15

2E

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUCESIONES BASICAS. EXTENSION DE COEFICIENTES FUNCIONALES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RICARDO GOMEZ AIZA

MEXICO, D. F. 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Ricardo Gómez Aíza

con número de cuenta 8733522-2 con el Título:

Sucesiones Básicas. Extensión de Coeficientes Funcionales.

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S) APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en C.	Angel Manuel Carrillo Hoyo	Carrillo
Director de Tesis Dr.	Hugo Arizmendi Peimbert	Hugo Arizmendi P.
Dr.	Carlos Hernández Garciadiego	
Dr.	Salvador Pérez Esteva	
Suplente Dr.	Carlos Bosch Giral	Carlos Bosch Giral
Suplente		

Deseo manifestar mi más profundo agradecimiento al Maestro Ángel Carrillo su atención, ayuda, paciencia y dedicación durante la elaboración de esta tesis.

Agradezco también al Dr. Hugo Arizmendi, Dr. Carlos Hernández, Dr. Salvador Pérez y al Dr. Carlos Bosch por la revisión de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia, en especial a mis padres y hermanas, que mas de una vez se fumaron un choro matemático; a los FAMosos, cuya amistad y apoyo son invaluables, y quienes son partícipes de mi formación personal; a Mariel, por su amor y compañía; a Xavier, principalmente por sus ineludibles sonsacadas para el reventón; al Moritzio, por su amistad; a Ángel Carrillo, porque es muy buen cuate.

SIN DUDA ALGUNA,

A EUTERPE

INDICE

INTRODUCCIÓN

Sea X un espacio de Banach. Una *base de Schauder* de X es una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ tal que para cada $x \in X$, existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ que es base del subespacio cerrado por ella generado $[x_i]_{i=1}^{\infty}$, es llamada una *sucesión básica.*

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión básica en X. Para cada $n \in \mathbf{N}$, la funcional lineal x_n^* en $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ definida como $x_n^*(x) = a_n$ si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, es continua. La sucesión $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ es llamada la *sucesión de los coeficientes funcionales asociados* a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y resulta ser una sucesión básica en $([x_i]_{i=1}^{\infty})^*$.

Por la consideración de una sucesión básica que no sea una base de X, es natural plantearse el siguiente problema presentado por Retherford [**7**]:

Sea $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a una sucesión básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$. ¿Existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$?; es decir, ¿existe una sucesión básica $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$ tal que $f_i \mid [x_i]_{i=1}^{\infty} = x_i^*$ y $\|f_i\| = \|x_i^*\|$, para toda $i \in \mathbf{N}$?

En [**3**], J.R. Holub responde de manera negativa esta pregunta. Más aún, bajo la hipótesis que $codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1$, da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dicha sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach . Usando este resultado, demuestra que si $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X acotada y tal que $codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1$, entonces existe una norma en X, equivalente a la original, tal que la sucesión de coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ tienen una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach. Prueba también que si la sucesión básica es equivalente a la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de c_0 (el espacio de las sucesiones de escalares que convergen a 0), entonces para cualquier norma en X, equivalente a la original, existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$, no importando, en este caso, la codimensión de $[x_i]_{i=1}^{\infty}$. Finalmente, demuestra que si la sucesión básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ está acotada, no es quivalente a $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1$, entonces existe una norma en X, equivalente a la original, para la cual no existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. Holub deja abierto el problema para cuando la codimensión de $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ es arbitraria.

INTRODUCCIÓN

Sea X un espacio de Banach. Una *base de Schauder* de X es una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ tal que para cada $x \in X$, existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ que es base del subespacio cerrado por ella generado $[x_i]_{i=1}^{\infty}$, es llamada una *sucesión básica.*

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión básica en X. Para cada $n \in \mathbf{N}$, la funcional lineal x_n^* en $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ definida como $x_n^*(x) = a_n$ si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, es continua. La sucesión $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ es llamada la *sucesión de los coeficientes funcionales asociados* a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y resulta ser una sucesión básica en $([x_i]_{i=1}^{\infty})^*$.

Por la consideración de una sucesión básica que no sea una base de X, es natural plantearse el siguiente problema presentado por Retherford [**7**]:

Sea $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a una sucesión básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$. ¿Existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$?; es decir, ¿existe una sucesión básica $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$ tal que $f_i \mid [x_i]_{i=1}^{\infty} = x_i^*$ y $\|f_i\| = \|x_i^*\|$, para toda $i \in \mathbf{N}$?

En [**3**], J.R. Holub responde de manera negativa esta pregunta. Más aún, bajo la hipótesis que $codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1$, da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dicha sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach . Usando este resultado, demuestra que si $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X acotada y tal que $codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1$, entonces existe una norma en X, equivalente a la original, tal que la sucesión de coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ tienen una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach. Prueba también que si la sucesión básica es equivalente a la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de c_0 (el espacio de las sucesiones de escalares que convergen a 0), entonces para cualquier norma en X, equivalente a la original, existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$, no importando, en este caso, la codimensión de $[x_i]_{i=1}^{\infty}$. Finalmente, demuestra que si la sucesión básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ está acotada, no es quivalente a $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1$, entonces existe una norma en X, equivalente a la original, para la cual no existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. Holub deja abierto el problema para cuando la codimensión de $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ es arbitraria.

En esta tesis se hace una exposición monográfica de los resultados antes mencionados y se logra generalizarlos para cuando $codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = n$, con $n \in \mathbf{N}$.

Así, el trabajo está dividido en tres capítulos: en el **1** son recordados algunos de los conceptos y resultados básicos del análisis funcional, de éstos se da sus pruebas cuando son cortas, teniéndose como excepción la de la proposición **69**. No se incluye, y son dados por conocidos, los teoremas de Hahn-Banach, la función abierta, la gráfica cerrada y el acotamiento uniforme, mismos que son usados libremente a lo largo del trabajo; en el capítulo **2** se presenta, incluyendo todos las pruebas, la parte de la teoría de bases en espacios de Banach necesaria para llegar a la exposición, en el capítulo **3**, de los resultados principales de la tesis.

En relación a las generalizaciones de los reslutados que aparecen en **[3]**, se debe señalar que las demostraciones correspondientes son del todo similares a las dadas por Holub para cuando la codimensión de $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ es igual a 1. Por otra parte, el teorema **80** fue probado por él en **[4]**, pero la prueba que damos aquí es más sencilla. Por otra parte, se sabe que los resultados son ciertos en un caso más general. a saber. cuando $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ está complementado en X. Esto último fue demostrado por Yu y Xin-Tai **[13]**, pero no se usó su artículo pues éste está escrito en chino y fue, de hecho, imposible conseguir un ejemplar del mismo.

Para la realización de este trabajo tuve el apoyo de una beca otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, a propuesta del Instituto de Matemáticas de esta universidad. Agradezco a ambos ese apoyo y doy también las gracias al Instituto por todas las facilidades que me ha brindado en el trancurso de mis estudios.

NOTACIÓN

$\Re$ El campo de los números reales.
C El campo de los números complejos.
$\Im$ $\Re$ ó **C**.
Q El subconjunto de los número racionales, cuando $\Im = \Re$, o el subconjunto de números complejos con partes reales e imaginarias racionales, cuando $\Im = \mathbf{C}$.
N El conjunto de los números naturales.
$\overline{A}$ La cerradura de un conjunto A en un espacio normado.
$\overline{A}^{\tau}$ La cerradura de un conjunto A en la topología τ.

Si $f : X \to Y$ y $x \in X$, la imagen de x bajo f la denotaremos por $f(x)$ o bien $\langle f, x\rangle$.

Si X es un espacio vectorial y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta} \subset X$, donde Δ es un conjunto arbitrario de índices, entonces $\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Delta}$ será el conjunto de combinaciones lineales finitas de elementos de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$, y, como es usual, lo llamaremos *el subespacio generado* por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$. Si X es además un espacio normado, entonces a la cerradura de $\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Delta}$ la denotaremos por $[x_\lambda]_{\lambda\in\Delta}$ y la llamaremos *el subespacio cerrado generado* por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$.

Para un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, definimos

$$\begin{aligned} B_X(x_0,\varepsilon) &= \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\} \\ B_X[x_0,\varepsilon] &= \{x \in X : \|x - x_0\| \le \varepsilon\} \\ S_X(x_0,\varepsilon) &= \{x \in X : \|x - x_0\| = \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Cuando la referencia al espacio X resulte innecesaria, escribiremos $B_\varepsilon(x_0)$, $B_\varepsilon[x_0]$ y $S_\varepsilon(x_0)$ en lugar de $B_X(x_0,\varepsilon)$, $B_X[x_0,\varepsilon]$ y $S_X(x_0,\varepsilon)$ respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y los resultados básicos que necesitaremos a lo largo de la tesis. Con el fin de no extender demasiado el trabajo, se incluyó sólo lo que consideramos más importante. Remitimos al lector a [8] para obtener una información más detallada.

1.1 Espacios de Banach. Espacios duales.

Definición 1 *Sea X un espacio vectorial sobre el campo $\Im$ y sea $\|\cdot\|$: $X \to \Re$ una norma en X. Decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un* espacio de Banach *si X es completo con respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$.*

Cuando sea claro cual es la norma que se está utilizando, hablaremos simplemente del espacio de Banach X, en lugar de escribir $(X, \|\cdot\|)$.

Sabemos que $\Im$ con su norma usual es un espacio de Banach, donde él mismo funge como campo de escalares. Éste será un hecho que usaremos constantemente, sin hacer hincapié en ello.

Definición 2 *Sean X y Y dos espacios de normados. $B(X, Y)$ denota a la colección de todas las transformaciones (operadores) lineales y continuas de X en Y. $B(X, \Im)$ es llamado* el dual normado *de X y* *se le denota por* $(X, \|\cdot\|)^*$ *o, simplemente,* X^*. *Los elementos de* X^* *son llamados funcionales lineales continuos.*

Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Al cociente X/Y lo proveemos de la siguiente seminorma

$$\|[x]\| = \inf \{\|y\| : y \in [x]\},$$

donde $[x]$ denota a la clase de x. Si Y es además cerrado, entonces $\|\cdot\|$ es una norma en X/Y. Cuando Y es un subespacio cerrado de un espacio de Banach X, $(X/Y, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

π *denotará al homomorfismo canónico de* X *en* X/Y, *que a cada* $x \in X$ *le asocia su clase en* X/Y.

Definición 3 *Sea* X *un espacio de Banach,* M *un subespacio de* X *y* N *un subespacio de* X^*. *Se define*

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \textit{ para toda } x \in M\}$$
$$^\perp N = \{x \in X : f(x) = 0 \textit{ para toda } f \in N\}.$$

$M^\perp$ *es llamado* el anulador *de* M *y* $^\perp N$ el preanulador *de* N.

Proposición 4 *Si* X *y* M *son como en la definición anterior, entonces*

$$^\perp\left(M^\perp\right) = \overline{M}.$$

Proposición 5 *Sea* X *un espacio de Banach y sea* V *un subespacio cerrado de* X. *Entonces*

i) V^* *es isométricamente isomorfo a* $X^*/V^\perp$ *vía la isometría* $\sigma(f) = \left[\tilde{f}\right]$, *donde* $\tilde{f}$ *es cualquier extensión continua de* f *a* X *y* $\left[\tilde{f}\right]$ *es la clase de* $\tilde{f}$ *en* $X^*/V^\perp$.

ii) $(X/V)^*$ *es isométricamente isomorfo a* $V^\perp$ *vía la isometría* $\tau(y^*) = y^* \circ \pi$.

Proposición 6 *Sean* X *y* Y *dos espacios normados y sea* $T : X \to Y$ *un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $T \in B(X, Y)$.

ii) *Existe* $K > 0$ *tal que* $\|T(x)\| \leq K\|x\|$ *para toda* $x \in X$.

iii) $\sup\{\|T(x)\| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\} < \infty$.

Por esta propiedad, los elementos de $B(X, Y)$ son también llamados *operadores lineales acotados.*

Proposición 7 *Sean X y Y dos espacios de normados y sea $T \in B(X,Y)$. Entonces*

$$\min\{K \geq 0 : \|T(x)\| \leq K\|x\| \ \forall x \in X\}$$
$$= \sup\{\|T(x)\| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|T(x)\| : x \in X,\ \|x\| = 1\}$$
$$= \sup\left\{\tfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\}.$$

Proposición 8 *Sean X y Y dos espacios normados. La función $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \Re$ definida como*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\},$$

es una norma en $B(X,Y)$. Más aún, $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si y sólo si Y es un espacio de Banach. Así, $(X, \|\cdot\|)^*$ es un espacio de Banach para todo espacio normado X y la norma en X^* se dice que es la inducida por la norma en X.

Al dual de $(X, \|\cdot\|)^*$ lo denotaremos por X^{**}. Por lo dicho antes, X^{**} es un espacio de Banach.

Cada elemento $x \in X$ determina un elemento $\widehat{x} \in X^{**}$, el cual queda definido por la siguiente regla

$$\widehat{x}(f) = f(x) \qquad \text{para toda } f \in X^*.$$

Resulta que

$$\|\widehat{x}\| = \sup\{|\widehat{x}(f)| : \|f\| \leq 1, f \in X^*\} = \|x\|.$$

Así, la transformación lineal $x \to \widehat{x}$, llamada *la inmersión canónica* de X en X^{**}, es una isometría. Con $\widehat{X}$ denotaremos a la imagen de X según esta inmersión.

Definición 9 *Dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ en un espacio vectorial X se dice que son* equivalentes *(y escribiremos $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$), si existen $m, M > 0$ tales que*

$$m\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \qquad \textit{para toda } x \in X.$$

Proposición 10 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $|||\cdot|||$ una norma equivalente a $\|\cdot\|$. Entonces las normas inducidas en X^* por estas dos normas son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN

Existe $\alpha > 0$ tal que $|||x||| \leq \alpha \|x\|$ para toda $x \in X$. Entonces para cualquier $f \in X^*$, sucede que

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : |||x||| \leq \alpha\} = \sup\{|f(\alpha x)| : |||x||| \leq 1\} \\ &= \alpha \sup\{|f(x)| : |||x||| \leq 1\} = \alpha\, |||f|||. \end{aligned}$$

De manera similar se demuestra que existe $\beta > 0$ tal que

$$\beta\, |||f||| \leq |||f||| \quad \text{para toda } f \in X^*. \quad \square$$

Los espacios normados son un tipo particular de los espacios localmente convexos, los que a su vez constituyen una clase especial de los llamados espacios vectoriales topológicos.

Definición 11 *Supongamos que X es un espacio vectorial sobre $\Im$ y sea τ una topología en X. Se dice que (X, τ) es* un espacio vectorial topológico *si la suma*

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

y el producto por un escalar

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$

son funciones continuas, cuando en $X \times X$ y en $\Im \times X$ se consideran las topologías producto.

Si X es un espacio vectorial topológico y $\mho$ es una base local de 0, entonces

$$\mho_{x_0} = \{x_0 + V : V \in \mho\}$$

es una base local de x_0 para cualquier $x_0 \in X$. Se dice que un espacio vectorial topológico es *localmente convexo* si tiene una base local de 0 formada por conjuntos convexos (algunos autores también exigen que X sea un espacio de Hausdorff).

Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Con $(X, \tau)^*$ se denotará a la colección de todas las funcionales lineales y continuas respecto a la topología τ.

Definición 12 *Sea X un espacio normado y V un subespacio del dual $(X, \|\cdot\|)^*$. Definimos a $\sigma(X, V)$ como la topología más débil en X entre aquellas para las que cada elemento en V es continuo.*

Se sigue inmediatamente que $\sigma(X,V)$ es más débil que la topología inducida por la norma en X. Sea $\mathsf{F}(V)$ la colección de todos los subconjuntos de V finitos y distintos del $\emptyset$. Para $\varepsilon > 0$ y $\wp = \{f_1, ..., f_n\}$ en $\mathsf{F}(V)$, definimos

$$B_{\wp,\varepsilon} = \{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, ..., n\}.$$

La colección

$$\{B_{\wp,\varepsilon} : \wp \in \mathsf{F}(V) \text{ y } \varepsilon > 0\}$$

es una base local de 0 para la topología $\sigma(X,V)$. A esta topología se le llama *la topología débil en X generada por V*, y con ella X es un espacio localmente convexo. (X,V) es de Hausdorff para $\sigma(X,V)$ si V separa puntos de X.

Podemos referirnos a un concepto o propiedad topológica en X en relación a la topología de la norma o a una topología débil. En el segundo de los casos haremos aparecer la expresión $\sigma(X,V)$. Así por ejemplo, aparecerán expresiones tales como un $\sigma(X,V)$-punto de acumulación, la $\sigma(X,V)$-cerradura de un conjunto, etc.

De singular importancia es el hecho siguiente:

$$(X, \sigma(X,V))^* = V,$$

entendiéndose que la igualdad es entre conjuntos, y no encierra ninguna información topológica, de hecho, en $(X,\sigma(X,V))^*$ no hemos definido topología alguna.

Para un espacio normado reservaremos la notación X^* para referirnos a $(X, \|\cdot\|)^*$, y lo mismo haremos para X^{**} y $(X^*, \|\cdot\|)^*$.

Como caso particular, se tiene la topología débil $\sigma(X,X^*)$, a la que se le suele llamar *la topología* w en X. Por lo anterior, $(X,\mathrm{w})^* = X^*$. También tenemos las siguientes propiedades para w:

Si $A \subset X$ es convexo, entonces $\overline{A}$ coincide con la w-cerradura de A, y por tanto, si $V \subset X$ es un subespacio, entonces V es cerrado si y sólo si V es w-cerrado.

Es usual denotar a $\sigma\left(X^*, \widehat{X}\right)$ simplemente con $\sigma(X^*, X)$, y referirse a ella como la topología w* en X^*. Por lo dicho antes, $(X^*, \mathrm{w}^*)^* = \widehat{X}$. Para esta topología tenemos los dos siguientes resultados

Teorema 13 (Alaoglu) *Sea X un espacio de Banach. La bola unitaria de $(X^*, \|\cdot\|)$ es* w**−compacta.*

Proposición 14 *Si X es un espacio de Banach y V es un subespacio de X^*, entonces $\left({}^{\perp}V\right)^{\perp} = \overline{V}^{\mathrm{w}^*}$.*

1.2 Pares lineales. Teorema de las bipolares.

Definición 15 *Sean X y Y dos espacios vectoriales sobre el campo $\Im$. Decimos que X y Y* forman un par lineal *si existe una funcional bilineal $\beta : X \times Y \to \Im$. En este caso hablamos del* par lineal (X, Y) para la forma β. *Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Las* polares *de A y B se definen como*

$$A^{\circ} = \{y \in Y : |\beta(x, y)| \leq 1 \text{ para toda } x \in A\}$$

y como

$${}^{\circ}B = \{x \in X : |\beta(x, y)| \leq 1 \text{ para toda } y \in B\}.$$

Cuando tenemos un par lineal (X, Y) para la forma β podemos definir las topologías débiles $\sigma(X, Y)$ en X y $\sigma(Y, X)$ en Y, que tienen como bases locales del 0 a

$$\{\{x \in X : |\beta(x, y_i)| < \varepsilon\} : y_1, ...y_n \in Y,\ n \in \aleph,\ \varepsilon > 0\}$$

y

$$\{\{y \in Y : |\beta(x_i, y)| < \varepsilon\} : x_1, ...x_n \in Y,\ n \in \aleph,\ \varepsilon > 0\}$$

respectivamente. La definición de $\sigma(X, Y)$ tiene como caso particular a la dada para $\sigma(X, V)$ cuando X es un espacio normado, $V \subset X^*$, y se considera la funcional bilineal $\beta(x, f) = f(x)$.

Proposición 16 *Sea (X, Y) un par lineal para la forma β y sea $A \subset X$. Entonces A° es balanceado, convexo y $\sigma(Y, X)-$cerrado.*

Demostración

Es fácil ver que A° es balanceado y convexo. Sea $y_0 \in \overline{A^{\circ}}^{\sigma(Y,X)}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in A$. Existe $y \in Y$, con $|\beta(x, y)| < \varepsilon$, tal que $y_0 + y \in A^{\circ}$, y por tanto

$$\begin{aligned} |\beta(x, y_0)| &= |\beta(x, y_0 + y - y)| \\ &\leq |\beta(x, y_0 + y)| + |\beta(x, y)| < 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε es arbitraria, entonces

$$|\beta(x, y_0)| \leq 1,$$

y esto vale para cualquier $x \in A$, por tanto $y_0 \in A^{\circ}$. $\square$

Debido a que X y Y juegan papeles simétricos, tenemos el siguiente

Corolario 17 *Sea* (X,Y) *un par lineal para la forma* β *y sea* $B \subset Y$. *Entonces* ${}^{\circ}B$ *es balanceado, convexo y* $\sigma(X,Y)-$*cerrado.*

Teorema 18 (Teorema de las bipolares) *Sea* (X,Y) *un par lineal para la forma* β *y sean* $A \subset X$ *y* $B \subset Y$. *Entonces* ${}^{\circ}(A^{\circ})$ *es el mínimo conjunto balanceado, convexo y* $\sigma(X,Y)-$*cerrado que contiene a* A *y* $({}^{\circ}B)^{\circ}$ *es el mínimo conjunto balanceado, convexo y* $\sigma(Y,X)-$*cerrado que contiene a* B.

Corolario 19 *Sea* (X,Y) *un par lineal para la forma* β. *Si* $A \subset X$ *es balanceado y convexo, entonces*

$$
{}^{\circ}(A^{\circ}) = \overline{A}^{\sigma(X,Y)}.
$$

De igual forma, si $B \subset X$ *es balanceado y convexo, entonces*

$$
({}^{\circ}B)^{\circ} = \overline{B}^{\sigma(Y,X)}.
$$

Señalamos que las proposiciones **4** y **14** son un caso particular de este corolario.

1.3 La característica de un subespacio.

En esta sección recordamos la definición de *la característica de un subespacio* V de X^* y demostramos algunas desigualdades, mismas que nos ayudarán a demostrar más adelante algunas isometrías entre espacios de Banach.

Definición 20 *Sea* X *un espacio de Banach y sea* V *un subespacio de* X^*. La característica de V *es el máximo número* $r(V)$ *tal que la bola cerrada unitaria de* V *es* w$^*-$*densa en la bola cerrada de radio* $r(V)$, *con centro en* 0, *de* X^*.

Es claro que $0 \leq r(V) \leq 1$.

Proposición 21 *Sea* X *un espacio de Banach con más de un elemento y sea* V *un subespacio de* X^* *con característica* $r(V)$. *Entonces*

$$
r(V) = \frac{1}{\sup\limits_{x \in \Sigma_X} \|x\|} = \inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{f \in V \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \inf_{\substack{x \in X, \|x\|=1 \\ F \in V^{\perp}}} \|\hat{x} + F\|,
$$

donde $\sum_X = \overline{B_X[0,1]}^{\sigma(X,V)}$, *y donde convenimos que* $\frac{1}{\infty} = 0$.

Demostración

Sabemos que (X, V) es un par lineal para la funcional bilineal $\beta(x, f) = f(x)$. Así pues, aplicando el corolario **19** se tiene

$$\Sigma_X = \overline{\{x \in X : \|x\| \leq 1\}}^{\sigma(X,V)} = ^\circ(\{x \in X : \|x\| \leq 1\}^\circ),$$

y es fácil ver que

$$^\circ(\{x \in X : \|x\| \leq 1\}^\circ) = \{x \in X : \|x\|_V \leq 1\},$$

donde $\|x\|_V = \|\widehat{x}\,|_V\|$. Por tanto

$$\Sigma_X = \{x \in X : \|x\|_V \leq 1\}.$$

Sabemos también que (X^*, X) es un par lineal para la funcional bilineal $\gamma(f, x) = f(x)$, y de nuevo el corolario **19** implica que

$$\overline{\{f \in V : \|f\| \leq 1\}}^{w^*} = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1 \text{ si } \|x\|_V \leq 1\}.$$

Sea

$$s = \sup_{x \in \Sigma_X} \|x\| = \sup\{\|x\| : x \in X, \ \|x\|_V \leq 1\}.$$

Supongamos que $r(V) = 0$. Para cada $t > 0$ existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| < t$ y $f \notin \overline{\{f \in V : \|f\| \leq 1\}}^{w^*}$. O sea, $|f(x_0)| > 1$ para alguna $x_0 \in X$, tal que $\|x_0\|_V \leq 1$. Entonces, $t\|x_0\| > 1$ y, por tanto, $s > \frac{1}{t}$. Así, $s = \infty$ y se cumple que $r(V) = \frac{1}{s}$.

Supongamos que $r(V) > 0$. Afirmamos que $s \leq \frac{1}{r(V)}$, pues en caso contrario existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\|_V \leq 1$ y $\frac{1}{r(V)} < \|x_0\|$. El teorema de Hahn-Banach nos asegura que existe $f_0 \in X^*$ tal que $\|f_0\| = 1$ y $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Luego entonces tenemos

$$|r(V) f_0(x_0)| = r(V)\|x_0\| > 1,$$

y por tanto,

$$r(V) f_0(x_0) \in \overline{\{f \in V : \|f\| \leq 1\}}^{w^*},$$

no obstante que $\|r(V) f_0\| = r(V)$. Por nuestra definición, $r(V) \leq \frac{1}{s}$. Por otra parte, es claro que $s \geq 1$. Sea $f \in X^*$ tal que $\|f\| < \frac{1}{s}$ y sea $x \in X$ tal que $\|x\|_V \leq 1$. Entonces

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq 1.$$

Es decir,

$$\left\{f \in X^* : \|f\| < \frac{1}{s}\right\} \subset \overline{\{f \in V : \|f\| \leq 1\}}^{w^*}.$$

De la definición de $r(V)$ obtenemos

$$\frac{1}{s} \leq r(V).$$

Así, hemos probado en general que

$$r(V) = \frac{1}{\sup\limits_{x \in \Sigma_V} \|x\|}.$$

La igualdad

$$\inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{f \in V \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \inf_{\substack{x \in X, \|x\|=1 \\ F \in V^\perp}} \|\widehat{x} + F\|$$

se sigue de que $\|x\|_V = \inf\limits_{\substack{x \in X, \|x\|=1 \\ F \in V^\perp}} \|\widehat{x} + F\|$, de acuerdo a la proposición **5**, y de que $\|x\|_V = \inf\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup\limits_{\substack{f \in V \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|$, debido a la definición de $\|x\|_V$.

Finalmente,

$$\frac{1}{\sup\limits_{x \in \Sigma_X} \|x\|} = \inf_{\substack{x \in X, x \neq 0 \\ \|x\|_V \leq 1}} \frac{1}{\|x\|},$$

tanto cuando $\sup\limits_{x \in \Sigma_X} \|x\|$ es finito, como cuando es infinito. Es sencillo verificar las siguientes igualdades:

$$\inf_{\substack{x \in X, x \neq 0 \\ \|x\|_V \leq 1}} \frac{1}{\|x\|} = \inf_{\substack{x \in X, x \neq 0 \\ \|x\|_V \leq 1}} \frac{\|x\|_V}{\|x\|} = \inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|x\|_V,$$

de donde

$$\frac{1}{\sup\limits_{x \in \Sigma_X} \|x\|} = \inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{f \in V \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|. \quad \square$$

1.4 Operadores compactos

Existe una clase de operadores muy importante: los operadores compactos. Estos han sido ampliamente estudiados. Aquí sólo presentamos una variante de un resultado clásico de los operadores compactos: la Alternativa de Fredholm, que nos servirá para demostrar uno de los teoremas centrales de esta tesis.

Definición 22 *Sean X y Y dos espacios de Banach y sea $T \in B(X,Y)$. Sea*

$$B = B_X[0,1].$$

Decimos que T es compacto *si $T(B)$ es relativamente compacto, es decir, si $\overline{T(B)}$ es compacto.*

Todo operador con rango de dimensión finita es compacto.

Definición 23 *Sean X y Y dos espacios de normados y sea $T \in B(X,Y)$. Definimos* el adjunto *de T como el operador $T^* \in B(Y^*, X^*)$ tal que para cada $y^* \in Y^*$,*

$$T^*(y^*) = y^* \circ T.$$

Se tiene que $\|T^*\| = \|T\|$. Como es de esperarse, la compacidad de un operador la comparte su adjunto. De hecho, tenemos la siguiente

Proposición 24 *Sean X y Y dos espacios de Banach y sea $T \in B(X,Y)$. Entonces T es un operador compacto si y sólo si T^* es compacto.*

Proposición 25 (Alternativa de Fredholm) *Sean X y Y dos espacios de Banach y sea $T \in L(X,Y)$ un operador compacto. Sea $\lambda \in \Im$, con $\lambda \neq 0$. Si $\lambda I - T$ es inyectivo, entonces es suprayectivo.*

1.5 Algunos resultados técnicos.

Para finalizar este capítulo, citamos algunos resultados que nos ayudarán más adelante.

Proposición 26 *Sea X un espacio de Banach y sean Y y Z dos subespacios cerrados de X tales que*

$$Y \cap Z = \{0\}.$$

Una condición necesaria y suficiente para que la suma directa $Y \oplus Z$ sea un subespacio cerrado, es que exista $\delta > 0$ tal que $\|y - z\| \geq \delta$ para todas $y \in Y$ y $z \in Z$, con $\|y\| = 1$ y $\|x\| = 1$.

Proposición 27 *Sea X un espacio de Banach y M y N dos subespacios cerrados de X tales que*

$$X = M \oplus N.$$

Definamos $|||x||| = \|m\| + \|n\|$ si $x = m + n$, con $m \in M$ y $n \in N$. Entonces $|||\cdot|||$ es una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$.

Proposición 28 *Sea X un espacio de Banach y sean $f_1, ..., f_n$ y f funcionales lineales en X. Sea*

$$N = \{x \in X \mid f_i(x) = 0 \text{ para toda } i = 1, ..., n\}.$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) *Existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Im$ tales que* $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$.

ii) *Existe $\gamma < \infty$ tal que para toda $x \in X$,* $|f(x)| \leq \gamma \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|$.

iii) $f(x) = 0$ *para toda $x \in N$.*

Proposición 29 (E. Helly) *Sea X un espacio de Banach. Sean $\gamma \geq 0$ y $f_1, ..., f_n \in X^*$. Dados $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Im$ y $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que para cada $i = 1, ..., n$ se tiene que*

$$f_i(x_\varepsilon) = \alpha_i$$

y

$$\|x_\varepsilon\| \leq \gamma + \varepsilon$$

si y sólo si para cualesquiera $\beta_1, ..., \beta_n \in \Im$ se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right| \leq \gamma \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|.$$

Capítulo 2

Bases en espacios de Banach.

En este capítulo damos las definiciones y resultados clásicos de la teoría de bases de Schauder en espacios de Banach, mismos que nos servirán para apoyar el material que presentamos en el capítulo **3**, parte central de esta tesis.

En lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, X será un espacio de Banach de dimensión infinita sobre $\Im$, equipado con la norma $\|\cdot\|$.

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$ implica que $a_i = 0$ para toda $i \in \mathbf{N}$.

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ implica que $a_i = b_i$ para toda $i \in \mathbf{N}$, si ambas series convergen.

Cuando alguna de estas condiciones se cumple, entonces $x_i \neq 0$ para toda $i \in \mathbf{N}$.

A toda sucesión que satisface *i)* se le suele llamar w-*linealmente independiente*.

2.1 Bases y resultados básicos.

Definición 30 *Una sucesión* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *en* X *es llamada* una base de

Schauder de X, *o simplemente* una base de X, *si para cada* $x \in X$ *existe una única sucesión de escalares* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ *tal que*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *en* X *que sea base de* $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ *es llamada* una sucesión básica.

Toda sucesión básica es w-linealmente independiente.

Es claro que no cualquier espacio de Banach posee una base. De hecho, si X posee una base, digamos $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces X es separable, pues el conjunto numerable

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_i \in \mathbf{Q},\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbf{N}\right\}$$

es denso en X. Por tanto, un espacio de Banach que no sea separable, por ejemplo ℓ^{∞}, *no* puede tener una base. Así pues, es natural preguntarse: ¿todo espacio de Banach separable posee una base? Esta pregunta, conocida como *el problema de la base*, fue resuelta en forma negativa por P. Enflo [**2**]. En contraste con esto, cualquier espacio de Banach posee una sucesión básica (teorema **51**).

En cualquier espacio de Banach con base es posible definir una norma equivalente a la original y con respecto a la cual diversos resultados son enunciados. Procedemos a definir dicha norma en un contexto un poco más general.

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X w-linealmente independiente. Sea

$$Y = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ para una (única) sucesión de escalares } \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \right\}.$$

Definimos $|||\cdot||| : Y \to \Re$ como

$$|||x||| = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.$$

Es trivial comprobar que Y es un subespacio de X y que $|||\cdot|||$ es una norma en Y que satisface

$$\|y\| \leq |||y||| \qquad \text{para toda } y \in Y.$$

Notamos que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X, entonces $Y = X$ y, en este caso, $|||\cdot|||$ está definida para todo $x \in X$.

Lema 31 *Sean* X*,* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *y* Y *como antes. Si* $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy en* $(Y, |||\cdot|||)$*, con* $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i}x_i$*, entonces para cada* $i \in \mathbf{N}$ *la sucesión de escalares* $\{a_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ *converge. Mas aún,* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ *converge en* $(X, \|\cdot\|)$*, donde* $a_i = \lim_{n\to\infty} a_{n,i}$*, y* $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ *converge a* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ *en* $(Y, |||\cdot|||)$*; es decir,* $(Y, |||\cdot|||)$ *es completo.*

DEMOSTRACIÓN

En vista de que $\Im$ es completo, basta probar que $\{a_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para toda $i \in \mathbf{N}$, para obtener la primera afirmación.

Haremos inducción sobre i. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbf{N}$ tal que para cualesquiera $n, m > N$, sucede que

$$|||y_n - y_m||| < \varepsilon \|x_1\|,$$

o lo que es lo mismo,

$$\sup_{r\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{r} (a_{n,i} - a_{m,i})\, x_i \right\| < \varepsilon \|x_1\|,$$

en particular si $r = 1$,

$$|a_{n,1} - a_{m,1}| \cdot \|x_1\| = \|(a_{n,1} - a_{m,1})\, x_1\| < \varepsilon \|x_1\|,$$

por tanto,

$$|a_{n,1} - a_{m,1}| < \varepsilon,$$

es decir, $\{a_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Supongamos que las sucesiones $\{a_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy para toda $i < k$, con $k \in \mathbf{N}$. Existe $N \in \mathbf{N}$ para la que $n, m > N$ implica

$$|||y_n - y_m||| < \frac{\varepsilon \|x_k\|}{2},$$

o lo que es lo mismo,

$$\sup_{r\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{r} (a_{n,i} - a_{m,i})\, x_i \right\| < \frac{\varepsilon \|x_k\|}{2},$$

en particular si $r = k$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} (a_{n,i} - a_{m,i})\, x_i \right\| < \frac{\varepsilon \|x_k\|}{2},$$

por tanto,

$$\begin{aligned}|a_{n,k} - a_{m,k}| \cdot \|x_k\| &= \|(a_{n,k} - a_{m,k})\, x_k\| \\ &< \tfrac{\varepsilon\|x_k\|}{2} + \left\|\sum_{i=1}^{k-1} (a_{n,i} - a_{m,i})\, x_i\right\| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon\|x_k\|}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} |a_{n,i} - a_{m,i}| \cdot \|x_i\|,\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$|a_{n,k} - a_{m,k}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{|a_{n,i} - a_{m,i}| \cdot \|x_i\|}{\|x_k\|}.$$

Por hipótesis de inducción, existen $N_1, N_2, ..., N_{k-1} \in \mathbf{N}$ de forma que para cualesquiera $n, m > N_i$, con $i = 1, 2, ..., k-1$, sucede que

$$|a_{n,i} - a_{m,i}| < \frac{\varepsilon\,\|x_k\|}{2\,\|x_i\|\,(k-1)},$$

así pues, si $N_k = \max\{N_1, N_2, ..., N_{k-1}, N\}$, entonces para cualesquiera $n, m > N_k$ tenemos que

$$|a_{n,k} - a_{m,k}| < \varepsilon,$$

es decir, $\{a_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Con esto queda probada la primera afirmación

Ya que $\|x\| \leq |||x|||$ para toda $x \in X$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|$, y por tanto converge en $(X, \|\cdot\|)$ a un elemento $y \in X$. Se probará que $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, donde

$$a_i = \lim_{n\to\infty} a_{n,i} \qquad \text{para cada } i \in \mathbf{N}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tal que si $n > N_1$, entonces

$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tal que para cualesquiera $n, m > N_2$, sucede que

$$\sup_{r\in\mathbf{N}} \left\|\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i - \sum_{i=1}^{r} a_{m,i}x_i\right\| = |||y_n - y_m||| < \frac{\varepsilon}{4},$$

al tomar el límite en la expresión anterior, cuando $m \to \infty$, se tiene

$$\sup_{r\in\mathbf{N}} \left\|\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \leq \tfrac{\varepsilon}{4} \qquad \text{si } n > N_2. \tag{2.1}$$

Así,

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{para toda } r \in \mathbf{N} \text{ y } n > N_2.$$

Sea $n > \max(N_1, N_2)$. De la desigualdad

$$\begin{aligned}&\left\|y - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \\ &\leq \|y - y_n\| + \left\|y_n - \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\|\end{aligned}$$

se sigue

$$\left\|y - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| \leq \left\|y_n - \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}x_i\right\| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para toda } r \in \mathbf{N}.$$

Así, para toda r suficientemente grande

$$\left\|y - \sum_{i=1}^{r} a_i x_i\right\| < \varepsilon.$$

Concluimos que

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Por la definición de Y se tiene que $y \in Y$ y por (2.1) concluimos que y_n converge a y en $(Y, |||\cdot|||)$. □

Del lema se sigue la siguiente

Proposición 32 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Entonces X es completo con respecto a la norma $|||\cdot|||$.*

Proposición 33 *Las normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN

Es es una consecuencia inmediata de la proposición **32**, del teorema de la función abierta y del hecho de que $\|x\| \leq |||x|||$ para toda $x \in X$. □

Sean X y Y dos espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo lineal, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es base de X si y sólo si $\{T(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de Y. Así, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de $(X, \|\cdot\|)$ si y sólo si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es base de $(X, |||\cdot|||)$.

Definición 34 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Para cada $n \in \mathbf{N}$ definimos $P_n : X \to X$ como*

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

y la llamamos la n-ésima proyección asociada a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Proposición 35 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Las proyecciones asociadas a la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ son operadores lineales acotados y tales que*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|P_n\| < \infty.$$

Demostración

Es claro que para cada $n \in \mathbf{N}$, P_n es lineal. Para toda $x \in X$ y para toda $n \in \mathbf{N}$ sucede que $\|P_n(x)\| \leq |||x|||$ y, por la proposición **33**, sabemos que existe $\alpha > 0$ tal que $|||x||| \leq \alpha \|x\|$, por tanto

$$\|P_n(x)\| \leq \alpha \|x\|.$$

Así, P_n está acotada y

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|P_n\| \leq \alpha < \infty. \ \square$$

Definición 36 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X.* La constante básica K *de la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ se define como*

$$K = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|P_n\|.$$

Una base cuya constante básica es 1 es llamada una base monótona.

Observaciones 37 *El valor de la constante básica no sólo depende de la sucesión sino también de la norma en X, ya que la norma para las proyecciones es la inducida por la norma considerada en X. Así, al tomar una norma equivalente, el valor de la constante básica puede variar.*
Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X, con constante básica K. Entonces $\|P_n(x)\| \leq |||x||| \leq K \|x\|$ para toda $x \in X$ y $n \in \mathbf{N}$.
La constante básica de cualquier base siempre será mayor o igual que 1, pues $\lim_{n\to\infty} \|P_n(x)\| = 1$ para cualquier $x \in X$, con $\|x\| = 1$.

Lema 38 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Una condición necesaria y suficiente para que la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sea monótona es que para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, la sucesión*

$$\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$$

sea no decreciente.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona y que existe una colección de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{n_0+1}$, con $n_0 \in \mathbf{N}$, tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n_0} a_i x_i\right\| > \left\|\sum_{i=1}^{n_0+1} a_i x_i\right\|.$$

Sea $x' = \sum_{i=1}^{n_0+1} a_i x_i$ y sea

$$x = \frac{x'}{\|x'\|} = \sum_{i=1}^{n_0+1} \frac{a_i}{\|x'\|} x_i.$$

Entonces $\|x\| = 1$, y es claro que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n_0} \frac{a_i}{\|x'\|} x_i\right\| > \left\|\sum_{i=1}^{n_0+1} \frac{a_i}{\|x'\|} x_i\right\|,$$

es decir,

$$\|P_{n_0}(x)\| > \|P_{n_0+1}(x)\| = \|x\| = 1,$$

lo que implica que $\|P_{n_0}\| > 1$, lo que contradice el hecho de que la constante básica es 1.

Inversamente, si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ es tal que $\|x\| = 1$ y $n \in \mathbf{N}$, entonces

$$\|P_n(x)\| \leq \|P_m(x)\| \qquad \text{para cualquier } m > n,$$

ya que la sucesión

$$\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$$

es no decreciente. Tomando el límite cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$\|P_n(x)\| \leq 1.$$

Así,
$$\|P_n\| \leq 1.$$

Finalmente, como $n \in \mathbf{N}$ es arbitraria, concluimos que
$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|P_n\| \leq 1.$$

Por lo señalado en **37**, se tiene
$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|P_n\| \geq 1.$$

Así, la constante básica es 1. □

La siguiente proposición nos indica que dada una base en un espacio de Banach X, es posible siempre definir una norma para la cual la base es monótona.

Proposición 39 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Para la norma $|||\cdot|||$, la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona.*

DEMOSTRACIÓN

Es claro que para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, sucede que la sucesión
$$\left\{\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|\right|\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$$
es no decreciente, por tanto el lema **38** nos asegura que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona. □

Definición 40 *Una sucesión básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en X* es acotada *si existen $m, M > 0$ tales que*
$$m \leq \| x_i \| \leq M \qquad \textit{para toda } i \in \mathbf{N}.$$

Decimos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es normalizada *si $\|x_i\| = 1$ para toda $i \in \mathbf{N}$.*

Dada una base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de X y una sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, con $\lambda_i \neq 0$ para toda $i \in \mathbf{N}$, se tiene que $\{\lambda_i x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X, así, una base siempre puede substituirse por una base acotada, de hecho, normalizada.

Como ya mencionamos, la proposición **39** nos asegura que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X, entonces podremos encontrar una norma equivalente tal que la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona. Si la base es acotada, algo más puede obtenerse. En efecto, si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base acotada, entonces podemos definir $|||\cdot|||' : X \to \Re$ como

$$|||x|||' = \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right|\right|\right|' = \sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{\|x_n\|} \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|.$$

Es sencillo ver, usando que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base acotada, que $|||\cdot|||'$ es una norma equivalente a $|||\cdot|||$, y por tanto a la original. Para $|||\cdot|||'$, la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ no sólo es monótona, sino que también es normalizada. Así pues, tenemos la siguiente

Proposición 41 *Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base acotada de X, entonces existe una norma equivalente a la original tal que la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona y normalizada.*

Cuando $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es sólo una sucesión básica en X, todo lo dicho tiene sentido a condición de sustituir a X por $[x_i]_{i=1}^{\infty}$.

Existe un criterio, que será de gran utilidad, para saber cuándo una sucesión en un espacio de Banach es una base.

Teorema 42 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

i) $x_i \neq 0$ *para toda* $i \in \mathbf{N}$.

ii) *Existe $K > 0$ tal que para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y para cualesquiera $n, m \in \mathbf{N}$, con $n < m$,*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

iii) $[x_i]_{i=1}^{\infty} = X$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X con constante básica K. Es claro que *i)* y *iii)* se satisfacen. Por **37**, $|||x||| \leq K\|x\|$ para toda $x \in X$; así, si $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de escalares, entonces para cualesquiera $n, m \in \mathbf{N}$, con $n < m$, sucede que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right|\right|\right| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|,$$

lo que demuestra que *ii)* también se satisface.

En cuanto a la suficiencia, observemos que *i)* y *ii)* implican que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es w-linealmente independiente. Por el lema **31** sabemos que

$$Y = \left\{x \in X : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ para una (única) sucesión de escalares } \{a_i\}_{i=1}^{\infty}\right\}$$

es $|||\cdot|||$ −completo. Mostraremos, usando *ii)*, que $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$ en Y, y por tanto, Y es cerrado en X.

Sabemos que $\|y\| \leq |||y|||$ para toda $y \in Y$. Por otra parte, si $y \in Y$ y $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces *ii)* implica

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\| \quad \text{para toda } n \in \mathbf{N},$$

y, por tanto,

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|,$$

o lo que es lo mismo,

$$|||y||| \leq K \|y\|,$$

es decir, $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes en Y. Por consiguiente, $(Y, \|\cdot\|)$ es completo y, por tanto, cerrado en X. Como es claro que $\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty} \subset Y$, se sigue de *iii)* que $X = Y$. Así, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X.

Corolario 43 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de X si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

i) $x_i \neq 0$ *para toda* $i \in \mathbf{N}$.

ii) *Existe $K > 0$ tal que para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y para cualesquiera $n, m \in \mathbf{N}$, con $n < m$,*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

2.2 Ejemplos de bases.

En esta sección damos algunos ejemplos de espacios de Banach que poseen base.

Ejemplo 44 *Los vectores unitarios $e_1 = (1, 0, 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ...), ...$ forman una base para el espacio de Banach*

$$c_0 = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : |a_n| \to 0,\ n \to \infty\},$$

equipado con la norma del supremo, es decir, $\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n|$.

Ejemplo 45 *Los vectores unitarios* $e_1 = (1,0,0,...)$, $e_2 = (0,1,0,...)$, ... *forman una base para el espacio de Banach*

$$\ell^p = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\} \quad con\ 1 \leq p < \infty,$$

equipados con la norma $\left\| \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Ejemplo 46 *Si* $x_1 = (1,1,...)$ *y* $x_n = e_{n-1}$ *para* $n \geq 2$, *entonces* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una base del espacio de Banach*

$$c = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ es convergente} \right\},$$

equipado con la norma $\left\| \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \right\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n|$. *De hecho, si* $a_n \to a_0$, *entonces*

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_0 x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} - a_0) x_n.$$

Ejemplo 47 El Sistema de Haar. Base de $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$. *Para cada* $n \in \mathbf{N}$, *definimos a* $f_n \in L^p([0,1])$ *como sigue:*

$$f_1(t) = 1,$$

$$f_{2^k+l}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^k} & \text{si} \quad t \in \left[\frac{2l-2}{2^{k+1}}, \frac{2l-1}{2^{k+1}}\right), \\ -\sqrt{2^k} & \text{si} \quad t \in \left[\frac{2l-1}{2^{k+1}}, \frac{2l}{2^{k+1}}\right), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

donde $l = 1, 2, ..., 2^k$ y $k = 0, 1, 2, ...$. A la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se le llama *el sistema de Haar*.

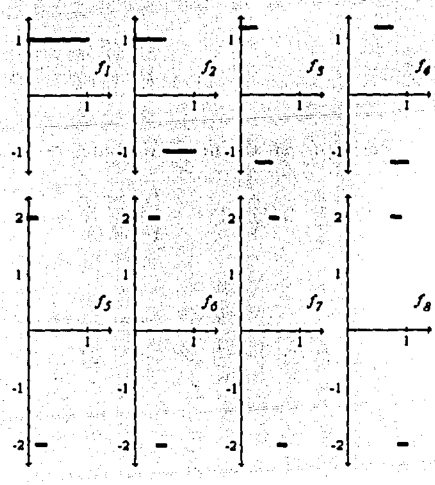

Fig. 1

En la figura **1** vemos cual es el comportamiento de dichas funciones.

Sean $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{r-1}$ los puntos de discontinuidad de las funciones $f_1, f_2, ..., f_r$ y sean $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_r = 1$. Si $\alpha_k < t < \alpha_{k+1}$, con $k = 0, 1, ..., r-1$, entonces para cualquier $\tau \in [0,1]$, sucede que

$$\sum_{i=1}^{r} f_i(t) f_i(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{k+1}-\alpha_k} & \text{si} \quad \alpha_k < \tau < \alpha_{k+1}, \\ 0 & \text{si} \quad \tau < \alpha_k \text{ ó } \alpha_{k+1} < \tau. \end{cases}$$

Cuando $r = 1$ esta afirmación es trivial. Supongamos pues que es cierta para alguna $r \in \mathbf{N}$. Sean $\alpha'_1 < \alpha'_2 < ... < \alpha'_r$ los puntos de discontinuidad de $f_1, f_2, ..., f_{r+1}$ y sean $\alpha'_0 = 0$ y $\alpha'_{r+1} = 1$. Existe $1 \le j \le r$ tal que

$$0 = \alpha_1 = \alpha'_1, ..., \alpha_{j-1} = \alpha'_{j-1} \quad \text{y}$$
$$\alpha_j = \alpha'_{j+1}, \alpha_{j+1} = \alpha'_{j+2}, ..., \alpha_r = \alpha'_{r+1} = 1,$$

y así

$$f_{r+1}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & \text{si} \quad t \in \left[\alpha'_{j-1}, \alpha'_j\right] = \left[\frac{2l-2}{2^{m+1}}, \frac{2l-1}{2^{m+1}}\right), \\ -\sqrt{2^m} & \text{si} \quad t \in \left[\alpha'_j, \alpha'_{j+1}\right] = \left[\frac{2l-1}{2^{m+1}}, \frac{2l}{2^{m+1}}\right), \\ 0 & \text{en} \quad \text{cualquier otro caso,} \end{cases}$$

donde $r + 1 = 2^m + l$, con $1 \le l \le 2^m$. Sea $0 \le k \le r$ y $\alpha'_k < t < \alpha'_{k+1}$. Si $k \ne j-1$ y $k \ne j$, entonces $f_{r+1}(t) = 0$ y por hipótesis de inducción tenemos que

$$\sum_{i=1}^{r+1} f_i(t) f_i(\tau) = \sum_{i=1}^{r} f_i(t) f_i(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha'_{k+1}-\alpha'_k} & \text{si} \quad \alpha'_k < \tau < \alpha'_{k+1}, \\ 0 & \quad \tau < \alpha'_k \text{ ó } \alpha'_{k+1} < \tau. \end{cases}$$

Si $k = j-1$, entonces $f_{r+1}(t) = \sqrt{2^m}$, por lo que

$$f_{r+1}(t) f_{r+1}(\tau) = \begin{cases} 2^m & \text{si} \quad \alpha'_k < \tau < \alpha'_{k+1}, \\ -2^m & \text{si} \quad \alpha'_{k+1} < \tau < \alpha'_{k+2}, \\ 0 & \text{si} \quad \tau < \alpha'_k \text{ ó } \alpha'_{k+2} < \tau. \end{cases}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\sum_{i=1}^{r} f_i(t) f_i(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha'_{k+2}-\alpha'_k} = 2^m & \text{si} \quad \alpha'_k < \tau < \alpha'_{k+2}, \\ 0 & \text{si} \quad \tau < \alpha'_k \text{ ó } \alpha'_{k+2} < \tau \end{cases}$$

y así

$$\sum_{i=1}^{r+1} f_i(t) f_i(\tau) = \begin{cases} 2^m + 2^m = 2^{m+1} = \frac{1}{\alpha'_{k+1}-\alpha'_k} & \text{si} \quad \alpha'_k < \tau < \alpha'_{k+1}, \\ 2^m - 2^m = 0 & \text{si} \quad \alpha'_{k+1} < \tau < \alpha'_{k+2}, \\ 0 & \text{si} \quad \tau < \alpha'_k \text{ ó } \alpha'_{k+2} < \tau. \end{cases}$$

Análogamente si $k = j$ se obtiene lo deseado.

Considerando lo anterior, dada $f \in L^p[0,1]$, para cada $i \in \mathbf{N}$ definimos a $a_i \in \Im$ como

$$a_i = \int_0^1 f(\tau) f_i(\tau) \, d\tau$$

y para cada $n \in \mathbf{N}$ definimos a $P_n : L^p[0,1] \rightarrow L^p[0,1]$ como

$$P_n(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

Es sencillo checar que P_n es lineal para toda $n \in \mathbf{N}$. Mas aún, sean $n \in \mathbf{N}$ y $\alpha_0, ... \alpha_n$ como antes. Si $\alpha_k < t < \alpha_{k+1}$, con $k = 0, 1, ..., n-1$, entonces por lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \langle P_n(f), t \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i f_i, t \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 f(\tau) f_i(\tau) \, d\tau \right) f_i(t) \\ &= \int_0^1 \left(f(\tau) \sum_{i=1}^{n} f_i(t) f_i(\tau) \right) d\tau = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{f(\tau)}{a_{k+1} - a_k} d\tau \qquad (2.2) \\ &= \frac{1}{a_{k+1} - a_k} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\tau) \, d\tau, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\langle P_n(f), t \rangle|^p \, dt &= \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\langle P_n(f), t \rangle|^p \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\frac{1}{|a_{k+1} - a_k|^p} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\tau) \, d\tau \right|^p \right) dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \cdot \left| \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\tau) d\tau}{a_{k+1} - a_k} \right|^p. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\tau) \, d\tau \right|^p \leq |a_{k+1} - a_k|^{p-1} \cdot \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(\tau)|^p \, d\tau$$

para toda $k = 0, 1, ..., n-1$, y por tanto

$$\int_0^1 |\langle P_n(f), t \rangle|^p \, dt \leq \int_0^1 |f(\tau)|^p \, d\tau,$$

es decir, $\|P_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$, y como $f \in L^p[0,1]$ fue arbitraria, entonces tenemos que

$$\|P_n\| \leq 1,$$

es decir, P_n es continua para toda $n \in \mathbf{N}$.

De lo anterior, si $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares arbitraria y si $n, m \in \mathbf{N}$, con $n < m$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} b_i f_i\right\| = \left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{m} b_i f_i\right)\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} b_i f_i\right\|.$$

Si f es continua, entonces (2.2) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\| = 0,$$

es decir, $\langle f_i\rangle_{i=1}^{\infty}$ es denso en $C([0,1])$ y es bien sabido que $C([0,1])$ es denso en $L^p[0,1]$, por tanto tenemos que $\langle f_i\rangle_{i=1}^{\infty}$ es denso en $L^p[0,1]$ y así el teorema **42** nos asegura que $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base.

Las bases que han sido descritas hasta ahora son monótonas, es decir, tienen constante básica igual a 1. Presentamos ahora un ejemplo de una base no monótona.

Ejemplo 48 *Para ℓ^1, definimos $x_1 = \frac{1}{\lambda} e_1$, $x_2 = e_2 - e_3$ y $x_n = -\frac{1}{\lambda} e_1 + e_n$ para toda $n \geq 3$, donde $0 < \lambda \leq 1$ y $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la base canónica de ℓ^1.*

Esta base, a diferencia de todas las anteriores, tiene una constante básica igual a $2 + \frac{1}{\lambda}$.

2.3 Sucesiones básicas.

Proposición 49 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X tal que $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ es de codimensión $r+1$, con $r \in \mathbf{N}$. Sean $x_{-r}, ..., x_0 \in X$ tales que*

$$X = [x_{-r}, ..., x_0] \oplus [x_i]_{i=1}^{\infty}.$$

Entonces $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$ es una base de X.

Lema 50 *Sea Y un subespacio de X de dimensión finita. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$ para toda $y \in Y$ y para toda $\lambda \in \Im$, o lo que es lo mismo, $1 \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$ para toda $y \in Y$, con $\|y\| = 1$, y para toda $\lambda \in \Im$.*

DEMOSTRACIÓN

Podemos suponer que $\varepsilon < 1$. Sea $\{y_i\}_{i=1}^n \subset S_Y(0,1)$ una $\frac{\varepsilon}{2}$-red finita. Así, para cada $y \in Y$, con $\|y\| = 1$, existe $i \in \{1, ..., n\}$ para la cual

$$\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por el teorema de Hahn-Banach, existen $y_1^*, ..., y_n^* \in X^*$, con $\|y_i^*\| = 1$ para toda $i = 1, ..., n$, y tales que

$$y_i^*(y_i) = \|y_i\| = 1.$$

Existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $y_i^*(x) = 0$ para toda $i = 1, ..., n$, pues de no ser así se cumpliría *iii)* de la proposición **28** para cualquier $f \in X^*$, y por tanto *i)*; así, tendríamos que X^* sería de dimensión finita, contradiciendo nuestra suposición general de que X es de dimensión infinita. Sea $y \in Y$, con $\|y\| = 1$. Existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces para cualquier $\lambda \in \Im$, sucede que

$$|\|y + \lambda x\| - \|\lambda x + y_i\|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo que

$$\|y + \lambda x\| > \|y_i + \lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2},$$

y ya que $\|y_i^*\| = 1$, tenemos

$$\|y_i + \lambda x\| \geq y_i^*(y_i + \lambda x) = 1,$$

así pues,

$$\|y + \lambda x\| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon},$$

de donde finalmente obtenemos $1 < (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$. □

Teorema 51 *X posee una sucesión básica.*

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ una sucesión de número positivos tales que $\prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i) \leq 1 + \varepsilon$. Sea $x_1 \in X$, con $\|x_1\| = 1$.

Por el lema **50**, existe $x_2 \in X$, con $\|x_2\| = 1$, tal que para cualesquiera $y \in [x_1]$ y $\lambda \in \Im$, sucede que

$$\|y\| \leq (1 + \varepsilon_1) \|y + \lambda x_2\| .$$

Podemos construir una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ tal que $\|x_i\| = 1$ para cada $i \in \mathbf{N}$ y tal que para cada $n \in \mathbf{N}$, sucede que

$$\|y\| \leq (1 + \varepsilon_n) \|y + \lambda x_{n+1}\|$$

para cualesquiera $y \in [x_1, ..., x_n]$ y $\lambda \in \Im$. Así pues, dada una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, se tiene

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| &\leq (1 + \varepsilon_n) \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\| \\ &\leq (1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_{n+1}) \left\|\sum_{i=1}^{n+2} a_i x_i\right\| \\ \leq ... &\leq \prod_{j=n}^{m-1} (1 + \varepsilon_j) \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \qquad \text{si } m > n, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq (1 + \varepsilon) \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| ,$$

lo que es suficiente, en virtud del corolario **43**, para que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sea una sucesión básica, puesto que $x_i \neq 0$ para toda $i \in \mathbf{N}$. □

Definición 52 *Sean X y Y dos espacios de Banach sobre el mismo campo $\Im$ y sean $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones en X y Y, respectivamente. Decimos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ son* equivalentes *si para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge si y sólo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ converge. En este caso escribiremos $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Proposición 53 *Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces existen $n_0 \in \mathbf{N}$ y $K > 0$ tales que para cualquier $m \in \mathbf{N}$, con $m > n_0$, y para cualesquiera escalares $a_{n_0}, ..., a_m$, sucede que*

$$\left\|\sum_{i=n_0}^{m} a_i y_i\right\| \leq K \max_{n_0 \leq k \leq m} \left\|\sum_{i=n_0}^{k} a_i x_i\right\|$$

y

$$\left\|\sum_{i=n_0}^{m} a_i x_i\right\| \leq K \max_{n_0 \leq k \leq m} \left\|\sum_{i=n_0}^{k} a_i y_i\right\| .$$

DEMOSTRACIÓN

Dada la simetría de la propiedad supuesta para $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, y en vista de que si para un natural n_0 y una constante $K > 0$ se satisface cualquiera de las dos desigualdades enunciadas, entonces las mismas son satisfechas por cualesquiera $n_0' > n_0$ y $K' > K$, se sigue que basta probar que la primera desigualdad se satisface para alguna $n_0 \in \mathbf{N}$ y alguna $K > 0$.

Supongamos que dados $n_0 \in \mathbf{N}$ y $K > 0$, existen $m \in \mathbf{N}$ y una colección de escalares $a_{n_0}, ..., a_m$ tales que

$$\left\|\sum_{i=n_0}^{m} a_i y_i\right\| > K \max_{n_0 \le k \le m} \left\|\sum_{i=n_0}^{k} a_i x_i\right\|.$$

Así, si $n_0 = 1$ y $K = 2$, existen $m_1 \in \mathbf{N}$ y una colección de escalares $\{a_i\}_{i=n_0}^{m_1}$ tales que

$$\left\|\sum_{i=1}^{m_1} a_i y_i\right\| > 2 \max_{1 \le k \le m_1} \left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right\|.$$

Para $n_0 = m_1 + 1$ y $K = 2^2$, existen $m_2 \in \mathbf{N}$, con $m_2 > m_1 + 1$, y una colección de escalares $\{a_i\}_{i=m_1+1}^{m_2}$ tales que

$$\left\|\sum_{i=m_1+1}^{m_2} a_i y_i\right\| > 2^2 \max_{m_1+1 \le k \le m_2} \left\|\sum_{i=m_1+1}^{k} a_i x_i\right\|.$$

Continuando este proceso, tenemos una sucesión creciente de números enteros $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, con $m_0 = 0$, y una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, tales que para cada $n \in \mathbf{N}$, sucede que

$$\left\|\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i y_i\right\| > 2^n \max_{m_{n-1}+1 \le k \le m_n} \left\|\sum_{i=m_{n-1}+1}^{k} a_i x_i\right\|.$$

Si para cada $n \in \mathbf{N}$ definimos

$$k_n = \left\|\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i y_i\right\|,$$

entonces $k_n > 0$, y si

$$\alpha_i = \tfrac{a_i}{k_n} \qquad \text{para } i = m_{n-1} + 1, ..., m_n,$$

entonces

$$1 = \left\|\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} \alpha_i y_i\right\| > 2^n \max_{m_{n-1}+1 \le k \le m_n} \left\|\sum_{i=m_{n-1}+1}^{k} \alpha_i x_i\right\|.$$

Así, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ no es de Cauchy, y por tanto no es convergente.

Por otra parte, si $r > r' > m_{n-1} + 2$, entonces

$$\left\| \sum_{i=r'}^{r} \alpha_i x_i \right\| \leq \frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^{s'}},$$

donde s es el primer natural mayor o igual que m_n que es mayor que r, mientras que s' es el primer natural mayor o igual que m_n que es mayor que r', de donde

$$\left\| \sum_{i=r'}^{r} \alpha_i x_i \right\| < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Se sigue que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ es convergente, lo que contradice la suposición de que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. □

Corolario 54 *Sean $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones básicas equivalentes. Existen $n_0 \in \mathbf{N}$ y $K > 0$ tales que para cualquier $m \in \mathbf{N}$, con $m > n_0$, y para cualesquiera escalares $a_{n_0}, ..., a_m$,*

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{m} a_i y_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=n_0}^{m} a_i x_i \right\|$$

y

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{m} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=n_0}^{m} a_i y_i \right\|.$$

DEMOSTRACIÓN

La existencia de un natural n_0 y de una constante para la cual se satisfaga la primera desigualdad se sigue de la proposición anterior y de la existencia, en virtud del corolario **43**, de una constante $M > 0$ tal que

$$\max_{n_0 \leq k \leq m} \left\| \sum_{i=n_0}^{k} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=n_0}^{m} a_i x_i \right\|.$$

Corolario 55 *Sean $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones básicas equivalentes. Existe $K > 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$$

y

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\|.$$

para cualquier colección finita $a_0, ..., a_n \in \Im$.

DEMOSTRACIÓN

Como antes, basta probar que existe $K > 0$ para la que se satisface la primera desigualdad.

Por el corolario **54**, existen $n_0 \in \mathbf{N}$ y $K > 0$ tales que para cualquier $m \in \mathbf{N}$, con $m > n_0$, y para cualesquiera escalares $a_{n_0}, ..., a_m \in \Im$,

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{m} a_i y_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=n_0}^{m} a_i x_i \right\|.$$

Supongamos $n_0 > 1$. Existe $K' > 0$ tal que para cualequier colección de escalares $\alpha_1, ..., \alpha_{n_0-1}$ sucede que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_0-1} a_i y_i \right\| \leq K' \left\| \sum_{i=1}^{n_0-1} a_i x_i \right\|,$$

ya que tanto $[x_1, ..., x_{n_0-1}]$, como $[y_1, ..., y_{n_0-1}]$ son de dimensión finita, y es bien sabido que cualquier operador lineal entre espacios normados de dimensión finita es continuo. Así pues, si K_X es la constante básica de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces para cualquier $n \in \mathbf{N}$, con $n > n_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n_0-1} a_i y_i \right\| + \left\| \sum_{i=n_0}^{n} a_i y_i \right\| \\
&\leq K' \left\| \sum_{i=1}^{n_0-1} a_i x_i \right\| + K \left\| \sum_{i=n_0}^{n} a_i x_i \right\| \\
&\leq K' \left\| \sum_{i=1}^{n_0-1} a_i x_i \right\| + K(1 + K_X) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \\
&\leq K'K_X \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| + K(1 + K_X) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \\
&= K_0 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|,
\end{aligned}$$

donde $K_0 = K'K_X + K(1 + K_X)$. □

Proposición 56 *Sean $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ bases de los espacios de Banach X y Y, respectivamente, y supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces existen $\upsilon : X \to Y$ y $\nu : Y \to X$ lineales, continuos y tales que $\upsilon(x_i) = y_i$ y $\nu(y_i) = x_i$ para toda $i \in \mathbf{N}$. Mas aún, υ es biyectivo y $\upsilon^{-1} = \nu$.*

DEMOSTRACIÓN

Para cada $x \in X$, con $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, definimos a $v : X \to Y$ como $v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$. Es claro que v es un operador lineal, biyectivo y que $v(x_i) = y_i$ para toda $i \in \mathbf{N}$. Veamos que es continuo. Por el corolario **55**, existe $K > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

para toda sucesión finita de escalares $a_1, ... a_n$. Así, si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge, se tiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|,$$

o lo que es lo mismo

$$\|v(x)\| \leq K \|x\|,$$

lo que implica que v es continua. El hecho de que $v^{-1} = \nu$ se sigue de manera inmediata y la continuidad de ν se obtiene a partir del teorema de la función abierta. □

La base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de c_0 descrita en el ejemplo **44** juega un papel importante en este trabajo. Daremos un criterio para saber cuándo una base es equivalente a $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Definición 57 *Una serie* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *en* X *es* w-incondicionalmente de Cauchy *si* $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty$ *para toda* $f \in X^*$.

Esta definición equivale a decir que la serie converge incondicionalmente en la topología débil w de X.

Proposición 58 *Sea* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión en* X. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *es* w*-incondicionalmente de Cauchy.*

ii) *Existe* $K > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| \leq K \|f\| \quad \text{para toda } f \in X^*.$$

iii) *Existe* $K > 0$ *tal que para cualquier sucesión acotada de escalares* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, *sucede que*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n|.$$

iv) *Para cualquier sucesión de escalares* $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, *con* $t_i \to 0$, *la serie* $\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ *converge.*

DEMOSTRACIÓN

$\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Para cada $f \in X^*$, $\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| : n \in \mathbf{N}\right\}$ es un conjunto acotado, y entonces el principio del acotamiento uniforme nos asegura que existe $K_0 > 0$ y $U \subset X^*$ abierto tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| < K_0 \quad \text{para toda } n \in \mathbf{N} \text{ y } f \in U.$$

De aquí se sigue que existe $K > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| \leq K \|f\| \quad \text{para toda } f \in X^*.$$

$\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ Tenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \left|f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\right|$$

$$\leq \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|\right) \sup_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq K \sup_{i \in \mathbf{N}} |a_i|.$$

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ Supongamos que existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y que $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| = \infty$. Entonces existe $N \in \mathbf{N}$ tal que para cualquier $n \in \mathbf{N}$, con $n > N$, sucede

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| > K,$$

donde K tiene las propiedades indicadas en *iii)*. Para cada $i \in \mathbf{N}$, sea $z_i \in \Im$ tal que $|z_i| = 1$ y $z_i f(x_i) = |f(x_i)|$. La sucesión $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ está acotada por 1, y entonces para toda $r > N$ sucede

$$\sum_{i=1}^{r} z_i f(x_i) > K \geq \left\|\sum_{i=1}^{r} z_i x_i\right\|.$$

O sea

$$\left|f\left(\sum_{i=1}^{r} z_i x_i\right)\right| = f\left(\sum_{i=1}^{r} z_i x_i\right) > \left\|\sum_{i=1}^{r} z_i x_i\right\|,$$

lo que contradice al hecho $\|f\| = 1$.

$\boxed{iii) \Rightarrow iv)}$ Sea $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares tal que

$t_i \to 0$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que para cualquier $n > N$, sucede

$$|t_n| < \frac{\varepsilon}{K},$$

donde K tiene las propiedades indicadas en *iii)*. Supongamos $m, n > N$, con $m > n$. Hagamos $a_i = 0$ para $i = 1, 2, ..., n-1$ y $a_i = t_i$ para $i = n, n+1, ...$ Se obtiene entonces una sucesión acotada $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. A partir de *iii)* obtenemos

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} t_i x_i \right\| \leq K \sup_{n \leq i < \infty} |t_i| < \varepsilon \qquad \text{si } m > n,$$

lo que implica que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ converge.

$\boxed{iv) \Rightarrow iii)}$ Supongamos que *iii)* es falso. Sea $\{a_{1,i}\}_{i=1}^{n_1}$ una colección de escalares acotada por 1 y tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_1} a_{1,i} x_i \right\| > 1.$$

Sea $\{a_{2,i}\}_{i=n_1+1}^{n_2}$, con $n_2 > n_1$, una colección de escalares acotada por 1 y tal que

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_{2,i} x_i \right\| > 2,$$

o lo que es lo mismo,

$$\left\| \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{a_{2,i} x_i}{2} \right\| > 1.$$

Continuamos este proceso, y para cada $j \in \mathbf{N}$ definimos

$$t_i = \tfrac{a_{j,i}}{j} \qquad \text{si } n_{j-1} + 1 \leq i \leq n_j,$$

donde $n_0 = 0$. Entonces la sucesión de escalares $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero, pero para cualquier $N \in \mathbf{N}$, existe $j \in \mathbf{N}$ de manera que $n_{j-1} > N$, y entonces

$$\left\| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} t_i x_i \right\| > 1,$$

lo que implica que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ diverge, contradiciendo *iv)*. □

Teorema 59 *Si una sucesión básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de X satisface*

i) $\delta = \inf\limits_{i \in \mathbf{N}} \|x_i\| > 0$ *y*

ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *es* w*-incondicionalmente de Cauchy,*

entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la base canónica de c_0.

Demostración

Supongamos que $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ converge. Así, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i x_i = 0$, y como

$$0 \leq \delta\,|t_i| \leq \|t_i x_i\| \qquad \text{para toda } i \in \mathbf{N} \text{ y } \delta > 0,$$

se sigue que $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = 0$, es decir, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i e_i$ converge.

Inversamente, si $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i e_i$ converge, entonces la proposición **58** nos garantiza que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ converge. □

Teorema 60 *Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X equivalente a la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de c_0, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es acotada.*

Demostración

Supongamos que $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \|x_n\| = 0$. Entonces existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} \left\|x_{n_j}\right\| = 0$. Mas aún, podemos suponer que

$$\left\|x_{n_j}\right\| < \tfrac{1}{j^2} \qquad \text{para cada } j \in \mathbf{N}.$$

Así, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ es absolutamente convergente, y por tanto convergente, pero es claro que $\lim\limits_{r\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{r} e_{n_j}$ no existe, lo que contradice que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

De manera semejante se demuestra que $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \|x_n\| < \infty$.
□

Corolario 61 *Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X equivalente a la base canónica de c_0, entonces se cumplen i) y ii) del teorema* **59**.

2.4 Coeficientes funcionales.

En esta sección introducimos el concepto de coeficiente funcional asociado a una base.

Definición 62 *Sea* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una base de* X. *Para cada* $n \in \mathbf{N}$, *definimos* el $n-$ésimo coeficiente funcional asociado *a* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *como la funcional* $f_n : X \to \Im$ *definida como*

$$f_n(x) = f_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = a_n.$$

A la sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *se le llama* la sucesión de coeficientes funcionales asociados *a* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

En el caso en que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sea una sucesión básica, los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ serán funcionales $f_n : [x_i]_{i=1}^{\infty} \to \Im$.

Sean $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset ([x_i]_{i=1}^{\infty})^*$ su sucesión de coeficientes funcionales y $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de proyecciones asociadas a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces

i) $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_i$ para toda $x \in [x_i]_{i=1}^{\infty}$ y

ii) $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i$ para toda $n \in \mathbf{N}$ y $x \in [x_i]_{i=1}^{\infty}$.

Es trivial demostrar que los coeficientes funcionales asociados a una base son funciones lineales continuas. De hecho, si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X con constante básica K y $x \in X$, con $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces para cualquier $n \in \mathbf{N}$ sucede

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |a_n| = \tfrac{1}{\|x_n\|} \|P_n(x) - P_{n-1}(x)\| \\ &\leq \tfrac{1}{\|x_n\|} (\|P_n(x)\| + \|P_{n-1}(x)\|) \leq \tfrac{2K}{\|x_n\|} \|x\|, \end{aligned}$$

donde P_0 se define como el operador 0 (obsérvese que de aquí se obtiene $|f_n(x)| \cdot \|x_n\| \leq 2K \|x\|$ para toda $n \in \mathbf{N}$, la cual es una desigualdad que será también usada más adelante), y por tanto

$$\|f_n\| \leq \frac{2K}{\|x_n\|}.$$

Por otro lado, es claro que

$$\|f_n\| \geq \frac{1}{\|x_n\|}.$$

Resumiendo, $1 \leq \|f_n\| \cdot \|x_n\| \leq 2K$. Con estas observaciones es clara la siguiente

Proposición 63 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base acotada de X con constante básica K. Entonces la sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es acotada. Mas aún, si $0 < \delta \leq \|x_n\| \leq M < \infty$ para toda $n \in \mathbf{N}$, entonces*

$$0 < \frac{1}{M} \leq \|f_n\| \leq \frac{2K}{\delta} < \infty.$$

Una base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de X y sus coeficientes funcionales asociados en X^* forman lo que se llama *un sistema biortogonal,* es decir,

$$f_n(x_m) = \delta_{n,m} \qquad \text{para cualesquiera } n, m \in \mathbf{N},$$

donde $\delta_{n,m}$ es la δ de Krönecker.

La siguiente proposición muestra la simetría entre los coeficientes funcionales asociados a una base y la propia base.

Proposición 64 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X con constante básica K. La sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica cuya constante básica no excede a K, y cuya sucesión de coeficientes funcionales es $\left\{\widehat{x_i}\,|_{[f_i]_{i=1}^{\infty}}\right\}_{i=1}^{\infty}$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, la n-ésima proyección asociada a $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la restricción a $[f_i]_{i=1}^{\infty}$ del adjunto de la n-ésima proyección asociada a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. En el caso en que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona,* **37** *implica que $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es también monótona.*

DEMOSTRACIÓN

Es claro que $f_i \neq 0$ para toda $i \in \mathbf{N}$. Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de escalares y sean $n, m \in \mathbf{N}$, con $n \leq m$. Si P_n es la n-ésima proyección asociada a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces

$$P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right) \circ P_n = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

También tenemos que

$$\left\|P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right)\right\| \leq \|P_n\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\|,$$

y por tanto

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\|.$$

El corolario **43** nos asegura entonces que $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica. Sea $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ un elemento de $[f_i]_{i=1}^{\infty}$. De lo anterior se sigue

$$P_n^*(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right).$$

Así, $P_n^*|_{[f_i]_{i=1}^{\infty}}$ es la n-ésima proyección asociada a $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Por tanto, la constante básica de $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es menor o igual que K. Por otra parte, $\widehat{x_n}(f) = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i, x_n \right\rangle = a_n$ para cada $n \in \mathbf{N}$, es decir, $\left\{\widehat{x_i}|_{[f_i]_{i=1}^{\infty}}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona, entonces $K = 1$, y por **37**, la constante bósica de $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es también 1. □

La constante básica de la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a la base descrita en el ejemplo **48** tiene un valor de 3, independiente de λ. Así, ésta base, cuando $0 < \lambda < 1$, proporciona un ejemplo en el cual las constantes básicas de la base y de la sucesión de los coeficientes funcionales a ella asociados son distintas entre sí.

Definición 65 *Se dice que una sucesión $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ en un espacio vectorial topológico de dimensión infinita (Z, τ) es una base de Schauder de Z, si*

a) *para cada $z \in Z$, existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(z)} z_i$ y*

b) *para cada $i \in \mathbf{N}$, la funcional $f_i : Z \to \Im$, $f_i(z) = a_i^{(z)}$ es conmtinua*

La sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es llamada, como en el caso de bases en espacios de Banach, la sucesión de los coeficientes funcionales asociados *a* $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Como ya vimos, *b)* se satisface cuando se cumple *a)* y τ está dada por una norma, para la que Z es de Banach.

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X y sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. En general, la sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ no es una base de X^*. En contraste con esto, la sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ sí es una base del espacio vectorial topológico (X, w^*), es decir

a) para cada $f \in X^*$, existe una única sucesión de escalares $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $f = w^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i f_i$ y

b) para cada $i \in \mathbf{N}$, la funcional asociada g_i es w^* − continua.

En efecto, sean $y \in X$, con $y = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(y) x_i$, y $f \in X^*$. Por la continuidad de f,

$$f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(y) f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_i}(f) f_i(y),$$

es decir,

$$f = \mathrm{w}^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i = \mathrm{w}^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(f) f_i.$$

Si $\{b_i'\}_{i=1}^{\infty}$ es otra sucesión de escalares tal que

$$f = \mathrm{w}^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i' f_i,$$

entonces para cada $j \in \mathbf{N}$ sucede que

$$f(x_j) = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i' f_i, x_i \right\rangle = b_i'.$$

Así, $b_j' = \widehat{x}_i(f)$ para toda $j \in \mathbf{N}$, es decir, $g_i = \widehat{x_i}$ para toda $i \in \mathbf{N}$ y, por tanto, cada g_i es w^*–continua.

Este resultado será útil más adelante, por lo que lo enunciamos formalmente.

Proposición 66 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X y sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. La sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de Schauder del espacio vectorial topológico (X, w^*), y $\{\widehat{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Es natural preguntarse cuándo la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a una base es, a su vez, una base de $(X, \|\cdot\|)^*$.

Definición 67 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Decimos que la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$* es encogible *si para cualquier $f \in X^*$, sucede que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f \,|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| = 0,$$

donde $f\,|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}}$ denota la restricción de f a $[x_i]_{i=n}^{\infty}$.

Proposición 68 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X y sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. La sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es base de X^* si y sólo si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es encogible.*

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es base de X^*. Entonces para cualquier $f \in X^*$ sucede que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n^*(f)\| = 0.$$

Para cualquier $x \in [x_i]_{i=n}^{\infty}$ sucede que $\left\langle P_{n-1}^*(f), x\right\rangle = 0$, es decir, $P_{n-1}^*(f) \in \left([x_i]_{i=n}^{\infty}\right)^{\perp}$. Así,

$$\left\| f\ |_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| = \inf_{g\in\left([x_i]_{i=n}^{\infty}\right)^{\perp}} \|f-g\| \le \left\|f - P_{n-1}^*(f)\right\|,$$

de donde $\left\| f\ |_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Inversamente, supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es encogible. Sea $f \in X^*$. Es claro que

$$(I - P_n)(x) \subset [x_i]_{i=n}^{\infty} \quad \text{para toda } x \in X,$$

por tanto

$$\|f - P_n^*(f)\| = \|f \circ (I - P_n)\| \le \left\| f\ |_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| (1 + K),$$

donde K es la constante básica de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Como $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es encogible, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f\ |_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| = 0,$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n^*(f)\| = 0,$$

lo que implica que $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X^*. □

Proposición 69 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X con constante básica K y sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sea $V = [f_i]_{i=1}^{\infty}$.*
i) Para cualquier $f \in X^*$ sucede que

$$\|f\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i \right\| \le K \|f\|.$$

Inversamente, si $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\| < \infty,$$

entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x_i) = a_i$ para todo $i \in \mathbf{N}$.
ii) Para cualquier $F \in V^*$ sucede que

$$\|F\| \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} F(f_i)\,\widehat{x_i} \right\|_V \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} F(f_i)\,x_i \right\| \leq K\,\|F\|,$$

donde $\|\cdot\|_V$ es la norma de la funcional restringida a V. Inversamente, si $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty,$$

entonces existe $F \in V^*$ tal que $F(f_i) = a_i$ para toda $i \in \mathbf{N}$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $f \in X^*$. Si $x \in X$ y $\|x\| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, f_i(x) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \widehat{f_i(x)}\, x_i(f) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i \right\| \cdot \|f\| \\ &\leq K\,\|f\| \quad \text{para toda } n \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

de donde

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, f_i \right\| \leq K\,\|f\|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i$ un elemento de X tal que $\|x\| = 1$ y $\|f\| \leq |f(x)| + \varepsilon$. Así,

$$\|f\| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, f_i(x) \right| + \varepsilon \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, f_i(x) \right| + \varepsilon,$$

de donde

$$\|f\| \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, f_i \right\| + \varepsilon,$$

y como ε es arbitraria, obtenemos la primera desigualdad que aparece en *i)*.

Inversamente, si $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\| = M < \infty,$$

entonces para cualquier colección finita de escalares $\beta_1, ... \beta_n$, sucede que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i \right| &= \left| \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{x_j} \right\|, \end{aligned}$$

y entonces la proposición **29** aplicada a X^* nos asegura que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $f_n \in X^*$ tal que $f_n(x_i) = a_i$ para toda $i = 1, ..., n$ y tal que $\|f_n\| \leq M + 1$. Así pues, tenemos una sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ contenida en la bola de X^* de radio $M + 1$ y centro en 0.

Si el conjunto $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es finito, entonces existe $f \in X^*$ tal que $f = f_n$ para una infinidad de índices. En tal caso, f satisface que $f(x_i) = a_i$ para toda $i \in \mathbf{N}$. Supongamos que $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un conjunto infinito. El teorema de Alaoglu nos asegura que el conjunto $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ posee un w*−punto de acumulación en dicha bola, digamos f. Es claro que $f(x_i) = a_i$ para toda $i \in \mathbf{N}$, con lo que queda demostrado *i)*.

Aplicando *i)* al caso en que $X = V$ se obtienen todas las afirmaciones de *ii)*, con excepción de las dos desigualdades siguientes:

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} F(f_i)\, \widehat{x}_i \right\|_V \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} F(f_i)\, x_i \right\|,$$

que es obvia, y

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} F(f_i)\, x_i \right\| \leq K \|F\|,$$

que procedemos a probar:

Sea $\phi \in X^{**}$, $f \in X^*$ y $n \in \mathbf{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle P_n^{**}(\phi), f \rangle &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, f_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \phi(f_i)\, x_i\right) = \left\langle \widehat{\sum_{i=1}^{n} \phi(f_i)\, x_i}, f \right\rangle, \end{aligned}$$

es decir, $P_n^{**}(\phi) = \widehat{\sum_{i=1}^{n} \phi(f_i)\, x_i}$. Así,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \phi(f_i)\, x_i \right\| \leq \|P_n\| \cdot \|\phi\| \leq K \|\phi\|.$$

Si ϕ es una extensión de Hahn-Banach a X^* de F, entonces obtenemos

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} F(f_i)\, x_i \right\| \leq K \|F\|. \ \square$$

Proposición 70 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X, con coeficientes funcionales asociados $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, y sea Y un espacio de Banach. Entonces el* *espacio de Banach $B(Y,X)$ es isomorfo, vía la transformación $T \longmapsto \{T^*(f_i)\}_{i=1}^{\infty}$, a*

$$Z = \left\{ \{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subset Y^* : \sum_{i=1}^{\infty} g_i(y)\, x_i \text{ converge en } X \text{ para toda } y \in Y \right\},$$

donde la norma en Z es

$$\left\| \{g_i\}_{i=1}^{\infty} \right\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|\le 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(y)\, x_i \right\|.$$

Mas aún, sucede que

$$\|T\| \le \left\| \{T^*(f_i)\}_{i=1}^{\infty} \right\| \le K\,\|T\| \qquad \text{para toda } T \in B(Y,X),$$

donde K es la constante básica de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

DEMOSTRACIÓN

El principio del acotamiento uniforme implica que

$$\left\| \{g_i\}_{i=1}^{\infty} \right\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|\le 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(y)\, x_i \right\| < \infty$$

para toda $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \in Z$. Es sencillo entonces verificar que lo anterior determina una norma en Z.

Sea $T \in B(Y,X)$. Si para cada $i \in \mathbf{N}$, $g_i = T^*(f_i)$, entonces

$$T(y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(T(y))\, x_i = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(y)\, x_i$$

para toda $y \in Y$, y entonces $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \in Z$, y así

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|\le 1}} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} g_i(y)\, x_i \right\| \\ &\le \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|\le 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(y)\, x_i \right\| = \left\| \{T^*(f_i)\}_{i=1}^{\infty} \right\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que $\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i \right\| \le K\,\|x\|$ para cualesquiera $x \in X$ y $n \in \mathbf{N}$, se sigue

$$\begin{aligned} \left\| \{T^*(f_i)\}_{i=1}^{\infty} \right\| &= \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|\le 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(T(y))\, x_i \right\| \\ &\le K \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|\le 1}} \|T(y)\| = K\,\|T\|. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 71 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X con coeficientes funcionales asociados $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ y sea $V = [f_i]_{i=1}^{\infty}$. Sea K la constante básica de la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

i) $r(V) \geq \frac{1}{K}$, es decir, la bola unitaria de V es w*−densa en la bola de radio $\frac{1}{K}$ de X^*.

ii) La $\sigma(X,V)-$cerradura de la bola unitaria B de X, denotada por Σ_X, es acotada. Mas aún, $\Sigma_X \subset B_K[0]$.

iii)

$$\inf_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{f\in V\\ \|f\|\leq 1}} |f(x)| \geq \frac{1}{K}.$$

iv)

$$\inf_{\substack{x\in X, x\neq 0\\ F\in V^{\perp}}} \frac{\|\widehat{x}+F\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{K}.$$

v) El homomorfismo canónico $\Omega : X \to V^*$ es un isomorfismo sobre su imagen y cumple que

$$\|\widehat{x}\|_V \leq \|x\| \leq \frac{1}{r(V)} \|\widehat{x}\|_V,$$

donde $\|\cdot\|_V$ es la norma de la restricción a V de una funcional en X^*.

Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona, entonces todas las desigualdades e inclusiones anteriores se convierten en igualdades. Si $r(V) = 1$ (en particular si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona), entonces $\Omega : X \to V^*$ es una isometría.

DEMOSTRACIÓN

La proposición **21** nos asegura que las afirmaciones *i)*, *ii)*, *iii)*, y *iv)* son equivalentes. Demostraremos *ii)*. Sea $\{y_d\}_{d\in\Delta}$ una red en B que sea $\sigma(X,V)-$convergente a $x \in \Sigma_X$. Entonces para cada $i \in \mathbf{N}$, sucede que

$$\lim_{d\in\Delta} f_i(y_d) = f_i(x),$$

y por tanto, para cada $n \in \mathbf{N}$ se tiene

$$\lim_{d\in\Delta} P_n(y_d) = P_n(x).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $d_0 = d_0(\varepsilon, n) \in \Delta$ tal que

$$\|P_n(x)\| - \|P_n(y_d)\| \leq \|P_n(x) - P_n(y_d)\| < \varepsilon$$

para cualquier $d \geq d_0$, y como $\|y_d\| \leq 1$ para toda $d \in \Delta$, entonces

$$\|P_n(x)\| \leq \|P_n(y_d)\| + \varepsilon \leq K + \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} \|P_n(x)\| \leq K + \varepsilon,$$

de donde

$$\|x\| \leq K,$$

o lo que es lo mismo, $x \in B_K[0]$.

Para demostrar la afirmación *v)*, recuérdese que en la demostración la proposición **21** vimos que para toda $x \in X$, no nula, sucedía que

$$r(V) \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_V,$$

y por tanto

$$\|x\| \leq \frac{1}{r(V)} \|x\|_V. \ \square$$

Para terminar esta sección, demostramos una proposición que será muy útil en las demostraciones de los teoremas principales de esta tesis.

Proposición 72 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base monótona de X con coeficientes funcionales asociados $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sea $|||\cdot|||$ una norma equivalente a $\|\cdot\|$ en $V = [f_i]_{i=1}^{\infty}$. Definimos $|||\cdot||| : X \to \Re$ como*

$$|||x||| = \sup \{|f(x)| : f \in V, \ |||f||| \leq 1\},$$

Entonces $|||\cdot|||$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$ en X. Mas aún, si $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona con respecto a la norma $|||\cdot|||$, entonces para toda $f \in V$ sucede que

$$|||f||| = \sup \{|f(x)| : x \in X, \ |||x||| \leq 1\},$$

es decir, la norma $|||\cdot|||$ en V es la inducida en V por la norma $|||\cdot|||$ definida en X.

DEMOSTRACIÓN

En virtud de la proposición **10**, se tiene que las normas inducidas en V^* por $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes. Como es usual, designaremos a la primera de dichas normas por $\|\cdot\|$, en tanto que a la segunda la denotaremos por $|||\cdot|||'$

en búsqueda de claridad. Por la misma razón, la norma inducida en V^{**} por $|||\cdot|||'$ se denotará por $|||\cdot|||''$.

Por la proposición **71** se tiene

$$\|\widehat{x}\|_V = \|x\| \;\; (= \|\widehat{x}\|).$$

Por lo dicho en el primer párrafo, resulta que existen $m, M > 0$ tales que

$$m\,|||\widehat{x}|||'_V \leq \|\widehat{x}\|_V \leq M\,|||\widehat{x}|||'_V,$$

donde $|||\widehat{x}|||'_V = |||\widehat{x}\,|_V|||' = \sup\{|\widehat{x}(f)| : f \in V,\ |||f||| \leq 1\}$, por tanto, si definimos $|||x||| = |||\widehat{x}|||'_V$, se tiene que $|||\cdot||| \sim \|\cdot\|$ en X. Finalmente, si $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona respecto a la norma $|||\cdot|||$, se sigue de la misma proposición **71**, tomando $X = (V, |||\cdot|||)$ que

$$|||\widehat{f}|||''_{V_1} = |||f|||$$

donde $V_1 = [\widehat{x_i}\,|_V]_{i=1}^{\infty}$. Así,

$$|||f||| = \sup\left\{\left|\widehat{f}(h)\right| : h \in V_1,\ |||h|||' \leq 1\right\}.$$

Observemos que $h \in V_1$ si y sólo si $h = \widehat{x}\,|_V$ para alguna $x \in X$, de donde

$$|||f||| = \sup\{|f(x)| : |||x||| \leq 1\}. \;\square$$

Capítulo 3

Extensión de coeficientes funcionales.

En este capítulo se expondrá el material que aparece en [**3**] y se hará la generalización anunciada en la introducción de la tesis.

3.1 Extensión de coeficientes funcionales.

Lema 73 *Sean $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X tal que*

$$codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1,$$

y $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a la sucesión básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sea $x_0 \notin [x_i]_{i=1}^{\infty}$. Si $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes funcionales asociados a la base $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, entonces cualquier extensión g_i de x_i^* es de la forma $g_i = f_i - \lambda_i f_0$, con $\lambda_i \in \Im$.

DEMOSTRACIÓN

La proposición **49** establece que $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una base de X, así pues, tiene sentido hablar de los coeficientes funcionales $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$. Es claro que para cada $i \in \mathbf{N}$, f_i es una extensión de x_i^* y es trivial comprobar que $M^{\perp} = [f_0]$, donde $M =$

$[x_i]_{i=1}^{\infty}$. Si g_i es cualquier extensión de x_i^*, entonces $g_i - f_i \in M^{\perp}$, pues $g_i \mid_M = x_i^* = f_i \mid_M$, y por tanto, existe un escalar λ_i tal que $g_i - f_i = \lambda_i f_0$, o lo que es lo mismo, $g_i = f_i - \lambda_i f_0$. □

El siguiente es también un resultado de J.R. Holub [4], que en su versión original está enunciado en un caso más general, pero que aquí lo presentamos adaptado a nuestras necesidades presentes. En la siguiente sección se da una prueba original del resultado general.

Proposición 74 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X tal que*

$$codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1.$$

Supongamos que $Y \subset X$ es un subespacio de dimensión 1 tal que $Y \cap [x_i]_{i=1}^{\infty} = \{0\}$ y sea $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en Y. Entonces la sucesión $\{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica si y sólo si $codim([x_i + y_i]_{i=1}^{\infty}) = 1$.

Demostración

Sea $Z = [x_i + y_i]_{i=1}^{\infty}$ y sea $x_0 \in Y - \{0\}$. Entonces $Y = [x_0]$ y además $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una base de X (proposición **49**), con coeficientes funcionales asociados $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$. Existe una sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $y_i = \lambda_i x_0$ para toda $i \in \mathbf{N}$ y si $f \in Z^{\perp}$, entonces $f(x_i) = -\lambda_i f(x_0)$ para toda $i \in \mathbf{N}$. La proposición **66** nos asegura que

$$f = \mathrm{w}^*\text{-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) f_i \qquad \text{para toda } f \in X^*,$$

por tanto, si $f \in Z^{\perp}$, entonces

$$\begin{aligned} f &= f(x_0) f_0 - \left(\mathrm{w}^*\text{-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_0) \lambda_i f_i\right) \\ &= f(x_0)\left(f_0 - \mathrm{w}^*\text{-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right), \end{aligned}$$

es decir, cualquier elemento de $Z^{\perp}$ es de la forma

$$f = a_0\left(f_0 - \mathrm{w}^*\text{-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right),$$

así pues, $f_0 - \left(\mathrm{w}^*\text{-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)$ es un generador de $Z^{\perp}$, lo que implica que $\dim\left(Z^{\perp}\right) \leq 1$, y por tanto $codim(Z) \leq 1$ (proposición **5**).

Supongamos que $\{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica y que $codim(Z) < 1$. Entonces $Z = X$ y por consiguiente, $x_0 \in Z$. Existe una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x_i + y_i).$$

Dado que $X = [x_i]_{i=1}^{\infty} \oplus Y$ se sigue, de la continuidad de las proyecciones, que la convergencia de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i (x_i + y_i)$ implica la de las series $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$, y además la igualdad

$$x_0 - \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

implica $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$. Como $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica, se tiene que $a_i = 0$ para toda $i \in \mathbf{N}$ y $x_0 = 0$, lo que contradice su elección. Así, el que $\{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sea una sucesión básica implica que $codim(Z) = 1$.

Inversamente, supongamos que $codim(Z) = 1$, entonces $x_0 \notin Z$, ya que en caso contrario, de acuerdo a lo anterior, $Z = X$. Sea $f_{x_0} \in X^*$ tal que $f_{x_0}(x_0) = 1$ y $f_{x_0}(z) = 0$ para toda $z \in Z$. Definamos la funcional $g = f_0 - f_{x_0}$ y el operador $T = I + g \otimes x_0$, donde con $g \otimes x_0$ denotamos al operador en X de rango 1 determinado por la fórmula $(g \otimes x_0)(x) = g(x) x_0$. Es claro que $g(x_0) = 0$, y de aquí se sigue que T, además de ser lineal y continuo, es inyectivo, ya que si

$$T(x) = x + g(x) x_0 = 0,$$

entonces $x = -g(x) x_0$, lo que implica que $x \in [x_0]$, y por tanto $g(x) = 0$. Usando la proposición **25** concluimos que

$$R(T) = X.$$

Es decir, T es invertible, y resulta que

$$T(x_i) = x_i + y_i \qquad \text{para cada } i \in \mathbf{N},$$

ya que, de acuerdo a la expresión general obtenida para los elementos de $Z^{\perp}$, tenemos $f_{x_0} = f_0 - \mathrm{w}^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i$, y así $g(x_i) = f_{x_0}(y_i) = f_0(y_i)$. Por todo lo anterior, $\{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica equivalente a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. $\square$

Ahora estamos en condición de demostrar el teorema principal de la sección.

Teorema 75 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X tal que*

$$codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1,$$

y con coeficientes funcionales asociados $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. Existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ si y sólo si para cualquier $x_0 \notin [x_i]_{i=1}^{\infty}$, los coeficientes funcionales asociados a la base $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, denotados por f_i, tienen la propiedad de que existe una sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ que satisface

$$i) \quad \|f_i - \lambda_i f_0\| = \inf_{\lambda\in\Im} \|f_i - \lambda f_0\| \quad \textit{para toda } i \in \mathbf{N}$$

y

$$ii) \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| < \infty.$$

Demostración

Sean $M = [x_i]_{i=1}^{\infty}$ y $V = [f_i]_{i=0}^{\infty}$. Sea $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ cualquier sucesión de extensiones de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. Por el lema **73**, existe una sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $g_i = f_i - \lambda_i f_0$. Por tanto, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ si y sólo si existe una sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\|g_i\| = \|f_i - \lambda_i f_0\| = \|f_i|_M\| = \|x_i^*\|$ para toda $i \in \mathbf{N}$. Ahora bien, de la proposición **5** se sigue

$$\|f_i|_M\| = \inf_{h\in M^\perp} \|f_i - h\| = \inf_{\lambda\in\Im} \|f_i - \lambda f_0\|.$$

Así pues, existe una sucesión de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ si y sólo si existe una sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\|f_i - \lambda_i f_0\| = \inf_{\lambda\in\Im} \|f_i - \lambda f_0\| \qquad \text{para cada } i \in \mathbf{N}.$$

Por otra parte, la proposición **74** aplicada a V nos asegura que la sucesión $\{f_i - \lambda_i f_0\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica si y sólo si $\dim(V/[f_i - \lambda_i f_0]_{i=1}^{\infty}) = 1$. Sea $W = [f_i - \lambda_i f_0]_{i=1}^{\infty}$. Entonces

$$\dim(V/W) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \dim W_V^\perp = 1$$

(proposición **5**, *ii)*), donde

$$W_V^\perp = \{G \in V^* : G(f) = 0 \text{ para toda } f \in W\}.$$

Sea $G \in V^*$, entonces $G \in W_V^\perp$ si y sólo si $G(f_i) = \lambda_i G(f_0)$. Luego, $\dim W_V^\perp = 1$ si y sólo si existe $G_0 \in V^*$ tal que

$G_0(f_0) = 1$ y $G_0(f_i) = \lambda_i$ para cada $i \in \mathbf{N}$. En efecto, si $\dim W_V^\perp = 1$, entonces existe $G \in V^*$ no nula. Como $G(f_i) = \lambda_i G(f_0)$ para cada $i \in \mathbf{N}$ y como $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ es base de V, se sigue necesariamente que $G(f_0) \neq 0$. Así, $G_0 = \frac{G}{G(f_0)}$ satisface la condición enunciada. Inversamente, supongamos que existe tal funcional G_0 y sea $G \in Z_V^\perp$. Entonces

$$G(f_i) = \lambda_i G(f_0) = G_0(f_i)\,G(f_0) \qquad \text{para cada } i \geq 0,$$

y como $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ es base de V, se sigue que $G = G(f_0)\,G_0$. Por tanto $\{G_0\}$ es una base de $W_V^\perp$.

Así pues, la sucesión $\{f_i - \lambda_i f_i\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión básica si y sólo si existe $G_0 \in V^*$ tal que $G_0(f_0) = 1$ y $G_0(f_i) = \lambda_i$.

Tenemos que si la sucesión $\{f_i - \lambda_i f_0\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión básica, entonces

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^n G_0(f_i)\, x_i \right\|,$$

De la proposición **69** se sigue

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^n G_0(f_i)\, \widehat{x}_i \right\|_V \leq K\,\|G_0\| + \|\widehat{x_0}\|_V < \infty,$$

donde K es la constante básica de $\{x_i\}_{i=0}^\infty$, por tanto, de acuerdo a la proposición **71**,

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \leq \frac{1}{r(V)} \left(K\,\|G_0\| + \|\widehat{x_0}\|_V\right) < \infty.$$

Inversamente, si se satisface $\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| < \infty$, entonces se cumple que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right\| < \infty \qquad \text{si } \lambda_0 = 1.$$

Aplicando de nuevo la proposición **69** concluimos que existe $G_0 \in V^*$ tal que $G_0(f_0) = 1$ y $G_0(f_i) = \lambda_i$ para toda $i \in \mathbf{N}$. Por tanto, $\{f_i - \lambda_i f_0\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión básica. □

Como veremos más adelante, es posible que una sucesión básica en X sea tal que el subespacio lineal cerrado por ella generado tenga codimensión 1 y no exista una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales asociados. Sin embargo, en el caso en que la sucesión es además acotada, siempre podremos encontrar una norma equivalente en X para la cual las condiciones del teorema **75** son satisfechas y, por tanto, existirá una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales asociados.

Teorema 76 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica acotada en $(X\ \|\cdot\|)$ tal que*

$$codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1,$$

y con coeficientes funcionales asociados $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces existe una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach.

DEMOSTRACIÓN

Sea $x_0 \in X \setminus [x_i]_{i=1}^{\infty}$. La proposición **41** nos permite suponer que la norma en X es tal que la base $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ es monótona y normalizada. Sea $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a la base $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$. Es claro que $[f_i]_{i=0}^{\infty} = [f_0] \oplus [f_i]_{i=1}^{\infty}$, por tanto, de acuerdo a la proposición **27**, la norma

$$|||f||| = \left\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i f_i\right\| = \|a_0 f_0\| + \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|$$

es equivalente a $\|\cdot\|$ en $[f_i]_{i=0}^{\infty}$. Mas aún, para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, la sucesión

$$\left\{\left|\left|\left|\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right|\right|\right|\right\}_{n=0}^{\infty}$$

es no decreciente, ya que

$$\left|\left|\left|\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right|\right|\right| = \|a_0 f_0\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\|,$$

y por la proposición **64** y el lema **38** se tiene que la sucesión

$$\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$$

es no decreciente. Así, la sucesión básica $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ es $|||\cdot|||$-monótona.

La proposición **72** nos asegura que la norma $|||\cdot||| : X \to \Re$ definida como

$$|||x||| = \sup\{|f(x)| : f \in [f_i]_{i=0}^{\infty},\ |||f||| \leq 1\}$$

es equivalente a la original y que además sucede

$$|||f||| = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ |||x||| \leq 1\}$$

para cualquier $f \in [f_i]_{i=0}^{\infty}$. Así pues,

$$\inf_{\lambda \in \Im} |||f_i - \lambda f_0||| = \inf_{\lambda \in \Im} (\|-\lambda f_0\| + \|f_i\|) = \|f_i\|$$

para cada $i \in \mathbf{N}$, y claramente este ínfimo se alcanza cuando

$$\lambda = 0.$$

Si $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \mathbf{N}$, entonces, obviamente,

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right|\right|\right| = 0 < \infty.$$

Del teorema **75** se sigue entonces que para esta nueva norma $|||\cdot|||$, existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. □

En el caso en que la sucesión básica considerada es equivalente a la base canónica de c_0 (ejemplo **44**), entonces no es necesario renormar el espacio para obtener las extensiones que nos ocupan, pues siempre existirá una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales, aún cuando $codim[x_i]_{i=1}^{\infty} = \infty$.

Proposición 77 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica equivalente a la base canónica de c_0. Entonces existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

DEMOSTRACIÓN

Por el teorema **60**, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es acotada, y por la proposición **63**, $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ también lo es. Sean $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares. Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i f_i \right\| &\geq \sup_{\left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \right\| \leq 1} \left| \left\langle \sum_{i=1}^{m} a_i f_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \right\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \right| \quad \text{para toda } m \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Sea $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ la base canónica de c_0. La proposición **56** garantiza la existencia de $\nu \in B(c_0, X)$ tal que

$$\nu(e_i) = x_i \quad \text{para cada } i \in \mathbf{N}.$$

Así,

$$\sup_{\left\|\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i\right\|\leq 1} \left|\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right| \geq \sup_{\|y\|\leq \frac{1}{\|\nu\|}} \left|\sum_{i=1}^{m} a_i \langle f_i, \nu(y)\rangle\right|$$

$$\geq \sup_{\substack{y=(y_1,\ldots,y_m,0,0,\ldots)\\ |y_i|=\frac{1}{\|\nu\|}}} \left|\sum_{i=1}^{m} a_i \langle f_i, \nu(y)\rangle\right| = \sup_{\substack{y_i\in\Im\\ |y_i|=\frac{1}{\|\nu\|}}} \left|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right|$$

$$= \frac{1}{\|\nu\|} \sup_{\substack{y_i\in\Im\\ |y_i|=1}} \left|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right| = \frac{1}{\|\nu\|} \sum_{i=1}^{m} |a_i|.$$

De lo anterior, y haciendo

$$K = \|\nu\| \cdot \sup_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\|,$$

se sigue que para cualesquiera $n, m \in \mathbf{N}$, con $n < m$, sucede

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\| \leq \left(\sup_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\|\right) \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$
$$\leq \left(\sup_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\|\right) \sum_{i=1}^{m} |a_i| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\|.$$

Por el corolario **43**, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica. □

De esta proposición se sigue que *si una sucesión básica es equivalente a la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de c_0, entonces para cualquier norma equivalente a la original, existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales.*

Teorema 78 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica acotada en $(X, \|\cdot\|)$ tal que*

$$codim([x_i]_{i=1}^{\infty}) = 1$$

y supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ no es equivalente a la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de c_0. Entonces existe en X una norma equivalente a $\|\cdot\|$ tal que no existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de los coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $x_0 \in X\setminus[x_i]_{i=1}^{\infty}$. La proposición **41** nos permite suponer que la norma en X es tal que la base $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ es monótona y normalizada. Claramente $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ no es equivalente a $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ respecto a esta nueva norma. Por el teorema **59**, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ *no* es w–incondicionalmente de Cauchy, por lo que existe $h_0 \in X^*$, con $\|h_0\| = 1$, y tal que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h_0(x_i)| = \infty.$$

Para cada $i \in \mathbf{N}$ existe $z_i \in \Im$ tal que

$$|h_0(x_i)| = z_i h_0(x_i).$$

Sea $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$. Por la proposición **63**, $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ es acotada. Además, la convergencia de $\sum_{i=0}^{\infty} a_i f_i$ implica que $a_i \to 0$, ya que

$$|a_n| \leq \frac{1}{\inf_{i\in\mathbf{N}} \|f_i\|} \|a_n f_n\| \qquad \text{para cada } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Así, $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ es acotada siempre que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i f_i$ converja.

Definimos $|||\cdot||| : [f_i]_{i=0}^{\infty} \to \Re$ como

$$|||f||| = \left|\left|\left|\sum_{i=0}^{\infty} a_i f_i\right|\right|\right| = \sqrt{\|a_0 f_0\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|^2} + \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_0 \|f_0\| + z_n a_n \|f_n\||.$$

El supremo del lado derecho es finito por lo dicho en relación al acotamiento de $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Es sencillo comprobar que $|||\cdot|||$ es una norma en $[f_i]_{i=0}^{\infty}$. Además

$$m\,|||f||| \leq \|f\| \leq 2\,|||f|||$$

para alguna $m > 0$ y para toda $f \in [f_i]_{i=0}^{\infty}$, es decir, $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$ en $[f_i]_{i=0}^{\infty}$. La existencia de m se sigue de la proposición **27** y del hecho

$$|a_n| \cdot \|f_n\| \leq 2K \left\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i f_i\right\| \qquad \text{para toda } n \geq 0,$$

donde K es la constante básica de $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, resultado que fué obtenido al probar la continuidad de los coeficientes funcionales asociados a una base. Mas aún, para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, la sucesión

$$\left\{\left|\left|\left|\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right|\right|\right|\right\}_{n=0}^{\infty}$$

es no decreciente, pues para cualquier $n \in \mathbf{N}$, sucede que

$$\left|\left|\left|\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right|\right|\right| = \sqrt{\|a_0 f_0\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\|^2} + \max_{j=0,\ldots,n} |a_0 \|f_0\| + z_j a_j \|f_j\||,$$

donde $z_0 = 0$, y dado que $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ es $\|\cdot\|$-monótona (proposición **64**), entonces el lema **38** implica que la sucesión

$$\left\{\left|\left|\left|\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right|\right|\right|\right\}_{n=0}^{\infty},$$

es no decreciente. Por el mismo lema **38**, la base $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ es $|||\cdot|||$-monótona. Así pues, la proposición **72** nos asegura que la norma $|||\cdot||| : X \to \Re$ definida como

$$|||x||| = \sup\{|f(x)| : f \in [f_i]_{i=0}^{\infty}, \ |||f||| \leq 1\}$$

es equivalente a la original y que además sucede que

$$|||f||| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \ |||x||| \leq 1\}$$

para cualquier $f \in [f_i]_{i=0}^{\infty}$.

Para cada $i \in \mathbf{N}$ se tiene

$$\inf_{\lambda \in \Im} |||f_i - \lambda f_0||| = \inf_{\lambda \in \Im} \left(\sqrt{\|\lambda f_0\|^2 + \|f_i\|^2} + \max\{\|\lambda f_0\|, |z_i \|f_i\| - \lambda \|f_0\||\}\right). \tag{3.1}$$

Para determinar dicho ínfimo, basta considerar al 0 y las $\lambda \in \Im$ que tengan la misma orientación que z_i, ya que tanto los valores $\sqrt{\|\lambda f_0\|^2 + \|f_i\|^2}$ como $\|\lambda f_0\|$ son invariantes bajo rotaciones de λ y, claramente, dada $\lambda \in \Im$, el valor de

$$|z_i \|f_i\| - \lambda \|f_0\||$$

es mayor o igual que el obtenido para esa expresión evaluada en $|\lambda| z_i$. Por tanto nos restringiremos a la colección de escalares que satisfacen

$$\lambda = |\lambda| z_i.$$

Así, es suficiente determinar

$$\inf_{t \geq 0} \left(\sqrt{\|t f_0\|^2 + \|f_i\|^2} + \max\{\|t f_0\|, |\|f_i\| - t \|f_0\||\}\right).$$

Es sencillo ver que si $t \geq 0$, entonces

$$\|tf_0\| \leq \left|\|f_i\| - t\,\|f_0\|\right| \qquad \text{para toda } t \leq \tfrac{\|f_i\|}{2\|f_0\|},$$

y que

$$\|tf_0\| \geq \left|\|f_i\| - t\,\|f_0\|\right| \qquad \text{para toda } t \geq \tfrac{\|f_i\|}{2\|f_0\|}.$$

Consideremos pues la función $F : \Re^+ \cup \{0\} \to \Re$ definida como

$$F(t) = \sqrt{t^2\,\|f_0\|^2 + \|f_i\|^2} + \max\left\{t\,\|f_0\|\,, \left|\|f_i\| - t\,\|f_0\|\right|\right\},$$

o lo que es lo mismo,

$$F(t) = \sqrt{t^2\,\|f_0\|^2 + \|f_i\|^2} + \|f_i\| - t\,\|f_0\|$$

si $0 \leq t \leq \frac{\|f_i\|}{2\|f_0\|}$, y

$$F(t) = \sqrt{t^2\,\|f_0\|^2 + \|f_i\|^2} + t\,\|f_0\|$$

si $\frac{\|f_i\|}{2\|f_0\|} \leq t < \infty$.

F es decreciente en el intervalo $\left[0, \frac{\|f_i\|}{2\|f_0\|}\right]$ y creciente en el intervalo $\left[\frac{\|f_i\|}{2\|f_0\|}, \infty\right)$, de aquí que el ínfimo (3.1) se alcanza en

$$\lambda = \lambda_i = \frac{z_i\,\|f_i\|}{2\,\|f_0\|}.$$

Puede probarse que sólo en este punto se obtiene el valor mínimo.

Debido a que para toda $i \in \mathbf{N}$ sucede que $\|f_i\| \geq 1$, por ser $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ normalizada, y en virtud de que $\|h_0\| = 1$, tenemos

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| = \tfrac{1}{2} \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} \tfrac{z_i\|f_i\|}{\|f_0\|} x_i\right\|$$

$$\geq \tfrac{1}{2} \sup_{n\in\mathbf{N}} \left|\sum_{i=1}^{n} \tfrac{z_i\|f_i\|}{\|f_0\|} h_0(x_i)\right| \geq \tfrac{1}{2\|f_0\|} \sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \cdot |h_0(x_i)|$$

$$\geq \tfrac{1}{2\|f_0\|} \sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^{n} |h_0(x_i)| = \tfrac{1}{2\|f_0\|} \sum_{i=1}^{\infty} |h_0(x_i)| = \infty.$$

De la equivalencia entre $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ se sigue que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right|\right|\right| = \infty.$$

Así pues, el teorema **75** nos asegura que para $(X, |||\cdot|||)$ *no* existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. □

De lo dicho después de la prueba de la proposición **77** y a partir del teorema anterior se tiene:

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión básica y acotada en* X *y tal que*

$$codim\left([x_i]_{i=1}^{\infty}\right)=1.$$

$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es equivalente a la base canónica de* c_0 *si y sólo si para cualquier norma en* X *equivalente a la original, la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *tienen una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach.*

Dado que la subsucesión $\{e_i\}_{i=2}^{\infty}$ de la base canónica de $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$, con $1 \leq p < \infty$, no es equivalente a la base canónica de c_0 (considérese la sucesión $\left\{0, 1^{-\frac{1}{p}}, 2^{-\frac{1}{p}}, ...\right\}$), se concluye de lo anterior que para cada $1 \leq p < \infty$, existe una norma $|||\cdot|||_p$ equivalente a la usual tal que los coeficientes funcionales de $\{e_i\}_{i=2}^{\infty}$ no tienen extensiones de Hahn-Banach que constituyan una sucesión básica. Con esto se responde de manera negativa la pregunta planteada por Retherford en [7].

Es natural preguntarse si los resultados son ciertos en general, es decir cuando la codimensión de $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ es arbitraria. En la siguiente sección tratamos el caso en que $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ es de codimensión finita.

3.2 Extensión de coeficientes funcionales. Codimensión finita.

En ésta sección se supondrá:

i) $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en $(X, \|\cdot\|)$ para la cual $M = [x_i]_{i=1}^{\infty}$ tiene codimensión igual a $r+1$, con $0 \leq r < \infty$.

ii) $\{x_{-r}, ..., x_0\}$ son vectores en X linealmente independientes, y $N = \langle x_{-r}, ..., x_0\rangle$ es tal que $M \cap N = \{0\}$, es decir, $X = M \oplus N$.

Lema 79 *Sean* $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ *y* $\{f_i\}_{i=-r}^{\infty}$ *las sucesiones de los coeficientes funcionales asociados a la sucesión básica* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *y a la base* $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$ *respectivamente. Una funcional* $g_i \in X^*$ *es una extensión de* x_i^* *si y sólo si*

$$g_i = f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j,$$

para una única colección finita de escalares $\lambda_i^{(-r)}, ..., \lambda_i^{(0)}$.

DEMOSTRACIÓN

Como $X = M \oplus N$, se tiene $N^* \cong M^\perp$. Por tanto,

$$\dim\left(M^\perp\right) = r + 1.$$

Es claro que $\{f_i\}_{i=-r}^{0}$ es una base de $M^\perp$. Si $i \in \mathbf{N}$ y g_i es una extensión de x_i^*, entonces $g_i - f_i \in M^\perp$, por lo que existen $\lambda_i^{(-r)}, ..., \lambda_i^{(0)} \in \Im$ (únicos) tales que

$$g_i = f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j. \quad \square$$

Ahora generalizaremos la proposición **74** con una prueba más sencilla que la dada en [**4**].

Proposición 80 *Sea $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ una sucesión en N. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $\{x_i + y_i\}_{i=1}^\infty$ *es una sucesión básica.*
ii) $X = [x_i + y_i]_{i=1}^\infty \oplus N$.
iii) $[x_i + y_i]_{i=1}^\infty$ *tiene codimensión* $r + 1$.

DEMOSTRACIÓN

Es claro que $[x_i + y_i]_{i=1}^\infty + N = M \oplus N$. Sea P_M la proyección de X en M. Si $z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x_i + y_i)$ para una sucesión de escalares, entonces por la continuidad de P_M obtenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ converge, y así, $z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i$.

$\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Basta probar: $[x_i + y_i]_{i=1}^\infty \cap N = \{0\}$. Sea $z \in [x_i + y_i]_{i=1}^\infty \cap N$. Existe una única sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ tal que $z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i$, de donde $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i = z - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i \in M \cap N$, y por consiguiente $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \mathbf{N}$ y $z = 0$.

$\boxed{ii) \Rightarrow i)}$ Sea Q la proyección de X en $[x_i + y_i]_{i=1}^\infty$ y tómese $z \in [x_i + y_i]_{i=1}^\infty$. Existe una única sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ y un único elemento $y_z \in N$ tal que $z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i + y_z$ (recuérdese que se supuso, al inicio de la sección, que $X = M \oplus N$). Sea $n \in \mathbf{N}$, entonces

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i x_i = z - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i + y_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i - y_z,$$

de donde

$$Q\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i x_i\right)=z-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(x_i+y_i\right).$$

De la continuidad de Q y la convergencia de $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i$ se sigue que $z=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x_i+y_i)$. Mas aún, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la única sucesión de escalares con tal propiedad, pues en caso contrario $P_M(z)$ tendría dos expresiones distintas en términos de la sucesión básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Es claro que *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*.

$\boxed{iii) \Rightarrow ii)}$ Supongamos que $[x_i+y_i]_{i=1}^{\infty}\cap N\neq\{0\}$, y sea $\widetilde{y_0}\neq 0$ un elemento en esa intersección. Existen $\widetilde{y_{-1}},...,\widetilde{y_{-r}}\in N$ para los cuales $\{\widetilde{y_0},...,\widetilde{y_{-r}}\}$ es una base de N. Conforme a lo señalado al inicio de la demostración, $[x_i+y_i]_{i=1}^{\infty}+N=X$, por tanto, las clases $[\widetilde{y_{-1}}],...,[\widetilde{y_{-r}}]$ en $X/[x_i+y_i]_{i=1}^{\infty}$ constituyen un sistema de generadores de este cociente, y así $codim([x_i+y_i]_{i=1}^{\infty})\leq r$, lo que contradice a *iii)*. □

Corolario 81 *Sea $\{f_i\}_{i=-r}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a la base $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$. Sea $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $M^{\perp}$. La sucesión $\{f_i+g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica si y sólo si*

$$[f_i]_{i=1}^{\infty}\oplus M^{\perp}=[f_i+g_i]_{i=1}^{\infty}\oplus M^{\perp},$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si $[f_i+g_i]_{i=1}^{\infty}$ tiene codimensión $r+1$ en $[f_i]_{i=1}^{\infty}\oplus M^{\perp}$.

DEMOSTRACIÓN

Tenemos que $X^*=N^{\perp}\oplus M^{\perp}$, pues $X=M\oplus N$. Como $[f_i]_{i=1}^{\infty}\subset N^{\perp}$, se tiene que $Y=[f_i]_{i=1}^{\infty}\oplus M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X^*, es decir, Y es un espacio de Banach en el que $[f_i]_{i=1}^{\infty}$ tiene codimensión $r+1$.

El corolario se sigue de la proposición anterior aplicada al espacio Y y a la sucesión básica $[f_i]_{i=1}^{\infty}$. □

Teorema 82 *Sean $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{f_i\}_{i=-r}^{\infty}$ las sucesiones de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y a $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$ respectivamente. Existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ si y sólo si existe una sucesión $\left\{\left(\lambda_i^{(-r)},...,\lambda_i^{(0)}\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ en $\Im^{r+1}$ que satisface* *las siguientes dos propiedades:*

i) *Para toda* $i \in \mathbf{N}$,

$$\left\| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j \right\| = \inf_{\left(\lambda^{(-r)},\dots,\lambda^{(0)}\right)\in \Im^{r+1}} \left\| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda^{(j)} f_j \right\|.$$

ii) $$\max_{-r\leq j\leq 0} \left(\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(j)} x_i \right\| \right) < \infty.$$

Demostración

Como en el caso del **teorema 75**, se demostrará que *i)* es una condición necesaria y suficiente para que exista una sucesión de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$, en tanto que *ii)* lo es para que una sucesión de extensiones sea una sucesión básica.

Sea $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ cualquier sucesión de extensiones de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. Por el lema **79**, existe una sucesión $\left\{\left(\lambda_i^{(-r)},\dots,\lambda_i^{(0)}\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ en $\Im^{r+1}$ tal que

$$g_i = f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j \qquad \text{para cada } i \in \mathbf{N}.$$

La sucesión $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de extensiones de Hahn-Banach si y sólo si

$$\|g_i\| = \left\| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j \right\| = \|x_i^*\| = \|f_i\,|_M\|,$$

y como

$$\|f_i\,|_M\| = \inf_{\left(\lambda^{(-r)},\dots,\lambda^{(0)}\right)\in \Im^{r+1}} \left\| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda^{(j)} f_j \right\|$$

(recuérdese que $M^{\perp} = \langle f_{-r},\dots,f_0\rangle$), se sigue que $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ si y sólo si

$$\left\| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j \right\| = \inf_{\left(\lambda^{(-r)},\dots,\lambda^{(0)}\right)\in \Im^{r+1}} \left\| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda^{(j)} f_j \right\|.$$

Por otra parte, de acuerdo a lo señalado en la prueba del corolario anterior, se tiene que $Y = [f_i]_{i=1}^{\infty} \oplus M^{\perp}$ es un espacio de Banach. Por tanto, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica si y sólo si $Y = [g_i]_{i=1}^{\infty} \oplus [f_j]_{j=-r}^{0}$. Así, basta probar que

$Y = [g_i]_{i=1}^{\infty} \oplus [f_j]_{j=-r}^{0}$ si y sólo si $\left\{\left(\lambda_i^{(-r)}, ..., \lambda_i^{(0)}\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ satisface *ii)*.

Hagamos $V = [g_i]_{i=1}^{\infty}$ y supongamos que $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica, y así $Y = V \oplus [f_j]_{j=-r}^{0}$. Es claro que la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es $\{\widehat{x_i}\,|_V\}$, de donde, aplicando la proposición **70** a V con la base $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ y al espacio de Banach Y, obtenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (\widehat{x_i} \circ P_V)(f)\, g_i\right\| \leq K \,\|P_V\|$$

para toda $f \in Y$, con $\|f\| \leq 1$, y para toda $n \in \mathbf{N}$, donde K es la constante básica de $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ y P_V es la proyección de Y en V. Sea $f \in Y$, con $\|f\| \leq 1$. Entonces

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_i}(f)\, g_i + g_f,$$

para una única $g_f \in M^{\perp}$, de donde

$$P_V(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_i}(f)\, g_i,$$

y así,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(f)\, g_i\right\| \leq K \,\|P_V\| \qquad \text{para toda } n \in \mathbf{N},$$

En particular

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(f)\, g_i\right\|_N \leq K \,\|P_V\|,$$

donde $\|\cdot\|_N$ es la norma de la restricción de la funcional a N. Como $f_i \in N^{\perp}$ para toda $i \in \mathbf{N}$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(f)\,(f_i - g_i)\right\|_N = \left\|\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(f) \left(\sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j\right)\right\|_N \leq K \,\|P_V\|.$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$ definimos $s_n : X \to [x_1, ..., x_n]$ como

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j(x)\right) x_i = \sum_{i=1}^{n} ((f_i - g_i) \otimes x_i)(x).$$

Sean $y \in N$, con $\|y\| \leq 1$, y $n \in \mathbf{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(s_n(y))| &= \left|\widehat{s_n(y)}(f)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(f)(f_i - g_i)(y)\right| \leq K \|P_V\|. \end{aligned}$$

Por el teorema de Hahn-Banach, existe $h_y \in ([x_i]_{i=1}^{n})^*$ tal que $h_y(s_n(y)) = \|s_n(y)\|$ y tal que $\|h_y\| = 1$. Sea $\widetilde{h_y} = h_y \circ P_n'$, donde P_n' es la diferencia $P_n - P_0$, con P_j la proyección de $[x_i]_{i=-r}^{\infty}$ a $[x_i]_{i=-r}^{j}$, para cada $-r \leq j < \infty$. Entonces

$$\widetilde{h_y}(s_n(y)) = \|s_n(y)\| \quad \text{y} \quad \left\|\widetilde{h_y}\right\| \leq 2K_{\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}},$$

donde $K_{\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}}$ es la constante básica de $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$. Ahora bien, es claro que $\widetilde{h_y} \in Y$, ya que $h_y \circ P_n' = \sum_{i=1}^{n} h_y(x_i) f_i$, por tanto,

$$\|s_n(y)\| = \left|\widetilde{h_y}(s_n(y))\right| \leq 2KK_{\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}} \|P_V\|,$$

es decir,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j(y)\right) x_i\right\| \leq 2KK_{\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}} \|P_V\| \cdot \|y\|$$

para toda $y \in [x_i]_{i=-r}^{0}$. En particular, si $-r \leq j \leq 0$ y $y = x_j$, obtenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(j)} x_i\right\| \leq K_0,$$

donde $2K_0 = K \cdot K_{\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}} \|P_V\| \max_{-r\leq j\leq 0} \|x_j\|$. Como $n \in \mathbf{N}$ es arbitraria, la sucesión $\left\{\left(\lambda_i^{(-r)}, ..., \lambda_i^{(0)}\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ satisface *ii)*.

Inversamente, supongamos que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(j)} x_i\right\| = K_1 < \infty$$

para toda $-r \leq j \leq 0$. Entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (f_i - g_i) \otimes x_i\right\| \leq K_1 \sum_{j=-r}^{0} \|f_j\| = K_2,$$

y por tanto,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i\right\|_N \leq K_2,$$

y como

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i\right\|_M = \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i\right\|_M \leq K_{\{x_i\}_{i=1}^{\infty}},$$

concluimos que existe $0 < K_0 < \infty$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i\right\| \leq K_0 \qquad \text{para toda } n \in \mathbf{N}.$$

Así,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i} \otimes g_i\right\| \leq K_0.$$

En particular si $f \in [f_i]_{i=1}^{\infty}$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i}(f)\, g_i\right\| \leq K_0 \|f\|, \tag{3.2}$$

lo cual implica que $\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_i}(f)\, g_i$ converge para toda $f \in [f_i]_{i=1}^{\infty}$.

Definimos $Q : Y \to [g_i]_{i=1}^{\infty} = V$ como $Q(f+g) = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{x_i}(f)\, g_i$, donde $f \in [f_i]_{i=1}^{\infty}$ y $g \in M^{\perp}$. Q es claramente una proyección y es continua por (3.2) y la proposición **27**. Así, el rango de Q es cerrado, y como $(g_i)_{i=1}^{\infty} \subset Q(Y)$, concluimos que $[g_i]_{i=1}^{\infty} = Q(Y)$, y por tanto $Y = V \oplus M^{\perp}$. □

Teorema 83 *Supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es además acotada, y sea $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces existe una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach.*

DEMOSTRACIÓN

La proposición **41** nos permite suponer que la norma en X es tal que $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$ es monótona y normalizada. Sea $\{f_i\}_{i=-r}^{\infty}$ la sucesión de los coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$. Es claro que $[f_i]_{i=-r}^{\infty} = [f_i]_{i=1}^{\infty} \oplus [f_j]_{j=-r}^{0}$, por tanto, de acuerdo a la proposición **27**, la norma

$$|||f||| = \left\|\left|\sum_{i=-r}^{\infty} a_i f_i\right|\right\| = \left\|\sum_{i=-r}^{0} a_i f_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|$$

es equivalente a $\|\cdot\|$ en $[f_i]_{i=-r}^{\infty}$. Mas aún, para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=-r}^{\infty}$, la sucesión

$$\left\{\left|\left|\left|\sum_{i=-r}^{n} a_i f_i\right|\right|\right|\right\}_{n=-r}^{\infty}$$

es no decreciente, ya que

$$\left|\left|\left|\sum_{i=-r}^{n} a_i f_i\right|\right|\right| = \begin{cases} \left\|\sum_{i=-r}^{n} a_i f_i\right\| & \text{si} \quad -r \leq n \leq 0 \\ \left\|\sum_{i=-r}^{0} a_i f_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\| & \text{si} \quad n > 0, \end{cases}$$

y por la proposición **64** y el lema **38** se tiene que para toda sucesión de escalares $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, la sucesión

$$\left\{\left\|\sum_{i=-r}^{n} b_i f_i\right\|\right\}_{n=-r}^{\infty}$$

es no decreciente. Así, $\{f_i\}_{i=-r}^{\infty}$ es $|||\cdot|||$-monótona. Por la proposición **72**, la norma $|||\cdot||| : X \to \Re$ definida como

$$|||x||| = \sup\left\{|f(x)| : f \in [f_i]_{i=-r}^{\infty},\ |||f||| \leq 1\right\}$$

es equivalente a la original y además sucede que

$$|||f||| = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ |||x||| \leq 1\}$$

para cualquier $f \in [f_i]_{i=-r}^{\infty}$. Así pues, para cada $i \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} &\inf_{(\lambda^{(-r)},\ldots,\lambda^{(0)})\in\Im^{r+1}} \left|\left|\left|f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda^{(j)} f_j\right|\right|\right| \\ = &\inf_{(\lambda^{(-r)},\ldots,\lambda^{(0)})\in\Im^{r+1}} \left(\left\|-\sum_{j=-r}^{0} \lambda^{(j)} f_j\right\| + \|f_i\|\right) = \|f_i\|, \end{aligned}$$

y claramente este ínfimo se alcanza cuando

$$\left(\lambda^{(-r)},\ldots,\lambda^{(0)}\right) = \left(\lambda_i^{(-r)},\ldots,\lambda_i^{(0)}\right) = (0,\ldots,0),$$

por tanto,

$$\max_{-r\leq j\leq 0}\left(\sup_{n\in\mathbf{N}}\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(j)} x_i\right\|\right) < \infty.$$

El teorema **82** nos asegura entonces que para esta nueva norma $|||\cdot|||$, existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. □

Finalmente enunciamos y demostramos la generalización correspondiente al teorema **78**.

Teorema 84 *Supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es además acotada en $(X, \|\cdot\|)$ y que no es equivalente a la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de c_0. Entonces existe en X una norma equivalente a la original tal que la sucesión de los coeficientes funcionales $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ no admite una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach.*

DEMOSTRACIÓN

La proposición **41** nos permite suponer que la norma en X es tal que $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$ es monótona y normalizada. Claramente $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$ no es equivalente a $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ respecto a esta norma. Por el teorema **59**, la serie $\sum_{i=-r}^{\infty} x_i$ *no* es w−incondicionalmente de Cauchy, por lo que existe $h_0 \in X^*$, con $\|h_0\| = 1$ y tal que

$$\sum_{i=-r}^{\infty} |h_0(x_i)| = \infty.$$

Para cada $i \in \mathbf{N}$ existe $z_i \in \Im$ tal que

$$|h_0(x_i)| = z_i h_0(x_i).$$

Sea $\{f_i\}_{i=-r}^{\infty}$ la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$. Por la proposición **63**, $\{f_i\}_{i=-r}^{\infty}$ es acotada. Para cada $j = -r, ..., 0$, definimos $\|\cdot\|_j : [f_i]_{i=-r}^{\infty} \to \Re$ como

$$\|f\|_j = \left\|\sum_{i=-r}^{\infty} a_i f_i\right\|_j = \sqrt{\|a_j f_j\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|^2 + \left(\sup_{n\in\mathbf{N}} |a_j \|f_j\| + z_n a_n \|f_n\||\right)}.$$

Es fácil comprobar, siguiendo los argumentos usados en la prueba del teorema **78**, que el supremo considerado es finito, y que $\|\cdot\|_j$ es una seminorma en $[f_i]_{i=-r}^{\infty}$. Definimos entonces $|||\cdot||| : [f_i]_{i=-r}^{\infty} \to \Re$ como

$$|||f||| = \left|\left|\left|\sum_{i=-r}^{\infty} a_i f_i\right|\right|\right| = \max_{-r\leq j\leq 0} \|f\|_j.$$

$|||\cdot|||$ es una norma en $[f_i]_{i=-r}^{\infty}$ equivalente a $\|\cdot\|$, y además, $\{f_i\}_{i=-r}^{\infty}$ es $|||\cdot|||$-monótona. Por tanto, la proposición **72** nos asegura que la norma $|||\cdot||| : X \to \Re$ definida como

$$|||x||| = \sup\left\{|f(x)| : f \in [f_i]_{i=-r}^{\infty},\ |||f||| \leq 1\right\}$$

es equivalente a la original, y que además sucede que

$$|||f||| = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ \ |||x||| \leq 1\}$$

para cualquier $f \in [f_i]_{i=-r}^{\infty}$.

Sea $i \in \mathbf{N}$. Entonces

$$\left|\left|\left| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda^{(j)} f_j \right|\right|\right| \doteq \max_{-r \leq j \leq 0} \left(\sqrt{\left\|\lambda^{(j)} f_j\right\|^2 + \|f_i\|^2} \right.$$
$$\left. + \max\left\{ \left\|\lambda^{(j)} f_j\right\|, \left| z_i \|f_i\| - \lambda^{(j)} \|f_j\| \right| \right\} \right).$$

Sea

$$G\left(\lambda^{(-r)}, ..., \lambda^{(0)}\right) = \left|\left|\left| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda^{(j)} f_j \right|\right|\right|,$$

y para cada $-r \leq j \leq 0$, sea

$$G_j(\lambda) = \sqrt{\|\lambda f_j\|^2 + \|f_i\|^2} + \max\{\|\lambda f_j\|, |z_i \|f_i\| - \lambda \|f_j\||\}.$$

Así, $G\left(\lambda^{(-r)}, ..., \lambda^{(0)}\right) = \max_{-r \leq j \leq 0} G_j\left(\lambda^{(j)}\right)$, y es entonces sencillo probar que

$$\inf_{\left(\lambda^{(-r)}, ..., \lambda^{(0)}\right) \in \Im^{r+1}} G\left(\lambda^{(-r)}, ..., \lambda^{(0)}\right) = \max_{-r \leq j \leq 0} \left(\inf_{\lambda \in \Im} G_j(\lambda) \right).$$

Para cada $-r \leq j \leq 0$, $G_j(\lambda)$ es una función de la forma

$$\sqrt{|\lambda|^2 a^2 + b^2} + \max(|\lambda| a, |z_i b - \lambda a|),$$

donde $\lambda \in \Im$, $a, b > 0$ y $|z_i| = 1$. Como en el teorema **76**, esta función sólo alcanza su ínfimo cuando

$$\lambda = \frac{b}{2a} z_i,$$

y por tanto $G_j(\lambda)$ sólo alcanza su ínfimo cuando

$$\lambda_i^{(j)} = \frac{\|f_i\|}{2\|f_j\|} z_i.$$

Dicho ínfimo tiene un valor de

$$\left(\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \|f_i\| \qquad \text{para toda } -r \leq j \leq 0.$$

De aquí que $G\left(\lambda^{(-r)}, ..., \lambda^{(0)}\right)$ sólo alcanza su mínimo en

$$\left(\lambda_i^{(-r)}, ..., \lambda_i^{(0)}\right) = \left(\frac{\|f_i\| z_i}{2\|f_{-r}\|}, ..., \frac{\|f_i\| z_i}{2\|f_0\|} \right),$$

ya que si $\lambda^{(j_0)} \neq \frac{\|f_i\|}{2\|f_{j_0}\|} z_i$ para alguna $-r \leq j_0 \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned} G\left(\lambda^{(-r)}, ..., \lambda^{(0)}\right) &\geq G_{j_0}\left(\lambda^{(j_0)}\right) > G_{j_0}\left(\tfrac{\|f_i\|}{2\|f_{j_0}\|} z_i\right) \\ &= \max_{-r \leq j \leq 0} G_j\left(\tfrac{\|f_i\|}{2\|f_{j_0}\|} z_i\right) = \left(\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \|f_i\|, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$G\left(\lambda_i^{(-r)}, ..., \lambda_i^{(0)}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \|f_i\|.$$

Resumiendo, $\left\{\left(\lambda_i^{(-r)}, ..., \lambda_i^{(0)}\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ es la única sucesión tal que

$$\inf_{\left(\lambda^{(-r)}, ..., \lambda^{(0)}\right)} \left\|\left\| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda^{(j)} f_j \right\|\right\| = \left\|\left\| f_i - \sum_{j=-r}^{0} \lambda_i^{(j)} f_j \right\|\right\|.$$

para toda $i \in \mathbf{N}$.

Debido a que para toda $i \in \mathbf{N}$ sucede que $\|f_i\| \geq 1$, por ser $\{x_i\}_{i=-r}^{\infty}$ normalizada, y en virtud de que $\|h_0\| = 1$, tenemos que si $-r \leq j \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(j)} x_i \right\| &= \tfrac{1}{2} \sup_{n\in\mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \tfrac{z_i \|f_i\|}{\|f_j\|} x_i \right\| \\ &\geq \tfrac{1}{2\|f_j\|} \sup_{n\in\mathbf{N}} \left| \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| z_i h_0(x_i) \right| \geq \\ &= \tfrac{1}{2\|f_j\|} \sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^{n} |h_0(x_i)| = \tfrac{1}{2\|f_j\|} \sum_{i=1}^{\infty} |h_0(x_i)| = \infty. \end{aligned}$$

De la equivalencia entre $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ se sigue que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \left\|\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(j)} x_i \right\|\right\| = \infty \qquad \text{para toda } j = -r, ..., 0.$$

Así pues, el teorema **82** nos asegura que para $(X, |||\cdot|||)$ *no* existe una sucesión básica de extensiones de Hahn-Banach de $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. $\square$

Bibliografía

[1] BESSAGA, C., PELCZYŃSKI, A., *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces.* Studia Mathematica, **17**, 151-164. 1958.

[2] ENFLO, P., *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math., **30**, 309-317. 1973.

[3] HOLUB, J.R., *On basic Hahn-Banach extensions,* Studia Mathematica, **85**, 299-305. 1987.

[4] HOLUB, J.R., *On perturbations of bases and basic sequences.* **17**, 151-164. 1958.

[5] HORVÁTH, J., *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison Wesley, Massachusetts. 1966.

[6] HU, S.T., *Elements of Real Analysis,* Holden-Day, Inc., San Francisco. 1967.

[7] LINDESTRAUSS, J., TZAFRIRI, L., *Classical Banach Spaces. II: Function Spaces.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer. 1979.

[8] RETHERFORD, *Some remarks on Schauder bases of subspaces.* Rev. Roumaine Math. Pures et App. **13**, 521-527. 1968.

[9] RUDIN, W., *Functional Analysis.* McGraw-Hill. 1991.

[10] SINGER, I.M., *Bases in Banach Spaces I.* Springer Verlag, New York Inc., New York. 1970.

[11] SINGER, I.M., *Bases in Banach Spaces II.* Springer Verlag, New York Inc., New York. 1981.

[12] TAYLOR, A.E., *Elements of Real Analysis.* Holden Day, Inc., San Francisco. 1967.

[13] YOSIDA, K., *Functional Analysis.* Springer Verlag, New York Inc., New York. 1968.

[14] YU, XIN-TAI, *Basic Hahn-Banach extensions.* Journal of East China Normal University. Natural Science Edition. **3**, 29-33. 1989.