{\lambda w_s^*(\theta)+\lambda(1-z)-\lambda}$$

$$=\frac{(1-\rho)\theta w_s^*(\theta)}{\lambda w_s^*(\theta)+\lambda(1-z)-\lambda} = \frac{(1-\rho)\theta w_s^*(\theta)}{\theta+\lambda[w_s^*(\theta)-1]} \qquad \text{II}$$

como $w=T_q+T_s$ por el Teorema A.1.3

$$w^*(\theta)=w_q^*(\theta)w_s^*(\theta)$$

de tal suerte que por la unicidad de la transformada de Laplace

$$w_q^* = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta+\lambda[w_s^*(\theta)-1]} \qquad \text{III}$$

EJEMPLO

Supongamos que lo función de distribución de las tiempos de servicio tienen una distribución exponencial con parametro μ

así $W_s^*(\theta)=\frac{\mu}{\mu+\theta}$ de I

$$P(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)\overline{(\mu+\lambda(1-z))}^{\,\mu}}{[\mu/(\mu+\lambda(1-z))]-z} = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu-z[\mu+\lambda(1-z)]}$$

$$= \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z[1+(\lambda/\mu)(1-z)]} \qquad \text{como } \rho=\frac{\lambda}{\mu}$$

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{(1-z)-(1-z)\rho z}$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho z} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho)(\rho z)^n \qquad \text{si } |\rho z|<1$$

$\therefore P_n=(1-\rho)\rho^n \qquad n=0,1,2,\ldots$

ahora para encontrar el tiempo de espera en el sistema.

Se tiene de II

$$W^*(\theta)=\frac{(1-\rho)\theta\left(\frac{\mu}{\mu+\theta}\right)}{\theta+\lambda\left[\frac{\mu}{\mu+\theta}-1\right]} = \frac{(1-\rho)\theta\mu}{\theta(\mu+\theta)+\lambda(\mu-\mu-\theta)}$$

$$= \frac{(1-\rho)\theta}{(\theta/\mu)(\theta+\mu)-\rho\theta} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+\theta}$$

así aplicando transformada inversa o simplemente notando que $\frac{1}{\mu(1-\rho)+\theta}$ es la transformada inversa de una v.a. exponencial con parámetro $\mu(1-\rho)$ se tiene que

$$w(t)=\mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad t\geq 0$$

y $$W(t)=1-e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad t\geq 0$$

y para la función de distribución del tiempo en cola de III

$$W_q^*(\theta)=\frac{(1-\rho)\theta}{\theta+\lambda\left[\frac{\mu}{\mu+\theta}-1\right]} = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta-\lambda+\frac{\lambda\mu}{\theta+\mu}} = \frac{(\theta+\mu)(1-\rho)}{\theta+(\mu-\lambda)}$$

y así $$W_q^*(\theta)=\frac{(\theta+\mu)(1-\rho)}{\theta+(\mu-\lambda)}$$

$$=(1-\rho)+\frac{\lambda(1-\rho)}{\theta+\mu(1-\rho)}$$

aplicando transformada inversa

$$W_q(t)=(1-\rho)\delta(t)+\lambda(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad t\geq 0$$

donde $\delta(t)$ es la función Delta de Dirac

$\therefore$ $W_q(t)=1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}$ $t\geq 0$ es la función de distribución del tiempo de espera en cola, lo cual concuerda con los resultados anteriores.

EJEMPLO M|E_k|1

Antes de seguir con la aplicación de los resultados dados anteriormente es conveniente hacer el siguiente paréntesis, recuérdese que la función de densidad de una distribución k-Erlang esta dada por

$$f(t)=\frac{(\mu k)^k\, t^{k-1} e^{-k\mu t}}{k-1!} \qquad t\geq 0$$

donde $E(t)=\frac{1}{\mu}$ $\qquad V(t)=\frac{1}{(k\mu)^2}$

Y que si se considera la suma de k variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente entonces la distribución de la suma es una distribución de tipo k-Erlang. Esto permite considerar un modelo de colas en el cual el servicio puede consistir en una serie de idénticas fases, precisando supóngase que el tiempo requerido para realizar cierto tipo de servicio que necesita un cliente incluye una secuencia de k-etapas realizadas por un servidor, si las etapas respectivas tienen una distribución exponencial idénticas para su duración el tiempo total de servicio tendrá una distribución k-Erlang. Obsérvese que esto implica que las fases de servicio son independientes e idénticamente distribuidas y que por haber un único servidor sólo un cliente puede estar en el mecanismo de servicio en el tiempo t, es decir deberá terminar todas las fases de servicio antes de que el nuevo cliente entre a servicio. Estas consideraciones permiten analizar el siguiente modelo. $M|E_k|1$. Llegadas Poisson, servicio k-Erlang y un servidor.

Se quiere encontrar la distribución de probabilidad para este sistema de I

$$\Pi(z)=P(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)w_s^*(\lambda(1-z))}{w_s^*(\lambda(1-z))-z}$$

donde $w_s^*(\lambda(1-z))$ es la transformada de Laplace-Stieljes de la función de distribución del tiempo de servicio, en este caso como el tiempo de servicio tienen una distribución k-Erlang se tiene que

$$w_s^*=\int_0^\infty \frac{(\mu k)^k\, t^{k-1}}{k-1!}\, e^{-(k\mu+s)t}\, dt$$

de la cual integrando por partes se se tiene que

$$w_s^*=\frac{(\mu k)^k}{k-1!}\,\frac{(k-1)(k-2)\ldots 2(1)}{(k\mu+s)^k}=\frac{(\mu k)^k\; k-1!}{k-1!\;(k\mu+s)^k}$$

$$=\left(\frac{1}{1+\frac{s}{k\mu}}\right)^k=\frac{1}{\left[1+\frac{s}{k\mu}\right]^k}$$

y así $w_s^*(\lambda(1-z))=\dfrac{1}{\left[1+\frac{\lambda}{k\mu}(1-z)\right]^k}$

Por consiguiente de I.

$$\Pi(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)\Big/\left[1+\frac{\lambda}{k\mu}(1-z)\right]^k}{\dfrac{1}{\left[1+\frac{\lambda}{k\mu}(1-z)\right]^k}-z}$$

$$=\frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z\left[1+\frac{\lambda}{k\mu}(1-z)\right]^k}\qquad \rho=\frac{\lambda}{\mu}$$

y expandiendo esta ecuación en serie de Maclaurin se encuentran la distribución de probabilidad.
(Una deducción de estas probabilidades pueden ser encontradas en Harris y Gross "Fundamentos de Teoría de colas." pág. 243). En particular para el caso de k=2 se tiene que

$$P(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z\left[\frac{\rho}{2}(1-z)+1\right]^2}$$

$$= \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z\left[\frac{\rho^2(1-z)^2}{4} + \rho(1-z)+1\right]} = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z\frac{\rho^2(1-z)}{4} - z\rho(1-z)+z}$$

$$= \frac{4(1-\rho)(1-z)}{4-z\rho^2(1-z)^2 -4z\rho(1-z)-4z}$$

$$= \frac{4(1-\rho)}{\rho^2z^2 -\rho(\rho+4)z+4}$$

Haciendo $f(z)= \rho^2z^2-\rho(\rho+4)z+4$ se tiene que las raíces de esta ecuación están dadas por

$$z = \frac{\rho(\rho+4) \pm \sqrt{\rho^2(\rho^2+4)-16\rho^2}}{2\rho^2}$$

o bien $z_1=\dfrac{(\rho+4)+\sqrt{\rho(\rho+8)}}{2\rho}$

$$z_2=\frac{(\rho+4)-\sqrt{\rho(\rho+8)}}{2\rho}$$

Por consiguiente la factorización de f(z) en términos de sus raíces son :

$$f(z)=\rho^2(z-z_1)(z-z_2)$$

así $p(z)= \dfrac{4(1-\rho)}{\rho^2(z-z_1)(z-z_2)}$ y como $\dfrac{1}{z-z_1} - \dfrac{1}{z-z_2} = \dfrac{\frac{\sqrt{\rho(\rho+8)}}{\rho}}{(z-z_1)(z-z_2)}$

$$\therefore P(z) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho(\rho+8)}} \frac{4(1-\rho)}{\rho^2}\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right) = \frac{4(1-\rho)}{\rho\sqrt{\rho(\rho+8)}}\left(\frac{1}{z_2-z} - \frac{1}{z_1-z}\right)$$

multiplicando el primer término de la resta arriba y abajo por $1/z_2$ y el segundo por $1/z_1$ se tiene que

$$P(z) = \frac{4(1-\rho)}{\rho\sqrt{\rho(\rho+8)}}\left(\frac{\frac{1}{z_2}}{1-\frac{z}{z_2}} - \frac{\frac{1}{z_1}}{1-\frac{z}{z_1}}\right)$$

ahora $\dfrac{1}{1-\frac{z}{z_2}} = 1 +\left(\dfrac{z}{z_2}\right)+\left(\dfrac{z}{z_2}\right)^2 +\left(\dfrac{z}{z_2}\right)^3 +\ldots+$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = 1 +\left(\frac{z}{z_1}\right)+\left(\frac{z}{z_1}\right)^2 +\left(\frac{z}{z_1}\right)^3 +\ldots+$$

así $P(z)=\dfrac{4(1-\rho)}{\rho\sqrt{\rho(\rho+8)}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{z_2}\left(\frac{1}{z_2}\right)^n-\frac{1}{z_1}\left(\frac{1}{z_1}\right)^n\right]z^n$

$\therefore\ P_n=\dfrac{4(1-\rho)}{\rho\sqrt{\rho(\rho+8)}}\left(\frac{1}{z_2^{n+1}}-\frac{1}{z_1^{n+1}}\right)$

2.3.14 MODELO G|M|1

En este modelo se supone que los tiempos de servicio son exponenciales y que los tiempos de interarribo son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. La tasa media de arribos es λ y la tasa media de servicio es μ al igual que en el modelo anterior una cadena de Markov Inmersa es utilizada como aproximación para los resultados dados. A diferencia del sistema M|G|1 en donde X_n es el número de clientes que quedan en el sistema cuando sale en n-ésimo cliente ahora X_n representa el número de clientes en el sistema cuando llega el n-ésimo cliente. Obsérvese que en éste caso.

$$X_{n+1}=X_n+1-\beta_n \qquad (1)$$

Es decir el número de clientes justamente antes del (n+1) arribo es igual al número de clientes justamente antes del n-ésimo arribo mas el n-ésimo cliente (llego)) menos el numero de clientes servidos durante el intervalo de tiempo $T^{(n)}$ entre el n-ésimo y el (n+1)-ésimo arribo. Puesto que los tiempos de interarribo son independiente la variable aleatoria $T^{(n)}$ puede ser denotada únicamente por T, sea A(t) su función de distribución acumulativa; también la v.a. β_n depende sólo de la longitud del intervalo y no de la extensión del servicio recibido (perdida de memoria) y por consiguiente puede ser denotada por β, así x_{n+1} depende únicamente de β y x_n y por consiguiente la cadena es de Markov.

Sean ahora

$$b_n=P[\beta=n]=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\mu t}(\mu t)^n}{n!}\,dA(t) \qquad n=0,1,2,..$$

se tiene entonces de 1 que

$$P_{ij}=P_r[x_{n+1}=j\mid x_n=i]=P[\beta=i-j+1]=\begin{cases} b_{i-j+1} & i\geq j-1\\ 0 & i<j-1\end{cases}$$

para j=0

$$P_{i0}=P[\beta\geq i+1]=\sum_{r=i+1}^{\infty}b_r=1-\sum_{r=0}^{i}b_r=B_i$$

por consiguiente

si $b_n = P_r[$n servicios durante un tiempo de interarribo $T=t]$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^n}{n!}\, dA(t)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} b_{i-j+1} & i \geq j-1 \quad j \geq 1 \\ 1-\sum_{r=0}^{i} b_r & i \geq 0 \quad j=0 \\ 0 & \text{O.L.} \end{cases} \qquad (2)$$

$$\text{así } [P_{ij}] = P = \begin{bmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1-\sum_{r=0}^{1} b_i & b_1 & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1-\sum_{r=0}^{2} b_r & b_2 & b_1 & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1-\sum_{r=0}^{3} b_r & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad (3)$$

por inspección en 3 se tiene que la cadena es irreducible y aperiódica. Además intuitivamente el sistema es estacionario si $E(\beta)>1$ es decir si el número promedio de clientes servidos durante un período de interarribo es mayor que 1

por definición se tiene que $E(\beta)=\sum_{n=0}^{\infty} nb_n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^n}{n!}\, dA(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{(n-1)!}\, dA(t)$$

$$= \mu \int_0^\infty t e^{-\mu t+\mu t}\, dA(t)$$

$$= \mu \int_0^\infty t\, dA(t)$$

$$\therefore E(\beta)=\mu \int_0^\infty t\, dA(t) = \mu \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} > 1 \quad \text{donde } \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty t\, dA(t) = E(T)$$

si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow \frac{1}{\rho} > 1 \rightarrow \rho < 1$

enseguida se prueba que la distribución estacionaría existe si

$E(\beta)>1$ o equivalentemente si $\rho<1$.

Para ello se considera la ecuación vectorial $q=qp$ donde $q=(q_0,q_1,\ldots)$

$$(q_0,q_1,\ldots,q_n\ldots)=(q_0,q_1,\ldots,q_n\ldots)\begin{bmatrix} B_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_1 & b_1 & b_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_2 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

se tiene que

i) $q_o=\sum_{l=0}^{\infty} q_l\ (1-\sum_{k=0}^{l} b_k)$

ii) $q_j=\sum_{i=j-1}^{\infty} q_i\ b_{i-j+1}\qquad j=1,2,3,\ldots$

Considérese ahora la solución $q_j=z^j\quad (0<z<1\quad j=0,1,2,\ldots)$

obsérvese que $0<z<1$ ya que si $z=0\quad q_j=0$ y si $z\geq1\quad \sum_{j=1}^{\infty} q_j\geq1$ y por

consiguiente no seria una distribución de probabilidad.

Sea $\beta(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\ z^k$ la función generatriz para b_k

Se afirma que $\beta(z)$ satisface la ecuación $\beta(z)=z$ en efecto para $j\geq1$ y $q_j=z^j$ de (ii) se tiene que

$z^j=\sum_{i=j-1}^{\infty} z^i\ b_{i-j+1}$ haciendo $k=i-j+1 \rightarrow i=k+j-1$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+j-1}\ b_k=z^{j-1}\sum_{k=0}^{\infty} z^k b_k=z^{j-1}\ \beta(z)$$

$\therefore\ \beta(z)=z$

para $j=o$ $q_j=z^j$ de (i) se tiene también que $\beta(z)=z$.

Se prueba ahora que la ecuación anterior sólo tiene una raíz entre 0 y 1.

Para esto considérese $y=\beta(z)$
$y=z$

Como $\beta(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\ z^k = b_0+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\ z^k$

$\Rightarrow 0<\beta(0)=b_0<1$

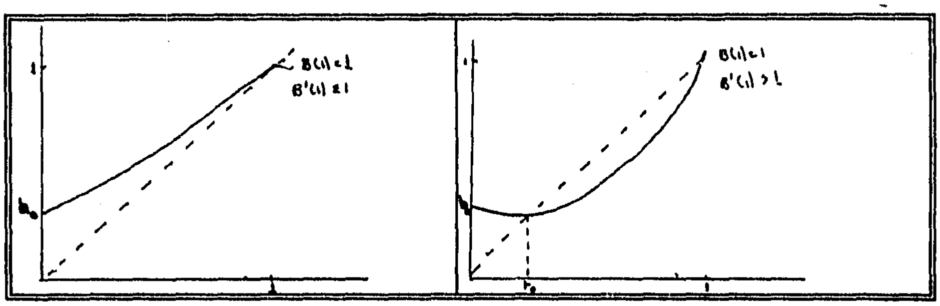
y $\beta(1)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k =1$

También $\beta'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} kb_k z^{k-1} \geq 0$

y $\beta''(z)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)b_k z^{k-2} \geq 0$

puesto que los tiempos de servicio son exponenciales se tiene que $b_k>0 \ \forall \ k\geq 2$

$\therefore$ $\beta''(z)>0$ y por consiguiente $\beta(z)$ es estrictamente convexa, graficando las ecuaciones $y=\beta(z)$ y $y=z$ se tiene dos posibilidades de intersección.



Esto es, se intersectan en uno ó bien solo hay un punto de intersección en (0,1).

Por consiguiente $y=\beta(z)$ tiene una solución en el intervalo (0,1) si en $z=1$

$\beta'(1)>1$ y en caso contrario $\beta'(1)\leq 1$ y $\sum_{i=0}^{\infty} q_i =\infty$

Puesto que $\beta'(1)$ =E[numero de servicios durante un período de interarrivo]$=\mu \cdot \frac{1}{\lambda}>1$

se tiene que $\frac{1}{\rho} > 1$ o equivalentemente si $\rho < 1$ es una condición necesaria y suficiente para que la cadena sea ergódica.

Así la solución para $\beta(z)=z$ y por consiguiente para el sistema es

$q_i=Cr_0^{\,i}$ $\quad i\geq 0 \quad 0<r_0<1$

Para determinar el valor de C considérese $\sum_{i=0}^{\infty} q_i=\sum_{i=0}^{\infty} Cr_0^{\,i} = C\dfrac{1}{1-r_0} = 1$

$\Rightarrow C=1-r_0$

Por tanto la probabilidad estacionaría de que un cliente que llegue encuentre i clientes en el sistema es:

$$q_i=(1-r_0)r_0^{\,i} \qquad i=0,1,2\ldots$$

Por consiguiente

$$L=E(N)=\frac{r_0}{1-r_0} \qquad y \quad L_q=\frac{r_0^2}{1-r_0}$$

Obsérvese que la distribución de probabilidad encontrada es para el número de clientes que un arribo encuentra en el sistema y es distinta de P_n el número de clientes en el sistema, hábida cuenta de esto obsérvese que las distribuciones de los tiempos de espera en el sistema y en la cola se pueden deducir de las ya demostradas para M/M/1 tomando $\rho=r_0$

Como una última observación considérese

$$
\begin{aligned}
\beta(z)=z \Rightarrow z&=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \\
&=\sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^k}{k!}\, dA(t) \\
&=\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t z)^k}{k!}\, dA(t) \\
&=\int_0^{\infty} e^{-\mu t}\, e^{\mu t z}\, dA(t) \\
&=\int_0^{\infty} e^{-(\mu-\mu z)t}\, dA(t) \\
&=\int_0^{\infty} A^*(\mu-\mu z)=A^*(\mu(1-z))
\end{aligned}
$$

así para encontrar la raíz r_0 basta resolver $r_0 = A^*(\mu(1-r_0))$

Ejemplo

Considérese ahora el caso H_2/M/1 en el cual los tiempos de interarrivos tienen una distribución hyperexponencial es decir

$$\alpha(t)=\alpha_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\alpha_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

se tiene que $A^*(s)= \dfrac{\alpha_1\lambda_1}{\lambda_1+s} + \dfrac{\alpha_2\lambda_2}{\lambda_2+s}$

y donde $E(T)=\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\alpha_1}{\lambda_1} + \dfrac{\alpha_2}{\lambda_2}$

así $r_0=A^*(\mu(1-r_0))$

$\Rightarrow r_0 = \dfrac{\alpha_1\lambda_1}{\lambda_1+\mu(1-r_0)} + \dfrac{\alpha_2\lambda_2}{\lambda_2+\mu(1-r_0)}$

$\Rightarrow r_0 = \dfrac{\alpha_1\lambda_1(\lambda_2+\mu(1-r_0)) + \alpha_2\lambda_2(\lambda_1+\mu(1-r_0))}{(\lambda_1+\mu(1-r_0))(\lambda_2+\mu(1-r_0))}$

$\Rightarrow r_0(\lambda_1+\mu(1-r_0))(\lambda_2+\mu(1-r_0))=\alpha_1\lambda_1(\lambda_2+\mu(1-r_0) + \alpha_2\lambda_2(\lambda_1+\mu(1-r_0))$

reduciendo términos y agrupando en términos de r_0 se tiene que

$$r_0^3+ \left(-\frac{\lambda_1}{\mu} -\frac{\lambda_2}{\mu} -2 \right)r_0^2+\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\frac{\lambda_2}{\mu}+\frac{\lambda_1}{\mu}+\frac{\lambda_2}{\mu}+1+\frac{\alpha_1\lambda_1}{\mu}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\mu}\right) r_0- \frac{\lambda_1}{\mu}\cdot\frac{\lambda_2}{\mu}-\left(\frac{\alpha_1\lambda_1}{\mu}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\mu}\right) = 0$$

haciendo $r_0=1$ se tiene que la ecuación anterior es satisfecha y así $r_0=1$ es raíz de la ecuación

Por tanto

$$r_0^3+\left(-\frac{\lambda_1}{\mu} -\frac{\lambda_2}{\mu}-2\right) r_0^2+\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\frac{\lambda_2}{\mu}+\frac{\lambda_1}{\mu}+\frac{\lambda_2}{\mu}+1+\frac{\alpha_1\lambda_1}{\mu}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\mu}\right) r_0-\frac{\lambda_1}{\mu}\cdot\frac{\lambda_2}{\mu} -\left(\frac{\alpha_1\lambda_1}{\mu}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\mu}\right)= 0$$

puede ser factorizando como

$$(r_0-1) \left(r_0^2+\left(-\frac{\lambda_1}{\mu} -\frac{\lambda_2}{\mu}-1\right) r_0+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu^2}+\frac{\alpha_1\lambda_1}{\mu}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\mu} \right)=0$$

por tanto la raíz r_0 con $0<r_0<1$ esta dada por alguna de las siguientes ecuaciones

$$r_{01} =\frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}+\frac{\lambda_2}{\mu}+1\right) +\sqrt{\left(-\frac{\lambda_1}{\mu} -\frac{\lambda_2}{\mu}-1\right)^2 -4\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu^2}+\frac{\alpha_1\lambda_1}{\mu}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\mu}\right)}}{2}$$

$$r_{02} =\frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}+\frac{\lambda_2}{\mu}+1\right) -\sqrt{\left(-\frac{\lambda_1}{\mu} -\frac{\lambda_2}{\mu}-1\right)^2 -4\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu^2}+\frac{\alpha_1\lambda_1}{\mu}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\mu}\right)}}{2}$$

Por consiguiente si r_0' es la raíz (alguna de los anteriores) que satisface estar entre $0<r_0'<1$ se tiene que

$P_n =(1-r_0')(r_0')^n$

EJEMPLO

Considérese ahora el sistema de colas $E_2|M|1$ llegadas según una distribución 2-Erlang tiempo de servicio exponencial y un sólo servidor. Se esta interesado en encontrar la distribución de probabilidad del número de clientes que un cliente encuentra en el

sistema en el momento en que arriba se tiene que

$$r_0=A^*(\mu(1-r_0)) =\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+\mu(1-r_0)}\right)^2$$

$$\rightarrow r_0(2\lambda+\mu(1-r_0))^2 =(2\lambda)^2$$

$$\rightarrow r_0(2\frac{\lambda}{\mu}+\mu(1-r_0))^2 =(2\frac{\lambda}{\mu})^2 \qquad \text{haciendo } \rho =\frac{\lambda}{\mu} \text{ y desarrollando}$$

$$r_0^3-2(2\rho+1)r_0^2+(2\rho+1)^2r_0-4\rho^2 =0$$

puesto que para $r_0=1$, $1^3-2(2\rho+1)+(2\rho+1)^2-4\rho^2 =0$ se tiene que $r_0=1$ es una raíz de la ecuación anterior

$$\therefore r_0^3-2(2\rho+1)r_0^2+(2\rho+1)^2r_0-4\rho^2 =0$$

$$\rightarrow (r_0-1)(r_0^2+(-4\rho-1)r_0+4\rho^2)=0$$

$$\therefore r_0 =\frac{-(-4\rho-1) \pm \sqrt{(-4\rho-1)^2-4(4\rho^2)}}{2}$$

$$= 4\rho+1 \pm \frac{\sqrt{8\rho+1}}{2}$$

así $r_0=1$ $\qquad r_{01} =\frac{4\rho+1 + \sqrt{8\rho+1}}{2}$

$$r_{02} =\frac{4\rho+1 - \sqrt{8\rho+1}}{2}$$

obsérvese que $\quad r_{01} =\frac{4\rho+1 + \sqrt{8\rho+1}}{2} = 2\rho+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8\rho+1}}{2} \geq 2\rho+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq 1$

$\therefore$ la única raíz entre 0 y 1 es $r_0 =\frac{4\rho+1 - \sqrt{8\rho+1}}{2}$

$$\therefore P_n =\left(1- \frac{(4\rho+1)-\sqrt{8\rho+1}}{2}\right)\left(\frac{(4\rho+1)-\sqrt{8\rho+1}}{2}\right)^n \qquad n=0,1,2,\ldots$$

CAPITULO 3

APLICACION DEL MODELO DE REPARACION DE MAQUINAS.

En los capítulos anteriores se han revisado algunas de las características básicas de sistemas de líneas de espera y se han desarrollado, lo más detalladamente posible, los modelos clásicos; es claro que han quedado muchas situaciones de congestión sin ser analizadas; como por ejemplo (por mencionar solo una) aquellos en los cuales hay prioridad en el servicio, como en el caso de los hospitales, sin embargo dentro de lo posible se ha tratado de que los modelos vistos sirvan como punto de partida para profundizar sobre estudios relacionados con fenómenos de congestión.

En este capítulo lo que se pretende es llevar a la aplicación la teoría vista, para esto se analiza un problema de reparación de máquinas y se elabora un programa que simule una situación específica.

3.1 PROBLEMA DE REPARACION DE MAQUINAS.

Considérese N máquinas automáticas y M reparadores(mecánicos) encargados de su mantenimiento, supóngase que las máquinas son estadísticamente idénticas y que su número de fallos es una variable aleatoria con función de distribución exponencial caracterizada por el tiempo medio entre fallos; los reparadores (mecánicos) son también estadísticamente idénticos; y sus tiempos para completar una reparación es una variable aleatoria con función de distribución exponencial caracterizada por su valor esperado, se supondrá además que todos los elementos son estadísticamente independientes. Bajo estas consideraciones el programa dado en el apéndice A.5 simula esta situación y además suministra un análisis de flujo de caja que obtiene una relación máquina- reparadores, siempre que se conozcan los salarios de los mecánicos, la renta de las maquinas y los costos generales.

Para su utilización es necesario introducir el número de máquinas del sistema tiempo medio entre fallas por máquina, el número de reparadores y el tiempo medio en reparar una máquina , además el costo del reparador por unidad de tiempo, el costo de adquisición de una maquina por unidad de tiempo (gastos administrativos, depreciación, pago de arrendamiento, pago de seguros, etc.) y la renta producida por máquina por unidad de tiempo. Con base en la información anterior el programa suministra el número de máquinas que están funcionando; el número de máquinas que se están reparando, el número de máquinas en línea de espera, el tiempo medio bajo por máquina, el número de reparadores desocupados; el coeficiente de perdida por máquina y por reparador y la ganancia media que generan las máquinas.

La situación específica que se abordará, será el de determinar el número óptimo de operadores que generen la mayor ganancia, a partir de los datos de entrada dados a continuación.

Considérese como unidad de tiempo la hora y como unidad monetaria los N$, además se consideran los siguientes datos:

No. de máquinas: 40

Tiempo medio de falla por máquina: 400 hrs.

Tiempo medio para reparar una máquina: 24 hrs.

Costo por reparador: N$ 5

Costo de adquisición: N$ 2

Cantidad de dinero que puede producir una máquina: N$ 15

La siguiente tabla resume 10 corridas del programa del apéndice A.5, haciendo variar el número de reparadores.

No. DE SERV.	No. MAQ. OPER.	No. MAQ. INACT.	No.MAQ. EN LIN. ESPERA	No. REP. DESOC.	COEFI. DE PERDIDA POR MAQ.	COEFI.DE PERDIDA POR REP.	RENTA PRODU.
1	17	23	22	0	0.538	0	165
2	32	8	6	0	0.154	0.04	389
3	37	3	1	1	0.026	0.265	456
4	38	2	0	2	0.005	0.437	463
5	38	2	0	3	0.001	0.547	460
6	38	2	0	4	0.0003	0.622	456
7	38	2	0	5	0.00006	0.676	451
8	38	2	0	6	0.000012	0.716	446
9	38	2	0	7	0.000002	0.748	441
10	38	2	0	8	0	0.773	436

TABLA 3

3.2 CONCLUSIONES SOBRE EL PROBLEMA DE REPARACION DE MAQUINAS.

Con base en los resultados obtenidos por las 10 corridas del programa en las que se hizo variar el número de mecánicos y tomando en consideración los valores de la tabla 1, específicamente las rentas producidas, se tiene que el número óptimo de mecánicos es de 4, pues la renta producida es la mayor (N$ 463 por hora), también es conveniente notar que mientras mayor es el número de mecánicos para el mantenimiento de las máquinas, son más los que permanecen desocupados, reflejándose

ésto en el coeficiente de pérdida por reparador y en las ganancias obtenidas. Así mismo obsérvese que para el caso de tres y seis mecánicos la ganancia producida es la misma (N$ 456) ésto surge como consecuencia del hecho de que en el caso de tres mecánicos, todos están trabajando; no así en el de seis, en el cual sólo dos trabajan y el resto permanecen desocupados, por tal razón sería más conveniente contratar tres en lugar de seis mecánicos para mantenimiento.

Finalmente resulta claro que mientras más mecánicos (n>10) sean los encargados para dar mantenimiento a las máquinas menor será la renta producida, todo con base en las consideraciones anteriores.

APENDICE A

A.1 METODO DE TRANSFORMACION

Una manera alternativa (y muchas veces mas fácil) de calcular los momentos muestrales de una v. a. X la dan los métodos de transformación, por tal razón se inicia la sección con la siguiente

Definición A.1.1: la función generatriz de momentos $\psi_x(\cdot)$ de una v.a. X esta definida como

$$\psi_x(t) = E(e^{tx}) \ \forall\ t \in R \text{ tal que } E(e^{tx}) < \infty$$

Así

$$\psi_x(t) = \begin{cases} \Sigma\ e^{tx_i}p(x_i) & \text{si x es v.a.discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\ f(x)dx & \text{si x es v.a.continua} \end{cases}$$

Propiedades importantes de la función generatriz de momentos la da el siguiente

Teorema A.1.1: Sean X e Y v.a. con funciones generatriz de momentos $\Psi_x(\cdot)$, $\Psi_y(\cdot)$ entonces se tiene

a) $F_X = F_y$ si y solo si $\Psi_x(.) = \Psi_y(.)$ (unicidad)

b) $E(x) = \left.\frac{d^n\Psi(t)}{dt^n}\right|_{t=0}$

c) $\Psi_{x+y}(t) = \Psi_x(t)\Psi_y(t)\ \forall\ t$ si x e y son independientes

considérese ahora una v.a .X que toma solo valores positivos y sea $P(j)=P(x=j)=P_j$ $j=0,1,...$ entonces se define la función generatriz de X o la z- transformada de X de la siguiente manera

$$g(z)=\sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j = p_0+p_1z+p_2z^2 \ldots \quad si|z|\le 1$$

además $g(1)=1$

el siguiente teorema da algunas propiedades de la función generatriz definida anteriormente

Teorema A.1.2: sea X e Y v.a. discretas que toman sólo valores positivos se tiene entonces

a) X e Y tienen la misma distribución si y solo si $g_x(z)=g_y(z)$

b) $P_n=\frac{d^n g(z)}{n!\,dz^n}\Big|_{z=0}^{n=0,1,2\ldots}$

c) $E(x) = g'_x(1)$ y $V(x) = g''_x(1) + g'_x(1) - (g'_x(1))^2$

d) $g_{x+y}(z) = g_x(z)g_y(z)$ si X e Y son independientes.

Hábida cuenta de lo anterior se tiene la siguiente definición:

Definición A.1.2: Sea X una v. a. tal que $P(x<0) = 0$ se define la transformada de Laplace-Stieltjes de X de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(F(x)=X^*(\theta)=E(e^{-\theta x})= \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\theta x}dF(x) & \text{si x es continua y } \theta>0. \\ \Sigma\ e^{-\theta x}p(x) & \text{si x es discreta y } \theta>0. \end{cases}$$

por lo que respecta a la transformada de Laplace-Stieltjes el siguiente teorema proporciona algunas de sus propiedades.

Teorema A.1.3: X e Y v.a. con transformada de Laplace-Stieltjes $X^*(\cdot)$ y $Y^*(\cdot)$ entonces se tiene

a) $F_x = F_y$ si y solo si $X^*(\cdot) = Y^*(\cdot)$ (unicidad)

b) $\forall\ \theta > 0\ X^*(\theta)$ tiene derivadas de todos los órdenes dados por

$$\frac{d^nX^*}{d\theta^n} = \begin{cases} \int_0^\infty (-1)^n\ e^{-\theta x}X^n f(x)dx & \text{si x es continua} \\ (-1)^n\sum_i e^{-\theta x_i}X^n_i P(x_i) & \text{si x es discreta} \end{cases}$$

c) Si $E(X^n)\ \exists \rightarrow$

$$E(X^n) = (-1)^n\frac{d^nX^*}{d\theta^n}\Big|_{\theta=0}$$

En particular si $E(X)$ y $E(X^2)$ existen, entonces

$$E(X) = -\frac{dX^*}{d\theta}(0)$$

$$E(X^2) = +\frac{d^2X^*}{d\theta^2}(0)$$

d) $(X + Y)^*(\theta) = (X)^*(\theta)(Y)^*(\theta)$ si X e Y son independientes.

A.2 TIPOS DE CONVERGENCIA

Considérese una sucesión $\{X_n\}_{n\in N}$ de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio S, y sea X otra v.a. también definida en S. Bajo estas consideraciones se tiene los siguientes tipos de convergencias

1) Convergencia con probabilidad uno. La v.a. X_n se dice que converge a x con probabilidad uno si

$$P[\lim_{n\to\infty} X_n = x] = 1$$

2) Convergencia en probabilidad. La sucesión $\{X_n\}_{n\in N}$ se dice que converge en probabilidad a la v.a. X si $\forall\ \epsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n-x| >\epsilon\} = 0$$

3) Convergencia en media cuadrática. La sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ se dice que converge en media cuadrática a la v.a. X si

$$\lim_{n\to\infty} E((X_n-x)^2) = 0$$

4) Convergencia en distribución. Sean $F_n(x)$ y $F(x)$ funciones de distribución de las v.a. X_n y X, la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ converge en distribución a la v.a. X si y solo si siempre que X sea un punto de continuidad de F(x) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Con respecto a este último tipo de convergencia se tiene lo siguiente:

TEOREMA A.2.1: Sea $\{F_n(x)\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones de distribución con $\{\Phi_n(t)\}_{n\in N}$ sus correspondientes funciones características. Entonces $F_n(x)$ converge en distribución a F(x) si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = \Phi(t)\ \forall\ t$$

donde $\Phi(t)$ es continua en t = 0, además $\Phi(t)$ es la función característica de F(x).

Una propiedad útil acerca de sucesiones de sumas de variables aleatorias la da el conocido teorema central del límite.

TEOREMA A.2.2: Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de v.a. independientes con $E(X_k) = \mu_k < \infty$ y $V(X_k) = \sigma^2_k < \infty$ si

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \mu_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma^2_k}}$$

Entonces la v.a. Z_n converge en distribución a una v.a. que tiene distribución normal con media cero y varianza uno, con símbolos.

$$F_{zn}(x) \underset{d}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{(-y2)/2} dy$$

Considérese ahora una sucesión de variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita μ. Sea $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ y $X'_n = S_n/n$ se tiene entonces

1) Ley débil de los grandes numeros. X_n converge en probabilidad a μ , es decir

$$\lim P[| X_n - \mu| > \epsilon] = 0$$

2) Ley fuerte de los grandes números X_n converge a μ con probabilidad uno, es decir

$$P[\lim_{n\to\infty} X_n = \mu] = 1$$

finalmente son enunciadas tres desigualdades básicas en probabilidad:

Teorema A.2.3:

1) Desigualdad de Chebyshev: Sea X una v.a. con $E(x) = \mu$ y $V(x) = \sigma^2$ entonces $\forall\ \epsilon > 0$

$$P[| X - \mu| > \epsilon] \leq \sigma^2/\epsilon^2$$

o equivalentemente

$$P[| X - \mu| \leq \epsilon] \geq 1 - \sigma^2/\epsilon^2$$

2) Desigualdad de Chebyshev-Markov: Sea X una v.a. no negativa y supóngase que F(x) existe entonces

$$P[X>a] \leq \epsilon(x)/a$$

3) Desigualdad de Kolmogorov's

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes con $E(X_k^2) < \infty$ k=1..n.
Considérese: $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ entonces $\forall \epsilon > 0$

$$P(\max_{1\le k\le n} | S_k - E(S_k)| \geq \epsilon) \leq \sigma^2_{sn} / \epsilon^2$$

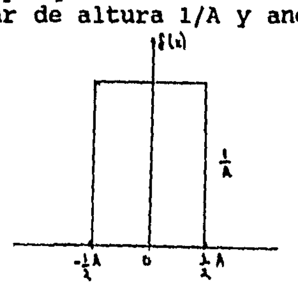
donde $\sigma^2 S_n = v(S_n)$.

A.3 FUNCION DELTA DE DIRAC

La función Delta de Dirac está definida de la siguiente manera:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es decir para puntos muy cercanos a cero la función se anula y en cero la función de un salto indefinido, se tiene además que la función Delta de Dirac es también conocida como la función impulso unitario, ya que puede ser considerada como el limite de un entorno rectangular de altura 1/A y ancho A



de tal manera que si hacemos que $A \to 0$ el área del rectángulo dada por $A \cdot 1/A = 1$ es constante e igual a 1 y se genera la función $\delta(x)$ que vale cero en $x \neq 0$ y en $x = 0$ da un salto indefinido.

De lo anterior se deduce la siguiente expresión para $\delta(x)$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } x \in \left[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right] \\ 0 & \text{O.L.} \end{cases}$$

de tal manera que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon} = 1$

Sea ahora g(x) una función continua y $\delta(x-a)$ la función Delta de Dirac definida por

$$\delta(x-a) = \lim_{\epsilon\to 0} \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } x \in \left(a-\frac{\epsilon}{2} , a+\frac{\epsilon}{2} \right) \\ 0 & \text{O.L.} \end{cases}$$

Se tiene entonces que la convolución de $\delta(x)$ y g(x) esta dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ \delta(x-a)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+a)\ \delta(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ g(x+a)\ dx$$
$$= g(x+a)\Big/_{x=0} = g(a)$$

La ultima igualdad se deduce del hecho $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ \delta(x)\ dx = g(0)$

ya que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ g(x)\ dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \frac{g(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{G(\epsilon/2) - G(-\epsilon/2)}{\epsilon}$

$$= g(0)$$

donde $G(t) = \int_0^t g(x)\ dx$

La transformada de Laplace de $\delta(x)$ esta dada por

$$\mathcal{L}(\delta(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ e^{-sx}\ dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon}\ e^{-sx}\ dx$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \left[\frac{e^{s\epsilon/2} - e^{-s\epsilon/2}}{s\epsilon} \right] \quad \text{Aplicando H'opital}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \left[\frac{e^{s\epsilon/2} + e^{-s\epsilon/2}}{2} \right] = 1$$

Finalmente, es posible probar que si x es una variable aleatoria discreta se tiene que

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j)\,\delta(x-x_j)$$

A.4 RELACION ENTRE ARRIBOS POISSON Y TIEMPOS DE SERVICIO EXPONENCIALES

Antes de probar el siguiente resultado es conveniente hacer algunas consideraciones, para esto considérese la realización de un cierto fenómeno en el tiempo y denotemos por W_n el tiempo transcurrido hasta que se registran n eventos; se definen los tiempos entre ocurrencias sucesivas T_1, T_2,... de la siguiente manera $T_1=T_1$, $T_j=T_j-T_{j-1}$, donde T_1 es el tiempo que transcurre desde t=0 hasta el primer evento y para j>1 T_j es el tiempo transcurrido desde el (j-1)-ésimo hasta el j-ésimo suceso obsérvese que $W_n=T_1+T_2+...+T_n$, además si N(t) representa el número de clientes en un sistema de servicio en el tiempo t y W_n= el tiempo que transcurre hasta la n-ésima llegada se tiene que $N(t)\leq n \leftrightarrow W_{n+1}>t \ \forall \ t>0$ y n=1,2,... también $N(t)=n \leftrightarrow W_n<t$ y $W_{n+1}>t \leftrightarrow W_n\leq t$ y no pasa $W_{n+1}<t$.

Por consiguiente:

i) $P[N(t)\leq n] = P[W_{n+1}>t]$

ii) $P[N(t)=n] = P[W_n\leq t] - P[W_{n+1}\leq t] = [1-P[W_n>t]] - [1-P[W_{n+1}>t]]$
$= P[W_{n+1}>t] - P[W_n>t]$
$= P[N(t)\leq n] - P[N(t)\leq n-1]$

iii) $P[N(t)=0] = 1-P[W_n\leq t]$

Utilizando estas consideraciones se demuestra el siguiente:

Teorema A.4.1: Supóngase que un proceso de arribos sigue una distribución Poisson y se asocia a este la v.a. T que denota el tiempo entre arribos sucesivos entonces la variable aleatoria T tiene una distribución exponencial recíprocamente si los tiempos de interarribo son independientes y tienen una distribución exponencial, entonces son admitidos según un proceso Poisson.

Demostración :

Para demostrar la primera parte, obsérvese que si ha ocurrido en este momento una llegada, el tiempo hasta la próxima llegada es mayor que t $\leftrightarrow$ no hay llegadas en t, por consiguiente se tiene $P[T>t] = P[N(t)=0] = e^{-\lambda t}$ de donde $P[T\leq t] = 1- e^{-\lambda t}$. Si se hace $F_T(t) = 1- e^{-\lambda t} = P[T\leq t] \rightarrow f_T(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$ la cual es la función de densidad de un V.A. exponencial.

Recíprocamente supongamos que los tiempos de interarribo (entre llegadas) son independientes y tienen una distribución exponencial. Considérese la función de distribución acumulada $P_r[N(t)\leq n] = P_n(t)$ se tiene que $P[N(t)=n] = P[N(t)\leq n]-P[N(t)\leq n-1]$ como $P[N(t)\leq n] = P[W_{n+1}>t] = P[T_1+T_2+...+T_{n+1}>t]$ y puesto que los tiempos entre arribos sucesivos T_i se distribuyen exponencialmente y son independientes, $W_{n+1}=T_1+T_2+...+T_{n+1}$ tiene una distribución (n+1) Erlang con parámetros λ

$$\therefore\ P[N(t)\le n] = P[W_{n+1}>t] = \int_t^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}\, dx$$

Si se hace μ = x-t se tiene

$$P[N(t)\le n] = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}(\mu+t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}\, e^{-\lambda\mu}\, d\mu = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}\, e^{-\lambda t}\, e^{-\lambda\mu}}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu^{n-i}\, t^i\, n!}{(n-i)!\,i!}$$

intercambiando los símbolos $\sum$ y $\int$ se tiene

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^{i+1}\, e^{-\lambda t}\, t^i}{(n-i)!\,i!} \int_0^{\infty} \lambda^{n-i}\, e^{-\lambda\mu}\, \mu^{n-i}\, d\mu = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^{i+1}\, e^{-\lambda t}\, t^i}{\lambda(n-i)!\,i!} \int_0^{\infty} e^{-v}\, v^{n-i}\, dv$$

haciendo $v=\lambda\mu$ $\quad dv=\lambda d\mu$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i\, e^{-\lambda t}\, t^i}{(n-i)!\,i!}\,(n-i)!$$

$$\therefore\ P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i\, e^{-\lambda t}\, t^i}{i!}$$

también $P_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i\, e^{-\lambda t}\, t^i}{i!}$

$$\therefore\ P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i\, e^{-\lambda t}\, t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i\, e^{-\lambda t}\, t^i}{i!} = \frac{(\lambda t)^n\, e^{-\lambda t}}{n!}$$

A.5 PROGRAMA DE REPARACION DE MAQUINAS

```
5 LPRINT
10 LPRINT "TEORIA DE COLAS"
20 REM__
30 DIM Q(100)
40 LPRINT
50 PRINT "ENTRA EL NUMERO DE MAQUINAS;DEBE EXCEDER A UNO"
60 INPUT N
65 LPRINT "ENTRA EL NUMERO DE MAQUINAS;DEBE EXCEDER A UNO"; N
70 PRINT "ENTRA EL TIEMPO MEDIO DE FALLA POR MAQUINA";
80 INPUT F1
85 LPRINT "ENTRA EL TIEMPO MEDIO DE FALLA POR"; F1
90 F = 1 / F1
```

```
100 PRINT "ENTRA EL NUMERO DE REPARADORES";
110 INPUT M
115 LPRINT "ENTRA EL NUMERO DE REPARADORES"; M
120 PRINT "ENTRA EL TIEMPO MEDIO DE REPARACION (POR MAQUINA) POR"
121 PRINT "REPARADOR"
130 INPUT R1
135 LPRINT "ENTRA EL TIEMPO MEDIO DE REPARACION (POR MAQUINA)"
136 LPRINT "POR REPARADOR"; R1
140 R = 1 / R1
150 LPRINT
160 REM__ INICIALIZACION DE VARIABLES
170 FOR i = 1 TO N + 1
180 Q(i) = 0
190 NEXT i
200 Q(1) = 1
210 E1 = 0
220 E2 = 0
230 E3 = 0
240 P0 = 0
250 REM__ CALCULO DE PROBABILIDADES POR MAQUINA
260 S = Q(1)
270 FOR J = 0 TO N - 1
280 REM__ K=MIN(J+1,M)
290 K = M
300 IF J + 1 > M THEN 320
310 K = J + 1
320 Q(J + 2) = (N - J) * F * Q(J + 1) / K / R
330 S = S + Q(J + 2)
340 NEXT J
350 IF Q(1) <> 1 THEN 380
360 Q(1) = 1 / S
370 GOTO 260
380 LPRINT
390 LPRINT "EL SISTEMA SE DICE QUE ESTA EN EL ESTADO J SI"
391 LPRINT "J-MAQUINAS ESTAN"
400 LPRINT "DESCOMPUESTAS. LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD"
401 LPRINT "ESTACIONARIA"
410 LPRINT "SOBRE LOS POSIBLES ESTADOS, 0 HASTA"; N; ",Y OTRAS"
420 LPRINT "CARACTERISTICAS DE INTERES SE DAN A CONTINUACION:"
430 LPRINT
440 LPRINT "ESTADO", "PROBABILIDAD",
442 LPRINT "No. MAQUINAS", "No. MAQUINAS", "No. REPARADORES"
450 LPRINT "    ", "    ", " OPERANDO", " ESPERANDO",
451 LPRINT " DESOCUPADOS"
460 FOR J = 1 TO N + 1
470 O = N - J + 1
480 W = J - M - 1
490 IF W > 0 THEN 520
500 W = 0
510 P0 = P0 + Q(J)
520 i = M - J + 1
530 IF i > 0 THEN 550
540 i = 0
550 IF i < M THEN 570
560 i = M
```

```
570 LPRINT USING " ##"; J - 1;
571 LPRINT USING ".#####"; TAB(18); Q(J);
572 LPRINT USING "###"; TAB(32); O;
573 LPRINT USING "###"; TAB(47); W;
574 LPRINT USING "###"; TAB(62); i
580 E1 = E1 + W * Q(J)
590 E2 = E2 + i * Q(J)
600 E3 = E3 + O * Q(J)
610 NEXT J
620 LPRINT
630 PRINT "PARA CONTINUAR,PRESIONE 'ENTER'1";
640 INPUT Z$
650 LPRINT
655 LPRINT "************************************************"
660 LPRINT TAB(15); "CARACTERISTICAS DEL SISTEMA"
670 LPRINT TAB(15); "____________________________"
680 LPRINT "No. DE MAQUINAS ="; N
690 LPRINT "TIEMPO MEDIO DE FALLA POR MAQUINA ="; F1; "UNIDADES"
691 LPRINT "DE TIEMPO"
700 LPRINT "No. DE REPARADORES ="; M
710 LPRINT "TIEMPO MEDIO DE REPARACION POR REPARADOR="; R1;
711 LPRINT "UNIDADES DE TIEMPO"
720 LPRINT "NUMERO DE MAQUINAS POR REPARADOR ="; N / M
730 LPRINT
740 LPRINT "PROB. (EL SISTEMA DE SERVICIO ESTE VACIO) ="; Q(1)
750 LPRINT "PROB.(NO HAYA MAQUINAS ESPERANDO PARA SER SERVIDAS)"
751 LPRINT " = "; P0
760 LPRINT
770 LPRINT "EXP. No. DE MAQUINAS OPERANDO ="; E3
780 LPRINT "EXP. No. DE MAQUINAS INACTIVAS ="; N - E3
790 LPRINT "EXP. No. DE MAQUINAS EN LINEA DE ESPERA ="; E1
810 LPRINT "TIEMPO MEDIO BAJO POR MAQUINA =";(N - E3) * F1 / E3;"
811 LPRINT "UNIDADES DE TIEMPO"
820 LPRINT "TIEMPO MEDIO DE ESPERA POR MAQUINA ="; E1 * F1 / E3;"
821 LPRINT "UNIDADES DE TIEMPO"
830 LPRINT "EXP. No. DE REPARADORES DESOCUPADOS ="; E2
840 LPRINT
850 PRINT "PARA CONTINUAR, PRESINE ENTER2";
860 INPUT Z$
870 LPRINT "'COEFICIENTE DE PERDIDA'POR MAQUINA = FRACCION DE"
871 LPRINT "TIEMPO EN"
880 LPRINT "QUE UNA MAQUINA ESTE 'INACTIVA' COMO UNA CONSE-"
881 LPRINT "CUENCIA DE LAS "
890 LPRINT "CARACTERISTICAS DEL SISTEMA ="; E1 / N
900 LPRINT
910 LPRINT "'COEFICIENTE DE PERDIDA' POR REPARADOR = FRACCION"
911 LPRINT " DE TIEMPO EN"
920 LPRINT "QUE UN REPARADOR ESTE DESOCUPADO COMO UNA"
921 LPRINT CONSECUENCIA DE LAS"
930 LPRINT "CARACTERISTICAS DEL SISTEMA ="; E2 / M
940 LPRINT
950 PRINT "TIPO 1 PARA ANALISIS DE FLUJO DE CAJA"
960 PRINT "      2 PARA PARAR"
970 INPUT Q1
975 LPRINT "TIPO 1 PARA ANALISIS DE FLUJO DE CAJA";
```

```
978 LPRINT
980 IF Q1 = 2 THEN 1250
985 LPRINT
990 LPRINT "ESTE ANALISIS SUPONE QUE UN REPARADOR COBRA 'A'2
991 LPRINT UNIDADES"
1000 LPRINT "MONETARIAS POR UNIDAD DE TIEMPO, QUE EL COSTO FIJO"
1001 LPRINT "DE UTILIZACION"
1010 LPRINT "DE CADA MAQUINA ES'B'UNIDADES MONETARIAS POR UNIDAD"
1011 LPRINT "DE TIEMPO"
1020 LPRINT "Y QUE UNA MAQUINA,CUANDO OPERA,ES CAPAZ DE PRODUCIR"
1021 LPRINT "'C' UNIDADES"
1030 LPRINT "DE RENTA POR UNIDAD DE TIEMPO."
1040 LPRINT
1050 PRINT "ENTRADA DEL COSTO DE REPARADOR POR UNIDAD DE"
1051 PRINT "TIEMPO,'A'";
1060 INPUT A
1065 LPRINT "ENTRADA DEL COSTO DE REPARADOR POR UNIDAD DE"
1066 LPRINT "TIEMPO,'A'"; A
1070 LPRINT
1080 PRINT "ENTRADA DEL COSTO FIJO POR UNIDAD DE TIEMPO,'B' DE"
1081 PRINT "UTILIZACION"
1090 PRINT "DE MAQUINA";
1100 INPUT B
1105 LPRINT "ENTRADA DEL COSTO FIJO POR UNIDAD DE TIEMPO,'B'";"
1106 LPRINT "DE; UTILIZACION; ""
1107 LPRINT "DE MAQUINA"; B
1110 LPRINT
1120 PRINT "ENTRADA DE LA CANTIDAD DE RENTA QUE PRODUCE UNA"
1121 PRINT "MAQUINA TRABAJANDO"
1130 PRINT "POR UNIDAD DE TIEMPO (OPERANDO)";
1140 INPUT C
1145 LPRINT "ENTRADA DE LA CANTIDAD DE RENTA QUE PRODUCE UNA"
1146 LPRINT "MAQUINA TRABAJANDO"
1147 LPRINT "POR UNIDAD DE TIEMPO (OPERANDO)"; C
1150 LPRINT
1160 D = C * E3 - A * M - B * N
1170 LPRINT "LA CANTIDAD PROMEDIO DE DINERO GENERADO POR LA"
1171 LPRINT "COMBINACION DE"; N
1180 LPRINT "MAQUINA(S) MANTENIDAS POR"; M; "REPARA";
1190 IF M > 1 THEN 1220
1200 LPRINT "DORES";
1210 GOTO 1230
1220 LPRINT "DOR";
1230 LPRINT "ES"; D; "UNIDADES MONETARIAS"
1240 LPRINT "POR UNIDAD DE TIEMPO."
1250 END
```

APENDICE B

B.1 PROCESOS DE RENOVACION

Un proceso de renovación es un proceso de conteo en el cual los tiempos de interarribo son independientes e idénticamente distribuidos con una distribución arbitraria precisando. Considérese $\{X_n\}_{n=1,2,3...}$ una sucesión de variables aleatorias independientes no negativas con una distribución común F supóngase

que $P(X_n=0)<1$ y denótese $\mu=\int_0^{\infty} x dF(x)$ $S_0=0$, $S_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$ $n\geq 1$

defínase $N(t)=\sup\{n|S_n\leq t\}$ entonces por la ley de los grandes números $\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \mu$ con probabilidad 1 y por consiguiente $S_n\leq t$ para un número Finito de n_s y así $N(t)=\sup\{n|S_n\leq t\}<\infty$ con probabilidad 1. Bajo estas consideraciones se define el proceso - $\{N(t)|t\geq 0\}$ como un proceso de renovación y se dice que una renovación ocurre en t_0 si $S_n=t_0$ para algún $n\in \mathbf{N}$, intuitivamente X_n denota el tiempo entre la (n-1) y n-ésima renovación, S_n el tiempo de la n-ésima renovación y N(t) es el número total de renovaciones en [0,t], se tiene pues que los tiempos interarribo son independientes e idénticamente distribuidos.

Relativo a esto se tienen los siguientes teoremas.

Teorema 1.

i) $P[N(t)=n]=F_n(t)-F_{n+1}(t)$

ii) $m(t)=E(N(t))=\sum_{i=1}^{\infty} F_n(t)$ a m(t) el número esperado de renovaciones en [0,t] se le conoce como función de renovación.

Demostración:

Para probar i, obsérvese que $N(t)\geq n \leftrightarrow S_n\leq t$ es decir el número de renovaciones en [0,t] es mayor o igual a n si y solo si la n-ésima renovación ocurre antes ó en t. Considérese a continuación los siguientes eventos $[N(t)\geq n]$ y $[N(t)\geq n+1]$, se sigue que el evento $[N(t)\geq n+1]$ implica $[N(t)\geq n]$, es decir $[N(t)\geq n+1]\subseteq[N(t)\geq n]$

$$\to [N(t)\geq n]=[N(t)\geq n+1]\cup[N(t)\geq n]\setminus[N(t)\geq n+1]$$

$$=[N(t)\geq n+1]\cup[N(t)= n]$$

Por consiguiente

$$P[N(t)=n]=P[N(t)\geq n]-P[N(t)\geq n+1]$$

$$=P[S_n\leq t]-P[S_{n+1}\leq t]=F_n(t)-F_{n+1}(t)$$

ii) Defínase $N(t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ donde $A_n=\begin{cases} 1 & \text{si la n-ésima renovación ocurre en } [0,t]. \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$

entonces $E[N(t)]=E[\sum_{n=1}^{\infty} A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} [1P(A_n=1)+0P(A_n=0)]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n=1]= \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n\le t]= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

Teorema 2:

i) $m(t)<\infty \quad \forall\ t\ge 0$

ii) Hay una correspondencia uno-uno entre la distribución de interarribos F y la función de renovación $m(t)$.

Demostración:

i) Sea t fijo pero arbitrario, como $P(x_n=0)<1$
$\rightarrow P(x_n>0)=1-P(x_n=0)>0 \Rightarrow \exists\ \alpha>0 \ni P(x_n>\alpha)>0$
$\rightarrow P(x_n\le\alpha)=1-P(x_n>\alpha)<1$

así $P(x_n\le\alpha)\le 1$, por la propiedad arquimediana es posible elegir $k\in\mathbf{N} \ni t\le k\alpha$, además el evento $[S_k\le t]$ implica $[S_k\le k\alpha]$ esto a su vez implica la no ocurrencia del evento $[x_1>\alpha,\dots,x_k>\alpha]$ así de la independencia de las x_i y de la monotonía de la función de probabilidad se tiene que $P[S_k\le t]\le 1-P[x_1>\alpha,\dots,x_k>\alpha]=1-[1-F(\alpha)]^k=1-\beta$ con $o<\beta<1$ análogamente por inspección se tiene que el evento $P[S_{mk}\le t]$ implica $\{S_k-S_0 \le t,\ S_{2k}-S_k \le t,\dots,\ S_{mk}-S_{(m-1)k} \le t]$ por consiguiente $P[S_{mk}\le t]\le P[S_k\le t]^m \le (1-\beta)^m$ también $[S_{mk+j}\le t]$ implica $[S_{mk}\le t]$ por consiguiente

$\sum_{n=mk}^{mk+k-1} P[S_n\le t]\le kP[S_{mk}\le t]$ de donde

$$m(t)=\sum_{n=0}^{\infty} P[S_n\le t]\le k\sum_{m=0}^{\infty} (1-\beta)^m =\frac{k}{\beta} \quad <\infty$$

así $m(t)<\infty \quad \forall\ t\ge 0$

ii) Tenemos que $m(t)<\infty$ es decir $m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)<\infty$

tomando transformada de Laplace a ambos lados se tiene que

$$m^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [F^*(s)]^n$$

ya que se tiene una suma de v.a. independientes e idénticamente distribuidas

$$= \sum_{n=1}^{\infty} F^*(s)[F^*(s)]^{n-1} = \frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}$$

ó equivalente $F^*(s) = \dfrac{m^*(s)}{1+m^*(s)}$

así F^* esta determinada por m^* y por consiguiente F esta determinados por m. (unicidad de la transformada de Laplace).

Supóngase ahora que $x_1=x$ es el tiempo de la primera renovación entonces del hecho de que $E(y)=E(E(y|x))$ se tiene que

$$m(t)=E(N(t))=\int_0^{\infty} E[N(t)|x_1=x]dF(x)$$

como $E[N(t)|x_1=x]=\begin{cases} 0 & \text{si } x>t \\ 1+m(t-x) & x\leq t \end{cases}$

Es decir no hay renovaciones en $[0,t]$ si el tiempo de la primera renovación es mayor que t y si la primera renovación ocurre en el tiempo x ($x\leq t$) entonces en este punto el proceso empieza de nuevo y el número esperado de renovaciones en $[0,t]$ es justamente 1 más el número esperado de arrivos en t-x, así

$$m(t)=\int_0^t [1+m(t-x)]dF(x)$$

$$= \int_0^t dF(x) + \int_0^t m(t-x)dF(x) = F(t)+\int_0^t m(t-x)dF(x)$$

Es posible generalizar la ecuación de renovación de la siguiente manera $g(t)=h(t)+\int_0^t g(t-x)dF(x)$ $(t\geq 0)$ donde h y F son conocidas y g es desconocida y que va a ser determinada.

Concerniente a ésto se tiene la siguiente.

Proposición 1:

Sí $g(t)=h(t)+\int_0^t g(t-x)dF(x) \rightarrow g(t)=h(t)+\int_0^t h(t-x)dm(x)$

donde $m(x) = \sum_{n-1}^{\infty} F_n(x)$

Demostración: de la ecuación anterior $g=h+g*F$ tomando transformadas de Laplace se tiene que

$$g^*(s)=h^*(s)+g^*(s)F^*(s) \rightarrow g^*(s)=\frac{h^*(s)}{1-F^*(s)}=h^*(s)\left(1+\frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}\right)$$

$$g^*(s) = h^*(s)+h^*(s)\frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}$$

como $m^*(s)=\dfrac{F^*(s)}{1-F^*(s)}$ se tiene que $g^*(s)=h^*(s)+h^*(s)m^*(s)$ o

$g^*=(h+h*F)^*$ de donde se sigue que $g(t)=h(t)+\int_0^t h(t-x)\,dm(x)$ como una aplicación de esto se tiene el siguiente resultado.
$E[S_{N(t)+1}]=E[x_1][m(t)+1]$

Para probar ésto supóngase que el tiempo de la primera renovación ocurre en $x_1=x$ así.

$$E[S_{N(t)+1}|x_1=x]=\begin{cases} x & \text{si } x>t \\ x+A(t-x) & x\leq t \end{cases}$$

con $A(t)=E(S_{N(t)+1})$

ya que si $x>t$ entonces $N(t)=0$ y $S_{N(t)+1}=x$ (el tiempo esperado hasta la primera renovación es x) y si $x\leq t$ entonces el tiempo esperado de la $(N(t)+1)$ renovación es igual a x (tiempo hasta que ocurre la 1ª renovación) más el tiempo esperado de las restantes $N(t-x)+1$ renovaciones

$$\text{así } E(S_{N(t)+1}) =\int_0^\infty E(S_{N(t)+1}|x_1=x)\,dF(x)$$

$$=\int_0^t [x+A(t-x)]\,dF(x)+\int_t^\infty x\,dF(x)$$

$$=\int_0^\infty x\,dF(x) +\int_0^t A(t-x)\,dF(x)=E(x_1)+\int_0^t A(t-x)\,dF(x)$$

así $A(t)=E[S_{N(t)+1}]$ satisface la ecuación de renovación con $g(t)=E(x_1)$

$$\therefore\ A(t)=h(t)+\int_0^t h(t-x)\,dm(x)=E(x_1)+\int_0^t E(x_1)\,dm(x)$$

$$=E(x_1)+E(x_1)\int_0^t dm(x)=E(x_1)\,[1+m(t)]$$

Por lo que respecto a teoremas límites se tiene el siguiente

Teorema 3:

i) El número promedio de renovación por unidad de tiempo c converge a $\frac{1}{\mu}$ cuando $t\to\infty$ donde

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\int_0^\infty x dF(x)}$$ es llamada la tasa del proceso

formalmente con probabilidad 1 $\quad \frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{1}{\mu}$

ii) Número promedio esperado de renovación por unidad de tiempo converge a $\frac{1}{\mu}$ cuando $t\to\infty$ es decir con probabilidad uno

$$\frac{m(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{1}{\mu}$$

Demostración: Por definición de N(t) se tiene que $S_{N(t)}\le t\le S_{N(t)+1}$

así $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \le \frac{t}{N(t)} \le \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$, de la ley fuerte de los grandes numeros con probabilidad 1 $\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \mu$ además $N(t) \underset{t\to\infty}{\to} \infty$ con probabilidad 1.

así $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \underset{t\to\infty}{\to} \mu$ con probabilidad 1 y por tanto

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \underset{t\to\infty}{\to} \mu.1=\mu \quad \text{con probabilidad 1}$$

$\therefore \mu \le \frac{t}{N(t)} \le \mu$ cuando $t\to\infty$ entonces $\frac{t}{N(t)} \to \mu$ con probabilidad 1

o equivalentemente $\frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{1}{\mu}$ con probabilidad 1.

ii) Se tiene que $S_{N(t)+1}\ge t$ y $t\le E(S_{N(t)+1})=E(x_1)(1+m(t))=\mu(1+m(t))$
$\to \frac{m(t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \to \lim\limits_{t\to\infty} \inf \frac{m(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu}$

Sea ahora M>0 una constante fija y defínase el siguiente proceso.

$$\overline{X}_n = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n\le M \\ M & \text{si } x_n>M \end{cases} \qquad n=1,2,\ldots$$

y sea $S_n=\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i$ y $\overline{N}(t) = \sup[n|\overline{S}_n\le t]$ puesto que los tiempos de interarrivo del proceso anterior son acotados por M se tiene que

$\bar{S}_{N(t)+1}=\bar{S}_{N(t)+1}\leq t+M \Rightarrow \bar{E}(S_{N(t)+1})\leq t+M \Rightarrow (m(t)+1)\mu_M\leq t+M$ donde

$\mu_M=E(\bar{X}_n)=\int_0^M 1-F(x)dx$ y $\bar{m}(t)=E(\bar{N}(t)$, como $\bar{x}_n\leq x_n \Rightarrow \bar{N}(t)\geq N(t)$

$\Rightarrow \bar{m}(t)\geq m(t)$

así $(m(t)+1)\mu_M\leq t+M \Rightarrow \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M} + \frac{1}{t}\left(\frac{M}{\mu_M}-1\right)$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \sup \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M}$ para $M>0$ y como $\lim \mu_M = \int_0^\infty 1-F(x)dx=\mu$

se sigue que $\lim_{t\to\infty} \sup \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$

$\therefore \lim_{t\to\infty} \sup \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu} \leq \lim_{t\to\infty} \inf \frac{m(t)}{t}$ de donde $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$

con probabilidad 1

Un resultado importante que será de utilidad es la llamada identidad de Wald's se empieza por considerar la siguiente definición sea $[X_i]_{i\in N}$ una sucesión de v.a. independientes, un valor entero positivo **n** de la v.a. **N** es llamado un tiempo fijo (de paro) para la sucesión $x_1,x_2,\ldots$ si el evento $[N=n]$ es independiente de $x_{n+1},x_{n+2},\ldots$ $\forall$ $n=1,2,\ldots;$ intuitivamente se observan las X_{ns} durante un tiempo y **N** denota el tiempo en el cual se para la observación.

Ejemplo: Sea X_n:$n=1,2,\ldots$ independientes tales que

$P(X_n=0)=P(X_n=1)=\frac{1}{2}$ $n=1,2,\ldots$ sea $N=\min\{n:x_1+x_2+\ldots+x_n=10\}$

se tiene pues que $[N=n] \Leftrightarrow x_1+x_2+\ldots+x_n=10$ y $x_1+x_2+\ldots+x_l<10$ $l<n$ así $[N=n]$ no depende de $x_{n+1},x_{n+2},\ldots$ y por tanto $N=n$ es tiempo fijo.

Relativo a ésto se tiene el siguiente resultado dado a manera de Teorema 4 (Ecuación de Wald's)

Si $x_1,x_2,\ldots,x_n..$ son v.a. independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita y si **N** es un tiempo fijo para

$x_1,x_2,\ldots$ tal que $E(N)<\infty$ entonces $E(\sum_{i=1}^{N} x_i)=E[N]E(x)$

Dem. Considérese $Y_n=\begin{cases} 1 & \text{si } N\geq n \\ 0 & \text{si } N<n \end{cases}$

así $\sum_{n=1}^{\infty} X_nY_n) = \sum_{n=1}^{N} X_nY_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} X_nY_n$ la última suma de la parte derecha de la igualdad es 0

$$\therefore\ E(\sum_{n=1}^{N} Y_n) = E(\sum_{n=1}^{\infty} X_nY_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_nY_n) \quad \text{-Lebesgue}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)E(Y_n)$$

Observación: La última igualdad se sigue del hecho de que

$$[Y_n=0]=[N\leq n]$$

es independiente de $x_n, x_{n+1}, \ldots$ por ser N de tiempo fijo.

$$\therefore\ E(\sum_{n=1}^{N} X_n) = E(X)\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n)$$

$$= E(X)\sum_{n=1}^{\infty} P(N\geq n)$$

$$= E(X)E(N)$$

A continuación se dan dos importantes resultados que serán de utilidad en el tema siguiente.

Para esto considérese las siguientes definiciones.

Definición 1.

Una v.a. no negativa X se dice que es enrejada si $\exists$ $d\geq 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} P[X=nd]=1$ es decir si solo toma valores que son múltiplos de d

Se define como el período de x al mayor número d que cumple esta propiedad. Convenimos en llamar a una función de distribución de una v.a. x enrejada si X es enrejada.

Definición 2.

Una función h(t), $t\geq 0$ se dice que es directamente Riemann Integrable si $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{m}_n(a)|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |\underline{m}_n(a)|$ son finitos y $\lim_{a\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(a)$

$= \lim_{a\to 0} a \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n(a)$ donde $\overline{m}_n(a)\,[\underline{m}_n(a)]$ es el máximo (mínimo) de h en el intervalo $[(n-1)a,\ na]$.

Es posible probar que una condición suficiente para que h sea directamente integrable según Riemann es que:

i) $h(t)\geq 0 \quad \forall\ t\geq 0$

ii) h(t) es no decreciente

iii) $\int_0^\infty h(t)dt < \infty$

Una vez hecho esto se dan sin demostración (para una demostración ver Feller vol. II) los siguientes teoremas.

Teorema 5 (Blackwell's):

i) Si F no es enrejada entonces $m(t+a)-m(t)\rightarrow \frac{a}{\mu}$ $t\rightarrow\infty$ y $\forall$ a>0

ii) Si F es enrejada con período d entonces $\lim_{n\to\infty} P[\text{una renovación en } nd] = \frac{d}{\mu}$

Obsérvese que el inciso (i) nos dice que si F no es enrejada el número de renovaciones en un intervalo de longitud a es a la larga $\frac{a}{\mu}$ (la longitud del intervalo por la tasa del proceso)

Obsérvese además que de este teorema se sigue que $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t+a)-m(t)}{a} = \frac{1}{\mu} \rightarrow \lim_{a\to 0}\lim_{t\to\infty} \frac{m(t+a)-m(t)}{a} = \frac{1}{\mu}$ suponiendo que es posible intercambiar limites se tiene que $\lim_{t\to\infty} m'(t) = \frac{1}{\mu}$

Precisando se tiene el siguiente.

Teorema 6 (Clave de Renovación):

Si F no es enrejada y h(t) es directamente integrable según Riemann entonces $\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(t)dt$

Finalmente considérese un proceso de renovación con tiempos de interarribos $x_1,x_2\ldots$ Supóngase además que un premio (compensación) es ganada en el tiempo de la n-ésima renovación, denotemos esta compensación por Y_n, obsérvese que Y_n depende en general de X_n (longitud del intervalo de renovación). Sin embargo supóngase que el par (X_n,Y_n) n=1,2,... son independientes e idénticamente distribuidos y considérese $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ entonces Y(t) denota la compensación total ganada en el tiempo t. Relativo a ésto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 7: Si $E(Y_n)$ y $E(X_n)$ son finitos entonces con probabilidad 1

i) $\frac{Y(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} \frac{E(Y)}{E(X)}$

ii) $\frac{E(Y(t))}{t} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} \frac{E(Y)}{E(X)}$

Demostración:

i) Como $\frac{Y(t)}{t} = \sum_{n=1}^{N(t)} \frac{Y(n)}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} \frac{E(Y)}{E(X)}$ con probabilidad 1

ya que por la Ley de los Grandes Números

$$\sum_{n=1}^{N(t)} \frac{Y(n)}{N(t)} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} E(Y) \text{ y } \frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{E(X)}$$

con probabilidad 1

ii) Considérese $N(t)+1=n \Leftrightarrow N(t)=n-1 \Leftrightarrow x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}\leq t$ y $x_1+x_2+\ldots+x_n>t$ así el evento $\{N(t)+1=n\}$ depende únicamente de $x_1+x_2+\ldots+x_n$ y es independiente de $x_{n+1},x_{n+2},\ldots$; se sigue por tanto que $N(t)+1$ es independiente de $y_{n+1}, y_{n+2},\ldots$; y así $N(t)+1$ es un tiempo fijo de $y_{n+1}, y_{n+2},\ldots$; por consiguiente de la ecuación de Wald's

$$E(\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n)= E(\sum_{n=1}^{N(t)+1} Y_n) - E(Y_{N(t)+1})$$

$$= E[N(t)+1]E(y)-E(Y_{N(t)+1}) = [m(t)+1]E(y)-E[Y_{N(t)+1}]$$

$$\therefore \frac{E(Y(t))}{t} = \frac{(m(t))+1)}{t}E(y) - \frac{E(Y_{N(t)+1})}{t}$$

Por consiguiente basta probar que $\frac{E[Y_{N(t)+1}]}{t} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} 0$

Para esto considérese $g(t)=E[Y_{N(t)+1}]$. Se sigue que $g(t)= \int_0^\infty E[Y_{N(t)+1}|x_1=x]dF(x)$ ahora

$$E[Y_{N(t)+1}|x_1=x] \begin{cases} g(t-x) & \text{si } x\leq t \\ E(Y_1|x_1=x) & \text{si } x>t \end{cases}$$

$$\therefore g(t) = \int_0^t g(t-x)dF(x) + \int_t^\infty E(Y_1|x_1=x)dF(x)$$

Obsérvese que $E(Y_1) = \int_0^\infty E(Y_1|x_1=x)\,dF(x)<\infty$ y que

$h(t) = \int_0^\infty E(Y_1|x_1=x)\,dF(x)\le E(Y_1)$ $\forall$ t por consiguiente $h(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$

se sigue que la solución para la ecuación de renovación anterior esta dada por

$g(t)= h(t)+\int_0^t h(t-x)\,dm(x)$ del hecho de que $\lim_{t\to\infty} h(t)=0$ para $\epsilon>0$ arbitrario existe T $\ni$ si $t>T \to |h(t)|<\epsilon$ por consiguiente

$$\frac{|g(t)|}{t} \le \frac{|h(t)|}{t} + \int_0^{t-T} \frac{|h(t-x)|}{t}dm(x) + \int_{t-T}^{t} \frac{|h(t-x)|}{t}dm(x)$$

$$\le \frac{\epsilon}{t} + m\epsilon\frac{(t-T)}{t} + E(Y_1)\frac{m(t)-m(t-T)}{t}$$

por el Teorema elemental de Renovación $\frac{|g(t)|}{t} \to \frac{\epsilon}{E(x)}$ cuando $t\to\infty$

así $\frac{g(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$

$\therefore$ del Teorema elemental de Renovación

$$\frac{E(y(t))}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{E(y)}{E(x)}$$

Obsérvese que si se conviene en decir que un ciclo es completado en cada tiempo en que una renovación ocurre, entonces el teorema anterior dice que la compensación promedio (a la larga) del proceso es igual a la compensación ganada (esperada) durante un ciclo entre el tiempo esperado en el ciclo.

B.2 PROCESOS DE RENOVACION RECURRENTES Y TRANSITORIOS

Se empieza esta sección con la siguiente definición.

Un proceso de renovación se dice que es recurrente si $x_n<\infty$ casi seguramente para toda n; de otro modo se dice que el proceso es transitorio. Así un proceso de renovación es llamado recurrente o transitorio según $F(\infty)=\lim_{t\to\infty} F(t)=1$ o $F(\infty)=\lim_{t\to\infty} F(t)<1$.

Precisando un proceso de renovación es recurrente si y solo si $F(\infty)=1$ en caso contrario es llamado transitorio.

Sea ahora $N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t)$; se tienen entonces los siguientes resultados:

Lema 1. Si $F(\infty)=1 \Rightarrow N(\infty)=\infty$ con probabilidad 1.

Dem. Por hipótesis $F(\infty)=1$ es decir el $[N(t) \mid t\geq 0]$ es recurrente por tanto.

$S_n=x_1+\ldots+x_n<\infty$ para casi toda n así por el Teo. de Convergencia monótona extendido $N(\infty)= \lim_{t\to\infty} N(t)= \sup_t N_t= \infty$ con probabilidad 1

Obsérvese que de el lema anterior se tiene que
$m(\infty)=E(N(\infty))=\lim_{t\to\infty} m(t)= \infty$ con probabilidad 1.

Lema 2. si $F(\infty)=\lim_{t\to\infty} F(t)<1$ entonces $N(\infty)<\infty$ con probabilidad 1 y

$m(\infty)= \lim_{t\to\infty} m(t) < \infty$

Dem. como $F(\infty)<1$ entonces con probabilidad $1-F(\infty)>0$ hay un intervalo x_k de longitud infinita. Así $S_{k-1}=x_1+\ldots+x_{k-1}<\infty$ y $S_k=S_{k+1}=\ldots=\infty \Leftrightarrow \{x_1<\infty,\ldots,x_{k-1}<\infty$ y $x_k=\infty\}$ es decir los eventos anteriores son equivalentes.
Por consiguiente $P[\{x_1<\infty,x_2<\infty,\ldots,x_{k-1}<\infty$ y $x_k=\infty\}]=F^{k-1}(\infty)(1-F(\infty))$.

Si se considera ahora $N(\infty)=\lim_{t\to\infty} N(t)=\sup_t N_t$ es decir el número total de renovaciones en $[0,\infty)$ se tiene que
$P[N(\infty)=K]=[1-F(\infty)]F(\infty)^{k-1}$ $\qquad k=1,2,\ldots$

es decir $N(\infty)$ tiene una distribución geométrica.

Así $N(\infty)<1$ con probabilidad 1 y por consiguiente

$$m(\infty)=\lim_{t\to\infty} E(N(t))=\lim_{t\to\infty} m(t) = \frac{1}{1-F(\infty)} <\infty.$$

Para finalizar esta sección se da a continuación un resultado que será de utilidad posteriormente.

Lema 3. Sea $x_1,x_2,\ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidos con $E(x_1)>0$ y $N=\min\{n \mid x_1+\ldots+x_n>0\}$ entonces $E(N)<\infty$.

Demostración: como las variables aleatorias x_i son independientes e idénticamente distribuidas se tiene que

$$P[x_1\leq 0,\ x_1+x_2\leq 0,\ldots,\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leq 0]=P[x_n\leq 0,\ x_n+x_{n-1}\leq 0,\ldots,\ x_1+\ldots x_n\leq 0]$$

haciendo $S_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$

$P[S_1\leq 0,\ S_2\leq 0,..,\ S_n\leq 0]=P[S_n\leq S_{n-1},\ S_n\leq S_{n-2},..,\ S_n\leq 0]$
como $(S_1\leq 0,\ S_2\leq 0,..,\ S_n\leq 0) \Rightarrow \min[n\ x_1+...+x_n>0]>n$
entonces $P[S_1\leq 0,\ S_2\leq 0,..,\ S_n\leq 0]=P[N>n]$

así $\sum_{n=0}^{\infty} P[N>n]= \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n\leq S_{n-1},\ S_n\leq S_{n-2},..,\ S_n\leq 0]$

$$\Rightarrow E(N)= \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n\leq S_{n-1},\ S_n\leq S_{n-2},..,\ S_n\leq 0]$$

Ahora se conviene en que una renovación tiene lugar en n si $S_n\leq S_{n-1}$, $S_n\leq S_{n-2},..,$ $S_n\leq 0$. Obsérvese que los tiempos entre renovaciones sucesivas son independientes e idénticamente distribuidas. Así por la ley fuerte de los grandes números y del hecho que $S_n\leq 0$ solo finitas veces se tiene que el número total de renovaciones es finito. Por consiguiente por el (Lema 2 Procesos de Renovación recurrentes y transitorios) el número esperado de Renovaciones es finito. Por tanto como

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[S_n\leq S_{n-1},\ S_n\leq S_{n-2},..,\ S_n\leq 0]$$

es precisamente el número esperado de renovaciones se tiene que $E(N)<\infty$.

B.3 PROCESOS REGENERATIVOS

Un proceso regenerativo es un proceso estocástico $[x(t)\mid t\geq 0]$ con espacios de estados $S=[0,1,2,..]$ tal que con probabilidad uno existe un instante de tiempo T_1 tal que la continuación (realización) del proceso más allá de T_1 es una replica probabilística del procesos iniciado en 0.

Obsérvese que de aquí se deduce la existencia de instantes T_2, T_3,... teniendo la misma propiedad que T_1. Además se tiene que $[T_1,\ T_2,...T_n...]$ forma un proceso de renovación en donde los T_i son los instantes donde se dan las renovaciones.

Convenimos en que un ciclo del proceso es completado en cada instante en que una renovación ocurre. Finalmente obsérvese que un proceso de renovación es regenerativo y T_1 representa el tiempo de la primera renovación, T_2 el tiempo de la segunda renovación etc.

Si ahora N_t es el tamaño de la cola en el tiempo t de un sistema de líneas de espera con un sólo servidor en donde las llegadas se dan según un proceso Poisson y los tiempos de servicio son independientes e idénticamente distribuidos. Supóngase que se toma como tiempo origen el instante en que una salida se da en el sistema (sale un cliente) dejando atrás exactamente j clientes, entonces en cada instante de tiempo en que un cliente sale de el sistema dejando atrás a j clientes el futuro de N_t después de tal tiempo tiene la misma ley de probabilidad que cuando el proceso inicio en cero.

Respecto a este tipo de procesos se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 8: Si T_1 tiene una función de densidad absolutamente continua y $E(T_1)<\infty$ entonces

$$P_j=\lim_{t\to\infty} P[x(t)=j]=\frac{E[\text{tiempo total en el estado j durante un ciclo}]}{E[\text{tiempo en un ciclo}]}$$
$\forall\ j\geq 0$

Demostración: Sea $j\in S$ arbitrario y sea $P_j(t)=P[x(t)=j]$ y F la función de distribución de T_1 entonces

$$P_j(t)=\int_0^\infty P(x(t)=j|T_1=s)dF(s)$$ de la condición de T_1 y por ser un proceso regenerativo

$$=\int_0^t P_j(t-s)dF(s)+\int_t^\infty P[x(t)=j|T_1=s]dF(s)$$

haciendo $q_j(t)=\int_t^\infty P(x(t)=j|T_1=s)dF(s)$ se tiene que

$$P_j(t)=q_j(t)+\int_0^t P_j(t-s)dF(s)$$

cuya solución por la proposición 1 es

$$P_j(t)=q_j(t)+\int_0^t q_j(t-s)dm(s)$$

se sigue del Teo. clave de Renovación que

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t)=\frac{\int_0^\infty q_j(t)dt}{E(T_1)}$$

Observase que por la ley de probabilidad total

$$P[x(t)=j,T_1>t]=\int_0^\infty P(x(t)=j,T_1>t|T_1=s)dF(s)$$

$$=\int_t^{\infty} P[x(t)=j \mid T_1=s]dF(s)$$

$$=q_j(t)$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} P_j(t)=\int_0^{\infty} \frac{P[x(t)=j, T_1\geq t]dt}{E(T_1)}$$

defínase ahora $Z_t=\begin{cases} 1 & \text{si } x(t)=j \text{ y } T_1>t \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

se sigue entonces $\int_0^{\infty} Z(t)dt$ representa la cantidad de tiempo del proceso en el estado j durante un ciclo.

así

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t)=\frac{E[\text{Cant.Total de tiempo del proceso en j durante un ciclo}}{E(T_1)}$$

Supóngase ahora que cuando el proceso esta en el estado j, se obtiene una tasa de compensación f(j), j≥0. Se tiene entonces por la propiedad regenerativa del proceso un proceso de renovación compensado. Con base en esto se tienen los siguientes resultados.

Proposición 2: Si $E(\int_0^{T1} f(x_t)dt)$ y $E(T_1)$ son finitos entonces con probabilidad 1

i) $\frac{\int_0^t f(x_s)ds}{t} \rightarrow \frac{E(\int_0^{T1} f(x_s)ds)}{E(T_1)}$ cuanto $t\to\infty$

ii) $\frac{E(\int_0^t f(x_s)ds)}{t} \rightarrow \frac{E(\int_0^{T1} f(x_s)ds)}{E(T_1)}$ $t\to\infty$

Demostración: Puesto que $E(\int_0^{T1} f(x_s)ds)$ y $E(T_1)$ son finitos y dada la naturaleza del proceso se tienen que satisfacen las condiciones del Teorema 7 y por tanto con probabilidad 1.

i) $\frac{\int_0^t f(x_s)ds}{t} \rightarrow \frac{E(\int_0^{T1} f(x_s)ds)}{E(T_1)}$ $t\to\infty$

ii) $\frac{E(\int_0^t f(x_s)ds)}{t} \rightarrow \frac{E(\int_0^{T1} f(x_s)ds)}{E(T_1)}$ $t\to\infty$

Obsérvese que la proposición anterior nos da una expresión a la larga para la compensación promedio (esperada) del proceso.

Teorema 9: Suponiendo lo mismo que Teorema 7 y si $E(\int_0^{T_1} f(x_t)dt)$ y $E(T_1)$ son finitos entonces con probabilidad 1.

$$\text{i)} \quad \frac{\int_0^t f(x_s)ds}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \sum_{j=0}^{\infty} P_j f(j)$$

$$\text{ii)} \quad \frac{E(\int_0^t f(x_s)ds)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \sum_{j=0}^{\infty} P_j f(j)$$

Demostración: Basta probar que

$E(\int_0^{T_1} f(x_t)dt) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j P_j E(T_1)$ para esto considérese

$\int_0^{T_1} f(x_t)dt = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$ [tiempo total en el estado j durante un ciclo]

$E(\int_0^{T_1} f(x_s)dt) = E[\sum_{j=0}^{\infty} f(j)$ [tiempo total en el estado j durante un ciclo]

$= \sum_{j=0}^{\infty} f(j) E$ [tiempo total en el estado j durante un ciclo]

sabemos que E[tiempo total en el estado j durante un ciclo] $= P_j E(T_1)$ (Teo. 1) de donde por la proposición anterior con probabilidad 1.

$$\text{i)} \quad \frac{\int_0^t f(x_s)ds}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{E(\int_0^{T_1} f(x_s)ds)}{E(T_1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j P_j E(T_1)}{E(T_1)} = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)P_j$$

$$\text{ii)} \quad \frac{E(\int_0^t f(x_s)ds)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{E(\int_0^{T_1} f(x_s)ds)}{E(T_1)} = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)P_j.$$

Así este teorema dice que a la larga ($t\to\infty$) la compensación promedio (esperada) del proceso es igual a la tasa media de compensación con respecto a la distribución limite.

Finalmente se prueba que P_j representa (a la larga) la proporción de tiempo que el proceso esta en el estado j. Con esta finalidad se prueba el siguiente:

Corolario. Si T_1 tiene una densidad absolutamente continua y $E(T_1)<\infty$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{[\text{Tiempo total en el estado } j \text{ durante } [0,t]]}{t} = P_j \text{ con probabilidad 1.}$$

$\forall\ j\geq 0$

Demostración:

$$\text{considérese } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=j \\ 0 & \text{si } x\neq j \end{cases}$$

Se tiene entonces que $\int_0^t f(x_s)ds$ es el tiempo total del proceso en j durante $[0,t]$

Así por el teorema anterior $\dfrac{\int_0^t f(x_s)ds}{t} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} P_j$

APENDICE C

C.1 DEMOSTRACION DE LA FORMULA $L=\lambda W$

Con la finalidad de que la presente demostración sea lo más clara y natural posible se analiza un sistema básico de colas; se considera un sólo servidor llegadas según un proceso de renovación no enrejado y tiempos de servicios independientes e idénticamente distribuidos. Es conveniente aclarar que la demostración no depende de el particular modelo analizado y así la demostración permanece sin cambios para un modelo de colas arbitrario que contenga puntos de regeneración y tales que la longitud media del ciclo sea finita.

Teorema:

Sea $\lambda = \dfrac{1}{E(x_1)}$ entonces $L=\lambda W$

Dem. Supóngase que un cliente llega a un sistema de servicio con un solo servidor de acuerdo con un proceso de renovación no enrejado, cuando un cliente llega es inmediatamente atendido si el servidor esta desocupado y espera en la cola si el servidor esta ocupado, se supone también que los tiempos de servicio de los clientes son independientes e idénticamente distribuidos y que las llegadas también se dan de manera independiente.

Sean $x_1, x_2, \ldots,$ los tiempos de interarribos entre los clientes; y sean $y_1, y_2, \ldots,$ los tiempos de servicio de clientes sucesivos. Supóngase que

$$E(y_1)<E(x_1)<\infty \qquad (1)$$

Supóngase además que el primer cliente llega en el tiempo 0 y sea T_1 el tiempo siguiente en el cual un cliente llega y encuentra al servidor desocupado, se sigue entonces que T_1 es un punto de regeneración para el proceso $[n(t)| t\geq 0]$ donde $n(t)$=numero de clientes en el sistema en el tiempo t. Convenimos en llamar a un período "ocupado" si el servidor esta ocupado y "desocupado" si el servidor esta desocupado.

Obsérvese que de lo anterior se sigue que el proceso (probabilísticamente) es el mismo en el inicio de cada período de ocupación.

Se afirma que si $E(y_1)<E(x_1)<\infty$ entonces la longitud esperada de cada ciclo regenerativo es finita.

Sin perdida de generalidad supongamos que el tiempo hasta que el siguiente cliente llega es mayor que el tiempo de servicio de cliente inicial, es decir $x_1>y_1$, se sigue entonces que el período

de ocupación finalizara en y_1 y la longitud del ciclo regenerativo es x_1. Generalizando

$$\text{Sea } N=\min\{x_1+x_2+\ldots+x_n>y_1+y_2+\ldots+y_n\} \qquad (2)$$

entonces el período de ocupación finalizara en $Y_1+\ldots+Y_N$ y el ciclo regenerativo será de longitud $T=X_1+X_2+\ldots+X_N$

Ya que $0<E(Y_1)<E(X_1)$ por el Lema (3) se tiene que $E(N)<\infty$ como N es un tiempo fijo (de paro) y $E(N)<\infty$ de la identidad de Wald's

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)=E(T_1)=E(X_1)E(N)<\infty \qquad (3)$$

Así la longitud esperada del ciclo regenerativo es finita.

Ahora por el Teo. (8) se tiene que $P_j=\lim_{t\to\infty} P[n(t)=j]$ existe.

y como $E(\int_0^{T_1} n(s)ds)<\infty$ y $E(T_1)<\infty$ de la proposición (2) se tiene

$$\text{i) } \frac{\int_0^t n(s)ds}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{E(\int_0^{T_1} n(s)ds)}{E(T_1)} \quad \text{con probabilidad 1}$$

$$(3')$$

$$\text{ii) } \frac{E(\int_0^t n(s)ds)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{E(\int_0^{T_1} n(s)ds)}{E(T_1)} \quad \text{con probabilidad 1}$$

Obsérvese que las ecuaciones anteriores son expresiones limites para el número promedio de clientes en el sistema.

Si ahora se denota por L el limite de el número promedio (esperado) de clientes en el sistema entonces por (3') se tiene que

$$L=\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t n(s)ds}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E(\int_0^t n(s)ds)}{t} \tag{4}$$

de donde por (3) y unicidad del limite)

$$L= \frac{E(\int_0^{T_1} n(s)ds)}{E(T_1)} = \frac{E(\int_0^{T_1} n(s)ds)}{E(N)} \cdot \frac{1}{E(x_1)} \tag{5}$$

Sea ahora W_n n=1,2,... la cantidad de tiempo que el n-ésimo cliente espera en el sistema es decir el tiempo de espera del n-ésimo cliente. Como $N=\min\{n| x_1+x_2+...+x_n>y_1+y_2+...+y_n\}$ entonces N representa el numero total de clientes servidos en un ciclo regerativo. Así $w_1+w_2+...+w_N$ y $w_{N+1}+w_{N+2}+...+w_{N+N2}$ tienen la misma distribución, donde N_2 representa al numero de clientes servidos en el segundo ciclo.

Si ahora se considera el tiempo total de espera de los clientes del n-ésimo ciclo como un factor de compensación para el ciclo del Teorema 7

$$\text{i)} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{E(\sum_{i=1}^{N} w_i)}{E(N)} \quad \text{con probabilidad 1}$$

$$\text{ii)} \quad E(\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{E(\sum_{i=1}^{N} w_i)}{E(N)} \quad \text{con probabilidad 1} \tag{6}$$

Si se denota por w el limite del tiempo promedio (esperado) de espera del cliente de (6) se tiene que :

$$w=\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{n} = \lim_{n\to\infty} E(\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{n})$$

$$w = \frac{E(\sum_{i=1}^{n} w_i)}{E(N)} \tag{7}$$

ahora $\sum_{i=1}^{N} w_i=\int_0^{T_1} n(s)ds$ ya que ambos representan el tiempo total de horas de espera en un ciclo.

Así combinando 5 y 7

L = λ.w

BIBLIOGRAFIA

COX. D.R. AND SMITH, WALTER L.: QUEUES LONDON: METHUEN 1961.

GROSS, DONALD AND HARRIS, CARL M. FUNDAMENTALS OF QUEUEING THEORY,NEW YORK : JOHN WILEY 1974 .

KLEINROCK , LEONARD : QUEUEING SYSTEMS, VOL 1 : THEORY. NEW YORK :JOHN WILEY 1975.

N.U PRABHU: BASIC QUEUEING THEORY; TECHNICAL REPORT, DEPARTMENT OF OPERATIONS RESEARCH, CORNELL UNIVERSITY, ITHACA N.Y.

PANICO, JOSEPH A.: QUEUEING THEORY. ENGLEWOOD CLIFFS PRENTICE - HALL 1969 .

PARZEN E. STOCHASTIC PROCESSES, SAN FRANCISCO CALIF: HOLDEN - DAY , 1962 .

ROSS S. APPLIED PROBABILITY MODELS WITH OPTIMIZATION EXAMPLES . SAN FRANCISCO CALIF. HOLDEN - DAY , 1970 .

SAATY, THOMAS L.: ELEMENTS OF QUEUEING THEORY NEW YORK MCGRAW HILL ,1961 .