

48
28



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

‘‘ A R A G O N ’’

FALLA DE ORIGEN
‘‘ APUNTES DE FILTRADO Y MODULACION ’’

FALLA DE ORIGEN
EN SU TOTALIDAD

T E S I S
Que para obtener el Título de:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
P r e s e n t a
CARLOS ULISES MAVRIDIS TOVAR

San Juan de Aragón Edo. de Méx.

1995



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN
DIRECCION

FALLA DE ORIGEN

CARLOS ULISES MAVRIDIS TOVAR
P R E S E N T E .

En contestación a su solicitud de fecha 27 de octubre del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. NARCISO ACEVEDO HERNANDEZ pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado "APUNTES DE FILTRADO Y MODULACION", con fundamento en el punto 6 y siguientes del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

San Juan de Aragón, Edo. Méx., Noviembre 25 de 1993
EL DIRECTOR

M en I CLAUDIO C. MERRIFIELD CASTRO

- c c p Lic. Alberto Ibarra Rosas, Jefe de la Unidad Académica.
- c c p Ing. Federique Jauregui Renaud, Jefe de Carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica.
- c c p Ing. Narciso Acevedo Hernández, Asesor de Tesis.

CCMC/ALD/ava

Recibí Copia 7-41820-93.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS
PROFESIONALES ARAGON - UNAM

INGENIERIA MECANICA ELECTRICA

ENEP ARAGON
UNIDAD ACADÉMICA

★ NOV. 16 1994 ★

RECIBIDO

LIC. ALBERTO IBARRA ROSAS
JEFE DE LA UNIDAD ACADÉMICA
P R E S E N T E :

Por este medio, hago constar que el alumno CARLOS ULISES MAVRIDIS TOVAR de la carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica y No. de Cuenta 8230235-1, ha concluido satisfactoriamente su trabajo de Tesis Titulado "AFUNTES DE FILTRADO Y MODULACION", por lo que solicito a usted de la manera mas atenta, se le conceda autorizacion para que prosiga con sus tramites de titulacion.

Sin más por el momento y agradeciendo su fina atencion, quedo de usted.

ATENTAMENTE.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

San Juan de Aragon, Edo. de Mex., noviembre 10 de 1994.

ING. NARCISO ACEVEDO HERNANDEZ
ASESOR DE TESIS.

Vo Bo
[Firma manuscrita]

c.c.p.: Archivo.

EL CELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES AMARON UMAH
JEFATURA DE CARRERA DE INGENIERIA MECANICA - ELECTRICA

Of. No. JCIME/068/95

LIC. ALBERTO IBARRA ROSAS
JEFE DE LA UNIDAD ACADÉMICA
P R E S I D E N T E .

Por este medio, me permito relacionar los nombres de los Profesores,
que sugiero integren el Síndico del Examen Profesional del alumno: -
CARLOS ULISES MAVRIDIS TOYAR, con el tema de Tesis: "APUNTES DE FIL-
TRADO Y MODULACION".

PRESIDENTE:	ING. RAUL BARRON VERA	OCTUBRE, 78
VOCAL:	ING. NARCISO ACEVEDO HERNANDEZ	ENERO, 86
SECRETARIO:	ING. CARLOS AMAYA LUMA	OCTUBRE, 86
SUPLENTE:	ING. DAVID ESTOPIER DOMINGUEZ	JUNIO, 87
SUPLENTE:	ING. JULIAN ZUNIGA NAVARRETE	JULIO, 87

Quiero subrayar que el Director de Tesis, es el ING. NARCISO ACEVEDO
HERNANDEZ, El cual es incognito, en base a lo que reza el Reglamento -
de Exámenes Profesionales de esta Escuela.

A T E N T A M E N T E
"PON MI RAZA A HABLAR EL ESPIRITU"
San Juan de Aragón, Edo., de Méx., a 20 de febrero de 1995

ING. RAUL BARRON VERA
JEFE DE CARRERA

c.c.p. Ing. Manuel Martínez Ortiz
Jefe del Depto. de Servicios Escolares
Ing. Miguel Ángel Maldonado Muñoz
Secretario Técnico de IME.
Ing. NARCISO ACEVEDO HERNANDEZ
Asesor de Tesis.

RBV/lgs.

OBJETIVO

Este trabajo tiene como objetivo el presentar en forma clara, completa y, lo mas importante, conjunta en un volumen, una guia rapida en la que, va el profesor que ha de impartir la materia o ya el alumno que ha de cursarla, encuentre desarrollado, en su totalidad, el temario de la materia, con la evidente y necesaria opcion de consultar la bibliografia indicada, para ampliar las ideas en un t6pico en particular.

INTRODUCCION

Con motivo de la introduccion del nuevo plan de estudios de la carrera Ingeniero Mecanico Electricista, de reciente aprobacion en esta institucion, surge, entre otras, la necesidad de elaborar apuntes para las nuevas materias de este plan. Siendo Filtrado y Modulacion una de las materias basicas en el area de las comunicaciones, es necesario presentar al alumno en forma clara y concisa los conceptos y herramientas necesarias para el adecuado aprendizaje de todos los contenidos del temario. El proposito de este trabajo es presentar en forma basica pero no por ello incompleta, la totalidad del temario de Filtrado y Modulacion en un solo volumen. Debido a lo extenso del trabajo y a la naturaleza misma del tema, resulto un tanto dificil intentar modificar la presentacion de la informacion, ya que debia seguirse fielmente el temario oficial de la asignatura. Otro problema consistio en que la totalidad del curso deba impartirse en 64 horas, (es decir, 16 semanas) situacion que por mas que se trata, resulta -no solo en esta materia- muy dificil de cumplir.

Asi, por las restricciones antes mencionadas, el trabajo tuvo que ser limitado: se incluyen solo las demostraciones matematicas indispensables, los desarrollos en algunos ejemplos - en lo posible- se sintetizaron al maximo, etc. Con todo, espero que este documento pueda ser de alguna utilidad para alguien y no solo un tramite de titulacion.

El capitulo I presenta, en forma cronologica los eventos sobresalientes de la historia de las comunicaciones en Mexico, tal vez en una manera un tanto tradicional. Tambien se incluyen los principales conceptos y definiciones que se habran de utilizar durante el curso; en el capitulo II se hace un analisis de los filtros analogicos, realizando una comparacion entre las respuestas en frecuencia de los tipos basicos y se presentan ademas disenos de filtros activos y pasivos; el capitulo III comprende todo lo referente a filtros digitales, describiendo, tambien, los principales etodos de diseno de filtros de respuesta al impulso finita e infinita; en los capitulos IV y V se establece la teoria matematica basica de la modulacion lineal y angular, respectivamente, mencionando las principales aplicaciones de cada una de ellas; el capitulo VI menciona las caracteristicas fundamentales de las diversas tecnicas de modulacion analogica por pulsos, el capitulo VII presenta, finalmente, algunas aplicaciones practicas del contenido de este trabajo.

I. INTRODUCCION

OBJETIVO: Conocer la estructura general de los sistemas de comunicaciones eléctricos, los procesamientos que se llevan a cabo sobre las señales en ellos y los factores que alteran a las señales en una transmisión.

ANTECEDENTES: Análisis de Sistemas y Señales.
Dinámica de Sistemas Físicos.

CONCEPTOS: Transformada de Fourier
Sistemas Lineales
Función de Transferencia
Sistemas no lineales

I.1 PANORAMA GENERAL DE LAS TELECOMUNICACIONES

El arte de la comunicación es tan antiguo como la humanidad. En la antigüedad se usaban tambores y humo para transmitir información entre localidades. A medida que pasó el tiempo se crearon otras técnicas, tales como los semáforos. La era de la comunicación electrónica se inició con el invento del telégrafo, y su código asociado, que debemos a Samuel Morse. El código Morse utilizaba un número variable de elementos (puntos y rayas) con el objeto de definir cada carácter.

El invento del telégrafo adelantó la posibilidad de comunicación humana, no obstante tener muchas limitaciones. Uno de los principales defectos fue la incapacidad de automatizar la transmisión. Debido a la incapacidad técnica de sincronizar unidades de envío y recepción automáticas y a la incapacidad propia del código Morse de apoyar la automatización, el uso de la telegrafía estuvo limitado a claves manuales hasta los primeros años del siglo XX.

Al iniciarse el desarrollo de la electrónica, se establecen los principios básicos de telecomunicaciones, conmutación de mensajes y control de línea. Los sistemas se construyeron con base en comunicaciones a través de la voz y transmisión de caracteres de datos.

A partir de entonces, las telecomunicaciones se han desarrollado a pasos agigantados. Hoy en día es común ver por televisión noticias que acontecen en el mismo momento al otro lado del mundo o, inclusive, del mismo espacio.

En su concepto más general la palabra telecomunicaciones se refiere a cualquier medio de comunicación a distancia. Sin embargo, suele llamarse telecomunicación a la transmisión a distancia de mensajes hablados, sonidos, imágenes o señales convencionales mediante conductores eléctricos, ópticos u otros sistemas electromagnéticos.

De esta manera, se incluyen dentro de las telecomunicaciones:

- Telegrafía
- Telefonía
- Radio comunicación
- Comunicación vía satélite, etc.

Es indudable que las telecomunicaciones influyen grandemente en el desarrollo de un país, y en estos momentos de la historia el ser humano cuenta con variados sistemas de comunicación debido a que las tecnologías que los hacen posibles evolucionan día con día.

HISTORIA DE LAS TELECOMUNICACIONES

1800-1837	Descubrimientos preliminares. Volta descubre la batería primaria; los tratados matemáticos de Fourier, Cauchy y Laplace; experimentos con electricidad y magnetismo por Oersted, Ampere, Faraday y Henry; la ley de Ohm (1826); primeros sistemas telegráficos por Gauss y Weber y por Wheatstone y Cooke.
1838-1866	El nacimiento de la telegrafía. Morse perfecciona su sistema con la ayuda de Gale, Henry y Vail; Steinheil encuentra que la tierra puede ser empleada como un conductor; se inició el servicio comercial (1844); se inventó la técnica de la multicanalización; William Thomson (Lord Kelvin) calcula la respuesta a los pulsos de una línea telegráfica (1855); instalaron los cables transatlánticos por Cyrus Field y socios.
1845	Son enunciadas las leyes de Kirchoff para circuitos.
1849	En México se introduce el primer servicio telegráfico.

1864	Una Teoría Dinámica del Campo Electromagnético, por James Clerk Maxwell, predice la radiación electromagnética.
1876-1899	El nacimiento de la telefonía. Es perfeccionado el transductor acústico por Alexander Graham Bell, después de varios intentos hechos por Reis; primer intercambio telefónico, en New Haven, Conn., con ocho líneas (1878); transductor de carbón, a botón de Edison; se introdujeron los circuitos de cables; Strowger inventa la conmutación paso a paso (1887); la teoría del cable cargado por Heavyside, Pupin y Campbell.
1883	Entre México y E.E.U.U. ocurre la primera conferencia Telefónica Internacional entre las ciudades de Matamoros y Brownsville.
1887-1907	La telegrafía inalámbrica Heinrich Hertz comprueba la teoría de Maxwell; demostraciones por Marconi y Popov; Marconi patenta un sistema completo de telégrafo inalámbrica (1897); Sir Oliver Lodge desarrolla la teoría de los circuitos sintonizados; principia el servicio comercial que incluye sistemas barco-tierra y transatlánticos.
1904-1920	La electrónica aplicada al radio y al teléfono. Lee De Forest inventa el Audión (triodo) basado en el diodo de Fleming; experimentos de radiotransmisión de AM; línea telefónica transcontinental con repetidores electrónicos con el sistema Bell (1915); nace la telefonía multicanal sobre portadora; E.H. Armstrong perfecciona la radio receptor superheterodino (1918); primera estación radiodifusora KDKA, en Pittsburgh.
1924	Se inaugura la primera central automática de telefonía.
1920-1928	Documentos guía sobre la teoría de la transmisión de señales y del ruido por J.R. Carson, H. Nyquist, J.B. Johnson y R.V.L. Hartley. México logra su primer comunicación con Europa (1928).

1923-1938	El nacimiento de la televisión. Sistemas mecánicos de formación de imagen demostrados por Baird y Jenkins; análisis teórico de los requisitos de ancho de banda por Gray, Horton y Mathes; Farnsworth y Zworykin proponen sistemas electrónicos; tubos al vacío de rayos catódicos perfeccionados por Dumont y otros; empiezan las pruebas de campo y la transmisión experimental. El Ing. Camarena inventa un sistema de televisión cromática.
1930	El 18 de septiembre se funda la XEW.
1931	Se inicia el servicio de teleimpresores.
1936	Un método para la reducción de perturbaciones en la emisión de señales de radio por un sistema de Modulación en Frecuencia por Armstrong, propicia la creación de la radio de FM.
1937	Lec Reeves concibe la modulación por codificación de pulsos.
1938-1945	Segunda Guerra Mundial . Se desarrollan los sistemas de radar y microondas; la FM es usada en forma amplia en las comunicaciones militares; mejoras en electrónica, hardware y teoría en todas las áreas; Weiner y Kolmogoroff aplican métodos estadísticos a los problemas de detección de señales.
1948	C. E. Shannon publica Una Teoría Matemática de la Comunicación.
1950	El sistema multicanal por división en tiempo es aplicado a la telefonía. El 26 de julio, en México, se lleva a cabo la primera emisión de televisión. Surge el concepto de telefonía celular con el descubrimiento de comunicación duplex en radio.
1952	Llegan a México los primeros equipos de microondas para interconectar diversas dependencias de la Dirección General de Telecomunicaciones.
1955	J.R. Pierce propone sistemas para comunicación por satélites.
1956	Primer cable telefónico transoceánico (36 canales).

1957	Los Ingenieros Walter C. Buchanan, Jorge Ruelas Tejeda, Joaquin Durand diseñan el primer cohete mexicano SCT-1. El servicio de Telex se inicia en México.
1958	Se desarrollan sistemas de transmisión de datos a larga distancia con propósitos militares.
1959	Se lanza el cohete mexicano SCT-1.
1960	Maiman demuestra el primer láser.
1962	Principia la comunicación por satélite con el Telstar I.
1962-1966	El nacimiento de la comunicación digital de alta velocidad. El servicio de transmisión de datos aparece en forma comercial; canales de banda ancha para señalización digital; la modulación por codificación de pulsos se hace factible en la transmisión de voz y TV; mejoras en la teoría e implementación de la transmisión digital; incluyendo métodos de codificación para control de error por Bose, Chaudhuri, Wozencraft y otros, y el desarrollo de la igualación para adaptación por lucky y colaboradores.
1963	Osciladores de microondas de estado sólido perfeccionados por Gunn y otros.
1964	Se ponen en servicio los sistemas de conmutación telefónica completamente electrónicos.
1965	El Mariner IV transmite imágenes de Marte a la Tierra. Estira sus alas el pájaro madrugador, primer satélite espacial geostacionario. En México, se inaugura el servicio de larga distancia automática de teléfono a teléfono (lada 91), y comienzan las transmisiones de la programación via satélite.
1967	Se llevó a cabo un evento en el cual por primera vez en la historia se enlazaron, a través del INTELSAT II, los cinco continentes. Sistemas de TV por cable; enlaces experimentales de comunicación por láser; ensayos en el campo de la fonovisión; desarrollo de trabajos en las fibras ópticas, guías de onda helicoidales; filtros digitales, dispositivos acoplados en carga y circuitos integrados en gran escala.

1968	En México, concluyen los trabajos de la Red Nacional de Telecomunicaciones, iniciados en 1963. Entre otras instalaciones, incluía: la Red Federal de Microondas y la Estación Terrestre para comunicaciones espaciales de Tulancingo, comunicada con los satélites INTELSAT III y IV.
1971	4 de Noviembre, México se adhiere al sistema INTELSAT, Organización Internacional de Comunicaciones Via Satélite.
1977	Se construye la Estación Terrena de Tulancingo II.
1981	Se inaugura la primera central telefónica digital en México. Se pone en operación un sistema de telefonía móvil completamente automático.
1983	Se asignan a México cuatro posiciones orbitales para satélites geoestacionarios (69, 78, 127 y 136 grados-este).
1985	El 17 de junio se lanzó al espacio el satélite Morelos I y el 26 de noviembre el Morelos II, con ellos se inicia una nueva época en las comunicaciones de México.
1989	Se introduce el sistema celular que transformó la telefonía. Este tipo de medio de comunicación, consiste en una red de emisores-receptores de radio que ponen en comunicación a los abonados al servicio de la red telefónica convencional.
1991	Se inició en México la sustitución de las antiguas centrales telefónicas electromecánicas y analógicas por digitales, sin interrumpir el servicio.
1992	El 22 de diciembre desde Palacio Nacional se dejó escuchar por última vez el mensaje telegráfico con el sistema Morse. Se inician las obras de la red telefónica de fibra óptica en México.

1993	El 19 de noviembre es puesto en órbita el satélite Solidaridad I el cual contará con espacio para transmitir en banda "C", "Ku" y "L", que se utiliza para la radiodeterminación y la radiolocalización. Con esta nueva alternativa se podrá entablar comunicación de voz y datos con transportes en movimiento, ya sea costeras, ferrocarriles, barco, aviones, etc.
1994	El 8 de marzo concluye la vida útil del satélite Morelos I. El 7 de octubre es puesto en órbita el satélite Solidaridad II. En noviembre es inaugurada la primera red que utiliza banda "L" en México. El sistema de cable submarino Columbus II que tendrá una extensión de 12 mil 300 km, con capacidad de 32 mil canales telefónicos y una velocidad de transmisión de 565 megabits entrará en servicio en diciembre. Se pospone el lanzamiento del primer satélite del proyecto Iridium el cual consistirá de un sistema de 77 LEO's (Low Earth Orbit Satellites - satélites de órbita baja) formando una red, posibilitando a usuarios de cualquier parte del mundo comunicarse utilizando terminales portátiles.
1996	Se pretende que entre en operación en este año el sistema de 12 LEO's denominado ODYSSEY el cual pretende cubrir una distancia media de 9 mil km de tierra para ofrecer servicios de telefonía celular, radio localización vía satélite y mensajes. Trabajarán en banda L y S.
1998	En el primer trimestre se deorbitará el satélite Morelos II.

Actualmente en México contamos con una infraestructura de comunicaciones para la emisión y recepción de datos e información dentro del territorio nacional y con la comunidad internacional. Sin embargo, no podrá decirse que la inventiva del hombre alcanzó ya su punto culminante en materia de telecomunicaciones: nuevas técnicas, nuevas aplicaciones y nuevos descubrimientos ensanchan cada día más el vasto horizonte que aún tiene que abarcar la ciencia y la tecnología, para multiplicar cada vez más las posibilidades, en beneficio del género humano.

1.2. SISTEMA TIPICO DE COMUNICACION

Un sistema típico está formado de numerosas y diversas partes cuya comprensión es objetivo de todas las especialidades de la ingeniería eléctrica: conversión de energía, teoría de redes, electrónica y teoría electromagnética, por citar algunas de ellas.

Todos los sistemas de comunicación tienen la misma función básica, transmisión de la información. Definimos a la comunicación como el proceso por medio del cual la información se transfiere de un punto llamado fuente, en espacio y tiempo, a otro punto que es el destino ó usuario. Un sistema de comunicación eléctrica es aquel que ejecuta esta función principal, pero no exclusivamente, por medio de dispositivos y fenómenos eléctricos.

Es evidente que el concepto de información es la esencia de la comunicación, pero sea cual fuere el mensaje, el objeto de un sistema de comunicación es proporcionar una réplica aceptable de él en su destino. Cuando el mensaje producido por una fuente no es eléctrico, es necesario un transductor de entrada. Este transductor convierte el mensaje en una señal, una magnitud eléctrica variable, tal como un voltaje o una corriente. Similarmente, otro transductor en el destino convierte la señal de salida a la forma apropiada del mensaje.

Existen tres partes esenciales en un sistema de comunicación eléctrica, el transmisor, el canal de transmisión y el receptor.

TRANSMISOR

El transmisor pasa el mensaje al canal en forma de señal. Para lograr una transmisión eficiente y efectiva, se deben desarrollar varias operaciones de procesamiento de señal. La más común e importante de estas operaciones es la modulación, un proceso que se distingue por el acoplamiento de la señal transmitida a las propiedades del canal, por medio de una onda portadora.

CANAL DE TRANSMISION

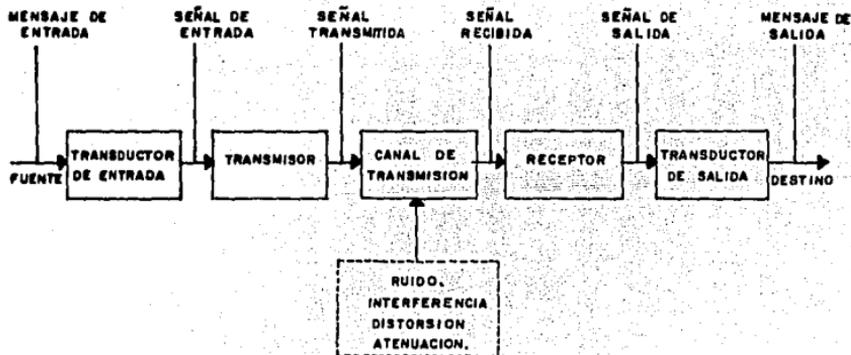
El canal de transmisión o medio, es el enlace eléctrico entre el transmisor y el receptor, siendo el puente de unión entre la fuente y el destino. Puede ser un par de alambres, un cable coaxial, una onda de radio o un rayo láser. Pero sin importar el tipo, todos los medios de transmisión eléctricos se caracterizan por la atenuación, la disminución

progresiva de la potencia de la señal conforme aumenta la distancia. La magnitud de la atenuación puede ser pequeña o muy grande. Generalmente es muy grande y, por lo tanto, es un factor que debe ser considerado.

RECEPTOR

La función del receptor es extraer del canal la señal deseada y entregarla al transductor de salida. Como las señales son frecuentemente muy débiles, como resultado de la atenuación, el receptor debe tener varias etapas de amplificación. En todo caso, la operación clave que ejecuta el receptor es la demodulación (o detección), el caso inverso del proceso de modulación del transmisor, con lo cual vuelve la señal a su forma original.

En la figura se muestran los elementos funcionales de un sistema completo de comunicación. Por conveniencia los hemos aislado como entidades distintas, aunque en los sistemas reales la separación no puede ser tan obvia.



1.3 FACTORES QUE ALTERNAN A LAS SEÑALES EN LOS SISTEMAS DE COMUNICACIONES.

DISTORSION.

Literalmente se dice que la distorsión es la deformación que experimenta un campo magnético o eléctrico por interacción con otro campo. Por ejemplo, la distorsión de los receptores de radio se manifiesta por una desigualdad en la producción de sonidos de frecuencias diferentes, que se traduce por una alteración de su timbre. La musicalidad de un receptor es tanto mayor cuando menor es su distorsión, o sea cuando más fielmente respeta las amplitudes y frecuencias de las vibraciones simples que constituyen los sonidos emitidos. En los aparatos de TV la distorsión provoca deformaciones en la imagen.

Cuando una señal se amplifica, debe tenerse cuidado para que la información contenida en la señal no cambie ni se introduzca nueva información. Así cuando se alimenta una señal a un amplificador, es deseable que la señal de salida sea una replica exacta de la entrada, excepto que tendrá una mayor amplitud. En otras palabras, las variaciones en la forma de la onda de salida deben ser idénticas a las de la onda de entrada. Cualquier cambio en la forma de onda se considera distorsión.

Distorsión de la señal a través de un canal.

Una señal que se transmite a través de un canal se distorsiona debido a diferentes imperfecciones del canal. La distorsión de una señal puede ocasionarse a través de un canal por las características no ideales ya sea de la magnitud, de la fase o de ambas.

Distorsión causada por las no linealidades de un canal.

El espectro de salida consta de un espectro de entrada más "autoconvoluciones" respectivas del espectro de entrada. Cuando un espectro se convoluciona consigo mismo, el espectro resultante tiene el doble del ancho de banda del espectro original. Este tipo de distorsión ocasiona no sólo distorsión en

la señal sino también interferencia con los canales vecinos, debido a la dispersión del espectro.

Distorsión ocasionada por el efecto de multitrayectoria.

Una transmisión de multitrayectoria tiene lugar cuando una señal transmitida llega al receptor por dos o más trayectorias de diferentes retardos. Por ejemplo si se transmite una señal a través de un cable que presenta irregularidades de impedancia (desbalanceo) a lo largo de su trayectoria, la señal llegará al receptor en la forma de una onda directa más algunas reflexiones con diferentes retardos. En los enlaces por radio, la señal puede recibirse por una trayectoria directa entre las antenas trayectorias y receptoras, y también por reflexión de otros objetos, como árboles. En los enlaces por radio a gran distancia, donde se utiliza la ionósfera, ocurrirán efectos similares debido a las trayectorias de un salto y saltos múltiples.

Distorsión armónica.

Distorsión debida a la característica de no linealidad de un elemento de un sistema de transmisión, y que se traduce en la aparición de componentes parásitos de frecuencias armónicas, de la corriente senoidal que se ha de transmitir.

Distorsión característica de línea.

Una clase de distorsión de transmisión por teletipo que se produce cuando las longitudes de los impulsos de señal recibida son afectados por la presencia de transiciones de corriente de circuitos alámbricos.

Distorsión de amplitud.

Distorsión causada por la falta de proporcionalidad entre la amplitud de la respuesta y la amplitud de la señal de entrada.

Distorsión transitoria.

Distorsión que aparece únicamente cuando existe una rápida fluctuación en la frecuencia y/o la amplitud del estímulo.

Distorsión de atenuación.

Efecto producido por la variación de la atenuación o de la ganancia en función de la frecuencia dentro de la banda utilizada. En un circuito o sistema, discrepancia con respecto a la amplificación o atenuación uniformes en el margen de frecuencia necesario para la transmisión.

Distorsión de fase.

Distorsión que sufre una señal, al pasar por un dispositivo o un sistema de información, debido a que la rotación de fase, no es igual para todas las frecuencias de la banda transmitida.

Distorsión de línea.

Distorsión que procede del contenido de frecuencia o de la distribución de fase de una señal transmitida, como resultado de la constante de propagación de la línea.

Distorsión de retardo.

Efecto producido por el hecho de que los tiempos de propagación para las diferentes frecuencias transmitidas sea distinto, haciendo que unas frecuencias lleguen antes que otras al extremo receptor.

Distorsión lineal.

Distorsión que conduce a una respuesta no lineal de un sistema como el de un amplificador, a la envolvente de una señal variable.

Distorsión próxima a la oscilación.

Efecto por el cual el abonado escucha a su correspondiente como a través de un túnel metálico vacío.

Distorsión Trapecial.

Distorsión producida por la exploración de manera rectilínea con ondas diente de sierra de amplitud constante, de un área plana de blanco que no es normal a la dirección media del haz.

INTERFERENCIA.

Las señales que se transmiten a través del mismo medio se interfieren entre sí, incluso si sus espectros nominales no se traslapan. El espectro real de una señal puede ser mucho más ancho que el espectro nominal. Por ejemplo, en un espectro de BLU (banda lateral única), el espectro no deseado nunca se suprime por completo y se interferirá con el canal adyacente. En la difusión de AM, las frecuencias de las portadoras están espaciadas cada 10 KHz, dejando un ancho de banda de 10 KHz para cada estación, pero es imposible suprimir completamente las componentes que están fuera del ancho de banda de 10KHz. En consecuencia ocurrirá alguna interferencia entre los canales adyacentes. Si una de las estaciones es muy potente, podría ser una desventaja para su débil vecina. En algunos casos la interferencia en la salida no es aditiva, sino multiplicativa, esto resulta en mutilación de la señal deseada.

Interferencia aceptada.

Son aquellas señales parásitas que no llegan a interrumpir la señal de comunicación.

Interferencia armónico.

Interferencia debida a la presencia de armónicos en la salida de una estación de radio.

Interferencia impulsiva.

Constituida por impulsos sucesivos de duración inferior a la constante de tiempo del receptor, y separados por intervalos de longitud suficiente para evitar su superposición.

Interferencia de canal adyacente.

Interferencia producida por el funcionamiento de un transmisor en un canal adyacente, cuando las bandas laterales del transmisor de un canal adyacente batan con la señal portadora a la estación deseada, denominada también interferencia de modulación cruzada; interferencia de banda lateral.

Interferencia electromagnética.

Interferencia originada por campos eléctricos o electromagnéticos y que pueden afectar, en ocasiones, considerablemente a los equipos informáticos, alterando datos o perjudicando el comportamiento de circuitos eléctricos y dispositivos.

Interferencia entre símbolo.

En un sistema de transmisión, la energía extraída de la señal en uno o más intervalos de manipulación, que tiende a interferir la recepción de la señal en otro intervalo de manipulación o la perturbación que de ella resulta.

Interferencia imagen.

Interferencia producida por cualquier señal recibida con una frecuencia igual o próxima a la frecuencia imagen.

Interferencia inductiva.

Efecto derivado de las características y relaciones inductivas del suministro eléctrico y de los sistemas de comunicaciones, de carácter y magnitud tales que impiden el que los circuitos de comunicaciones presenten servicio económica y satisfactoriamente.

Interferencia por impulsos modulados.

Uso de impulsos interferentes de varias anchuras y de varias frecuencias de repetición.

Interferencia por satélite adyacente.

Fenómeno de interferir señales dentro de un sistema de transmisión o recepción por un satélite al encontrarse otro satélite cercano al primero.

Interferencia de radio debido a la proximidad de un enlace terrestre a una estación terrena.

RUIDO.

A cualquier señal no deseada en la banda de frecuencia útil de un sistema de comunicaciones que tiende a enmascarar la señal deseada se le denomina ruido. Existe una gran variedad de ruidos artificiales, tales como los zumbidos de red, señales de otros canales que se originan por la selectividad inadecuada o rechazo de una imagen débil.

Cualquier partícula a una temperatura diferente de cero absoluto, posee una energía térmica que se manifiesta como movimiento aleatorio o agitación térmica. Si la partícula es un electrón, su movimiento aleatorio origina una corriente aleatoria. Luego, si esta corriente aleatoria ocurre en un medio conductor, se produce un voltaje aleatorio conocido como ruido térmico o ruido de resistencia. En realidad, en sistemas ordinarios bajo condiciones ordinarias la relación señal a ruido es bastante grande para que el ruido no sea perceptible.

Ruido aleatorio.

Ruido que se genera debido al movimiento de los electrones en un conductor (ruido térmico) o liberados por un cátodo (ruido de granalla), este ruido no es periódico y si se reproduce mediante un transductor acústico suena como un ligero siseo.

Ruido de motor.

En un amplificador de audio, una autooscilación de muy baja frecuencia causada por inestabilidad. El sonido que produce es similar al de un motor de canoa.

Ruido de Granalla.

Es el nombre que se le da al ruido generado en los dispositivos activos (fuentes de energía), tales como las válvulas y transistores, por la velocidad variable en forma aleatoria del movimiento de los electrones bajo la influencia de tensiones aplicadas desde el exterior mediante los adecuados terminales de electrodos.

Ruido estático.

Es el nombre que se le da al ruido que se encuentra en las trayectorias de espacio libre de los radioenlaces, y se debe principalmente a las tormentas ionosféricas que dan lugar a fluctuaciones del campo magnético terrestre. Esta forma de ruido está afectada por la rotación del sol (27.9 días un ciclo) y por la actividad de las manchas solares que predominen.

Ruido de parpadeo.

Su causa no es bien conocida pero es un ruido que predomina en las bajas frecuencias por debajo de 1 KHz. disminuyendo su nivel a medida que la frecuencia aumenta. Algunas veces se le conoce como "ruido de exceso" o "ruido 1/f".

Ruido blanco: El ruido que tiene un nivel medio sensiblemente constante en el ancho de banda de frecuencia.

ATENUACION.

Disminución de la amplitud de la señal perdida o reducción de la amplitud de una señal al pasar a través de un circuito, debida a resistencias, fugas, etc. Se expresa usualmente en decibelios por unidad de longitud.

Atenuación atmosférica.

Es la absorción de la señal debido a la atmósfera terrestre la cual influye con los gases contenidos en ella.

Atenuación para la frecuencia de imagen de un receptor.

La frecuencia imagen es igual a la frecuencia de la señal deseada más o menos dos veces la frecuencia intermedia, según sea la frecuencia del oscilador local mayor o menor que la frecuencia de la señal deseada.

Si el receptor tiene más de una conversión de frecuencia, habrá varias frecuencias imagen y a cada una de ellas corresponderá cierto valor de la atenuación.

Atenuación para la frecuencia intermedia.

Es la relación entre la potencia de la señal a la frecuencia intermedia necesaria, en una entrada para producir una potencia determinada a la salida del receptor, y la potencia de la señal deseada necesaria para producir la misma potencia de salida.

Atenuación por intensidad de lluvia.

La lluvia o humedad influyen en la pérdida de señal, debida a las partículas microscópicas de agua.

1.4. NECESIDAD DEL FILTRADO Y LA MODULACION.

FILTRADO.

Filtrado de la señal.

Una de las tareas en el procesamiento de señales, es la de su filtrado, proceso mediante el cual la parte esencial y útil de una señal se separa de componentes extraños e indeseables que por lo general se conocen como ruido y que se mezclan con la señal de interés de alguna manera.

Así, una visión general de un filtro eléctrico es que éste separa a la señal del ruido. El ruido se usa aquí para referirse a dos cosas diferentes. La primera son las señales espurias (se conocen también como interferencia) que podrían ser captadas por el sistema eléctrico en consideración. Un ejemplo de este tipo de señales indeseables es la interferencia que se escucha en los receptores de radio o en los aparatos de TV cuando se enciende un enser doméstico. Esta señal de interferencia usualmente se acopla al aparato de radio o de TV a través de la transmisión a lo largo del alambrado de la instalación eléctrica de la casa.

Lo segundo que se incluye en el concepto de ruido se refiere a las señales que se generan en los componentes electrónicos en sí. Estas señales de ruido se deben al movimiento continuo de las partículas cargadas dentro de los materiales de los componentes electrónicos.

Filtros ideales.

Los filtros ideales permiten la transmisión libre de distorsión de una cierta banda de frecuencias y bloquean las frecuencias restantes. Desafortunadamente ningún sistema real puede presentar cualidades proféticas. En consecuencia, se debe concluir que un filtro ideal, aunque deseable, no es físicamente realizable.

Filtros digitales.

Las señales analógicas pueden también procesarse por medios digitales (conversión A/D). Esto comprende muestreo, cuantificación y codificación. La señal resultante se puede procesar mediante una pequeña computadora digital de propósito especial que se diseña para convertir la sucesión de entradas en una sucesión de salidas deseada. La sucesión de salidas se

conviertan a su vez en la señal analógica deseada. La exactitud de un filtro digital depende solo de la longitud de palabra de la computadora, del intervalo de cuantificación y del índice de muestreo. Los filtros digitales emplean elementos simples como sumadores, multiplicadores, defasadores y elementos de retardo, más que componentes RLC y amplificadores operacionales. Como resultado no son afectados por factores tales como exactitud de los componentes, estabilidad de la temperatura, desplazamiento a largo plazo; que afectan a los circuitos analógicos del filtro.

Los filtros digitales pueden modificarse simplemente cambiando el algoritmo de la computadora, en contraste con un sistema analógico que podría requerir una reconstrucción física.

MODULACION

Razones para modular.

Muchas señales de entrada no pueden ser enviadas directamente hacia el canal, como vienen del transductor. Para eso se modifica una onda portadora, cuya propiedades se adaptan mejor al medio de transmisión en cuestión, para representar el mensaje. La modulación es la alteración sistemática de una onda portadora de acuerdo con el mensaje (señal moduladora) y puede ser también una codificación. Entonces, la modulación se precisa para acoplar la señal con un medio de transmisión.

Modulación por facilidad de radiación.

Utilizando la propiedad de traslación de frecuencia de la modulación, estas señales se pueden imprimir sobre una portadora de alta frecuencia, con lo que se logra una reducción sustancial del tamaño de las antenas.

Modulación para reducir el ruido y la interferencia.

Ciertos tipos de modulación tienen la útil propiedad de suprimir tanto el ruido como la interferencia. La supresión, sin embargo, ocurre a un cierto precio; generalmente requiere de un ancho de banda de transmisión (intervalo de frecuencia) mucho mayor que el de la señal original; de ahí la designación de reducción del ruido de banda ancha.

Modulación por asignación de frecuencia.

Es posible seleccionar y separar cualquiera de las estaciones de radio, dado que cada una tiene asignada una

frecuencia portadora diferente. Si no fuera por la modulación, sólo operaría una estación en un área dada.

Modulación para multicanalización.

Las técnicas de multicanalización son formas, intrínsecas de modulación, permiten la transmisión de señales múltiples sobre un canal, de tal manera que cada señal puede ser captada en el extremo receptor. Es muy común, por ejemplo, tener hasta 1800 conversaciones telefónicas de ciudad a ciudad, multicanalizadas y transmitidas sobre un cable coaxial de un diámetro menor de un centímetro.

Modulación para superar las limitaciones del equipo.

La modulación se puede usar para situar una señal en la parte del espectro de frecuencia donde las limitaciones del equipo sean mínimas o donde se encuentren más fácilmente los requisitos de diseño.

Con el fin de que la señal de información puede ser detectada y reproducida satisfactoriamente en el extremo receptor de un sistema, es esencial que la potencia de la señal útil sea mayor que la potencia del ruido presente en por lo menos un valor mínimo especificado.

Un amplificador se podría situar en el extremo emisor, con unas características de amplificación suficientes para compensar con su ganancia la atenuación de la línea.

Entre las técnicas empleadas para la optimización de las comunicaciones, encontramos la llamada codificación diferencial, que consiste en transmitir la señal y su forma de onda invertida por las vías similares; de esta forma se puede eliminar a los posibles contaminantes que puedan estar presentes en las señales que se estén utilizando.

FILTRADO ANALOGICO

OBJETIVO: Comprender la teoría de los filtros analógicos y las técnicas básicas del diseño de ellos.

ANTECEDENTES: Dinámica de Sistemas Físicos.

CONCEPTOS: Sistemas Lineales
Función de Transferencia.

II.1.-INTRODUCCION

El término filtro se utiliza para describir una amplia variedad de circuitos que son selectivos en frecuencia. Un filtro permite el paso de energía en señales de ciertas frecuencias, mientras que otras sufrirán una atenuación, en mayor o menor grado. El filtrado de señales es una parte esencial de la teoría de las comunicaciones, ya que el uso eficiente del espectro de radio depende de la capacidad para seleccionar una señal determinada entre varias.

I.1A FILTROS IDEALES.

Un filtro ideal es aquel dispositivo que permite el paso, sin distorsión alguna, de todos los componentes de frecuencia entre su frecuencia de corte inferior (f_{c1}) y su frecuencia de corte superior (f_{c2}). Fuera de este rango, tiene respuesta en magnitud cero. El rango de frecuencias definido por $f_{c1} < |f| < f_{c2}$ se llama *Banda de Paso* del sistema. Al resto del espectro se le llama *Banda de Supresión*.

Desafortunadamente, un filtro ideal, como se demostrará más adelante, resulta imposible de realizar físicamente. Sin embargo, y dado que algunas de las características de los filtros ideales son tan deseables, como lo es la pendiente infinita de corte y la atenuación infinita fuera de la banda de paso, se intenta construir filtros cuyas características se aproximen lo más posible a las de éstos.

Transmisión sin distorsión.

En una transmisión sin distorsión es necesario que la respuesta sea una réplica exacta de la señal de entrada. Tal réplica puede tener una magnitud diferente, pero no un cambio en la forma de onda. Puede, además haber algún retardo de tiempo asociado con ésta réplica. Podemos entonces decir que una señal $f(t)$ se transmite sin distorsión si la respuesta es $kf(t-t_0)$, es decir, la respuesta es la réplica exacta de la entrada con una magnitud k veces la de la señal original y un retraso de t_0 segundos.

Si $f(t)$ es la entrada, entonces la respuesta $r(t)$ es, en una transmisión sin distorsión:

$$r(t) = kf(t-t_0)$$

La transformada de Fourier de $r(t)$ es

$$R(\omega) = kF(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

dato que:

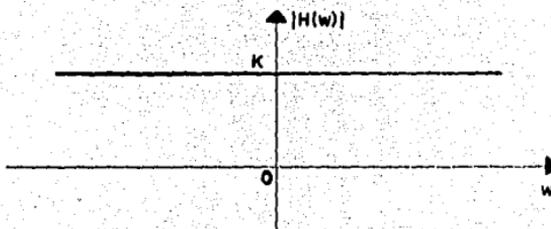
$$R(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

$$H(\omega) = ke^{-j\omega t_0}$$

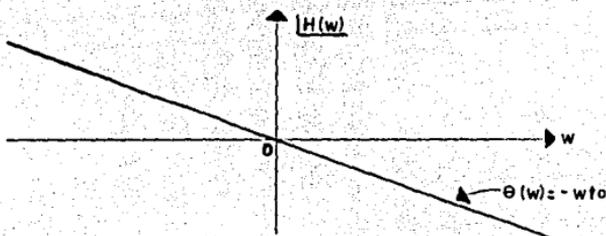
Por lo que, para lograr una transmisión sin distorsión a través de un sistema, la función de transferencia del sistema debe ser de la forma expresada en la ecuación anterior. En ella, se tiene que $|[H(\omega)]| = K$, es decir, la magnitud de la función de transferencia, es constante para todas las frecuencias. Además, el desfase es proporcional a la frecuencia, es decir:

$$\theta(\omega) = -\omega t_0$$

Lo anterior se muestra en la figura siguiente.



Característica de magnitud de un sistema de transmisión sin distorsión.



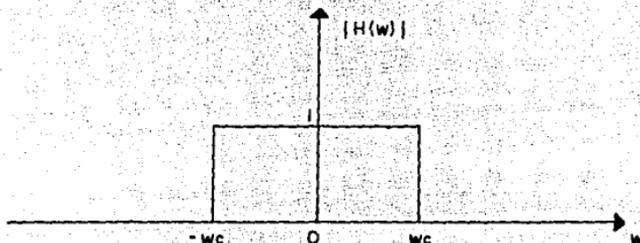
Característica de fase de un sistema de transmisión sin distorsión.

Filtro Ideal Paso Bajas.

El filtro ideal paso bajas tiene la siguiente función de transferencia, donde ω_0 es la frecuencia de corte:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0 & -\omega_c > \omega > \omega_c \end{cases}$$

El espectro en frecuencia de la función de transferencia del filtro ideal se obtiene a través de la magnitud de $e^{-j\omega t_0}$, la cual vale 1 y se muestra a continuación.



La respuesta al impulso $h(t)$ se puede determinar tomando la Transformada Inversa de Fourier para la función de transferencia:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi(t-t_0)} \left[e^{j\omega(t-t_0)} \right]_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi(t-t_0)} [e^{j\omega_c(t-t_0)} - e^{-j\omega_c(t-t_0)}] \end{aligned}$$

La expresión anterior puede arreglarse de la manera siguiente:

$$h(t) = \frac{1}{\pi(t-t_0)} \left[\frac{1}{2j} (e^{j(t-t_0)\omega_c} - e^{-j(t-t_0)\omega_c}) \right]$$

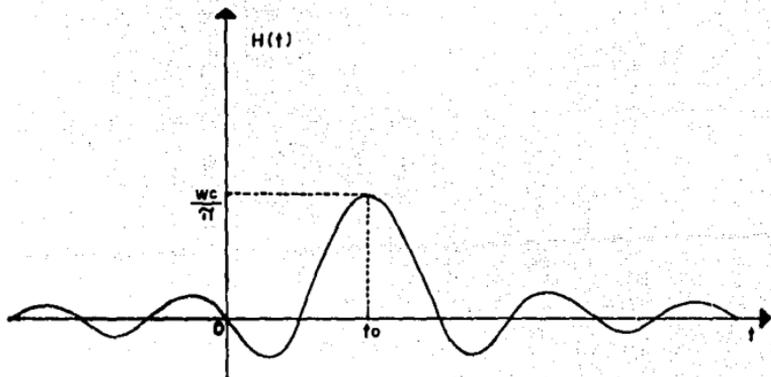
$$h(t) = \frac{1}{\pi(t-t_0)} \operatorname{sen}(t-t_0)\omega_c$$

haciendo que se pueda expresar como $(\operatorname{sen}(x))/x$:

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(t-t_0)\omega_c}{(t-t_0)}$$

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(t-t_0)\omega_c}{(t-t_0)\omega_c}$$

La expresión anterior es la respuesta al impulso del filtro paso bajas ideal. Su gráfica se muestra a continuación:



Obsérvese que existe respuesta antes de que se aplique el impulso, por lo que se dice que el sistema es no causal o lo que es lo mismo, no realizable físicamente.

11.18. FILTROS REALIZABLES

Es evidente que un sistema realizable físicamente no podrá tener una respuesta que se adelante a la aplicación de la función de entrada. Esto se conoce como la condición de causalidad. Es posible expresar tal condición de la siguiente manera:

La respuesta $h(t)$ a un impulso unitario de un sistema físicamente realizable debe ser causal. Una señal es causal si es cero en $t < 0$. Así, la respuesta $h(t)$ al impulso de un sistema físicamente realizable debe ser cero en $t < 0$.

El anterior es el criterio para la posibilidad de realización física en el dominio del tiempo. En el dominio de la frecuencia, el criterio implica que es condición necesaria y suficiente para que una función de magnitud $|H(\omega)|$ sea físicamente realizable que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|h(\omega)|}{(1+\omega)^2} d\omega < \infty$$

expresión que se conoce como Teorema de Paley - Wiener.

Sin embargo, para que este criterio valga, es necesario que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

Característica de la respuesta a la frecuencia de los filtros realizables.

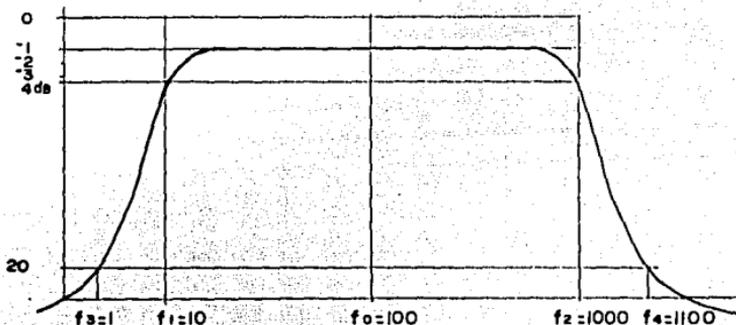
A continuación se revisarán algunos términos importantes aplicables a filtros.

La configuración de un circuito es simplemente la distribución de sus componentes. Un ejemplo de esto es el filtro que se construye colocando dos reactancias $Z_2/2$ en derivación con una reactancia Z_1 conectada en serie, en medio de las otras dos. Los elementos están distribuidos sobre un diagrama esquemático en forma de la letra griega π y entonces se puede decir que el filtro tiene esa configuración.

Pérdida por inserción es la pérdida en la fuerza de la señal que

circula por el filtro. (La región de Paso de Banda de un filtro es el rango de frecuencias que se supone son capaces de pasar a través del circuito).

El ancho de banda de un filtro es la diferencia en frecuencia entre dos puntos de la curva de la respuesta del filtro que tienen una pérdida especificada por inserción. Los puntos de la curva utilizados generalmente para definir el ancho de banda son los puntos de media potencia o de -3 dB, que son los puntos donde la respuesta del filtro se encuentra 3 dB abajo del nivel máximo de la curva. En la figura siguiente el ancho de banda se encuentra entre f_1 y f_2 .



La expresión para el ancho de banda de un filtro es:

$$AB = f_2 - f_1$$

en donde f_1 y f_2 son los puntos a -3 dB.
 La banda de paso de un filtro es la parte del espectro que permite pasar el filtro.
 Se dice que la banda de supresión de un filtro es aquella zona fuera de la banda de paso en la que se tiene una pérdida por inserción de -20 dB.
 al rango comprendido entre la banda de supresión y la de paso, se le conoce como banda de transición. En el diseño de filtros se desea que la banda de transición se reduzca al mínimo.

La frecuencia central f_0 puede definirse como central aritmética ó geométrica. Las fórmulas para cada una de ellas son:

$$F_0 = \frac{(f_1 + f_2)}{2}$$

(frecuencia central aritmética, en Hz)

$$F_0 = \sqrt{(f_1 \cdot f_2)}$$

(frecuencia geométrica central, en Hz)

Si la curva de la respuesta de un filtro se dibuja sobre un papel considerando la abscisa (eje horizontal) con marcas en frecuencia igualmente espaciadas, la frecuencia central aritmética será exactamente la mitad de camino de los puntos de -3 dB. Si la curva de la respuesta de un filtro se dibuja sobre un papel considerando una abscisa logarítmica, la frecuencia central geométrica será exactamente la mitad del camino de los puntos de -3 dB.

Selectividad es una medida de la eficiencia de un filtro al realizar su función. Si el filtro fuera perfecto, no habría pérdida por inserción en la banda de paso y existiría atenuación infinita en la banda de supresión.

Una manera de medir la selectividad es por medio del **Factor de forma**. El factor de forma se define como la relación del ancho de banda a los -3 dB con el ancho de banda donde la pérdida de inserción es de -20 dB. Cuanto más próxima sea esta relación a un valor de 1.0, mayor será la selectividad del filtro. El factor de forma para la figura anterior se obtiene mediante la fórmula:

$$\text{FACTOR DE FORMA} = S = \frac{(f_2 - f_3)}{(f_2 - f_1)}$$

En donde f_4 y f_3 son los puntos sobre la curva de la respuesta que se encuentra por debajo de los 20 dB a partir del nivel máximo.

f_2 y f_1 son los puntos sobre la curva de la respuesta que se encuentra por debajo de los 3 dB a partir del nivel máximo.

Como ejemplo, consideremos el filtro de la figura próxima anterior. Determinemos de él:

- a) el ancho de banda
- b) la banda de paso
- c) la banda de supresión
- d) la banda de transición
- e) la frecuencia geométrica central
- f) la frecuencia central aritmética
- g) el factor de forma

SOLUCION:

- a) $AB = f_2 - f_1$
 $AB = 1000 - 10 \text{ Hz} = 990 \text{ Hz.}$
- b) la banda de paso va de 10 Hz a 1000 Hz
- c) la banda de supresión se divide en dos secciones:
la primera de C.D. hasta 1 Hz. y la segunda de 1100 Hz hasta $F = \infty$.
- d) la banda de supresión también está formada por dos secciones:
la primera de 1 a 10 Hz y la segunda de 1000 a 1100 Hz.
- e) $F_0 = \sqrt{(F_1 \times F_2)} = \sqrt{(1000 \times 10)} = 100 \text{ Hz}$ (Frecuencia geométrica central)
- f) $F_0 = (F_1 + F_2) / 2 = (1000 + 10) / 2 = 505 \text{ Hz}$ (frecuencia central aritmética.)
- g) $S = (F_4 - F_3) / (F_2 - F_1) = (1100 - 1) / (1000 - 10) = 1.11$

II.1C. CLASIFICACION DE LOS FILTROS DE ACUERDO A LA APROXIMACION MATEMATICA.

Las especificaciones para el diseño de un filtro están usualmente dadas en términos de requerimientos de atenuación en la banda de paso y en la de supresión. el problema de la aproximación consiste en encontrar una función cuyas características de atenuación caigan dentro de la región permitida. Una necesidad adicional en la función elegida es que debe ser realizable usando componentes pasivos ó activos. Es también deseable mantener el orden de la función tan bajo como sea posible, con el objeto de minimizar el número de componentes requeridos para el diseño.

Existe un método de aproximación basado en gráficas de Bode, que es conveniente por sus diseños de filtros simples y de bajo orden. Filtros con respuestas características más complejas son aproximados usando algunas funciones racionales bien definidas cuyas raíces han sido tabuladas. Las más populares entre esas aproximaciones son las de Butterworth, Chebyshev, Bessel y la elíptica (ó Cauer). Tales aproximaciones son aplicables directamente a filtros paso bajas; sin embargo, pueden también ser usados para diseñar filtros paso alta, y filtros pasabanda y supresor de banda simétricos, empleando funciones de transformación de frecuencia.

II.1D) CLASIFICACION DE LOS FILTROS DE ACUERDO A SU CONSTRUCCION.

En esta sección se describen los distintos tipos de filtros que pueden construirse, como RLC pasivos, RC activos, electromecánicos, digitales y componentes de microondas. De ellos, los filtros activos y pasivos son los más comúnmente usados en comunicación de voz y datos, por lo que sus ventajas relativas se discutirán con cierto detalle.

Hay muchas formas diferentes para clasificar o identificar los filtros. Por ejemplo, algunas veces ellos se identifican por la distribución de los componentes. De esta manera un filtro pi se parecería a la letra griega π y uno T se parecería a tal letra.

Los filtros pueden identificarse por medio del método empleado para su diseño. Un filtro de constante K se diseña sobre la base de una constante k, que se relaciona con las impedancias del circuito. Un filtro m derivado se basa en una constante m que es derivada de la constante k.

En algunos casos el nombre de la persona que originó el diseño o el método del cálculo se utiliza para poder identificar el circuito del filtro. Algunos ejemplos de esto son los filtros de Chebyshev y de Butterworth.

Una clasificación de filtros muy utilizada depende de la escala de frecuencias que el filtro pasa o rechaza. De acuerdo con este punto de vista, sólo hay cuatro tipos básicos de filtros: **pasa bajas**, **pasa altas**, **pasa banda** y **supresión de banda**. Cualquier configuración de filtro puede incluirse en alguna de estas categorías.

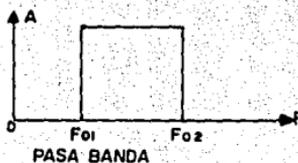
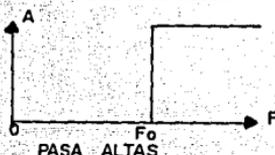
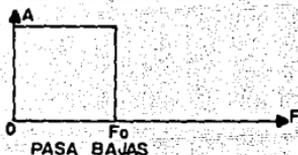
Filtro Pasa Bajas.- Solo permite el paso de las frecuencias interiores a una determinada F_0 (denominada frecuencia de corte). Las frecuencias superiores resultan atenuadas.

Filtro Pasa Altas.- Deja pasar las frecuencias que se hallan por encima de una determinada F_0 (frecuencia de corte) atenuando las inferiores.

Filtro Pasa Banda.- Permite el paso de las frecuencias situadas dentro de una banda delimitada por una frecuencia de corte inferior (F_{01}) y otra superior (F_{02}). Las frecuencias que estén fuera de esta banda son atenuadas.

Filtro Supresor de Banda.-Permite el paso de las frecuencias inferiores o superiores a dos frecuencias determinadas, que se denominan de corte inferior (F_{01}) y superior (F_{02}), respectivamente. Son atenuadas las frecuencias comprendidas en la banda que delimitan F_{01} y F_{02} .

Las figuras siguientes muestran la respuesta ideal a la frecuencia de los cuatro filtros de esta clasificación.



Los filtros consisten primordialmente en reactancias. Las reactancias pueden adoptar muchas formas físicas tales como bobinas, capacitores, cristales y resonadores mecánicos.

Aquellos constituidos por elementos R, L y C se conocen como filtros pasivos.

Los filtros LC son aquellos que consisten en inductores y capacitores. Se utilizan desde casi la corriente continua hasta unos cuantos centenares de megahertz.

Dado que los inductores no son puramente reactivos, ya que se encuentran presentes elementos resistivos que se deben a las pérdidas de los flujos magnéticos y los devanados, un filtro LC es, realmente un filtro RLC, con un valor R muy pequeño, comparado este con el valor de X_L . De manera que se pueda saber qué tanto se aproxima una bobina a ser ideal (resistencia igual a cero), se define el factor de calidad Q de la bobina como la razón del componente reactivo a la resistencia en serie.

$$Q = \frac{X_L}{(R_{ca} + R_{cc})}$$

en donde R_{ca} = pérdida de corriente alterna en el núcleo
 R_{cc} = resistencia de cc en el devanado.
 X_L = reactancia inductiva.

Otro tipo de filtros que utiliza un amplificador operacional de alta ganancia se conoce como filtro activo. Un filtro activo además del amplificador necesita una fuente de poder externa. El filtro activo más utilizado contiene elementos RC.

La principal ventaja de los filtros activos sobre los pasivos es que no se necesitan inductancias como en los primeros. Esto es de gran importancia en la operación a frecuencias muy bajas en donde los inductores llegan a ser excesivamente grandes y con muchas pérdidas.

Los filtros digitales convierten la señal analógica de entrada en digital antes de procesarla, lo que implica ciertas ventajas como la posibilidad de diseño de filtros de paso único y el procesamiento simultáneo de muchos canales de transmisión.

Los filtros de cristal ó resonadores de cristal de cuarzo pueden tener un Q de hasta 1000000. Dado que no pueden obtener tales valores de Q, los cristales son filtros casi perfectos. Los filtros de cristal tienen una alta estabilidad puesto que los

parámetros eléctricos del cuarzo permanecen constantes con el tiempo y la temperatura.

Los filtros mecánicos aceptan una señal eléctrica, la convierte en vibraciones mecánicas con un transductor, aplica esas vibraciones a un sistema de discos interconectados y vuelve a convertir las vibraciones resultantes eléctricas en la salida.

Los filtros mecánicos son más apropiados para filtros paso banda de ancho de banda estrecho en la gama de frecuencias de 50 a 500 KHz. Se pueden obtener valores Q de paso banda de hasta 1000, con una buena estabilidad de frecuencia.

Filtros pasivos.— Usan resistencias, capacitancias e inductancias. Para aplicaciones de audiofrecuencia el uso de inductancias presenta ciertos problemas, debido a que la impedancia de un inductor práctico se desvía de su valor ideal a causa de la resistencia inherente asociada con su construcción. Recuérdese que el factor de calidad Q de la inductancia está dado por:

$$Q = \frac{\omega L}{R}$$

Entre más grande sea el valor de la resistencia, más bajo será el factor de calidad y el diseño estará más alejado de un inductor ideal. Para minimizar la distorsión en la característica del filtro, es deseable usar inductores con altos factores de calidad. Sin embargo, a frecuencias por debajo de aproximadamente 1 kHz, los inductores de alto factor de calidad tienden a ser caros y voluminosos. Los intentos de miniaturizar un inductor aún no han tenido mucho éxito.

Filtros activos.— Superan esas desventajas de los filtros pasivos y, además, ofrecen varias otras ventajas. Los filtros activos son construidos utilizando resistencias, capacitores y dispositivos activos, los cuales son, usualmente, amplificadores operacionales. Todos estos dispositivos pueden integrarse, permitiendo, por lo tanto que los filtros activos proporcionen las siguientes ventajas:

- *Reducción en tamaño y peso
- *Incremento de eficiencia del circuito, ya que todo el proceso se puede automatizar
- *En cantidades grandes, el costo de los circuitos integrados pueden ser mucho más bajos que sus equivalentes pasivos.
- *Mejora en la operación, porque componentes de alta calidad pueden ser realizados pronto y con facilidad.
- *Una reducción en elementos parásitos, debido a su pequeño tamaño.

pueden ser mucho más bajos que sus equivalentes pasivos.

*Mejora en la operación, porque componentes de alta calidad pueden ser realizados pronto y con facilidad.

*Una reducción en elementos parásitos, debido a su pequeño tamaño.

Otras ventajas de los filtros RC activos que son independientes de implementación física son:

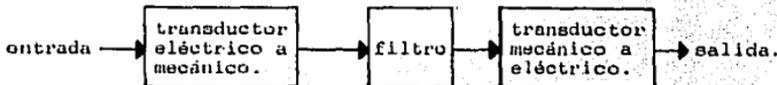
*El proceso de diseño es más simple que para los filtros pasivos.

*Los filtros activos pueden realizar una amplia clase de funciones.

*Los diseños activos pueden proporcionar ganancia de voltaje; en contraste, los filtros pasivos frecuentemente presentan una significativa pérdida de voltaje.

Entre las desventajas de los diseños de filtros RC activos está el ancho de banda finito de los amplificadores operacionales, lo cual pone una limitante al último valor de frecuencia alcanzable. Este valor máximo de frecuencia decrece con el valor de Q, el cual define la agudeza de la característica del filtro. Con la tecnología actual, se han alcanzado, por ejemplo, para valores de frecuencia por debajo de 5 kHz, Q's de hasta 100. Lo anterior es adecuado para aplicaciones de voz y datos. Sin embargo la limitante de la alta frecuencia ha obstruido el uso de filtros activos por encima de 30 kHz. En contraste, los filtros pasivos no tienen tal limitación y pueden ser usados hasta aproximadamente 500 MHz. En este caso las limitaciones en altas frecuencias son debidas a los elementos parásitos asociados con los elementos pasivos. Otra desventaja de los filtros activos es que requieren alimentación, mientras que los pasivos no.

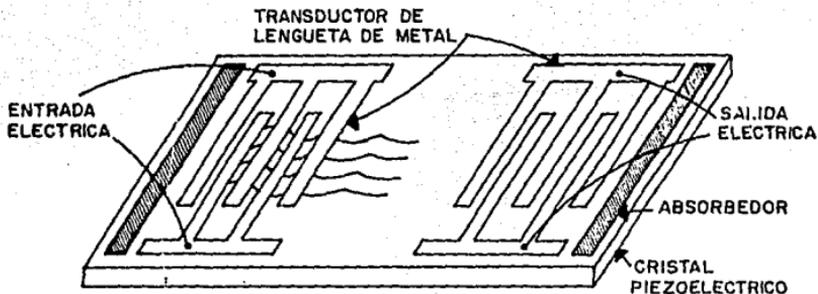
Filtros Electromecánicos. - Usan resonancias mecánicas para llevar a cabo el filtrado de señales eléctricas. Una representación en diagrama a bloques de tales filtros se muestra abajo.



La señal eléctrica es convertida a vibración mecánica por un transductor y, después del filtrado, la vibración mecánica resultante es convertida de nuevo en señal eléctrica. Los filtros electromecánicos se clasifican de acuerdo a si se requieren o no dispositivos separados para los transductores y el filtro.

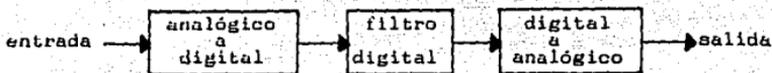
En un tipo de filtro electromecánico, conocido simplemente como filtro mecánico, el filtrado es realizado por medio de resonadores de plato, disco ó varilla; y el transductor es, usualmente, un cristal piezoeléctrico aparte. Este tipo de filtros proporciona Q's de hasta 1500 y frecuencias de corte de hasta 500 kHz.

En filtros electromecánicos de tipo cerámico y de cristal monolítico, la acción transductora viene de las propiedades piezo-eléctricas del cristal ó cerámica, que también funciona como el elemento resonante. Por consiguiente, en estos dos tipos de filtros electromecánicos, llamados de onda acústica de superficie, el filtrado y la acción transductora tiene lugar en el mismo dispositivo. Estos filtros pueden ser usados a extremadamente altas frecuencias. Particularmente, los filtros cerámicos pueden alcanzar valores de frecuencia en el rango de 0.1 MHz a 10 MHz y Q's de 30 a 1500, mientras que los de cristal monolítico van aún más alto, proporcionando frecuencias de corte en un rango que va de los 5 MHz hasta 150 MHz, y Q's de 1000 a 25000. La figura mostrada abajo representa un filtro de onda acústica de superficie.



Los filtros electromecánicos representan la única solución práctica para aplicaciones que requieran tales valores de Q. Aplicaciones típicas se hallan en sistemas de telefonía carrier y en transmisión de radio y T.V. Por supuesto, una vez que el filtro ha sido diseñado y construido, sus características no se pueden reajustar.

Filtros digitales.— Un diagrama a bloques funcional de un filtro digital se muestra en la figura siguiente.



La señal analógica de entrada es muestreada a intervalos uniformemente espaciados y los valores muestreados son convertidos en palabras binarias usando un convertidor analógico-digital. La representación en números binarios de la señal de entrada es entonces filtrada por el filtro digital. La operación de filtrado involucra cálculos numéricos y es llevada a cabo usando los tipos de elementos de circuito empleados en una computadora digital, como sumadores, multiplicadores, registros de corrimiento y dispositivos de memoria. La palabra de salida es finalmente convertida de nuevo a señal analógica.

Tal proceso de filtrado es particularmente útil en aplicaciones donde varios canales de información necesitan ser procesados por la misma función de filtrado. Las representaciones numéricas muestreadas de cierto número de canales pueden ser ordenadas de manera que formen una sucesión continua de números. Esta sucesión puede entonces ser procesada por un filtro común. A la salida los canales individuales son separados antes de recobrar sus formas analógicas. La operación de ordenar en sucesión a los diferentes canales es llamada **multiplexaje**, mientras que la separación de ellos a la salida se llama **demultiplexaje**.

Usando tal proceso, el costo de hardware digital común es compartido por todos los canales, de manera que el costo del filtrado por canal podría ser económicamente competitivo. Los filtros digitales, por consiguiente, son una alternativa razonable en aplicaciones donde muchas señales de voz ó datos necesitan ser procesados usando la misma función de filtrado.

Filtros de microondas. - La última categoría de filtros que se mencionará es la de los filtros de microondas, los cuales son usados para transmisión a frecuencias de aproximadamente 200 MHz a 100 GHz. Físicamente, estos filtros pueden consistir en elementos distribuidos tales como líneas de transmisión ó guías de onda. Una cavidad resonante a frecuencias de microondas desempeña la misma función que un circuito LC a frecuencias bajas. Mientras mayores sean las dimensiones de la cavidad, resonará a una frecuencia más baja (dentro de las microondas). La frecuencia de resonancia de una cavidad puede variarse instalando un émbolo que cambia sus dimensiones. Algunas áreas de aplicación para filtros de microondas son en radares, comunicaciones espaciales vía satélite y sistemas de telefonía carrier.

II.2. FILTROS ACTIVOS Y PASIVOS

Un filtro analógico cualquiera puede ser representado por la ecuación:

$$\frac{V_o(S)}{V_i(S)} = H(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$$

Donde $V_i(S)$ y $V_o(S)$ son las transformadas de Laplace de los voltajes de entrada y salida, respectivamente, $H(S)$ es la función de transferencia, y $N(S)$ y $D(S)$ son polinomios en $S = (\sigma + j\omega)$. La atenuación del filtro en decibelios es definida por:

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right| = 20 \log \left(\frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = -20 \log |H(j\omega)|$$

donde:

$$\omega^2 = -\frac{1}{H(j\omega)H(-j\omega)}$$

La gráfica de $A(\omega)$ contra ω es la característica de atenuación. El corrimiento de fase y el retraso de grupo del filtro están dados por

$$\theta(\omega) = \arg H(j\omega) \quad \text{y} \quad \tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

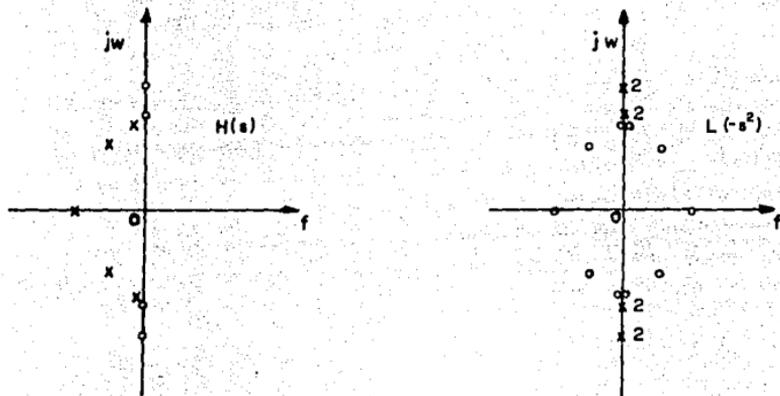
respectivamente. Sus gráficas contra ω son las características de fase y retardo.

Con $w = S/j$, puede formarse la siguiente función

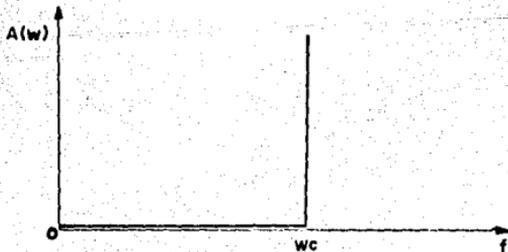
$$L(-S^2) = \frac{D(S)D(-S)}{N(S)N(-S)}$$

La expresión anterior se llama función de atenuación del filtro y, como se evidencia, sus ceros son los polos de $H(s)$ y sus polos, mientras que sus polos son los ceros de $H(s)$ y sus negativos.

A continuación se muestran graficas de polos y ceros típicas para $H(s)$ y $L(-s^2)$.



Un filtro paso bajas real difiere de uno ideal dado que la atenuación en la banda de paso no es cero y en la de supresión no es infinita, y la transición entre la banda de paso y la de supresión es gradual. La característica de atenuación debe asumir la forma mostrada en la figura siguiente.



Una aproximación de un filtro consiste en hallar una función de transferencia realizable de manera que la gráfica de $A(\omega)$ contra ω se aproxime a la característica ideal. Una función de transferencia es realizable si caracteriza una red estable y causal. Tal función debe satisfacer los siguientes requerimientos:

- 1.-Debe ser una función racional de S con coeficientes reales.
- 2.-Sus polos deben estar en la mitad izquierda del plano S .
- 3.-El grado del polinomio del numerador debe ser igual o menor que el grado del polinomio del denominador.

En las siguientes secciones nos centraremos en aproximaciones normalizadas paso bajas: aproximaciones Butterworth en las que la frecuencia de corte es 1 rad/s, aproximaciones Chebyshev en las que el límite de la banda de paso (después de la banda de transición) es 1 rad/s, aproximaciones elípticas en las que la frecuencia de corte $\omega_c = f(\omega_p, \omega_s)$ es 1 rad/s y aproximaciones Bessel en las que el retraso de grupo, cuando ω tiende a cero es 1 rad/s.

La derivación de aproximaciones paso bajas, paso altas, paso banda y supresores de banda desnormalizadas es casi invariablemente llevada a cabo a través de transformaciones de aproximaciones paso bajas normalizadas.

Aproximación Butterworth. - A este tipo de filtro también se le conoce como filtro de respuesta plana o uniforme. Es un filtro de tipo LC que tiene una respuesta relativamente plana, es decir, ofrece una impedancia relativamente constante a las señales con un contenido en frecuencia en la banda de paso. El filtro Butterworth tiene una buena respuesta de fase, que es una medida de la cantidad de desplazamiento de fase que ocurre cuando la señal pasa por el filtro. Este tipo de filtro también tiene una buena respuesta en amplitud, que es otra forma de decir que su respuesta es plana. Sin embargo, tiene una atenuación gradual bastante lenta, que lo hace inapropiado en las aplicaciones donde es necesario tener un corte abrupto de las frecuencias adyacentes.

La aproximación Butterworth es la más simple aproximación paso bajas. Se obtiene asumiendo que $L(\omega^2)$ es un polinomio de la forma

$$L(\omega^2) = B_0 + B_1 S + B_2 S^2 + \dots + B_n S^n$$

de manera que:

$$\lim_{\omega^2 \rightarrow 0} L(\omega^2) = 1$$

La serie de Taylor de $L(x+h)$, donde $x = \omega^2$, es:

$$L(x+h) = L(x) + h \frac{dL(x)}{dx} + \dots + \frac{h^k}{k!} \frac{d^k L(x)}{dx^k}$$

Dado que es requerido que tantas derivadas como sea posible de $L(x)$ sean cero para $x = 0$, podríamos asignar:

$$L(0) = 1$$

$$\left. \frac{d^k L(x)}{dx^k} \right|_{x=0} = 0 \quad k \leq n-1$$

de este modo,

$$B_0 = 1 \text{ y } B_1 = B_2 = \dots = B_{n-1} = 0$$

ó

$$L(\omega^2) = 1 + B_n \omega^{2n}$$

Ahora para una aproximación normalizada en la cual $L(1) = 2$ esto es:

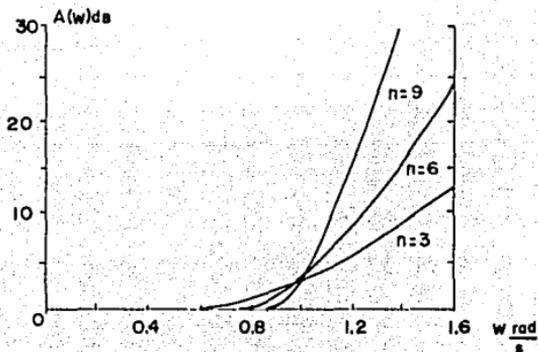
$$A(\omega) = 3 \text{ dB} \quad \text{para } \omega = 1 \text{ rad/s, } B_n = 1 \text{ y}$$

$$L(\omega^2) = 1 + \omega^{2n}$$

por lo tanto la pérdida en una aproximación Butterworth paso bajas normalizada:

$$A(\omega) = 10 \log(1 + \omega^{2n})$$

como se ilustra en la gráfica que sigue, para $n = 3, 6, 9$.



Función de transferencia normalizada.

Con:

$$\omega = \frac{s}{j}$$

en:

$$L(\omega^2) = 1 + \omega^{2n}$$

tenemos:

$$L(-s^2) = 1 + (-s^2)^n = \prod_{k=1}^{2n} (s - s_k)$$

donde:

$$S_k = \begin{cases} e^{j(2k-1)\pi/2n} & \text{para } n \text{ par} \\ e^{j(k-1)\pi/n} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

y dado que $|s_k|=1$, los ceros de $L(-s^2)$ están localizados en el círculo unitario $|s|=1$.

La función de transferencia normalizada puede expresarse como:

$$H_N(s) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}$$

donde p_i para $i = 1, 2, \dots, n$ son los ceros del lado izquierdo del plano s de $L(-s^2)$.

Ejemplo. Halle $H_N(S)$ para a) $n = 2$ y b) $n = 3$.

De:

$$S_k = e^{j(2k-1)\pi/2n} \quad n \text{ par}$$

$$S_1 = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

$$S_2 = \cos\frac{4-1}{2 \times 2}\pi + j \operatorname{sen}\frac{4-1}{2 \times 2}\pi$$

$$S_2 = \cos\frac{3}{4}\pi + j \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_3 = \cos\frac{5}{4}\pi + j \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y:

$$H_N(S) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(s + \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$H_N(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + 1}$$

$$H_N(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

b) para $n=3$

de:

$$S_k = e^{j(k-1)\pi/n} \quad n \text{ impar}$$

$$S_k = \cos \frac{(k-1)\pi}{n} + j \operatorname{sen} \frac{(k-1)\pi}{n}$$

$$S_k = \cos \frac{(k-1)\pi}{3} + j \operatorname{sen} \frac{(k-1)\pi}{3}$$

cuyas raíces son:

$$S_1 = -0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

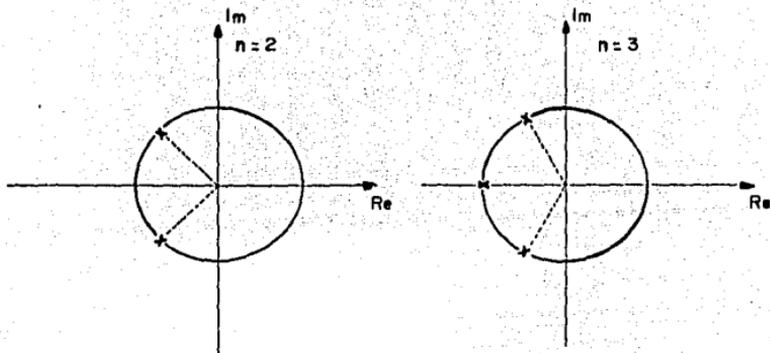
$$S_2 = -1$$

$$S_3 = -0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

por lo que:

$$H_N(S) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

El diagrama de polos y ceros se muestra abajo:



La forma factorizada de los polinomios de Butterworth normalizados se muestran en la tabla siguiente.

FUNCIONES DE APROXIMACION BUTTERWORTH

n	H(S)
1	$s+1$
2	$s^2+\sqrt{2} s + 1$
3	$(s^2+s+1)(s+1)$
4	$(s^2+0.76537s+1)(s^2+1.84776s+1)$
5	$(s^2+0.61803s+1)(s^2+1.61803s + 1)(s+1)$

Para determinar la función Butterworth para un filtro cuya frecuencia de corte sea ω_c u ω_p y su atenuación máxima en la banda de paso A dB, los polinomios dados en la tabla anterior necesitan desnormalizarse sustituyendo S por $S(\epsilon^{-1/n}/\omega_p)$

Aproximación Chebyshev.— La característica principal de la aproximación Butterworth es que su respuesta es plana al máximo en el origen, pero empobrece progresivamente conforme ω se aproxima a ω_p . Además, la atenuación proporcionada por la banda de supresión es menor que aquella conseguida por algunos otros tipos de polinomios, como el Chebyshev, el cual es descrito en esta sección.

Considerando un filtro de Butterworth y otro de Chebyshev, ambos del mismo orden e idéntica estructura, la respuesta del Chebyshev será mejor en las proximidades de la frecuencia de corte, es decir, en la banda de transición, su curva tendrá una pendiente mayor que la correspondiente al filtro de Butterworth. La atenuación incrementada en la banda de supresión es lograda cambiando las condiciones de aproximación en la banda de paso. El criterio usado es minimizar la máxima desviación de la característica plana ideal, de manera que la banda de paso oscile entre cero y una atenuación máxima A_p prefijada. Es decir, el filtro Chebyshev presenta rizado en la banda de paso.

La función de la aproximación Chebyshev es:

$$C_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \Omega) & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} \Omega) & |\Omega| > 1 \end{cases} \quad (*)$$

donde Ω es la frecuencia normalizada,

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$$

La función de la aproximación paso bajas Chebyshev es obtenida de los polinomios de Chebyshev y está dada por:

$$|H(j\omega)| = \frac{V_i(j\omega)}{V_o(j\omega)} = \sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(\Omega)} \quad (*)$$

Consideremos la pérdida de $H(j\Omega)$ a la frecuencia ω_p , al final de la banda de paso. Aquí, la frecuencia normalizada Ω es la unidad, y $C_n(1) = 1$. Por lo anterior, la pérdida en la banda de paso es:

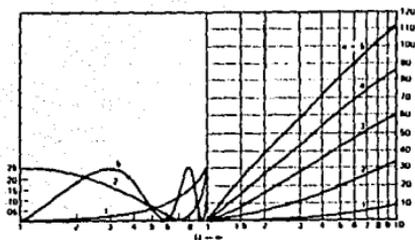
$$A_{\max} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

la expresión anterior, por lo tanto, define al parámetro ϵ :

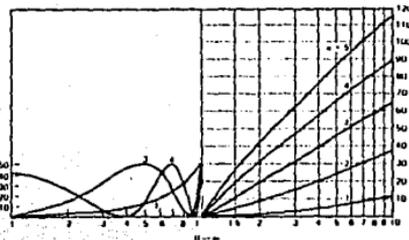
$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1 A_{\max}} - 1} \quad (*)$$

Las pérdidas Chebyshev normalizadas, dados el orden n y A_{\max} , pueden graficarse usando las ecuaciones marcadas con (*)

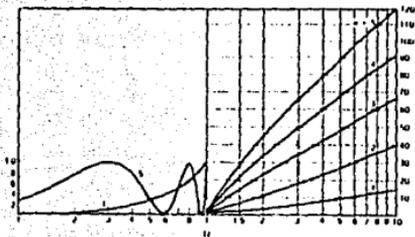
PERDIDA EN BANDA DE PASO dB



APROXIMACION PARA $A_{max} = 0.25$ dB



APROXIMACION PARA $A_{max} = 0.50$ dB



APROXIMACION PARA $A_{max} = 1.0$ dB

PERDIDA EN BANDA DE SUPRESION dB

El uso de las gráficas anteriores se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Encuentre el orden de un filtro Chebyshev paso bajas para cumplir con los requerimientos que se indican a continuación.

$f_p = 2000\text{Hz}$ $f_s = 5000\text{Hz}$ $A_{\text{max}} = 1\text{ dB}$ $A_{\text{min}} = 35\text{ dB}$.

La frecuencia normalizada de la frecuencia al final de la banda de paso es:

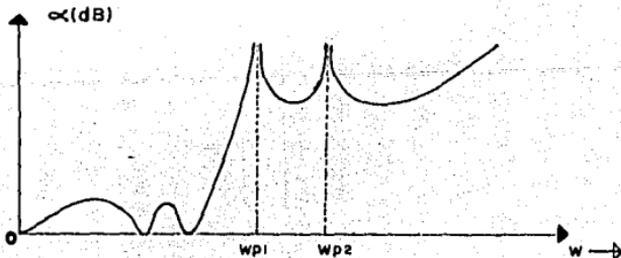
$$\Omega_s = f_s/f_p = 5000\text{ Hz}/2000\text{ Hz} = 2.5$$

De la tercer gráfica se observa que el orden requerido es 4.

Aproximación elíptica.—Los filtros de Cauer ó función elíptica presentan rizado en la banda de paso y en la de supresión. Son los de mayor definición en términos de la frecuencia de corte, esto es, su banda de transición es bastante estrecha. Este tipo de filtro es utilizado en equipos que exigen mucha precisión en el punto de corte y una atenuación elevada en la banda de supresión.

Ya hemos visto que la aproximación Chebyshev, la cual tiene una banda de paso rizada, produce una atenuación en la banda de supresión mayor que la de la aproximación Butterworth. En ambas aproximaciones la pérdida en la banda de supresión se incrementa a la máxima razón posible de 6n dB/octava para una función de n-ésimo orden. Por lo tanto, estas aproximaciones proporcionan cada vez más pérdida que la Amin uniforme requerida por encima del inicio de la banda de paso. Esta fuente de ineficiencia es remediada por la aproximación elíptica.

La aproximación elíptica es la función más comúnmente usada en el diseño de filtros. Una función de aproximación elíptica típica se muestra en la figura siguiente.



La característica distintiva de esta función de aproximación es que tiene polos de atenuación en la banda de supresión. Por lo anterior, la aproximación elíptica es una función racional con polos y ceros finitos, mientras que el Butterworth y el Chebyshev son polinomios y, como tales, tienen todos sus polos de atenuación en infinito. En particular, en la aproximación elíptica la localización de los polos debe ser escogida de manera de proporcionar en la banda de supresión la característica de rizado mostrada. El polo más cercano a la banda de supresión ($Wp1$) incrementa significativamente la pendiente en la banda de transición. Los polos más allá ($Wp2$ a infinito) se requieren para mantener el nivel requerido de atenuación en la banda de supresión. Usando polos infinitos, la aproximación elíptica puede proporcionar un nivel de pérdida considerablemente más uniforme que las Butterworth y Chebyshev. De este modo, para un requerimiento dado, la aproximación elíptica requerirá, en general, de un orden más bajo que las otras dos. Dado que un orden más bajo corresponde a menos componentes eléctricos, esta aproximación nos llevará a la más barata realización de un filtro.

El desarrollo matemático de la aproximación elíptica está basado en la bastante compleja teoría de las funciones elípticas, y su análisis escapa al objetivo de estos apuntes. El lector interesado puede referirse al texto de métodos de aproximación de R.W. Daniel. (McGraw-Hill) Los polos y ceros de la función de aproximación elíptica paso bajas han sido tabulados para un gran número de casos por Christian y Eisenmann en: Filter Design Tables and Graphs. (Wiley). Una muestra de algunas funciones normalizadas de filtros paso bajas de función elíptica, en forma factorizada, se encuentran en las tablas de la página siguiente.

a) $\Omega_s=1.5$

n	Cte K	Denominador de H(s).	Numerador de H(s)	A _{min}
2	0.38540	$s^2+3.92705$	$s^2+1.03153s+1.60319$	8.3
3	0.31410	$s^2+2.80601$	$(s^2+0.45286s+1.14917)$ $(s+0.766952)$	21.9
4	0.015397	$(s^2+2.53555)(s^2+12.09931)$	$(s^2+0.25496s+1.06044)$ $(s^2+0.92001s+0.47183)$	36.3
5	0.019197	$(s^2+2.42551)(s^2+5.43764)$	$(s^2+0.16346s+1.03189)$ $(s^2+0.57023s+0.57601)$ $(s+0.42597)$	50.6

b) $\Omega_s=2.0$

n	Cte K	Denominador H(s)	Numerador H(s)	A _{min}
2	0.20133	$s^2+7.4641$	$s^2+1.24504s+1.59179$	13.9
3	0.15424	$s^2+5.15321$	$(s^2+0.53787s + 1.14849)$ $(s+0.69212)$	31.2
4	0.0036987	$(s^2+4.59326)(s^2+24.22720)$	$(s^2+0.30116s+1.06258)$ $(s^2+0.88456s + 0.41032)$	48.6
5	0.0046205	$(s^2+4.36495)(s^2+10.56773)$	$(s^2+0.19255s + 1.03402)$ $(s^2+0.58054s + 0.52500)$ $(s + 0.392612)$	66.1

c) $\Omega_s=3.0$

n	Cte K	Denominador H(s)	Numerador H(s)	A _{min}
2	0.083974	$s^2+17.48528$	$s^2+1.35715s+1.55532$	21.5
3	0.063211	$s^2+11.82781$	$(s^2+0.58942s+1.14559)$ $(s+0.65263)$	42.8
4	0.00062046	$(s^2+10.4554)$ $(s^2+58.471)$	$(s^2+0.32979s + 1.063281)$ $(s^2+0.86258s) + 0.37787)$	64.1
5	0.00077547	$(s^2+9.8955)$ $(s^2+25.0769)$	$(s^2+0.21066s + 1.0351)$ $(s^2+0.58441s + 0.496388)$ $(s+0.37452)$	85.5

En estas tablas las frecuencias Ω son normalizadas al valor de la frecuencia del final de la banda de paso W_p (esto es, $\Omega = W/W_p$). La constante K del denominador mostrada en la segunda columna, es determinada por la pérdida de c.d. Observe que se requiere una tabla distinta para cada valor de Ω_s , donde

$$\Omega_s = W_s/W_p = \text{Frecuencia al inicio de la banda de supresión/ frecuencia al final de la banda de paso}$$

También se necesitan distintas tablas para cada valor de A_{max} .

Ejemplo. Halle el filtro paso bajas de función elíptica para los requerimientos dados a continuación:

$$W_p = 200 \text{ Hz} \quad W_s = 600 \text{ Hz} \quad A_{max} = 0.5 \text{ dB} \quad A_{min} = 20 \text{ dB}$$

Solución.

la razón de frecuencias Ω_s es:

$$\Omega_s = 600\text{Hz}/200\text{Hz} = 3$$

De la tercer tabla, se observa que un filtro de función elíptica de segundo orden proporcionará 21.5 dB de atenuación por encima de $\Omega_s = 3$.

La aproximación normalizada es:

$$H_p(S) = \frac{(s^2 + 1.35715s + 1.55532)}{0.083974s^2 + 17.48528}$$

Desnormalizando, reemplazando s por $s/200$, obtenemos la función de aproximación elíptica paso bajas deseada.

$$H(S) = \frac{s^2 + 271.4s + 62212.8}{(0.083974s^2 + 699411)}$$

Observe que, comparando este resultado con lo realizado para el filtro Chebyshev para los mismos requerimientos, la aproximación elíptica requiere de un orden más bajo que el Chebyshev.

Aproximación Bessel.—Idealmente, el retardo de grupo de un filtro debe ser independiente de la frecuencia o, equivalentemente, el corrimiento de fase debe ser una función lineal de la frecuencia. Dado que el único objetivo de las tres aproximaciones anteriores es alcanzar una característica específica de pérdida, la característica de fase se vuelve no-lineal. Como resultado, el

retardo tiende a variar con la frecuencia, en particular en la aproximación elíptica.

El objetivo de la aproximación de Bessel es obtener una característica de retardo tan uniforme como sea posible en la banda de paso. La función de atenuación para la característica ideal es, como se había visto en la sección II.1:

$$H(S) = e^{-ST_0}$$

La aproximación Bessel es un polinomio que aproxima esta característica. En este caso el retardo en el origen es uniforme al máximo. Esto es, en el origen son cero tantas derivadas como es posible. Es conveniente considerar la aproximación de la función normalizada con el retardo $T_0 = 1$ segundo, de manera que:

$$H(S) = e^{-S}$$

La función de aproximación de Bessel de esta función normalizada es:

$$H(S) = \frac{B_n(S)}{B_n(0)}$$

donde $B_n(s)$ es el polinomio de Bessel de n -ésimo orden el cual está definido por la siguiente ecuación recursiva:

$$B_0(n) = 1$$

$$B_1(n) = n + 1$$

⋮

⋮

$$B_n(s) = (2n-1)B_{n-1}(S) + S^2B_{n-2}(S)$$

usando esta fórmula las aproximaciones de mayor orden de e^{-s} son:

$$H(S) |_{n=2} = \frac{(S^2+3S+3)}{3}$$

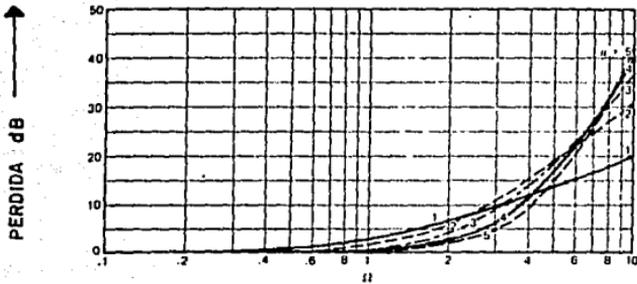
$$H(S)|_{n=3} = \frac{(s^3 + 6s^2 + 15s + 15)}{15}$$

y así sucesivamente. Las formas factorizadas de las aproximaciones normalizadas de Bessel hasta para $n = 5$ se dan en la tabla siguiente. Si el retraso en baja frecuencia es T_0 segundos (en vez de 1 segundo), s debe ser reemplazado por sT_0 en las funciones de aproximación.

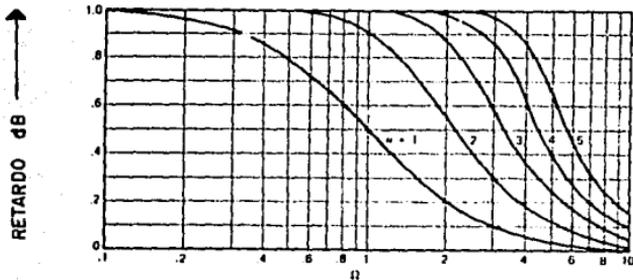
n	Numerador de H(s)	Denominador Constante K
1	$s+1$	1
2	s^2+3s+3	3
3	$(s^2+3.67782s+6.45944)(s^2+4.20758s+11.4878)$	15
4	$(s^2+5.79242s+9.14013)(s^2+4.20758s+11.4878)$	105
5	$(s^2+6.70391s+14.2725)(s^2+4.64934s+18.15631)(s+3.64674)$	945

La pérdida y el retardo de las aproximaciones Bessel ($n=1$ hasta 5) se observan en las figuras mostradas a continuación. En estas figuras la frecuencia normalizada Ω se relaciona con w por $\Omega = wT_0$

Se observa que entre mayor sea el orden de n , más ancha va a ser la banda de frecuencias sobre las cuales el retraso es plano. Las características de retraso de la aproximación Bessel son superiores que las de las aproximaciones Butterworth y Chebyshev. Como resultado de esto, la respuesta a escalón es superior también. Sin embargo, el retardo uniforme se consigue a expensas de la atenuación en la banda de supresión la cual, para la aproximación Bessel, es aún más baja que la del filtro Butterworth.



PERDIDA DE LAS APROXIMACIONES BESSEL PASA BAJAS.



RETARDO DE LAS APROXIMACIONES BESSEL PASA BAJAS.

Ejemplo. Encuentre la función de aproximación Bessel para los siguientes requerimientos de un filtro paso bajas.

a) El retardo debe estar dentro del 1% de su valor en C.D. hasta 2 kHz.

b) La atenuación en 6 kHz debe exceder los 25 dB.

SOLUCION.

Como primer intento, trataremos con un filtro de cuarto orden. De las figuras correspondientes se observa que una aproximación Bessel de cuarto orden tiene un retardo uniforme dentro del 1% hasta aproximadamente 1.9 kHz. Para satisfacer el requerimiento del retardo dado esta frecuencia normalizada debe corresponder a $\omega = 2$ kHz, la frecuencia normalizada correspondiente a 6 kHz es

$$\Omega_0 = (6/2)(1.9) = 5.7$$

A esta frecuencia la atenuación es de sólo 22 dB. Dado que una aproximación Bessel de cuarto orden no satisface el requerimiento de pérdida pedido, trataremos ahora con uno de quinto orden.

En la gráfica de retardo contra frecuencia se observa que éste permanece dentro del 1% hasta aproximadamente $\Omega = 2.5$, para $n = 5$. Si esta frecuencia corresponde a $\omega = 2$ kHz, la frecuencia normalizada correspondiente a $\omega = 6$ kHz es:

$$\Omega_0 = (6/2)(2.5) = 7.5$$

En la gráfica de pérdida contra frecuencia se ve que la función de quinto orden proporciona una atenuación de 29.5 dB a esta frecuencia. Por lo tanto, la aproximación Bessel de quinto orden satisface tanto el requerimiento de retardo como el de pérdida.

La función de quinto orden normalizada se lista en la tabla anterior. Esta función se desnormaliza reemplazando s por $s\Omega_0$ donde, de una ecuación anterior:

$$T_0 = \frac{Q}{\omega} = \frac{2.5}{2\pi(2000)} = 1.989(10)^{-4} \text{sec}$$

La función resultante de ganancia desnormalizada es

$$V_o = \frac{3.608(10^8)}{V_i s^2 + 3.370(10^4)s + 3.608(10^8)} \cdot \frac{4.5894(10^8)}{s^2 + 2.338(10^4)s + 4.5894(10^8)}$$

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{1.8335(10^4)}{s+1.8335(10^4)}$$

Observación.

En comparación, un Butterworth de quinto orden con una frecuencia de corte de 2 kHz proporcionaría aproximadamente 55 dB de atenuación a 6 kHz. De este modo, vemos que mientras la aproximación Bessel proporciona una característica uniforme de retardo, su acción de filtrado en la banda de supresión es mucho peor que la Butterworth. La pobre característica de supresión de la aproximación Bessel la hace impráctica para muchas aplicaciones de filtrado.

11.2 REDES PASA BAJA TÍPICAS PASIVAS Y ACTIVAS.

Ya se ha mencionado que las configuraciones básicas para los filtros son dos: la configuración "T" y la "π". Para calcular los elementos que forman estas redes es necesario conocer la frecuencia de corte que tendrá el filtro y la impedancia a la que estará conectado el mismo, ya que debido a que los filtros son conectados en las líneas de transmisión de los sistemas, deben ofrecer una misma impedancia a la entrada y a su salida. Para lograr esta dualidad, se utilizan redes simétricas y equilibradas en la configuración de sus elementos. La estructura de los elementos que forman a los filtros tienen una configuración "T" ó "π".

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, un filtro debe caracterizarse por tener:

a) Una impedancia característica Z_0 igual a la impedancia de la línea de transmisión ó equipo al que se conecte.

b) Una atenuación baja en la banda de paso y una atenuación alta en la banda de no paso (ó supresión).

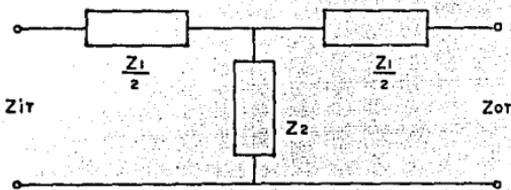
c) Una frecuencia de corte que marque la división entre la banda de paso y la de no paso de frecuencias.

Puede realizarse un análisis para hallar una expresión generalizada de impedancia característica, otra de atenuación y una más para frecuencias de corte, y aplicarlas a filtros pasabajas. Como se verá más adelante, un filtro pasa bajas puede convertirse en un pasa altas, un pasabanda o un supresor de banda empleando transformaciones de impedancias.

Los filtros que se tratarán a continuación son pasivos en configuración "T" y "π", formados por inductancias y capacitores. A este tipo de filtros se les llama de constante k en virtud de que el producto de la impedancia en paralelo y la impedancia serie es una constante que no cambia al variar la frecuencia y que es propia del filtro.

IMPEDANCIA Z_0 EN FUNCION DE Z_1 Y Z_2 PARA CONFIGURACION "T".

Consideremos la figura siguiente que representa a un filtro en configuración T.

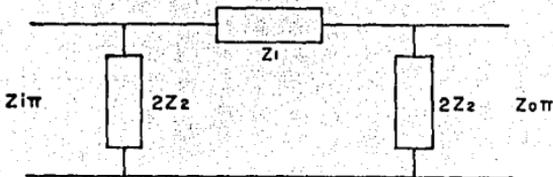


$Z_{0\pi}$ representa una carga igual a la impedancia característica del filtro. Si Z_1 debe ser igual a $Z_{0\pi}$:

$$Z_1 = Z_{0\pi} = \frac{(Z_{0\pi} + \frac{Z_1}{2}) Z_2}{Z_{0\pi} + \frac{Z_1}{2} + Z_2} + \frac{Z_1}{2}$$

$$Z_{0\pi} = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}$$

De igual manera, para configuración π :



la impedancia equivalente a la entrada está dada por:

$$Z_{in} = \frac{\left(\frac{2Z_{0R}Z_2}{2Z_2 + Z_{0R}} + Z_1 \right) 2Z_2}{\frac{2Z_{0R}Z_2}{2Z_2 + Z_{0R}} + Z_1 + 2Z_2}$$

y:

$$Z_{0R} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{0T}}$$

Debemos observar que Z_1 y Z_2 pueden ser inductancias y capacitancias y estas pueden corresponder a cualquier tipo de filtro.

ATENUACION:

El estudio de la atenuación en estas configuraciones es el más importante ya que de él se desprenden las ecuaciones para hallar las frecuencias de corte de los filtros, válidos para ambas configuraciones.

De la configuración "T" podemos obtener fácilmente la relación de atenuación:

$$\left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right) I_1 - Z_2 I_2 = V_1$$

$$-Z_2 I_1 + \left(Z_2 + \frac{Z_1}{2} + Z_0 \right) I_2 = 0$$

a partir de ellas, podemos llegar a la relación de atenuación:

$$\frac{V_1}{V_0} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1^2}{4Z_2}}$$

ya que Z_1 y Z_2 son reactancias y estas involucran atenuación a y

defasamiento β , la relación de atenuación puede representarse así:

$$\frac{V_i}{V_o} = \left| \frac{V_i}{V_o} \right| e^{j\beta} = e^{-\alpha l} e^{j\beta l} = e^{-\gamma l}$$

con :

$$\gamma = \alpha + j\beta = \ln \left[1 + \frac{Z_1}{2Z_2} + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1^2}{4Z_2^2}} \right]$$

que puede escribirse como:

$$\gamma = 2 \ln \left[\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} + \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \right]$$

la característica de la ecuación anterior es que:

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} \leq 0$$

para que se tenga una región de atenuación cero.

De lo anterior se desprende que para los valores de Z_1 y Z_2 con los cuales se cumpla la relación anterior, se tendrá una banda de paso con poca atenuación.

FRECUENCIAS DE CORTE

La misma expresión hallada para la banda de paso con poca atenuación nos sirve también para encontrar las frecuencias de corte de los filtros. En el caso del filtro pasabajas, se iguala la expresión al primer valor crítico:

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -1$$

con:

$$Z_1 = j\omega_0 L$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega_0 C}$$

tenemos:

$$\frac{j\omega_0 L}{4 \frac{1}{j\omega_0 C}} = -1$$

$$-\omega_0^2 LC = -4$$

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

$$F_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}$$

la última expresión determina el punto de paso o no paso de la banda de frecuencia, y se denomina frecuencia de corte del filtro pasabajos.

Si la ecuación de $Z_1 / 4Z_2$ se iguala al otro valor crítico, se tiene:

$$\omega_0 = 0$$

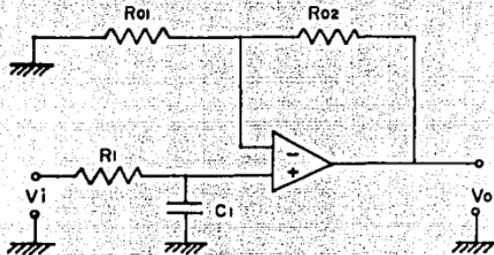
lo cual indica que en la realidad el valor que debe considerarse a los cálculos de la frecuencia de corte es el primero ya que depende de los valores de L y C y en el segundo de los casos la frecuencia de corte es siempre cero.

Puede mejorarse la respuesta en frecuencia de un filtro de constante k , añadiendo un elemento a la sección del filtro, que proporcione atenuación infinita en una frecuencia designada F_r . Este procedimiento origina un cambio en las impedancias Z_1 y Z_2 del filtro original. a este tipo de filtros mejorados se les denomina filtros m -derivada. Estos filtros pueden adquirir las mismas configuraciones que los de constante k , lo único que varía son los valores de las impedancias Z_1 y Z_2 . Sin embargo, la impedancia característica del filtro no debe cambiar. Se ha dejado para la sección 11.3 la configuración de los filtros de m derivados.

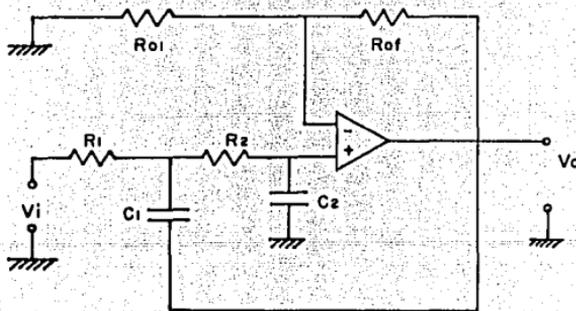
REDES PASABAJAS ACTIVAS

Al igual que los filtros pasivos, las configuraciones activas pasabajas pueden transformarse a cualquiera de las otras configuraciones, mediante transformaciones de impedancias.

Abajo se muestran dos configuraciones típicas pasabajas:



Filtro pasabajas de primer orden.



Filtro pasabajas de segundo orden.

Estas dos estructuras pueden utilizarse para diversos tipos de filtros (Butterworth, Chebyshev, Beesel, etc). Las expresiones para la frecuencia de corte de este filtro se verán en la sección II.4.

II.2C. TRANSFORMACIONES DE FRECUENCIA

En las secciones precedentes sólo han sido consideradas aproximaciones normalizadas paso bajas. La razón es que las aproximaciones desnormalizadas paso bajas, paso altas, paso banda y supresoras de banda pueden derivarse fácilmente usando transformaciones de la forma

$$s = f(\bar{s})$$

Transformación paso bajas - paso bajas.

Considere una función de transferencia normalizada $H_n(s)$ con frecuencias al final de la banda de paso y al inicio de la de supresión ω_p y ω_m , respectivamente, y sea

$$s = \lambda \bar{s}$$

en $H_n(s)$. Si:

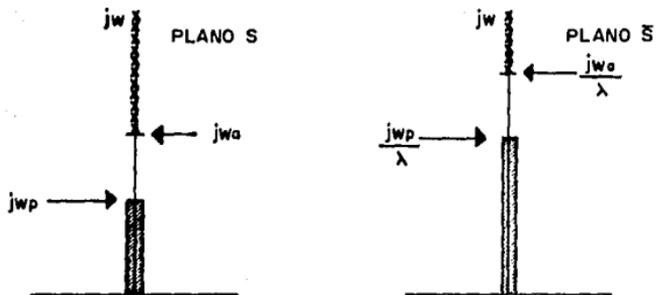
$$s = j\omega, \quad \bar{s} = \frac{j\omega}{\lambda}$$

y por lo tanto la ecuación anterior grafica el eje j del plano s sobre el eje j del plano \bar{s} . En particular, los rangos entre 0 y $j\omega_p$ y $j\omega_m$ a $j\infty$ se grafican sobre los rangos:

$$\left[0, \frac{j\omega_p}{\lambda}\right]$$

$$\left[\frac{j\omega_m}{\lambda}, j\infty\right]$$

respectivamente, como se muestra en la figura siguiente.



por consiguiente:

$$H_{Lz}(s) = H_n(s) |_{s=\lambda s}$$

constituye una aproximación paso bajas desnormalizada con frecuencias al final de la banda de paso y al inicio de la de supresión:

$$\frac{\omega_p}{\lambda}$$

y

$$\frac{\omega_a}{\lambda}$$

Transformación paso bajas - paso banda.

Hagamos ahora

$$s = \left(\frac{1}{B}\right) \left(\bar{s} + \frac{\omega_0^2}{\bar{s}}\right)$$

en $Hn(s)$, donde B y ω_0 son constantes. Si:

$$s = j\omega \quad \text{y} \quad \bar{s} = j\bar{\omega}$$

tenemos

$$j\omega = \frac{j}{B\left(\bar{\omega} - \frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}}\right)}$$

$$j\bar{\omega} = j\left(\frac{\omega B}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\omega B}{2}\right)^2}\right)$$

por lo tanto:

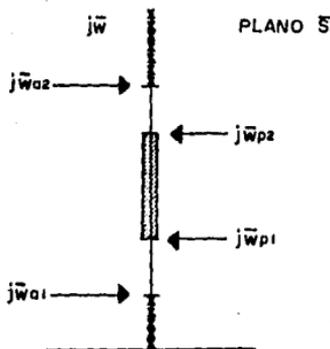
$$\begin{array}{ll} \bar{\omega} = \omega_0 & \text{si } \omega = 0 \\ \bar{\omega} = \pm \bar{\omega}_{p1}, \pm \bar{\omega}_{p2} & \text{si } \omega = \pm \omega_p \\ \bar{\omega} = \pm \bar{\omega}_{a1}, \pm \bar{\omega}_{a2} & \text{si } \omega = \pm \omega_a \end{array}$$

donde:

$$\bar{\omega}_{p1}, \bar{\omega}_{p2} = \mp \frac{\omega_p B}{2} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\omega_p B}{2}\right)^2}$$

$$\bar{\omega}_{a1}, \bar{\omega}_{a2} = \mp \frac{\omega_a B}{2} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\omega_a B}{2}\right)^2}$$

La gráfica para $s = j\omega$ es por lo tanto de la forma ilustrada en la figura siguiente:



Consecuentemente,

$$H_{BP}(\bar{\omega}) = H_n(s) \Big|_s = \frac{1}{B(\bar{\omega} + \frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}})}$$

es una aproximación paso banda con frecuencias cercanas a la banda de paso ω_{p1} y ω_{p2} y frecuencias cercanas a la banda de supresión ω_{a1} y ω_{a2} .

Similarmente, las transformaciones en el segundo y tercer renglones de la tabla siguiente producen aproximaciones paso altas y supresoras de banda.

Tabla de transformaciones para filtros analógicos.

TIPO	TRANSFORMACION
LP A LP	$s = \lambda \bar{s}$
LP A HP	$s = \frac{\lambda}{s}$
LP A BP	$\frac{1}{B(\bar{s} + \frac{\omega_0^2}{\bar{s}})}$
LP A SB	$s = \frac{B\bar{s}}{(s^2 + \omega_0^2)}$

11.2D.- ESCALAMIENTO EN REDES ELÉCTRICAS.

Escalamiento de impedancia.

Los cálculos requeridos para resolver las ecuaciones de un filtro se simplifican eligiendo valores convenientes y fáciles de manejar para los elementos.

Después de obtener el diseño nominal, el escalamiento de impedancia es usado para cambiar los valores de los elementos del circuito, con el objeto de hacer al mismo prácticamente realizable. Para explicar el método, consideremos la realización de un circuito con la función de transferencia dada por las ecuaciones siguientes.

$$T(s) = \frac{20000}{s^2 + 100s + 10000}$$

$$T(s) = \frac{\frac{1 + \frac{r_2}{r_1}}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} - \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

De las ecuaciones se desprende que los valores de los elementos son:

$$\begin{array}{lll} C1 = 1 \text{ F} & R1 = 0.001 \text{ } \Omega & r1 = 1 \text{ } \Omega \\ C2 = 1 \text{ F} & R2 = 0.001 \text{ } \Omega & r2 = 1 \text{ } \Omega \end{array}$$

Observe que las resistencias y capacitores siempre aparecen como producto RC o como una relación de resistencias. Por consiguiente, un incremento en todas las resistencias por un factor α , con un decremento correspondiente en todos los capacitores, por el mismo factor, dejará a los productos RC y a las relaciones de resistencias sin alteración, de aquí que la función de transferencia no se afecte.

Por ejemplo, si el factor de escalamiento de impedancia es $\alpha = 10,000,000$ resultan los siguientes valores prácticos para los elementos.

$$\begin{array}{lll} C1 = 0.1 \mu\text{F} & R1 = 100 \text{ k}\Omega & r1 = 10 \text{ k}\Omega \\ C2 = 0.1 \mu\text{F} & R2 = 100 \text{ k}\Omega & r2 = 10 \text{ k}\Omega \end{array}$$

Este ejemplo demuestra cómo una red puede ser sintetizada con elementos de fácil manejo, los cuales pueden después ser escalados a valores prácticos.

Escalamiento en frecuencia.

El escalamiento en frecuencia es usado para recorrer la respuesta en frecuencia de un filtro a una parte diferente del eje de la frecuencia. Esto es útil en el diseño de filtros usando requerimientos de frecuencia normalizada, como las dadas en tablas estándar de filtros activos. Un ejemplo de escalamiento de frecuencia es la desnormalización de una función de transferencia de un filtro paso bajas con frecuencia de corte de 1 rad/seg. Como se recordará en el apartado de la Aproximación Chebychev, la función de transferencia se obtenía reemplazando S por S/W_p en la función normalizada. En esta sección se mostrará cómo se puede aplicar el escalamiento de frecuencia directamente a los elementos de un circuito activo RC.

Para ilustrar el procedimiento consideremos, de nuevo, la función de transferencia dada en el apartado anterior. Suponga que deseamos realizar la misma característica paso bajas recorrida en el eje de la frecuencia un factor de 5. La función de transferencia deseada es:

$$T\left(\frac{S}{5}\right) = \frac{20000}{\left(\frac{S}{5}\right)^2 + 100\left(\frac{S}{5}\right) + 10000}$$

Comparando con la función de transferencia que involucra a los elementos del filtro:

$$T\left(\frac{S}{5}\right) = \frac{\frac{1 + \frac{r_2}{r_1}}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{\left(\frac{S}{5}\right)^2 + \left(\frac{S}{5}\right) \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} - \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2}\right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Esta ecuación puede escribirse en la forma:

$$T\left(\frac{s}{5}\right) = \frac{\frac{1 + \frac{r_2}{r_1}}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{5 \times 5} \frac{1}{s^2 + s \left(\frac{1}{5} \left(\frac{R_1 C_1}{5} + \frac{R_2 C_1}{5} - \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{R_2 C_2}{5} \right) + \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{5 \times 5}}$$

De esta ecuación se ve que el escalamiento puede lograrse decrementando todas las resistencias en un factor de 5 o bien, decrementando todos los capacitores en un factor de 5. De este modo, la función de transferencia

$$T\left(\frac{s}{5}\right) = \frac{20000}{\left(\frac{s}{5}\right)^2 + 100\left(\frac{s}{5}\right) + 10000}$$

puede ser sintetizada dividiendo los valores de los capacitores en la función de transferencia original. Los valores de los elementos para el circuito escalado son:

$$\begin{array}{lll} C_1 = 0.02 \mu\text{F} & R_1 = 100 \text{ k}\Omega & r_1 = 10 \text{ k}\Omega \\ C_2 = 0.02 \mu\text{F} & R_2 = 100 \text{ k}\Omega & r_2 = 10 \text{ k}\Omega \end{array}$$

En general, la respuesta en frecuencia de un filtro activo puede escalarse un factor α , decrementando todos los capacitores (o resistencias) por el factor α .

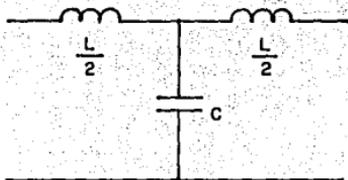
II.3 DISEÑO DE FILTROS PASIVOS

El diseño de filtros consiste en calcular el valor de los elementos que constituirán el filtro en su forma física. Tales elementos dependen directamente de los valores de la impedancia característica y de la frecuencia de corte del filtro, cuyas expresiones generalizadas y aplicables a cualquier configuración de filtro pasivo, fueron halladas en la sección II.2b. Apliquemos tales expresiones ahora particularmente a cada tipo de filtro:

FRECUENCIAS DE CORTE

FILTRO PASA BAJAS.

Dado el diagrama del filtro pasa bajas sección T:



Con:

$$Z_1 = j\omega_0 L$$
$$Z_2 = \frac{1}{j\omega_0 C}$$

se tiene, sustituyendo en la relación hallada e igualando a uno de los valores críticos:

$$f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}$$

la última expresión determina el punto de paso o no paso de la banda de frecuencia.

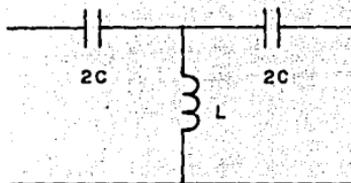
Si la ecuación de $Z_1 / 4Z_2$ se iguala al otro valor crítico se tiene:

$$\omega_0 = 0$$

lo cual indica que en la realidad el valor que debe considerarse a los cálculos de la frecuencia de corte es el primero ya que depende de los valores de L y C y en el segundo de los casos la frecuencia de corte es siempre cero.

FILTRO PASA ALTAS.

Considerando ahora el diagrama del filtro pasa altas:



con:

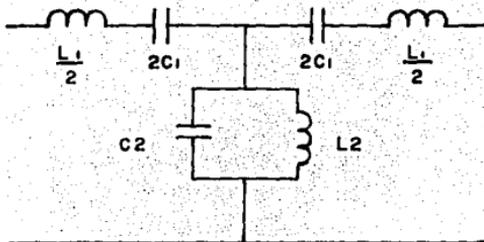
$$Z_1 = \frac{1}{j\omega_0 C} \quad \text{y} \quad Z_2 = j\omega_0 L$$

tenemos, de la misma manera que para el filtro pasa bajas:

$$f_0 = \frac{1}{4\pi\sqrt{LC}}$$

FILTRO PASA BANDA.

Este filtro, al ser una conjunción de los filtros pasa altas y pasabajas en cascada, se tendrán dos frecuencias de corte asociadas a él. Debemos considerar, además, que las ramas que forman estos filtros son circuitos LC y por lo tanto tienen una frecuencia de resonancia en la banda de operación, así que es necesario que esta sea la misma para ambas, lo cual se logra haciendo $L_1 C_1 = L_2 C_2$.



Así, con las ecuaciones:

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} \leq 0$$

y

$$L_1 C_1 = L_2 C_2$$

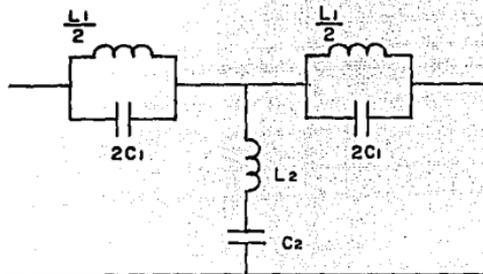
se obtiene:

$$F_{01} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} - \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}} \right]$$

$$F_{01} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}} \right]$$

FILTRO SUPRESOR DE BANDA

Similarmenle al anterior, las frecuencias de corte del filtro supresor de banda, cuyo diagrama se muestra abajo.



están dadas por:

$$F_{01} = \frac{1}{8\pi} \left[\sqrt{\frac{16}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_1}} - \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1}} \right]$$

$$F_{02} = \frac{1}{8\pi} \left[\sqrt{\frac{16}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_1}} + \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1}} \right]$$

ECUACIONES DE DISEÑO DE LOS FILTROS.

La cantidad de ecuaciones requeridas para calcular un filtro en especial es igual al número de elementos que lo constituyen y se obtienen a partir de las expresiones de frecuencia de corte e impedancia característica halladas.

Un aspecto importante de los filtros de constante k es que la impedancia característica varía con la frecuencia, como se podrá comprobar sustituyendo Z_1 y Z_2 para el filtro pasabajos en la ecuación:

$$Z_{0T} = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}$$

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C} + \frac{(j\omega L)^2}{4}}$$

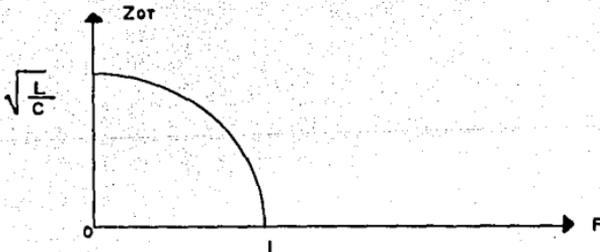
$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{L^2}{4} \omega^2}$$

como:

$$\frac{LC}{4} = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Si graficamos esta ecuación:



Al observar esta gráfica nos damos cuenta que la impedancia no se comporta de una manera constante. Así, para propósito de diseño, los filtros, se cargan con una impedancia práctica que no dependa de la frecuencia es decir $\sqrt{L/C}$. A esta impedancia se le llama resistencia característica.

ECUACIONES DE DISKNO

FILTRO PASA BAJAS:

Partiendo de:

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

y

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

se obtiene:

$$C = \frac{1}{R_0 \pi F_0}$$

$$L = \frac{R_0}{\pi F_0}$$

FILTRO PASA ALTAS

Partiendo de:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$$

y

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

se obtiene:

$$C = \frac{1}{2R_0\omega_0}$$

$$L = \frac{R_0}{2\omega_0}$$

FILTRO PASA BANDA

Partiendo de

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2}} - \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2}}$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2}} + \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2}}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$$

y

$$L_1 C_1 = L_2 C_2$$

se obtiene:

$$L_1 = \frac{2R_0}{\omega_{02} - \omega_{01}}$$

$$L_2 = \frac{R_0 (\omega_{02} - \omega_{01})}{2 (\omega_{01} \omega_{02})}$$

$$C_1 = \frac{(\omega_{02} - \omega_{01})}{2 \omega_{01} \omega_{02} R_0}$$

$$C_2 = \frac{2}{R_0 (\omega_{02} - \omega_{01})}$$

FILTRO SUPRESOR DE BANDA

Partiendo de

$$\omega_{01} = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{16}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_1}} - \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1}} \right]$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{16}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_1}} + \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1}} \right]$$

$$L_1 C_1 = L_2 C_2$$

y

$$R_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$$

se tiene:

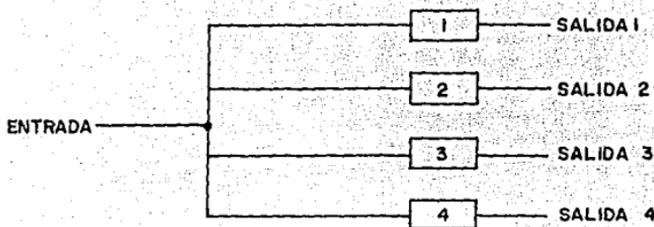
$$L_1 = \frac{2(\omega_{02} - \omega_{01}) R_0}{\omega_{01} \omega_{02}}$$

$$L_2 = \frac{R_0}{2(\omega_{02} - \omega_{01})}$$

$$C_1 = \frac{1}{2(\omega_{02} - \omega_{01}) R_0}$$

$$C_2 = \frac{2(\omega_{02} - \omega_{01})}{\omega_{01} \omega_{02} R_0}$$

Como ejemplo ilustrativo considere el diagrama siguiente:



En la salida 1 deberán aparecer señales cuyas frecuencias sean menores a 1 KHz; en la salida 2 aparecerán señales con frecuencias comprendidas entre 1 y 10 KHz; para la salida 3 consideraremos frecuencias mayores a 10 KHz y en la salida 4 aparecerán todas las frecuencias excepto las comprendidas entre 1 y 10 KHz.

Como puede deducirse, se trata de un separador de frecuencias (ver capítulo VII, sección I) que, intuitivamente, deberá estar formado por 4 filtros a saber:

- 1.- Filtro pasa bajas, con frecuencia de corte $F_0=1\text{KHz}$.
- 2.- Filtro pasa banda, con frecuencias de corte $F_{01}= 1 \text{ KHz}$, $F_{02}=10\text{KHz}$
- 3.- Filtro pasa altas, con frecuencia de corte $F_0= 10 \text{ KHz}$.
- 4.- Filtro supresor de banda, con frecuencias de corte $F_{01}= 1 \text{ KHz}$, $F_{02} = 10 \text{ KHz}$.

Diseño del filtro pasabajas(1)

$$L = \frac{2(50\Omega)}{2\pi(1000\text{Hz})} = 15.9\text{mH}$$

$$C = \frac{2}{50\Omega(2\pi(1000\text{Hz}))} = 6.36\mu\text{F}$$

Diseño del filtro pasa banda (2)

$$L_1 = \frac{2(50\Omega)}{2\pi[10000-1000]Hz} = 1.76mH$$

$$C_1 = \frac{2\pi(10000-1000)Hz}{2R_0(2\pi1000Hz)(2\pi10000Hz)} = 1.4\mu F$$

$$L_2 = \frac{(50\Omega)(2\pi(10000-1000)Hz)}{2(2\pi1000Hz)(2\pi10000Hz)} = 3.58mH$$

$$C_2 = \frac{2}{50\Omega(2\pi(10000-1000)Hz)} = 0.7\mu F$$

Diseño del filtro pasa altas:

$$L = \frac{50\Omega}{4\pi(10000Hz)} = 0.39mH$$

$$C = \frac{1}{4\pi(50\Omega)(10000Hz)} = 0.15\mu F$$

Diseño del Filtro supresor de banda:

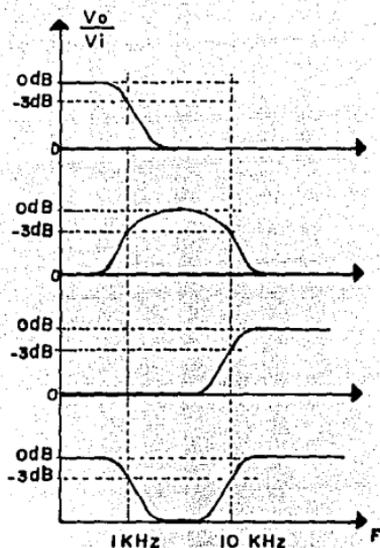
$$L_1 = \frac{2(2\pi(10000-1000)Hz)(50\Omega)}{(2\pi(1000Hz))(2\pi(10000Hz))} = 14mH$$

$$C_1 = \frac{1}{2(2\pi(10000-1000)Hz)(50\Omega)} = 0.17\mu F$$

$$L_2 = \frac{50\Omega}{2(2\pi(10000-1000)Hz)} = 0.44mH$$

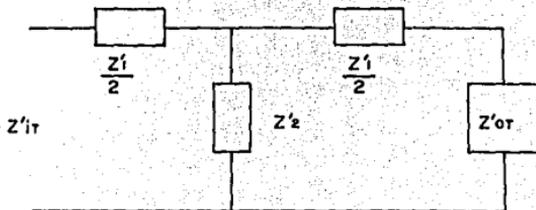
$$C_2 = \frac{2(2\pi(10000-1000)Hz)}{(2\pi1000Hz)(2\pi10000Hz)(50\Omega)} = 5.73\mu F$$

Las respuestas en frecuencia de estos filtros son:



DISÑO DE FILTROS m-DERIVADOS.

Partiendo del filtro original, debemos afectar las impedancias:



para que:

$$Z'_{OT} = Z_{OT}; F_{OKote} = F_{Omdar};$$

haciendo

$$Z'_1 = mZ_1.$$

y sustituyendo:

$$Z_{OT} = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} = \sqrt{mZ_1 Z_2 + \frac{m^2 Z_1^2}{4}}$$

igualando Z_{OT} con Z'_{OT} :

$$\sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} = \sqrt{mZ_1 Z_2 + \frac{m^2 Z_1^2}{4}}$$

de donde:

$$Z'_2 = Z_1 \left[\frac{1-m^2}{m^2} \right] + Z_2 \left[\frac{1}{m} \right]$$

obsérvese que ahora la impedancia en paralelo está formada por dos elementos.

En la rama en derivación se tiene un circuito resonante.

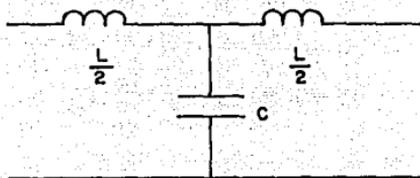
$$Z'_2 = \frac{1}{j\omega_r mC} + j\omega_r L \left[\frac{1-m^2}{4m} \right] = 0$$

por lo que:

$$\omega_r^2 [1-m^2] = \frac{4}{LC}$$

FILTRO PASA BAJAS m-DERIVADO

Partiendo del filtro original:



$$Z_1 = j\omega L$$

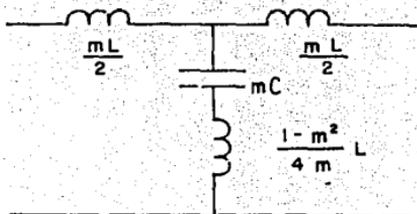
$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

De aquí:

$$Z'_1 = j\omega (mL)$$

$$Z'_2 = \frac{1}{j\omega [mC]} + j\omega \left[\frac{1-m^2}{4m} L \right]$$

quedando el filtro:



obsérvese que:

Si $m < 0$ la inductancia en serie es negativa, lo cual no existe y el filtro no se puede construir.

Si $m > 0$ la inductancia en derivación es negativa y el filtro no se puede construir.

Si $m = 0$ la impedancia en serie se hace cero y la impedancia en paralelo se hace infinita, por lo que el efecto del filtro desaparece.

Si $m = 1$:

$$Z_1 = j\omega L$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

es decir, se tiene el filtro original de constante K.

De lo anterior se desprende que: $1 > m > 0$.

La frecuencia de resonancia se obtiene con:

$$\omega_R^2 [1 - m^2] = \frac{4}{LC}$$

En un filtro pasabajas:

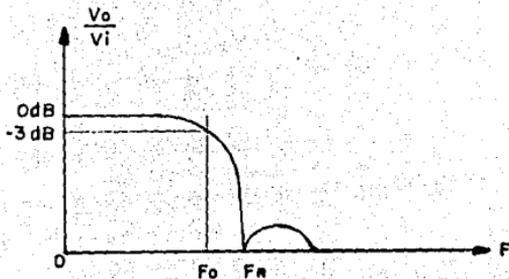
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{LC}}$$

por lo que:

$$\omega_0^2 = \omega_R^2 [1 - m^2]$$

$$f_R = \frac{f_0}{\sqrt{1 - m^2}}$$

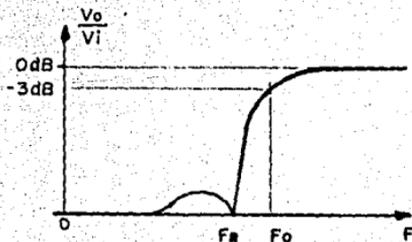
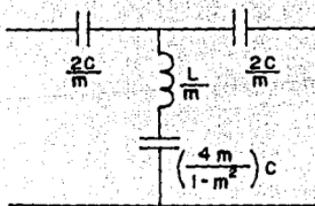
y la gráfica de amplitud contra frecuencia es:



Obsérvese que la respuesta es más acercada a la ideal, en comparación con el filtro original de constante k.

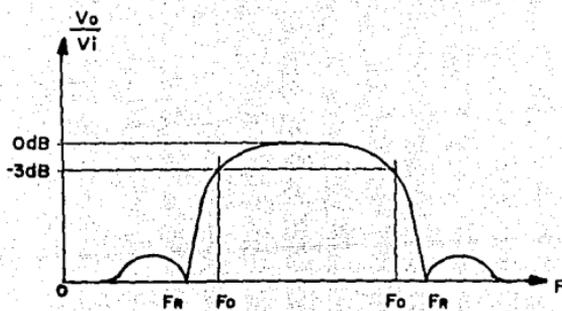
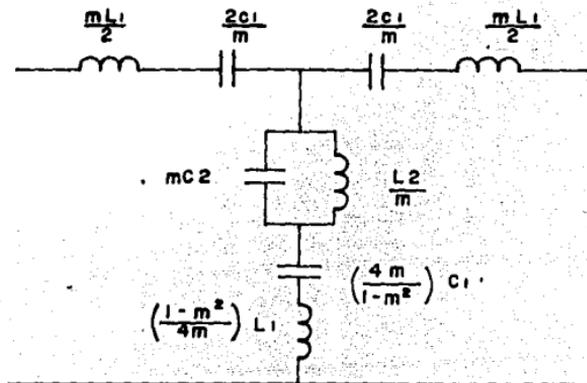
FILTRO PASA ALTAS m-DERIVADO.

Realizando un desarrollo similar al del filtro pasa bajas, se tiene:

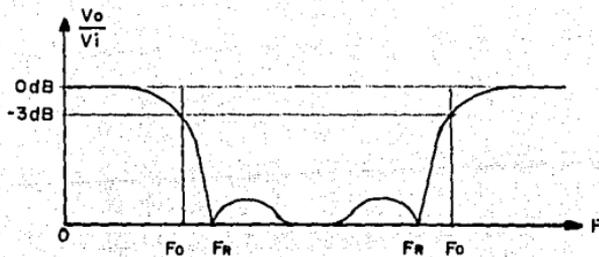
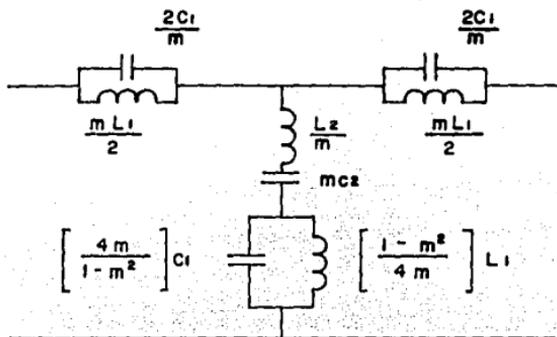


$$f_R = f_o \sqrt{1-m^2}$$

FILTRO PASA BANDA m-DERIVADO.

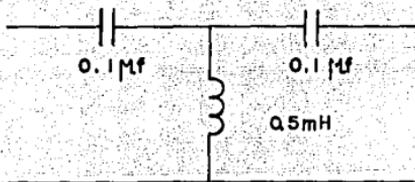


FILTRO SUPRESOR DE BANDA m-DERIVADO.



EJEMPLO:

A partir del filtro de constante k mostrado, halle el m derivado equivalente, de modo que $F_R = 0.8 F_0$



Despejando m de la ecuación:

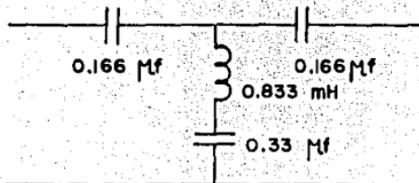
$$f_R = f_0 \sqrt{1 - m^2}$$

$$\frac{f_R}{f_0} = \sqrt{1 - m^2}$$

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{f_R}{f_0}\right)^2}$$

$$m = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6$$

así:

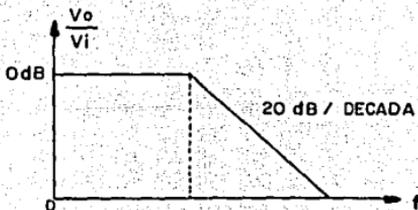
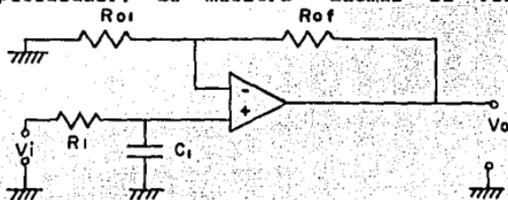


II.4 DISEÑO DE FILTROS ACTIVOS.

Un circuito filtro como los vistos en la sección anterior se construye utilizando componentes pasivos: resistencias, inductancias y capacitores. Un filtro activo utiliza adicionalmente un amplificador para ganancia de voltaje y aislamiento de la señal. En todos los casos que se exponen a continuación, para hallar el valor de los elementos R y C que forman el filtro, se toma arbitrariamente un valor comercial de uno de ellos, normalmente el de la capacitancia y se calcula el del otro, despejando de la fórmula de frecuencia de corte respectiva. Una característica de estos filtros es que la misma estructura puede utilizarse para diversos tipos de filtros (Butterworth, Chebyshev, Bessel, etc)

FILTRO ACTIVO PASA BAJAS.

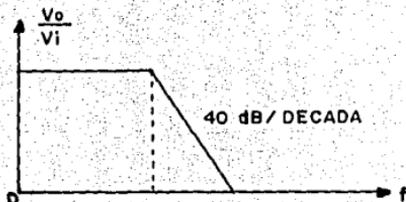
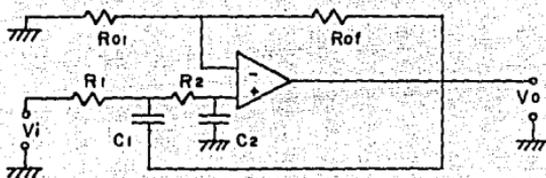
El siguiente circuito es un filtro pasa bajas con un elemento amplificador. Se muestra además su respuesta en frecuencia.



$$A_v = 1 + \frac{R_{of}}{R_{o1}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

Agregando otra red RC, se obtiene un filtro de segundo orden, que presenta una atenuación en la banda de supresión de 40 dB/década.



$$A_v = 1 + \frac{R_{0f}}{R_{0i}}$$

Con $R_1 = R_2 = R$ y $C_1 = C_2 = C$

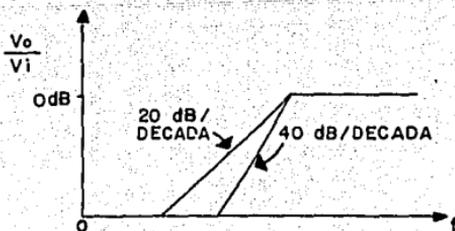
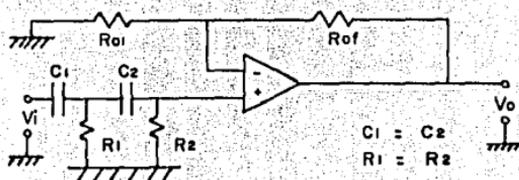
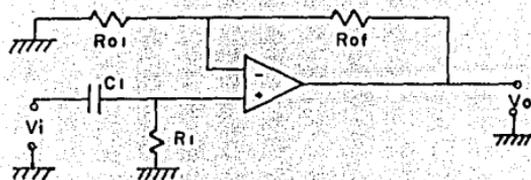
$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

FILTRO ACTIVO PASA ALTAS.

Las configuraciones siguientes muestran filtros de primer y segundo orden, respectivamente. En ambos casos:

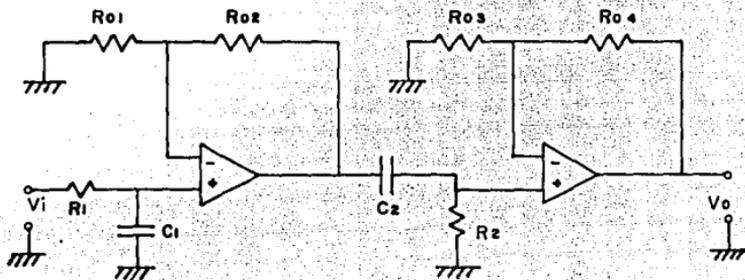
$$A_v = 1 + \frac{R_{of}}{R_{oi}}$$

$$F_c = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$



FILTRO ACTIVO PASA BANDA.

Abajo se muestra un filtro pasa banda, el cual utiliza dos etapas, la primera de las cuales es un filtro pasa altas y la segunda un pasa bajas. La operación combinada da la respuesta deseada del filtro pasa banda.



la ganancia de este circuito será el producto de las ganancias parciales.

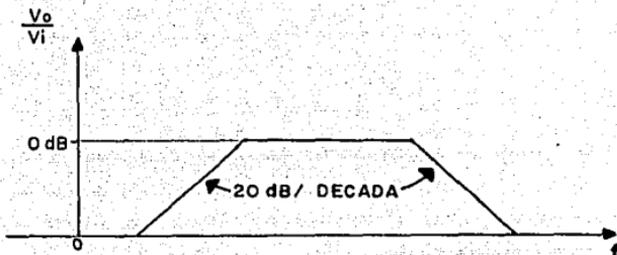
$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \left(\frac{R_{02}}{R_{01}} + 1 \right) \left(\frac{R_{04}}{R_{03}} + 1 \right)$$

Las frecuencias de corte están dadas por:

$$F_{01} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

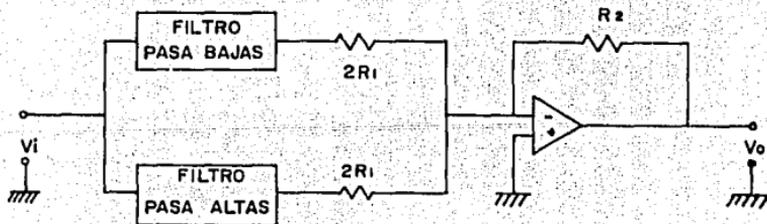
$$F_{02} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

la respuesta en frecuencia se muestra a continuación.



FILTRO ACTIVO SUPRESOR DE BANDA.

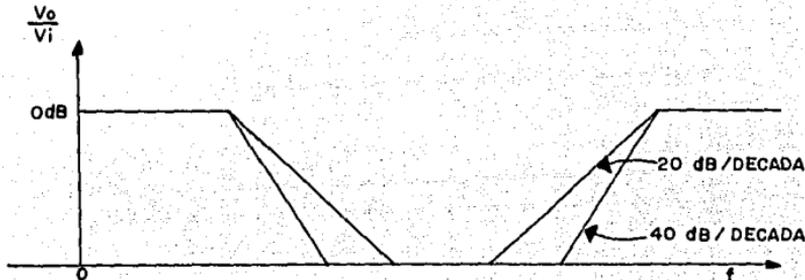
Un filtro supresor de banda se diseña mediante la combinación de un filtro pasa altas y otro pasa-bajas, combinándose sus efectos mediante un amplificador operacional adicional.



No se esquematiza la configuración de los filtros pasa-bajas y pasa-altas pues puede ser ya sea de primer orden ó segundo.

Las frecuencias de corte se calculan separadamente para cada filtro, como se indica en páginas anteriores.

La respuesta en frecuencia del filtro es la siguiente:



Existen muchas otras técnicas de diseño de filtros, sin embargo, las que se acaban de presentar son las más sencillas de implementar. En cualquiera de los casos, al diseñar, algunas veces se obtienen valores de resistencia muy pequeños ó capacitores muy grandes. Esto es poco conveniente, tanto desde el punto de vista técnico como desde el aspecto comercial. En general no es aconsejable el uso de resistencias de valores pequeños en circuitos que contengan amplificadores operacionales. Además, es difícil encontrar en el mercado condensadores de valores altos (que, por otra parte, son voluminosos y caros). Para superar esta dificultad se hace uso del escalonamiento de impedancia, visto en una sección anterior, con la cual, multiplicando (o dividiendo) la resistencia por una constante $a > 1$ y dividiendo (o multiplicando) la capacitancia por esa misma constante, las características del filtro permanecen invariables.

III. FILTRADO DIGITAL

OBJETIVO: Comprender la teoría de los filtros digitales y las técnicas básicas del diseño de ellos.

ANTECEDENTES: Análisis de Sistemas y Señales.
Dinámica de Sistemas Físicos.

CONCEPTOS: Transformada Z
Sistemas Lineales
Función de Transferencia

III. 1.- INTRODUCCION A LOS FILTROS DIGITALES

La aplicación primordial de los filtros digitales está, por lo pronto, en la implementación de sistemas sofisticados que rebasan las capacidades y posibilidades de los filtros analógicos. Sin embargo, conforme la tecnología de circuitos integrados avanza, estos filtros están encontrando un amplio rango de aplicaciones. Por ejemplo, los filtros digitales están siendo, ahora, utilizados en muchos sistemas de medición y control electrónicos, y también están invadiendo el campo de la electrónica del consumidor, como lo es el caso de los CD's y los LD's. Los filtros digitales están encontrando todas estas aplicaciones en razón de que se pueden implementar con programas de aplicación sobre computadoras de propósito general, por lo que resulta sencillo construirlos y probarlos; su operación está basada en la realización, solamente, de operaciones aritméticas de suma y multiplicación; razón por la cual son extremadamente estables, es decir, su comportamiento no se modifica ni con el tiempo ni con la temperatura.

Lo anterior no significa que los filtros digitales sean la respuesta a todos los problemas de filtrado. Los filtros analógicos continuarán, durante un buen tiempo, dominando el mundo del filtraje.

Los filtros analógicos difieren de los filtros digitales por la naturaleza de las señales de entrada y de salida. Un filtro

analógico por ejemplo, procesa entradas analógicas y genera salidas analógicas; en tanto que un filtro digital procesa y genera datos digitales. Estas diferencias en la señal de entrada y salida determinan, también, diferentes técnicas de procesamiento. Por ejemplo, los filtros analógicos están basados en la relación de las operaciones matemáticas de diferenciación e integración; en tanto que los filtros digitales sólo requieren de desarrollar operaciones de suma, multiplicación y retardo. La diferencia principal entre un filtro analógico y un digital es que, en el primer caso, la información analógica es caracterizada por una variable independiente continua que puede tomar cualquier valor, en tanto que la información digital se caracteriza por una variable independiente discreta que sólo puede tomar determinados valores. Supongamos, por ejemplo, que se desean hacer mediciones de temperatura contra el tiempo. La temperatura, variable dependiente, representa el dato y el tiempo, variable independiente, representa el orden de ese dato. El tiempo es continuo, luego se trata de un caso analógico. Sin embargo, si la toma de mediciones se hiciera cada hora, la temperatura VS tiempo dejaría una señal digital; esto se debe a que la variable independiente es, ahora, una variable discreta: la hora 1, la hora 2... De este modo, siempre es posible convertir una señal analógica en datos digitales, restringiendo nuestra atención a valores discretos de la variable independiente.

Los datos digitales son enumerados con ayuda de índices, por ejemplo, la temperatura en una habitación a la hora 1 se puede denotar como t_1 ; la temperatura a la hora 2 como t_2 , etc. Los datos digitales son representados por una secuencia ordenada. La secuencia, es usualmente indizada por enteros y cualquier elemento de esta secuencia ordenada es denotada por $x(\text{índice})$.

Tomemos como ejemplo de filtro digital a una caja registradora (Introducción a los Filtros Digitales, Juan Barrios Romano- UAM - Iztapalapa).

Una caja registradora satisface todas nuestras nociones de filtro, es decir, acepta entradas (el precio de los artículos) y produce una salida (el costo total más el I.V.A.).

Podemos describir la operación de la caja registradora ayudándonos con la siguiente notación: primero, asignémosle un número a cada artículo comprado, usando los enteros desde 1 hasta N . A continuación, denotamos el precio del k -ésimo artículo con X_k . Finalmente, le asignamos a la salida de la caja registradora un símbolo que representa el total después de que ha sido introducido el costo del k -ésimo artículo; este símbolo será Y_k .

Más adelante, debido a la gran cantidad de subíndices que utilizáramos, cambiaremos la notación a $X(k)$ y $Y(k)$.

La forma básica en que opera una caja registradora consiste en sumar los precios de todos los artículos y producir un total. De este modo, la salida de la caja registradora queda relacionada con sus entradas mediante la siguiente ecuación:

$$Y_k = X_k + X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_1$$

El gran total, la cantidad a pagar, será la salida de la caja registradora después que el último artículo ha sido considerado. En nuestro ejemplo, se tienen N artículos, por lo que el gran total será Y_N .

La operación anterior la podemos expresar en una forma más compacta observando que Y_k es un subtotal. De este modo, para obtener el siguiente subtotal, simplemente agregaremos el precio del nuevo artículo al subtotal anterior. En esta forma la caja registradora se podrá describir con la ecuación:

$$Y_k = Y_{k-1} + X_k$$

donde Y_k es el nuevo subtotal, Y_{k-1} es el subtotal anterior y X_k es el precio del nuevo artículo.

Expresando el valor de Y_{k-1} en términos de los precios de los artículos, se tiene:

$$Y_{k-1} = X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_1$$

ecuación que al ser sustituida en la última relación nos pone en total acuerdo con la primera expresión:

$$Y_k = (X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_1) + X_k$$

$$Y_k = X_k + X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_1$$

Estas dos descripciones del filtro *Caja Registradora* son ejemplos de Filtros digitales. La primera descripción es conocida como Filtro digital no recursivo y la segunda es conocida como Filtro

digital recursivo. Hasta aquí la descripción ha resultado demasiado simple en razón de que no hemos considerado el I.V.A. El impuesto al valor agregado es un cargo que se debe agregar al total de la compra. En nuestro caso esto es posible hacerlo escalando los precios de los artículos antes de obtener el total, o escalando solamente el total. Esta última consideración la podemos dejar expresada por:

$$Y_k = 1.15X_k + 1.15X_{k-1} + 1.15X_{k-2} + \dots + 1.15X_1$$

o por

$$Y_k = Y_{k-1} + 1.15X_k$$

Consideremos otro ejemplo: Se trata ahora de calcular la salida de un filtro promediador de dos valores con las entradas siguientes:

$X_0=5$, $X_1=3$, $X_2=3$, $X_3=1$ y *cero en cualquier otro caso*

La forma general de un filtro promediador de dos valores es:

$$Y_k = \frac{1}{2} [X_k + X_{k-1}]$$

Calculando para varias salidas:

$$Y_0 = \frac{1}{2} [X_0 + X_{-1}] = \frac{1}{2} [5 + 0] = \frac{5}{2}$$

$$Y_1 = \frac{1}{2} [X_1 + X_0] = \frac{1}{2} [3 + 5] = 4$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} [X_2 + X_1] = \frac{1}{2} [3 + 3] = 3$$

$$Y_3 = \frac{1}{2} [X_3 + X_2] = \frac{1}{2} [1 + 3] = 2$$

$$Y_4 = \frac{1}{2} [X_4 + X_3] = \frac{1}{2} [0 + 1] = \frac{1}{2}$$

$$Y_5 = \frac{1}{2} [X_5 + X_4] = \frac{1}{2} [0 + 0] = 0$$

Siguiendo este tedioso proceso, la salida del filtro digital se puede calcular para cualquier valor del indice de salida y cualquier conjunto de datos de entrada. En general, el proceso del filtraje digital requiere que el operador identifique cuales son los datos a usar para calcular una salida en particular y entonces, manipular aritmeticamente los datos de entrada para evaluar la salida.

III.2 ESTRUCTURAS DE FILTROS DIGITALES

Todos los filtros digitales se pueden restringir a una de dos formas: filtros digitales no-recursivos y filtros digitales recursivos. Un filtro no-recursivo genera su salida ponderando las entradas con un conjunto de constantes y sumando estos resultados. Estas constantes son denominadas los coeficientes del filtro. En realidad, el diseño de un filtro consiste en la elección de estos coeficientes. El filtro no-recursivo es definido por la siguiente expresión

$$Y_k = a_m X_{k-m} + a_{m-1} X_{k-m+1} + \dots + a_0 X_k + \dots + a_{-m+1} X_{k-m+1} + a_{-m} X_{k-m}$$

La salida Y_k es una suma ponderada de la entrada presente y sus $2m$ vecinos. Obsérvese que las entradas no contribuyen de igual modo a la salida; la contribución de cada elemento es gobernada por el coeficiente con que es multiplicado.

La expresión anterior puede compactarse en una sumatoria como sigue:

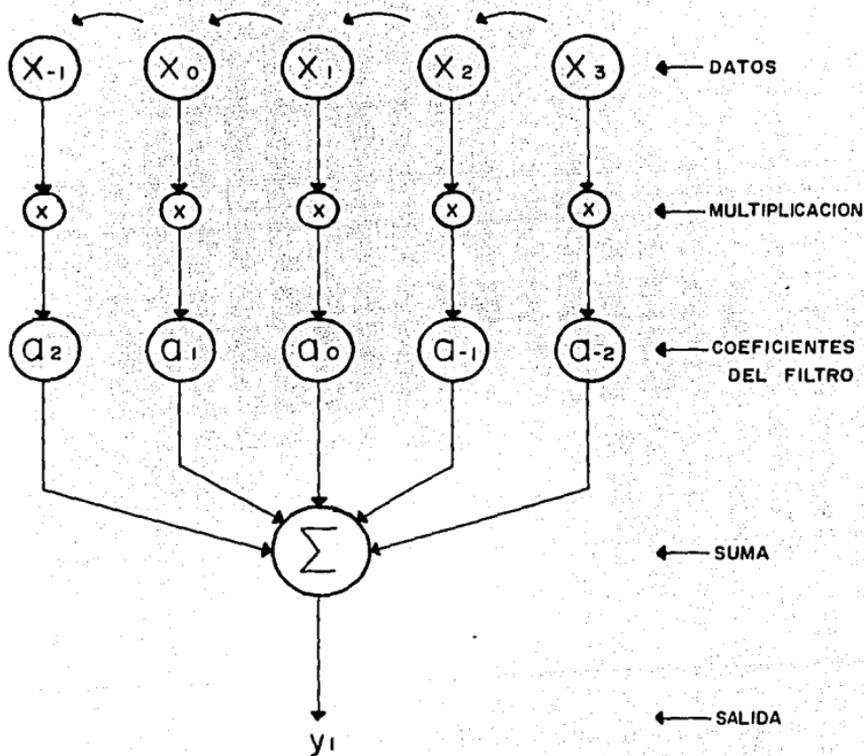
$$Y_k = \sum_{i=-m}^m a_i X_{k-i}$$

Por ejemplo si $m=2$, hallar Y_1 y Y_2 :

$$Y_1 = \sum_{i=-2}^2 a_i X_{1-i} = a_2 X_{-1} + a_1 X_0 + a_0 X_1 + a_{-1} X_2 + a_{-2} X_3$$

$$Y_2 = a_2 X_0 + a_1 X_1 + a_0 X_2 + a_{-1} X_3 + a_{-2} X_4$$

Gráficamente, el filtro queda:



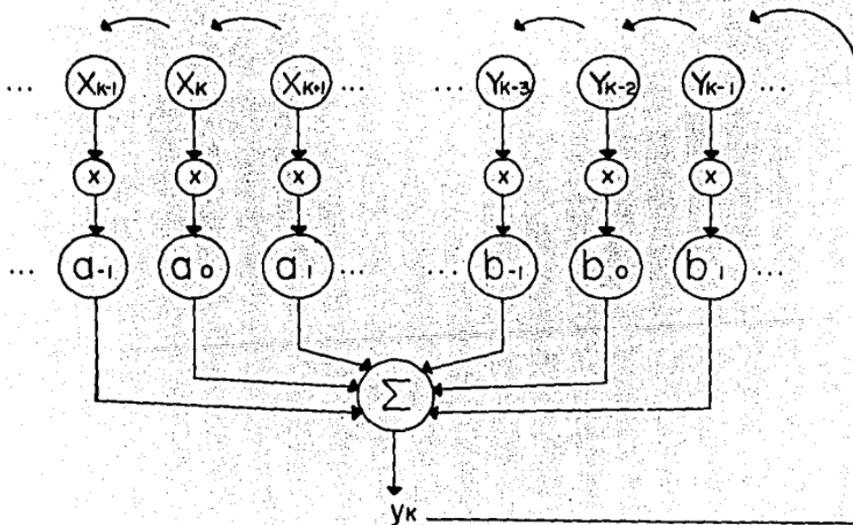
La siguiente salida, y_2 , se genera simplemente recorriendo los datos un paso a la izquierda antes de ser multiplicados. Evidentemente desaparecerá X_{-1} y aparecerá X_4 .

Una segunda forma para realizar filtros digitales es la de tipo recursivo, en el que la salida no sólo queda en función de las entradas sino que depende también de las salidas pasadas. Se define por la relación.

$$y_k = \sum_{i=-m}^n a_i x_{k-i} + \sum_{j=1}^n b_j y_{k-j}$$

Evidentemente, si todos los coeficientes b_j son cero, se tiene el caso particular del filtro no-recursivo.

Puede ilustrarse la operación de este filtro mediante la figura siguiente:



La parte izquierda corresponde a la porción no recursiva y la derecha a la recursiva del filtro. Obsérvese que al principio, la salida estará producida por la suma de las entradas, únicamente y que debe pasar cierto tiempo antes que las salidas Y_{k-1} , Y_{k-2} tengan valor numérico. Al valor de las salidas antes de que los datos de entrada las afecten se le llama condición inicial de la salida y, en general, valdrá cero.

Como ejemplo, consideremos los coeficientes:

$$a_2=0.14, \quad b_1=1.77, \quad b_2=-1.19 \quad b_3=0.28$$

y asumamos al filtro inicialmente relajado y que los datos de entrada son 0 para índices negativos

$$X_k=0 \text{ para } k < 0$$

además que:

$$X_k=k+1 \text{ para } k > 0.$$

Obsérvese que debido a que a_2 es el primer coeficiente distinto de cero, la entrada afectará a la salida en el índice $k=2$, dos pasos después de $k=0$. Por tanto, la primera salida distinta de cero para este filtro será Y_2 .

De la expresión:

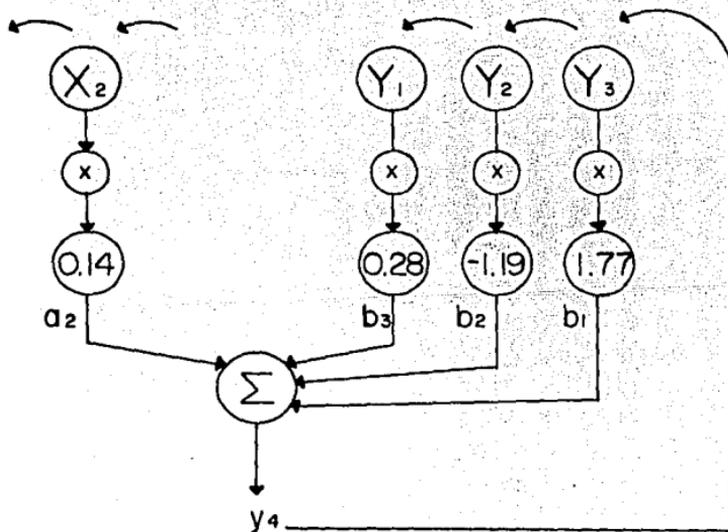
$$Y_k = \sum_{i=-n}^n a_i X_{k-i} + \sum_{j=1}^n b_j Y_{k-j}$$

$$Y_k = a_2 X_{k-2} + b_1 Y_{k-1} + b_2 Y_{k-2} + b_3 Y_{k-3}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los datos para cada índice y realizando las operaciones respectivas.

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= 0.14X_1 + 1.77Y_{-1} - 1.19Y_2 + 0.28Y_3 \\
 Y_0 &= 0.14(0) + 1.77(0) - 1.19(0) + 0.28(0) = 0 \\
 Y_1 &= 0.14X_1 + 1.77Y_0 - 1.19Y_{-1} + 0.28Y_2 \\
 Y_1 &= 0.14(0) + 1.77(0) - 1.19(0) + 0.28(0) = 0 \\
 Y_2 &= 0.14X_0 + 1.77Y_1 - 1.19Y_0 + 0.28Y_{-1} \\
 Y_2 &= 0.14(1) + 1.77(0) - 1.19(0) + 0.28(0) = 0.1400 \\
 Y_3 &= 0.14X_1 + 1.77Y_2 - 1.19Y_1 + 0.28Y_0 \\
 Y_3 &= 0.14(2) + 1.77(0.14) - 1.19(0) + 0.28(0) = 0.5278 \\
 Y_4 &= 0.14X_2 + 1.77Y_3 - 1.19Y_2 + 0.28Y_1 \\
 Y_4 &= 0.14(3) + 1.77(0.5278) - 1.19(0.14) + 0.28(0) = 1.1876
 \end{aligned}$$

Gráficamente, para Y_4 :



RESPUESTAS DE INTERÉS A SECUENCIA TÍPICAS

La primer entrada como en los filtros analógicos que representa gran interés para nosotros es la denominada secuencia impulsiva:

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{Si } k=0 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

La respuesta impulsiva de un filtro es, por definición, su salida cuando la entrada es un impulso.

La siguiente entrada importante es el Escalón Discreto.

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{Si } k \geq 0 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

La respuesta escalón del filtro es su salida cuando se aplica a la entrada un escalón.

La tercer entrada de interés es la Secuencia Rampa:

$$r_k = \begin{cases} 1 & \text{Si } k \geq 0 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

La respuesta rampa de un filtro es su salida cuando la entrada es una secuencia rampa.

FILTRO INTEGRADOR.

Un filtro digital que convierte una secuencia impulsiva en una secuencia escalón se llama integrador. Es evidente que un filtro no recursivo no es capaz de realizar este trabajo, debido a que su salida se hace cero después que el impulso ha pasado a través del filtro. Por tanto, sólo es posible considerar filtros recursivos para esta aplicación.

Podemos describir a un filtro integrador por la ecuación

$$Y_k = X_k + Y_{k-1}$$

De ella se ve que:

$$\begin{aligned} Y_{-1} &= 0 + 0 \\ Y_0 &= 1 + 0 = 1 \\ Y_1 &= 0 + 1 = 1 \\ Y_2 &= 0 + 1 = 1 \\ Y_3 \dots Y_n &= 1 \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso del filtro alimentándolo con una secuencia escalón:

$$\begin{aligned} Y_{-1} &= 0 + 0 \\ Y_0 &= 1 + 0 = 1 \\ Y_1 &= 1 + 1 = 2 \\ Y_2 &= 1 + 2 = 3 \\ &etc. \end{aligned}$$

Esto podría considerarse como una secuencia rampa, pero ésta inicia en $k=0$ ($Y(0)=1$) y la definición de una secuencia rampa indica que ésta debe iniciar en $k=1$. Por tanto se deberá retrasar la salida del filtro por una cantidad de 1, lo cual se hace con el cambio de inicio sobre la entrada a $k-1$, quedando la expresión de la siguiente forma:

$$Y_k = X_{k-1} + Y_{k-1}$$

III.2 A) FILTROS DE RESPUESTA AL IMPULSO FINITA (FIR)

La forma general de un filtro no recursivo es, como ya se indico:

$$Y_k = \sum_{i=-m}^n a_i X_{k-i}$$

Si denotamos a la respuesta impulsiva con h_k , podemos reescribir la expresi3n anterior como:

$$h_k = \sum_{i=-m}^n a_i X_{k-i} \quad \text{si } X_k = \text{impulso}$$

Considerando un impulso como entrada:

$$X_k = \delta_k = \begin{cases} 1 & \text{Si } k=0 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

ademi3s:

$$X_{k-i} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i=k \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Lo que significa que cada producto de la sumatoria ser3 cero, excepto si $k=i$. Asi, la respuesta impulsiva del filtro no-recursivo consistir3 de los coeficientes del filtro:

$$h_k = a_k$$

El an3lisis anterior es importante, ya que basta colocar un impulso a la entrada de un filtro y observar la respuesta impulsiva correspondiente para describir al filtro: la longitud de la secuencia correspondiente a la respuesta impulsiva queda determinada por el n3mero de coeficientes en el filtro, y dado que, como se ha visto, estos filtros poseen a lo m3s $2m+1$ coeficientes distintos de cero, la respuesta impulsiva no podr3 ser mayor que $2m+1$ puntos 3 valores 3 raz3n por la cual a los filtros no-recursivos se les denomina Filtros de Respuesta al

Impulso Finita (FIR).

Considérese por ejemplo, el filtro definido por la siguiente expresión:

$$Y_k = -X_{k+1} + X_{k-1} + 2X_k$$

Aplicando un impulso se tienen las salidas mostradas para distintos índices:

$$h_{-2} = -X_{-1} + X_{-3} + 2X_{-2} = 0$$

$$h_{-1} = -X_0 + X_{-2} + 2X_{-1} = -1$$

$$h_0 = -X_1 + X_{-1} + 2X_0 = 0$$

$$h_1 = -X_2 + X_0 + 2X_1 = 1$$

$$h_2 = -X_3 + X_1 + 2X_2 = 0$$

$$h_3 = -X_4 + X_2 + 2X_3 = 2$$

$$h_4 = -X_5 + X_3 + 2X_4 = 0$$

De lo anterior se desprende que:

$$h_{-1} = a_{-1} = -1$$

$$h_1 = a_1 = 1$$

$$h_3 = a_3 = 2$$

es decir, la respuesta impulso h_k es igual a los coeficientes. En términos de la respuesta impulsiva, la entrada y la salida quedan relacionadas de acuerdo a la expresión:

$$Y_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l X_{k-l}$$

relación conocida como sumatoria de convolución. Esto es, la salida de un filtro digital no-recursivo resulta justamente en la convolución de la entrada con su respuesta impulsiva.

Observemos el comportamiento de la salida de un filtro digital no-recursivo que tiene una respuesta al impulso y una entrada definida por:

$$h_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k=-1, 0, 1 \\ 2 & \text{para } k=2, 3 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

$$x_k = \begin{cases} 2 & \text{para } k=0, 1, 2 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

De la ecuación:

$$Y_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l X_{k-l}$$

$$Y_k = \sum_{l=-1}^3 h_l X_{k-l}$$

Desarrollando las sumatorias:

$$Y_0 = \sum_{l=-1}^3 h_l X_{0-l} = h_{-1} X_1 + h_0 X_0 + h_1 X_{-1} + h_2 X_{-2} + h_3 X_{-3}$$

$$Y_1 = \sum_{l=-1}^3 h_l X_{1-l} = h_{-1} X_2 + h_0 X_1 + h_1 X_0 + h_2 X_{-1} + h_3 X_{-2}$$

$$Y_2 = \sum_{l=-1}^3 h_l X_{2-l} = h_{-1} X_3 + h_0 X_2 + h_1 X_1 + h_2 X_0 + h_3 X_{-1}$$

$$Y_3 = \sum_{j=-1}^3 h_j X_{3-j} = h_{-1} X_4 + h_0 X_3 + h_1 X_2 + h_2 X_1 + h_3 X_0$$

$$Y_4 = \sum_{j=-1}^3 h_j X_{4-j} = h_{-1} X_5 + h_0 X_4 + h_1 X_3 + h_2 X_2 + h_3 X_1$$

Suprimiendo de las expresiones anteriores los productos iguales a cero, podemos arreglarlas de la siguiente manera:

$$Y_0 = h_{-1} X_1 + h_0 X_0$$

$$Y_1 = h_{-1} X_2 + h_0 X_1 + h_1 X_0$$

$$Y_2 = h_0 X_3 + h_1 X_2 + h_2 X_0$$

$$Y_3 = h_1 X_3 + h_2 X_2 + h_3 X_0$$

$$Y_4 = h_2 X_3 + h_3 X_1$$

Al introducir los valores de h y X para los diferentes valores de k, se generan las salidas siguientes:

$$Y_0 = (1)2 + (1)2 = 4$$

$$Y_1 = (1)2 + (1)2 + (1)2 = 6$$

$$Y_2 = (1)2 + (1)2 + (2)2 = 8$$

$$Y_3 = (1)2 + (2)2 + (2)2 = 10$$

$$Y_4 = (2)2 + (2)2 = 8$$

Obsérvese que la contribución de la respuesta impulsiva a la sumatoria de convolución es constante, y la señal de entrada parece desplazarse a través de la respuesta al impulso en los diferentes índices para los que la salida es evaluada. Esta es una propiedad general de la convolución.

III.2 B) FILTROS DE RESPUESTA AL IMPULSO INFINITA (IIR)

La forma general de un filtro recursivo es, considerando h_k como la respuesta al impulso:

$$h_k = \sum_{i=-\infty}^k a_i x_{k-i} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j h_{k-j}, \text{ si } x_k = \text{impulso}$$

Se observa que sólo el término $k-i$ contribuye a la suma no-recursiva, por lo que:

$$h_k = a_k + \sum_{j=1}^{\infty} b_j h_{k-j}$$

Nótese en primer lugar que en este caso la respuesta impulsiva de un filtro recursivo es más complicada y no está tan claramente relacionada con los coeficientes del mismo. También obsérvese que la parte recursiva del filtro continúa generando una salida más allá de cuando las a_k 's se hacen cero. Por lo anterior, los filtros recursivos poseen respuestas impulsivas infinitas y esto da lugar a que se les denomine Filtros de Respuesta al Impulso Infinita (IIR).

Considérese, por ejemplo, un filtro recursivo sencillo, con sólo dos coeficientes distintos de cero. Este filtro queda expresado con la relación:

$$Y_k = a_0 X_k + b_1 Y_{k-1}$$

Asumiendo que el filtro está inicialmente relajado, observemos lo que ocurre al excitar el filtro con un impulso:

$$\begin{aligned}
 h_k &= a_0 x_k + b_1 h_{k-1} \\
 h_0 &= a_0 x_0 + b_1 h_{-1} \\
 h_0 &= a_0 (1) + b_1 (0) = a_0 \\
 h_1 &= a_0 x_1 + b_1 h_0 \\
 h_1 &= a_0 (0) + b_1 (a_0) = a_0 b_1 \\
 h_2 &= a_0 x_2 + b_1 h_1 \\
 h_2 &= a_0 (0) + b_1 (a_0 b_1) = a_0 b_1^2 \\
 h^3 &= a_0 x_3 + b_1 h_2 \\
 h_3 &= a_0 (0) + b_1 (a_0 b_1^2) = a_0 b_1^3
 \end{aligned}$$

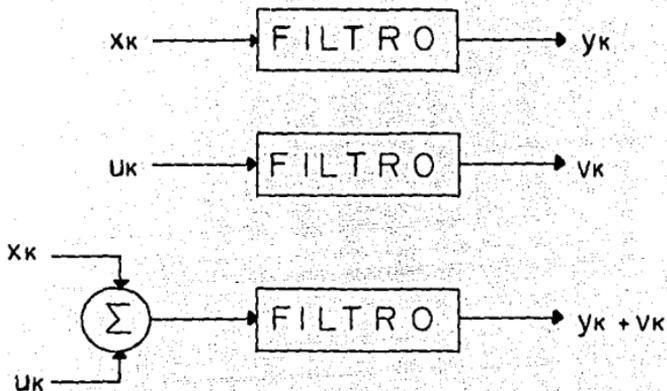
y así, sucesivamente.

Observe cómo el coeficiente no-recursivo controla la amplitud de la respuesta sólo en $k=0$, y el coeficiente recursivo determina la forma de respuesta: si b_1 es negativa, la respuesta toma cambios de signo en forma alternada; si b_1 toma un valor entre 0 y 1, la respuesta decae exponencialmente; y si b_1 es mayor que 1, la respuesta crece ilimitadamente. Evidentemente, si $b_1=1$, la respuesta será plana hasta el infinito.

Desafortunadamente no es posible probar, como en el caso de los filtros no recursivos, que las entradas y salidas de un filtro están relacionadas con la respuesta impulsiva, mediante la convolución. Sin embargo, se desarrollarán métodos más sofisticados para tratar con los filtros digitales a fin de mostrar los resultados proporcionados por la operación de convolución para los filtros recursivos.

Para relacionar la entrada y la salida de un filtro recursivo debemos estudiar antes las propiedades de los filtros digitales, a saber:

Superposición: Un filtro exhibe tal propiedad si y sólo si la entrada de $X+U$ genera una salida igual a $Y+V$, donde Y es la salida generada por X y V la salida generada por U . Esto debe ser válido para cualesquiera entradas X y U .



Homogeneidad: Un filtro exhibe tal propiedad si y sólo si la entrada Cx_k genera una salida Cy_k , con Y_k la salida generada por X_k .



Invariancia en desplazamiento: Un filtro la exhibe si y sólo si la entrada X_{k+1} genera la salida Y_{k+1} .



Un filtro que exhibe las propiedades de superposición, homogeneidad e invariancia en desplazamiento se dice que es un filtro lineal invariante en el tiempo. Es fácil comprobar que un filtro recursivo es lineal invariante en el tiempo.

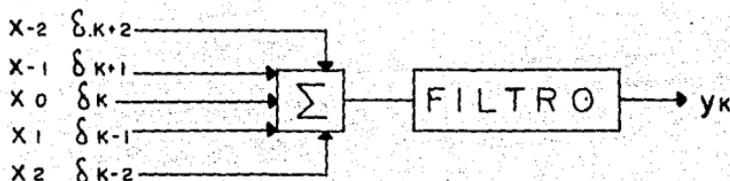
Ahora que se han definido los filtros lineales, podemos retomar el problema de relacionar mediante la convolución las entradas y las salidas de un filtro recursivo.

Sabemos que si se aplica un impulso δ_k al filtro, éste producirá una respuesta impulsiva h_k . Al presentar un impulso desplazado al filtro, δ_{k+1} , el filtro producirá una respuesta impulsiva desplazada h_{k+1} . Si presentamos un impulso desplazado y escalado, $C\delta_{k+1}$, la salida del filtro será la respuesta impulsiva desplazada y escalada Ch_{k+1} .

Representando la entrada a un filtro como la suma de impulsos desplazados en donde cada impulso es pesado por un valor en la entrada.

$$x_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \delta_{k-j}$$

Debido a las propiedades de superposición y homogeneidad, la salida del filtro es la suma de las salidas del filtro a cada una de las entradas, como se observa abajo:



Cada impulso desplazado y escalado genera una respuesta impulsiva desplazada y escalada; por tanto la salida del filtro será la suma de todas estas respuestas impulsivas.

$$y_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j h_{k-j}$$

Sustituyendo $l=k-j$, tendríamos:

$$y_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{k-l}$$

Aquí, la entrada y la salida quedan relacionadas a través de la convolución de la respuesta impulsiva.

III.3 REALIZACION DE FILTROS DIGITALES

La realización de filtros puede estudiarse en cuatro dominios diferentes, a saber: analógico(S), digital(Z), en frecuencia (f) y del tiempo(t).

El dominio S es útil en el diseño de filtros analógicos, porque describe la física del filtrado directamente. Por ejemplo, en este dominio, el filtro "S" es un diferenciador y el filtro "1/S" es un integrador.

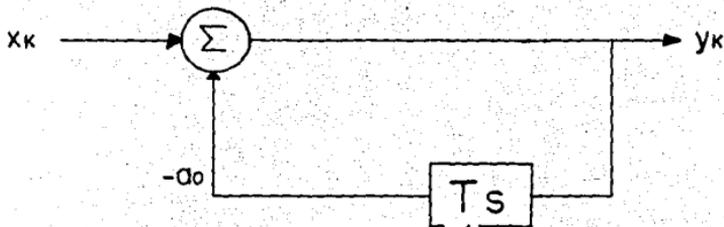
El dominio S utiliza dos herramientas de diseño equivalentes para definir la salida de los filtros respecto de la entrada de los mismos: la función de transferencia y el diagrama de bloques.

El dominio en Z es usado en filtros digitales porque éste relaciona las operaciones con una computadora directamente. En este dominio la función de transferencia "Z" representa el siguiente dato y la función Z^{-1} representa el dato anterior.

El dominio Z, aunque no está directamente relacionado con la física diferencial, es conveniente para describir las operaciones en una computadora digital, debido a que $1/Z$ es simplemente una memoria de almacenamiento del dato anterior. En forma similar al dominio en S, el dominio en Z usa diagramas a bloque y funciones de transferencia.

Al principio de este capítulo se mencionó que un filtro digital se construye empleando sumadores, multiplicadores y elementos de retardo, por ejemplo un registro de desplazamiento mediante el cual son desplazados los valores muestreados de la forma de onda de entrada a la velocidad de muestreo F_s .

Consideremos el caso de un filtro digital con retardo de un intervalo de tiempo T_s :

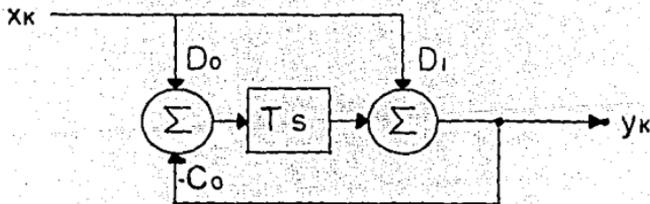


En la salida del registro aparece el valor retardado un período de reloj. Así pues, para los valores de la secuencia de salida se tiene la siguiente expresión:

$$y_k = x_k - a_0 y_{k-1}$$

que es la forma inicial que se dió para un filtro recursivo.

Consideremos ahora un diagrama a bloques algo más complejo:



Para el elemento de retardo, Z^{-1} , obtenemos la secuencia de salida de Z transformada:

$$Y_k(z) = X_k(z) D_1 + Z^{-1} [X_k(z) D_0 - C_0 Y_k(z)]$$

obtenemos ahora la función digital de transferencia

$$\frac{Y_k(Z)}{X_k(Z)}$$

$$Y_k(Z) = D_1 X_k(Z) + D_0 X_k(Z) Z^{-1} - C_0 Y_k(Z) Z^{-1}$$

$$Y_k(Z) + C_0 Y_k(Z) Z^{-1} = D_1 X_k(Z) + D_0 X_k(Z) Z^{-1}$$

$$Y_k(Z) [1 + C_0 Z^{-1}] = X_k(Z) [D_1 + D_0 Z^{-1}]$$

$$\frac{Y_k(Z)}{X_k(Z)} = \frac{D_1 + D_0 Z^{-1}}{1 + C_0 Z^{-1}} = \frac{D_0 + D_1 Z}{C_0 + Z}$$

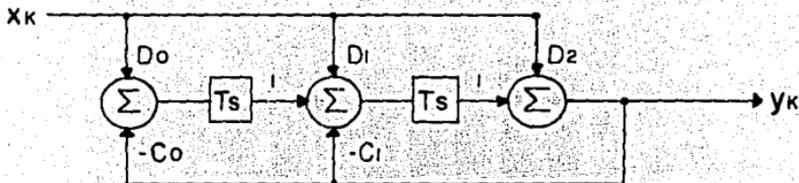
Cuando se evalúa la FDT por las funciones analógicas específicas de transferencia, se evidencian algunas propiedades particulares de los coeficientes. Lo mismo que para los filtros analógicos, estos coeficientes pueden utilizarse como indicación del tipo de filtro.

$$FDT = D_0 \frac{1+Z}{C_0+Z} \quad \text{Filtro Pasa Bajas}$$

$$FDT = D_0 \frac{1-Z}{C_0+Z} \quad \text{Filtro Pasa Altas}$$

De aquí que un filtro pasa bajas esté caracterizado por $D_1 = D_0$ y uno pasa altas por $D_1 = -D_0$

Con un elemento más de retardo, el circuito se convierte en un filtro de segundo orden.



La función de transferencia se halla de la misma manera que la del filtro de primer orden:

$$Y_k(z) = D_2 X_k(z) + z^{-1} [D_1 X_k(z) - C_1 Y_k(z)] + z^{-2} [D_0 X_k(z) - C_0 Y_k(z)]$$

De donde se puede obtener fácilmente:

$$FDT = \frac{Y_k(z)}{X_k(z)} = \frac{D_0 + D_1 z + D_2 z^2}{C_0 + C_1 z + z^2}$$

y, lo mismo que para los filtros de primer orden, los coeficientes indican las propiedades especiales de filtro:

$$FDT = D_0 \frac{1 + 2z + z^2}{C_0 + C_1 z + z^2} \quad \text{filtro pasa bajas.}$$

$$FDT = D_0 \frac{1 - 2z + z^2}{C_0 + C_1 z + z^2} \quad \text{filtro pasa altas.}$$

En forma general, podemos representar la función de transferencia por:

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}$$

en donde a_1 y b_1 son coeficientes reales y n es el orden máximo de los polinomios en el numerador y denominador.

III.3A REALIZACION DE FILTROS DIGITALES EN FORMA DIRECTA.

Las estructuras directas para filtros digitales son aquellas en las cuales los coeficientes a_1 , b_1 de la función de transferencia:

$$D(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_n Z^{-n}}{1 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_n Z^{-n}}$$

aparecen como multiplicadores en la realización en diagrama a bloques.

Estructura Directa Primera

A partir de la función de transferencia, expresada como el cociente de dos sumatorias:

$$D(Z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}}$$

en donde $b_0=1$.

Si $X(Z)$ es la entrada al filtro y $Y(Z)$ la salida, entonces tendremos:

$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}}$$

Si se introduce ahora una variable intermedia $M(Z)$

$$\frac{Y(Z)M(Z)}{M(Z)X(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}}$$

De tal manera que:

$$\frac{Y(Z)}{M(Z)} = \sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}$$

y

$$\frac{X(Z)}{M(Z)} = \sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}$$

entonces:

$$X(Z) = \sum_{i=0}^n b_i Z^{-i} M(Z)$$

y

$$Y(Z) = \sum_{i=0}^n a_i Z^{-i} M(Z)$$

Observando la primera de estas dos ecuaciones, podemos deducir:

$$M(Z) = X(Z) - \sum_{i=0}^n b_i Z^{-i} M(Z)$$

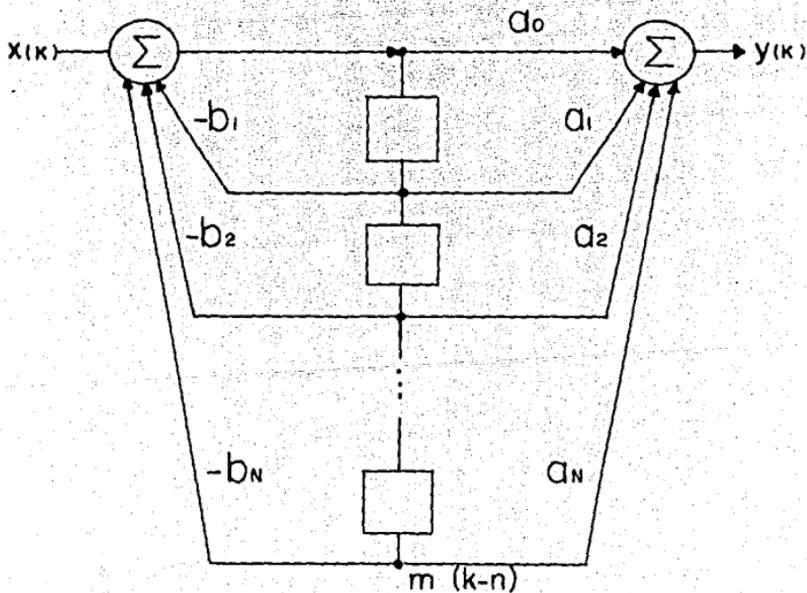
en el dominio del tiempo:

$$m(k) = x(k) - \sum_{i=1}^n b_i m(k-i)$$

y

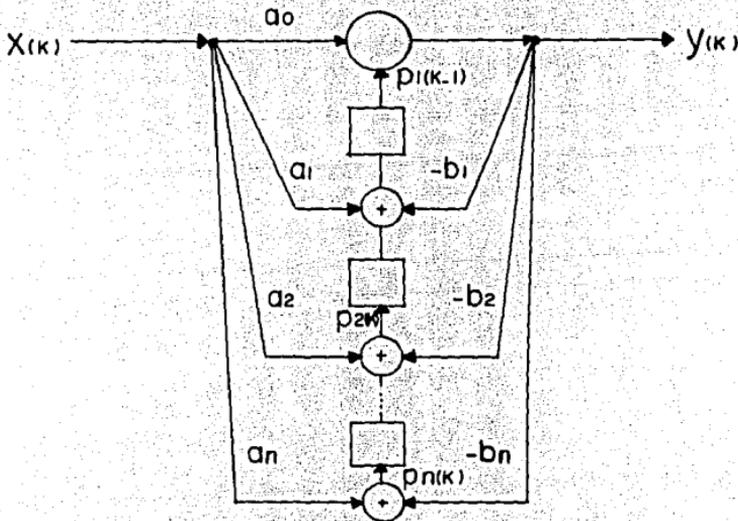
$$y(k) = \sum_{i=0}^n a_i m(k-i)$$

Las dos últimas ecuaciones definen la estructura directa primera. Abojo se muestra una configuración de la misma.



Estructura Directa Segunda

Esta segunda estructura se forma transponiendo la estructura directa primera. La estructura traspuesta se forma invirtiendo el flujo de señal en todas las ramas del diagrama de bloques.



Del diagrama a bloques se obtienen las ecuaciones para esta estructura:

$$P_i(k) = P_{i+1}(k-1) + a_i X(k) - b_i Y(k); \quad i=1, n-1$$

$$P_n(k) = a_n X(k) - b_n Y(k)$$

$$Y(k) = a_0 X(k) + P_1(k-1)$$

Estructura Directa Tercera

De la función de transferencia:

$$D(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}}$$

tenemos:

$$Y(Z) = \sum_{i=0}^n b_i Z^{-i} X(Z) - \sum_{i=0}^n a_i Z^{-i} Y(Z)$$

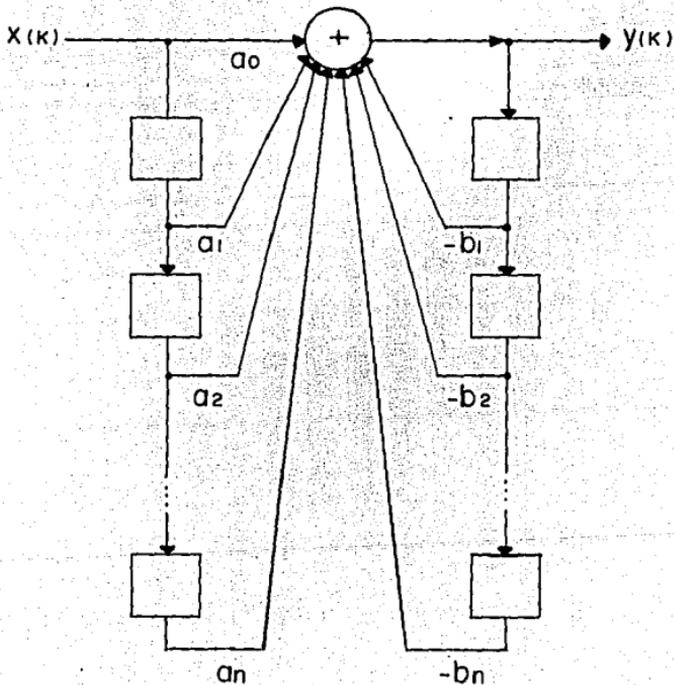
En consecuencia:

$$Y(Z) = \sum_{i=0}^n a_i Z^{-i} X(Z) - \sum_{i=1}^n b_i Z^{-i} Y(Z)$$

y en el dominio del tiempo:

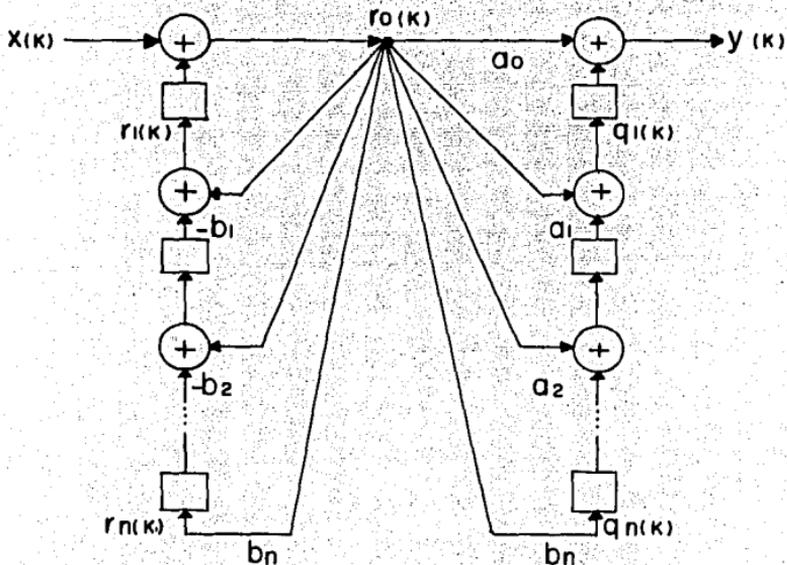
$$y(k) = \sum_{i=0}^n a_i x(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i y(k-i)$$

La última ecuación define a la estructura directa tercera, cuyo diagrama a bloques se muestra abajo. Nótese que la estructura tiene un sólo punto de suma, pero $2n$ elementos de retardo de tiempo.



Estructura Directa Cuarta

Esta cuarta estructura se forma transponiendo la estructura tercera, por ello tendrá un punto de distribución de señal y n ecuaciones diferencia.



Del diagrama obtenemos las ecuaciones:

$$r_0(k) = x(k) + r_1(k-1)$$

$$q_n(k) = a_n r_0(k)$$

$$r_n(k) = -b_n r_0(k)$$

$$q_i(k) = a_i x_0(k) + q_{i+1}(k-1); \quad i=1, n-1$$

$$r_i(k) = -b_i x_0(k) + r_{i+1}(k-1)$$

$$y(k) = a_0 x_0(k) + q_1(k-1)$$

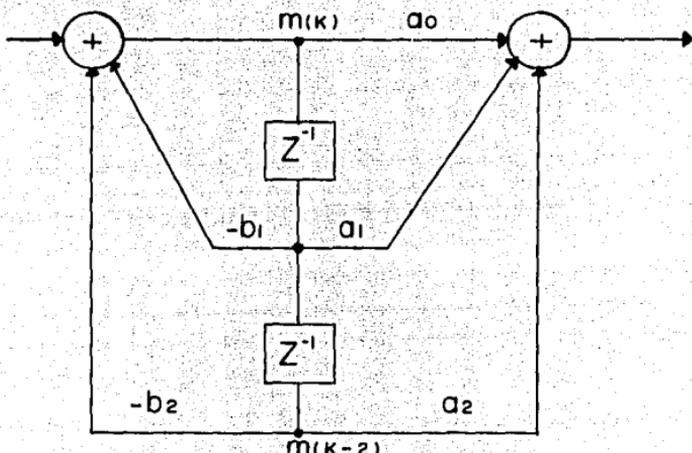
Las cuatro estructuras anteriores son para filtros digitales de n -ésimo orden; sin embargo, todas ellas son de coeficientes sensibles cuando n se hace muy grande. Esto es, un pequeño cambio de un coeficiente a_i ó b_i , para un n muy grande, causa cambios grandes en los ceros ó polos de $D(Z)$.

Para evitar los problemas de sensibilidad de coeficientes, la función de transferencia $D(Z)$ se realiza usualmente mediante módulos de segundo orden, en cascada o paralelo.

La función de transferencia para módulos de segundo orden es:

$$D(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}}{1 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}$$

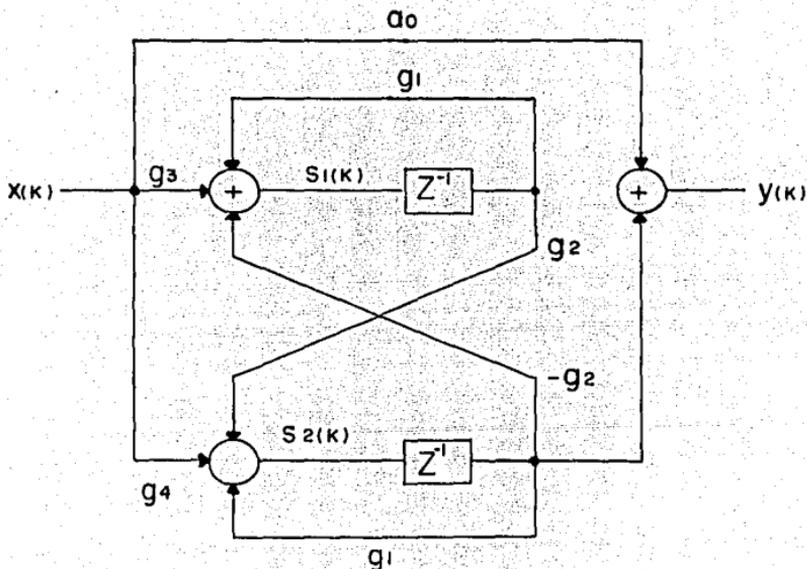
A continuación se muestra la primer estructura directa de segundo orden y sus respectivas ecuaciones.



$$m(k) = x(k) - b_1 m(k-1) - b_2 m(k-2)$$

$$y(k) = a_0 m(k) + a_1 m(k-1) + a_2 m(k-2)$$

Son posibles otras estructuras para módulos de segundo orden. La estructura acoplada en forma de cruz se usa para casos de pares de polos complejos. A continuación se muestra tal estructura su traspuesta y las ecuaciones respectivas.



$$y(k) = a_0 x(k) + S_2(k-1)$$

$$S_1(k) = \zeta_1 S_1(k-1) - \zeta_2 S_2(k-1) + \zeta_3 x(k)$$

$$S_2(k) = \zeta_1 S_2(k-1) - \zeta_2 S_1(k-1) + \zeta_4 x(k)$$

en donde los g_1 provienen de

$$D(z) = a_0 + \frac{\Lambda}{z+p} + \frac{\Lambda^*}{z+p^*}$$

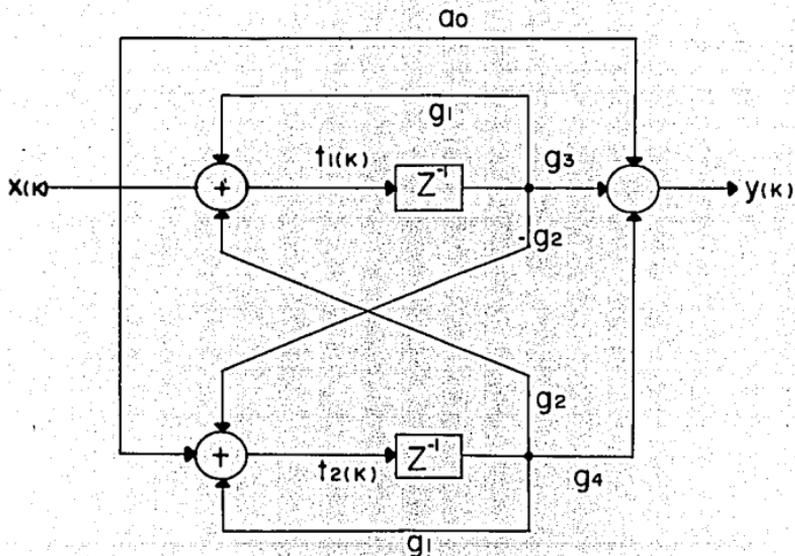
y

$$g_1 = -R_0(p)$$

$$g_2 = -Im(p)$$

$$g_3 = 2Im(A)$$

$$g_4 = 2Re(A)$$



$$y(k) = a_0 x(k) + g_3 t_1(k-1) + g_4 t_2(k-1)$$

$$t_1(k) = g_1 t_1(k-1) + g_2 t_2(k-1)$$

$$t_2(k) = x(k) + g_1 t_2(k-1) - g_2 t_1(k-1)$$

11.33 REALIZACION DE FILTROS DIGITALES EN CASCA DA.

Para evitar, como se indicó anteriormente, los problemas de sensibilidad de coeficientes, $D(Z)$ puede realizarse utilizando una cascada de módulos de segundo orden.

Descomponiendo en factores la función de transferencia:

$$D(Z) = \frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_{j0} + \alpha_{j1}Z^{-1} + \alpha_{j2}Z^{-2})}{\prod_{j=1}^n (1 + \alpha_{j3}Z^{-1} + \alpha_{j4}Z^{-2})}$$

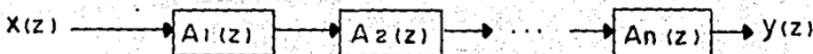
en donde n es el menor entero mayor o igual a $n/2$. Si los factores del denominador y numerador están emparejados y los módulos están ordenados en la cascada, entonces:

$$D(Z) = \prod_{j=1}^n A_j(Z)$$

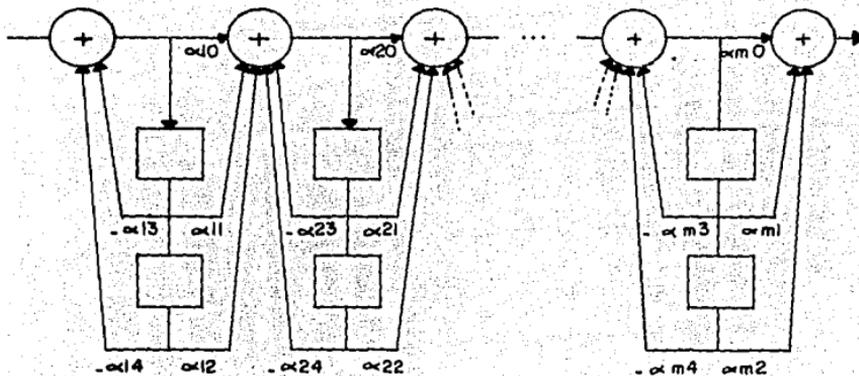
en donde:

$$A_j(Z) = \frac{\alpha_{j0} + \alpha_{j1}Z^{-1} + \alpha_{j2}Z^{-2}}{1 + \alpha_{j3}Z^{-1} + \alpha_{j4}Z^{-2}}$$

abajo se muestra la cascada de la ecuación última.



Los módulos de segundo orden pueden realizarse con las estructuras directas ó acopladas en cruz. Si se utiliza la primera estructura directa, se obtiene el diagrama en cascada mostrado a continuación.



11.3C REALIZACION DE FILTROS DIGITALES EN PARALELO

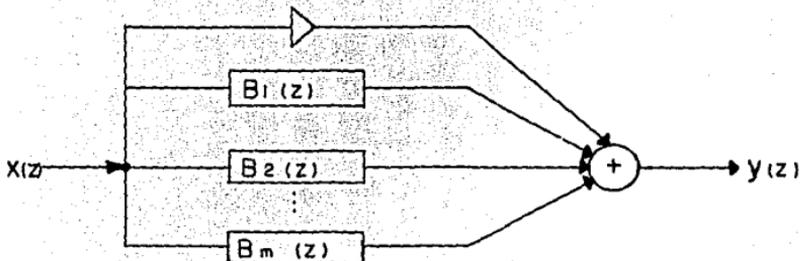
Un segundo método para evitar los problemas de sensibilidad de coeficientes de la función de transferencia, es descomponer en factores el denominador de $D(Z)$ y realizar una descomposición en fracciones parciales para obtener.

$$D(Z) = B_0 + \sum_{l=1}^n B_l(z)$$

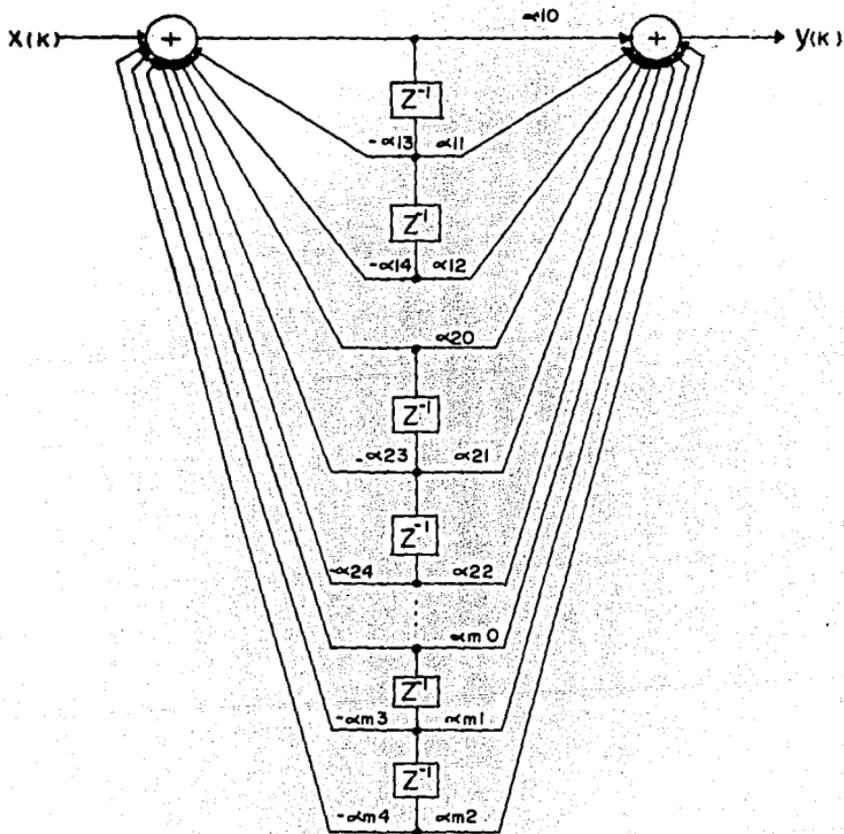
en donde:

$$B_l(z) = \frac{B_{1l}Z^{-1} + B_{12}Z^{-2}}{B_{13}Z^{-1} + B_{14}Z^{-2}}$$

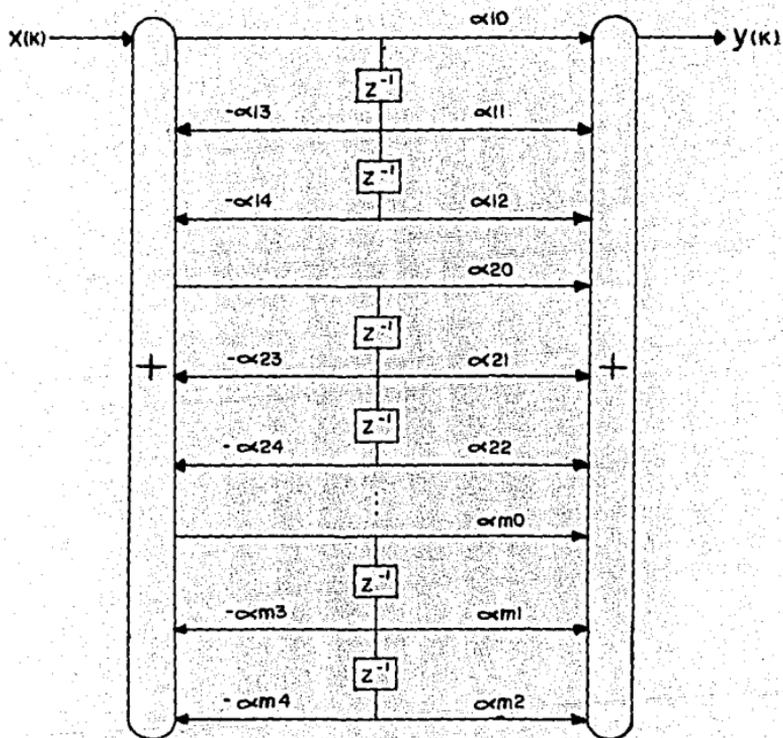
A continuación se muestra la estructura paralela



Cualquier estructura de segundo orden puede utilizarse para realizar los bloques de la figura anterior. Si se utilizan estructuras directas, se podrán compartir algunos elementos como fué el caso de la realización en cascada. A continuación se indican solo la primer estructura paralela directa.



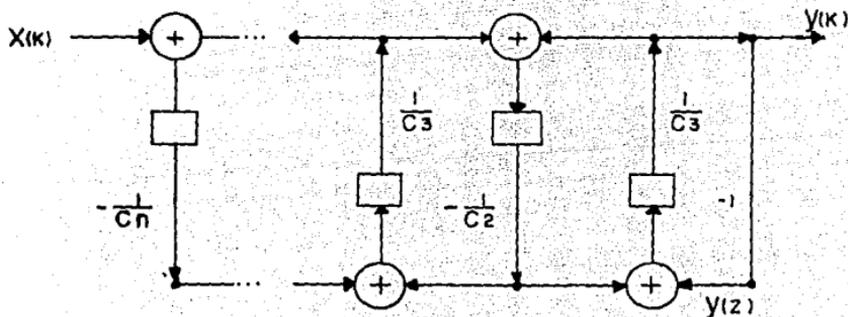
Con objeto de visualizar mejor el diagrama a bloques, principalmente para m 's grandes, los sumadores pueden extenderse hacia abajo, como se muestra a continuación.



En la misma forma pueden realizarse el resto de los filtros en configuración paralelo.

III.3D REALIZACION DE FILTROS DIGITALES EN ESCALERA

Esta realización se basa en la configuración mostrada abajo.



De la figura:

$$Y(z) = H_1(z) Y(z) + H_2(z) X(z)$$

donde, suponiendo $N=4$:

$$H_1(z) = \frac{N_1(z)}{D_1(z)} = \frac{1}{C_1 z + \frac{1}{C_2 z + \frac{1}{C_3 z + \frac{1}{C_4 z}}}} = \frac{C_4 C_3 C_2 z^3 + (C_4 + C_2) z}{C_4 C_3 C_2 C_1 z^4 + (C_4 C_3 + C_2 C_1 + C_2 C_1) z^2 + 1}$$

y

$$H_2(Z) = \frac{1}{D_1}(Z)$$

Como puede apreciarse claramente en la figura:

$$\dot{Y}(Z) = -Y(Z)$$

tenemos:

$$Y(Z) = H_1(Z) (-Y(Z)) + H_2(Z) X(Z)$$

$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{H_2(Z)}{1 + H_1(Z)}$$

para cualquier valor de N:

$$H_1(Z) = \frac{N_1(Z)}{D_1(Z)} = \frac{1}{C_1 Z + \frac{1}{C_2 Z + \frac{1}{\dots \frac{1}{C_n Z}}}}$$

$$H_2(Z) = \frac{(-1)^k}{D_1(Z)}$$

Considerando la función de transferencia

$$H(Z) = \frac{(-1)^k}{D(Z)} = \frac{(-1)^k}{1 + \dot{D}(Z)}$$

$$\dot{D}(Z) = \sum_{i=1}^N b_i Z^i$$

Podemos escribir:

$$H(Z) = \frac{(-1)^k}{D(Z)_{\text{par}} + \dot{D}(Z)_{\text{impar}}}$$

donde $D(Z)_{\text{par}}$ y $D(Z)_{\text{impar}}$ denotan respectivamente, la parte par y la parte impar del denominador $D(Z)$ de la función de transferencia $H(Z)$.

Comparando la ecuación anterior con:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_2(z)}{1+H_1(z)}$$

pueden realizarse las siguientes identificaciones:

$$H_1(z) = \begin{cases} \frac{D(z)_{\text{par}}}{D(z)_{\text{impar}}} & \text{para } N \text{ impar} \\ \frac{D(z)_{\text{impar}}}{D(z)_{\text{par}}} & \text{para } N \text{ par} \end{cases}$$

$$H_2(z) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{D(z)_{\text{impar}}} & \text{para } N \text{ impar} \\ \frac{(-1)^k}{D(z)_{\text{par}}} & \text{para } N \text{ par} \end{cases}$$

La síntesis puede extenderse a cualquier función de transferencia de la forma:

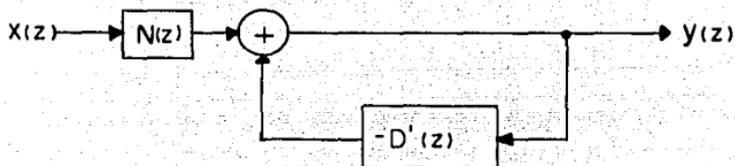
$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Donde:

$$N(z) = \sum_{f=0}^N a_f z^f$$

y

$$D(z) = 1 + D(z)$$



Modificando la configuración básica como se ilustra abajo, para $n=4$ se tiene

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^4 \frac{d_i n_i(z)}{D(z)}$$

Donde:

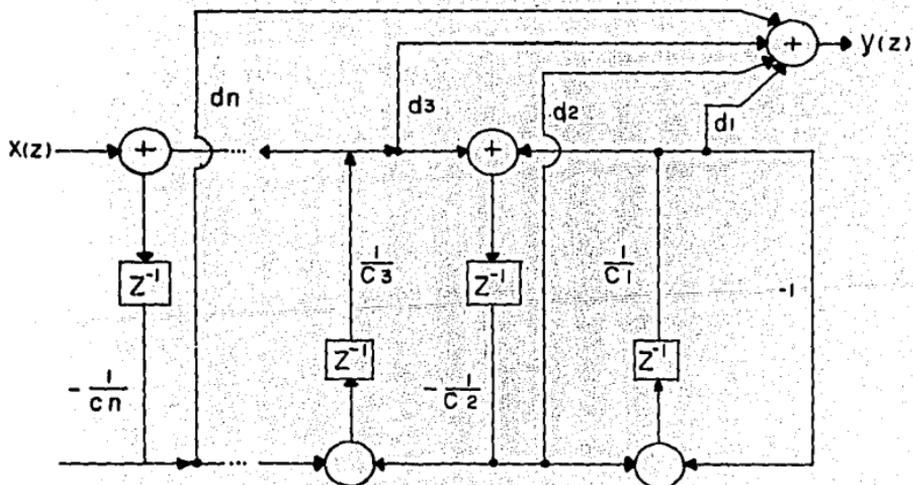
$$\begin{aligned} n_1(z) &= 1 \\ n_2(z) &= C_1 z + 1 \\ n_3(z) &= -(C_1 C_2 C_3 z^3 + C_2 z + 1) \\ n_4(z) &= -(C_1 C_2 C_3 z^3 + C_2 C_3 z^2 + (C_1 + C_3) z + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Si } N(z) = \sum_{i=1}^4 d_i n_i(z)$$

Podemos arreglar un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} -c_1 c_2 c_3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 c_3 & -c_1 c_2 & 0 & 0 \\ -(c_1 + c_3) & -c_2 & c_1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

cuya solución nos da los valores necesarios de d_1, d_2, \dots



Ejemplo: Realizar la función de transferencia.

$$H(Z) = \frac{10^{-2}(-3.517 + 0.665Z + 0.605Z^2 - 3.517Z^3)}{1 - 3.266Z + 3.739Z^2 - 1.53Z^3}$$

usando el método de escalera.

Afectando el numerador:

$$H(Z) = \frac{2.299}{2.299} 10^{-2} (-3.517 + 0.665Z + 0.665Z^2 - 3.517Z^3)$$

$$H(Z) = \frac{10^{-2}(-3.517 + 0.665Z + 0.665Z^2 - 3.517Z^3)}{1 - 3.266Z + 3.739Z^2 - 1.53Z^3}$$

$$H(Z) = \frac{0.02299[-1.53 + 0.289Z + 0.289Z^2 - 1.53Z^3]}{1 - 3.266Z + 3.739Z^2 - 1.53Z^3}$$

aquí:

$$H(Z) = \frac{0.02299[1 - 3.266Z + 3.739Z^2 - 1.53Z^3] + 0.2299[-2.53 + 3.555Z - 3.45Z^2]}{1 - 3.266Z + 3.739Z^2 - 1.53Z^3}$$

y

$$H(Z) = 0.02299 + \frac{-0.0582 + 0.0817Z - 0.0793Z^2}{1 - 3.266Z + 3.739Z^2 - 1.53Z^3}$$

o bien:

$$H(Z) = 0.02299 + H_1(Z)$$

Dado que el orden de $H_1(Z)$ es impar, podemos escribir:

$$H_1(Z) = -\frac{3.739Z^2 + 1}{1.53Z^3 + 3.266Z}$$

luego:

$$H_1(Z) = \frac{1}{1.53Z^3 + 3.266Z - 3.739Z^2 - 1}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{-0.4092Z \left[\frac{1.53Z^3}{0.4092Z} + \frac{3.266Z}{0.4092Z} \right] + 3.739Z^2 + 1}$$

4

$$H_1(Z) = \frac{1}{-0.4092Z \left[\frac{3.739Z^2 + 7.9814}{3.739Z^2 + 1} \right]}$$

$$H_1(Z) = \frac{1}{-0.4092Z \frac{[3.739Z^2 + 1]}{3.739Z^2 + 1} - \frac{0.4092Z[6.9814]}{3.739Z^2 + 1}}$$

$$H_1(Z) = \frac{1}{-0.4092Z - \frac{2.8567Z}{3.739Z^2 + 1}}$$

Donde:

$$C_1 = -0.4091$$

$$C_2 = -1.3091$$

$$C_3 = -2.8561$$

Para N=3:

$$n_1(Z) = -1$$

$$n_2(Z) = -1(C_1Z + 1)$$

$$n_3(Z) = C_1C_2Z^2 + C_2Z + 1$$

por lo que d_1 , d_2 y d_3 están dados por:

$$\begin{Bmatrix} C_1C_2 & 0 & 0 & d_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 & d_2 \\ 1 & -1 & -1 & d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix}$$

ó:

$$d_3 = \frac{a_2}{C_1 C_2} = \frac{-0.0793}{(-0.4092)(-1.309)} = -0.148$$

$$d_2 = \frac{d_3 C_2 - a_1}{C_1} = \frac{(-0.148)(-1.309) - 0.0817}{-0.4092} = -0.274$$

$$d_1 = d_3 - d_2 - d_0 = -0.148 + 0.274 + 0.0582 = 0.184$$

III.4 DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

Al igual que en los filtros analógicos, la aproximación en el diseño de los filtros digitales es el proceso mediante el cual es obtenida una función de transferencia que satisfaga especificaciones preestablecidas. Los métodos de aproximación entre los filtros recursivos y no recursivos difieren radicalmente. Esta sección se dividirá en tres partes, la primera de las cuales nos permitirá obtener filtros recursivos a partir de filtros analógicos y las dos restantes, obtener, respectivamente, filtros recursivos y no recursivos en forma directa.

Previo al estudio del diseño, es necesario presentar algunos conceptos básicos de una herramienta necesaria para la descripción y el diseño de los filtros digitales.

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS FILTROS DIGITALES.

Existe un grupo especial de funciones que tienen por peculiaridad al ser poco afectadas cuando atraviesan por un filtro, es decir, se trata de funciones que son escaladas por una constante cuando pasan por el filtro. Una de tales funciones es llamada eigenfunción y la constante de escalamiento un eigenvalor.

La función digital e_k es un eigen-función de un filtro digital si y sólo si la salida resultante de la aplicación de e_k a la entrada del filtro es la misma función multiplicada por una constante, llamada eigenvalor y denotada por λ , misma que es una función de la eigenfunción particular del filtro.

Debido a que la entrada y la salida están relacionadas por la sumatoria de convolución de la respuesta impulsiva h_k , una eigenfunción debe satisfacer la relación.

$$\lambda e_k = \sum_{t=-\infty}^{\infty} h_t e_{k-t}$$

Descartando lógicamente a las funciones impulso, escalón y rampas como eigenfunciones, ya que conocemos cual es la respuesta del filtro a tales entradas, podemos probar con una señal cosenoidal.

$$Y_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cos[\omega(k-i)]$$

Dado que

$$\cos[\omega(k-i)] = \cos(\omega k) \cos(\omega i) + \text{sen} \omega k \text{sen} \omega i$$

tenemos

$$Y_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cos(\omega k) \cos(\omega i) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \text{sen}(\omega k) \text{sen}(\omega i)$$

y por lo cual:

$$Y_k = \cos(\omega k) \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cos(\omega i) + \text{sen}(\omega k) \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \text{sen}(\omega i)$$

Aunque el primer término de la salida cumple con la definición de eigenfunción, ya que es la entrada $\cos(\omega k)$ multiplicada por la sumatoria, la cual está determinada por la respuesta impulsiva del filtro y la secuencia de la entrada y no varía con el tiempo, el segundo término es una onda seno con frecuencia ω y amplitud determinada por la frecuencia y la respuesta impulsiva del filtro, por lo que la función coseno no es una eigenfunción. Por las mismas razones la función seno tampoco lo es. Una suma de senos y cosenos tampoco lo es, ya que:

$$a \cos(\omega k) + b \text{sen}(\omega k) = c \cos(\omega k + \phi)$$

Podemos, sin embargo, usar

$$\cos(\omega k) + j \text{sen}(\omega k) = e^{j\omega k}$$

con lo que:

$$\frac{Y}{k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{j(\omega(k-1))}$$

$$\frac{Y}{k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{j\omega k} e^{-j\omega}$$

y dado que $e^{j\omega k}$ es un término independiente del índice de la sumatoria, la salida es:

$$Y_k = e^{j\omega k} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-j\omega} \right)$$

por lo que el exponencial complejo es una eigen-función para todos los filtros digitales. El eigen-valor correspondiente es la cantidad entre corchetes y se llama respuesta en frecuencia, denotada por $H(\omega)$. De este modo, la respuesta en frecuencia ha resultado ser una suma ponderada de la respuesta impulsiva del filtro:

$$H(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-j\omega}$$

para un filtro no-recursivo se tiene:

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{j=0}^N a_j e^{j(\omega(k-1))} \\ &= e^{j\omega k} \sum_{j=0}^N a_j e^{-j\omega} \end{aligned}$$

donde $e^{j\omega k}$ es la eigen-función y la sumatoria el eigen-valor, ó respuesta en frecuencia del filtro no-recursivo:

$$H(\omega) = \sum_{i=-n}^n a_i e^{-j\omega i}$$

para un filtro recursivo, tenemos:

$$y_k = \sum_{i=-n}^n a_i e^{j\omega(k-i)} + \sum_{i=1}^n b_i y_{k-i}$$

expresando la salida en términos de la entrada y la respuesta en frecuencia:

$$Y_k = H(\omega) e^{j\omega k}$$

y

$$Y_{k-1} = H(\omega) e^{j\omega(k-1)}$$

por lo que

$$H(\omega) e^{j\omega k} = \sum_{i=-n}^n a_i e^{j\omega(k-i)} + \sum_{i=1}^n b_i H(\omega) e^{j\omega(k-i)}$$

$$H(\omega) e^{j\omega k} = e^{j\omega k} \sum_{i=-n}^n a_i e^{-j\omega i} + e^{j\omega k} \sum_{i=1}^n b_i H(\omega) e^{-j\omega i}$$

$$H(\omega) \left[1 - \sum_{i=1}^n b_i e^{-j\omega i} \right] = \sum_{i=-n}^n a_i e^{-j\omega i}$$

$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=-n}^n a_i e^{-j\omega i}}{1 - \sum_{i=1}^n b_i e^{-j\omega i}}$$

que es la respuesta en frecuencia para un filtro digital recursivo, misma que queda determinada por la suma ponderada de los coeficientes recursivos y no recursivos. Observe que si los coeficientes recursivos son cero, el resultado es la respuesta en frecuencia para el filtro no recursivo.

En términos de senos y cosenos:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{l=-n}^n a_{l} \cos(\omega l) - j \sum_{l=-n}^n a_{l} \sin(\omega l)}{1 - \sum_{l=1}^n b_{l} \cos(\omega l) + j \sum_{l=1}^n b_{l} \sin(\omega l)}$$

La respuesta en frecuencia es una función compleja de ω que posee parte real e imaginaria, por lo que la respuesta en frecuencia se puede separar en una respuesta de magnitud y una de fase con:

$$|H(\omega)| = \sqrt{\text{Re}(H(\omega))^2 + \text{Im}(H(\omega))^2}$$

y

$$\angle(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(H(\omega))}{\text{Re}(H(\omega))}$$

III.4A DISEÑO DE FILTROS DE RESPUESTA AL IMPULSO INFINITA A PARTIR DE FILTROS ANALÓGICOS.

Pueden obtenerse aproximaciones para filtros recursivos a partir de aproximaciones de filtros analógicos, utilizando los métodos siguientes:

- 1.- Método de la transformada Z-Matched.
- 2.- Método de invariancia al impulso
- 3.- Método de la transformación bilineal.

Para que un filtro recursivo sea realizable, debe cumplirse que la función de transferencia satisfaga lo siguiente:

- a) Debe ser una función racional de Z con coeficientes reales.
- b) Sus polos deben caer en el círculo unitario del plano z.
- c) El grado del polinomio del numerador debe ser igual o menor al grado del polinomio del denominador.

Los coeficientes deben ser reales con el fin de que las entradas y salidas de las unidades de retardo de tiempo, sumadores y multiplicadores puedan ser números reales. Los puntos b y c asegurarán un filtro estable y causal.

Método de la Transformada Z-Matched

En este procedimiento de diseño, los polos y ceros de la función de transferencia H(s) son mapeados directamente en los polos de la función de transferencia H(Z), haciendo una simple sustitución. Un polo ó un cero es un factor tal que:

$$(s+a) - (1-e^{-aT}z^{-1})$$

Es decir, un polo(cero) analógico en $s=-a$, mapea un polo (cero) digital en

$$z=e^{-aT}$$

Por ejemplo, si fuera el caso transformar un polo real simple:

$$\frac{1}{s+a}$$

deberá sustituirse de acuerdo al procedimiento

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} \text{ - muestreo - } e^{-anT}$$

$$e^{-anT} = \text{Trans. } z \text{ - } e^{-anT}$$

Para términos complejos se sigue un razonamiento similar y se obtiene:

$$(s+a-jb) \rightarrow (1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1})$$

Por ejemplo, considere la función de transferencia:

$$\frac{HS^4}{\prod_{i=1}^2 (S-P_i)(S-P_i^*)}$$

donde:

$$H = 0.9885531$$

$$P_1 = -2.047535 + j1.492958$$

$$P_1^* = -2.047535 - j1.492958$$

la cual representa un filtro chebychev paso altas. Obtener una función de transferencia discreta en el tiempo empleando el método de la transformada Z-Matched. Usar una frecuencia de muestreo de 10 rad/seg.

Solución: La función de transferencia discreta en el tiempo es de la forma:

$$H_0(s) = (z+1)^L + \frac{H \sum_{l=1}^N (z - e^{sTl})}{\sum_{l=1}^N (z - e^{sTl})}$$

donde L es entero. El valor L es generalmente cero para filtros paso altas, de acuerdo a la tabla siguiente:

TIPO DE FILTRO	LPF	HPF	BPF	SBF
TODOS LOS POLOS	N	0	N/2	0
ELIPTICO N IMPAR	1	0	1 PARA N/2 IMPAR	0
ELIPTICO N PAR	0	0	0 PARA N/2 PAR	0

De aquí, puede arreglarse la función de transferencia como:

$$H_0(z) = H \frac{(1 - 2z + z^2)^2}{\prod_{j=1}^2 (B_{0j} + B_{1j}z + z^2)}$$

$$B_{01} = 7.6305 \times 10^{-2}$$

$$B_{02} = 6.047409 \times 10^{-1}$$

$$B_{11} = -3.267 \times 10^{-1}$$

$$B_{12} = -7.608 \times 10^{-1}$$

$$H = 2.0763 \times 10^{-1}$$

Método de la invariancia al impulso

Como su nombre lo indica, el procedimiento de diseño está basado en la respuesta impulsiva $h(t)$ de un filtro continuo en el tiempo. Para una entrada impulso unitario $x(t) = \delta(t)$, su transformada de Laplace a la salida es:

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s)$$

definiendo a la salida $y(t)$, causada por la entrada de un impulso unitario, como $h(t)$ tenemos:

$$y(t) = h(t) = L^{-1}[H(s)]$$

El método de diseño de invariancia al impulso consiste simplemente en hacer que los valores de la respuesta impulsiva $h(nT)$ del filtro digital sean iguales a los valores muestreados de la respuesta impulsiva del filtro analógico, esto es:

$$h(nT) = h(t) |_{t=nT}$$

y la función de transferencia discreta (digital) es:

$$\{[h(nT)] = H(z)$$

Nótese que la función de transferencia digital $H(z)$ es la transformada Z de la respuesta impulsiva muestreada $h(nT)$ mientras que la función de transferencia $H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta impulsiva $h(t)$.

Este procedimiento se puede generalizar mostrando que $H(z)$ puede ser obtenida directamente de $H(s)$, sin tener que encontrar a $h(t)$ y en consecuencia a $h(nT)$.

Consideremos un filtro analógico con N polos diferentes, el cual tiene una función de transferencia en el dominio de s representada como una suma de fracciones parciales

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{s - d_k}$$

y cuya respuesta impulsiva es:

$$h(t) = \sum_{k=1}^N C_k e^{d_k t}$$

Si la respuesta es muestreada cada T segundos ($t=nT$), obtenemos la respuesta muestreada:

$$h(nt) = \sum_{k=1}^N C_k e^{d_k nT}$$

Finalmente, tomamos la transformada z de la expresión anterior, para hallar la función de transferencia discreta.

$$H(z) = \{ [h(nT)] \} = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}}$$

Al revisar este procedimiento, se ve que pueden omitirse los pasos para hallar $h(t)$ y $h(nT)$ y $H(z)$ puede encontrarse directamente de $H(s)$:

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{s - d_k} = H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}}$$

Así, las constantes de la expansión en fracciones parciales C_k , son calculadas para $H(s)$ y escritas en $H(z)$ en la forma de la ecuación anterior.

Este método es utilizado para el caso de filtros pasa bajas y pasa banda, Butterworth, Bessel ó Chebyshev.

Método de la transformación bilineal.

Esta transformación consiste en la sustitución de s en $H(s)$ por:

$$\frac{(z-1)}{(z+1)}$$

para obtener $H(z)$, esto es:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}}$$

La transformación:

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

puede escribirse como

$$s(z+1) - (z-1) = 0$$

donde se observa que es lineal en s y en z , ó bilineal, en s y z , razón por la cual es conocida como transformación bilineal.

Despejando a z de la transformación se tiene:

$$z[s-1] = -(s+1)$$

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

Sustituyendo a s por :

$$\sigma + j\omega.$$

$$z = \frac{1 + \sigma + j\omega}{1 - \sigma - j\omega}$$

y representando a z en forma exponencial

$$z = e^{j\varphi}$$

se observa que:

$$r = |z| = \frac{\sqrt{(1+\sigma)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(1-\sigma)^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1+\sigma}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{1-\sigma}\right)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1+\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1-\sigma}\right)$$

De lo cual se deduce lo siguiente:

a) para

$$\begin{aligned} \sigma &> 0 \\ r &< 1 \end{aligned}$$

el lado derecho del plano s mapea el exterior del círculo unitario del plano z .

b) para

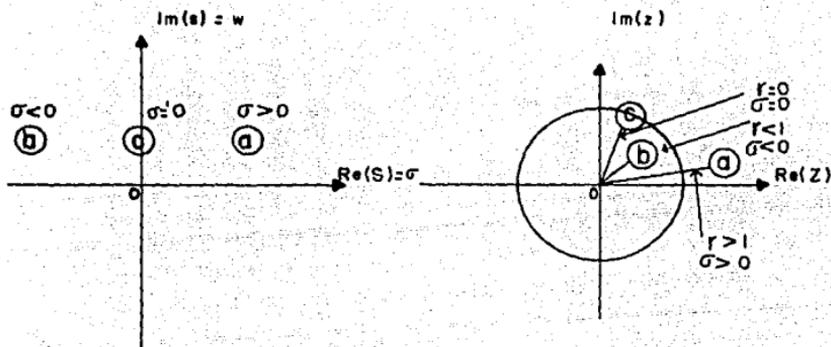
$$\begin{aligned} \sigma &< 0 \\ r &< 1 \end{aligned}$$

el lado izquierdo del plano s mapea el interior del círculo unitario del plano z .

c) para

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

el eje imaginario mapea el contorno del círculo unitario.



Esta transformación, por lo tanto produce un filtro digital estable a partir de un filtro analógico y que existe una relación no-lineal entre las frecuencias analógicas w y las digitales θ , para $s=jw$ (eje imaginario) y $z=e^{j\theta}$, (círculo unitario), la transformación bilineal queda expresada como:

$$j\omega = \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1} = \frac{e^{j\frac{\theta}{2}}(e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}})}{e^{j\frac{\theta}{2}}(e^{j\frac{\theta}{2}} + e^{-j\frac{\theta}{2}})}$$

$$j\omega = \frac{j \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = j \tan \frac{\theta}{2}$$

de este modo el eje imaginario del plano s queda relacionado con el círculo unitario del plano z por la siguiente ecuación:

$$\omega = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

La transformación bilineal y la relación no lineal entre las frecuencias analógicas y digitales proveen los elementos necesarios para el procedimiento de diseño siguientes:

1.- Dadas las frecuencias ω_i , $i=1,2,\dots,r$, determinar las frecuencias digitales correspondientes $\theta_i = \omega_i T$, $i=1,2,3,\dots,r$.

2.- Usando la ecuación:

$$\omega = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

se determinan las nuevas frecuencias analógicas:

$$\omega_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right); \quad i=1,2,\dots,r$$

3.- Diseñar un filtro analógico con la función de transferencia $H(s)$, dada por las especificaciones en las frecuencias predeformadas, ω_i , $i=1,2,\dots,r$.

4.- La función de transferencia del filtro digital se determina a partir de:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}}$$

III.4B DISEÑO DE FILTROS DE RESPUESTA AL IMPULSO FINITA

Diseño de Filtros por Series de Fourier.

La respuesta en frecuencia de un sistema discreto lineal e invariante en tiempo es periódica con periodo 2π , es decir,

$$H(e^{j\theta}) = H(e^{j(\theta + 2\pi k)})$$

con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$; y que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ y la respuesta impulsiva $h(n)$ están relacionadas por:

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\theta n}$$

En términos de la señal analógica muestreada con un intervalo de muestreo de T , tenemos:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega n T}$$

para un sistema causal no-recursivo, como el descrito por la ecuación:

$$y(n) = \sum_{k=0}^L b_k x(n-k)$$

sabemos que cuando la entrada es

$$x(n) = e^{jn\theta}$$

la respuesta en estado estacionario queda especificada por:

$$y_{ss}(n) = e^{jn\theta} (H e^{j\theta})$$

donde $e^{j\theta}$ es la eigenfunción y $H(e^{j\theta})$ es el eigen-valor asociado. Relacionando las tres últimas ecuaciones, tenemos:

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=0}^L b_n e^{-jn\theta}$$

para un filtro causal, es decir, $h(n)=0$ para $n<0$, con un número finito de retardos L , tenemos:

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=0}^L h(n) e^{-jn\theta}$$

comparando las dos últimas ecuaciones, se observa que:

$$h(n) = b_n$$

relación que establece que los valores de la respuesta impulsiva $h(n)$ son iguales a los coeficientes b_n en la ecuación de diferencia del sistema para un filtro no-recursivo.

Al diseñar filtros se inicia con la especificación de la respuesta en frecuencia deseada y la determinación de los coeficientes del filtro $b_0, b_1, b_2, \dots, b_L$. La expresión.

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\theta}$$

da la relación para la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ en términos de los coeficientes del filtro $h(n)$; sin embargo, requerimos de una expresión para los coeficientes del filtro en términos de la respuesta en frecuencia, expresión que puede ser:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} H(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Estas dos ecuaciones constituyen el par transformado de la serie de Fourier; esta es, si conocemos $H(e^{j\theta})$, la otra parte del par podemos determinarla usando la ecuación siguiente, con $\theta_0 = -\pi$.

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\theta n} \quad \rightarrow \quad h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$$

La ecuación para $H(e^{j\theta})$ es conocida como expresión de síntesis debido a que la respuesta en frecuencia es sintetizada a partir de la suma de los coeficientes de un número infinito de exponenciales complejo $e^{-j\theta n}$, $n = \pm 0, \pm 1, \dots$

Por otro lado la ecuación para los coeficientes de $h(n)$ es una expresión de análisis, y el área bajo la curva determina las $h(n)$ para todos los valores correspondientes de n . Para una señal analógica muestreada el par puede denotarse por:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega n T} \quad \rightarrow \quad h(nT) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} (e^{j\omega T})^{j\omega n T} d\omega$$

donde $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia de muestreo en $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

De este modo, el diseño de un filtro digital lo podemos realizar con el siguiente procedimiento.

- 1.- Determinar la respuesta en frecuencia para $H(e^{j\theta})$, la cual es obtenida para la aplicación particular del filtro.
- 2.- Determinar la respuesta impulsiva $h(n)$, la cual produce la respuesta en frecuencia deseada;
- 3.- Modificar la respuesta impulsiva para obtener un filtro práctico (truncar $h(n)$ a un número razonable de términos)
- 4.- Implementar el filtro digital.

Teniendo la respuesta en frecuencia.

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\theta m}$$

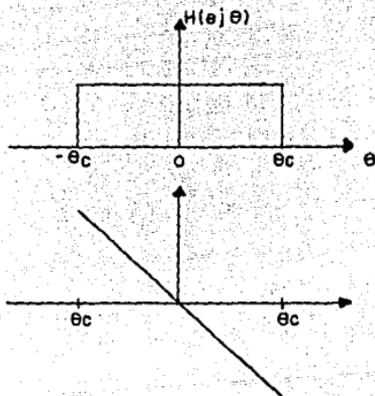
y se quiere determinar la respuesta impulsiva $h(n)$, se encuentra que los coeficientes de Fourier son iguales a los valores de la respuesta impulsiva:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta$$

en forma general:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} H(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta$$

Tomemos la característica del filtro ideal pasabajos visto en el capítulo anterior.



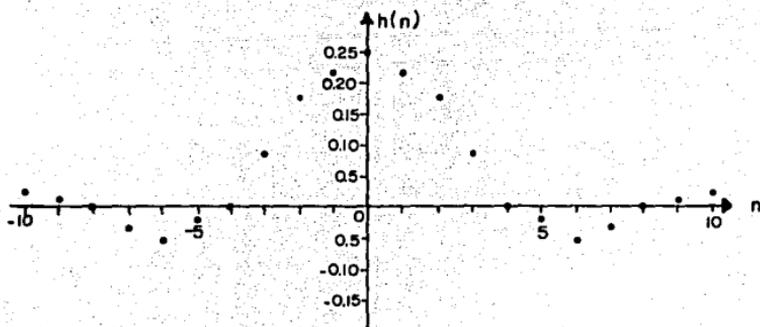
Aquí la magnitud es una constante $M=k$ y la fase es lineal ($p=1\theta$) en la banda de paso. La característica de fase lineal es debida a un retardo de 1 muestras en la respuesta en tiempo del filtro, sin embargo, por simplicidad en el análisis, se asumirá un retardo de cero ($l=0$).

Usando la ecuación indicada anteriormente se halla:

$$h_{LFF}(n) = \frac{k}{\pi n} \text{sen}(n\theta_0) \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

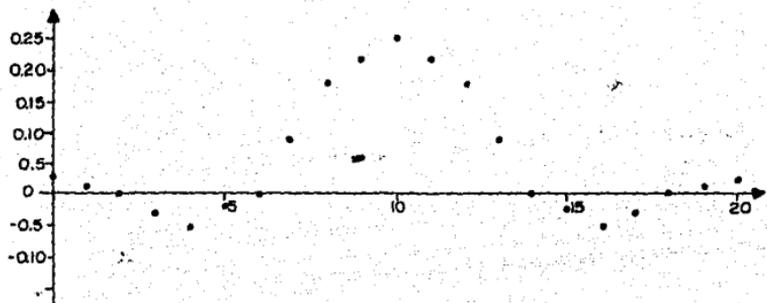
que es la expresión para los coeficientes del filtro pasa bajas misma que nos indica que se requiere un número infinito de términos para implementar el diseño, lo cual es impráctico, por lo que es conveniente truncar la expresión para $h(n)$ a un número razonable de valores para n .

Tomando $n=10$, y $k=1$ (ganancia=1): $\theta_0 = \pi/4$ (frecuencia de corte), $(h(0)=k\theta_0/\pi)$.

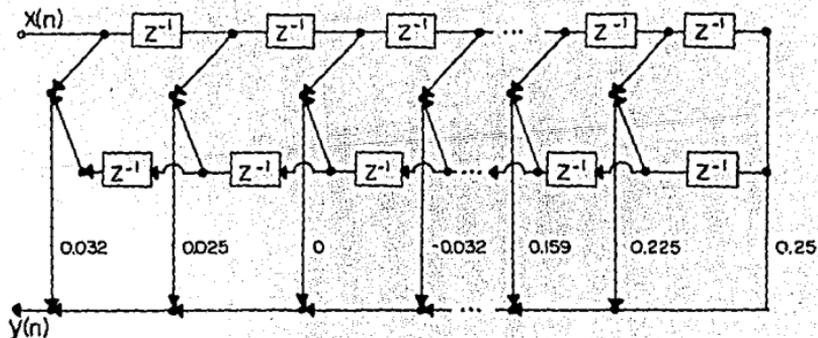


Se observa claramente que se trata de un filtro no-causal, ya que existen términos para $n < 0$, problema que se resuelve retardando los coeficientes de la siguiente manera:

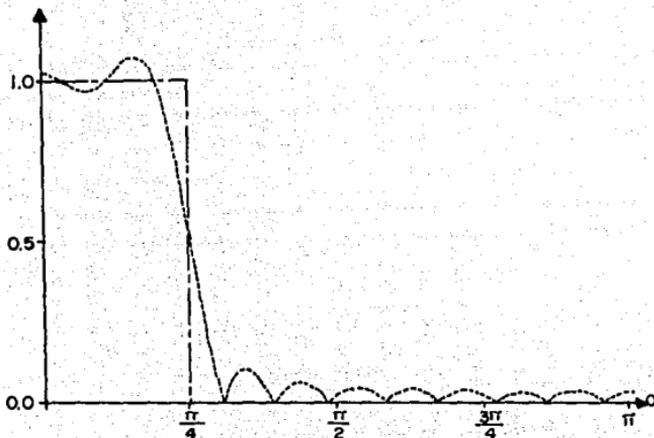
$$h_{LFF}(n) = \frac{k}{\pi(n-1)} \text{sen}[(n-1)\theta_0], \quad n=0, 1, 2, \dots, 20$$



La realización para este filtro se muestra abajo.



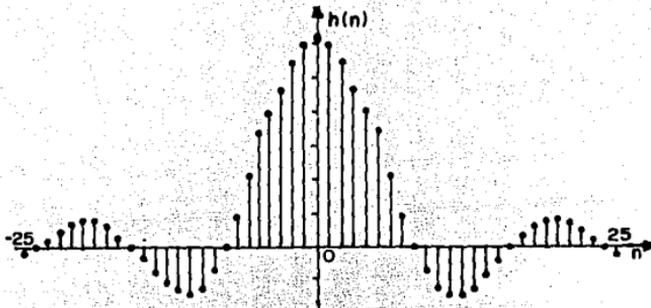
La gráfica de magnitud para 21 coeficientes se muestra abajo, comparando con la respuesta ideal.



Diseño con ayuda de ventanas.

En la sección anterior, se diseñó con series de Fourier truncando la serie hasta cierto número de coeficientes. Puede truncarse una serie infinita de términos con la ayuda de una función "ventana", es decir, como si los coeficientes fueran vistos a través de una ranura y sólo se utilizaron los coeficientes "vistos" para diseñar el filtro.

Suponga por ejemplo la gráfica siguiente:



donde se muestran los coeficientes para $-25 \leq n \leq 25$ graficando con una ventana rectangular de manera que:

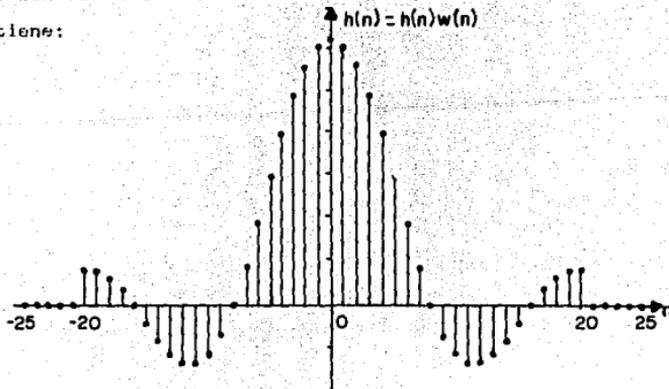
$$h(n) = h(n) \cdot \omega(n)$$

donde:

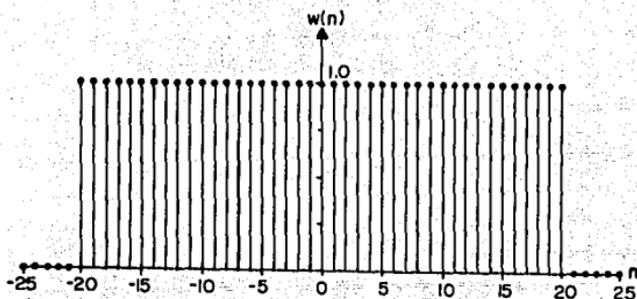
$$\omega(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq I(I=20) \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

y $h(n)$ son los nuevos valores de la respuesta muestreada $h(n)$.

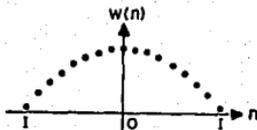
Se obtiene:



la ventana utilizada, rectangular como se muestra abajo



trunca a la función de una forma abrupta. Una transición más suave de una muestra a otra sería mejor, lo cual puede lograrse con una función ventana como la mostrada a continuación.



En este caso la respuesta se suavizará en las regiones cercanas al truncamiento, dado que $w(n)$ va decreciendo conforme n se incrementa; sabemos que los componentes de más alta frecuencia de la serie de Fourier son los que generan el rizo en la respuesta en frecuencia; por lo que si reducimos arbitrariamente los coeficientes de Fourier de los componentes de más alta frecuencia reduciremos las amplitudes de rizo.

Podemos resumir el procedimiento de diseño mediante ventanas en los pasos siguientes:

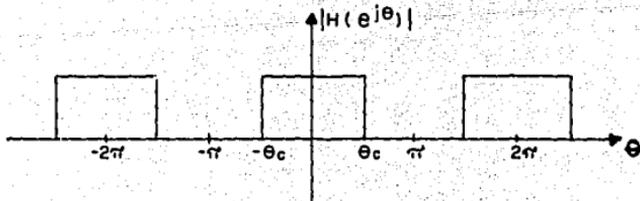
- 1.- Trasladar las especificaciones del filtro a las de un filtro pasa bajas (con fase cero).
- 2.- Diseñar un filtro pasa bajas determinando los coeficientes por las series de Fourier (hallar $h_{LPF}(n)$).
- 3.- Seleccionar un número apropiado de términos ($2I+1$).
- 4.- Seleccionar una función ventana $w(n)$.
- 5.- Calcular los nuevos coeficientes de la función impulsiva para un filtro pasabajas.

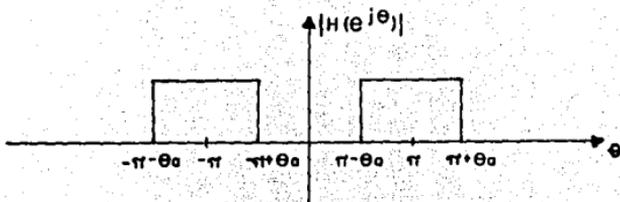
$$h_{HPF}(n) = h_{LPF}(n) \cdot \omega(n)$$

- 6.- Determinar $h_{LPF}(n)$, $h_{BPF}(n)$ ó $h_{SBF}(n)$ según se desee un filtro pasa altas, pasa banda ó supresor de banda.
- 7.- Desplazar la respuesta a la derecha I términos para hacer al filtro causal.
- 8.- Implementar el filtro digital.

De los pasos anteriores ya conocemos todos, excepto el No.6: Transformar un filtro pasa bajas a pasa altas, pasa banda ó supresor de banda.

Observemos las siguientes figuras:





la primer figura representa un filtro pasa bajas y la segunda uno pasa altas. La respuesta en frecuencia es una función periódica de ω , con período de 2π ; de ahí que aparezcan repetidas las curvas de respuesta.

Suponiendo que $\theta_0 = \theta_a$, y desplazando la respuesta en frecuencia del filtro pasabajas una cantidad de π radianes, tendremos las características del filtro pasa altas, es decir:

$$H_{HPF}(e^{j\theta}) = H_{LFF}(e^{j(\theta-\pi)})$$

si sabemos que:

$$H_{LFF}(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{LFF}(n) e^{-jn\theta}$$

tenemos:

$$H_{HPF}(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{LFF}(n) e^{-jn(\theta-\pi)}$$

ó bien:

$$H_{HPF}(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{LFF}(n) e^{jn\pi} e^{-jn\theta}$$

que puede escribirse como

$$H_{HPP}(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{LPP}(n) e^{j(n\pi - jn\theta)}$$

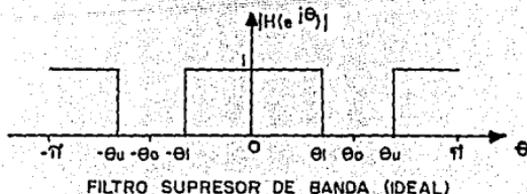
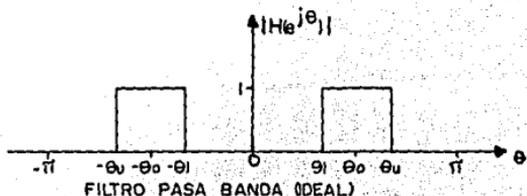
la definición para $H_{HPP}(e^{j\theta})$ está especificada por:

$$H_{HPP}(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{HPP}(n) e^{-jn\theta}$$

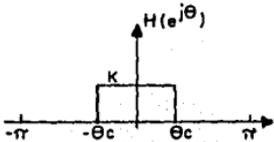
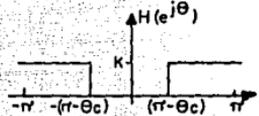
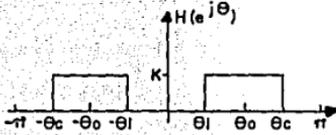
por lo que, comparando las dos últimas ecuaciones, se concluye que los coeficientes para el filtro pasa altas se determinan, una vez conocidos los coeficientes del filtro pasa bajas, por la relación:

$$h_{HPP}(n) = h_{LPP}(n) (-1)^n$$

pueden derivarse expresiones similares para filtros pasa banda y supresores de banda, como los mostrados en las dos figuras siguientes. Un resumen de todas estas transformaciones se anota a continuación de las figuras.



TRANSFORMACIONES EN FRECUENCIA

<p>Pasa Bajas</p> $h_{LPF}(n) = \frac{k}{\pi n} \text{sen}(n\theta_c)$ <p>$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I$</p> $h_{LPF}(0) = k\theta_c \frac{c}{\pi}$	
<p>Pasa Altas</p> $h_{HPF}(n) = (-1)^n h_{LPF}(n)$ <p>$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I$</p>	
<p>Pasa Banda</p> $h_{BPF}(n) = 2 \cos(n\theta_0) h_{LPF}(n)$ <p>$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I$</p> $\theta_0 - \theta_l - 2\theta_c$ $\theta_0 = \frac{\theta_0 + \theta_l}{2}$	

Supresor de Banda

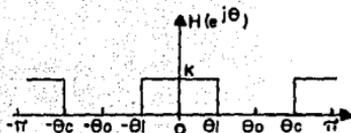
$$h_{SBF}(n) = h_{LFF}(n)$$

$$h_{SBF}(0) = k - h_{LFF}(0)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

$$\theta_0 - \theta l = 2\theta_c$$

$$\theta_0 = \frac{\theta_c + \theta l}{2}$$



Existen, además de la rectangular, otras funciones ventana como la Hann, Hamming, Blackman, Kaiser. Desafortunadamente el estudio de los filtros digitales es tan amplio que su análisis sale del alcance de este trabajo; sin embargo, el lector interesado puede consultar Digital Filters, Analysis and Design de Andreas Antoniou ó Digital Filter Design de Parks.

IV. MODULACION LINEAL

OBJETIVO: Comprender las características fundamentales de las diversas técnicas de modulación lineal y sus aplicaciones básicas.

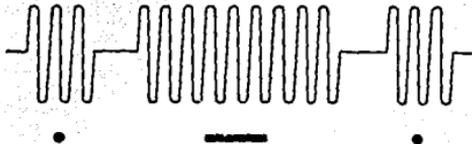
ANTECEDENTES: Análisis de Señales y Sistemas
Dinámica de Sistemas Físicos.

CONCEPTOS: Transformada de Fourier
Sistemas Lineales
Sistemas no Lineales

IV. 1.- TECNICAS DE MODULACION LINEAL

Si se transmite una onda senoidal pura de un punto A hacia otro B, la única información que puede obtener un observador en el punto B es que la onda senoidal fue enviada. Esto debido a que la información transmitida como onda eléctrica ó electromagnética está contenida en uno ó más parámetros de la onda en un determinado momento. Dado que una onda senoidal pura es periódica, es imposible reconocer un punto particular como transmitido en un momento específico en el tiempo, y por lo tanto transmitiendo una onda senoidal no puede transferirse información.

Por lo tanto debemos modificar de alguna forma la onda senoidal para permitir la transmisión de la información. Una forma es transmitir un tren de diferentes largos de onda senoidal y definir un código. Por ejemplo el código Morse: en él se transmiten puntos o rayas, un punto es un tren de ondas cortas y una raya es un tren más largo como se muestra.



Al método de interrumpir una onda continua para transmitir información se le llama transmisión de onda continua interrumpida. Cabe aclarar que en este caso, lo que importa es la presencia de la onda, y no su frecuencia. Por ejemplo, si un pulso de un segundo representa la letra A, carece de importancia el que se emplee una frecuencia de 100 Hz ó de 1000 Hz.

La transmisión de onda continua interrumpida se usa mucho en radiotelegrafía y aunque es muy empleada tiene ciertas desventajas, la principal de las cuales es que no transmite información en forma de sonidos, como voz o música.

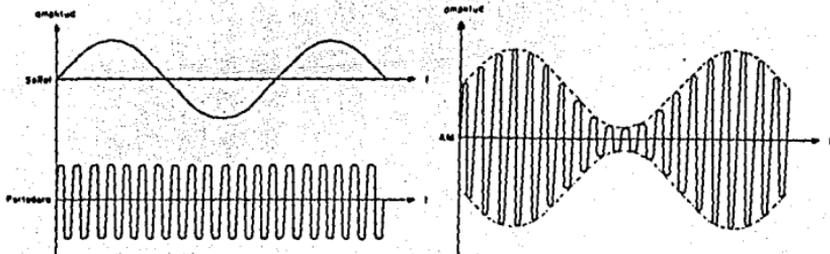
Cuando se requiere transmitir sonido, generalmente se emplean otros métodos para agregarle información. Estos métodos consisten en usar el sonido para modificar alguna característica de la onda continua de corriente alterna a fin de que tenga las mismas variaciones que la onda sonora. de esta manera se obtiene una onda continua de c.a. *modulada* por el sonido.

En este capítulo centraremos la atención en la modificación de la amplitud de una onda.

Modulación de Amplitud.

Cuando se varía la amplitud de una onda de acuerdo con otra onda que en alguna forma representa información, el proceso se llama modulación de amplitud. La onda que se modula se llama *portadora* y la otra es la *señal moduladora*.

La onda resultante recibe el nombre de onda de Amplitud Modulada (AM).



De la figura se observa que la onda de AM contiene la información en su envolvente, que es llevada por la onda portadora (de aquí el nombre) a alta frecuencia.

Desarrollemos ahora las expresiones matemáticas que representan a las señales de AM. Hay tres parámetros que definen a una onda senoidal: su frecuencia, F , su amplitud A y su fase ϕ . Una onda física tiene otro parámetro: su velocidad de propagación a través del espacio. La velocidad de una onda está relacionada con su frecuencia a través de otro parámetro: su longitud de onda. Así; consideremos una onda senoidal.

$$f(t) = A \cos(2\pi f t + \phi)$$

con

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

donde:

v = velocidad de la onda

λ = longitud de onda

f = frecuencia de la onda

para el caso de las ondas electromagnéticas su velocidad de propagación en el espacio es 3×10^8 m/s y por ejemplo, la longitud de onda de una señal de 1 KHz es:

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{1 \times 10^3} = 300 \text{ km}$$

Una longitud de onda de 300 km significa que una antena que reciba o transmita la onda eficientemente deber ser de un tamaño impráctico. Si, por otro lado, la frecuencia fuese de 100 MHz, la longitud de onda sería:

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 \text{ m}$$

y la antena es ahora realizable.

Consideremos una onda portadora cosenoidal de frecuencia F_0 que es modulada en amplitud por otra onda cosenoidal de frecuencia F_m .

$$F_c = A_c \cos(2\pi F_c t)$$

$$F_m = A_m \cos(2\pi F_m t)$$

por comodidad se ha supuesto $\phi=0$. La expresión que representa a la onda modulada es:

$$F_{AM}(t) = (A_c + A_m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$

o bien:

$$F_{AM}(t) = A(t) \cos \omega_c t$$

La ecuación anterior describe una onda senoidal cuya frecuencia f_c es la de la onda portadora y cuya amplitud está determinada por la señal moduladora, haciendo:

$$F_{AM}(t) = A_c \left(1 + \frac{A_m}{A_c} \cos \omega_m t\right) \cos \omega_c t$$

podemos escribir:

$$F_{AM}(t) = A_c (1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$

donde $m = A_m/A_c$ representa el grado de cambio de la portadora desde su estado normal sin modular y recibe el nombre de índice de modulación.

Cuando $m=0$, se tiene:

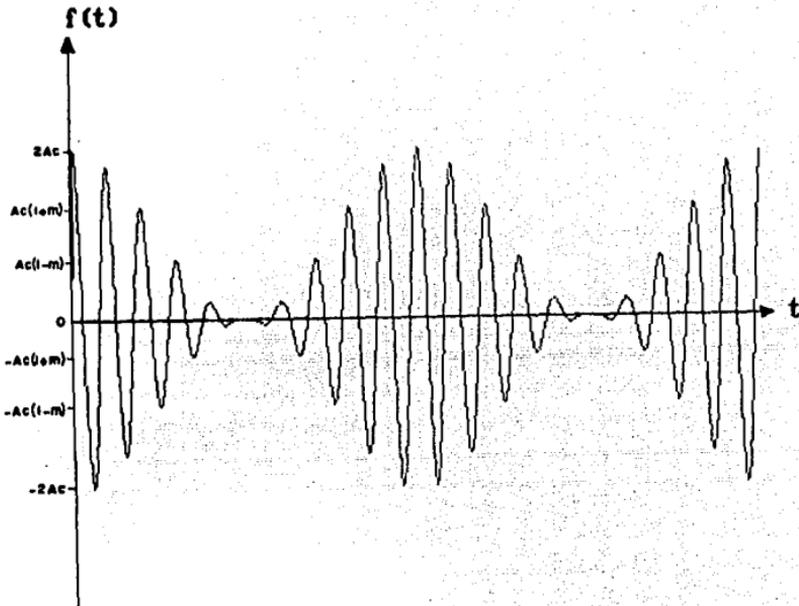
$$F_{AM}(t) = A_c \cos \omega_c t$$

es decir, la onda portadora sin modular.

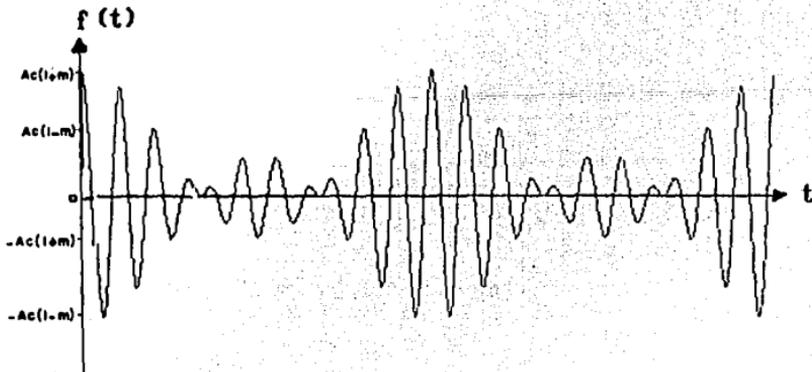
Cuando $m = 1$ tenemos

$$F_{AM}(t) = A_c (1 + \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$

donde $1 \geq \cos \omega_m t \geq -1$ por lo que variará su amplitud desde A_0 hasta un valor $A_0(1+1) = 2A_0$, volverá a su valor $A_0(1+0) = A_0$, llegará después hasta $A_0(1-1) = 0$ y volverá al valor $A_0(1+0) = A_0$, como se muestra.



en este caso se dice que la onda está modulada al 100%. Es evidente que los valores aceptables de m son $1 \geq m > 0$ ya que si $m=0$ se tendrá una onda sin modular y si $m > 1$ se tendrá una onda sobremodulada en donde la envolvente ya no sigue a la señal moduladora.



Si se expande la ecuación de $F_{AM}(t)$ tendremos:

$$F_{AM}(t) = A_c \cos \omega_c t + A_c m \cos \omega_m t \cos \omega_c t$$

usando la identidad trigonométrica siguiente:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x+y) + \frac{1}{2} \cos(x-y)$$

se tiene:

$$F_{AM} = A_c \cos \omega_c t + \frac{A_c m}{2} \cos(\omega_c + \omega_m) t + \frac{A_c m}{2} \cos(\omega_c - \omega_m) t$$

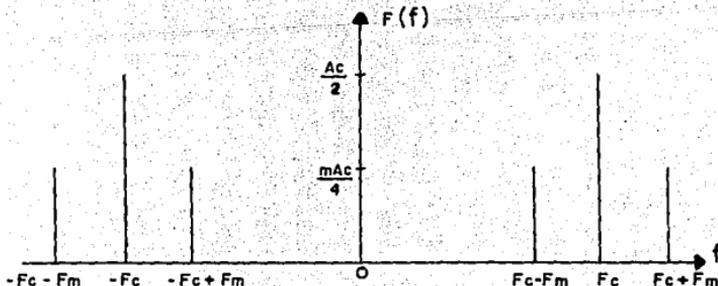
o bien:

$$F_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi F_c t) + \frac{A_c m}{2} \cos(2\pi F_c + 2\pi F_m) t + \frac{A_c m}{2} \cos(2\pi F_c - 2\pi F_m) t$$

cuya transformada de Fourier es:

$$F_{AM}(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f - F_c) + \delta(f + F_c)] + \frac{1}{4} m A_c [\delta(f - F_c - F_m) + \delta(f + F_c + F_m)] + \frac{1}{4} m A_c [\delta(f - F_c + F_m) + \delta(f + F_c - F_m)]$$

por lo que el espectro en frecuencia de una señal AM para el caso especial de modulación senoidal consta de las funciones delta en $\pm F_c$, $F_c \pm F_m$, y $-F_c \pm F_m$.



Debemos notar lo siguiente: para las frecuencias positivas del espectro de la onda AM se tiene que la porción por encima de la frecuencia portadora F_c se conoce como banda lateral superior, mientras que la porción simétrica abajo de F_c se denomina banda lateral inferior. Además, la diferencia entre la componente más alta de frecuencia, $F_c + F_m$ y la más baja $F_c - F_m$ define la banda de transmisión B_T para una onda de F_m , que es el doble del ancho de banda del mensaje F_m :

$$B_T = 2F_m$$

en la práctica, la onda AM es una onda de voltaje o de corriente; en cualquiera de estos casos, la potencia media que entrega $f_{AM}(t)$ a una resistencia de 1 ohm comprende tres componentes:

$$P_{AM} = P_{BLI} + P_{BLS} + P_P$$

donde:

$$P_P = \frac{A_c^2}{2} \quad \text{potencia de la portadora}$$

$$P_{BLS} = \frac{1}{2} \left(\frac{mA_c}{2} \right)^2 = \frac{m^2 A_c^2}{8} = P_{BLI} \quad \text{potencia de banda lateral}$$

por lo tanto, la potencia en A_m es:

$$P_{AM} = \frac{A_c^2}{2} + \frac{m^2 A_c^2}{4} = \frac{A_c^2}{2} \left[1 + \frac{m^2}{2} \right] \quad \text{ó bien } P_{AM} = P_P \left[1 + \frac{m^2}{2} \right]$$

y la relación de potencia total de las bandas laterales a la potencia total de la onda Am es por lo tanto:

$$\frac{P_{BL}}{P_{AM}} = \frac{m^2}{2+m^2}$$

que depende sólo del índice de modulación m . Si $m=1$, es decir, se modula al 100%, la potencia total de las dos frecuencias laterales resulta ser sólo un tercio de la potencia total de la onda modulada.

Como ejemplo, consideremos una onda de AM modulada al 80%, potencia total de 2500 w, $f_c = 10$ KHz. Podemos comenzar por hallar el contenido espectral de la onda AM que será:

$$\begin{aligned}
 F_c &= 10 \text{ KHz} \\
 F_c + F_m &= 11 \text{ KHz} \\
 F_c - F_m &= 9 \text{ KHz}
 \end{aligned}$$

la potencia de portadora será:

$$P_c = \frac{P_{AM}}{1 + \frac{m^2}{2}} = \frac{2500}{1 + \frac{.8^2}{2}} = 1893.9 \text{ w}$$

la potencia en las dos bandas laterales es:

$$\begin{aligned}
 P_{BLS} + P_{BLI} &= P_{AM} - P_c = 2500 - 1893.9 \text{ w} = 606.1 \text{ w} \\
 P_{BLS} &= P_{BLI} = 303.05 \text{ w}
 \end{aligned}$$

Se decía que en la frecuencia portadora se localizan dos tercios de la potencia y no se encuentra contenida ninguna información, la cual se halla en las bandas laterales. De hecho, las dos bandas laterales contienen información idéntica. Por lo que, en el ejemplo, de los 2500 w de potencia de la señal sólo son útiles 303.05 w. Este hecho señala un defecto de la AM, que solamente una fracción de la potencia total que se transmite es afectada por $F_m(t)$.

Se han diseñado sistemas para hacer un mejor uso de la potencia disponible para ser transmitida.

Sistemas de modulación AM con portadora suprimida.

Supongamos que se introducen a un multiplicador dos ondas $A_c \cos \omega_c t$ y $A_m \cos \omega_m t$. El resultado es:

$$K A_c A_m \cos \omega_c t \cos \omega_m t$$

donde K es una constante del multiplicador que, por conveniencia, se hace igual a 1.

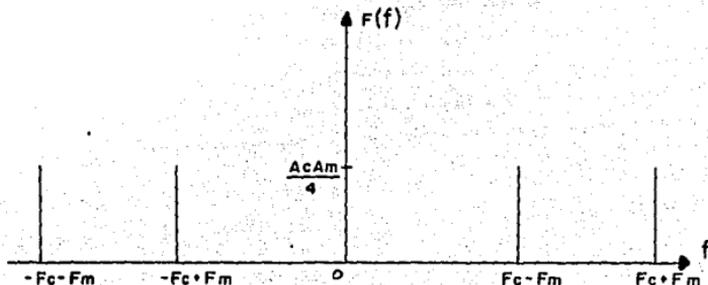
De la misma manera que para la AM con portadora:

$$\frac{A_c A_m}{2} [\cos(\omega_c + \omega_m) t + \cos(\omega_c - \omega_m) t]$$

la transformada de Fourier de la expresión anterior es:

$$\frac{A_c A_m}{4} [\delta(F - F_c + F_m) + \delta(F - F_c - F_m) + \delta(F + F_c + F_m) + \delta(F + F_c - F_m)]$$

cuyo espectro es:



A un sistema como este se le llama modulación AM de doble banda lateral con portadora suprimida. En este caso, la potencia de banda lateral se calcula de la misma manera que para el caso de AM con portadora, pero existe ahora la ventaja que se eliminan la portadora en la cual se desperdicia potencia y el ahora carente de sentido, índice de modulación.

De:

$$F_{AM}(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{mA_c}{2} \cos(\omega_c + \omega_m) t + \frac{mA_c}{2} \cos(\omega_c - \omega_m) t$$

suprimiendo la portadora:

$$F_{DBLPS}(t) = \frac{mA_c}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t + \frac{mA_c}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t$$

En este caso, la potencia de banda lateral se calcula de la misma manera que para el caso de AM con portadora:

$$P_{BLS} = P_{BLI} = \frac{m^2 A_c^2}{8} W$$

la potencia total es ahora:

$$P_{DBLPS} = P_{BLI} + P_{BLS} = P_{BL} = \frac{m^2 A_c^2}{4} W$$

y la razón de potencia total de bandas laterales a la potencia total transmitida es:

$$\frac{P_{BL}}{P_{DBLPS}} = 1$$

como la información de una banda es idéntica a la de la otra, podemos calcular también la razón de potencia total de una banda lateral a la potencia total transmitida:

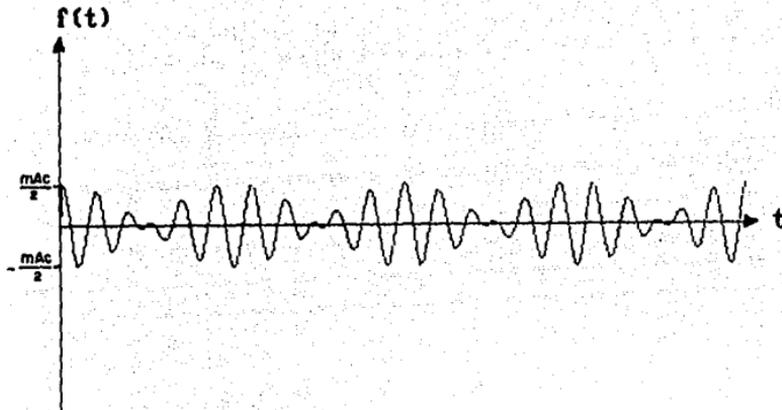
$$\frac{P_{BLI}}{P_{DBLPS}} = \frac{\frac{m^2 A_c^2}{8}}{\frac{m^2 A_c^2}{4}} = \frac{1}{2}$$

realizando el cálculo para el caso de AM con portadora, suponiendo $m = 1$:

$$\frac{P_{BLI}}{P_{AM}} = \frac{\frac{m^2 A_c^2}{8}}{\frac{A_c^2}{2} \left[1 + \frac{m^2}{2}\right]} = \frac{\frac{A_c^2}{8}}{\frac{A_c^2}{2} [1.5]} = \frac{2A_c^2}{12A_c^2} = \frac{1}{6}$$

lo que indica que la DBL-PS mejora la eficiencia del sistema.

Gráficamente, la AM de DBLPS se observa con una disminución aparente del índice de modulación:



Esta onda modulada experimenta una inversión de fase cada vez que la señal $F_m(t)$ cruza por cero; por consiguiente, y a diferencia de la AM con portadora, la envolvente de una onda DBL - PS es diferente de la señal $F_m(t)$.

Modulación de banda lateral única.

Las modulaciones en amplitud y en doble banda lateral con supresión de portadora, desperdician un ancho de banda considerable, ya que ambas requieren de un ancho de banda de transmisión igual al doble del ancho de banda de mensaje. En ambos casos la banda lateral superior ocupa la mitad de la banda de transmisión, mientras que la banda lateral inferior ocupa la otra mitad. Sin embargo, las bandas laterales superior e inferior están unívocamente relacionadas entre sí en virtud de su simetría con respecto a la frecuencia de la portadora; es decir, dados los aspectos de amplitud y de fase de una de las bandas laterales, es posible determinar unívocamente la otra. Esto significa que, hasta donde la transmisión de información concierne, sólo se necesita una banda lateral, y si se suprimen

la portadora y la otra banda lateral en el transmisor, no se pierde información. Por lo tanto, el canal de comunicación sólo tiene que proporcionar el mismo ancho de banda que la señal de información. En este caso, el sistema de modulación se conoce como sistema de banda lateral única.

La función esencial de un sistema de modulación de banda lateral única (BLU) es trasladar el espectro de la onda moduladora a un nuevo lugar en el dominio de la frecuencia. El beneficio del empleo de este sistema es, evidentemente, el ancho de banda reducido y la eliminación de la onda portadora de alta potencia. El principal inconveniente del sistema de modulación de BLU es su costo y su complejidad.

Considerando la onda de AM:

$$F_{AM}(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{mA_c}{2} \cos(\omega_c + \omega_m) t + \frac{mA_c}{2} \cos(\omega_c - \omega_m) t$$

al eliminar una banda lateral y la portadora, se tiene:

$$F_{BLU}(t) = \frac{mA_c}{2} \cos(\omega_c + \omega_m) t$$

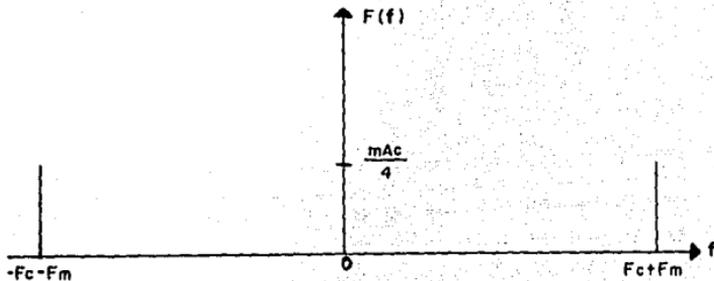
ó bien:

$$F_{BLU}(t) = \frac{mA_c}{2} \cos(\omega_c - \omega_m) t$$

según se considere, la banda lateral superior, en el primer caso ó la inferior, en el segundo.

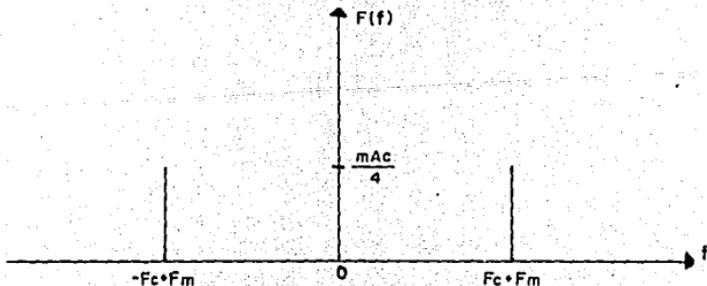
La modulación de BLU se visualiza con rapidez en el dominio de la frecuencia:

$$\mathcal{F}\{F_{BLU}(t)\} = \frac{mA_c}{4} [\delta(F+F_c+F_m) + \delta(-F-F_c-F_m)]$$



Espectro de onda modulada en banda lateral única. (superior)

$$\mathcal{F}\{F_{BLI}(t)\} = \frac{mA_c}{4} [\delta(F+F_c-F_m) + \delta(F-F_c+F_m)]$$



Espectro de onda modulada en banda lateral única. (inferior)

En este caso, la potencia de banda lateral es:

$$P_{BLS} = P_{BLR} = \frac{m^2 A_c^2}{8}$$

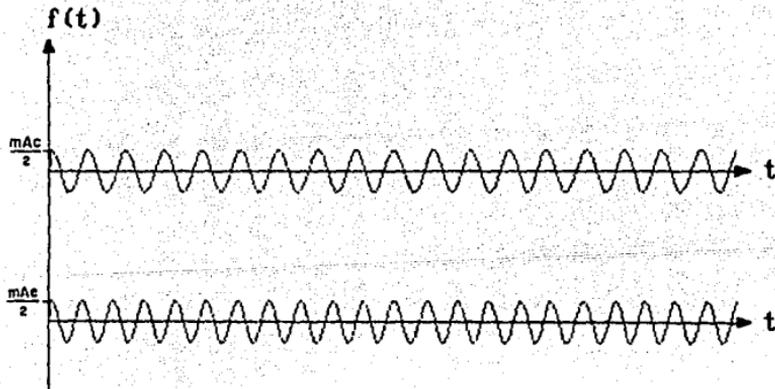
y, como la potencia transmitida es:

$$P_{BLT} = \frac{m^2 A_c^2}{8}$$

la relación de potencia total de banda lateral a potencia total transmitida es:

$$\frac{P_{BLS}}{P_{BLT}} = 1$$

A continuación se muestran las señales en el dominio del tiempo; arriba, la gráfica correspondiente a la onda modulada en BLU-S y abajo la modulada en BLU-I.



Una herramienta útil para el análisis de la modulación por banda lateral única es la transformada de Hilbert; la cual defasa en 90° todas las componentes de frecuencia de una señal.

Si una señal analítica se representa por su componente en fase y su componente en cuadratura, teniendo una señal de banda lateral única $f(t)$, podemos tener una señal analítica $z(t)$ añadiéndole la transformada de Hilbert $\hat{F}(t)$ en cuadratura:

$$z(t) = F_{BLU}(t) + j\hat{F}_{BLU}(t)$$

por ejemplo:

Consideremos una onda senoidal moduladora:

$$F(t) = A_m \cos(2\pi F_m t)$$

cuya transformada de Hilbert es:

$$\hat{F}(t) = A_m \sin(2\pi F_m t)$$

Una onda BLU se expresa como:

$$F_{BLU}(t) = F_c(t) \cos(2\pi F_c t) - F_m(t) \sin(2\pi F_c t)$$

donde $f_c(t)$ es la componente en fase y $F_m(t)$ la componente en cuadratura de la onda BLU.

siendo:

$$F_c(t) = \frac{A_c}{2} F(t)$$

$$F_m(t) = -\frac{A_c}{2} \hat{F}(t)$$

sustituyendo entonces $F(t)$ y $\hat{F}(t)$ en las expresiones para $F_c(t)$ y $F_m(t)$ y a su vez estas en la expresión para $F_{BLU}(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} F_{BLU}(t) &= \frac{1}{2} A_c A_m [\cos(2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t - \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t)] \\ &= \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (F_c + F_m) t \end{aligned}$$

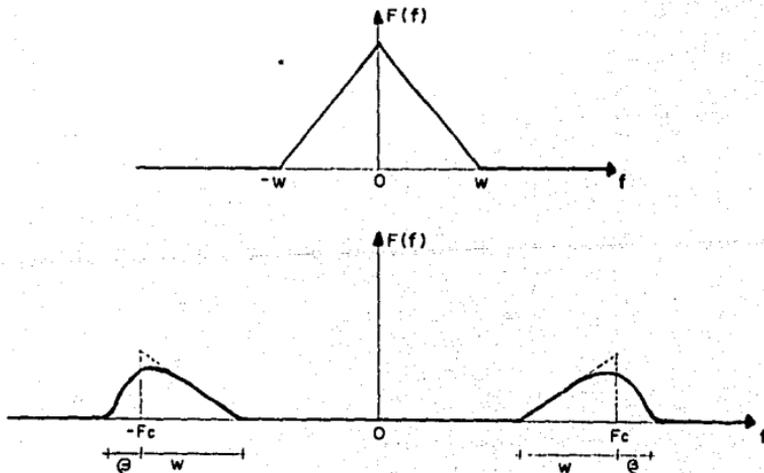
que es la onda de BLU.

Banda lateral única con portadora piloto.

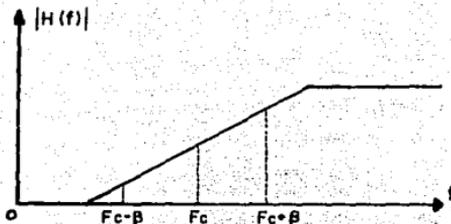
Aunque la Modulación de BLU permite economía en ancho de banda y en potencia de transmisión, complica el problema de la transmisión, ya que requiere sincronización entre la portadora que se utiliza en el transmisor para la modulación y la que se genera localmente en el receptor para la demodulación. Un método que se utiliza para efectuar esta sincronización consiste en transmitir una frecuencia piloto para que se transmita junto con la señal saliente.

Banda lateral residual.

Uno de los defectos de la banda lateral única es que no es apropiada cuando la señal de información contiene componentes de frecuencias extremadamente bajas, como señales de TV y telegrafía. La *banda lateral residual*, modulación con banda lateral residual ó modulación asimétrica es el que se hace pasar una banda lateral casi por completo, mientras que se retiene sólo un residuo de la otra banda lateral, como se indica abajo:



Para lograr una onda de este tipo se emplea un filtro de banda lateral, cuya gráfica de amplitud contra frecuencia se muestra abajo:



El ancho de banda requerido para la transmisión de BLR es:

$$B_r = W + \beta$$

donde W es el ancho de banda de la señal de información y β es el de la banda lateral residual.

La potencia transmitida P_T no es muy fácil de determinar en forma exacta, pues depende del ancho residual β .

Por ejemplo, supongamos la señal moduladora

$$F_m(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$$

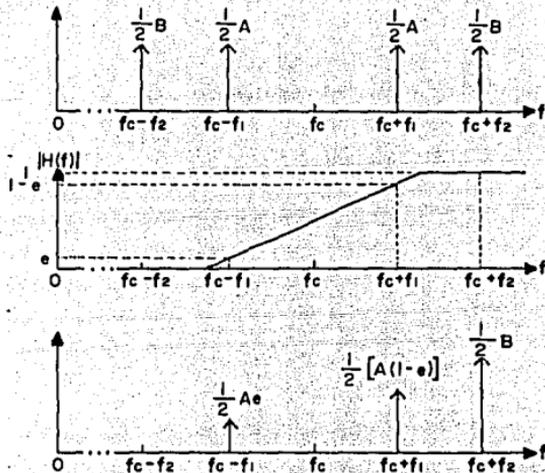
que, al ser multiplicada por la portadora;

$$F_c(t) = \cos \omega_c t$$

obtenemos:

$$F(t) = A \cos \omega_1 t \cos \omega_c t + B \sin \omega_2 t \cos \omega_c t$$

al pasar la señal por el filtro, se obtiene según las figuras siguientes:



$$F_{BLR} = \frac{1}{2}A_e \cos(\omega_o - \omega_1) t + \frac{1}{2}A(1+e) \cos(\omega_o + \omega_1) t + \frac{1}{2}B \cos(\omega_o + \omega_2) t$$

puede demodularse la señal multiplicando de nuevo por $\cos \omega_o t$. De hecho, puede usarse un factor de 4 para obtener exactamente la señal original, al multiplicar $F_{BLR}(t)$ por $4 \cos \omega_o t$.

IV.2.- MODULADORES

Como ya se indicó, en el proceso de la modulación se crean nuevas frecuencias, por lo que el dispositivo que genere una onda de amplitud modulada -un *modulador*- debe ser o variable en el tiempo o no lineal, puesto que los sistemas invariantes en el tiempo o lineales no pueden producir nuevas componentes de frecuencia.

MODULADOR DE LEY DE POTENCIAS

Consideremos un dispositivo no lineal cuya característica de transferencia es:

$$V_{\text{salida}}(t) = A_1 V_{\text{entrada}}(t) + A_2 V_{\text{entrada}}^2(t)$$

omitiendo los términos de orden superior, se le supone un dispositivo de ley *cuadrática*. Entonces, si

$$V_{\text{entrada}}(t) = x(t) + \cos \omega_c t$$

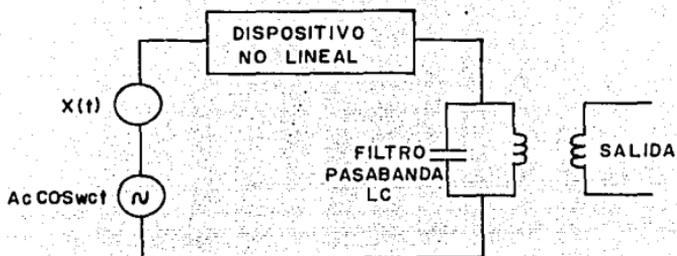
tendremos:

$$V_{\text{salida}}(t) = A_1 x(t) + A_2 x^2(t) + A_2 \cos^2 \omega_c t + A_1 \left[1 + \frac{2A_2}{A_1} x(t) \right] \cos \omega_c t$$

El último término es la onda de AM deseada, con $A_c = A_1$ y $m = 2A_2/A_1$, siempre que pueda ser separada del resto.

El modo de separar el término de AM es, simplemente, haciendo pasar V_{salida} a través de un filtro pasabanda centrado en f_c , de ancho de banda $B_r = 2W$, donde W es la frecuencia máxima de la señal moduladora.

A continuación se muestra el diagrama de bloques de un modulador de ley cuadrática.

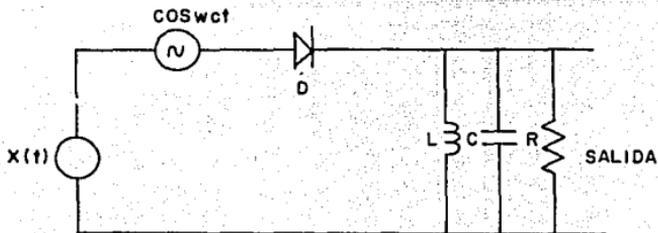


Los moduladores de ley de potencia, dado que necesitan filtrado, se emplean principalmente en la generación de AM de *bajo nivel*, es decir, a niveles de potencia menores que el valor transmitido. Posterior a esto, se usa un amplificador lineal para llevar la potencia al valor de transmisión requerido P_T .

MODULADOR DE CONMUTACION.

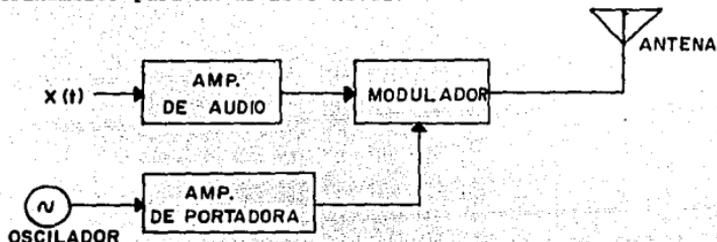
En muchas ocasiones los amplificadores lineales de potencia de RF presentan problemas cuando P_T es grande, por lo que en esos casos se emplea la modulación de *alto nivel*.

Un ejemplo de modulador de alto nivel es el modulador de conmutación, mostrado abajo:



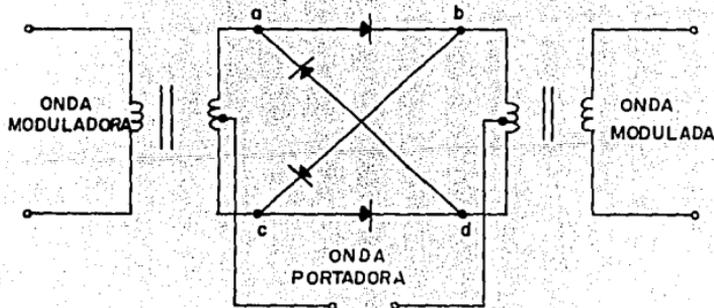
El dispositivo activo cierra el circuito brevemente, cada $1/f_c$, pasando la señal a un circuito tanque RLC, sintonizado para resonar a f_c . De esta manera, la acción de conmutación origina que el circuito tanque oscile en forma senoidal. Si la señal de salida es $V_{salida}(t) = A \cos \omega t$, al agregar la señal de mensaje, el voltaje de salida es $V_{salida}(t) = [A + x(t)] \cos \omega t$. Así se tiene una modulación de alto nivel sin una generación apreciable de componentes indeseables.

A continuación se muestra un diagrama a bloques de un transmisor para AM de alto nivel.

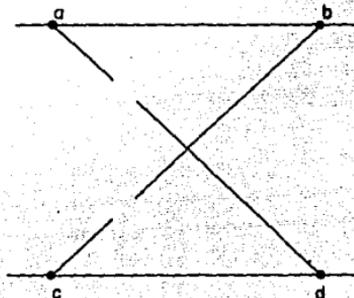


MODULADOR EN ANILLO.

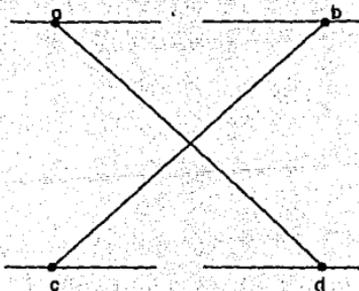
Uno de los moduladores de producto más útiles que se han diseñado para la generación de una onda DBL - PS es el modulador en anillo que se muestra abajo.



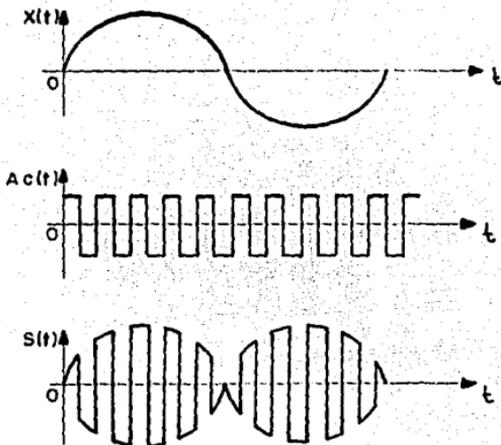
Los cuatro diodos forman un anillo en el que todos apuntan en la misma forma, de aquí el nombre. Los diodos se controlan por medio de una portadora de onda cuadrada $c(t)$ de frecuencia f_c que se aplica por medio de dos transformadores con derivación central. Se suponen los diodos ideales y transformadores perfectamente balanceados. Cuando la alimentación de portadora es positiva, los diodos exteriores quedan conectados, presentando una impedancia cero, mientras que los diodos interiores se desconectan, presentando así impedancia infinita, como se ve en la figura siguiente.



así que el modulador multiplica la señal de información $x(t)$ por $+1$. Cuando la alimentación de portadora es negativa, la situación se invierte, como se indica abajo

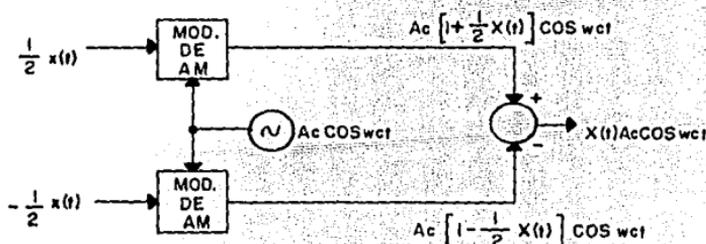


y el modulador multiplica la señal de información por -1 . Así, el modulador en anillo es un modulador de producto para una portadora de onda cuadrada y la señal de información, como se indica a continuación.



MODULADOR BALANCEADO.

Si lo que se desea generar es una onda de doble banda lateral con portadora suprimida, se emplea lo que se conoce como modulador balanceado, el cual no es otra cosa que *dos moduladores de AM* dispuestos en una configuración balanceada para cancelar la portadora. A continuación se muestra tal modulador.



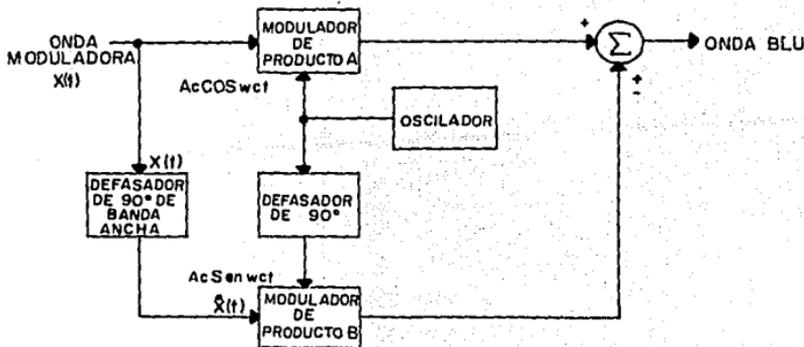
Suponiendo los moduladores idénticos, salvo por el signo invertido de una entrada, las salidas de cada uno son las indicadas en la figura. Restando una de la otra se obtiene la onda con portadora suprimida.

MODULADORES DE BANDA LATERAL ÚNICA.

Ya en la sección IV.1 se mencionó que puede generarse AM de BLU haciendo pasar una señal de AM con portadora suprimida a través de un filtro de banda lateral única. El problema de un filtro así es que es difícil sintetizar en forma exacta una característica de corte agudo como la requerida, por lo que, o se pierde parte de la banda deseada, o se permite el paso de una porción de la banda no deseada, que equivaldría a una modulación en banda lateral residual. Afortunadamente, muchas señales moduladoras prácticas carecen de contenido de baja frecuencia y sus espectros presentan "vacíos" en su frecuencia cero. De esta manera, después de la traslación hecha por el modulador balanceado, el vacío en la frecuencia cero se traduce en espacios vacantes alrededor de la frecuencia de portadora y puede usarse este espacio como la región de transición de un filtro de banda lateral práctico.

MODULADOR DE CORRIMIENTO DE FASE.

El análisis por transformada de Hilbert sugiere un método alternativo de modulación de AM de banda lateral única: contando con $x(t)$ y la portadora $\cos \omega_c t$, dos moduladores balanceados y un par de desplazadores de fase dispuestos como en la figura siguiente, se generará modulación en banda lateral superior o inferior, según se sumen o resten sus salidas.

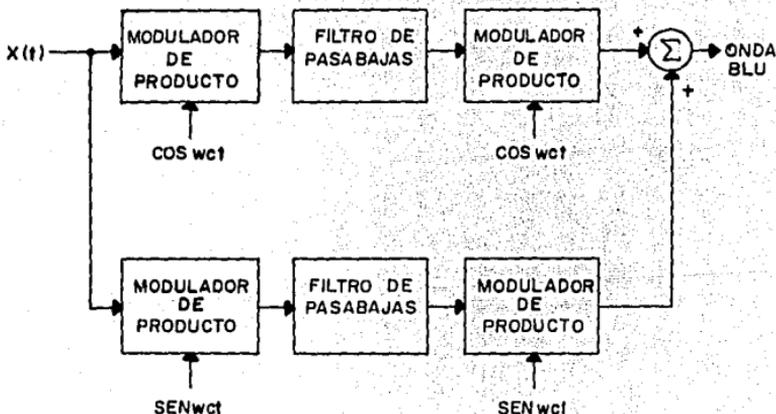


Esta técnica, conocida como *método de corrimiento de fase*, omite el filtro de banda lateral. Sin embargo, el diseño de los circuitos de corrimiento de fase no es trivial, y las imperfecciones generalmente originan distorsiones en las componentes de baja frecuencia, por lo que el sistema funciona bien sólo con señales de mensaje con espectros como los descritos arriba.

MODULADOR DE WEAVER.

El método de Weaver se diferencia de los dos anteriores en que no se necesitan filtros de corte agudo para discriminar frecuencias, ni redes de diferencia de fase de banda ancha.

La figura muestra el diagrama a bloques del modulador de Weaver.



La onda de mensaje $x(t)$ está limitada a la banda de frecuencias $f_a \leq |f| \leq f_b$. La portadora auxiliar aplicada al primer par de moduladores de producto tiene una frecuencia f_c , que se encuentra en el centro de esta banda:

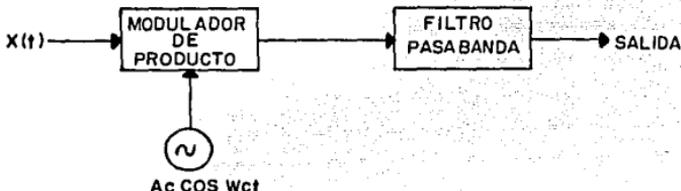
$$f_c = \frac{f_a + f_b}{2}$$

los filtros pasabajas en los canales de fase y de cuadratura son idénticos, con frecuencia de corte $(f_b - f_a)/2$. y la portadora aplicada al segundo par de moduladores de producto tiene una frecuencia f_c , mayor que $(f_b - f_a)/2$.

IV.3.- DEMODULACION SINCRONA Y ASINCRONA.

DEMODULACION SINCRONA.

Todos los tipos de modulación lineal se pueden detectar por medio del demodulador de producto mostrado abajo.



La señal de entrada primero se multiplica con una sinusóide que se genera en forma local y luego se pasa a través de un filtro pasabajos con ancho de banda igual al del mensaje, o un poco mayor. Se supone que el oscilador local (OL) está sincronizado con exactitud con la portadora, tanto en fase como en frecuencia, a lo cual se le da el nombre de *detección sincrónica*. De hecho, el principal problema de este tipo de detección es lograr la sincronización del OL con la portadora, que, en el caso de PS, no se encuentra presente. Es importante investigar el efecto del corrimiento de fase y frecuencia:

Representemos a la onda del oscilador local como

$$\cos(\omega_c t + \omega' t + \phi')$$

donde ω' y ϕ' representan los errores de frecuencia y fase, respectivamente. Si la señal detectada es de DBL - PS la salida del demodulador sincrónico será:

$$f_D(t) = K_D \cos \omega_m t \cos(\omega' t + \phi')$$

$$= \frac{K_D}{2} [\cos(\omega_m + \omega') t + \cos(\omega_m - \omega') t] \quad \text{para } \phi' = 0$$

y

$$= K_D \cos \omega_m t \cos \phi' \quad \text{para } \omega' = 0$$

De manera similar, para una señal de banda lateral única, donde

$$x_c(t) = \cos(\omega_c \pm \omega_m)t,$$

tenemos, a la salida:

$$f_b(t) = K_D \cos[\omega_m t \pm (\omega' t + \phi')]$$

$$= K_D \cos(\omega_m \pm \omega')t \quad \text{para } \phi' = 0$$

y

$$= K_D \cos(\omega_m t \pm \phi') \quad \text{para } \omega' = 0$$

Evidentemente tanto para DBL - PS como para BLU, un corrimiento de frecuencia que no es pequeño comparado con ω alterará en forma sustancial el tono detectado. La práctica indica que son tolerables corrimientos de frecuencia menores a ± 10 Hz.

En el caso de corrimiento de fase, se obtiene un efecto de desvanecimiento aparente. Sin embargo, el oído humano puede tolerar una distorsión por retardo grande, por lo que el corrimiento de fase no es tan serio en comparación con el de frecuencia.

En sistemas de datos, facsimil y video con portadora suprimida, se necesita una sincronización más cuidadosa que en sistemas de audio.

DEMODULACION ASINCRONA.

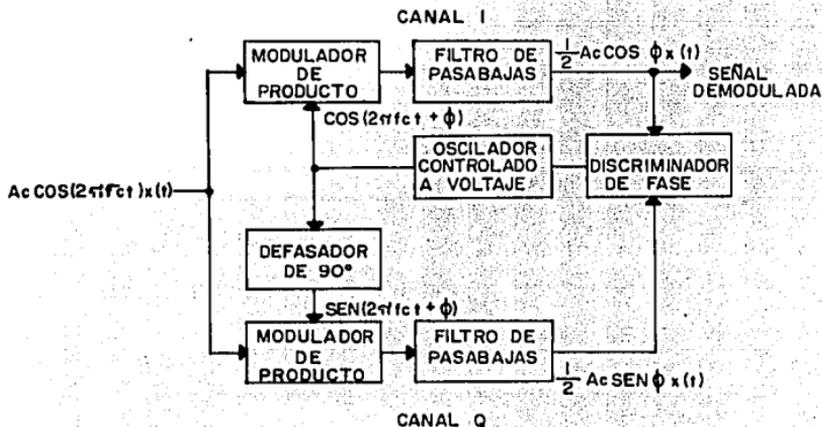
Como la envolvente de una onda de AM tiene la misma forma del mensaje, independientemente de la frecuencia y fase de la portadora, se puede llevar a cabo la demodulación ó detección extrayendo la envolvente sin preocuparse por la sincronización, por lo que a este sistema se le conoce como detección asincrónica.

La detección de envolvente es apropiada siempre y cuando la onda en cuestión tenga una modulación de envolvente apropiada, por ejemplo, el video de TV transmitido por medio de banda lateral residual mas portadora. Además, en algunos sistemas de portadora suprimida se emplean mas los detectores de envolvente que los demoduladores de producto, insertándose un término grande de portadora adelante del detector para reconstruir la envolvente (esto se hace extensivo a la BLU y a la DBL - PS si la portadora local es suficientemente grande).

IV. 4.- DEMODULADORES

RECEPTOR DE LAZO DE COSTAS

Un método para obtener un sistema práctico de recepción sincrónica, adecuado para la demodulación de ondas DBL - PS, es el empleo del *receptor de Costas* que se muestra a continuación:



Este sistema consta de dos detectores coherentes que se alimentan con la misma señal de entrada, o sea, la onda de entrada DBL - PS:

$$A_c \cos(2\pi f_c t) x(t)$$

pero con señales individuales del oscilador local que están en cuadratura de fase entre sí. La frecuencia del oscilador local se ajusta para ser igual a la frecuencia portadora f_c , que se supone se conoce con anterioridad. El detector de la trayectoria superior se llama detector coherente en fase o canal Q, ambos detectores se acoplan juntos para formar un sistema de retroalimentación negativa que se diseña de modo que mantenga al

oscilador local en sincronización con la onda portadora.

Para comprender el funcionamiento de este receptor, suponga que la señal del oscilador local tiene la misma fase que la onda portadora:

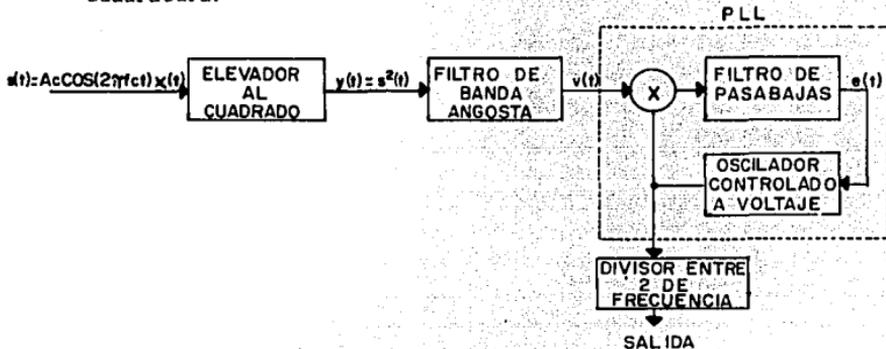
$$A_c \cos(2\pi f_c t)$$

que se utiliza para generar la onda DBL - PS de entrada. Bajo estas condiciones, se observa que la salida del canal I contiene la señal demodulada $x(t)$ que se desea, mientras que la salida del canal Q es cero gracias al efecto nulo de cuadratura de ese canal Q. Supóngase que la fase del oscilador local se corre de su propio valor una pequeña cantidad ϕ radianes. La salida del canal I permanecerá esencialmente sin cambio, pero existirá ahora cierta señal que aparece a la salida del canal Q, proporcional a $\sin \phi \approx \phi$. Esta salida del canal Q tendrá la misma polaridad que la salida del canal I para una dirección del corrimiento de fase del oscilador local, y polaridad opuesta para la dirección también opuesta del corrimiento de fase del oscilador local. Así, al combinar las salidas de los canales I y Q en un discriminador de fase (que consta de un multiplicador seguido de un filtro pasabajas), se obtiene una señal de control de cd que corrige automáticamente los errores de fase del oscilador local.

Es evidente que el control de fase en el receptor de Costas cesa con la modulación, y que debe restablecerse la sincronización de fase al reaparecer la modulación. Este no es un problema serio cuando se recibe transmisión de voz, porque el proceso de sincronización ocurre normalmente con tanta rapidez que no se percibe distorsión alguna.

CIRCUITO DE CUADRATURA.

Otro método para generar una portadora de referencia a partir de una onda DBL - PS es el empleo de un *circuito de cuadratura*:



A la entrada de este circuito de recuperación de la portadora se tiene un dispositivo de ley cuadrada que se caracteriza por la relación:

$$y(t) = s^2(t)$$

por lo tanto, con la onda DBL - PS

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) x(t)$$

aplicada a la entrada de este dispositivo de ley cuadrada, se obtiene:

$$y(t) = A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t) x(t) \\ = \frac{A_c^2}{2} m^2(t) [1 + \cos(4\pi f_c t)]$$

La señal $y(t)$ se aplica en seguida a un filtro de banda angosta con centro en $2f_c$. Suponiendo que la respuesta de amplitud de este filtro es idealizado, y que el ancho de banda del filtro es lo suficientemente pequeño para que el espectro de $y(t)$ sea esencialmente constante dentro del pasabanda del filtro, se observa que la salida es aproximadamente senoidal, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$v(t) = \frac{A_c^2}{2} E A f \cos(4\pi f_c t)$$

en donde E es la energía de la señal de mensaje $x(t)$.

La onda senoidal que resulta con el doble de la frecuencia de la portadora, a la salida del filtro de banda angosta, se sincroniza por medio de un circuito de sincronización de fase (PLL). Este circuito consta de un multiplicador, un filtro pasabajas y un oscilador controlado a voltaje (VCO) conectados en la forma de un sistema de retroalimentación negativa. A la salida del multiplicador se obtienen dos términos, uno que depende de la diferencia entre la frecuencia y la fase de la salida del VCO y las de la señal $v(t)$ a la entrada del PLL, y el otro depende de su suma. Este último término se elimina mediante el filtro. La señal de error que resulta, representada por $e(t)$ se aplica a la entrada del VCO, haciendo que la frecuencia de este coincida con la de la entrada $v(t)$ del PLL, y que su fase quede en cuadratura con la de $v(t)$, la que a su vez tiende a reducir a $e(t)$ hasta cero. De esta manera, se capacita al VCO para sincronizar cambios en la frecuencia y en la fase de la entrada $v(t)$ del PLL.

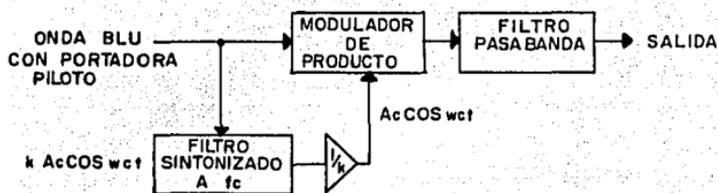
La salida del VCO divide la frecuencia por un factor de dos para que se produzca la onda portadora que se desea y sirva para la detección coherente de la onda DBL - PS. Sin embargo, como resultado de esta división de frecuencia, se tiene una ambigüedad de fase de π radianes. Se presenta esta ambigüedad de fase debido al cambio de fase de 2π radianes en la entrada del divisor de frecuencia que produce un cambio de fase de π radianes a la salida. En consecuencia, la salida del divisor de frecuencia puede ser igual a $\cos(2\pi f_c t)$ o bien $\cos(2\pi f_c t + \pi)$. Si se utiliza una fase incorrecta, se invertirá la polaridad de la onda demodulada. Esta dificultad no tiene gran importancia en el caso de las comunicaciones de voz.

DETECCION POR PORTADORA PILOTO.

Para recuperar la señal de banda base $x(t)$ de la onda BLU, se tiene que desplazar el espectro por las cantidades $\pm f_c$. Esto puede efectuarse utilizando la detección coherente, que comprende la aplicación de la onda BLU, junto con una onda senoidal generada localmente:

$$A_c \cos(2\pi f_c t)$$

a un modulador de producto y después filtrar a pasabajas la salida del modulador como se muestra en la figura:

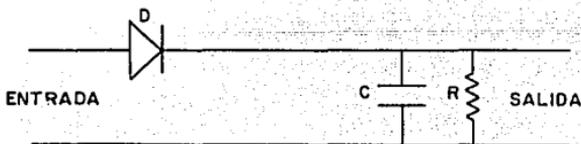


$k =$ FACTOR DE ATENUACION DE LA PORTADORA

Para que funcione este método de demodulación debe naturalmente disponerse en el receptor de una onda senoidal de la frecuencia correcta de portadora f_c y de la relación correcta de fase con la onda portadora que se utilice para generar la onda BLU de entrada. Esto puede obtenerse ya sea transmitiendo una portadora piloto además de la banda lateral que se elija, o bien utilizando un oscilador de alta estabilidad.

DETECTOR DE ENVOLVENTE

En un detector de envoltura, la salida del detector sigue a la envoltura de la señal modulada. El circuito de la figura funciona como un detector de envoltura.



En el ciclo positivo de la señal de entrada, el capacitor C se carga al voltaje de pico de dicha señal, cuando la misma señal cae por debajo de este valor pico, el diodo queda cortado, debido a que el voltaje del capacitor es mayor que el voltaje de la señal de entrada, haciendo así que el diodo quede abierto. El capacitor se descarga ahora lentamente a través del resistor R. Durante el siguiente ciclo positivo, cuando la señal de entrada se vuelve mayor que el voltaje del capacitor, el diodo conduce otra vez. El capacitor se carga otra vez hasta el valor pico de este (nuevo ciclo). El capacitor se descarga lentamente durante el período de corte, cambiando así el voltaje del capacitor muy ligeramente.

Durante cada ciclo positivo, el capacitor se carga hasta el voltaje pico de la señal de entrada y luego decae lentamente hasta el siguiente ciclo positivo. El voltaje de salida seguirá así a la envolvente de la entrada. Sin embargo, una señal de rizo de frecuencia ω_c , es causada por la descarga del capacitor entre los picos positivos. Este rizo se reduce cuando se incrementa la constante de tiempo RC de modo que el capacitor se descarga muy poco entre los picos positivos ($RC \gg 1/\omega_c$). Sin embargo, si se hace a RC demasiado grande, se hace imposible que el voltaje del capacitor siga a la envolvente. De esta forma RC debe ser grande en comparación con $1/\omega_c$, pero debe ser pequeño comparado con $1/2\pi B$, donde B es la frecuencia más alta de $x(t)$. Incidentalmente, esto requiere también que $\omega_c \gg 2\pi B$, una condición que es necesaria para una envolvente bien definida.

IV.5.- CONVERSION DE FRECUENCIA.

La modulación lineal es principalmente una traslación de frecuencia directa del espectro del mensaje. La *demodulación* o *detección*, es el proceso, en el receptor, por medio del cual se recupera el mensaje de la onda modulada. Por lo que, para la modulación lineal en general, el proceso de detección es en forma básica uno de los casos de *traslación de frecuencia a valores menores*.

La traslación de frecuencia o *conversión*, se emplea también para desplazar una señal modulada a otra nueva frecuencia portadora (arriba o abajo) para amplificación o para algún otro procesamiento. Así, la traslación es una operación fundamental de los sistemas de modulación lineal e incluye la modulación y la detección como casos especiales.

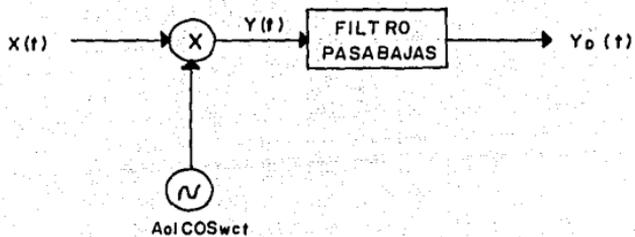
Otra aplicación de la conversión de frecuencia se encuentra en los multiplexores por división de frecuencia, de los que se hablará en la sección IV.8

IV.6.- CONVERTIDORES DE FRECUENCIA.

La conversión se efectúa al multiplicar por una sinusoides. Considérese, por ejemplo, la onda de DBL $x(t)\cos \omega_1 t$. Multiplicando por $\cos \omega_2 t$, se obtiene

$$x(t)\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{1}{2}x(t)\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}x(t)\cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

El producto está compuesto de las frecuencias suma y diferencia, $f_1 + f_2$ y $|f_1 - f_2|$, cada una modulada por $x(t)$. Si f_1 es distinta de f_2 , la multiplicación ha trasladado el espectro de la señal a dos nuevas frecuencias portadoras. Con un filtrado apropiado, la señal se convierte a un valor mayor o a uno menor en frecuencia. Los dispositivos que realizan esta operación se denominan *convertidores de frecuencia* o *mezcladores*. La operación en sí, se llama heterodinación o mezcla. La figura muestra el diagrama de un convertidor de frecuencia.



IV.7 MULTIPLICADORES DE FRECUENCIA.

La figura siguiente es el diagrama a bloques de un multiplicador de frecuencia.



La entrada es una senoide a una frecuencia específica F_0 y la salida es una senoide a un múltiplo de la frecuencia de entrada NF_0 .

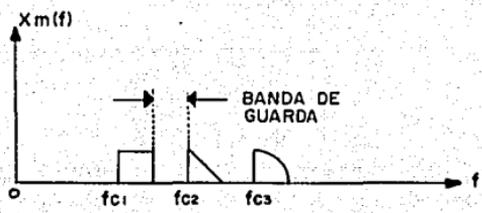
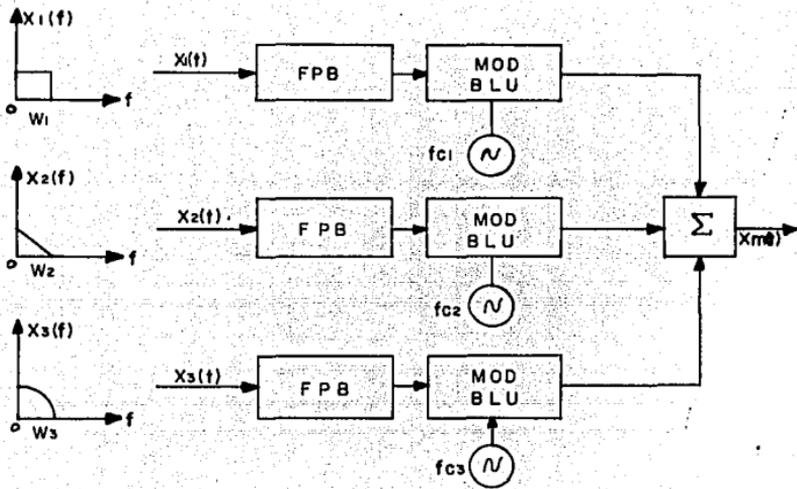
El dispositivo no lineal realiza el proceso de multiplicación con el que aparecen todas las armónicas de F_0 , y el filtro pasabanda, generalmente un circuito paralelo LC, selecciona la n -ésima armónica y rechaza al resto. Esto significa que el circuito está sintonizado ó resonante a NF_0 .

La diferencia entre esta operación y la conversión de frecuencia es que en la primera se extiende el contenido espectral y la última traslada en frecuencia el contenido espectral.

En el capítulo V se hablará más del multiplicador de frecuencia.

IV.8 CONCEPTO BASICO DE LA MULTICANALIZACION POR DIVISION DE FRECUENCIA.

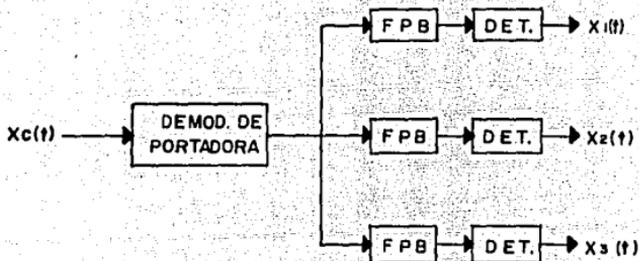
La multicanalización o multiplexión es la técnica por medio de la cual pueden combinarse cierto número de señales independientes en una señal compuesta adecuada para la transmisión por un canal común. Las frecuencias de voz que se transmiten por los sistemas telefónicos, por ejemplo, están en el rango de 300 a 3400 Hz. Para transmitir cierto número de estas señales por el mismo canal, las señales deben mantenerse separadas para que no interfieran entre sí y puedan separarse en el extremo receptor. El principio de la multiplexión por división de frecuencia se ilustra en la figura, donde varios mensajes de entrada modulan en forma individual a las subportadoras F_{01} , F_{02} y F_{03} (pueden ser muchas más), después de que pasan a través de filtros pasabajas para limitar los anchos de banda de los mensajes.



BANDA BASE

Después de la modulación en BLU de cada señal, se suman estas, produciendo el espectro indicado $X_m(F)$, llamado espectro de banda base, que significa que la modulación final de portadora de transmisión aún no se ha realizado.

La recuperación de la señal se hace en tres pasos.



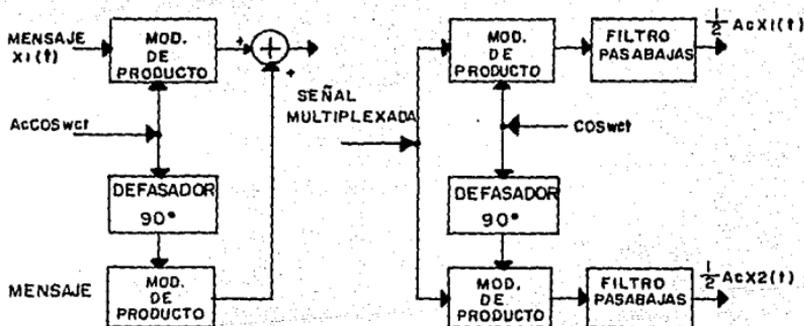
Primero, y esto suponiendo que $X_m(t)$ moduló a una portadora, el demodulador de portadora reproduce la señal de banda base $X_b(t)$. Luego, se separan las subportadoras moduladas por medio de un banco de filtros pasabanda en paralelo, y enseguida se detectan cada uno de los mensajes.

Las aplicaciones del Multiplexaje por División de Frecuencia van desde la red telefónica hasta el FM estéreo y sistemas de telemetría por sondas espaciales.

IV. 9.- MULTICANALIZACION POR CUADRATURA.

La multiplexión en portadora de cuadratura o modulación en amplitud de cuadratura (QAM) permite que dos ondas moduladas DBLSP (que resultan de la aplicación de dos señales de mensaje independientes) ocupen el mismo ancho de banda de transmisión, y aún permite la separación de las dos señales de mensaje a la salida del receptor. Es por lo tanto un esquema de conservación del ancho de banda.

En la figura se muestra un diagrama de bloques del sistema de multiplexión en portadora de cuadratura.



La parte transmisora del sistema, comprende el uso de dos moduladores de productos separados que se suministran con dos ondas portadoras de la misma frecuencia pero con una diferencia de fase de 90 grados. La señal transmitida $x(t)$ consta de la suma de las salidas de estos dos moduladores de producto, como se muestra:

$$f_{DM}(t) = A_c x_1(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c x_2(t) \sin(2\pi f_c t)$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan las dos señales diferentes de mensaje aplicadas a los moduladores de producto. Así, $f_{DM}(t)$ ocupa un ancho de banda de transmisión de $2w$, con centro en la frecuencia portadora f_c , donde w es el ancho de banda de mensaje de $x_1(t)$ o de $x_2(t)$. Conforme a la ecuación se puede ver $A_c x_1(t)$ como su componente en fase de la señal multiplexada (pasabanda), y $-A_c x_2(t)$ como su componente en cuadratura.

En la parte receptora la señal multiplexada $f_{DM}(t)$ se aplica simultáneamente a dos detectores coherentes separados que se alimentan con dos portadoras locales de la misma frecuencia, pero con una diferencia de fase de 90 grados. La salida de un detector es:

$$\frac{1}{2} A_c x_1(t)$$

mientras que la salida del segundo detector será:

$$\frac{1}{2} A_c x_2(t)$$

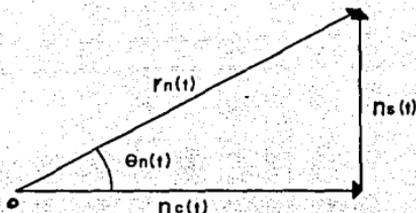
Para que el sistema trabaje satisfactoriamente, es importante que se mantengan las relaciones correctas de fase y de frecuencia entre los osciladores locales que se usan en la parte transmisora y en la receptora del sistema.

La multiplexión en portadora de cuadratura se utiliza en la televisión a color. En este sistema, se transmiten los pulsos de sincronización para mantener al oscilador local del receptor a la frecuencia y fase correctas con respecto a la portadora utilizada en el transmisor.

IV.10 INTERFERENCIA Y RUIDO EN SISTEMAS DE MODULACION LINEAL

Para examinar y comparar los diversos sistemas de modulación de A.M., se necesita una norma básica para la medición del comportamiento. Una magnitud conveniente es la razón entre la señal cuadrática media y el ruido cuadrático medio, medidos ambos en el mismo punto del sistema. Esta razón señal a ruido se representa por S/N con los subíndices apropiados.

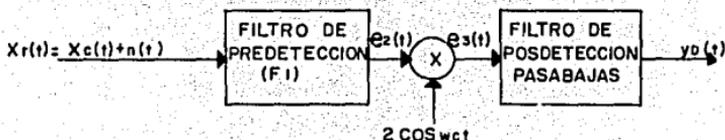
Comencemos por indicar que el ruido mencionado aquí, será ruido pasabanda, es decir, de banda limitada, dado que se tratará de ruido que se introducirá a sistemas pasabanda, que limita su ancho de banda; Así podemos aproximar el ruido con una representación fasorial:



donde $n_c(t)$ y $n_s(t)$ ambas aleatorias, representan, respectivamente, las componentes en fase y en cuadratura de ruido.

SISTEMA DOBLE BANDA LATERAL

Consideremos el diagrama a bloques siguiente:



La entrada del filtro de FI es la señal modulada más ruido con densidad de potencia espectral $1/2 N_0$ W/Hz (bilateral). Como se supone que la señal transmitida $X_c(t)$, es una señal DBL, se puede escribir la señal recibida como

$$X_r(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t + n(t)$$

donde $x(t)$ es el mensaje. Si el ancho de banda del filtro de predetección es 2ω , la señal DBL pasará en su totalidad por el filtro.

$$e_1(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t.$$

donde la potencia total de ruido es:

$$\frac{1}{2} n_c^2(t) + \frac{1}{2} n_s^2(t)$$

y es igual a $2n_0\omega$.

La relación señal a ruido de predetección, medida a la entrada del multiplicador, es:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{A_c^2 x^2}{4\omega n_0}$$

para calcular S/N de detección, se calcula primero $e_2(t)$:

$$e_2(t) = A_c x(t) + A_c x(t) \cos 2\omega_c t + n_c(t) + n_c(t) \cos 2\omega_c t - n_s(t) \sin 2\omega_c t$$

Después del filtro de postdetección:

$$Y_D(t) = A_c x(t) + n_c(t)$$

De aquí:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{A_c^2 x^2}{2n_0\omega}$$

La relación de $(S/N)_D$ a $(S/N)_r$ se llama ganancia de detección y se usa a menudo como una cifra de mérito para un demodulador.

Para el demodulador coherente DBL, la ganancia de detección es:

$$\frac{(S/N)_D}{(S/N)_T} = 2$$

SISTEMA DE BANDA LATERAL UNICA.

En este caso la entrada al filtro de predetección es:

$$X_r(t) = A_c [X(t) \cos \omega_c t \pm \hat{X}(t) \operatorname{sen} \omega_c t] + n(t)$$

y su salida será:

$$e_2(t) = A_c [X(t) \cos \omega_c t \pm \hat{X}(t) \operatorname{sen} \omega_c t] + n_o(t) \cos \omega_c t \pm n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t$$

donde:

$$\omega_r = \omega_c \pm \frac{1}{2} 2\pi\omega, \text{ y}$$

$$\overline{n_o^2} = \overline{n_s^2} = n^2 = n_o \omega$$

como ya se vio, la demodulación se realiza por la multiplicación de $e_2(t)$ por $\cos \omega_c t$ y la filtración de pasabajas. El resultado es:

$$Y_D(t) = A_c X(t) + n_o(t) \cos \omega_c t \pm n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t$$

la potencia de postdetección de la señal es:

$$S_T = [A_c (X(t) \cos \omega_c t \pm \hat{X}(t) \operatorname{sen} \omega_c t)]^2$$

$$S_T = A_c^2 X^2$$

dado que una función y su transformada de Hilbert son ortogonales y de potencia igual para el caso del ruido:

$$N_r = N_o = n_o \omega$$

por lo que:

$$(S/N)_D = \frac{A_c^2 \bar{x}^2}{N_0 \omega}$$

$$(S/N)_T = (S/N)_D$$

$$\frac{(S/N)_D}{(S/N)_T} = 1$$

SISTEMA AM:

Una señal AM es:

$$x_o(t) = A_c [1 + mX(t)] \cos \omega_c t$$

donde $x_n(t)$ es la señal moduladora y m el índice de modulación.

Con base en el análisis para DBL, tenemos:

$$Y_D(t) = A_c m X(t) + n_o(t)$$

de donde

$$S_D = A_c^2 m^2 \bar{x}^2$$

y

$$N_D = N_0 \omega = 2N_0 \omega$$

para el caso de predetección, la potencia de la señal es:

$$S_T = \frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} A_c^2 m^2 \bar{x}^2$$

y

$$N_T = 2N_0 \omega$$

ya que el ancho requerido de transmisión para AM es 2ω .

La ganancia de detección es, por tanto:

$$\frac{(S/R)_D}{(S/R)_T} = \frac{2m^2x^2}{1+m^2x^2}$$

suponiendo un valor pico de la señal $x(t)=1$, su valor medio cuadrático máximo es la unidad también, y por lo tanto, para el caso $m=1$

$$\frac{(S/R)_D}{(S/R)_T} = 1$$

que es la mitad del valor obtenido para DBL.

Como el ancho de banda requerido de predetección para AM y DBL son iguales, AM es inferior a DBL por lo menos en 3 dB. en un sistema práctico, como transmisión comercial de AM, la situación es mucho peor pues, típicamente, $m < 1$ y $x^2 \approx 0.1$, suponiendo 1 como valor máximo normalizado.

SISTEMA AM CON DETECCION DE ENVOLVENTE.

Como la detección de envolvente es el método usual para demodular una señal AM, es importante comparar la relación señal a ruido con la de la detección coherente.

A la entrada del detector de envolvente se tiene;

$$X_r(t) = A_c [1 + mx(t)] \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t.$$

recordando la representación fasorial del ruido vista al principio de esta sección:

$$X_r(t) = r_n(t) \cos[\omega_c(t) + \theta_n(t)]$$

$$r_n(t) = \sqrt{[A_c(1+mx(t)) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}$$

y

$$\theta_n(t) = \tan^{-1} \frac{n_n(t)}{A_c[1+mx(t)] + n_c(t)}$$

La salida de un detector de envolvente es independiente de las variaciones de fase de la entrada, por lo que sólo se considerará $n_n(t)$.

Si $(S/N)_T$ es alta, $n_n(t) \approx 0$; y ;

$$Y_D(t) = A_c mx(t) + n_c(t)$$

Así, se observa que la salida del detector de envolvente para $(S/N)_T$ alta, es igual que la del detector coherente de DBL. La ganancia de detección está dada también por:

$$\frac{(S/N)_D}{(S/N)_T} = \frac{2m^2x^2}{1+m^2x^2}$$

para el caso de $(S/N)_T$ baja (es decir ruido alto) ya no puede hacerse la aproximación considerada y la envolvente es:

$$r_n(t) = \sqrt{A_c^2 + 2A_c mx(t) + mx^2(t) n_c(t) + 2mx(t) n_c(t) + n_c^2(t) + n_n^2(t)}$$

este resultado muestra que no sólo se agregan términos de ruido sino que la señal deseada está multiplicada por ruido. Es decir, para condiciones de $(S/N)_T$ baja, la señal deseada es irremisiblemente mutilada por el detector de envolvente y, por lo que se refiere a la recepción, la señal recibida es inexistente. Esta pérdida total del mensaje ocurre a relaciones S/N bajas y se llama *efecto de umbral*. Este nombre proviene de que hay cierto valor de la relación señal a ruido de entrada por encima del cual la mutilación se hace despreciable y por debajo, el comportamiento del sistema se deteriora rápidamente.

INTERFERENCIA.

Aunque, en general, toda señal no deseada en la banda de frecuencia útil de un sistema de comunicaciones que tiende a enmascarar la señal deseada se le denomina ruido, existe un caso particular que es cuando dicha señal es inteligible: entonces se dice que la señal es interferente.

Ya en el capítulo I se ha hablado de la interferencia en un sistema de comunicación. Aunque existen muchos tipos de interferencia, podemos generalizar una expresión matemática, considerando que, independientemente del origen, la señal interferente tiene una amplitud A_I y frecuencia $\omega_C + \omega_I$.

Suponiendo que, en la recepción se tiene una portadora limpia de amplitud A_R y frecuencia ω_C , más interferencia:

$$v(t) = A_R \cos \omega_C t + A_I \cos (\omega_C + \omega_I) t$$

descomponiendo el segundo sumando en sus componentes en fase y cuadratura, la envolvente estará dada por:

$$R_v(t) = \sqrt{(A_R + A_I \cos \omega_I t)^2 + (A_I \sin (\omega_C + \omega_I) t)^2}$$

y la fase de $v(t)$ es:

$$\phi_v(t) = \arctan \frac{A_I \sin \omega_I t}{A_R + A_I \cos \omega_I t}$$

Si la interferencia es pequeña en comparación con la portadora, la envolvente resultante es, esencialmente, la suma de las componentes en fase, es decir

$$R_v(t) = A_R + A_I \cos \omega_C t$$

mientras que la componente en cuadratura determina el ángulo de fase:

$$\phi_v(t) = \frac{A_I}{A_R} \text{sen} \omega_r t$$

asi:

$$v(t) = A_R (1 + m_r \cos \omega_r t) \cos \omega_c t + m_r \text{sen} \omega_r t$$

Se observa en la expresión anterior que la onda interferente modula la amplitud y la fase de una portadora precisamente con un tono modulante F_r con índice de modulación

$$m_r = \frac{A_I}{A_R}$$

Volviendo al diagrama a bloques de la página IV-42, la salida demodulada para detección de envolvente sería:

$$Y_D(t) = A_I \cos \omega_r t \quad F_r < W$$

mientras que para detección sincrónica se tiene:

$$Y_D(t) = A_R + A_I \cos \omega_r t \quad F_r < W$$

Evidentemente, las complicaciones se multiplican en forma rápida cuando la interferencia es grande o la portadora es modulada. Anticipándose un poco al capítulo siguiente, se verá que la FM es menos vulnerable a la interferencia de amplitud pequeña que la modulación lineal.

V. MODULACION ANGULAR

OBJETIVO: Comprender las características fundamentales de las técnicas de modulación angular.

ANTECEDENTES: Análisis de Sistemas y Señales.
Dinámica de Sistemas Físicos.

CONCEPTOS: Transformada de Fourier y sus Propiedades.
Sistemas Lineales.
Sistemas no Lineales.

V. 1.- TECNICAS DE MODULACION ANGULAR.

En el capítulo anterior se describió a una señal sinusoidal mediante tres variables: amplitud, frecuencia y fase. Al hacer variar la amplitud A de la señal

$$f(t) = A \cos(2\pi f t + \phi)$$

en función de la señal de información, se tiene, como se recordará, una onda modulada en amplitud. En este capítulo se verá que la variación de la frecuencia ó la fase de la señal produce también una modulación.

Definamos ahora el concepto de frecuencia instantánea para entender lo que es variación de frecuencia. Imaginemos una señal cuya frecuencia es constante hasta cierto tiempo T , en el que ésta cambia al doble del valor de la original. Un tiempo después, la frecuencia vuelve a duplicarse, es decir, ahora es cuatro veces la frecuencia original. En este sencillo ejemplo se entiende fácilmente el concepto de variación de frecuencia. Supongamos ahora que el cambio de frecuencia no es brusco, sino gradual. En este caso la frecuencia cambia continuamente de su valor original hasta cuatro veces su valor en el mismo lapso de tiempo en el que antes lo hizo con dos saltos bruscos. Es claro que la señal mencionada no puede representarse mediante una expresión sinusoidal ordinaria, por tratarse de una variación continua de frecuencia. Podemos definir una función sinusoidal generalizada como:

$$f(t) = A \cos \theta(t)$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo de la señal sinusoidal en función del tiempo. Para una función sinusoidal ordinaria de frecuencia fija:

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

entonces:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

expresión que se conoce como desviación de fase instantánea con respecto del ángulo $\omega_0(t)$, donde;

$$\omega_0 = \frac{d\theta}{dt}$$

queda definida como frecuencia instantánea la expresión:

$$\omega_1 = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{o bien:} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{dt}$$

Así, la relación entre el ángulo $\theta(t)$ y la frecuencia instantánea ω_1 queda establecida como:

$$\omega_1 = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta(t) = \int \omega_1 dt$$

Las técnicas de modulación en las que se hace variar el ángulo de la portadora en alguna forma con una señal moduladora como se ha observado con el desarrollo anterior, se conocen como Modulación Angular.

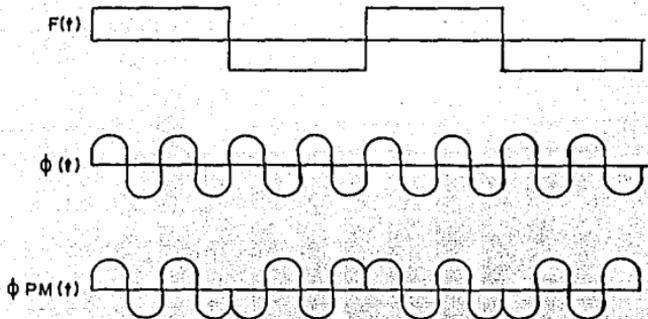
V. 1 a).- MODULACION EN FRECUENCIA Y MODULACION EN FASE.

Los dos principales métodos de modulación angular son:

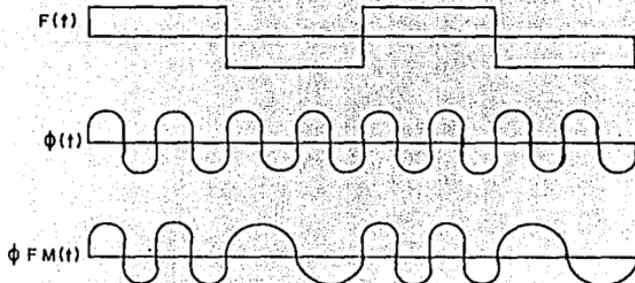
Modulación en Fase (PM, Phase Modulation) y

Modulación en Frecuencia (FM, Frequency Modulation)

Veamos gráficamente cada una de ellas. Supongamos que la señal $f(t)$ va a modular en fase a una onda $\phi(t)$. El resultado se observa claramente, dada la sencillez de la onda moduladora.



Si lo que se desea es que $f(t)$ module en frecuencia a $\phi(t)$, se tiene:



Usemos ahora el concepto de frecuencia instantánea para describir estos dos métodos:

Variando el ángulo de fase $\theta(t)$ en forma lineal con la señal de entrada $f(t)$, se tiene que:

$$\theta(t) = \omega_0 t + k_p f(t) + \theta_0$$

donde ω_0 , k_p y θ_0 son constantes. Como es la fase la que está linealmente relacionada con $f(t)$, a este tipo de modulación angular se le llama Modulación de Fase (PM).

La frecuencia instantánea en este caso es:

$$\omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega_0 t}{dt} + \frac{dk_p f(t)}{dt} + \frac{d\theta_0}{dt}$$

$$\omega_1 = \omega_0 + k_p \frac{df(t)}{dt}$$

Hagamos ahora la frecuencia instantánea proporcional a la señal de entrada:

$$\omega_1 = \omega_0 + k_f f(t)$$

donde ω_0 y k_f son constantes. Como la frecuencia en este caso está linealmente relacionada con $f(t)$, este tipo de modulación angular se llama modulación de frecuencia (FM). El ángulo de fase de esta señal de FM es:

$$\omega_1(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + k_f f(t)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_k f(t) dt + \omega_0 t + \theta_0$$

V. 1 b).- ECUACIONES DE LAS SEÑALES DE FM Y PM.

Con base en las explicaciones anteriores, podemos anotar ahora las ecuaciones para las señales de modulación de ángulo:

La ecuación que relaciona a la señal $f(t)$ (moduladora) y a la señal modulada en frecuencia es:

$$f_{fm}(t) = A \cos [w_0 t + k_f \int_0^t f(t) dt + \theta_0]$$

o, mas correctamente,

$$f_{fm}(t) = A_0 \cos [2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t f(t) dt]$$

La ecuación que relaciona a la señal $f(t)$ y a la señal modulada en fase es:

$$f_{fm}(t) = A \cos [w_0 t + k_p f(t) + \theta_0]$$

o, mas correctamente,

$$f_{fm}(t) = A_c \cos [2\pi f_0 t + 2\pi k_p f(t)]$$

Comparando ambas ecuaciones se observa claramente que en la modulación de fase, el ángulo de fase de la portadora varía linealmente con la señal moduladora, mientras que en la modulación de frecuencia el ángulo de fase de la portadora varía linealmente con la integral de la señal moduladora. En las ecuaciones finales de $f_{fm}(t)$ y $f_{fm}(t)$, si $f(t)$ es una onda de voltaje, k_p representa la sensibilidad de fase, expresada en radianes por volt; k_f es la sensibilidad de frecuencia, expresada en hertz por volt; f_0 es la frecuencia de la portadora no modulada, A_c la amplitud de la misma y, por conveniencia, se ha supuesto que el ángulo de la portadora no modulada es cero cuando $t = 0$.

Antes de seguir adelante, es necesario aclarar lo siguiente: En el caso de las señales de AM, siempre había una correspondencia unívoca entre la señal modulada y la moduladora; esto es, la modulación en amplitud es lineal. Sin embargo, para

FM y PM esto no siempre es cierto, como puede verse en el razonamiento siguiente:

Representemos una señal PM en forma compleja:

$$\phi_{pm}(t) = Ae^{j\theta(t)}$$

sustituyendo el valor de $\theta(t)$, tenemos:

$$\phi_{pm}(t) = Ae^{j(\omega_c t + \theta_0)} e^{jk_p f(t)}$$

usando ahora una expansión en serie del factor $e^{jk_p f(t)}$ se tiene:

$$\phi_{pm}(t) = Ae^{j(\omega_c t + \theta_0)} \left[1 + jk_p f(t) - \frac{1}{2!} k_p^2 f^2(t) + \dots \right]$$

de este resultado se concluye que, a menos que $|k_p f(t)| \ll 1$, la modulación angular -en este caso PM- no es lineal. Por tanto, puede esperarse que, en general, las bandas laterales que aparecen en la modulación de ángulo no obedezcan el principio de superposición.

Como lo implican las consideraciones anteriores, es difícil una descripción exacta de los espectros de la modulación angular, salvo para ciertas señales moduladoras sencillas. Por tanto, sólo se tomarán casos específicos y no una función generalizada $f(t)$.

V. 2.- MODULACION ANGULAR DE TONO UNICO

Con la modulación de un tono, la frecuencia instantánea de una señal de FM varía en forma senoidal en relación con la frecuencia portadora:

$$\text{si } f(t) = A_m \cos \omega_m t$$

$$\text{o bien: } f(t) = A_m \cos (2\pi f_m t)$$

la frecuencia instantánea de la onda FM resultante es:

$$f_i = f_c + \Delta f \cos (2\pi f_m t)$$

lo anterior suponiendo que $\theta_0 = 0$, para mayor facilidad. En la expresión, la cantidad

$$\Delta f = k_f A_m$$

se llama desviación de frecuencia, y representa el máximo alejamiento de la frecuencia instantánea de la onda FM de la frecuencia portadora f_c . Evidentemente, la desviación de frecuencia es proporcional a la amplitud de la onda moduladora y es independiente de la frecuencia de modulación.

Al utilizar la ecuación

$$f_i = f_c + \Delta f \cos (2\pi f_m t)$$

el ángulo θ_1 de la onda FM se obtiene como:

$$\theta_1(t) = \int_0^t f_i(t) dt$$

$$\theta_1(t) = 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin (2\pi f_m t)$$

La relación entre la desviación de frecuencia y la frecuencia de modulación se llama, por lo general, índice de modulación de la onda FM. Se denota por β .

y
$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)$$

Se observa que β representa la desviación de fase de la onda FM, o sea, la máxima separación entre el ángulo $\theta_i(t)$ y el ángulo de fase $2\pi f_c t$ de la portadora no modulada. Finalmente, la onda de FM está dada por:

$$f_{fm}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

En el caso de una onda PM se tiene que el ángulo

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p i(t)$$

estará dado por:

$$\theta_{ipm}(t) = 2\pi f_c t + k_p A_m \cos(2\pi f_m t)$$

comparando con el ángulo de la onda FM:

$$\theta_{ifm}(t) = 2\pi f_c t + (k_f A_m / f_m) \sin(2\pi f_m t)$$

Se observa que una onda FM puede considerarse como una onda PM en la cual la onda moduladora es la integral de $i(t)$ en lugar de $f(t)$. Así, pueden deducirse todas las propiedades de las ondas PM a partir de las propiedades de las ondas FM y viceversa.

Dado que un análisis por separado de ambos tipos de modulación sería repetitivo y repercutiría en un duplicado de espacio en este capítulo, de aquí en adelante se considerarán sólo las ondas FM.

V. 3.- MODULACION ANGULAR DE BANDA ANGOSTA

Dependiendo del valor del índice de modulación β , es posible distinguir dos casos de modulación: Banda Angosta (Narrow Band Frequency Modulation NBFM) y Banda Ancha (Width Band Frequency Modulation WBFM). Se considerarán los casos de FM de banda angosta, para la cual β es pequeño y FM de banda ancha, para la cual β es grande, ambas comparadas con un radián. Se verá que la razón de esta distinción en bandas es que en el primer caso, el ancho de banda es aproximadamente el doble del ancho de banda de la señal de información, mientras que en el segundo, excede mucho de ese valor.

Considerando la ecuación:

$$f_m(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \beta \sin (2\pi f_m t)]$$

que define a una onda de FM usando como señal moduladora una onda cosenoidal, se obtiene, al desarrollarla:

$$f_m(t) = A_c \cos (2\pi f_c t) \cos [\beta \sin (2\pi f_m t)] - \\ A_c \sin (2\pi f_c t) \sin [\beta \sin (2\pi f_m t)]$$

Suponiendo ahora que β es pequeño en comparación con un radián, se pueden utilizar las aproximaciones siguientes:

$$\cos [\beta \sin (2\pi f_m t)] \approx 1$$

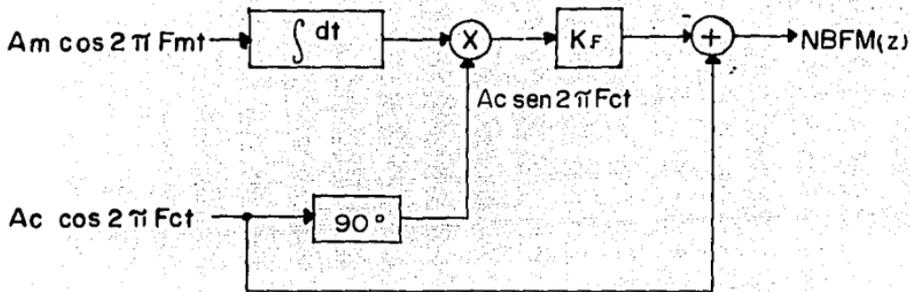
y

$$\sin [\beta \sin (2\pi f_m t)] \approx \beta \sin (2\pi f_m t)$$

Ahora puede simplificarse la ecuación inicial como se indica:

$$f_m(t) \approx A_c \cos (2\pi f_c t) - \beta A_c \sin (2\pi f_c t) \sin (2\pi f_m t)$$

La última ecuación define la forma aproximada de una onda de FM de banda angosta producida por una onda moduladora cosenoidal $A_m \cos(2\pi f_m t)$. En el siguiente diagrama a bloques se muestra la implementación.



Resulta evidente que para construir un modulador de fase de banda angosta, debe suprimirse el integrador del diagrama a bloques indicado, y sustituir k_F en vez de k_f .

Comparando ahora la ecuación $f_{nbzfm}(t)$ con la ecuación para una onda de AM:

$$f_{nbzfm}(t) = A \cos(2\pi f_c t) + \beta A \beta_a [\cos(2\pi(f_c + f_m)t) - \cos(2\pi(f_c - f_m)t)]$$

$$f_{am}(t) = A \cos(2\pi f_c t) + \beta A \beta_a [\cos(2\pi(f_c + f_m)t) + \cos(2\pi(f_c - f_m)t)]$$

donde β es el índice de modulación de FM y m el de AM, se observa que en el caso de una moduladora cosenoidal la diferencia básica es el signo de la frecuencia lateral inferior en la onda FM de banda angosta es contrario. Entonces, una onda NBFM requiere esencialmente el mismo ancho de banda de transmisión (o sea $2f_m$) que la onda de AM. En la sección V.6 a) se muestran los espectros correspondientes.

La FM de banda estrecha se usa principalmente en telemetría y comunicaciones móviles, como en taxis, policía, ambulancias, etc.

V. 4.- MODULACION ANGULAR DE BANDA ANCHA.

En general, una onda FM producida por una onda moduladora cosenoidal, como la que hemos manejado hasta ahora, por sí misma es no-periódica, a menos que la frecuencia portadora f_c sea un múltiplo entero de la frecuencia de modulación f_m . Sin embargo al escribir:

$$f(t) = A_0 \cos [2\pi f_c t + \beta \sin (2\pi f_m t)]$$

como

$$f(t) = \text{Re}[A_0 e^{j2\pi f_c t} + j\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

$$f(t) = \text{Re}[A_0 e^{j2\pi f_c t} e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}]$$

y haciendo

$$\tilde{f}(t) = A_0 e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}$$

siendo esta la envolvente compleja de la onda FM, tenemos:

$$f(t) = \text{Re}[\tilde{f}(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

obsérvese que ahora $\tilde{f}(t)$ es función periódica del tiempo, con frecuencia fundamental f_m y puede desarrollarse en forma de una serie compleja de Fourier:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_m t}$$

en donde el coeficiente complejo de Fourier C_n es:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi n f_m t} dt$$

o bien:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} A_0 e^{j\beta \cos n\pi f t} - j 2\pi n f t dt$$

definiendo la variable

$$x = 2\pi f t,$$

nos queda:

$$c_n = \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta \cos n\pi x} - j n x dx$$

Se define como función de Bessel de orden n de primera clase y argumento x , $J_n(x)$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j x \cos \theta} - j n \theta d\theta$$

(puede consultarse el apéndice 4 de Sistemas de Comunicación de S. Haykin, Editorial Limusa).

En consecuencia, podemos escribir el término c_n como:

$$c_n = A_0 J_n(\beta)$$

donde:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta \cos \theta} - j n \theta d\theta$$

que es una función de Bessel de orden n , de primera clase y argumento β .

Ahora, sustituyendo:

$$f(t) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j 2\pi n f t}$$

y:

$$f(t) = A_0 \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j 2\pi n f t} \right]$$

o bien:

$$f(t) = A_0 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(fc + nfm)t] \right]$$

Que es la representación en serie de Fourier de una onda FM de tono único para un valor arbitrario de β .

Como ya se ha mencionado, resulta evidente que el ancho de banda en este caso supera por mucho, al valor de $2f_m$ cuando $\beta > 1$ radián, razón por la cual la expresión anterior define a la frecuencia modulada de banda ancha, con $\beta = 1$. En la sección V.6 b) se muestran los espectros correspondientes a ondas de este tipo.

Para la radiodifusión comercial FM, en muchos países se asignan frecuencias portadoras espaciadas 200 KHz, en la gama de 88 - 108 MHz y se fija la desviación de frecuencia pico en 75 KHz.

Los 200 KHz disponibles para cada estación, en comparación con 10 KHz de la radiodifusión AM, permiten la transmisión de material de alta fidelidad, con espacio de sobra, llenando la banda con FM de banda ancha.

V. 5.- MODULACION ANGULAR DE MULTITONO.

En una aplicación práctica de FM, la onda moduladora $f(t)$ es por lo general de multitono, ya que consta de un grupo de ondas senoidales de frecuencias diferentes que pueden encontrarse por completo no relacionadas, o bien relacionadas armónicamente. Consideremos una onda portadora $A_c \cos(2\pi f_c t)$ modulada en frecuencia mediante dos tonos de frecuencias f_1 y f_2 . La onda FM resultante es:

$$f_{zm}(t) = A_c \cos [(2\pi f_c)t + \beta_1 \sin(2\pi f_1 t) + \beta_2 \sin(2\pi f_2 t)]$$

en donde β_1 representa al índice de modulación del primer tono y β_2 el del segundo tono. Siguiendo un procedimiento similar al que se utilizó para el análisis de la onda FM producida por una modulación de tono único, se puede desarrollar la onda modulada de la ecuación $f_{zm}(t)$ como sigue:

$$f_{zm}(t) = A_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) \cos[2\pi(f_c + mf_1 + nf_2)t]$$

La ecuación anterior puede hacerse extensiva a las ondas moduladas con más de dos tonos; sin embargo, su análisis llega a ser más complicado.

V. 6.- ESPECTROS DE LAS SEÑALES DE MODULACION ANGULAR.

V. 6 a).- ESPECTRO PARA UNA MODULACION MEDIANTE UN TONO.

Recuérdese que en la sección V.4 se obtuvo la expresión

$$f(t) = A_c \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t] \right]$$

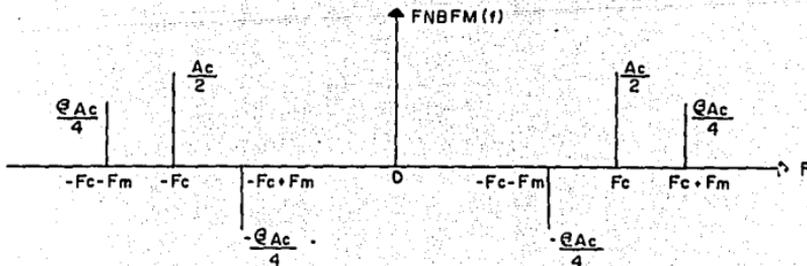
que es la representación en serie de Fourier de una onda FM de tono único, para un valor arbitrario de β . En el caso de la FM de banda angosta, se ha visto que requiere, al igual que la AM, de un ancho de banda de $B = 2f_m$ para transmitir una señal de f_m Hz de ancho espectral. En NBFM, el índice de modulación suele hacerse $\beta < 0.2$ y, como se recordará, se había desarrollado la ecuación

$$f_{NBFM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} A_c \beta [\cos(2\pi(f_c + f_m)t) - \cos(2\pi(f_c - f_m)t)]$$

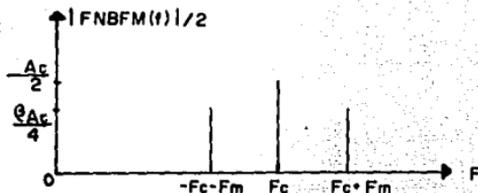
obteniendo las transformadas de Fourier en ambos miembros:

$$F_{NBFM}(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{1}{4} \beta A_c [\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c - f_m)] - \frac{1}{4} \beta A_c [\delta(f - f_c + f_m) - \delta(f + f_c - f_m)]$$

El espectro correspondiente se muestra abajo.



Con el objeto de mostrar más claramente la relación entre la AM y NBFM, abajo se muestra sólo las amplitudes absolutas de la parte positiva del eje de las frecuencias.



Para obtener el espectro de una señal WBFM puede hacerse uso de las funciones de Bessel, mencionadas anteriormente.

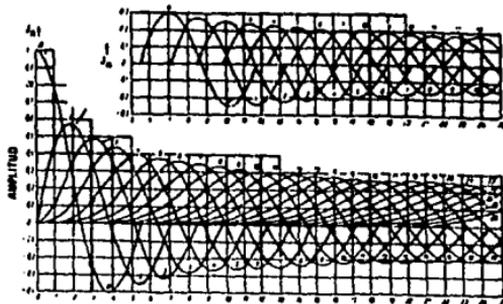
Partiendo de

$$f(t) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t]$$

se encuentra la transformada de Fourier correspondiente:

$$F(f) = \frac{A_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$

A continuación se muestran la gráfica y la tabla de funciones de Bessel de primera clase contra el índice de modulación, para diferentes valores enteros positivos de n .



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.7652	0.2239	-0.2601	-0.3971	-0.1776	0.1506	0.3001	0.1717	-0.09033	-0.2459
1	0.4401	0.5767	0.1391	-0.06508	-0.3276	-0.2767	-0.006683	0.2346	0.2453	0.04347
2	0.1189	0.3528	0.4861	0.3641	0.04657	-0.2429	-0.3014	-0.1130	0.1448	0.2546
3	0.01956	0.1289	0.3091	0.4302	0.3648	0.1148	-0.1476	-0.2911	-0.1809	0.08338
4	0.002477	0.03400	0.1320	0.2811	0.3912	0.3576	0.1578	-0.1054	-0.2655	-0.2196
5		0.007040	0.04303	0.1321	0.2611	0.3621	0.3479	0.1858	-0.05504	-0.2341
6		0.001202	0.01139	0.04909	0.1310	0.2458	0.3392	0.3376	0.2043	-0.01446
7			0.002547	0.01518	0.05338	0.1296	0.2336	0.3206	0.3275	0.2167
8				0.004029	0.01841	0.05633	0.1280	0.2235	0.3051	0.3179
9					0.005520	0.02117	0.05892	0.1263	0.2149	0.2919
10					0.001468	0.006964	0.02354	0.06077	0.1247	0.2075
11						0.002048	0.008333	0.02560	0.06222	0.1231
12							0.002656	0.009624	0.02739	0.06337
13								0.003275	0.01083	0.02897
14								0.001019	0.003895	0.01196
15									0.001286	0.004508
16										0.001567

Las funciones Bessel cumplen con las siguientes propiedades:

1. $-J_n(\beta) = J_{-n}(\beta)$ para n par
2. $-J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta)$ para n impar
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$

Con lo anterior, podemos concluir que el espectro de una onda de FM de banda ancha contiene una componente de portadora y un conjunto infinito de frecuencias laterales que se localizan simétricamente en ambos lados de tal portadora, con separación de frecuencia de f_m , $2f_m$, $3f_m$, ... Así, expandiendo la sumatoria de $f_{FM}(t)$

$$F_{FM}(t) = A_c \left[J_0(\beta) \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \right] +$$

$$J_1(\beta) \left[\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m) \right]$$

$$J_2(\beta) \left[\delta(f - f_c - 2f_m) + \delta(f + f_c + 2f_m) \right]$$

$$J_3(\beta) \left[\delta(f - f_c - 3f_m) + \delta(f + f_c + 3f_m) \right]$$

Por ejemplo, para $\beta = 6$, $A_c = 2V$, $f_c = 10$ KHz y $f_m = 1$ KHz:

$$J_0(6) \left[\delta(f - 10000) + \delta(f + 10000) \right]$$

$$J_1(6) \left[\delta(f - 11000) + \delta(f + 11000) \right]$$

$$J_{-1}(6) \left[\delta(f - 9000) + \delta(f + 9000) \right]$$

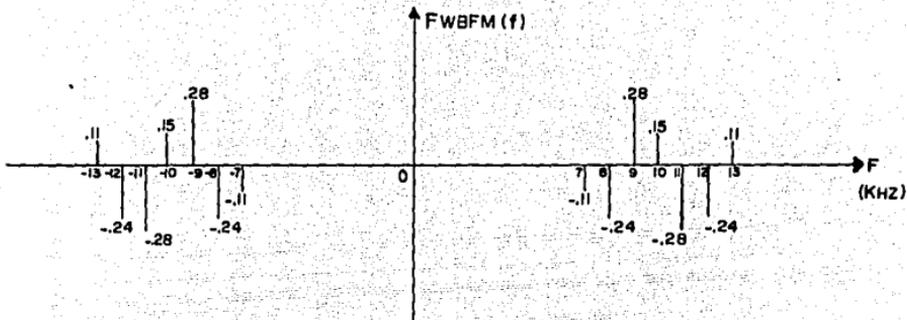
$$J_2(6) \left[\delta(f - 12000) + \delta(f + 12000) \right]$$

$$J_{-2}(6) \left[\delta(f - 8000) + \delta(f + 8000) \right]$$

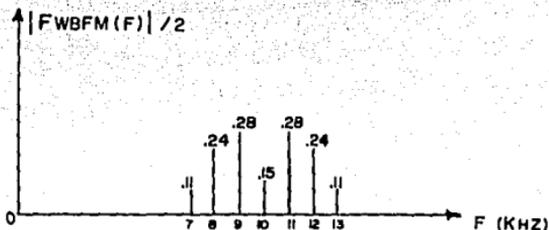
$$J_3(6) \left[\delta(f - 13000) + \delta(f + 13000) \right]$$

$$J_{-3}(6) \left[\delta(f - 7000) + \delta(f + 7000) \right]$$

De la tabla de Bessel se obtienen los valores de $J_n(\beta)$ para $n \geq 0$; de las propiedades 1 y 2 de las funciones se obtienen los valores para $n < 0$, y el espectro queda:



Para mayor claridad se considerarán, de nuevo, sólo las amplitudes absolutas de la parte positiva del eje de frecuencias.



Obsérvese que, si β fuese distinto de 6, la amplitud de la portadora variaría, en función de $J_0(\beta)$, cosa que no ocurre en la modulación en amplitud. Además, se ha truncado el espectro para $n = \pm 3$. Según la tabla de Bessel, para $\beta = 6$, deberían considerarse armónicas incluso para J_{10} . En la sección V. 8 se estudiarán algunos criterios para restringir el ancho de banda de estas ondas moduladas en ángulo.

V. 6 b).-ESPECTRO PARA UNA MODULACION MEDIANTE UNA SEÑAL MULTITONO.

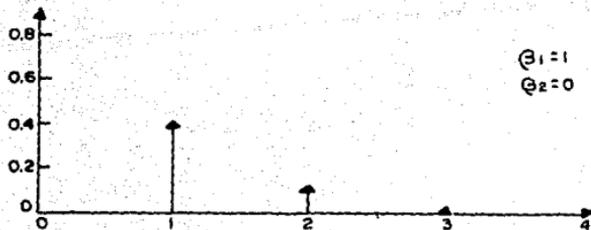
Recordemos la ecuación obtenida para una onda de FM producida por una modulación de dos tonos:

$$f_m(t) = A_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) \cos[2\pi(f_c + mf_1 + nf_2)t]$$

Tal ecuación muestra que el espectro de una onda FM de esta naturaleza consta de cuatro tipos de términos:

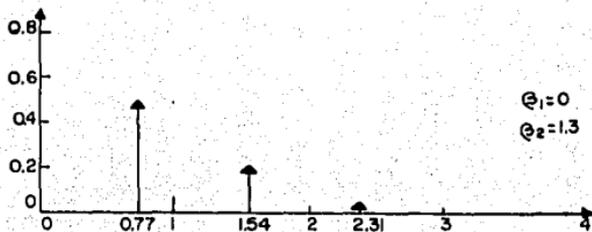
- a) una portadora, de amplitud $J_0(\beta_1)J_0(\beta_2)$ y frecuencia f_c .
- b) un conjunto de frecuencias laterales que corresponden a la frecuencia de modulación f_1 , con amplitudes $J_m(\beta_1)J_0(\beta_2)$ y frecuencias $(f_c \pm mf_1)$, con $m = 1, 2, 3, \dots$
- c) un conjunto de frecuencias laterales que corresponden a la frecuencia de modulación f_2 , con amplitudes $J_0(\beta_1)J_n(\beta_2)$ y frecuencias $(f_c \pm nf_2)$, con $n = 1, 2, 3, \dots$
- d) un conjunto de términos de modulación cruzada con amplitudes $J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)$ y frecuencias $(f_c \pm mf_1 \pm nf_2)$, en donde $m = 1, 2, 3, \dots$ y $n = 1, 2, 3, \dots$

Consideremos, por ejemplo, una onda moduladora de dos tonos, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1.3$, $f_1 = 1$ KHz y $f_2 = 0.77$ KHz. Modulando la portadora por separado, se obtienen los espectros mostrados abajo:

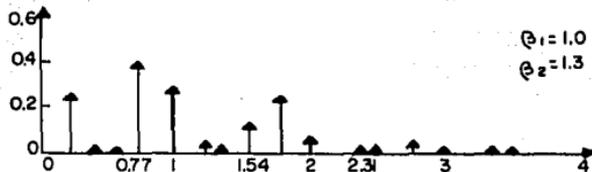


V-20

FALLA DE ORIGEN



Sin embargo, al modular en conjunto, el espectro resulta:



Claramente se observa que aparecen nuevas componentes espectrales y que cambiaron las amplitudes de las componentes que aparecieron cuando se aplicaron las moduladoras por separado. Esto se debe a que cada amplitud se determina por el producto de dos funciones de Bessel.

V. 7.- POTENCIA MEDIA EN SEÑALES DE MODULACION ANGULAR

La amplitud de la moduladora, como se recordará, varía con β de acuerdo con $J_0(\beta)$. Esto es, la amplitud de la componente de portadora de una onda FM depende del índice de modulación β . La explicación física de esta propiedad es que la envolvente de una onda FM es constante, así que la potencia media de esa onda desarrollada a través de una resistencia de 1 ohm es también constante.

Considere la ecuación:

$$f_{FM}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \beta \sin (2\pi f_m t)]$$

El valor medio cuadrático de esta expresión es:

$$\overline{f_{FM}^2(t)} = \frac{1}{2} A_c^2,$$

mostrando que la potencia media total de una onda FM es constante, cualquiera que sea el índice de modulación, a diferencia de la AM, en donde la potencia media total es proporcional a dicho índice.

En este caso se consideró la ecuación de fm modulada por un tono, sin embargo puede ampliarse esta conclusión a cualquier onda moduladora de banda limitada arbitraria.

Por supuesto, el valor cuadrático medio es idéntico a la potencia media si $R = 1 \Omega$:

$$P = \frac{1}{2} A_c^2$$

Puede verificarse lo anterior usando la ecuación

$$f(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(fc + nfm)t]$$

Debido a la ortogonalidad de los términos en coseno, el valor medio cuadrático de la suma es igual a la suma de los valores cuadráticos medios:

$$\overline{f_{fm}^2(t)} = \frac{1}{2} A_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)$$

pero, por las propiedades de las funciones de Bessel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

por lo que

$$\overline{f_{fm}^2(t)} = \frac{1}{2} A_0^2$$

La independencia que existe entre la señal moduladora y la potencia media de la señal modulada es una ventaja indiscutible de la FM: significa que pueden diseñarse transmisores de FM más eficientes, debido a la potencia constante de la señal modulada.

$$f_{FM}^2(t) = \frac{1}{2} A_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)$$

pero, por las propiedades de las funciones de Bessel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

por lo que

$$f_{FM}^2(t) = \frac{1}{2} A_0^2$$

La independencia que existe entre la señal moduladora y la potencia media de la señal modulada es una ventaja indiscutible de la FM: significa que pueden diseñarse transmisores de FM más eficientes, debido a la potencia constante de la señal modulada.

V. 8.- CRITERIOS PARA DETERMINAR EL ANCHO DE BANDA DE LAS SEÑALES DE MODULACION ANGULAR.

Teóricamente, una onda de FM contiene un número infinito de frecuencias laterales, por lo que el ancho de banda requerido para la transmisión de tal señal es, similarmente, infinito. Sin embargo, en la práctica, la señal de FM se limita a un número finito de frecuencias laterales significativas. Podemos, entonces, especificar un ancho de banda efectivo que sea necesario para la transmisión de una onda de FM.

Una regla comúnmente adoptada es que si una banda lateral tiene magnitud igual ó mayor al 1% de la de la portadora no modulada es significativa y debe considerarse, es decir, si

$$|J_n(\beta)| \geq 0.01$$

Desde el punto de vista de la tabla de Bessel, significa que todos los valores deben truncarse a dos decimales.

Una regla más general se obtiene observando los casos extremos: en NBFM el ancho de banda es aproximado a $2f_m$, y para valores grandes de β , el ancho de banda se aproxima, y es ligeramente mayor que la excursión de frecuencia total $2\Delta f$. Con lo anterior es posible definir, en forma aproximada, una regla para el ancho de banda de transmisión de una onda de FM generada por una señal moduladora de tono único y frecuencia F_m , como sigue:

$$B_T \approx 2\Delta f + 2f_m$$

o bien:

$$B_T \approx 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

relación que se conoce como Regla de Carson.

Por ejemplo, en muchos países, incluido México, la desviación de frecuencia máxima es 75 KHz para la radiodifusión comercial de FM. Si la frecuencia de modulación se toma como $f_m = 15$ KHz, el ancho de banda será:

$$B_T = 2(75 + 15) = 180 \text{ KHz}$$

Considerando el criterio del truncamiento a 3 decimales de la tabla de funciones de Bessel, con $\beta = 75 \text{ KHz}/15 \text{ KHz} = 5$, se tiene que hay 16 bandas laterales significativas, por lo que en tal caso, el ancho de banda será:

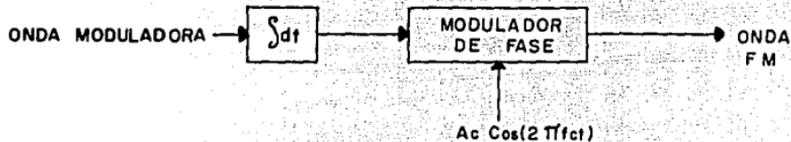
$$B_T = (16 \text{ bandas}) \times (15 \text{ KHz de ancho de cada banda})$$

$$B_T = 240 \text{ KHz}$$

Así, la regla de Carson subestima el ancho de banda de transmisión en 60 KHz, equivalente al 25 %, comparando con los 240 KHz del método del truncamiento.

V. 9.- CONVERSION DE FM A PM Y PM A FM.

Ya se ha mencionado que una onda FM puede considerarse como una onda PM en la cual la onda moduladora es la integral de $f(t)$ en vez de $f(t)$. Esto significa que puede generarse una onda FM integrando primero $f(t)$ y enseguida utilizando ésta como la entrada a un modulador de fase, como se muestra abajo.



Recíprocamente, una onda PM puede generarse primero al derivar $f(t)$ y utilizarla después como la entrada a un modulador en frecuencia, como se muestra abajo.



V. 10.- GENERACION DE FM.

Básicamente, se tienen dos métodos de generación de ondas de FM: la FM indirecta y la FM directa. En el método indirecto, la onda moduladora se integra primero y luego se utiliza para producir una onda FM de banda angosta, y posteriormente se utiliza la multiplicación de frecuencia para aumentar la desviación de frecuencia al nivel deseado. En el método directo, la frecuencia portadora se varía directamente de acuerdo con la señal moduladora.

V. 10 a).- GENERACION DE FM EN FORMA INDIRECTA.

Ya se vio que la generación de FM de banda estrecha es relativamente fácil y que de ella puede obtenerse la FM de banda estrecha integrando la señal moduladora. Para generar FM de banda ancha debe usarse ahora un método de aumentar el índice de modulación, que es el multiplicador de frecuencias. Un multiplicador de frecuencias es un dispositivo no lineal, concebido para multiplicar las frecuencias de la señal de entrada por un factor dado. Por ejemplo, la característica entrada-salida de un dispositivo de ley cuadrada ideal es:

$$e_o(t) = ae_1^2(t)$$

Si la entrada es la señal FM:

$$e_1(t) = A_e \cos [(2\pi f_c t) + \beta \sin (2\pi f_m t)]$$

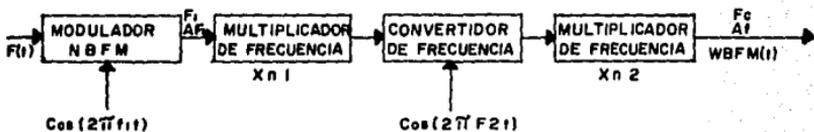
la salida es:

$$e_o(t) = aA_e^2 \cos^2 [(2\pi f_c t) + \beta \sin (2\pi f_m t)]$$

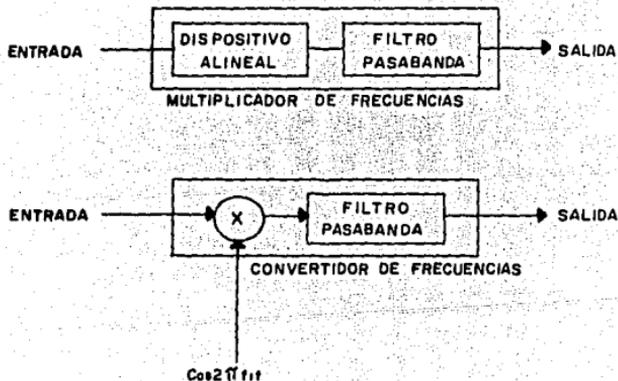
$$e_o(t) = \frac{1}{2} aA_e^2 [1 + \cos(4\pi f_c t) + 2\beta \sin (2\pi f_m t)]$$

El primer término es un nivel constante que puede ser eliminado con un filtro. Obsérvese que la portadora y el índice de modulación se han duplicado. Así, con un dispositivo de ley n -ésima seguido de un filtro, da una portadora y un índice de modulación incrementados en un factor n . Esto puede provocar

frecuencias portadoras muy altas para alcanzar determinado índice de modulación. Para evitarlo, muchas veces se usan convertidores de frecuencia que controlan el valor de la frecuencia portadora. El método para obtener una onda de FM de banda ancha a partir de una de banda angosta por multiplicación de frecuencias se llama Transmisor de FM Indirecta de Armstrong. Su diagrama a bloques aparece abajo.



donde:



Como ejemplo, calculemos f_o y Δf del diagrama a bloques del modulador, si $f_1 = 200$ KHz, $f_2 = 10.8$ MHz, $\Delta f_1 = 25$ Hz, $n_1 = 64$, $n_2 = 48$

Solución:

- 1.- A la salida del modulador NBFM, se tiene lo siguiente:
 $f_1 = 200$ KHz y $\Delta f_1 = 25$ Hz.
- 2.- Después del multiplicador de frecuencia se tiene:
 $f = 200$ KHz $\times 64 = 12.8$ MHz y
 25 Hz $\times 64 = 1600$ Hz.
- 3.- Después del convertidor de frecuencias se tiene:
 12.8 MHz $+ 10.8$ MHz = 23.6 MHz y
 12.8 MHz $- 10.8$ MHz = 2 MHz.
- 4.- Después del multiplicador $\times 48$, se tiene:
 23.6 MHz $\times 48 = 1132.8$ MHz,
 2 MHz $\times 48 = 96$ MHz y
 $\Delta f = 48 \times \Delta f_1 = 76.8$ KHz.

V. 10 b).- GENERACION DE FM EN FORMA DIRECTA.

En este método, la señal moduladora controla directamente la frecuencia portadora. Usualmente se intenta generar una desviación de frecuencia lo mayor posible, por lo que estos sistemas requieren menos multiplicación de frecuencias que los que usan el método indirecto. Por otra parte, como la frecuencia está controlada por el voltaje modulador, la estabilidad de la frecuencia a largo plazo no es tan buena como en el oscilador estabilizado que se usa generalmente en el método indirecto. Por tanto los métodos directos emplean algunas formas de estabilización de frecuencia.

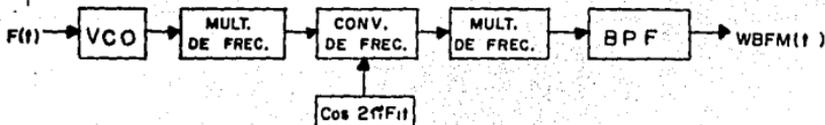
Considérese por ejemplo un oscilador electrónico sintonizado con frecuencia de oscilación

$$f_0 = 1 / 2\pi\sqrt{LC}$$

Si se varía L o C, también variará la frecuencia de salida. Hay varias formas de hacer que la capacitancia o la inductancia de un circuito sintonizado dependan de la señal de entrada. A frecuencias medias y altas, se usa un diodo semiconductor inversamente polarizado, normalmente un varactor. El porcentaje de desviación de frecuencia que se obtiene de esta manera es bastante pequeño. Para aumentarlo, la modulación se efectúa a alta frecuencia y luego se heterodina a una más baja.

Para el caso de frecuencias bajas, se usa el control de los osciladores RC con FET. Cualquier oscilador cuya frecuencia está controlada por el voltaje de la señal moduladora se llama oscilador controlado a voltaje ó VCO.

A continuación se muestra el diagrama a bloques del modulador de frecuencia de banda ancha utilizando un oscilador controlado a voltaje.



V.11.- DEMODULACION DE SEÑALES DE FM.

Existen varias formas de recuperar la señal moduladora de la onda de FM. La característica global debe ser la misma para proveer una señal de salida cuya amplitud sea linealmente proporcional a la frecuencia instantánea de la onda de entrada.

Un método es usar un sistema que tenga una característica lineal de transferencia de voltaje a frecuencia. Tal sistema se llama discriminador de frecuencia. Un dispositivo que cumple con dicha característica es el diferenciador ideal:
Consideremos la expresión general para la onda FM:

$$f_{fm}(t) = A_0 \cos \left[\omega_0 t + k_f \int_0^t f(t) dt \right]$$

suponiendo A_0 constante, se obtiene, después de diferenciar:

$$\frac{df_{fm}(t)}{dt} = -A_0 [2\pi f_0 + k_f f(t)] \sin \left[2\pi f_0 t + k_f \int_0^t f(t) dt \right]$$

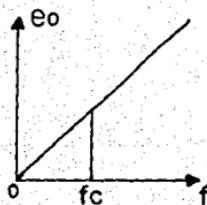
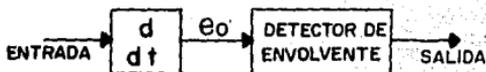
si $k_f f(t) \ll 2\pi f_0$, se ve que la ecuación anterior tiene la forma de una señal AM cuya envolvente es:

$$A_0 2\pi f_0 \left[1 + \frac{k_f}{2\pi f_0} f(t) \right]$$

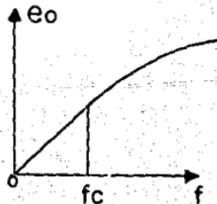
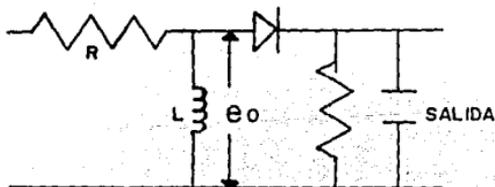
y cuya frecuencia portadora es:

$$2\pi f_0 + k_f f(t)$$

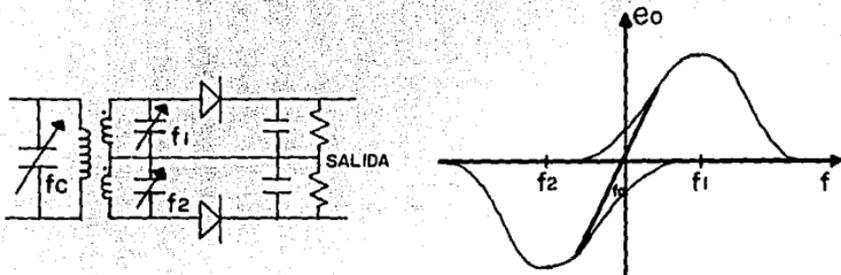
El diferenciador ha cambiado FM en AM con sólo la pequeña diferencia que la frecuencia portadora ha variado algo. La señal AM puede recuperarse por un detector de envolvente que, mientras $k_f f(t) \ll 2\pi f_0$, no podrá detectar el ligero cambio en la frecuencia portadora. A continuación se muestra este discriminador.



La acción del diferenciador ideal puede aproximarse por cualquier dispositivo cuya función transferente de magnitud sea razonablemente lineal en la gama de frecuencias de interés. Una aproximación adecuada podría ser un circuito RL seguido de un detector de envolvente, como se indica:



Un método muy empleado consiste en utilizar dos filtros pasabanda con frecuencias de corte por encima y por debajo de la frecuencia de portadora y restar las respuestas, de modo que se obtenga una respuesta total lineal, como se muestra abajo:

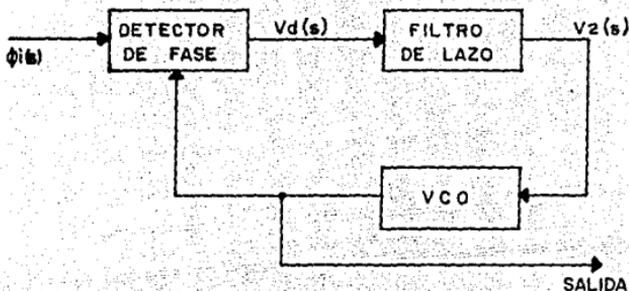


Este último se conoce como discriminador simétrico y posee la ventaja de proporcionar una respuesta de salida cero a la frecuencia portadora, lo que es una ventaja en el diseño de equipo de grabación.

Otra posibilidad es recortar (limitar) drásticamente la amplitud de la onda de FM y detectar la variación en los cruces por cero de la onda cuadrada resultante. El espaciamento de los cruces puede medirse contando el número de cruces en un intervalo de tiempo dado o midiendo el tiempo para determinado número de cruces.

Finalmente, un método más consiste en colocar un modulador de frecuencia en la rama de retorno de un sistema realimentado. Uno de estos sistemas con suficiente ganancia de lazo, realiza en la rama directa la operación inversa a la que se efectúa en la de retorno, demodulando así la señal. Entre los detectores de este tipo están los de bucle de enganche de fase (PLL, phase locked loop).

Comencemos por analizar el diagrama a bloques de un PLL:



Siendo $\phi_i(s)$ la fase instantánea de la frecuencia de entrada, $\phi_o(s)$ la de salida, $\phi_e(s)$ el error de fase, $V_d(s)$ el voltaje de salida del detector de fase y $V_z(s)$ el del filtro, tenemos:

$$\phi_e(s) = \phi_i(s) - \phi_o(s)$$

$$V_d(s) = k_d \phi_e(s)$$

Donde k_d (volts/radián) es la constante de ganancia del detector de fase. A continuación, el filtro elimina las componentes de alta frecuencia de la salida del detector de fase. El voltaje de salida del filtro es:

$$V_z(s) = V_d(s)F(s)$$

$$= k_d F(s) \phi_e(s)$$

donde $F(s)$ es la función de transferencia del filtro. El cambio correspondiente en la frecuencia de salida del VCO es:

$$\omega = k_z V_z(s)$$

donde k_2 (rad/seg/volt) es la constante de ganancia del VCO.

Como

$$\Delta \omega = \frac{d}{dt} \phi_o(s) = s \phi_o(s)$$

$$\phi_o(s) = \frac{1}{s} k_1 k_2 F(s) \phi_e(s)$$

La función de transferencia del lazo $H(s)$ es:

$$\frac{\phi_o(s)}{\phi_i(s)} = H(s) = \frac{kF(s)}{s + kF(s)}$$

donde $K = k_2 k_1$

También:

$$\phi_e(s) = \phi_i(s) - \phi_o(s)$$

y

$$\frac{\phi_e(s)}{\phi_i(s)} = 1 - \frac{\phi_o(s)}{\phi_i(s)} = \frac{s}{s + kF(s)}$$

Considerando ahora una entrada modulada en ángulo:

$$v_i(t) = \text{sen} [2\pi f t + \phi_i(t)]$$

para FM, la desviación de frecuencia instantánea es:

$$m(t) = \frac{d}{dt} \phi_i(t)$$

en notación de Laplace:

$$M(s) = s \phi_i(s)$$

En caso de PM, su desviación instantánea es:

$$m(t) = \phi_1(t)$$

o:

$$M(s) = \phi_1(s)$$

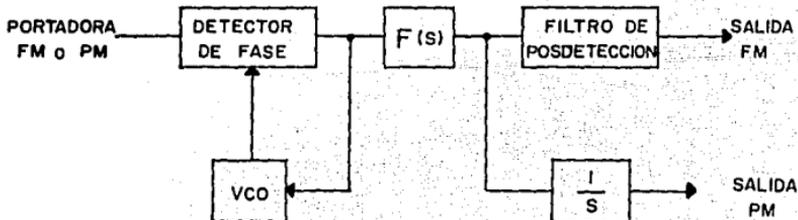
De la ecuación para V_2 :

$$V_2(s) = k_d F(s) \phi_1(s) = \frac{k_d F(s) s \phi_1(s)}{s + K F(s)}$$

y

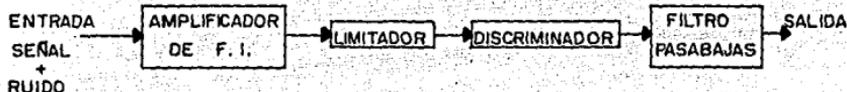
$$V_2(s) = s \phi_1(s) \frac{H(s)}{k_2}$$

Obsérvese que la salida del filtro es directamente proporcional a la señal modulada que es modificada por el ancho de banda del lazo. Si la portadora es modulada en fase, la salida del filtro tendrá que ser integrada (operación $1/s$) para recuperar la señal modulada. Abajo se muestra un PLL configurado para demodular una portadora modulada en frecuencia o en fase.



V.12 INTERFERENCIA Y RUIDO EN F.M.

Consideremos una señal de F.M. recibida con ruido blanco de banda limitada en el receptor de F.M. simplificado mostrado a continuación.



Suponiendo una onda senoidal de la forma

$$f(t) = A_m \cos \omega_m t$$

la portadora de FM a la salida del amplificador de F.I. es:

$$f_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)$$

cuya potencia promedio es:

$$S_o = \frac{1}{2} A_c^2$$

Independientemente de la señal moduladora.

La frecuencia instantánea es:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + \beta \omega_m \cos \omega_m t$$

por lo que

$$\omega = \omega_c + A\omega \cos \omega_m t$$

o bien:

$$\omega = \omega_c + f(t)$$

La salida del discriminador $f_d(t)$ es directamente proporcional a la desviación de frecuencia con respecto a ω_c . Esta desviación es justamente $f(t)$, por lo que:

$$f_d(t) = b\Delta\omega \cos \omega_m t = b f(t)$$

donde b es una constante del discriminador que, por conveniencia, podemos hacer igual a 1. La salida del discriminador debe filtrarse para eliminar los términos de alta frecuencia. De la última ecuación, la potencia promedio de la señal de salida es:

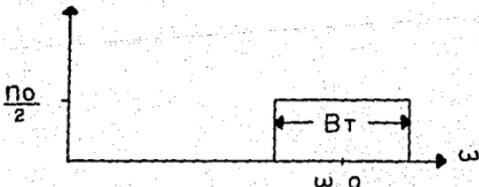
$$S_o = \frac{(\Delta\omega)^2}{2} W$$

Suponiendo una carga de 1 ohm.

Consideremos ahora el caso del ruido más la portadora sin modular: A la salida de FI se tiene una potencia de ruido

$$N = B_T n_o$$

suponiendo, como ya se dijo, ruido blanco de banda limitada, o sea con densidad espectral $n_o/2$ Watts/Hz uniformemente distribuido alrededor de la portadora como se muestra.



La portadora sin modular más el ruido puede escribirse como:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_c \cos \omega_c t + n(t) \\ &= A_c \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \\ &= r(t) \cos[\omega_c t - \phi_r(t)] \end{aligned}$$

En AM se había considerado $r(t)$. Ahora suponemos limitación de amplitud y sólo se considerará $\phi_r(t)$.

$$\phi_r(t) = \tan^{-1} \frac{n_s(t)}{n_c(t) + A_c}$$

Suponiendo ruido pequeño: $n_c(t), n_s(t) \ll A_c$

$$\phi_r(t) = \tan^{-1} \frac{n_s(t)}{A_c} = \frac{n_s(t)}{A_c}$$

La salida del discriminador es:

$$n_o(t) = \frac{d\phi_r(t)}{dt} = \frac{1}{A_c} \frac{d}{dt}$$

cuya densidad espectral de potencia es:

$$S_{n_o}(\omega) = \frac{1}{A_c^2} S_{n_s}(\omega) |H(\omega)|^2$$

donde $H(\omega)$ es un diferenciador. ($F^{-1}\{H(\omega)\} = h(t)$), pero la transformada de Fourier equivalente a la diferenciación en el tiempo corresponde a la multiplicación por $(j\omega)$ de forma que

$$S_{n_o}(\omega) = \frac{1}{A_c^2} \omega^2 S_{n_s}(\omega)$$

recordando que la banda está limitada por un filtro pasa bajas y que el ruido a la entrada del discriminador es blanco

$$S_n(\omega) = \frac{n}{2}$$

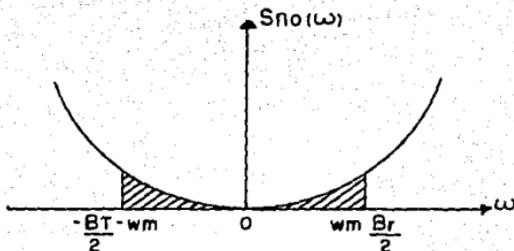
entonces:

$$S_{no}(\omega) = \frac{n}{2}$$

y

$$S_{no}(\omega) = \frac{n\omega^2}{\Lambda\omega^2}$$

gráficamente:



El valor cuadrático medio del ruido de salida es:

$$N_o = n\omega^2(t) = \frac{n}{\pi\Lambda\omega^2} \int_{-wm}^{wm} \omega^2 d\omega$$

$$N_o = \frac{n\omega_m^3}{2\pi\Lambda\omega^2}$$

Combinando las ecuaciones para S_o y N_o :

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{(\Delta w)^2 3\pi A_o^2}{2nw_m^3}$$

Podemos arreglar la ecuación de modo que:

$$\frac{S_o}{N_o} = (3) \left(\frac{(\Delta w)^2}{w_m} \right) \left(\frac{A_o^2}{2} \right) \left(\frac{\pi}{nw_m} \right) = 3\beta^2 \frac{S_o}{N_o}$$

donde $S_o = \frac{A_o^2}{2}$ es la potencia media de la portadora y

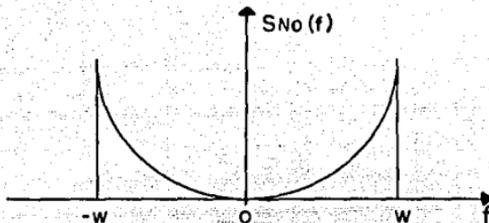
$N_o = \frac{nw_m}{\pi}$ la del ruido en el ancho de banda de FI.

La última expresión define la relación señal a ruido de FM. Obsérvese que ésta aumenta con el cuadrado del índice de modulación y mientras que en AM éste podía llegar en el mejor de los casos a 1 (100%) en FM existe la posibilidad de hacerlo mucho mayor. Por supuesto, al aumentar β aumenta el ancho de banda, por lo que los sistemas de FM producen una mejora en señal a ruido a expensas del aumento en el ancho de banda.

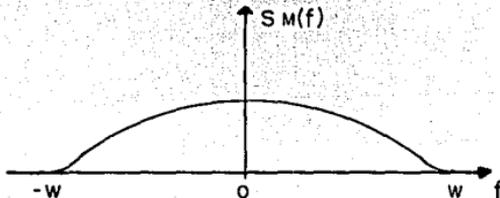
La habilidad inherente de un sistema de FM para minimizar los efectos de las señales indeseables (p. ej., ruido, como se discutió antes) se aplica también a la interferencia producida por otra señal modulada en frecuencia cuyo contenido de frecuencia es cercano a la frecuencia portadora de la onda de FM deseada. Sin embargo, la supresión de interferencia en un receptor de FM trabaja correctamente sólo cuando la interferencia es más débil que la entrada de FM deseada. Cuando la interferencia es la más intensa de las dos, el receptor se cierra a la señal más fuerte y de este modo suprime la entrada de FM deseada. Cuando son de intensidad casi igual, el receptor fluctúa hacia adelante y atrás entre ellas. Este fenómeno se conoce como efecto de captura.

V.13.- PRE-ENFASIS Y DE-ENFASIS.

La densidad espectral de potencia del ruido a la salida del receptor tiene una dependencia de ley cuadrada sobre la frecuencia de operación, como se muestra abajo.



Observemos ahora la densidad espectral de potencia de una fuente típica de mensaje, como audio o video.



Se observa que el nivel de señal cae en forma apreciable a frecuencias altas. Por otra parte, la densidad espectral de potencia del ruido de salida aumenta rápidamente con la frecuencia. Así, para $f = \pm w$, el nivel de ruido es evidentemente mayor que el de mensaje. En uso de la preacentuación o pre-énfasis en el transmisor y la deacentuación o de-énfasis en el receptor anula esta característica. En este método, se acentúan artificialmente las componentes de alta frecuencia de la señal de mensaje antes de la modulación en el transmisor y, por lo tanto, antes de que el ruido se introduzca al receptor. A la salida del discriminador del receptor, se realiza la operación inversa al deacentuar las componentes de alta frecuencia, de tal forma que se restaure la distribución original de potencia de la señal de mensaje. En este proceso también se reducen las componentes de alta frecuencia del ruido a la salida del discriminador.

Incrementándose así la relación señal a ruido del sistema.

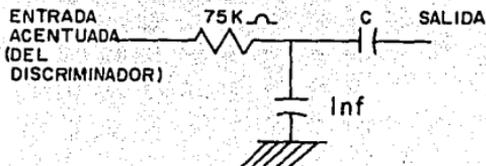
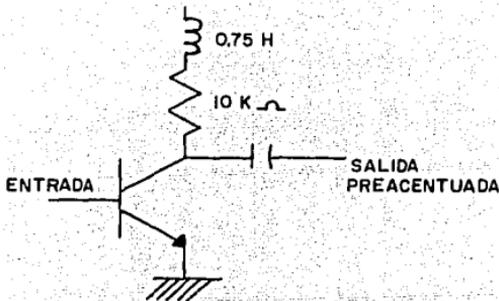
Para evitar la distorsión del mensaje, es necesario que:

$$H_{ac}(w) = \frac{1}{H_{pa}(w)} \quad -W \leq w \leq W$$

La cantidad de preacentuación ha sido normalizada. En muchos países la radiodifusión de FM y la transmisión de sonido de TV usa una preacentuación de 75 μ s. El uso de micro segundos para definir la preacentuación es estándar. Una desacentuación de 75 μ s corresponde a una frecuencia cuya constante de tiempo es 75 μ s, donde:

$$f = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{R}{2\pi L} = 2120 \text{ Hz.}$$

Abajo se muestran los circuitos de acentuación de 75 μ s.



V.14.- EFECTO DE UMBRAL.

En la sección V. 12 se llegó a la expresión

$$\frac{S_o}{N_o} = 3\beta^2 \frac{S_w}{N_w}$$

recordando que, en AM:

$$\frac{S_o}{N_o} = m^2 \frac{S_w}{N_w}$$

suponiendo el mejor caso, es decir $m = 1$:

$$\left(\frac{S_o}{N_o} \right)_{AM} = \frac{S_w}{N_w}$$

y

$$\left(\frac{S_o}{N_o} \right)_{FM} = 3\beta^2 \left(\frac{S_w}{N_w} \right)_{AM}$$

De donde se deduce que la razón señal a ruido puede hacerse mucho mayor en FM que en AM, aumentando el índice de modulación β .

Para obtener mejora en FM sobre AM, es necesario que:

$$\beta^2 > \frac{1}{3}$$

o bien:

$$\beta > 0.577$$

que podría llamarse punto de transición entre FM de banda estrecha y de banda ancha. Evidentemente, en banda estrecha no hay ninguna mejora en la relación señal a ruido ya que no existe

aumento de banda que pueda intercambiarse por ella. Además, este intercambio no puede continuar indefinidamente por la siguiente razón:

Si la potencia del transmisor se mantiene constante, S_c es fija. Con la potencia del ruido por unidad, el de ancho de banda ($\omega/2$) fijo, y el ancho de banda B de la señal de audio también fijo, se supondría que N_c permanece constante, pero a medida que B crece y el ancho de banda con él, el limitador debe aceptar más ruido. Finalmente, la potencia de ruido en el limitador se hace comparable con la potencia de la señal. En la sección V.12, que supone grandes relaciones de potencias de señal a ruido, ya no se cumple, con lo que el ruido se "apodera" del sistema. A este efecto, que depende de la relación portadora de FM a ruido, se le conoce como efecto de umbral. Para un valor de esta relación mayor que un umbral especificado la FM funciona adecuadamente y para valores inferiores a este nivel umbral, se encuentra que el mejoramiento frente al ruido empeora y la ganación de S/N desarrollada ya no se cumple. El nivel de umbral real depende de la relación de la portadora de FM al ruido y de β . Para grandes valores de β , se toma normalmente 10 dB.

VI. MODULACION POR PULSOS

OBJETIVO: Comprender las características fundamentales de las diversas técnicas de modulación analógica por pulsos.

ANTECEDENTES: Análisis de Sistemas y Señales.
Dinámica de Sistemas Físicos.

CONCEPTOS: Transformada de Fourier
Sistemas Lineales

MODULACION POR PULSOS

Una señal, se puede reproducir enteramente con un conjunto apropiado de muestras instantáneas. La teoría del muestreo establecerá las condiciones necesarias y sólo se necesitarán transmitir los valores muestra según ocurran en vez de enviar la señal en forma continua. A esto se le denomina modulación de pulsos.

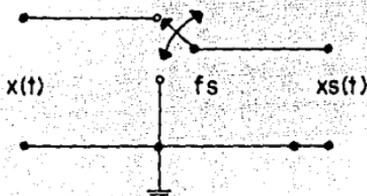
En la modulación de pulsos algún parámetro de cada pulso se modula por un valor muestra particular del mensaje. Por lo general, los pulsos son muy cortos en comparación con el tiempo entre ellos, por lo que una onda modulada por pulsos está "fuera" la mayor parte del tiempo. Por tanto la potencia transmitida se puede concentrar en ráfagas cortas en vez de ser enviada en forma continua, los intervalos entre pulsos se pueden llenar con valores muestra de otros mensajes, permitiéndose así la transmisión de muchos mensajes en un sistema de comunicación.

Existen dos tipos básicos de modulación de pulsos: la analógica, como la modulación de amplitud de pulso o la de posición de pulsos, la cual es en muchas formas similar a las modulaciones lineal o exponencial, y la modulación digital o de pulsos codificados.

VI.1 TEOREMA DEL MUESTREO

Una señal eléctrica que satisface ciertos requisitos, se puede reproducir enteramente con un conjunto apropiado de muestras instantáneas.

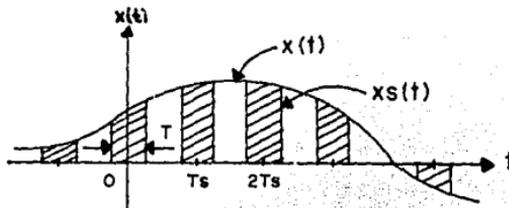
Una aproximación a la teoría del muestreo la obtenemos por medio de la operación de conmutación de la siguiente figura.



MUESTREADOR DE CONMUTACION.

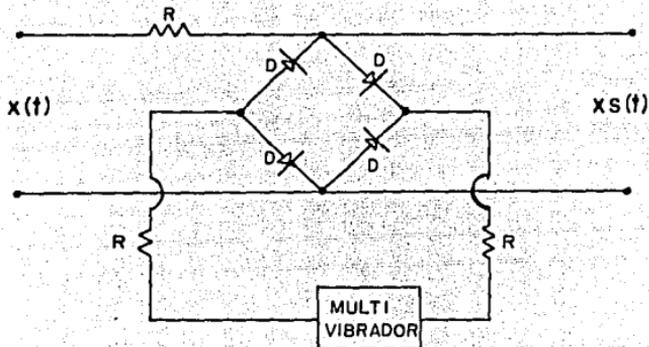
El conmutador se desplaza en forma periódica entre los dos contactos a una velocidad de $f_s = 1/T_s$, permaneciendo en el contacto de la señal de entrada durante T segundos y en el contacto conectado a tierra durante lo que resta de cada período.

La salida $x_s(t)$ está formada entonces de segmentos cortos de la entrada $x(t)$, como se muestra en la figura.



FORMAS DE ONDA.

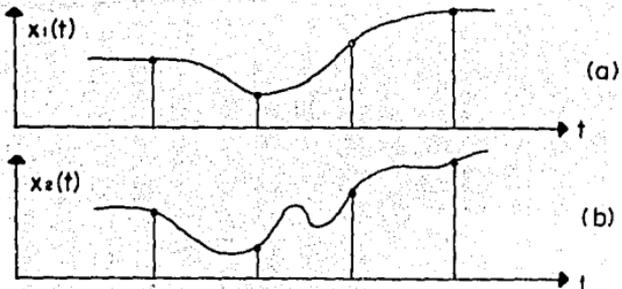
Considerando el muestreador de conmutación en forma electrónica tenemos:



CIRCUITO ELECTRONICO

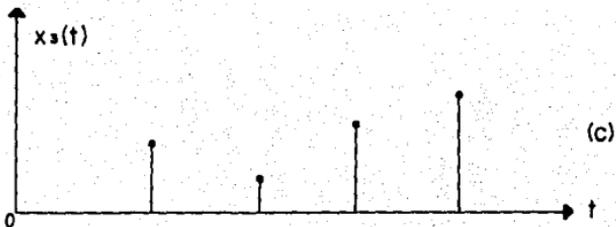
el voltaje de salida es igual al voltaje de entrada excepto cuando el multivibrador polariza en sentido directo los diodos, y con ello se lleva a la salida a cero.

Podría ocurrir que dos señales analógicas diferentes tuvieran las mismas muestras para un determinado período de muestreo, como se puede observar en la figura.



VI-3

FALLA DE ORIGEN

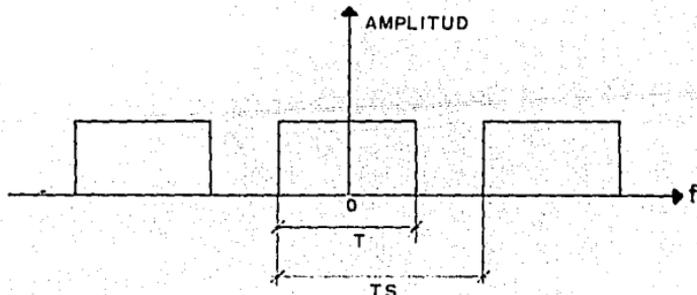


Esto problema ocasionaría que ambas señales fueran tratadas de igual manera en el receptor con el consiguiente error de transmisión. Para evitarlo, debería incrementarse la frecuencia de la señal muestreadora, con el fin de tomar mayor número de muestras de manera que sería mucho más difícil la coincidencia de dos señales al tomar sus muestras, pues al abarcar más porción de las señales en el mismo tiempo se tomarían muestras de valores no coincidentes de ambas señales.

Para recuperar $X(t)$, teniendo $X_s(t)$ se utiliza el dominio de la frecuencia, es decir, el espectro de la onda muestreada.

Podemos demostrarlo utilizando una función de conmutación $s(t)$ tal que:

$$X_s(t) = x(t)s(t)$$



donde:

T es el ancho de los pulsos.
 f_s es la frecuencia de muestreo

desarrollando la serie de Fourier de

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\omega_s t$$

donde:

$$C_0 = f_s T$$

$$C_n = \frac{2 \operatorname{senn} n \pi f_s T}{n \pi} \quad n \neq 0$$

son los coeficientes de Fourier.

Si la señal a muestrear es una onda senoidal de frecuencia f_m y amplitud A_m , la señal muestreada será:

$$s(t) \cdot A(t) = s(t) \cdot A_m \cos \omega_s t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_m C_n \cos n \omega_s t \cos \omega_s t$$

$$= C_0 A_m \cos \omega_s t + C_1 A_m \cos \omega_s t \cos \omega_s t + C_2 A_m \cos 2 \omega_s t \cos \omega_s t + \dots$$

sustituyendo la siguiente identidad en la ecuación anterior:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$

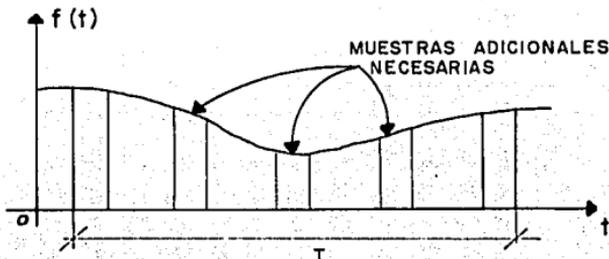
$$s(t) \cdot x(t) = C_0 A_m \cos \omega_s t + \left(\frac{1}{2} C_1 A_m\right) \cos (\omega_s - \omega_s) t + \left(\frac{1}{2} C_1 A_m\right) \cos (\omega_s + \omega_s) t$$

$$+ \left(\frac{1}{2} C_2 A_m\right) \cos (2 \omega_s - \omega_s) t + \left(\frac{1}{2} C_2 A_m\right) \cos (2 \omega_s + \omega_s) t + \dots$$

Se puede apreciar en la ecuación que obtenemos pares de bandas laterales centradas alrededor de las frecuencias f_s , $2f_s$, $3f_s$,

Ha sido demostrado que 2B muestras por segundo tomadas independientemente de una señal limitada en banda a B hertz, son suficientes para representar la señal en forma única. Esta aseveración es el famoso teorema del muestreo.

El límite inferior, de Nyquist, de la velocidad de muestreo para el caso del muestreo periódico es altamente significativo. Si se muestrea a una velocidad muy baja, la señal puede cambiar radicalmente entre los momentos de muestreo. Entonces se pierde información y se producirá seguramente una señal distorsionada.



LA FRECUENCIA DE MUESTREO ES MUY BAJA.

Como se observó en la figura con el objeto de que no se pierdan las subidas y las bajadas de la señal deben agregarse los pulsos de muestreo adicionales que se indican.

VI.2A MODULACION DE AMPLITUD DE PULSOS (PAM)

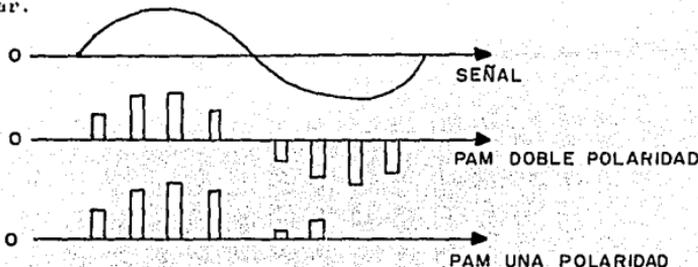
Los datos analógicos de banda limitada pueden convertirse en forma muestreada tomándose muestras de ellos por lo menos a la velocidad de Nyquist. Estos valores muestreados de la señal llevan la información original. El sistema que transmite estos valores muestreados se denomina comúnmente sistema de Modulación por Amplitud de Pulsos (PAM). La secuencia de pulsos puede considerarse alternativamente como una secuencia periódica de pulsos (la portadora) cuya amplitud se modula (o varía) de acuerdo con la información que se transmite.

La forma de onda usual de la modulación en amplitud de pulsos está compuesta de pulsos unipolares no rectangulares cuyas amplitudes pico son proporcionales a los valores muestreos instantáneos del mensaje.

$$x_p(t) = \sum kA_0[1 + m x(kT_s)] p(t - mT_s)$$

donde A_0 es la amplitud del pulso no modulado, $p(t)$ es la forma del pulso y m es el índice de modulación comparable en forma directa con el índice de modulación de AM. La condición: $[1 + m x(kT_s)] > 0$ se impone en forma normal para conservar la polaridad única y para prevenir la omisión de pulsos. Por lo tanto, recurriendo a la convención de normalización, el índice de modulación está limitado por $m < 1$.

La Modulación por Amplitud de Pulsos puede llevarse a cabo por 2 métodos distintos como se observa en la figura: unipolar, ó bipolar.

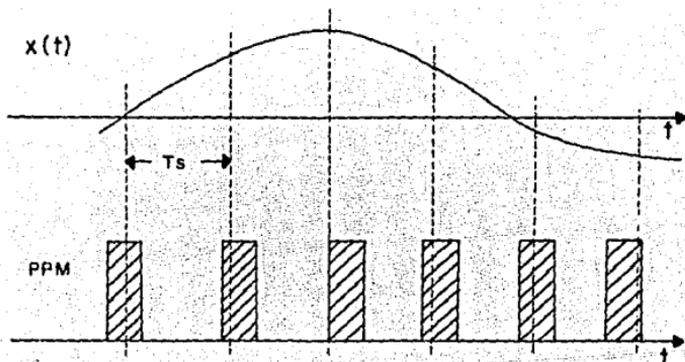


A la PAM unipolar se le adiciona un nivel de C.B. para que el pulso sea siempre positivo.

VI.2B MODULACION POR POSICION DE PULSOS (PPM)

La amplitud y el ancho de este sistema son constantes mientras la posición de cada pulso en relación a un pulso de referencia varía cada instante de muestreo de la onda modulada. Debido a esto es indispensable una perfecta sincronización entre el transmisor y el receptor.

La PPM toma como referencia la PWM (Modulación por Ancho de Pulso). Una vez que tenemos la PWM tomamos la posición del ancho del pulso como se observa en la figura.



Al diferenciar la señal PWM obtenemos un tren de pulsos con valores positivos correspondientes a las primeras orillas de los pulsos estrechos y pulsos negativos correspondientes a las orillas de rastreo.

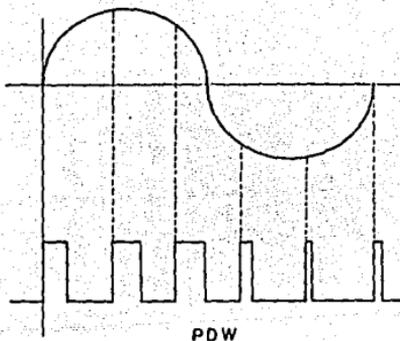
La diferencia de pulsos correspondientes a las orillas de rastreo, son removidas con un diodo rectificador obteniendo la PPM.

VI.2C MODULACION POR ANCHO DE PULSO (PWM)

Este tipo de modulación consiste en una secuencia de pulsos, donde el ancho de cada uno es proporcional a los valores de una señal mensaje en los instantes de muestreo.

A este tipo de modulación se le llama también PDM (Modulación por Duración de Pulso) y en algunas ocasiones PLM (Modulación por Largo del Pulso).

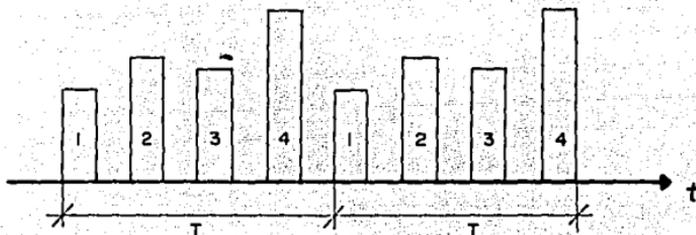
Como se observa en la siguiente figura:



para este tipo de modulación el tiempo de inicio de cada pulso es proporcional a la amplitud de la señal en ese instante. Como el ancho del pulso no puede ser negativo es necesario añadir una polarización de cd a la señal $m(t)$ antes de la modulación.

VI.3 MULTICANALIZACION POR DIVISION DE TIEMPO

El uso de pulsos muy estrechos en señales deja suficiente espacio entre muestras para la inserción de pulsos de otras señales muestreadas. El método de combinar varias señales muestreadas en determinada secuencia de tiempo se llama multiplexión por división de tiempo (TDM).



MULTIPLEXION EN TIEMPO.

La mayor parte de los sistemas de multicanalización en tiempo actualmente en uso son digitales. Esto implica que las señales analógicas se convierten primero al formato digital antes de ser transmitidas en forma multicanalizada, esta es una de las ventajas de TDM ya que los circuitos digitales proporcionan alta confiabilidad y eficiente operación.

Las señales multiplexadas en el tiempo son más eficiente cuando a la entrada son de banda limitada a la misma frecuencia. En los grandes sistemas de multiplexión, donde deben manejarse diferentes secuencias de datos, es una práctica común agrupar los canales de datos de entrada por anchos de banda.

La multiplexión en el tiempo ha sido tradicionalmente muy utilizada en los campos de la radio, telefonía, teletipo, telemetría, los datos obtenidos por las sondas espaciales, así como en satélites.

Cuando se utiliza un sistema de multiplexión en el tiempo, es evidente que el ancho de banda necesario para la transmisión

aumenta con el número de señales multicanalizadas, porque el ancho de banda de la transmisión es proporcional al recíproco del ancho de los pulsos transmitidos. Otro problema que se genera por la multicanalización en tiempo es la adecuada sincronización y registro de los sucesivos pulsos en el receptor. Esto implica que en el receptor tiene que existir un interruptor disponible, el cual debe estar sincronizado con el interruptor original del transmisor para depositar cada muestra en el canal apropiado.

Entre las ventajas de la modulación de pulso con multiplexión por división de tiempo (TDM) está el hecho de que los circuitos necesarios son digitales, proporcionando alta confiabilidad y eficiente operación. Estos circuitos son más simples que los moduladores y demoduladores requeridos en los sistemas de multiplexión por división de frecuencia.

VII. APLICACIONES

OBJETIVO: Dar a conocer mediante diversos ejemplos de sistemas prácticos la aplicación de los conceptos de filtrado y modulación.

ANTECEDENTES: Contenidos en este mismo programa.

CONCEPTOS: Contenidos en este programa.

VII. 1. - ECUALIZADORES DE AUDIO.

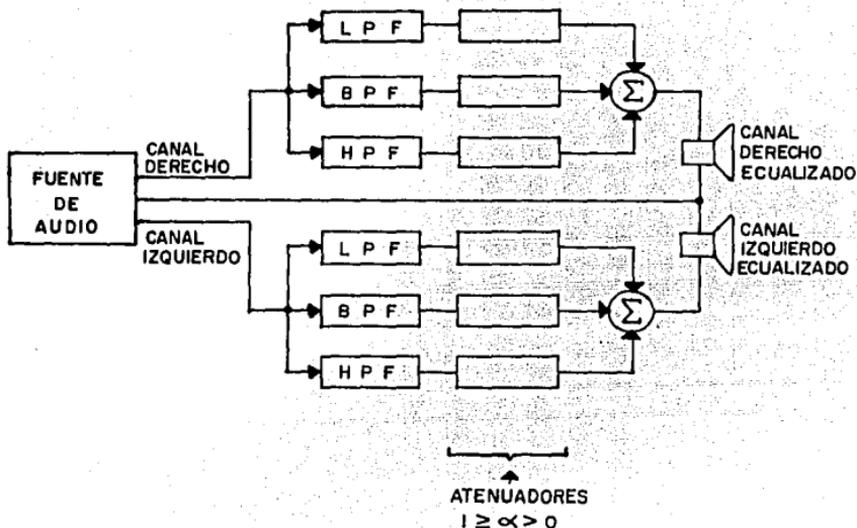
En diversos sistemas de audio es necesario contar con filtros que puedan ajustarse para compensar las características no ideales del canal de transmisión. Como su propósito es compensar las características imperfectas, unidos los filtros en el número de canales deseado forman lo que se conoce con el nombre de ecualizador de audio.

La característica principal es que la ganancia es unitaria, ya que va a conectarse intercalado entre la etapa de salida de potencia y las bocinas de un sistema de audio. Por cada canal se tienen 6 filtros, que pueden construirse con elementos fundamentales como son: capacitores, resistores e inductores ó bien a base de Amplificadores Operacionales.

La función de cada uno de los filtros es seleccionar un ancho de banda, determinado por las frecuencias centrales.

El control de la ganancia o atenuación de cada uno de los filtros está dado por potenciómetros.

La figura siguiente ilustra un ejemplo de ecualizador de audio estereofónico, con tres filtros por canal.



Cabe destacar algo: cualquier grabación en disco, emisión de radio o cassette pregrabado han sufrido un proceso muy elaborado en el estudio de grabación. Al contrario de lo que parece, la creación de cada pieza musical es un largo proceso, cuyo final es el resultado de largas pruebas realizadas por ingenieros de sonido y directores artísticos y de incansables mezclas, ecualizaciones y reecualizaciones. Por tanto, el programa musical que se nos brinda ya ha sido ecualizado y no es preciso actuar ya sobre los controles de tono o ya sobre los del ecualizador, pues en este caso desvirtuamos el trabajo del autor; es como si observáramos el retrato de *La Gioconda* bajo una fuente de luz roja: los detalles quedarían falseados.

Independientemente de los conceptos teóricos y explicaciones científicas que se puedan argumentar, en estas cuestiones intervienen también y en gran manera los aspectos subjetivos del escucha; hay el que prefiere escuchar los tonos graves; el que desea corregir los defectos o limitaciones de otros integrantes del equipo, principalmente los bafles; el que quiere balancear mejor alguna grabación comercial mal hecha, etc. En todos los casos estamos alterando la respuesta en frecuencia de la obra original.

VII.2 REDES DE CROSSOVER.

Cada bocina de un sistema de sonido reproduce correctamente una banda limitada de frecuencias. Para garantizar su correcto funcionamiento es preciso separar las señales del amplificador que cubre toda la banda audible, de modo que cada bocina reciba apenas la energía de las frecuencias con que puede trabajar. Para esta separación se utilizan filtros divisores de frecuencia, que constan de un conjunto de capacitores y bocinas dimensionadas de acuerdo con las características de cada bocina usada y de la potencia del amplificador.

Las bocinas no pueden reproducir normalmente y con la misma eficiencia, sonidos de toda la frecuencia de la banda audible. Esto se debe tanto a su formato como también al tamaño y a la propia dinámica del sistema que propulsió el cono del mismo. Por este motivo, se aprecia mejor desempeño en los sistemas de sonido en los que el fabricante posee líneas de bocinas que se destinan a bandas específicas.

Estrechando la banda de operación de una bocina podemos mejorar su desempeño y así obtener mayor fidelidad para nuestro sistema. Es claro que esto implica más de una bocina en nuestro sistema y también de dispositivos que pueden separar las señales de las diferentes bandas. Estos últimos se denominan filtros separadores de frecuencia o divisores de frecuencia.

Para la reproducción de los agudos podemos tener tweeters, mientras que para la reproducción de los graves podemos usar un woofer. Las señales deben ser separadas antes de ser aplicadas a las bocinas, ya que si una bocina destinada a la reproducción de agudos, le aplicamos también señales de bajas y medias frecuencias, además de no reproducirlas, la potencia del amplificador se disipa en forma de calor, esto puede ocasionar la destrucción de las bocinas y además sobrecargar los circuitos de salida del amplificador de potencia.

Por lo tanto es importante que cada bocina sólo reciba las señales que pueda reproducir eficientemente. Para las bocinas más utilizadas tenemos, entonces, las siguientes posibilidades de utilización:

Full-Range: Esta bocina se utiliza para reproducir de mejor manera toda la banda audible, aunque existen limitaciones. Por eso es indicada para sistemas económicos, ya que si una sola bocina cubre toda la banda no es necesario un divisor de frecuencias.

Rango Extendido: Esta destinado a medios y graves, por lo tanto debe ser complementado con un tweeter. Este sistema de dos bocinas requiere por lo tanto, un divisor de 2 canales.

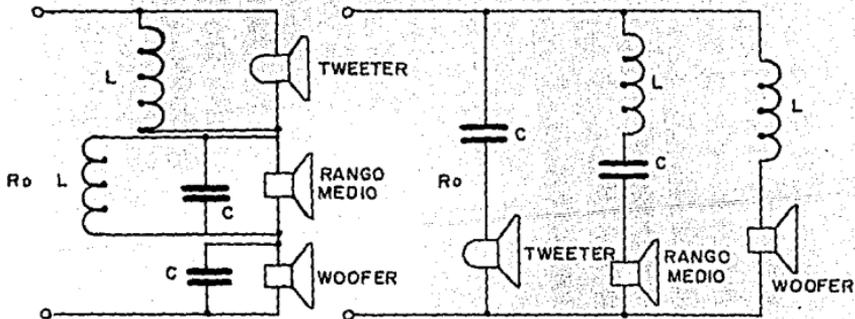
Woofers: Son requeridos para la reproducción de bajas frecuencias (graves). Se complementa con un medio, un tweeter y un divisor de 3 canales.

Rango Medio: Cubre la banda de frecuencia media. Se complementa con un woofer, un tweeter y un divisor de 3 canales.

Tweeter: Se adoptan para las altas frecuencias (agudos) y se puede complementar con un rango extendido o con un woofer o con un rango medio. Para el primer complemento se necesita un divisor de 2 canales y para el segundo uno de 3 canales.

Los filtros divisores deben ser intercalados entre el amplificador y la bocina para que cada uno reciba la señal apropiada a sus características.

En la siguiente figura se observa un circuito de tipo serie/paralelo operando en 3 canales. Principalmente empleado para la fidelidad de aparatos, en unión con amplificadores.



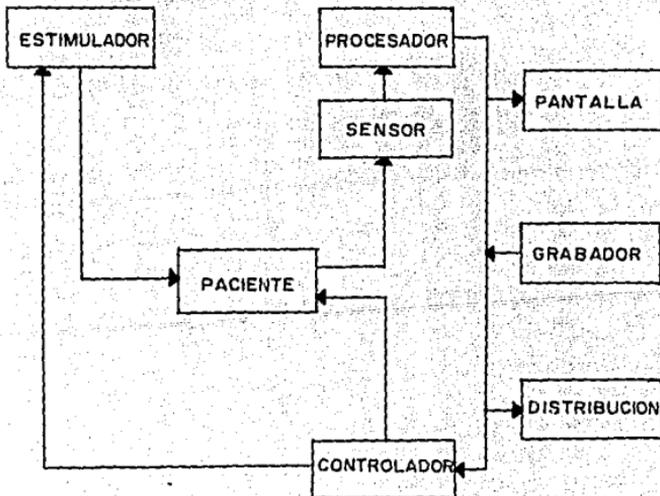
R_0 : IMPEDANCIA DE LAS BOCINAS Y DEL CIRCUITO COMPLETO.

VII.3 FILTROS PARA SEÑALES BIOLÓGICAS

Los instrumentos médicos juegan un papel importante en el desarrollo de la medicina y el bienestar humano, ellos regularmente obtienen ó recolectan señales, las analizan, despliegan información y controlan el tratamiento. La instrumentación médica asiste al médico en la recolección de información, instrumentos simples tales como el estetoscopio ó complejos dispositivos radiográficos tales como el digitalizador CAT (Tomografía Axial Computarizada), extienden los sentidos del médico y le proporciona un cuadro más completo de la condición del paciente.

Sistema Generalizado de Instrumentación Médica.

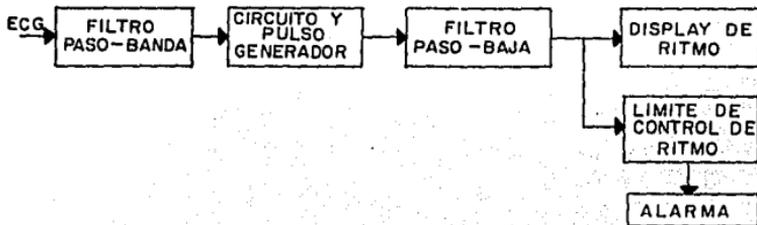
En la siguiente figura se muestra el diagrama a bloques de un instrumento médico generalizado.



En el primer bloque debido a que se va a examinar una respuesta particular, se realizan estímulos repetitivos para inicializar las respuestas que serán estudiadas. El siguiente bloque contiene los sensores en donde transductores especializados convierten las diferentes señales en señales eléctricas. Estas señales viajan al bloque del procesador en donde operaciones tales como amplificación, filtrado, rechazo de interferencia y análisis computacionales son llevados a cabo. La información entonces fluye a la pantalla grabada y bloques de distribución donde la información es desplegada a otros en la velocidad inmediata del dispositivo registrada en papel o en otro dispositivo para almacenamiento permanente, y distribuido a otros en áreas más distantes. Finalmente la información procesada circula a un bloque para controlar el tratamiento del paciente y/o sus estímulos.

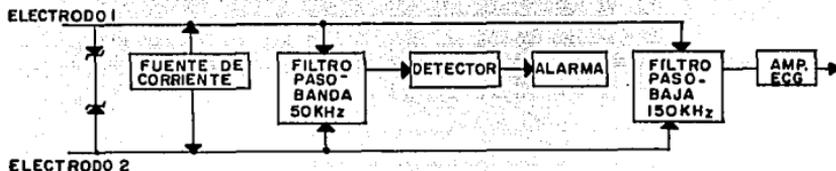
Cardiotacómetro Promedio

En la siguiente figura se muestra un diagrama a bloques de un cardiotacómetro promedio, el cual determina el latido del corazón promedio, contando el número de complejos (QRS) sobre un período de tiempo conocido. El circuito dispara el generador de pulsos cuando el filtro de salida excede un nivel establecido. El pulso generador produce un pulso de ancho constante que es mayor que el complejo QRS para permitir sólo un pulso por complejo. La cadena resultante de pulsos es alimentada a un filtro paso bajas, el cual determina su amplitud promedio. La constante de tiempo del filtro debe ser de varios latidos de largo, típicamente de una duración de 5 a 15 seg. La salida es alimentada a un indicador usualmente a un metro, el cual es calibrado en latidos por minuto. La mayoría de los cardiotacómetros tienen circuitos de alarma, los cuales alertan al personal cuando los latidos del corazón han sobrepasado o han disminuido de los niveles pre-establecidos.



Detector de Caída de Electrodo.

Este es un método útil para la detección de conexiones pobres de electrodos. En la siguiente figura se muestra un diagrama a bloques para un detector de caída de electrodos.



Una fuente actual de 50 KHz atraviesa varios miliamperes a través de electrodos, y si la conexión es pobre o no existente, el voltaje a través del generador aumenta. La corriente no es peligrosa porque a 50 KHz la sensibilidad del tejido excitable de nuestro cuerpo es baja.

Medida de Frecuencia Respiratoria.

Aprovechando unos electrodos que estén situados sobre el tórax del enfermo para medir el electrocardiograma, se pueden utilizar dos métodos para medir simultáneamente la frecuencia respiratoria. Una de las posibilidades consiste en filtrar la señal electrocardiográfica obtenida mediante un filtro de paso bajo con frecuencia de corte del orden de 1 Hz. La amplitud del ECG siempre está ligeramente modulada por la respiración, por lo que extrayendo sus componentes de más baja frecuencia se puede tener una idea de variación de volumen del tórax y, en consecuencia, de la frecuencia respiratoria.

VII.4 RECEPTOR SUPERHETERODINO DE A.M.

En todo equipo electrónico, para llevar a cabo la función para la cual ha sido proyectado, es necesario trasladar de su circuito de entrada a su circuito de salida, ciertos componentes de C.D. ó C.A. denominados potenciales de señal. Tales componentes en su largo recorrido comúnmente pasan a través de diversas secciones o etapas del equipo, en donde, son sometidos a muy diversos procesos, como amplificación, limitación, detección, modulación, recorte, etc., hasta que la señal modificada es aprovechada por la carga.

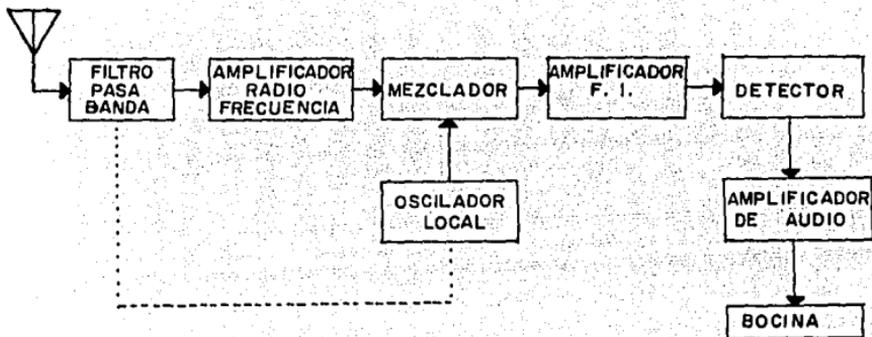
En las etapas que constituyen un Receptor Superheterodino de A.M., el potencial de señal que se recoge de la antena receptora previamente seleccionado es transferido por medio de los acoplamientos de la antena al circuito conversor, en donde se realiza la mezcla de la señal de RF con la proveniente del oscilador local. Posteriormente, de la etapa conversora pasa al amplificador de F.I., para finalmente trasladar el componente de señal del amplificador de FI al detector, en donde se recuperará la señal original.

El principio de funcionamiento del Superheterodino, consiste en cambiar la frecuencia portadora de la estación seleccionada en una oscilación de frecuencia más baja, denominada F.I., que tiene un nuevo componente que es constante para todas las estaciones de la banda. Para lograr lo anterior, se hace uso del proceso Heterodino, que consiste en mezclar dos señales de frecuencia diferente, para obtener un nuevo componente de frecuencia, en cuya envolvente siga presente la señal original.

Por ejemplo, si en el circuito sintonizador se selecciona una emisora que transmite a 800 KHz, esta señal se convierte a otra de RF que tiene la misma modulación original pero con una frecuencia de 455 KHz. Este valor de frecuencia no es arbitrario, ya que ha sido adoptado universalmente como FI para la recepción de AM.

El mismo proceso se realiza con la señal de cualquier emisora que transmita dentro de la banda comprendida entre 550 y 1600 KHz.

En la siguiente figura se muestra el diagrama de bloques del receptor superheterodino AM



El amplificador de RF incluye: circuito de antena, que constituye junto con el mezclador la etapa convertora de RF, responsable de la heterodinación.

Las señales moduladas de RF enviadas por todas las estaciones de radio llegan a la antena, pero el circuito de sintonía solo deja pasar aquella que tenga una frecuencia de portadora igual a su frecuencia natural de resonancia. La etapa mezcladora acepta la entrada de varias señales, pero amplifica sólo una estrecha banda de frecuencias, que encuentra una alta impedancia en la salida del mezclador.

La señal captada se transfiere al amplificador de RF donde se amplifica a un nivel adecuado. La señal de salida del amplificador de RF se mezcla o heterodina con la señal producida por el oscilador local para producir una señal que tiene siempre una frecuencia intermedia (FI) de 455 KHz.

La señal suministrada por el oscilador es una onda sinusoidal que no contiene ningún tipo de modulación. Cuando las señales de antena y del oscilador local se heterodinan, el mezclador produce las frecuencias originales así como sus respectivas frecuencias suma y diferencia. La salida del mezclador se sintoniza para que entregue únicamente la diferencia entre las frecuencias locales y de antena.

Los amplificadores de FI realizan ampliaciones de la señal modulada de FI hasta que ésta alcanza un nivel lo suficientemente alto como para excitar al detector. La señal de salida de la etapa de FI es suministrada entonces al detector.

La señal que ingresa al detector es una señal de alta frecuencia modulada en amplitud por la información de audio que se desea reproducir. El detector elimina la componente de alta frecuencia y deja pasar únicamente la señal de audio que la modula.

El CAG(Control Automático de Ganancia) asegura que la señal de audio de salida permanezca a nivel constante aún si la señal de RF varía su amplitud levemente.

La señal de salida del detector se aplica al amplificador de audio, alcanzando una potencia alta para impulsar el altavoz. Aquí las variaciones de amplitud de la señal de entrada se convierten en sonidos, que son réplica de la información de audio originalmente enviadas por la emisora.

El radio AM convencional es un Receptor Superheterodino de 6 transistores. El sistema capta transmisiones de AM enviadas por estaciones de radiodifusión que operan en la banda de 550 a 1600 KHz y utiliza una portadora interna estándar de 455 KHz.

Ventajas de la superheterodinación.

Muy alta estabilidad, la posibilidad de realimentación positiva y de eliminar oscilaciones indeseables de los amplificadores de alta frecuencia. Los circuitos de RF y FI del superheterodino operan a frecuencias diferentes, los efectos de retroalimentación desaparecen y la estabilidad del receptor se ve favorecida.

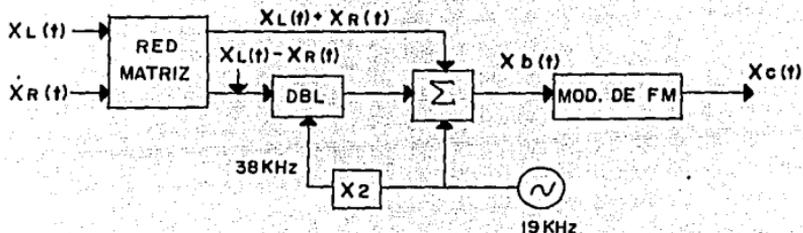
Tiene alta sensibilidad, entre más amplificadores de FI se puedan utilizar, más grande es la ganancia que se puede obtener de los receptores modernos de radio, consecuencia del elevado grado de amplificación que se consigue.

Alta Selectividad, se pueden emplear cuantos circuitos sintonizados de FI se quieran, sin crear los problemas de seguimiento que se originan cuando se intenta ajustar varios condensadores variables al mismo tiempo. La estación seleccionada es convertida en un valor de FI el efecto de interferencia de estaciones adyacentes se reduce notablemente. Ancho de banda constante, FI es constante, para todas las estaciones de la banda el canal de FI puede ser proyectado para una respuesta o ancho de banda fijo, lo cual favorece la fidelidad.

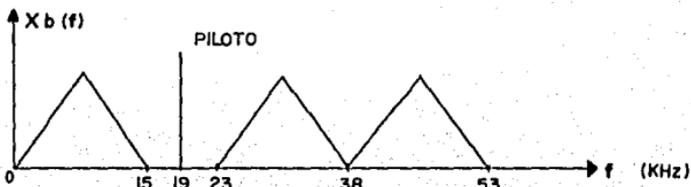
VII. 5 SISTEMA PARA LA GENERACION DE F.M. ESTEREO.

Una aplicación de la multicanalización por división de frecuencia es la radiodifusión de FM estereofónica comercial.

Según la figura siguiente:



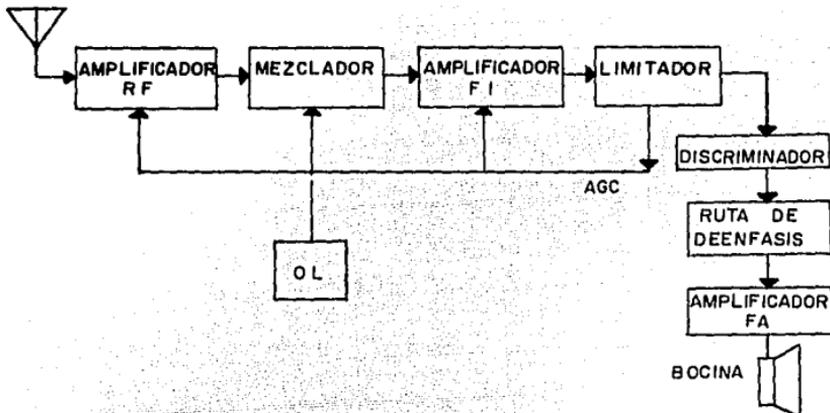
las señales de los canales derecho e izquierdo se matrizan para producir $X_L(t) + X_R(t)$ y $X_L(t) - X_R(t)$. La señal $X_L(t) + X_R(t)$ se inserta directamente en la banda base, mientras que la señal de doble banda lateral $X_L(t) - X_R(t)$ modula a una subportadora de 38 KHz derivado de una fuente de 19 KHz. La modulación de doble banda lateral se emplea para mantener la fidelidad a las bajas frecuencias. El tono piloto de 19 KHz se agrega para la sincronización del receptor. A continuación aparece el espectro de banda base de una señal multiplexada para FM estéreo.



VII. 6 RECEPTOR SUPERHETERODINO DE F.M. MONAURAL Y ESTEREO.

Todos los sintonizadores de FM actuales son del tipo superheterodino y trabajan en la banda de 88 a 108 MHz.

En el diagrama a bloques siguiente puede observarse que el receptor superheterodino es similar al de AM, excepto por el limitador y el discriminador, básicamente.

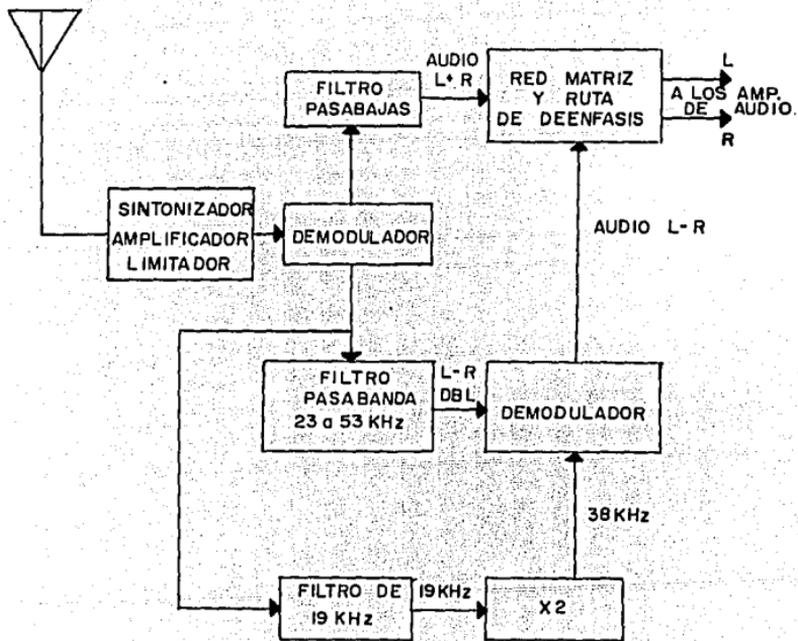


La función del limitador es cortar los picos de la señal de FI y presentar al discriminador una señal de picos uniforme. La función del discriminador es convertir la FI modulada en frecuencia en una señal de audio. La función de una red de deénfasis es compensar el preénfasis introducido en el transmisor de FM.

En este receptor monaural no intervienen $[X_L(t) - X_r(t)]$ y la portadora piloto, tales señales son eliminadas con el filtro Banda Base del receptor monaural.

Para el caso de recepción estéreo, la portadora piloto es multiplicada en frecuencia por dos y usada para recuperar la señal $[X_L(t) - X_r(t)]$. A continuación se matrizan las señales $[X_L(t) + X_n(t)]$ y $[X_L(t) - X_r(t)]$, después de lo cual se obtienen las señales separadas $X_L(t)$ y $X_r(t)$.

En el diagrama a bloques siguiente se ilustra el receptor de FM estéreo.

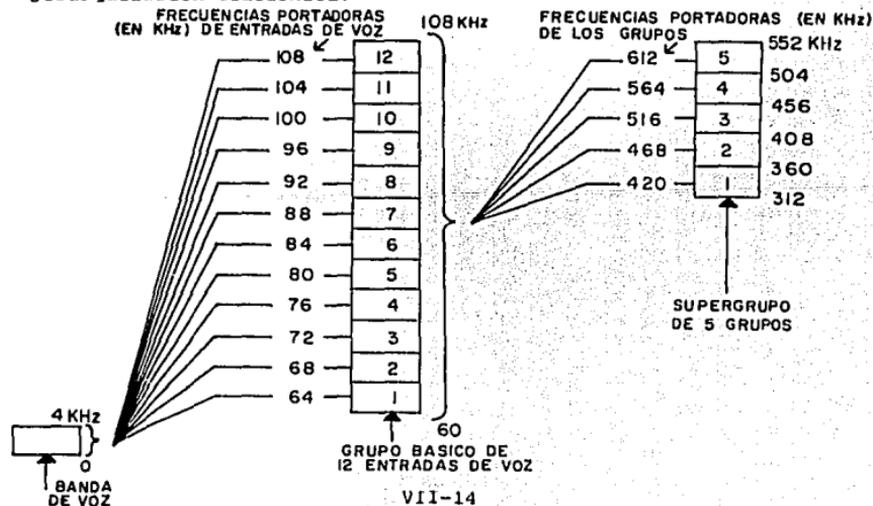


VII. 7. JERARQUIAS EN LA MULTICANALIZACION POR DIVISION DE FRECUENCIA.

En FDM se utiliza la jerarquización que es conformar varios niveles de grupos con diferentes frecuencias, esta jerarquización se utiliza principalmente en telefonía.

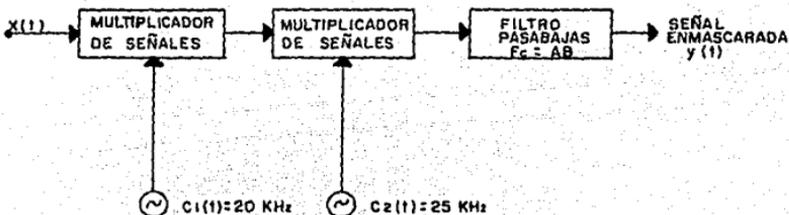
El primer paso de multiplexión combina 12 entradas de voz en un grupo básico cada uno de los doce canales modula una frecuencia portadora diferente separada 4 KHz de las otras, es decir, la n -ésima entrada es modulada por una portadora con frecuencia $f_0 = 112 - 4n$ KHz, donde $n = 1, 2, \dots, 12$. Las bandas laterales inferiores se eligen después por filtración de pasabanda y se combinan para formar un grupo de 12 bandas laterales inferiores. Así el grupo básico ocupa la banda de frecuencias de 60 a 108 KHz. La etapa que sigue en la jerarquía comprende la combinación de 5 grupos básicos en un supergrupo. Esto se lleva a cabo utilizando el n -ésimo grupo para la modulación de una portadora a la frecuencia $f_0 = 372 + 48n$ KHz, con $n=1, 2, \dots, 5$. De nuevo aquí se eligen las bandas laterales inferiores por filtración y se combinan luego para formar un supergrupo que ocupará la banda de 312 a 552 KHz. Entonces los supergrupos se combinan, de modo similar en grupos maestros y los grupos maestros se combinan a su vez en grupos muy grandes.

En el diagrama siguiente se ilustra el proceso de jerarquización telefónica:

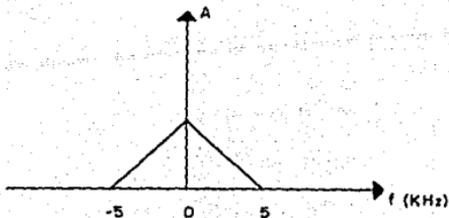


VII.9 ENMASCARADORES DE SEÑALES.

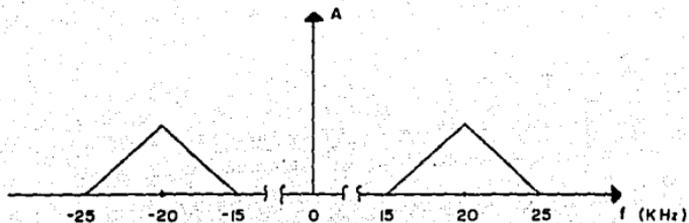
Un circuito enmascarador de señales se utiliza, generalmente en telefonía privada, comunicaciones militares y de policía, etc. para hacer ininteligible una señal de voz. Consideremos el enmascarador básico mostrado a continuación:



Supongamos que se introduce al enmascarador una señal de audio $x(t)$, con un ancho de banda de 5 KHz y cuyo espectro se muestra abajo.



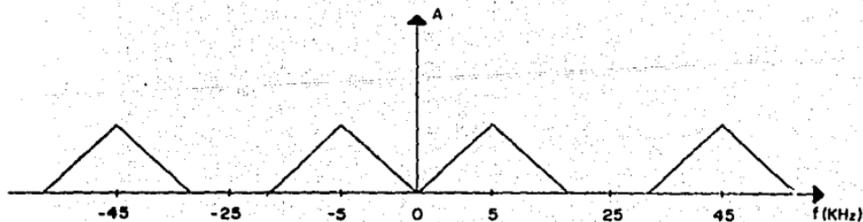
al ser multiplicada tal señal por la onda senoidal $c_1(t)$, proveniente del oscilador del multiplicador A, se obtiene, como ya se ha visto, un espectro como el indicado enseguida:



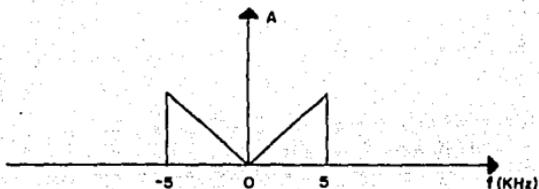
Cuando la señal $x(t)c_1(t)$ es multiplicada por la onda senoidal $c_2(t)$, proveniente del oscilador B, cuya frecuencia es:

$$f_{osc B} = f_{osc A} + AB \quad [\text{hertz}]$$

donde AB es el ancho de banda de la señal $x(t)$, se obtiene el espectro:

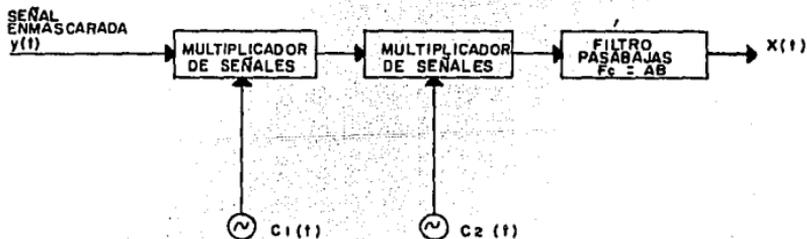


A continuación se hace pasar la señal $x(t)c_1(t)c_2(t)$ a través de un filtro pasabajos con frecuencia de corte situada en AB, a cuya salida se obtiene la señal enmascarada.



Obsérvese que el intercambio armónico que ha tenido lugar a causa del proceso de enmascaramiento, provocará que la señal de audio se vuelva ininteligible.

El proceso inverso al descrito anteriormente, logra, en el extremo receptor, la recuperación de la señal original. A continuación se muestra el circuito desenmascarador.



CONCLUSION

Después de desarrollar este trabajo me pude dar cuenta de la verdadera importancia de contar con unas bases sólidas para la comprensión adecuada de los tópicos en ingeniería, además me pude percatar de que las comunicaciones tienen pasado, presente y sobre todo un gran futuro, de ahí la importancia de construir buenos cimientos para un mejor desarrollo profesional.

BIBLIOGRAFIA

SISTEMAS DE COMUNICACION
A. BRUCE CARLSON
MCGRAW-HILL

SISTEMAS DE COMUNICACION
SIMON HAYKIN
INTERAMERICANA

SISTEMAS DE COMUNICACION
B.P. LATHI
MCGRAW-HILL

INTRODUCCION A LA TEORIA Y SISTEMAS DE COMUNICACION
B.P. LATHI
LIMUSA

SISTEMAS DE COMUNICACION
FERREL G. STREMLER
FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO

AMPLIFICADORES OPERACIONALES Y FILTROS ACTIVOS
ANTONIO PERTENCE JUNIOR
MCGRAW-HILL

PRINCIPLES OF ACTIVE NETWORKS: SYNTHESIS AND DESIGN
GOBIND DARYANANI
JOHN WILEY & SONS, INC.

INTRODUCCION A LOS FILTROS DIGITALES
JESUS BARRIOS ROMANO
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

MANUAL PARA INGENIEROS Y TECNICOS EN ELECTRONICA
MILTON KAUFMAN & ARTHUR H. SEIDMAN
MCGRAW-HILL

ELECTRONICA MODERNA PARA INGENIEROS Y TECNICOS
MILTON KAUFMAN & ARTHUR H. SEIDMAN
MCGRAW-HILL

AMPLIFICADORES OPERACIONALES Y CIRCUITOS INTEGRADOS LINEALES
ROBERT F. COUGHLIN & FREDERICK F. DRISCOLL
PRENTICE HALL

INGENIERIA DE SISTEMAS DE TELECOMUNICACIONES
ROGER L. FREEMAN
LIMUSA

INDICE

OBJETIVO.....	1
INTRODUCCION.....	2

I INTRODUCCION

1.1	PANORAMA GENERAL DE LAS TELECOMUNICACIONES.....	1-1
	HISTORIA DE LAS TELECOMUNICACIONES.....	1-2
1.2	SISTEMA TIPICO DE COMUNICACIONES.....	1-8
	TRANSMISOR.....	1-8
	CANAL DE TRANSMISION.....	1-8
	RECEPTOR.....	1-9
1.3	FACTORES QUE ALTERAN A LAS SEÑALES EN LOS SISTEMAS DE COMUNICACIONES.....	1-10
	DISTORSION.....	1-10
	DISTORSION DE LA SEÑAL A TRAVES DE UN CANAL.....	1-10
	DISTORSION CAUSADO POR LAS NO LINEALIDADES DE UN CANAL.....	1-10
	DISTORSION OCASIONADA POR EL EFECTO DE MULTITRAYECTORIA.....	1-11
	DISTORSION ARMONICA.....	1-11
	DISTORSION CARACTERISTICA DE LINEA.....	1-11
	DISTORSION DE AMPLITUD.....	1-11
	DISTORSION TRANSITORIA.....	1-12
	DISTORSION DE ATENUACION.....	1-12
	DISTORSION DE FASE.....	1-12
	DISTORSION DE LINEA.....	1-12
	DISTORSION DE RETARDO.....	1-12
	DISTORSION LINEAL.....	1-12
	DISTORSION PROXIMA A LA OSCILACION.....	1-13
	DISTORSION TRAPEZIAL.....	1-13
	INTERFERENCIA.....	1-13
	INTERFERENCIA ACEPTADA.....	1-13
	INTERFERENCIA ARMONICO.....	1-13
	INTERFERENCIA IMPULSIVA.....	1-14
	INTERFERENCIA DE CANAL ADYACENTE.....	1-14
	INTERFERENCIA ELECTROMAGNETICA.....	1-14
	INTERFERENCIA ENTRE SIMBOLO.....	1-14
	INTERFERENCIA IMAGEN.....	1-14
	INTERFERENCIA INDUCTIVA.....	1-14
	INTERFERENCIA POR IMPULSOS MODULADOS.....	1-15
	INTERFERENCIA POR SATELITE ADYACENTE.....	1-15
	RUIDO.....	1-15
	RUIDO ALEATORIO.....	1-15
	RUIDO DE MOTOR.....	1-16
	RUIDO DE GRANALLA.....	1-16
	RUIDO ESTATICO.....	1-16
	RUIDO DE PARPADEO.....	1-16
	RUIDO BLANCO.....	1-16
	ATENUACION.....	1-16
	ATENUACION ATMOSFERICA.....	1-17
	ATENUACION PARA LA FRECUENCIA DE IMAGEN DE UN RECEPTOR.....	1-17
	ATENUACION PARA LA FRECUENCIA INTERMEDIA.....	1-17

	ATENUACION POR INTENSIDAD DE LLUVIA.....	1-17
1.4	NECESIDAD DEL FILTRADO Y LA MODULACION.....	1-18
	FILTRADO.....	1-18
	FILTRADO DE LA SENAL.....	1-18
	MODULACION.....	1-19
	RAZONES PARA MODULAR.....	1-19
	MODULACION POR FACILIDAD DE RADIACION.....	1-19
	MODULACION PARA REDUCIR EL RUIDO Y LA INTERFERENCIA.....	1-19
	MODULACION PARA ASIGNACION DE FRECUENCIA.....	1-19
	MODULACION PARA MULTICANALIZACION.....	1-20
	MODULACION PARA SUPERAR LAS LIMITACIONES DEL EQUIPO.....	1-20

II. FILTRADO ANALOGICO

11.1	INTRODUCCION.....	11-1
11.1A	FILTROS IDEALES.....	11-1
	TRANSMISION SIN DISTORSION.....	11-2
	FILTRO IDEAL PASO BAJAS.....	11-3
11.1B	FILTROS REALIZABLES.....	11-6
11.1C	CLASIFICACION DE LOS FILTROS DE ACUERDO A LA APROXIMACION MATEMATICA.....	11-10
11.1D	CLASIFICACION DE LOS FILTROS DE ACUERDO A SU CONSTRUCCION.....	11-10
	FILTRO PASO BAJAS.....	11-11
	FILTRO PASO ALTAS.....	11-11
	FILTRO PASO BANDA.....	11-11
	FILTRO SUPRESOR DE BANDA.....	11-11
	FILTROS DE CRISTAL.....	11-12
	FILTROS MECANICOS.....	11-13
	FILTROS PASIVOS.....	11-13
	FILTROS ACTIVOS.....	11-13
	FILTROS ELECTROMECHANICOS.....	11-14
	FILTROS DE ONDA ACUSTICA DE SUPERFICIE.....	11-15
	FILTROS DIGITALES.....	11-16
	FILTROS DE MICROONDAS.....	11-17
11.2	FILTROS ACTIVOS Y PASIVOS.....	11-18
11.2A	DESCRIPCION DE LAS APROXIMACIONES MATEMATICAS DE LOS FILTROS.....	11-20
	APROXIMACION BUTTERWORTH.....	11-20
	APROXIMACION CHERYSGHEV.....	11-26
	APROXIMACION ELIPTICA.....	11-29
	APROXIMACION BESSEL.....	11-32
11.2B	REDES PASO BAJA TIPICAS PASIVAS Y ACTIVAS.....	11-38
	IMPEDANCIA Z_0 EN FUNCION DE Z_1 Y Z_2 PARA CONFIGURACION "T".....	11-39
	ATENUACION.....	11-40
	FRECUENCIAS DE CORTE.....	11-41
	REDES PASO BAJAS ACTIVAS.....	11-43
11.2C	TRANSFORMACIONES DE FRECUENCIA.....	11-44
	TRANSFORMACION PASO BAJAS-PASO BAJAS.....	11-44
	TRANSFORMACION PASO BANDA-PASO BANDA.....	11-46
	TRANSFORMACION PASO BAJAS-PASO ALTAS.....	11-48
	TRANSFORMACION PASO BAJAS-SUPRESOR DE BANDA.....	11-48
11.2D	ESCALAMIENTO EN REDES ELECTRICAS.....	11-49

	ESCALAMIENTO DE IMPEDANCIA.....	11-49
	ESCALAMIENTO EN FRECUENCIA.....	11-50
11.3	DISEÑO DE FILTROS PASIVOS.....	11-52
	FRECUENCIAS DE CORTE.....	11-52
	FRECUENCIA DE CORTE DEL FILTRO PASO BAJAS.....	11-52
	FRECUENCIA DE CORTE DEL FILTRO PASO ALTAS.....	11-53
	FRECUENCIA DE CORTE DEL FILTRO PASO BANDA.....	11-53
	FRECUENCIA DE CORTE DEL FILTRO SUPRESOR.....	11-55
	ECUACIONES DE DISEÑO DE LOS FILTROS.....	11-55
	ECUACIONES PARA EL FILTRO PASO BAJAS.....	11-57
	ECUACIONES PARA EL FILTRO PASO ALTAS.....	11-57
	ECUACIONES PARA EL FILTRO PASO BANDA.....	11-58
	ECUACIONES PARA EL FILTRO SUPRESOR.....	11-59
	DISEÑO DE FILTROS M-DERIVADOS.....	11-62
	FILTRO PASO BAJAS M-DERIVADO.....	11-64
	FILTRO PASO ALTAS M-DERIVADO.....	11-66
	FILTRO PASO BANDA M-DERIVADO.....	11-67
	FILTRO SUPRESOR DE BANDA M-DERIVADO.....	11-68
11.4	DISEÑO DE FILTROS ACTIVOS.....	11-70
	FILTRO ACTIVO PASO BAJAS.....	11-70
	FILTRO ACTIVO PASO ALTAS.....	11-72
	FILTRO ACTIVO PASO BANDA.....	11-73
	FILTRO ACTIVO SUPRESOR DE BANDA.....	11-74

III. FILTRADO DIGITAL

111.1	INTRODUCCION A LOS FILTROS DIGITALES.....	111-1
111.2	ESTRUCTURAS DE FILTROS DIGITALES.....	111-6
	RESPUESTAS DE INTERES A SECUENCIAS TIPICAS.....	111-11
	FILTRO INTEGRADOR.....	111-11
111.2A	FILTRO DE RESPUESTA A IMPULSO FINITA (FIR).....	111-13
111.2B	FILTRO DE RESPUESTA A IMPULSO INFINITA (IIR).....	111-17
111.3	REALIZACION DE FILTROS DIGITALES.....	111-22
111.3A	REALIZACION DE FILTROS DIGITALES EN FORMA DIRECTA.....	111-26
	ESTRUCTURA DIRECTA PRIMERA.....	111-26
	ESTRUCTURA DIRECTA SEGUNDA.....	111-29
	ESTRUCTURA DIRECTA TERCERA.....	111-30
	ESTRUCTURA DIRECTA CUARTA.....	111-32
111.3B	REALIZACION DE FILTROS DIGITALES EN CASCADA.....	111-37
111.3C	REALIZACION DE FILTROS DIGITALES EN PARALELO.....	111-39
111.3D	REALIZACION DE FILTROS DIGITALES EN ESCALERA.....	111-42
111.4	DISEÑO DE FILTROS DIGITALES.....	111-50
	RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS FILTROS DIGITALES.....	111-50
111.4A	DISEÑO DE FILTROS DE RESPUESTA AL IMPULSO INFINITA A PARTIR DE FILTROS ANALOGICOS.....	111-55
	METODO DE LA TRANSFORMACION BILINEAL.....	111-60
111.4B	DISEÑO DE FILTROS DE RESPUESTA AL IMPULSO FINITA.....	111-64
	DISEÑO CON AYUDA DE VENTANAS.....	111-70

IV. MODULACION LINEAL

IV.1	TECNICAS DE MODULACION LINEAL.....	IV-1
	MODULACION DE AMPLITUD.....	IV-2
	SISTEMAS DE MODULACION A.M. CON PORTADORA SUPRIMIDA.....	IV-8
	MODULACION DE BANDA LATERAL UNICA.....	IV-11
	MODULACION DE BANDA LATERAL UNICA CON PORTADORA PILOTO.....	IV-16
	MODULACION DE BANDA LATERAL RESIDUAL.....	IV-16
IV.2	MODULADORES.....	IV-19
	MODULADOR DE LEY DE POTENCIAS.....	IV-19
	MODULADOR DE CONMUTACION.....	IV-20
	MODULADOR EN ANILLO.....	IV-21
	MODULADOR BALANCEADO.....	IV-23
	MODULADORES DE BANDA LATERAL UNICA.....	IV-24
	MODULADOR DE CORRIMIENTO DE FASE.....	IV-24
	MODULADOR DE WEAVER.....	IV-25
IV.3	DEMODULACION SINCRONA Y ASINCRONA.....	IV-27
	DEMODULACION SINCRONA.....	IV-27
	DEMODULACION ASINCRONA.....	IV-28
IV.4	DEMODULADORES.....	IV-29
	RECEPTOR DE LAZO DE COSTAS.....	IV-29
	CIRCUITO DE CUADRATURA.....	IV-31
	DETECCION POR PORTADORA PILOTO.....	IV-32
	DETECTOR DE ENVOLVENTE.....	IV-33
IV.5	CONVERSION DE FRECUENCIA.....	IV-35
IV.6	CONVERTIDORES DE FRECUENCIA.....	IV-35
IV.7	MULTPLICADORES DE FRECUENCIA.....	IV-36
IV.8	CONCEPTO BASICO DE LA MULTICANALIZACION POR DIVISION DE FRECUENCIA.....	IV-37
IV.9	MULTICANALIZACION POR CUADRATURA.....	IV-40
IV.10	INTERFERENCIA Y RUIDO EN SISTEMAS DE MODULACION LINEAL.....	IV-42
	SISTEMA DOBLE BANDA LATERAL.....	IV-42
	SISTEMA DE BANDA LATERAL UNICA.....	IV-44
	SISTEMA A.M.....	IV-45
	SISTEMA A.M. CON DETECCION DE ENVOLVENTE.....	IV-46
	INTERFERENCIA.....	IV-48

V. MODULACION ANGULAR

V.1	TECNICAS DE MODULACION ANGULAR.....	V-1
V.1A	MODULACION EN FRECUENCIA Y MODULACION EN FASE...	V-3
V.1B	ECUACIONES DE LAS SEÑALES DE F.M. Y P.M.....	V-5
V.2	MODULACION ANGULAR DE TONO UNICO.....	V-7
V.3	MODULACION ANGULAR DE BANDA ANGOSTA.....	V-9
V.4	MODULACION ANGULAR DE BANDA ANCHA.....	V-11
V.5	MODULACION ANGULAR DE MULTITONO.....	V-14
V.6	ESPECTROS DE LAS SEÑALES DE MODULACION ANGULAR.....	V-15
V.6A	ESPECTRO PARA UNA MODULACION MEDIANTE UN TONO...	V-15
V.6B	ESPECTRO PARA UNA MODULACION MEDIANTE UNA SEÑAL MULTITONO.....	V-20
V.7	POTENCIA MEDIA EN SEÑALES DE MODULACION ANGULAR.....	V-22
V.8	CRITERIOS PARA DETERMINAR EL ANCHO DE BANDA	

	DE LAS SEÑALES DE MODULACION ANGULAR.....	V-24
V.9	CONVERSION DE F.M. A P.M. Y DE P.M. A F.M.....	V-26
V.10	GENERACION DE F.M.....	V-27
V.10A	GENERACION DE F.M. EN FORMA INDIRECTA.....	V-27
V.10B	GENERACION DE F.M. EN FORMA DIRECTA.....	V-30
V.11	DEMODULACION DE SEÑALES DE F.M.....	V-31
	DISCRIMINADOR DE FRECUENCIA.....	V-31
V.12	INTERFERENCIA Y RUIDO EN F.M.....	V-37
V.13	PRE-ENFASIS Y DE-ENFASIS.....	V-42
V.14	EFECTO DE UMBRAL.....	V-44

VI. MODULACION POR PULSOS

	MODULACION POR PULSOS.....	VI-1
VI.1	TEOREMA DEL MUESTREO.....	VI-2
VI.2A	MODULACION DE AMPLITUD DE PULSOS (PAM).....	VI-7
VI.2B	MODULACION POR POSICION DE PULSOS (PPM).....	VI-8
VI.2C	MODULACION POR ANCHO DE PULSO (PWM).....	VI-9
VI.3	MULTICANALIZACION POR DIVISION DE TIEMPO.....	VI-10

VII. APLICACIONES

VII.1	ECUALIZADORES DE AUDIO.....	VII-1
VII.2	REDES DE CROSSOVER.....	VII-3
VII.3	FILTROS PARA SEÑALES BIOLÓGICAS.....	VII-5
	SISTEMA GENERALIZADO DE INSTRUMENTACION MEDICA.....	VII-5
	CARDIOTACOMETRO PROMEDIO.....	VII-6
	DETECTOR DE CAIDA DE ELECTRODOS.....	VII-7
	MEDIDA DE FRECUENCIA RESPIRATORIA.....	VII-7
VII.4	RECEPTOR SUPERHETERODINO DE A.M.....	VII-8
	VENTAJAS DE LA SUPERHETERODINACION.....	VII-10
VII.5	SISTEMA PARA LA GENERACION DE F.M. ESTEREO...	VII-11
VII.6	RECEPTOR SUPERHETERODINO DE F.M. MONAURAL Y ESTEREO.....	VII-12
VII.7	JERARQUIAS EN LA MULTICANALIZACION POR DIVISION DE FRECUENCIA.....	VII-14
VII.8	ENMASCARADORES DE SEÑALES.....	VII-15

	BIBLIOGRAFIA.....	A-1
	INDICE.....	A-3