22

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRIMER CURSO DE MATEMATICAS PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RICARDO MARTINEZ ZERTUCHE

México, D.F. 1995

CIUDAD UNIVERSITARIA

VNIVERSDAD NACIONAL AVFNMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios Profesionales
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realizó el pasante RICARDO MARTINEZ ZERTUCHE con número de cuenta 6858005-0 con el título: PRIMER CURSO DE MATEMATICAS PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Consideramos que reune los méritos necesarios para que pueda continuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO.

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA Director de Tesis	
M. en C. FRANCISCO ZUBIETA RUSSI	Zubieta
M. en C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA	
M. en C. ENRIQUE JAVIER BUENDIA CARRERA Suplente	
M. en C. VICTOR MANUEL GONZALEZ ROBLES Suplente	

Ciudad Universitaria, D.F., a 28 de marzo de 1994.

A MIS PADRES

Ana María Z. de Martínez (q.e.p.d.)
José A. Higinio Martínez R. (q.e.p.d.)
Con todos mis recuerdos, cariño y gratitud.

A MIS HERMANOS

Myrna Araceli (q.e.p.d.) Rolando Higinio, Leticia,
Sonia, Juan Manuel y Juana Alicia.
Que supieron comprenderme cuando lo necesité.

A MIS TIOS

Carmela T. de Zertuche (q.e.p.d.)
Ernesto Zertuche G.
Por su apoyo y sus enseñanzas.

A MI ESPOSA: Salustina

Y MIS HIJOS: Laura,
Patricia
Ricardo Alejandro
Por su amor, cariño, estímulo y todo.

CON TODO MI AGRADECIMIENTO A LOS MIEMBROS DEL JURADO:

M. en C. Alejandro Bravo Mojica; quien durante toda la carrera me ofreció su amistad y apoyo a pesar de mis múltiples defectos:

M. en C. Francisco Zubieta Russi; a quien he considerado mi guía desde mis primeros años como universitario.

M. en C. Agustín Ontiveros Pineda; a quien admiro y agradezco su aceptación.

M. en C. Enrique Javier Buendía C; que me ofreció su amistad y estímulo en un momento muy especial.

M. en C. Victor Manuel González R; a quien agradezco sus orientaciones, sugerencias, apoyo completo y amistad total.

A MI QUERIDA FACULTAD

A MI QUERIDA UNIVERSIDAD

I N D I C E   G E N E R A L

Presentación

En la sociedad actual, y desde hace muchos años,una preparación matemática general se considera como parte esencial de la formación intelectual ó cultura general de toda persona. El desarrollo de las matemáticas y el amplio campo de sus aplicaciones han sido tales que es difícil para cualquier persona, sin importar su nivel cultural, interpretar e interactuar con su propia realidad sin requerir al menos un conocimiento elemental de la aritmética y geometría.

Las matemáticas surgen de necesidades prácticas, y las mismas necesidades, interactuando con el pensamiento abstracto genera do por ellas, condujeron al desarrollo de la matemática. Es decir, si bien es cierto que el desarrollo matemático tuvo sus inicios en necesidades prácticas, también es verdad que una vez puesto en marcha, dicho desarrollo gana impulso por sí mismo y trasciende los confines de una utilidad inmediata.

Son varias las cualidades características que se pueden desarrollar con la cultura matemática.

La capacidad de Abstracción, por el mismo carácter abstracto de las matemáticas se desarrolla en las personas una habilidad especial para analizar problemas atendiendo únicamente a sus elementos esenciales y las relaciones que existen entre ellos, dejando de lado los detalles poco importantes, aumentando cada vez mas la capacidad de generalizar los resultados y las aplicaciones.

La Precisión y el Rigor, en este sentido la cultura matemática es una disciplina del espíritu en donde la simple memorización sin el esfuerzo para la comprensión no garantiza buenos resultados. La misma disciplina fuerza la atención, si se quiere aprender, y nos obliga a aprehender lo esencial de un problema, es en este sentido que el "mas ó menos" no tiene cabida en el esfuerzo del aprendizaje, y cuando queremos escribir buscamos la claridad y la precisión. En suma se busca ser riguroso aunque el rigor lo único que pretende es darle formalidad y legitimidad a todos los frutos surgidos de la intuición y de todo el proceso histórico en el desarrollo de la matemática.

La capacidad de Razonamiento, se ve incrementada con el estudio de las matemáticas que también desarrolla la imaginación y nos hace un poco mas independientes de la simple imitación o repetición de ejercicios.

Ademas las aplicaciones de la matemática en la industria, la vida social, la administración del gobierno, y la vida privada nos hace pensar que la tecnología moderna sería imposible sin las matemáticas. También se piensa que la matematización de las ciencias motiva su desarrollo. Algunas aplicaciones brillantes son: el descubrimiento de Neptuno, provocado por irregularidades observadas durante muchos años en el movimiento del planeta Urano, Las Leyes de la genética, la estructura del átomo y la teoría de las ondas electromagnéticas.

En este curso tratamos de poner al alumno en contacto real con el contenido de la aritmética, siguiendo la ruta a partir de los orígenes y elementos fundamentales hasta puntos avanzados, justificando cada paso para no dar lugar al "mas o menos" en la comprensión

El curso propone y considera como esenciales los conocimientos adquiridos en la enseñanza basica, es decir las tablas de multiplicar y el dominio de las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, suma , resta, multiplicación y división. También requiere un compromiso de participación del alumno en el proceso de hacer aritmética y un profundo deseo de tener pensamientos propios, Me parece adecuado recordar un antiguo proverbio chino:

> "Si lo veo tal vez pueda recordarlo.
> Si lo veo y lo escucho quizá me sea de alguna utilidad.
> Pero, si lo veo, lo escucho y lo hago, jamás podré olvidarlo porque ya forma parte de mi mismo.".

CAPITULO I.- SISTEMAS DE NUMERACION

1.- El proceso de contar

a) Al principio fue el caos.

b) Después apareció el dedo y la correspondencia.

c) Aparece el símbolo numérico y la agrupación.

d) Cuestionario

e) Trabajo de investigación sobre sistemas antiguos de numeración.

2.- El sistema de numeración decimal

a) ¿Como surgió?

b) ¿Cuáles son las características del sistema de numeración decimal?

- **1ª.- Es de base 10.**
- **2º.- Es posicional.**
- **3ª.- Es aditivo.**
- **4ª.- Es operativo.**

c) Otros sistemas de numeración posicional con base diferente a 10.

- **1º.- Agrupamiento y conteo en otra base.**
- **2º.- Transformación de números de base a base.**

3.- Las operaciones fundamentales.

- **a) La suma.**
- **b) La resta.**
- **c) La Multiplicación.**
- **d) La División.**

I.- SISTEMAS DE NUMERACION.

I.- EL PROCESO DE CONTAR

a) Al principio fue el caos:

En los primeros tiempos el hombre no tuvo necesidad de contar, se vivió en una especie de comunismo primitivo, todo era de todos y los hombres compartían los frutos de la tierra, las cuevas e incluso los peligros. Pero poco a poco, al agotarse los frutos, al romperse las armas, al escasear la comida, empezaron a sentir la necesidad de tener cada quien sus propias armas, sus reservas de carne y pieles, etc... Cuando el número de posesiones era pequeño, había un conocimiento directo de cada objeto poseído y el poseedor podía prestarlo, esconderlo ó perderlo, pero bastaba un vistazo a los demás objetos para saber que faltaba algo y pensar en la manera de recuperarlo.

b) Después "apareció el dedo y la correspondencia".

Al aumentar el número de posesiones, ese conocimiento fue insuficiente para reconocerlas a todas o para detectar la falta de alguna o algunas de ellas y el hombre fue adquiriendo la idea de CORRESPONDENCIA al tratar de saber cuántos objetos poseía, estableciendo un apareamiento o correspondencia entre cada objeto poseído, vacas por ejemplo, y los dedos de las manos, pero si los objetos eran muchos entonces usaba una piedrita que depositaba en una canasta, cuenco, vasija o agujero en la tierra. Así, para cierta cantidad de vacas tenía la misma cantidad de piedritas en su canasta, aunque el hombre aún no manejaba la idea de número, ya sabía que a cada piedrita que tuviera en su canasta correspondía una vaca de su pertenencia y recíprocamente. Es claro que con este método el hombre sabía que si al meter las vacas a su corral y hacer corresponder a cada vaca que entraba al corral con una piedra de su canasta, le sobraban piedras entonces automáticamente le faltaban vacas, tantas como piedras le hubieran sobrado.
Por otro lado, si adquiría una nueva colección de vacas, debía anexar a su colección de piedras la cantidad de piedritas correspondientes a las nuevas vacas

y de esta manera "sumaba" las dos cantidades. [De hecho, todavía usamos la palabra *piedrita*, en latín calculus ó cálculo - piedra ó guijarro - para *referirnos* a operaciones numéricas, aunque también se le usa con su significado original de piedra, *por ejemplo*; cálculos en el riñón, en el hígado, etc...].
Podemos imaginarnos la importancia que tenían estas colecciones de piedritas para sus poseedores, eran sus registros contables, y en ocasiones las cargaban consigo para efectuar transacciones o impedir robos. Pero no todas las culturas antiguas usaron piedras, algunas culturas usaron varitas, otras nudos en cuerdas, muescas en árboles, colmillos de animales etc...

c) Aparece el símbolo numérico y la agrupación: Probablemente, el siguiente paso fue transmitir esta información; para poder efectuar una transacción, dejar un registro con fines de herencia, para avisar acerca del número de enemigos en otro pueblo, para indicar el número de animales muertos por un cazador, etc... todo esto para casos en que ya eran insuficientes las pinturas rupestres detallando una historia.
Es decir, ya era necesaria la creación del símbolo numérico, aún cuando el concepto de número no estaba suficientemente comprendido ni desarrollado.
Se supone que esta necesidad de símbolos para palabras y números se presenta en el período de crecimiento de las ciudades, cuando empezaron los negocios y el comercio, y los gobiernos se dedicaron a guardar listas de impuestos y otros datos administrativos.
También en este caso, las diferentes culturas, con diferente manera de pensar y diferentes entornos, utilizaron diferentes símbolos numéricos: Algunas, tal vez recordando el dedo levantado, usaron los símbolos I,II,III,III, como los egipcios y los romanos, otras usaron el dedo acostado 一,二 ,三, como los chinos, otras motivadas por los instrumentos que usaban para trazar los símbolos utilizaron , ▼, ◄ (marcas en forma de cuñas) y algunas, recordando a las piedritas, usaron los símbolos, •,.••,•••,.••••, como los mayas, no faltaron las que quisieron tener los mismos símbolos para el lenguaje que para contar y usaron letras, como los griegos y los hebreos.
Sin embargo, en cada cultura notaron que la repetición de símbolos no era un gran avance sobre el uso de las piedritas y, poco a poco fueron madurando otra gran idea, la del AGRUPAMIENTO, y se dieron cuenta de que se podía contar mejor haciendo grupos pequeños de objetos solos, y estos grupos pequeños agrupados a su vez en grupos de grupos de objetos solos y éstos en grupos de

grupos de grupos... etc... También en este caso, las diferentes culturas idearon diferentes formas de agrupamiento:
Los Egipcios utilizaron grupos de 10 y crearon los símbolos: | para 1, ∩ (talón) para el número 10, 𓍢 para un grupo de 10 grupos de 10, ó sea el 100, etc...
Los Babilonios usaron grupos de 10 y de 60, y crearon los símbolos: ▼ (cuña) para el 1, ◀ (cuña apuntando a la izquierda) para el 10, etc...
Los chinos escribieron: 一, 二, 三, etc... para los primeros números y + para el 10.
Los Romanos pensaron que si cada raya era un dedo levantado, abriendo toda la mano, ✋ , teníamos el número 5 como una V, y el número 10 eran dos cincos, X, y quedaba el símbolo X.
Usaron los símbolos I, II, III, IIII, V, X, etc...
Los Mayas usaron grupos de 20 en 20 con símbolos para el uno, el cinco y el cero: . • = 1, — = 5, ◆ = 0,

SISTEMAS DE NUMERACION ANTIGUOS
(SIMBOLOS USADOS)

EGIPCIO		BABILONIO		ROMANO		MAYA		CHINO	
𓏺	= 1	▼	= 1	I	= 1	◆	= 0	一	= 1
∩	= 10	◀	= 10	V	= 5	•	= 1	十	= 10
𓍢	= 100			X	= 10	—	= 5	百	= 100
𓆼	= 1000			L	= 50			千	= 1000
𓂭	= 10 000			C	= 100			萬	= 10 000
𓆐	= 100 000			D	= 500				
𓁨	= 1000 000			M	= 1000				

Los criterios que usaron para el agrupamiento fueron muy diversos, pero muchos de ellos se basaron en las características físicas del cuerpo humano: De esta manera pensaron en agrupaciones de 5 en 5 por los cinco dedos de una mano, en agrupaciones de 10 en 10 por los dedos de las dos manos, en agrupaciones de 20 en 20 por la totalidad de los dedos, manos y pies, en agrupaciones de 12 por las 3 divisiones que se forman en cada uno de los cuatro dedos juntos de una mano cerrada, etc... de la misma manera que pensaron en pártes del cuerpo humano para las primeras medidad de longitud, como la cuarta, el codo, el pie, la vara, etc... y aún para medir tiempos pequeños, donde usaron los ciclos de la respiración y los latidos del corazón.
Existieron muchos sistemas de numeración diferentes e la antigüedad y será tarea para el lector investigar las características de cada uno de ellos.
Por nuestra cuenta estudiaremos el Sistema de Numeración Decimal, que es el sistema que se utiliza actualmente a nivel mundial debido a las transacciones comerciales globalizadoras, aunque todavía en muchos lugares siguen usando su

propio sistema de numeración, de manera local, como los chinos y los arabes por ejemplo, y por otro lado, aún existen algunas tribus que no tienen un sistema de numeración y sólo se manejan las ideas de "uno", "dos", y "muchos".

d) CUESTIONARIO

1.- Cuando el hombre usó piedritas para "contar"...
   a) ¿ Tenía la idea de lo que era número ?
   b) ¿ Cómo sabía que le faltaban vacas ?
   c) ¿ Cuántas vacas debía reclamar ?
   d) ¿Cómo podía ser robado de una parte de sus vacas sin que lo notara ?

2.- ¿A qué se atribuye la necesidad de tener símbolos numéricos?

3.- ¿ Por qué fue surgiendo la idea de agrupamiento?

4.- Mencione tres formas diferentes de agrupamiento y diga que pueblos las usaron.

5.- Diga tres características del cuerpo humano que hayan motivado tres formas diferentes de agrupamiento.

e) TAREA DE INVESTIGACION

Presentar un informe con las características de cada uno de los siguientes sistemas de numeración antiguos.

Sistema de Numeración Egipcio.
Sistema de Numeración Babilónico.
Sistema de Numeración Chino.
Sistema de Numeración Romano.
Sistema de Numeración Maya.

Mencione en cada informe una bibliografía con un mínimo de tres libros que hayan sido consultados.

Puede utilizar las siguientes preguntas como guía para su trabajo de investigación: ¿ En qué epoca se usó ?, ¿En qué material escribían ?, Qué símbolos tenía ?, ¿ Tenía base ó que tipo de agrupamiento usaba ?, ¿ Era posicional ?, ¿ Era aditivo ?, ¿ Era operativo ?, ¿ cuándo y porqué se dejó de usar ?, ¿ queda algo de ese sistema en la actualidad ?

2.- EL SISTEMA DE NUMERACION DECIMAL

a) ¿ Como surgió ?

En la India, igual que en muchas otras culturas, se desarrolló, desde el siglo II ó III A. C., un sistema de numeración que para el siglo V D. C. ya tenía las siguientes características:

1ª) Ya aparecía el cero con su correspondiente símbolo y significado (vacío ó nada) y permitía expresar el valor de posicion de otros símbolos.

2ª) Utiliza diez símbolos, del 0 al 9 para escribir cualquier cantidad.

3ª) Cada símbolo tiene un valor diferente, de acuerdo al lugar que ocupa en la escritura del número, valor posicional.

El cero, en su forma escrita, aparece en la India alrededor del año 500 D. C. en las obras del gran matemático y astrónomo hindú Aryabhata. Según otros el primer manuscrito hindú en el que figura el cero apareció a finales del siglo IX D. C. Posteriormente, en el siglo X, dicho sistema de numeración fue llevado a Europa por unos mercaderes árabes a traves de un libro de aritmética escrito en hindú y traducido al árabe, en Europa traducido del árabe al latín, y en unos cuantos siglos arraigó firmemente en Europa.

A eso se debe que este sistema de numeración también se llame Indo-arábigo, aunque vale la pena aclarar que los árabes no utilizaron este sistema.

En España, en el siglo X, ya aparecen numerales muy semejantes a los que tenemos en la actualidad, pero su aceptación en el resto de Europa se llevó mas tiempo. Aunque los números indo-arábigos se conocieron en Europa desde el año 1000 D. C., en el año 1300 se prohibió su uso en los bancos de ciertas ciudades europeas y en los documentos comerciales con el pretexto de que se transformaban y falsificaban más fácilmente que los números romanos, por ejemplo el 0 podía convertirse en 6 ó 9 por una simple raya, No obstante, cuando comenzaron a imprimirse los libros se hicieron rápidos progresos. Aunque continuaron empleandose los números romanos en algunas escuelas hasta al rededor de 1600, y en la teneduría comercial de libros durante un siglo mas.

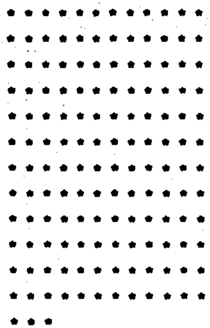
b) ¿ Cuáles son las características del sistema de numeración decimal ?

1ª) El sistema de numeración decimal es de base 10.

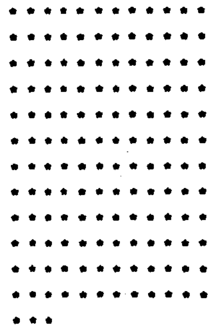
Porque tiene diez simbolos básicos llamados dígitos (del latin digitus = dedo) que son 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, con los cuales se puede escribir cualquier número. y.

Porque sus agrupaciones son de 10 en 10, es decir cada diez unidades forman una decena, cada diez decenas forman una centena, cadadiez centenas forman un millar (ó unidad de millar) etc...

Por ejemplo; contar por agrupaciones de 10 el siguiente conjunto de puntos:
(Fig. a)



(fig. a)



(fig. b)

Método:

Primero: Hagamos grupos de 10 rodeando con lápiz de 10 en 10 puntos.
Segundo: Formemos grupos de 10 grupos de 10.
Tercero: Ahora grupos de 10 grupos de 10 grupos, etc...

Veamos: ¿ Cuántos puntos quedaron sueltos ?
7 esos son las unidades
¿ Cuántos grupos de 10 quedaron sin rodear
4 esas son las decenas
¿ Cuántos grupos de grupos de 10 tenemos solo ?
1 esos son las centenas

Por lo tanto; tenemos 1 4 7 puntos

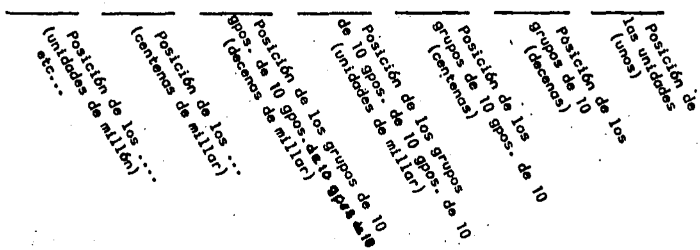
```
c d u
e e n
n c i
t e d
e n a
n a d
a s e
s   s
```

Observe que no contamos... simplemente agrupamos de 10 en 10.

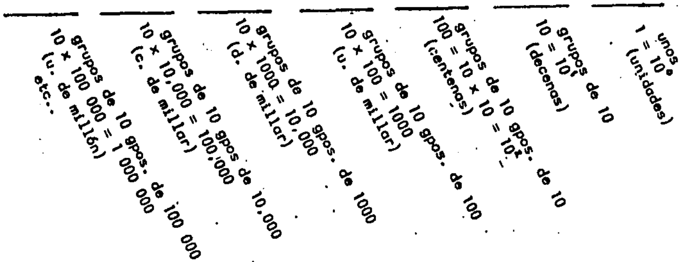
De la misma manera podemos contar agrupando de 8 en 8 (base 8) ó de 5 en 5 (base 5) etc...

2ª) El sistema de numeración decimal es Posicional.

Porque en la escritura de un número es importante la posición que ocupa cada dígito ó símbolo utilizado y de esta manera, cada dígito tendrá un valor posicional.
De acuerdo con lo anterior, cada dígito tiene dos valores:
Un valor absoluto; que es el valor del dígito como tal.
Un valor relativo; que es el valor qu e toma el dígito de acuerdo con la posición que ocupa en la escritura del número.
Pero...¿ Cuáles son las posiciones en el sistema de numeración decimal ?
Estas posiciones se inician desde la extrema derecha hacia la izquierda en la escritura del número, como se señala en el diagrama:



Estas posiciones se pueden denotar por productos de 10 como se marcan en el siguiente diagrama.



También podemos marcar las posiciones por potencias de 10 de la siguiente manera:

$\overline{\quad}$ etc. $\overline{10^6}$ $\overline{10^5}$ $\overline{10^4}$ $\overline{10^3}$ $\overline{10^2}$ $\overline{10^1}$ $\overline{10^0}$ $\longleftarrow$ [valores posicionales de la base 10]

Ahora podemos distinguir los valores relativos de los dígitos que componen un número.

Por ejemplo:

En el número 3854

3	8	5	4
10^3	10^2	10^1	10^0

tenemos

el valor relativo del 4 es 4 porque 4 ocupa la posición de las unidades

el valor relativo del 5 es 50 porque el 5 ocupa la posición de las decenas

el valor relativo del 8 es 800 porque el 8 ocupa la posición de las centenas

el valor relativo del 3 es 3000 porque el 3 ocupa la posición de las unidades de millar.

Es decir, el valor relativo es igual al valor absoluto del dígito por el valor de la posición que ocupa en la escritura del número.
- en el ejemplo anterior-

el valor relativo del 4 es $4\times10^0 = 4\times1 \quad = \quad 4$
el valor relativo del 5 es $5\times10^1 = 5\times10 \quad = \quad 50$
el valor relativo del 8 es $8\times10^2 = 8\times100 \quad = \quad 800$
el valor relativo del 3 es $3\times10^3 = \underline{3\times1000 = \quad 3000}$
suma $\quad = \quad 3854$

Observe que al sumar los valores relativos de los dígitos que lo componen obtenemos el valor del número.
La suma de los valores relativos de los dígitos de un número se conocen como la NOTACION DESARROLLADA del número.

En el ejemplo anterior:

$$\left.\begin{aligned} 3854 &= 4\times10^0 + 5\times10^1 + 8\times10^2 + 3\times10^3 \\ &= 4\times1 + 5\times10 + 8\times100 + 3\times1000 \\ &= 4 + 50 + 800 + 3000 \\ &= 3\,8\,5\,4 \end{aligned}\right\}\ \text{NOTACION DESARROLLADA}$$

3ª) El sistema de numeración decimal es Aditivo.
Porque el valor de un número es igual a la suma de los valores relativos de los símbolos numéricos ó dígitos que lo componen.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 7156 &= 6\times10^0 + 5\times10^1 + 1\times10^2 + 7\times10^3 \\ &= 6\times1 + 5\times10 + 1\times100 + 7\times1000 \\ &= 6 + 50 + 100 + 7000 \end{aligned}$$

3409 =

568 =

4ª) El sistema de numeración decimal es Operativo.

Porque podemos efectuar las operaciones fundamentales, suma, resta, multiplicación y división por medio de procedimientos ó algoritmos sencillos, que también se han ido desarrollando, y explicaremos en la siguiente sección.

c) Otros sistemas de numeración posicional con base diferente a 10.

1º) Agrupamiento y conteo en otra base.
Es claro que así como podemos contar por agrupamientos de 10, también podemos contar por agrupamientos de cualquier otro número.
Veamos un ejemplo; trataremos de contar los siguientes 67 puntos por agrupamientos de 7 en 7.

```
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * *
```

Primero: hacemos grupos de 7 formando septetos y lo que sobre (0,1,2,3,4,5,6) serán las unidades.

Segundo: hacemos grupos de 7 septetos de septetos y lo que sobre serán septetos.

etc...

Tercero: escribimos el número formado en base 7.

1	2	4
7^2	7^1	7^0

Observe que el número 67 pero ahora escrito en base 7 es igual a 124.

es decir $(124)_7 = (67)_{10}$

que se lee... "el número 124 escrito en base 7 es igual al número 67 escrito en base 10".

Como la base 10 es la usual , omitiremos ese sub-índice y simplemente escribiremos

$$(124)_7 = 67$$

Como segundo ejemplo, cuente los mismos 67 puntos pero ahora por agrupamientos de 4 en 4 (base 4)

```
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * *
```

1°) hacemos grupos de 4 formando cuartetos y lo que sobre (0,1,2,3) seran unidades.

2°) hacemos grupos de cuatro grupos de 4 formando cuartetos de cuartetos y lo que sobre seran cuartetos.
etc...
3°) Escribimos el número formado en base 4.

1	0	0	3
4^3	4^2	4^1	4^0

y ahora tenemos que $(1003)_4 = 67$
Es decir, que de la misma manera que contamos en base 10 podemos contar en cualquier base y los valores posicionales, en esta nueva base, serán potencias de la nueva base indicada.

Podemos mencionar algunos casos en que la agrupación y conteo se da en otras bases;
Por ejemplo: algunas cervezas se presentan en cajas de 6 y éstas a su vez en paquetes de 6 cajas.
Algunos lápices y plumas, ademas de venderse sueltos, vienen en cajitas de 12.
La mayoria de los cigarrillos nacionales vienen en cajitas de 20 y éstas a su vez en paquetes de 20 cajetillas.
Las cajitas de cerrillos traen aprox. 54 "luces".
La mayoria de los cubiertos y vajillas estan considerados para 6 personas pero se habla de la media-docena, y muchas tiendas ofrecen descuentos al comprar por docena. Los vendedores de flores y naranjas manejan la "gruesa" que son 12 veces 12 ó sea 144 piezas, la"media-gruesa" = 72 piezas, el "cuarto de gruesa" = 36 piezas, el "medio-cuarto" = 18 y la docena = 12 piezas. ¿Conoce otros casos?.

-Preguntas-
1.- ¿Cuáles son los símbolos numéricos y los valores posicionales de la base 12?
2.- ¿Cuáles son los símbolos numéricos y los valores posicionales en la base 5?

2°) TRANSFORMACIONES DE NUMEROS DE BASE A BASE

¿ Cómo se *transforma* un número escrito en una base cualesquiera a base 10 ?
Efectuandose la notación desarrollada de ése número en la base indicada.
Por ejemplo:

el número $(124)_7$

$$\begin{array}{ll} (1\ \ 2\ \ 4)_7 & = 4x7^0 + 2x7^1 + 1x7^2 \\ \boxed{7^2 \mid 7^1 \mid 7^0} & = 4x1 \ + 2x7 \ + 1x49 \\ & = 4 \ \ + 14 \ \ + 9 \\ & = 67 \end{array}$$

observe que las multiplicaciones se hacen en base 10 y de esa manera se realiza la transformación de *manera* automática.

Ahora, el número $(1003)_4$

$$\begin{array}{ll} (1\ \ 0\ \ 0\ \ 3)_4 & = 3x4^0 + 0x^1 \ + 0x4^2 + 1x4^3 \\ \boxed{4^3 \mid 4^2 \mid 4^1 \mid 4^0} & = 3x1 \ + 0x4 \ + 0x16 + 1x64 \\ & = 3 \ \ + 0 \ \ + 0 \ \ + 64 \\ & = 67 \end{array}$$

-EJERCICIOS-

Transformar a base 10 los siguientes números

1.- $(325)_6$=
2.- $(473)_3$=
3.- $(2212)_3$=
4.- $(11101)_2$=
5.- $(11101)_3$=
6.- $(2212)_4$=
7.- $(2212)_7$=
8.- $(3231)_4$=
9.- $(1324)_5$=
10.- $(434)_5$
11.- $(7A5B)_{12}$
12.- $(B8A)_{12}$

NOTA: En base 12
A=10 y B=11

¿Cómo se transforma un número escrito en base 10 a una base cualesquiera?
Veamos un ejemplo

Transformar el número 67 escrito en base 10 a base 7

1°) ¿ Cuántos grupos de 7 hay en 67 ?

...dividiendo $7\overset{\displaystyle 9}{\overline{)67}}$

4

tenemos que hay 9 grupos de 7 y sobran 4 unidades

2°) ¿ Cuántos gruposde 7 hay en 9 ?

...dividiendo$7\overset{\displaystyle 1}{\overline{)9}}$

2

tenemos que hay 1 grupo y sobran 2 septetos

3°) ¿ Cuántos grupos de 7 hay en 1 ?

...dividiendo $\begin{array}{r} 0 \\ 7\overline{)1} \\ 1 \end{array}$

hay 0 grupos y sobran 1 septeto de septeto.

Por lo tanto; el número buscado será:

1	2	4
7^2	7^1	7^0

El procedimiento se puede abreviar de la siguiente manera:

$\begin{array}{r} 9 \\ 7\overline{)67} \\ ...4 \end{array} \longleftarrow \begin{array}{r} 1 \\ 7\overline{)9} \\ .2. \end{array} \longleftarrow \begin{array}{r} 0 \\ 7\overline{)1} \\ ..1.. \end{array} \quad \therefore 67=(124)_7$

Este procedimiento lo conocemos como el método de las divisiones sucesivas.

Veamos otro ejemplo:

Transformar el número 175 escrito en base 10 a base 4

1°) ¿ Cuántos grupos de 4 hay en 175 ?

...dividiendo $\begin{array}{r} 43 \\ 4\overline{)175} \\ 15 \\ 3 \end{array}$

hay 43 grupos (cuartetos) y sobran 3 unidades

2°) ¿ Cuántos grupos de 4 hay en 43 ?

...dividiendo $\begin{array}{r} 10 \\ 4\overline{)43} \\ 03 \\ 3 \end{array}$

hay 10 grupos (cuartetos de cuartetos) y sobran 3 cuartetos

3°) ¿ Cuántos grupos de 4 hay en 10 ?

...dividiendo $\begin{array}{r} 2 \\ 4\overline{)10} \\ 2 \end{array}$

hay 2 grupos y sobran 2 cuartetos de cuartetos.

4°) ¿ Cuántos grupos de 4 hay en 2 ?

...dividiendo $\begin{array}{r} 0 \\ 4\overline{)2} \\ 2 \end{array}$

hay 0 grupos y sobran 2 cuartetos de cuartetos.
abreviando el procedimiento tenemos:

$$\begin{array}{r} 43 \\ 4\overline{)175} \\ 15 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ 4\overline{)43} \\ 03 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 4\overline{)10} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ 4\overline{)2} \\ 2 \end{array} \qquad \therefore\ 175 = (2233)_4$$

-EJERCICIOS-

Transformar a la base indicada los siguientes números.

1.- $71=(\quad)_3$
2.- $55=(\quad)_2$
3.- $117=(\quad)_3$
4.- $468=(\quad)_4$
5.- $686=(\quad)_5$
6.- $686=(\quad)_9$
7.- $(686=(\quad)_8$
8.- $975=(\quad)_9$
9.- $3428=(\quad)_{12}$
10.- $686=(\quad)_{12}$

¿ Cómo se transforma un número de base a base?
hay que efectuar dos pasos, diga cuáles son:

-EJERCICIOS-

Efectuar las siguientes transformaciones

1.- $(322)_4 = (\qquad)_9$
2.- $(543)_6 = (\qquad)_8$
3.- $(762)_8 = (\qquad)_5$
4.- $(21201)_3 = (\qquad)_9$
5.- $(654)_3 = (\qquad)_5$
6.- $(21201)_3 = (\qquad)_7$

3.- LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

a) LA SUMA:

Al sumar dos ó mas números escritos en base 10, queremos que el resultado se obtenga en base 10 y, obviamente, conservar las posiciones. Para esto escribimos los números cada uno bajo el anterior de manera que las unidades, decenas, etc... aparezcan en las columnas respectivas.

Por ejemplo: para sumar los números 3458,7209,846 y 2624 los escribimos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccc} & 3 & 4 & 5 & 8 \\ + & 7 & 2 & 0 & 9 \\ & & 8 & 4 & 6 \\ & \underline{2} & \underline{6} & \underline{2} & \underline{4} \end{array}$$

u. de millar
centenas
decenas
unidades

Nuestro siguiente paso será sumar los dígitos que aparezcan en los ordenes correspondientes

La costumbre al realizar esta operación, nos hace pensar, en ocasiones en voz alta, que 8+9+6+4 igual a 27 por lo que ponemos 7 y llevamos 2...y aquí preguntamos ¿por qué se pone 7? ¿por qué llevamos 2?, ¿dónde ponemos el 7?, ¿a dónde se lleva el 2?.

Para responder a estas preguntas debemos recordar un principio fundamental en el sistema de numeración por agrupaciones de 10 en 10 que es: "CADA DIEZ UNIDADES DE UN ORDEN EQUIVALEN A UNA UNIDAD DEL ORDEN INMEDIATO SUPERIOR". Por lo tanto; al sumar las unidades en el ejemplo anterior tendremos 27 unidades que equivalen a 20 + 7 unidades es decir (2 veces 10, mas 7) unidades ó sea 2 decenas mas 7 unidades, luego entonces escribimos el 7 en el lugar de las unidades y las 2 decenas las anotamos, o bien "las llevamos", a la columna de las decenas para sumarlas con las demás decenas..

Al sumar en esta columna, obtenemos 13 decenas y nuevamente aclaramos que 13 decenas es igual a (10 + 3) decenas, que es igual a 1 vez 10 decenas mas 3 decenas, que quiere decir 1 centena mas 3 decenas.
Por lo tanto escribimos 3(decenas) en el espacio de las decenas y "llevamos 1 (centena) a la columna de las centenas. De la misma manera procedemos para las siguientes columnas.
La explicación esquemática sería como sigue:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & 1 & 2 & 1 & 2 & & \\
 & & 3 & 4 & 5 & 8 & \\
+ & & 7 & 2 & 0 & 9 & \\
 & & & 8 & 4 & 6 & \\
 & & 2 & 6 & 2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 14 & 21 & 13 & 27 = 20+7 & = 2\cdot 10+7 \\
 & 1 & 4 & 1 & 3 & 7 &
\end{array}
$$

que para abreviar escribimos de la siguiente manera

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & & 3 & 4 & 5 & 8 \\
+ & & 7 & 2 & 0 & 9 \\
 & & & 8 & 4 & 6 \\
 & & 2 & 6 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 1 & 3 & 7
\end{array}
$$

A manera de práctica, efectuar las siguientes sumas.
Recuerde que "CADA DIEZ UNIDADES DE UN ORDEN FORMAN UNA UNIDAD DEL ORDEN INMEDIATO SUPERIOR".

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 8 & 7 & 4 & 5 \\
+ & & 1 & 0 & 2 \\
 & 3 & 6 & 9 & 9 \\
 & \underline{5} & \underline{0} & \underline{3} & \underline{8}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 0 & 1 & 5 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 8 \\
 & 3 & 9 & 2 & 7 \\
 & \underline{5} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1}
\end{array}
$$

Si la operación suma se planteara en un sistema de numeración de base diferente a 10, tendríamos que pensarlo en términos de agrupaciones con la base señalada.

Por ejemplo: Sumar en base 5; 342 con 123 y 232 y 024.

```
     3   4   2
  +  1   2   3
     2   3   2
     0   2   4
  ----------------
  1  8  13  11 = 2·5+1

  1  3   3   1
```

(Es decir, en 11 unidades hay dos veces 5 (dos "quintetas") y sobra una unidad, por lo cual "ponemos 1 y llevamos 2")

En este caso considere que: "CADA CINCO UNIDADES DE UN ORDEN EQUIVALEN A UNA UNIDAD DEL ORDEN INMEDIATO SUPERIOR".

Efectuar las siguientes sumas en la base indicada.

base 4	base 6	base 7	base 3
2 3 3	4 2 1	1 3 4	2 1 2
+ 1 2 3	+ 2 3 5	+ 2 0 5	+ 1 1 1
2 0 1	1 0 5	3 6 6	2 0 2
2 2 3	2 1 4	2 4 3	1 2 2

base 2	base 9	base 8	base 4
1 0 0 1	4215	2005	3 2 1
+ 1 1 0 1	+ 387	+ 1226	+ 3 1 2
1 0 1 1	276	1357	2 3 1
0 0 1	1008	2074	3 0 1

Nota: Los números que se suman se llaman sumandos y a lo que resulta se le llama suma ó resultado.

b) **La Resta:**

Para esta operación, debemos considerar que. "CADA UNIDAD DE UN ORDEN SE PUEDE TRANSFORMAR EN DIEZ UNIDADES DEL ORDEN INMEDIATO INFERIOR".

Por ejemplo : cada decena es igual a 10 unidades
cada centena es igual a 10 decenas
cada u. de millar es igual a 10 centenas
etc...

De esta manera podemos analizar la resta ó diferencia de dos números con el siguiente enfoque:
Una vez escritos los números haciendo corresponder sus posiciones:

1°) Si para cada orden, el dígito del 1er número (minuendo)es mayor que el dígito correspondiente del 2° número (sustraendo) simplemente encontramos la diferencia entre los dígitos de cada orden para obtener el resulatado.
Por ejemplo:

$$\begin{array}{rl} -\ 4\,3\,7\,5 & \text{(minuendo)} \\ \underline{2\,1\,4\,4} & \text{(sustraendo)} \\ 2\,2\,3\,1 & \text{(resta ó diferencia)} \end{array}$$

2°) Si para algunos o varios órdenes, el dígito del 1er número es menor que el dígito correspondiente del 2° número, la resta de un dígito menos otro mayor no se podría efectuar, entonces este dígito del minuendo "pide prestada" una unidad del orden inmediato superior que al llegar a ese orden inferior se convierte en 10 unidades respectivas que se suman a las que ya había, y entonces si se puede efectuar la resta en ése orden. Pero debemos indicar de alguna manera éste préstamo efectuado, ya sea quitando la unidad del dígito en el minuendo ó agregando una unidad al dígito correspondiente en el sustraendo, para "emparejar" la situación.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{array}{r} 8\,1\,6\,2 \\ -\;\underline{2\,3\,4\,5} \end{array}$$

A 2 no se le puede restar 5.. Ahora el 2 le pide una unidad prestada al 6

$$\begin{array}{r} 8\;1\;6\;\overset{1}{2} \\ \underline{2\;3\;4\;5} \end{array} \text{ y nos queda } \begin{array}{r} 8\;1\;\overset{-1}{6}\;{}^{1}2 \\ \underline{2\;3\;4\;5} \\ 7 \end{array} \text{ ó bien } \begin{array}{r} -8\;1\;6\;2 \\ \underline{2\;3\;\overset{+1}{4}\;5} \\ 7 \end{array}$$

porque resulta lo mismo 5-4 que 6-5, es decir resulta lo mismo quitarle 1 al 6 del minuendo que sumarle 1 al 4 del sustraendo.

Otra vez, la costumbre nos hace pensar que para la resta cada vez que se pide prestado, se compensa sumando una unidad al dígito del orden superior en el sustraendo y lo escribimos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 8\,1\,6\,2 \\ -\;\underline{\overset{+1}{2}\,3\,\overset{+1}{4}\,5} \\ 5\,8\,1\,7 \end{array} \qquad \text{ó de la manera} \qquad \begin{array}{r} 8\,1\,6\,2 \\ -\;\underline{\overset{1}{2}\,3\,\overset{1}{4}\,5} \\ 5\,8\,1\,7 \end{array}$$

Se puede comprobar que la operación resta fué bien realizada cuando al sumar el sustraendo con la resta ó diferencia (resultado) obtenemos el minuendo.

$$\begin{array}{rl} & 8\;1\;6\;2 \\ - & \left.\begin{array}{r}\underline{2\;3\;4\;5} \\ 5\;8\;1\;7\end{array}\right\}+ \\ & 8\;1\;6\;2 \quad = \text{minuendo} \end{array}$$

Nuevamente; si deseamos efectuar una resta en un sistema de numeración de base diferente a 10, tendríamos que pensarla en términos de agrupaciones en la base señalada.

Por ejemplo:

Restar en base 5

$$
\begin{array}{r}
4\;3\;2\;1 \\
-\;\underline{2\;4\;1\;3} \\
1\;4\;0\;3
\end{array}
$$

En este caso considere que "CADA UNIDAD DE UN ORDEN EQUIVALE A CINCO UNIDADES DEL ORDEN INMEDIATO INFERIOR".

Y efectuando la suma, del sustraendo con la diferencia resultante, en base 5, comprobamos:

$$
\begin{array}{r}
4\;3\;2\;1 \\
\left.\begin{array}{r}\underline{2\;4\;1\;3} \\ 1\;4\;0\;3\end{array}\right\} + \\
4\;3\;2\;1
\end{array}
$$

Efectuar las siguientes restas en la base indicada.

base 7	base 8	base 6
$\begin{array}{r} 4201 \\ \underline{2365} \end{array}$	$\begin{array}{r} 6213 \\ \underline{3547} \end{array}$	$\begin{array}{r} 4250 \\ \underline{2423} \end{array}$

base 4	base 2	base 3
$\begin{array}{r} 3012 \\ \underline{1231} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1100 \\ \underline{1001} \end{array}$	$\begin{array}{r} 2121 \\ \underline{1122} \end{array}$

c) <u>La Multiplicación:</u>

En la multiplicación nos surgen otras dudas:

	375
	x 82
¿ por qué se hace por partes?	750
¿ por qué se corren algunos lugares?	3000
	30750

¿cómo sé que la suma de lo que queda abajo es el resultado de multiplicar los dos números?.

La multiplicación es una suma repetida, de un mismo número, escrita de manera abreviada; por ejemplo: $3 \cdot 8 = 3$ veces $8 = 8+8+8=24$

De esta manera se construyen las tablas de multiplicar que todos conocemos para la base 10.

Cuando se quiere multiplicar un número formado por varios dígitos por un número que consta de un solo dígito, la multiplicación se hace por partes:

Se multiplica primero el orden de las unidades por el dígito multiplicador y se escribe el resultado en el orden de las unidades, "llevando" las decenas resultantes para ser agregadas en el orden respectivo.

Enseguida se multiplican las decenas por el dígito multiplicador y el resultado, que son decenas, se escribe en el orden de las decenas considerando las decenas llevadas en el paso anterior y considerando también las centenas formadas ahora, para ser "llevadas" al orden de las centenas y de la misma manera para los siguientes órdenes .

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 4\quad 6\quad 7 \\ \underline{\times\qquad\quad 8} \\ 3^{3}\ 7^{5}\ 3^{5}\ 6 \end{array}$$

observe que también se resuelve sumando 8 veces el número 467 ó bien sumando 467 veces el número 8.

La justificación del procedimiento anterior se encuentra en la ley distributiva que relaciona la multiplicación con la suma de la siguiente manera:

$$\boxed{a(b+c) = ab+ac \qquad \text{ó bien} \qquad (b+c)a = ab+ac}$$

Y aplicando esta ley al ejemplo anterior tendríamos:

$$\begin{aligned}(467)\times 8 &= (400+60+7)\times 8\\ &= 400\text{x}8 + 60\text{x}8 + 7\text{x}8\\ &= 3200 + 480 + 56\end{aligned}$$

es decir, tenemos que sumar 32 centenas mas 48 decenas mas 56 unidades de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 3200\\ +\ \ 480\\ \underline{\ \ \ 56}\\ 3736\end{array}$$

Para obtener el resultado. Pero este procedimiento se abrevia con el diagrama anterior, que repetiremos ahora.

$$\begin{array}{r} 4\ 6\ 7\\ \underline{\times\ \ \ \ 8}\\ 3\ 7\ 3\ 6\end{array}$$

Cuando se multiplican dos números de varios dígitos entonces se aplica dos veces la ley distributiva.

Por ejemplo, sea 428 x 376.

En este caso: 428 x 376 = (428) x (300+70+6)

= 428x300 + 428x70 + 428x6

Aquí entendemos que se quiere multiplicar 428 por 3 centenas y sumarlo con 428 por 7 decenas y con 428 por 6 unidades. Es decir, debemos sumar tres resultados de productos parciales de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcr} 428\times 300 &=& 128400\\ +\,428\times 70 &=& 29960\\ 428\times\ \ 6 &=& \underline{\ \ \ 2568}\\ && 160928\end{array}$$

Por supuesto que toda esta explicación y el procedimiento justifican un arreglo ó esquema para desarrollar la multiplicación, por partes,como nos lo explicaron en la primaria.con la aclaración de que los productos parciales se inician con las unidades y los siguientes productos parciales se van "corriendo", cada vez, un lugar hacia la izquierda para ocupar los respectivos lugares de decenas, centenas, etc...

```
    4 2 8
    x376
    2568
   2996
  1284
  160928
```

Observe que al correr los siguientes productos parciales hacia la izquierda ya no es necesario escribir los ceros finales.

También en este caso, para efectuar una multiplicación en un sistema de numeración de base diferente a 10, debemos efectuar los productos parciales y la suma en términos de agrupaciones de la base señalada.

Por ejemplo:

Multiplicar en base 5

```
    3244
    x432
    12043
   20342
  24141
  3140113
```

Multiplicar en base 6

```
   435
   x24
   3032
  1314
  20212
```

ahora efectuar las siguientes multiplicaciones en la base indicada:

base 3	base 4	base 7	base 8
2 1 1 2	2 2 3	4 5 3	5 6 4
x1 2 2	x3 2 3	x3 4 2	x6 3 5

d) La División

La manera en que realizamos la división también nos hace surgir varias dudas:
Veamos la división de 4275 entre 73 :

$$\begin{array}{r} 58 \\ 73\overline{)4275} \\ 625 \\ 41 \end{array}$$

Veámoslo paso a paso:
Primero observamos que el 73 cabe 5 veces en 427 y de ahí sobran 62.
Después bajamos (?) el 5 y observamos que ahora el 73 cabe 8 veces en 625 y sobran 41.
Podemos comprobar que la división está bien hecha porque (73x58) + 41 = 4275, pero....

¿ por qué esta operación se inicia con los órdenes mayores en vez de iniciar con las unidades como las demás operaciones?
Cuando se efectúa la resta, ¿por qué se baja la siguiente cifra ó dígito?.

Para responder a estas preguntas, trataremos de explicar la división recurriendo a la repartición de agrupaciones de 10 en 10 entre unidades. Para esto consideremos que tratamos de repartir 4275 lápices entre 73 alumnos.
Como los lápices, por el sistema de numeración, estan en agrupaciones de 10, podemos pensar que los tenemos como lápices sueltos (5), en paquetitos de 10 lápices (7), en paquetes de diez paquetitos (2) y en cajas de 10 paquetes (4). Para repartirlos es natural que tratemos de repartir sin desbaratar los empaques, pero si los paquetes mas grandes no son suficientes para repartir entre los alumnos entonces se desbaratan los empaques principales obteniendo los paquetes siguientes (del siguiente orden) y juntándolos con los paquetes que tenemos (de ése siguiente orden) tratamos ahora de repartir estos paquetes entre alumnos, si tampoco se puede ó sobran algunos entonces desbaratamos ahora sus empaques, obteniendo los paquetes siguientes y juntándolos con los paquetes que teníamos de ese orden y... etc.. El procedimiento se repite hasta que se reparten los lápices sueltos y anotamos los que sobran.

Veámoslo con los siguientes diagramas:

```
    0
73)4275
   42
```

Las cajas (4) no alcanzan a repartirse entre los muchachos. por lo que se desbaratan y nos quedan 40 paquetes (de 10 paquetitos cada uno) que juntándolos con los 2 paquetes que teniámos, y que "se bajan" se convierten en 42.

```
   00
73)4275
   42
   427
```

Los 42 paquetes no alcanzan para repartirse entre los alumnos, por lo que se desbaratan sus empaques y nos quedan 420 paquetitos (de 10 lápices cada uno) y juntándolos con los 7 paquetitos que teníamos, que "se bajan" ó "bajamos el 7", se convierten en 427.

```
   005
73)4275
   42
   427
  -365
    62
```

¡Ahora si! 427 paquetitos entre 73 alumnos hace que toquen 5 paquetitos a cada alumno, lo que da un total de 5 x 73 = 365 es decir , 365 paquetitos repartidos y sobran 62 paquetitos

Rompemos los 62 paquetitos y nos sobran 620 lápices sueltos y juntándolos con los que teníamos, "se baja el 5", nos quedan 625 lápices sueltos.

```
   005..
73)4275
   42
   427
  -365
    625
```

Al repartir 625 lápices entre 73 alumnos le tocan 8 lápices a cada alumno, lo que da un total de 8 x 73 = 584 lápices repartidos y sobran 41 lápices.

$$\begin{array}{r} 0058 \\ 73\overline{)4275} \\ 42 \\ 427 \\ -365 \\ \hline 625 \\ -584 \\ \hline 41 \end{array}$$

Con esto se completa la operación, en donde 4275, el número que se divide se llama <u>dividendo</u>.
73, el número que lo divide se llama <u>divisor</u>.
58, el resultado se llama <u>cociente</u>, y 41, que es lo que sobra, se llama <u>residuo</u>.

El último diagrama es el que nos indica el proceso completo de la división, pero para ahorrar espacio eliminamos los primeros pasos de descomposición y no escribimos los ceros iniciales en el cociente, con lo que nos queda el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{r} 58 \\ 73\overline{)4275} \\ -365 \\ \hline 625 \\ -584 \\ \hline 41 \end{array}$$

Y también podemos eliminar la notación de la resta efectuándola simultáneamente con la multiplicación, con lo que nos queda el esquema:

$$\begin{array}{r} 58 \\ 73\overline{)4275} \\ 625 \\ 41 \end{array}$$

Como repaso, efectuar las siguientes divisiones, escribiendo el paso de cada resta.

$29\overline{)8475}$ $965\overline{)345862.}$

$45\overline{)11234}$

Para el caso de la división en un sistema de numeración en otra base, debemos efectuar las reparticiones, los productos y las restas en términos de agrupaciones de la base señalada.
Por ejemplo.

dividir en base 5

```
         3244
432 ) 3140113
     -2401
       2341
      -1414
        4221
       -3333
         3333
        -3333
         0000
```

dividir en base 6

```
       441
24 ) 20312
    -144
      151
     -144
        32
       -24
         4
```

Ahora, efectúe las siguientes divisiones en la base indicada:

base 4	base 9	base2	base 7
21) 3022	87) 3568	11) 100101	65) 42054

CAPITULO II CONJUNTOS

1. ¿Qué es un conjunto?
2. ¿Cómo es la notación de conjuntos?
3. La relación entre un elemento y un conjunto
4. Conjunto vacío
5. Igualdad entre conjuntos
6. Relación de contención
7. Conjuntos comparables y ajenos
8. Propiedades de la relación de contención
9. El conjunto potencia
10. Diagramas de Venn-Euler
11. Unión de conjuntos
12. Intersección de conjuntos
13. Diferencia de conjuntos
14. El complemento de un conjunto

CONJUNTOS

1.- ¿Qué es un conjunto?

Un conjunto es una colección, lista ó cúmulo de objetos cualesquiera.

Los objetos que forman el conjunto se llaman elementos o miembros del conjunto.

Por ejemplo:
El conjunto de aves que regresan a sus nidos.
El conjunto de perros que siguen a la presa.
El conjunto formado por un caballo, una casa, un libro y un lápiz.
El conjunto formado por una cuchara, un melón, una silla y un carro.

Si los objetos que forman el conjunto son de la misma especie. se dice que el conjunto es homogéneo.
Si los objetos son de especie diferente, el conjunto será heterogéneo.

¿Cuáles de los conjuntos del ejemplo anterior son homogéneos y cuales heterogéneos?

Decimos que un conjunto esta bien definido cuando dado un objeto cualesquiera podemos saber si es miembro ó no es miembro del conjunto.
Por ejemplo:
"El conjunto de alumnos del grupo 306 del C.C.H. Naucalpan".
El alumno Juan Pérez esta inscrito pero no esta presente..., ¿es miembro del conjunto?, para no tener este tipo de dudas es necesario re definir el conjunto de la siguiente manera.
"El conjunto de alumnos inscritos del grupo 306 del C.C.H., Naucalpan". o bien
"El conjunto de alumnos presentes del grupo 306 del C.C.H. Naucalpan."

Un conjunto es FINITO, cuando tiene un número finito de elementos, es decir, cuando sus elementos se pueden contar y terminar de contar. De otra manera el CONJUNTO ES INFINITO. O sea, un conjunto es infinito cuando sus elementos no se pueden contar ó no se termina de contar.

Ejemplos:

Conjuntos Finitos	El conjunto de las letras vocales del español El conjunto de alumnos del plantel El conjunto de abejas en un panal El conjunto de pelos en la cabeza El conjunto de granos de arena en la playa
Conjuntos Infinitos	El conjunto de los números pares (2,4,6,8,10,12...) El conjunto de puntos en una línea. El conjunto de círculos de diferente radio todos con un mismo centro fijo

2.-¿Cómo es la notación de conjuntos?

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas, A, B, C, K, X, etc... y los elementos con letras minúsculas, a, b, c, x, y, etc,,,.

Al definir un conjunto se pueden usar varios procedimientos llamados. Notación Descriptiva, Notación Tabular y Notación Constructiva ó por comprensión , que consiste en:

La Notación Descriptiva consiste en describir al conjunto por medio de nuestro lenguaje:

Por ejemplo:

A= El conjunto de las vocales en español

B= El conjunto de los números impares positivos menores que 10.

C= El conjunto de los números enteros mayores que 3 pero menores que 11.

La Notación Tabular: aquí se define un conjunto por la enumeración ó lista de sus elementos separados por comas y encerrados con llaves.

Por ejemplo:

A={a,e,i,o,u}

B={1,3,5,7,9}

C={4,5,6,7,8,9,10}

D={1,2,3,4,5,6,...}

La notación constructiva: Se define el conjunto usando una letra minúscula, por lo general x, para representar a un elemento cualquiera y se enuncian las propiedades o condiciones que deben cumplir cada uno de los elementos.

Por ejemplo:

A={ x I x es una vocal} que se lee: "A es el conjunto de las x, tales que x es una vocal".

B={y I y es impar y Y<10} que se lee: "B es el conjunto de las y tales que y es impar y Y es menor que 10".

C={z | z es un número entero y $3<z<11$} que se lee: "C es el conjunto de las z, tales que z es un número entero y z es mayor que 3, y menor que 11.
D={$x \mid x^2=9$ }
E={y | 3y-2=10}
F={z | z es una letra de la palabra " tacto"}
diga como se leen D, E y F.

3.- La relación entre un elemento y un conjunto se denotará por medio del símbolo $\in$ (épsilon, letra griega) de la siguiente manera:

$a \in D$

quiere decir que " a es elemento del conjunto D"
ó bien: " a esta en D"
ó bien :"a pertenece a D"

Por otro lado:

$a \notin F$

significa que: "a no es elemento de F"
ó bien: "a no esta en F"
ó bien : "a no pertenece a F"
obsérve que en matemáticas una relación se niega cruzando el símbolo de la relación con una diagonal por ejemplo; $a \neq b$ se lee "a no es igual a b"
$3 \nmid 5$ se lee " 3 no divide a 5"
$7 \not< 4$ se lee "7 no es menor que cuatro"
$-8 \notin N$ se lee "-8 no pertenece a N"
Por ejemplo : Si A ={a,e,i,o,u}, $a\in A$, $e\in A$, $u\in A$ pero $b\notin A$, $y\notin A$, etc....

Nota: el símbolo $\in$ indica una relación entre un elemento y un conjunto. Por lo tanto ; las notaciones $A \in B$ y $r \in s$ significan B es un conjunto y A es un elemento de B, y s es un conjunto y r es un elemento de s, aunque en este texto no usaremos mayúsculas para elementos ni minúsculas para conjuntos.

4.- Conjunto vacío o nulo es aquel conjunto que no tiene elementos.
El conjunto vacío se denota por $\varnothing$ (letra escandinava) por ejemplo:
A= conjunto de personas vivas con mas de 200 años de edad
B= conjunto de sirenas que viven en México.
C= conjunto de campeonatos mundiales ganados por la selección de fut-bol Mexicana
D= conjunto de elefantes voladores.

5.- Igualdad entre conjuntos.

Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismo elementos.

Es decir $A = B$ si cada elemento de A es elemento de B y cada elemento de B es elemento de A.

Por ejemplo:

Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,2,3,1,1\}$ en este caso $A=B$, porque cada elemento de A es también elemento de B y cada elemento de B es elemento de A.

Es claro que al escribir un conjunto, no afectan el orden ni la repetición de elementos.

6.- Relación de Contención.

Se dice que un conjunto A es subconjunto de un conjunto B si cada elemento de A es también elemento de B.

A es subconjunto de B se denota por $A \subset B$.

$A \subset B$ se lee:

"A es un subconjunto de B"

ó bien "A esta contenido en B"

ó bien "B es superconjunto de A"

ó bien "B contiene a A"

Es claro que si $A \subset B$ entonces para cada $x \in A$ tendremos que $x \in B$.

Por otro lado; ¿Cuándo un conjunto C no es subconjunto de un conjunto D?

C no es subconjunto de D se denota por $C \not\subset D$

C no es subconjunto de D si hay al menos un elemento de C que no está en D.

Por ejemplo:

Sean: $A=\{a,b,c,e,i,o,u\}$

$B=\{a,e,i,o,u\}$

$C=\{a,b,c,d,e\}$

En este caso $B \subset A$ porque cada elemento de B es elemento de A.

$C \not\subset A$ porque $d \in C$ pero $d \notin A$

$A \not\subset B$ porque _ $\in A$ y _ $\notin B$. (completar)

¿$B \subset C$?______porque______________________________

¿$C \subset B$?______porque______________________________

De acuerdo con lo anterior, decimos que $A=B$ si y sólo si $A \subset B$ y también $B \subset A$..

O sea $A=B \Rightarrow A \subset B$ y $B \subset A$ y también $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A=B$ en símbolos:

$\boxed{A=B \Leftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A}$

NOTA: $\Rightarrow$ se lee "... implica que..."

$\Leftrightarrow$ se lee "... si y solo si..."

A es subconjunto propio de B, cuando $A \subset B$ pero $A \neq B$.

7.- Conjuntos comparables y Ajenos.

Dos conjuntos A y B se dice que son comparables cuando $A \subset B$ ó $B \subset A$.

Por ejemplo:

Sean $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{1,3,5\}$ $C=\{2,4,6,8\}$ A y B son comparables porque $B \subset A$, pero A y C no son comparables, porque $A \not\subset C$ y $C \not\subset A$, B y C tampoco son comparables.

Dos conjuntos A y B son ajenos cuando no tienen elementos en común, es decir, cuando ningún elemento de A es elemento de B y ningún elemento de B es elemento de A.

Por ejemplo:

Si $A=\{a,e,i,o,u\}$, $B=\{b,c,d\}$ y $C=\{a,b,c,d,e\}$ A y B son ajenos pero A y C no son ajenos porque $a \in A$ y $a \in C$.

¿B y C son ajenos?_______porque______________________________

8.- Propiedades de relación de Contención (Relación de Subconjunto)

a) $A \subset A$ para cualquier conjunto A(" Cualquier conjunto es subconjunto de si mismo") ¿ o no es verdad que todo elemento de A es elemento de A?

b) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$ (ley transitiva)

Demostración

Porque si $x \in A$, como $A \subset B$, $x \in B$ y como $B \subset C$ entonces $x \in C$, es decir todo elemento de A lo es de C y por lo tanto $A \subset C$.

c) $\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto A.("el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto")

Demostración

Si $\varnothing$ no fuera subconjunto de A, habría un elemento x, $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$.

Pero el $\varnothing$ no tiene elementos.

Por lo tanto, es falso que existe $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$ es decir ; es falso que $\varnothing \not\subset A$, y lo verdadero será que $\varnothing \subset A$.

9.- El Conjunto Potencia.

El conjunto potencia de un conjunto A, denotado por P(A), es el conjunto que contiene como elementos a todos los subconjuntos del conjunto A.
en símbolos $P(A) = \{B / B \subset A\}$.
Nota: El conjunto potencia es un conjunto de conjuntos.
Los conjuntos de conjuntos también se llaman clases ó familias de conjuntos

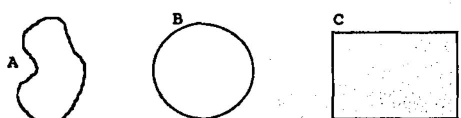
Por ejemplo:
Si $A=\{a\}$, entonces $P(A)=\{\varnothing,\{a\}\}$
Si $A=\{a,b\}$, entonces $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$
Si $A=\{a,b,c\}$, entonces $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$
Si $A=\{a,b,c,d\}$, entonces $P(A)=$ (escribirlos)

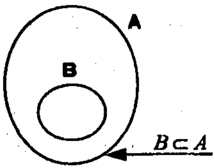
Observamos que:
Si A tiene 1 elemento, entonces P(A) tiene 2 elementos ($2=2^1$)
Si A tiene 2 elementos , entonces P(A) tiene 4 elementos ($4=2^2$)
Si A tiene 3 elementos , entonces P(A) tiene 8 elementos ($8=2^3$)
Si A tiene 4 elementos , entonces P(A) tiene _ elementos (   )

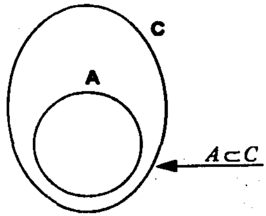
En general
Si A tiene n elementos entonces P(A) tiene 2^n elementos.

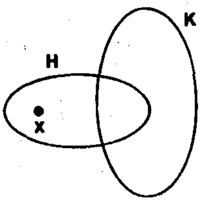
10.- Diagramas de Venn-Euler.
Los diagramas de Venn son representaciones gráficas de los conjuntos que nos ayudan a visualizar sus propiedades y entenderlos mejor.
Las representaciones generalmente se dan por medio de curvas cerradas (curvas que regresan al punto de partida) y el interior se considera como el contenido del conjunto.

Ejemplos:



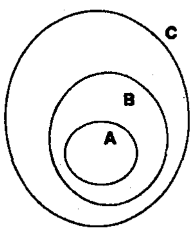




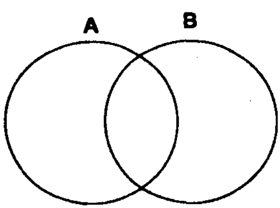


$H \not\subset K$

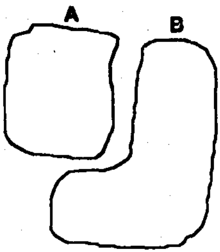
porque existe $x \in H$ tal que $x \notin K$



$A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$



A y B no son ajenos



A y B son ajenos

OPERACIONES CON CONJUNTOS

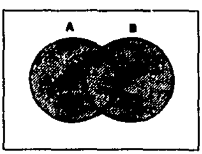
11.- Unión de Conjuntos:

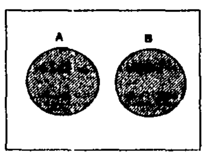
La unión de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en A ó en B ó en ambos.

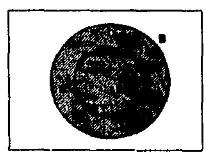
En símbolos :

$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ ó $x \in B\}$; $A \cup B$ se lee ..." A unión B"

En diagramas de Venn :







En cada caso, $A \cup B$ es la parte sombreada /////.

Para que $x \in A \cup B$ es necesario que $x \in A$ ó $x \in B$.

Supongamos que $y \notin A$, ¿puede suceder que $y \in A \cup B$? .

¿ Qué se necesita para que $z \notin (A \cup B)$?.

Ejemplos :

Consideremos los conjuntos: A= {a, b, c, d, e}

B= {a, e, i, o, u}

C={e, f, g, h, i}

Encontrar: $A \cup B$= { a, b, c, d, e, i, o, u}

$A \cup C$= {a, b, c ,d, e,f, g, h, i}

$B \cup C$= { } (completar)

$C \cup B$= { }

$C \cup A$= { }

$B \cup A$= { }

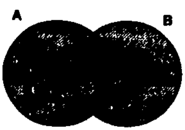
$A \cup (B \cup C)$={a, b, c, d, e} $\cup$ {a, e, i, o, u, f, g, h} = {a, b, c, d, e, i, o, u, f, g, h}

$(A \cup C) \cup C$= { } $\cup$ { } = { }

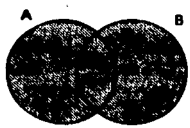
Obsérve que:

$B \cup C = C \cup B$, $A \cup C = C \cup A$, $A \cup B = B \cup A$ y $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Con diagramas de Venn, podemos ilustrar que $A \cup B = B \cup A$ y que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ etc....

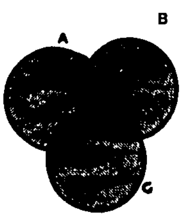


$A \cup B =$



$B \cup A =$

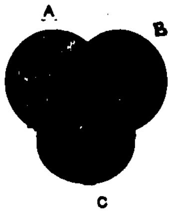
Obsérve que las partes sombreadas son iguales ∴ $A \cup B = B \cup A$



A = ///

B ∪ C = \\\

$A \cup (B \cup C)$ = 



A ∪ B =

C =

$(A \cup B) \cup C =$ 

Algunas de las propiedades de la unión son:

U_1) $A\cup A = A$

U_2) $A\cup B = B\cup A$

U_3) $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$

U_4) $A\cup\varnothing = A$

U_5) $A\subset A\cup B$ y $B\subset A\cup B$

U_6) Si $A\subset B$ entonces $A\cup B = B$.

Demostración de las propiedades.

a) $A\cup B = B\cup A$

Porque obtenemos lo mismo uniendo los elementos de A con los de B que uniendo los elementos de B con los de A.

b)Demostrar que $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ (hacerlo)

c) Demostrar que: Si $A\subset B$ entonces $A\cup B = B$.

12.- Intersección de conjuntos.

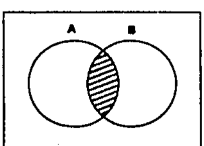
La intersección de dos conjuntos A y B, denotada por $A\cap B$ es el conjunto formado por los elementos que están en A y en B simultáneamente.

En símbolos:

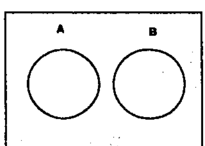
$A\cap B = \{x/x\in A \text{ y } x\in B\}$

$A\cap B$ se lee "A intersección B"

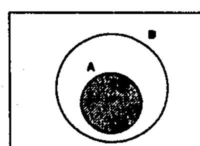
En diagramas de Venn:



$A \cap B =$ ///



$A \cap B = \varnothing$



$A \cap B =$ ///

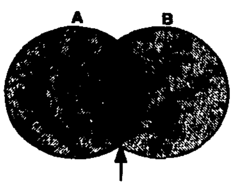
Para que $x \in A \cap B$ es necesario que $x \in A$ y $x \in B$.
Supongamos que $y \in B$, ¿es suficiente para afirmar que $y \in A \cap B$?

Ejemplos:

Sean los conjuntos: $A = \{a,b,c,d,e\}$
$B = \{a,e,i,o,u\}$
$C = \{e,f,g,h,i\}$

Encontrar: $A \cap B = \{a,e\}$
$A \cap C = \{e\}$
$B \cap C = \{\qquad\}$ (completar)
$C \cap B = \{\qquad\}$
$C \cap A = \{e\}$
$B \cap A = \{\qquad\}$
$A \cap (B \cap C) = \{a,b,c,d,e\} \cap \{e,i\} = \{e\}$
$(A \cap B) \cap C = \{\qquad\} \cap \{\qquad\} = \{\qquad\}$
$A \cap (B \cap C) = A \cap \{a,e,i,o,u,f,g,h\} = \{a,e\}$
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{\qquad\} \cup \{\qquad\} = \{\qquad\}$
$A \cup (B \cap C) = A \cup \{\qquad\} = \{\qquad\}$
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a,b,c,d,e,i,o,u\} \cap \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\} = \{a,b,c,d,e,i\}$

Obsérve que $A \cap B = B \cap A$, $A \cap C = C \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ etc...., en los diagramas de Venn se observa que $A \cap B = B \cap A$ y podemos también ilustrar el caso en que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.



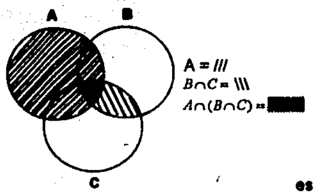
$A \cap B = B \cap A$

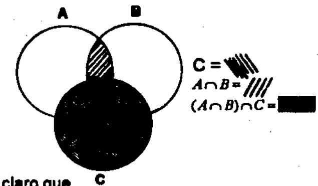
A = /// $\quad$ $A \cap B$ **son las regiones comunes de A y B**
**B = **

$A \cap B =$ **y** $B \cap A =$

(Ley Conmutativa)

diagramas de Venn





es claro que

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (Ley Asociativa)

Propiedades de la intersección.

I_1) $A\cap A = A$

I_2) $A\cap B = B\cap A$

I_3) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

I_4) $A\cap\varnothing = \varnothing$

I_5) $A\cap B\subset A$ y $A\cap B\subset B$

I_6) Si $A\subset B$ entonces $A\cap B = A$

a) $A\cap A = A$ (I_1)

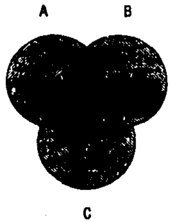
porque es claro que un elemento que esta en A también esta en A y por lo tanto está en A y en A es decir en $A\cap A$ (1°) y reciprocamente, (2°).

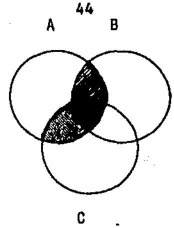
Y combinando 1° y 2° tenemos $A\cap A = A$.

b) Demostrar que $A\cap B = B\cap A$ (I_2)

c) Demostrar que $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$) (I_3)

Con los últimos cuatro conjuntos del ejemplo anterior, podemos ver que $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ y $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$, estas dos propiedades se conocen como leyes distributivas y las podemos ilustrar con diagramas de Venn de la siguiente manera:





$A = ///$ $\quad B \cup C = \backslash\backslash\backslash$ $\quad A \cap B = ///$ $\quad A \cap C = \backslash\backslash\backslash$

$A \cap (B \cup C) =$  $=$  $\quad (A \cap B) \cup (A \cap C) = \quad =$ 

$$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes Distributivas

D_1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$

D_2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$

Demostrar la 1ª ley distributiva:

Para cualquier elemento x de $(A \cap B) \cup C$ sabemos que ese elemento esta en A y en $B \cup C$. Pero al estar en $B \cup C$ no sabemos sí esta solamente en B ó solamente en C (o en ambos). Por lo tanto, podemos asegurar que dicho elemento esta en A y en B, ó bien esta en A y en C, es decir x es elemento de $A \cap B$ ó x es elemento de $A \cap C$. En conclusión x es elemento de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Recíprocamente, cualquier elemento de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ será también elemento de $A \cap (B \cup C)$.

Otros ejemplos:

Si A= Conjunto de personas que fuman
B= Conjunto de personas que usan lentes
C= Conjunto de personas que tienen pelo largo

Diga cuáles son los siguientes conjuntos.

a) $A \cup B$= Conjunto de personas que fuman ó usan lentes

b) $C \cup A$=

c) $B \cap C$=

d) $A \cap C$=

e) $A \cap (B \cup C)$= Conjunto de personas que fuman y, usan lentes ó **tienen** pelo largo.

f) $(A \cap B) \cap C$=

h) $B \cup (A \cap C)$

13.- Diferencia de conjuntos

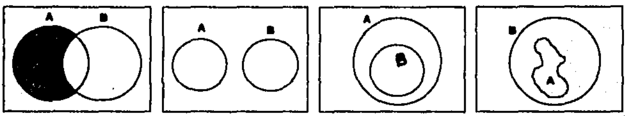
La diferencia de dos conjuntos A y B, denotada por A-B, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

En símbolos:

$A\text{-}B=\{x \mid x\in A \text{ y } x\notin B\}$ A-B se lee "A menos B"

(A-B también se denota como A~B ó A / B).

En diagramas de Venn:



A-B Señalar A- B

Para que $x\in A\text{-}B$ es necesario que $x\in A$ y $x\notin B$.

Sea y tal que $y\notin B$, ¿es suficiente para afirmar que $y \in A\text{-}B$?

Supongamos que $z\in A$, ¿es suficiente para afirmar que $z \in A\text{-}B$?.

¿Que se necesita para que $r \notin A\text{-}B$?

Ejemplos:

Sean los conjuntos $A=\{a,e,i,o,u\}$

$B=\{a,b,c,d,e\}$

$C=\{o,p,q,s,u\}$

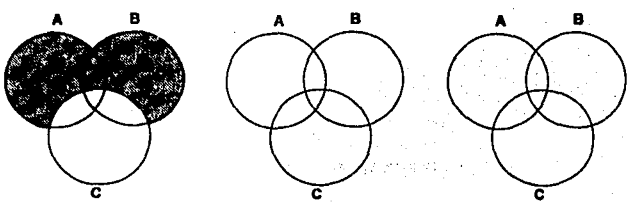
Encontrar $A\text{-}B=\{i,o,u\}$

$B\text{-}A=\{\quad\}$

$A\text{-}C=\{\quad\}$

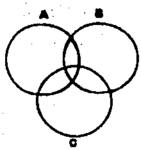
$C\text{-}B=\{\quad\}$

En los siguientes diagramas, marcar el conjunto indicado

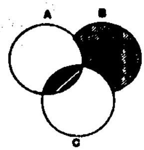


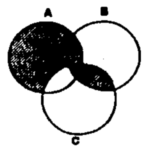
$(A\cup B)\text{-}C$ $(A\cap C)\text{-}B$ $A\text{-}(B\cap C)$

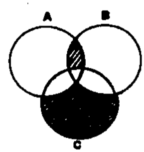
Ahora diga cuál es el conjunto marcado



$C-(A\cup B)$







Propiedades de la Diferencia

$A-A=\varnothing$

$(A-B)\subset A$ y $(B-A)\subset B$

$(A-B)\cap B=\varnothing$ y $(B-A)\cap A=\varnothing$

$(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

Si $A\subset B$ entonces $A-B=\varnothing$

(Comprobar las propiedades con los diagramas de la definición)

Nota: En ocasiones manejamos a todos los elementos de un cierto lugar, ó espacio ó contexto y al conjunto formado por estos elementos lo llamamos conjunto universal. Se le acostumbra denotar por U, Ω ó X.

Por ejemplo:

El conjunto de todas las letras del alfabeto.

El conjunto de todos los números naturales.

El conjunto de habitantes de la República Mexicana.

14.- El complemento de un conjunto A, denotado por A^C, es el conjunto formado por los elementos que no están en A, pero que si están en el conjunto universal establecido.

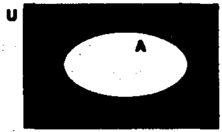
En símbolos:

$$A^C=\{x \mid x\notin A\}$$

En diagramas de Venn:

Observe que $A^C = U - A$

A^C también se denota como C(A) y A'



Para que $x \in A^C$ es necesario que $x \notin A$.

¿Qué se necesita para que $x \notin A^C$?

Ejemplos:

Sean los conjuntos $U=\{1,2,3,\ldots,10\}$

$A=\{1,3,5,7,9\}$

$B=\{2,4,6,8\}$

$C=\{3,4,5,6,7\}$

Encontrar : $(B \cap C)^C=\{4,6\}^C = \{1,2,3,5,7,8,9,10\}$

$B^C \cup C^C=\{1,3,5,7,9\} \cup \{1,2,8,9,10\} =\{1,2,3,5,7,9,10\}$

$(A-C)^C=\{\qquad\}^C=\{\qquad\qquad\qquad\}$

$(C-B)^C=\{\qquad\}^C=\{\qquad\qquad\qquad\}$

$(A \cup C)^C=\{\qquad\qquad\qquad\}$

$A^C \cap C^C=\{\qquad\qquad\qquad\}$

Propiedades de Complemento.

C_1) $(A^C)^C=A$

C_2) $A \cap A^C=\varnothing$

C_3) $\varnothing^C=U$ y $U^C=\varnothing$

C_4) Si $A \subset B$ entonces $B^C \subset A^C$

C_5) $A-B =A \cap B^C$

C_6) $(A \cup B)^C= A^C \cap B^C$

C_7) $(A \cap B)^C= A^C \cup B^C$

Leyes de De Morgan

"El complemento de una unión e igual a la intersección de los complementos"

"El complemento de una intersección es igual a la unión de los complementos"

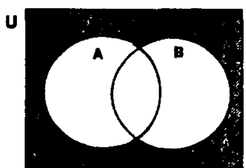
Usar diagramas de Venn para ilustrar las propiedades de C_4 y C_5.

A - B ---- C_4 ---- A = \\\ B^c = ///   ---- C_5 ----

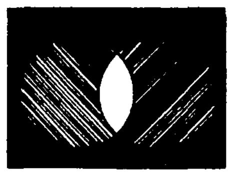
$A \cap B^c =$ ■

Demostrar que $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (Ley de De Morgan) [C_6]
Es claro que si x es elemento de $(A \cup B)^C$ entonces x no esta en $A \cup B$, es decir no esta en A ni en B (porque si estuviera en alguno de los dos estaría en la unión) por lo tanto, x esta en el complemento de A y también x está en el complemento de B, es decir x es el elemento de A^C y B^C simultáneamente, o sea $x \in A^C \cap B^C$.
De la misma manera, podemos asegurar que si x es elemento de $A^C \cap B^C$ entonces x esta en A^C y B^C, es decir x no está en A y tampoco en B, y si no está en ninguno de los dos, no estará en la unión $A \cup B$, por lo tanto $x \in (A \cup B)^C$

Ahora la ilustraremos con diagramas de Venn.



$(A \cup B)^c$



$A^c = ///$ $B^c = \backslash\backslash\backslash$

$A^c \cap B^c =$ ■

Tarea: Demostrar la 2ª ley de De Morgan. [C_7]
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (ilustrar con diagramas de Venn).

CAPITULO III.- LOS NUMEROS NATURALES

1.- Origen y uso de los números naturales
a) Los números naturales son...
b) Los números naturales se usan...
c) Hablemos acerca del proceso de contar.
d) Números grandes y números transfinitos.

2.- Subconjuntos especiales de los naturales
a) Los números pares.
b) Los números impares.
c) Los múltiplos de k.

3.- Los números primos.
- a) Divisibilidad.
- b) Definición de número primo.
- c) La Criba de Eratóstenes.
- Algunos criterios de divisibilidad.
- d) El Teorema de la Factorización Prima.
- e) Aplicaciones de la factorización prima
  - Para simplificar una fracción
  - Para obtener el mínimo común múltiplo
  - Para obtener el Máximo Común Divisor.

4.- La Recta Numérica.

LOS NUMEROS NATURALES

1.- Origen y uso de los números naturales.

a) Los números naturales son los números 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,... y se denotan por N, es decir:

$$N = \{1,2,3,4,5,6,7,...\}$$

El conjunto de los números naturales es infinito y sus orígenes se remontan a epocas prehistóricas por la necesidad que fue surgiendo en el hombre de contar objetos ó animales,
Las diversas culturas fueron creando diferentes métodos, (por agrupación y correspondencia), sistemas y lenguajes numéricos y no fué sino hasta después de la edad media que se adoptó finalmente, con la introducción del cero, el sistema de numeración decimal con los símbolos que actualmente usamos:
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,...

b) Los números naturales se usan para contar, ordenar y clasificar ó identificar.
Para contar, por ejemplo, los elementos de cualquier conjunto finito, se ponen estos elementos en correspondencia 1-a-1 con los números naturales. Es en este sentido que se define la cardinalidad de un conjunto como el número de elementos diferentes que lo componen.
Por ejemplo: hay 5 vocales.
En este grupo hay 48 alumnos
Nuestro equipo tiene 15 jugadores
Para ordenar, con un cierto criterio, los elementos de un conjunto. Por ejemplo: Los niños en una fila de menor a mayor; Las páginas de un libro; la 14 antes de la 15; los ganadores en una carrera 1°,2°,.3°. etc...
Cuando los números se usan con este sentido, se llaman números ordinales.
Para clasificar ó identificar, por ejemplo, para un número telefónico; para escribir el registro federal de causantes ó cédula personal, el número de cuenta de un alumno inscrito en la U.N.A.M, etc...

c) Hablemos acerca del proceso de contar,¿cuál es nuestra idea de un número muy grande?... Estamos tan acostumbrados a hablar de millones que no nos detenemos a pensar qué tan grande es un millón.

Antes de pensar en un millón, hablemos de algo más pequeño.

Suponga que en una sala grande, un cine o un teatro,están 400 personas,¿usted cree que entre las personas presentes coincidan dos que cumplan años el mismo día?

No tarde demasiado en dar la respuesta, sólo diga en este momento; cree que si o cree que no.

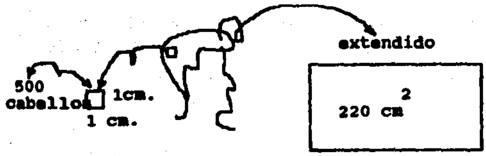
Ahora reflexionemos un poco:

Un año tiene 365 ó 366 días, por lo cual en el caso extremo las primeras 366 personas cumplirían años, cada una, en un día diferente del año y las restantes 34 personas, cada una, cumpliría años en uno de los días que ya estuviera ocupado. Por lo tanto; no solo coinciden 2 personas cumpliendo años el mismo día, sino que hay más parejas.

Veamos algo un poco más complicado, ¿usted cree que entre los habitantes de nuestra República Mexicana, digamos 80 millones de habitantes, existan dos habitantes con la misma cantidad de pelos en la cabeza?

Por supuesto que si; por ejemplo, todos los calvos tienen la misma cantidad de cabellos (cero cabellos). Pero dejando de lado este extremo chusco y doloroso, hagamos la siguiente reflexión:

Supóngase que queremos contar los cabellos de una persona, y para eso escogemos a una muy peluda, obviamente sería una tontería querer contar todos sus cabellos uno por uno, aún cuando alguien se propusiera para realizar tal trabajo, pero podemos aislar un centímetro cuadrado de su cuero cabelludo, y en este caso ya es más factible realizar la tarea. Pero mejor que eso, aceptemos la versión de que en promedio el cuero cabelludo tiene 500 cabellos por centímetro cuadrado, y la superficie total del cuero cabelludo es de al rededor de 220 cm^2, lo que da un total aproximado de 110 000 cabellos.



Para no quedarnos cortos, supongamos que nuestro personaje además de peludo es cabezón y digamos que tiene 1000 cabellos por centímetro cuadrado, y un cuero cabelludo de 400 cm^2 lo que le da un total de 400 000 cabellos. Si quisiéramos clasificar a los habitantes de la República Mexicana por su número de cabellos necesitaríamos 400 000 casilleros, asignando al casillero número 0 los nombres de todas las personas que tienen 0 cabellos (ó que no necesitan peinarse), en el casillero número 1 a las que tienen un solo cabello (ó que se peinan con rizo), en el casillero número 2 a las que tienen dos cabellos (que se peinan de raya en medio), en el casillero número 3 a las que tienen 3 cabellos, etc..., hasta el casillero número 399 999 (nuestro personaje es el más peludo y no tiene igual), pero nuestra república tiene 80 millones de habitantes y suponiendo que no se reparten de manera uniforme en los casilleros señalados, entonces en algún casillero tendríamos:

$$\frac{80\ 000\ 000}{400\ 000} = \frac{800}{4} = 200 \text{ personas}$$

es decir, tendríamos 200 personas, para al menos un caso, con igual número de cabellos.

Ahora si ... ¿qué piensa de un millón?... ¿que se escribe con 1 seguido de 6 ceros? 1000 000, así es pero ... ¿cuánto tiempo cree que se tardaría para contar desde el número 1 hasta 1000 000 contando número por número?

-Pausa para contestar-

No tarde demasiado, solo diga cuánto tiempo cree que se tomaría... ¿una hora?, ¿3 horas?, medio día?, ¿1 día?.

Cuando hacemos la pregunta en vivo, la respuesta más grande ha sido de un día.

Ahora supongamos que para decir cada número tardamos en promedio un segundo, por lo tanto el tiempo total sería un millón de segundos (?).

Pero un minuto tiene 60 segundos y $\frac{1000\ 000}{60} = 16666.66$

es decir, tardaríamos 16 666 minutos y como una hora tiene 60 minutos entonces $\frac{16\,666}{60} = 277.77$ por lo tanto tardaríamos alrededor de 278 horas que convertidas a días resultan $\frac{278}{24} \cong 11.5$ días.

Es decir, para contar desde 1 hasta 1000 000, número por número tardaríamos 11 días y medio, sin descansar. Pero si aceptamos trabajar solo jornadas de 8 horas diarias entonces tardamos $\frac{278}{8} = 34.75$ días, ó sea casi 35 días completos.

Preguntas:

1ª.- ¿Cuánto tiempo nos tomaría pagar la deuda externa de México, alrededor de cien mil millones de dólares = 100 000 millones de dólares, pagando un dólar por segundo?
(Respuesta: 3 150.6 años, sin descansar)

2.ª- ¿Cuántos segundos hay en un año? y ¿en un siglo?

3ª.- ¿Cuántos días tardaría para contar del 1 al billón?

d) Sin embargo, todos estos números aunque nos parezcan demasiado grandes, son finitos ó describen a un conjunto finito, ¿cuál será el número más grande que existe?
En algún momento se hablo del GOOGOL, un 1 seguido de 100 ceros, que se puede escribir en un renglón a lo largo de esta hoja y se dijo que era un número mayor que la cantidad de partículas más pequeñas, protones ó electrones, en el universo, pero podemos exagerar diciendo que hay otro número más grande, el GOOGOL-PLEX, que sería un 1 seguido de un GOOGOL de ceros, parece que no hay espacio suficiente entre la Tierra y la Luna para escribir la cantidad de ceros que lleva un GOOGOL-PLEX, y siguiendo el mismo camino de la exageración tendríamos el GOOGOL-DUPLEX ...etc. Aunque estos números son grandes, son finitos y para obtener uno mayor basta con añadir el número 1 al final ó escribir otro cero, pero...

¿Cuántos elementos hay en el conjunto de los números naturales?
Hay una infinidad de elementos, es decir, el conjunto de los números naturales es infinito y su cardinalidad se define como $\aleph_0$ (aleph-cero) que sería el primer número (transfinito) que describe a un número infinito de elementos.

$\aleph_0$ = número cardinal, transfinito, de N.
Existen otros conjuntos que tienen a $\aleph_0$ como cardinal, es decir, otros conjuntos que tienen la misma cantidad de elementos que los números naturales. A todos estos conjuntos se les llama numerables y pueden ponerse en correspondencia biunívoca (1-1) con los naturales.
Por ejemplo:

Los pares	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,16....
	↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,...
	↕ ↕
Los impares	1,3,5,7,9,11,13,15,17,...

Las propiedades aritméticas de los números transfinitos son diferentes a las conocidas para los números finitos.
Por ejemplo, algunas propiedades arítmeticas de $\aleph_0$ son:

$\aleph_0+1=\aleph_0$	(1,1,2,3,4,5,...)
$\aleph_0-5=\aleph_0$	(6,7,8,9,10,....)
$\aleph_0+n=\aleph_0$	( )
$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$	(Los pares + los impares)

Otros números transfinitos son:

C = la cardinalidad del contínuo = número de puntos de un segmento de recta.

$2^{\aleph_0}$ = número de subconjuntos de un conjunto de cardinalidad $\aleph_0$
Nota: $C=2^{\aleph_0}$

2.- Subconjuntos especiales de los naturales.
a) Los Números Pares = P = $\{2,4,6,8,10,12,...\} = \{2n \mid n \in N\}$

Los números pares son los números dobles, por ejemplo 2 es el doble de 1, 4 es el doble de 2, 6 es el doble de 3, etc., en general 2n es el doble de n. Los números dobles son múltiplos de 2 y se denotan por M_2, o sea $M_2 = \{2n \mid n \in N\}$

Los Números pares = P = M_2 = los múltiplos de 2

b) Los Números Impares = $I = \{1,3,5,7,9,11,13,...\} = \{2n-1 \mid n \in N\}$ ó también $I = \{2n+1 \mid n \in N$ (tomando el caso n = 0)

La simbolización de los números impares se hace considerando que antes de cualquier número par 2n, hay un número impar 2n-1, y después hay otro número impar, 2n+1.

En conclusión:

Un número par cualquiera se denota por 2n
Un número impar cualquiera de denota por 2n+1

c) Los múltiplos de 3 = $M_3 = \{3,6,9,12,15,...\} = \{3n \mid n \in N\}$

Los múltiplos de 4 = $M_4 = \{4,8,12,16,20,...\} = \{4n \mid n \in N\}$
Los múltiplos de 5 = $M_5 = \{5,10,15,20,25,...\} = \{5n \mid n \in N\}$
- en general- para un número natural k
Los múltiplos de k = $M_k = \{k,2k,3k,4k,...\} = \{nk \mid k \in N\}$

Observe que los múltiplos comunes de 3 y 4 son los múltiplos de 12, es decir $M_{12} = M_3 \cap M_4 = \{12,24,36,48,...\} = M_{3.4}$

En general, podemos afirmar que M_{hk} son múltiplos comunes de h y k.¿Cuáles son los múltiplos comunes de 3 y 6?
la respuesta no inicia con 18.

3.- Los Números primos:

a) Divisibilidad:

Decimos que un número b divide al número a, ó bien que a es divisible por b si hay un número c tal que a = b.c.

Que b divide a se denota por "b | a"

Por ejemplo:

2 | 6 porque el 3 es tal que 6=2·3
2 ∤ 7 se lee... "2 no divide a 7"
4 | 28 porque el 7 es tal que 28=7·4
3 | 15 porque el__es tal que 15=_____·_____
9 | 36 porque el__es tal que___=____·_____

Si n es divisible por k de manera que n = k · s para algún s, entonces decimos que n es múltiplo de k ó bien que k es divisor de n, (es claro que también n es múltiplo de s y s es divisor de n). También se dice que k y s son factores de n.
Por ejemplo:

En 18=9·2 decimos que 9 y 2 son factores de 18
9 es divisor de 18
2 es divisor de 18
18 es múltiplo de 2
18 es múltiplo de 9

b) Definición de número primo.

Todo número natural mayor que 1 y que sólo sea divisible por 1 ó por sí mismo recibe el nombre de número primo.

Ejemplos de números primos: 2,3,5,7,11,13, etc...
Si el número no es primo, se llama compuesto.
por ejemplo: 4,6,8,9,10,etc... son números compuestos, porque 4=2·2, 6=2·3, 9=3·3, etc...
Es decir, todo número compuesto se puede dividir por otro número diferente de 1 y el mismo.
En particular, todo número compuesto es divisible por algún número primo.

<u>Nota</u> (la palabra primo es contracción de la palabra primero)

c) La Criba de Eratóstenes

¿Existe un método para determinar números primos?
Si, la criba de Eratóstenes, que es un método para determinar los números primos en una lista de los primeros n números naturales:
Por ejemplo: Consideremos la lista del 1 al 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Método -

1°). Seleccionar el 2, primer número primo, y tachar los múltiplos de 2, que no son primos.

2°).- Seleccionar el 3 y tachar ó excluir a los múltiplos de 3, porque no son primos.

3°).- Seleccionar el 5 y tachar los múltiplos de 5.

4°).- Seleccionar el 7 y ... observe que 49 es el primer múltiplo de 7 que no se ha excluído todavía, ¿por qué?
porque es claro que $49=7^2$ es el primer múltiplo de 7 que no es divisible por otro número menor que 7 y cada número compuesto múltiplo de 7 y menor que 7^2 tiene al menos uno de sus factores menor que 7, por ejemplo: $28=4\cdot7$, $35=5\cdot7$, $42=6\cdot7$, $49=7\cdot7$, y ese múltiplo de 7 ya fué tachado al tachar los múltiplos de ese otro factor menor que 7.
En general:
"para cualquier número primo p, cada número compuesto menor que p^2 , tiene un número primo menor que p como factor".

5°).- Seleccionar el 11 y como todos los múltiplos de 11 menores que $11^2=121$ (menores que 100 en esta lista ya han sido eliminados, concluimos que los números no tachados son primos.

EJERCICIO.

¿Hasta qué número primo debemos considerar, tachando sus múltiplos, para determinar todos los números primos en una lista del 1-al-200? y ¿del 1-al-400?, ¿de 1-a-700?
-veamos para una lista del 1 al 400:
Los primeros números primos son 2,3,5,7,11,13,17,19,23 pero $19^2=361$ y $23^2=529$
Por lo tanto, basta con revisar hasta los múltiplos de 19, porque cualquier múltiplo de 23 menor que 529, también es múltiplo de otro número primo menor que 23.

Este mismo criterio lo podemos usar para verificar si un número es ó no es primo. Para checar si un número es primo, basta con revisar si es divisible por algunos de los primeros números primos.
Por ejemplo: ¿337 es primo?
Veamos:

168	112	67	48	30	25	19
2)337	3)337	5)337	7)337	11)337	13)337	17)337
13	03	37	57	07	77	167
17	07	2	1		12	14
1	1					

y como $19^2 = 361$, afirmamos que 337 es primo.

Ejercicio:

Verifique si son primos, 481,359,593,701.

Algunos criterios de divisibilidad:

Divisibilidad entre 2: cualquier número par, que termina en 0,2,4,6,8, es divisible por 2.

Divisibilidad entre 3: La suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3, ejemplos 711,459,501.

<u>Divisibilidad entre 5</u>: El número debe terminar en 0 ó 5.
Investigue si hay criterios para divisibilidad entre 7,9 y 11.

d) Teorema de la Factorización Prima.

Si un número no es primo se llama compuesto, y se puede descomponer, ó factorizar, como un producto de primos.
Por ejemplo: $6 = 2\cdot3$, $8 = 2\cdot4 = 2\cdot2\cdot2$, $15 = 3\cdot5$
Descomponga ó factorice los siguientes como un producto de primos:

$18 = 2\cdot9$	$20 = \_\_\cdot\_\_$	$24 = \_\_\cdot\_\_$	$60 = \_\_\cdot\_\_$
$18 = 2\cdot3\cdot3$	$= \_\_\cdot\_\_\cdot\_\_$	$= \_\_\cdot\_\_\cdot\_\_\cdot\_\_$	$= \_\_\cdot\_\_\cdot\_\_\cdot\_\_$

También los siguientes:

$68 =$ $\quad$ $180 =$ $\quad$ $3850 =$

Veamos el caso de 180:

$$\begin{aligned} 180 &= 2\cdot90 \\ &= 2\cdot2\cdot45 \\ &= 2\cdot2\cdot3\cdot15 \\ &= 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5 \end{aligned}$$

y trataremos de generalizar el procedimiento para demostrar el siguiente teorema:

<u>Teorema de la factorización Prima</u>. (Teorema Fundamental de la Aritmética).
"CUALQUIER NUMERO NATURAL MAYOR QUE 1 PUEDE EXPRESARSE COMO UN PRODUCTO DE NUMEROS PRIMOS EN UNA SOLA FORMA, SALVO POR EL ORDEN DE LOS FACTORES."

-Demostración -

Sea n el número natural mayor que 1
En este caso, n ó es primo ó es compuesto.
Si n es primo, tomemos n y ¡ya esta expresado!
Si n no es primo, entonces hay un número primo p_1 que divide a n con un cociente n_1 tal que $n = p_1 \cdot n_1$ (1)
Ahora... ¿cómo es n_1?
Si n_1 es primo, tomemos $n_1 = p_2$ y sustituyendo en (1)
tenemos que $n = p_1 \cdot p_2$ y ¡ya esta!

Si n_1 no es primo entonces hay un número primo p_2 que divide a n_1 con un cociente n_2 tal que $n_1 = p_2 \cdot n_2$, y sustituyendo en el paso 1 tenemos:

$n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$ (2)

Ahora....¿cómo es n_2 ?

Si n_2 es primo, sea $n_2 = p_3$ y sustituyendo en (2) tenemos que $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ y ¡ya está!

Pero si n_2 no es primo entonces hay un número primo p_3 que divide a n_2 con un cociente n_3 tal que $n_2 = p_3 \cdot n_3$ y sustituyendo en el paso (2) tenemos:

$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot n_3$ (3)

Ahora... ¿cómo es n_3 ?

Si n_3 es primo,... etc.

El proceso debe terminar en algún momento porque estamos tratando con un número natural n y por lo tanto finito, es decir debe llegar el momento en que tengamos $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$

con $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ números primos.

Ejercicios:

Encontrar la factorización prima de los siguientes números:

a) 120
b) 135
c) 396
d) 5280
e) 4620
f) 648
g) 210
h) 1738
i) 10780
j) 792

Dos números son primos entre sí cuando no tienen divisor común excepto la unidad.

Por ejemplo: 3 y 5 son primos entre sí.
4 y 7 son primos entre sí
8 y 15 son primos entre sí

Observe que dos números primos son primos entre sí, pero también dos números compuestos pueden ser primos entre sí. Dar tres ejemplos de parejas de números compuestos que sean primos entre sí.

e) Aplicaciones de la factorización prima.

Se simplifica una fracción por cancelación de los factores comunes a sus dos términos (numerador y denominador) y se obtiene el cociente cuando la división es exacta.

Por ejemplo:

$$\frac{60}{72} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3} = \frac{5}{2\cdot 3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{396}{66} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 11} = 2\cdot 3 = 6$$

Simplificar las fracciones que siguen:

$$\frac{56}{60}, \frac{60}{64}, \frac{60}{66}, \frac{66}{78}, \frac{54}{96}, \frac{90}{10} \text{ y } \frac{60}{168}$$

<u>Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números.</u> (m c m).

El mínimo común múltiplo (m c m) de dos números es el menor de los múltiplos comunes de los dos números.

Por ejemplo:

Los múltiplos de 6 son 6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,...

Los múltiplos de 8 son 8,16,24,32,40,48,56,64,72,....

Los multiplos comunes de 6 y 8 son 24,48,72,... y el mínimo común múltiplo será 24.

Observe que el producto de dos números (a, b) es múltiplo común de a y de b.

Ahora encuentre el mínimo común múltiplo de 4 y 6, de 12 y 15, de 24 y 40.

Usando la factorización prima tenemos el siguiente procedimiento:

1°- Descomponer cada número en sus factores primos, usando exponente para los factores repetidos.

Ejemplo: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

2°.- De las descomposiciones, tomar una sola vez cada factor primo con el mayor exponente que tenga; el producto de ellas será el m.c.m. buscado.

Por ejemplo:

para 18 y 24

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \quad \therefore$ $\quad$ m.c.m. $= 2^3 \cdot 3^2 = 72$

encontrar el m.c.m. de 12 y 15

$12 = 2^2 \cdot 3$
$15 = 3 \cdot 5 \quad \therefore \ \text{m.c.m.} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

encontrar el m.c.m. de 24 y 40
24 =
40 = $\therefore$ m.c.m. =__________=

enconi. ar el m.c.m. de 7,20 y 35
7 =
20 = $\therefore$ m. c. m =___________=
35 =

encontrar el m.c.m. de 20,30 y 36
20 =
30 = $\therefore$ m.c.m.=_________=
36 =

Casos especiales para encontrar su m.c.m.

a) Si los números dados no tienen factores primos comunes (es decir, si todos los factores son distintos) entonces el m.c.m. de esos números es su producto. Es decir, si los números dados son primos, ó primos entre sí entonces el m.c.m. es su producto.

Ejemplos:

el m.c.m. de 5 y 7 es $5 \cdot 7 = 35$
el m.c.m. de 3,5 y 11 es $3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$
el m.c.m. de 9 y 14 es_________=_______
el m.c.m. de 6 y 13 es ________=________

b) Si uno de los números dados es divisible entre los demás, entonces ése número es el m.c.m. de todos ellos.

Ejemplos:

el m.c.m. de 15 y 30 es 30
el m.c.m. de 6,8 y 24 es_____
Comprobación por el método anterior
6=
8= $\therefore$ **m.c.m. =______=_______**
24=

Ejercicios:

1) Calcular mentalmente el m.c.m. de los siguientes pares de números:

4 y 6	**12 y 24**	**2 y 5**
15 y 6	**13 y 91**	**3 y 11**
8 y 20	**4 y 10**	**5 y 7**
9 y 12	**7 y 21**	**7 y 13**
10 y 15	**16 y 12**	**17 y 19**

2) Calcular el m.c.m. de los pares que siguen:

72 y 108 (m.c.m.= 216)
24 y 84 (m.c.m. = 168)
70 y 196 (m.c.m. = 980)
75 y 85 (m.c.m. = 1275)
24 y 54 (m.c.m. = 216)
84 y 98 (m.c.m. = 588)
66 y 70 (m.c.m. = 2310)

3.- Calcular el m.c.m. para los siguientes números:

12,16 y 20 (m.c.m. = 240)
15,18 y 27 (m.c.m. = 270)
15,30 y 40 (m.c.m. = 120)
36,40 y 50 (m.c.m. = 1800)

Para obtener el Máximo Común Divisor (M.C.D.) de dos números.

El Máximo Común Divisor (M.C.D.) de dos números es el mayor de los divisores comunes de esos dos números.

Por ejemplo:

Encontrar el M.C.D. de 12 y 18.

Los divisores de 12 son 1,2,3,4,6,12.

Los divisores de 18 son 1,2,3,6,9,18

Los divisores comunes de 12 y 18 son 1,2,3,6.

El mayor de los divisores comunes es 6, ∴ M.C.D.=6

Utilizando la factorización prima:

1°.- Encontrar la factorización prima de cada número.

2°.- Considerar los números primos factores comunes.

3°.- Encontrar el producto de los factores comunes con el menor exponente.

Ejemplos:

Encontrar el M.C.D. de 12 y 18

$12 = 2^2 . 3$

$18 = 2\ 3^2 \qquad \therefore$ M.C.D.$= 2 \cdot 3 = 6$

Encontrar el M.C.D.de68 y 76

$68 = 2 \cdot 2 \cdot 17 = 2^2 \cdot 17$

$76 = 2 \cdot 2 \cdot 19 = 2^2 \cdot 19 \qquad \therefore$ M.C.D.$= 2^2 = 4$

Encontrar el M.C.D. DE 60 Y 5280

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$5280 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \qquad \therefore$ M.C.D.$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Encontrar el M.C.D. de 3850 y 5280

3850=

5280= $\qquad \therefore$ M.C.D.= $\qquad = 110$

Encontrar el M.C.D. de 12,36 y 60.

12=

36= $\qquad \therefore$ M.C.D.= $\qquad =12$

60=

Encontrar el M.C.D. de los siguientes números:

76 y 1425
123 y 215
68 y 738
12,15 y 20
18, 24 y 40
15, 45 y 60
12, 18 y 30

EJERCICIOS:

1.- ¿Cada número impar es primo? si ó no por qué?
2.- ¿Cada número primo es impar? si ó no y por que?

3.- "Cada número natural par mayor que 2 puede descomponerse en una suma de dos números primos"

Por ejemplo:
12=5+7
20=7+13
30=13+17
[Conjetura de Goldbach]
[Una conjetura es una afirmación que se sospecha cierta, pero que no ha sido demostrada].

Expresar del 4 al 40 como la suma de dos números primos.

4.- "Existe un número infinito de parejas de números primos que difieran en 2 unidades".
[La conjetura de los primos gemelos]

Encontrar una pareja de primos gemelos entre 25 y 35, 55 y 65, 95 y 105.

5.- "Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como la suma de tres números primos". [conjetura]
verifíquelo para los números: 7,9,11,13 y 15.

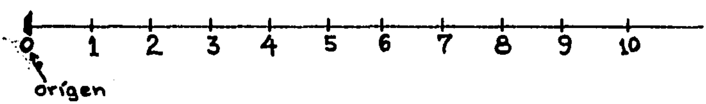
6.- Señala una pareja de números primos que difieran en 1 y demostrar que dicha pareja es única.

7.- Terna prima es un conjunto de tres números primos que difieren en 2. Señalar una terna prima y explicar porque es la única terna posible.

8.- Euclides demostró que no existe un número primo máximo, es decir un número primo mayor que todos, y por lo tanto; la cantidad de números primos es infinita. Investigar en que consiste la demostración.

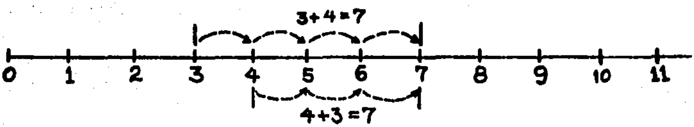
4.- La Recta Numérica.

La Recta Numérica es un modelo geométrico que nos sirve para representar a los números y visualizar sus propiedades.
En el caso de los números naturales, nuestra recta numérica consta de un orígen y un punto a la derecha a una distancia d, que nos servirá para señalar el número 1, a la derecha del punto 1 marcaremos otro punto 2 con la misma distancia d, y así sucesivamente.



Observe que el orígen no representa al número cero, porque $0 \notin N$, pero la distancia del orígen al 1 representa una unidad de longitud.
Cualquier número situado a la izquierda de otro será menor que él.
Es decir, a< b si a está a la izquierda de b.
(a<b se lee.... "a es menor que b")
Por ejemplo: 3<5 porque 3 esta a la izquierda de 5.
5<11 porque___ esta a la izquierda de __ .
1<3 porque

La suma de dos números naturales como 3+4 por ejemplo, se puede ver como un avance (a la derecha) de 4 unidades partiendo del punto 3.



o bien, como un avance de 3 unidades partiendo del punto 4.

Es decir, se cumple la Ley Conmutativa para la suma

$$3+4 = 4+3$$

También es fácil observar que se cumple la Ley Asociativa

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

revisando, por ejemplo, la suma $3+(4+5)=3+9=12$
sobre la recta númerica, y por otro lado: $(3+4)+5=7+5=12$
es decir: $3+(4+5) = (3+4)+5$

La operación suma siempre es posible entre dos números naturales cualesquiera, dando como resultado otro número natural. [Por esto se dice que la suma es una operación binaria y que los naturales son cerrados bajo la suma.]

Por otro lado, la operación Resta no siempre es posible entre dos números naturales cualesquiera, por ejemplo:

$8-2=6$ pero $3-5$ no tiene solución en los números naturales.

Una expresión de la forma $x+8=5$ no tiene sentido en los naturales, porque no existe un número natural que sumado con 8 dé 5.

EJERCICIOS:

1.- Represente en la recta númerica las siguientes sumas:

a) 3+7 = 10 y 7+3 = 10
b) 8+5 = 13 y 5+8 = 13

2.- Represente en la recta númerica las sumas:

a) 3+(4+5)
b) (3+4)+5

CAPITULO IV.- LOS NUMEROS ENTEROS

1.- Los Números Negativos y su orígen.
2.- Los Números Enteros.
3.- Operaciones de números enteros.
    a) Al sumar números con signo...
    b) Para hablar de la resta...
    c) Para la multiplicación...
    d) Potencia = multiplicación repetida.
    e) Pero la división no siempre es posible.
4.- Propiedades de las operaciones + y •
    a) Propiedades de la suma.
    b) Propiedades del producto.
    c) Ley distributiva.
5.- La relación de Igualdad.
    a) Un sistema matemático es...
    b) Igualdad, sus propiedades y ecuaciones sencillas.
6.- La Aritmética de los números pares y la aritmética del reloj.

LOS NUMEROS ENTEROS

1.- Los Números Negativos y su origen.

En realidad, los números negativos surgieron mucho tiempo después que las fracciones, y aún después de la aceptación y manejo del número cero que apareció en Europa por la edad media, y en algunas culturas, como la Maya, antes, pero para efectos de la presentación de los conjuntos de números, es conveniente estudiarlos después de los naturales.

Una justificación para los números negativos es considerarlos como las cantidades a medir que son menos que el origen, es decir, como las cantidades a medir que estan por debajo del origen, y tomando al origen como la nada, igual al cero. O sea los números negativos son menos que nada...

Por ejemplo:

Si Juan tiene nada de dinero, decimos que tiene 0 pesos, pero si Juan tiene una deuda de 8 pesos, entonces lo interpretamos diciendo que tiene (-8) pesos. De esta manera Juan puede acumular deudas, pidiendo prestado a sus amigos, de manera que una deuda de 8 pesos más otra deuda de 5 pesos mas otra deuda de 6 pesos se puede interpretar como una suma de números negativos.

$$(-8) + (-6) + (-5)$$

Y como la suma de deudas es también una deuda, podemos decir que la suma de números negativos es un número negativo.

$$\therefore \quad (-8) + (-6) + (-5) = -19$$

Juan debe en total 19 pesos. Pero... ¿qué sucede si Juan decide trabajar para pagar sus deudas, y con su trabajo Juan gana 16 pesos?, ¿alcanza a pagar sus deudas? En este caso tendríamos que después de pagar una parte, aún queda debiendo 3 pesos, ó sea que:

$$-19 + 16 = -3 \qquad (\text{también } 16 + (-19) = -3)$$

Y si Juan gana 28 pesos con su trabajo, ¿ alcanza a pagar los 19 que debe?. Si, y todavía le sobran 9 pesos ó sea que :

$$-19 + 28 = 9$$

Es claro que al sumar deudas con ganancia, gana la mayor. (Si es mayor la deuda seguiremos con deuda, pero si es mayor la ganancia quedaremos con ganancia).

Ejemplos :

-13+11=	-7+43+(-7)=	-87+24=
-9+25=	-29+14+(-29)=	-65+97=
-34+20=	-31+18+(-31)=	-14+26=
-48+16=	-75+40+(-75)=	-38+38=

Cuando a una ganancia le sumamos una deuda, el resultado es similar y lo podemos denotar de la siguiente manera:

43+(-18) = 43-18 = 25 (nos quedó ganancia)
17+(-31) = 17-31 = -14 (nos quedó deuda)

Ejemplos:

24 + (-18) = ______ - ______ =
14 + (-57) =
65 + (-40) =

38 + (-25) =
43 + (-29) =
30 + (-12) =
24 + (-39) =

Otro ejemplo de justificación es que al elaborar escalas para medir algunas cantidades físicas, como la temperatura, la altura sobre la tierra, etc..., se necesitó como origen un valor conocido ó un punto de referencia, por ejemplo: para la temperatura, la escala de grados centígrados tomó al orígen ó cero como la temperatura del agua en su punto de congelación, pero hay temperaturas mas bajas ó menores que ésa temperatura y se habla de temperaturas bajo cero o negativas. En el caso de las alturas, el punto de referencia tomado fue el nivel del mar, y de esta manera se empezó a hablar de alturas sobre el nivel del mar ó bajo el nivel del mar etc... También podríamos tener nuestra escala propia para una altura particular, en una mina por ejemplo, y hablar de "tantos metros de profundidad" ó "tantos metros negativos" ó "tantos metros bajo tierra" ó simplemente de alturas negativas.

¿En la medición del tiempo en nuestro calendario, hay escalas negativas?

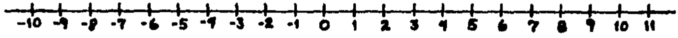
¿Cuál es el punto de referencia u origen para medir el tiempo en nuestro calendario?

2.- Los Números Enteros.

El conjunto de los números enteros, denotado por Z, es el conjunto formado por los números negativos, el cero y los números positivos, es decir:

$$Z = \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$$

En la recta numérica se representan como:



Ahora el orígen corresponde al número 0, que no es positivo ni negativo.
A la izquierda del cero se encuentran los números negativos.
A la derecha del cero los números positivos ó naturales.
Observe que ahora:
Los Enteros Positivos = Los Números Naturales es decir $N \subset Z$ porque cada número natural es un número entero.
Observe también que; sobre la recta numérica, cualquier número será menor que otro situado a su derecha; ejemplo:

$-4<0$ $-2<1$ $-3<-1$
Nota: $a<b$ se lee..., "a es menor que b"

3.- Operaciones de Números Enteros.

a) Ahora, además de la suma de números naturales se presentan dos casos.

1ª) Si los dos números tienen el mismo signo negativo, se suman sus valores absolutos y al resultado se le pone el signo negativo.
[valor absoluto = valor del número sin tomar en cuenta el signo],

Ejemplos:

$$-3+(-4) = -7$$
$$-5+(-11) = -16$$
$$-25+(-3) = -28$$

2ª) Si los dos números tienen signo diferente, entonces se restan sus valores absolutos, el mayor menos el menor, y al resultado se le pone el signo del mayor.

Ejemplos :

$-8+5 = -3$	$-4+4 =$	$4+(-15) = 4-15 = -11$
$-3+9 = 6$	$0+7 =$	$-6+(-6) = -6-6 = -12$
$-8+0 =$	$17+(-8) = 17-8=9$	$-9+(-4) =$ $=$

Ejercicios:

-3+7=	47+(-9)=
-9+4=	31+(-40)=
-11+(-10)=	8+(-2)=
-5+(-6)=	5+(-13)=
-35+(-8)=	7+(-8)=
8+6=	-3+22=
3+21=	-10+0=

b) Para hablar de la resta, primero veamos que cada número entero n tiene un número simétrico ó inverso aditivo, único, denotado por -n tal que n+(-n)=0
Por ejemplo:

-el inverso aditivo de 8 es -8 porque 8+(-8)=0
-el inverso aditivo de 3 es -3 porque 3+(-3)=0
-el inverso aditivo de -7 es 7 porque -7+7=0

Por otro lado, el inverso aditivo de -7 es -(-7) y como es único, concluimos que -(-7)=7

-el inverso aditivo de -1 es 1 porque -1+1 = 0
en este caso -(-1)=1.
-De hecho, si tenemos que 2+x=0 es claro que x=-2 porque 2+(-2)=0

Ahora si, se define la resta de dos números enteros a y b denotada por a-b como la suma de a mas el inverso aditivo de b, es decir:

$$\boxed{a-b = a+(-b)}$$

Por ejemplo:

- 8-(+ 5) = 8 + (- 5) = 3
3 -(+ 7) = 3 + (-7) = -4
-5 -(+ 9) = -5 + (-9) = -14
-4 -(-10) = -4 + (10) = 6
-9 -(-1) = -9 + 1 = -8

[De esta manera la resta queda reducida a una suma de números con signo.]

Ejercicios:

-5 -(-8) =	67 -(-2) =
-3 -(-17) =	38 -(-7) =
-4 -(12) =	-37 -(-12) =
-45 -(23) =	-9 -(-8) =
23- (-8) =	-10 -8 =
42- (31) =	-3 -15 =

Observe que en los números enteros la resta de cualesquiera dos números siempre es posible, es decir el conjunto de los números enteros es cerrado bajo la resta, porque la resta de dos números enteros siempre es un número entero.

c) Para la multiplicación de números enteros, ó multiplicación de números con signo, debemos recordar que la multiplicación es una suma abreviada.
Desde la primaria nos enseñaron que 5x3 significaba 5 veces 3 ó sea 3+3+3+3+3=15 por lo tanto 5x3=15.
De la misma manera 5x(-2) significa 5 veces (-2) ó sea
5x(-2)=(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)=-10; por lo tanto 5x(-2)= -10.
Por otro lado, es lógico suponer que si tenemos una deuda de 2 pesos ó sea -2 y se multiplica 5 veces la deuda aumentará a -10. Con esto hemos visto un ejemplo de que el producto de un número positivo por un número negativo nos da un número negativo.

Nota. recuerde que la multiplicación se puede indicar de las siguientes maneras:
a x b = a · b = (a) (b) = a (b) = a b

Las reglas que se cumplen al multiplicar números con signo son:
"El producto de dos números con el mismo signo es positivo"
"El producto de dos números con diferente signo es negativo"

ley de los signos
para la multiplicación

(+) (+) = +
(-) (-) = +
(+) (-) = −
(-) (+) = −

Ejercicios:

(3)(-7) =	(-7)(-5) =
(-4)(8) =	(-4)(8) =
(-5)(-6) =	(-4)(-9) =
(6)(9) =	(6)(-6) =
(-8)(1) =	(-3)(-8) =
(3)(-2) =	(-5) · 3 =
4 (-1) =	(-7) · (1) =
7 (-3) =	4 · 1 =
(-1)(8) =	1 · (-5) =
4 (0) =	4 · (-4) =
6x (-7) =	8 · (-1) =
(-8)(-4) =	1 · 7 =

d) Así como la suma repetida con el mismo sumando nos da una multiplicación, por ejemplo:

$4+4+4 = 3\cdot4$ $5+5+5+5+5+5 = 6\cdot5$

También una multiplicación repetida con el mismo factor nos define una potencia.

Por ejemplo:

$4\cdot4\cdot4 = 4^3$ $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^6$

En general: $\underbrace{a.\ a. \ldots a}_{n\ veces} = a^n$

En una potencia tenemos: La base que es el factor que se repite y el exponente que es el numerito que me indica el número de veces que se repite la base como factor.

Por ejemplo:

$2^3 = 2\cdot2\cdot2 = 8$
$3^2 = 3\cdot3 = 9$
$7^2 = 7\cdot7 = 49$

en este caso: $a^1 = a$, $4^1 = 4$, $5^1 = 5$ etc....
Ejercicios:

$2^1 =$	$3^1 =$	$4^1 =$	$5^1 =$
$2^2 =$	$3^2 =$	$4^2 =$	$5^2 =$
$2^3 =$	$3^3 =$	$4^3 =$	$5^3 =$
$2^4 =$	$3^4 =$	$4^4 =$	$5^4 =$
$2^5 =$	$3^5 =$	$4^5 =$	
$2^6 =$	$3^6 =$		
$2^7 =$			

Algunas reglas para el uso de los exponentes son:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

"En el producto de dos potencias de la misma base, se suman los exponentes".

Ejemplos:

$$3^2 \cdot 3^3 = \; 3\cdot3 \;\cdot 3\cdot3\cdot3 \; = \; 3^5$$
$$4^3 \cdot 4 \; = \; 4\cdot4\cdot4 \; \cdot 4 \; = \; 4^4$$

$$\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$$

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias.

Ejemplos: $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

En la potencia de potencia se multiplican los exponentes.

Ejemplos: $(4^2)^3 = (16)^3 = 16\cdot16\cdot16$
$= 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^6$
$(5^3) = (125)^3 =$ _____ $\cdot$ _____ $\cdot$ _____
_____ $\cdot$ _____ $\cdot$ _____ $= 5^9$

Observe que el producto de dos números enteros también es un número entero, es decir el conjunto de los números enteros es cerrado bajo la multiplicación.
e) Pero la división no siempre es posible en los enteros.
Por ejemplo: 3:5 no resulta un número entero.

Nota: **La división 3:5 también se expresa como $\frac{3}{5}$ y forma parte de un conjunto de números más amplio; Los Números Racionales. La imposibilidad de la división en**

Z también se indica señalando que "NO EXISTE $x \in Z$ TAL QUE $5x = 3$" ó bien que la ecuación $5x=3$ no tiene solución en Z.

4.- Propiedades de las operaciones + y •.

Veamos las propiedades de las operaciones suma (+) Y multiplicación ó producto (•) y analicemos cuales no se cumplen para los enteros.

Propiedades de la Suma.

S_1) Ley de la Cerradura

Para cada $a,b \in Z$ tenemos que $(a+b) \in Z$
"La suma de dos números enteros, es un número entero".

S_2) Ley Conmutativa
$a+b = b+a$

S_3) Ley Asociativa
$a+(b+c)=(a+b)+c$

S_4) Existencia del Neutro Aditivo
"Existe $0 \in Z$ tal que $a+0 = 0+a = a$ para cualquier $a \in Z$"

S_5) Existencia del Inverso Aditivo
"Para cualquier $a \in Z$ existe $(-a) \in Z$ tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$".

Propiedades del Producto (•)
M_1) Ley de la Cerradura
Para cada $a,b \in Z$ tenemos que $(a \cdot b) \in Z$
"El producto de dos números enteros es un número entero"

M_2) Ley Conmutativa
$a \cdot b = b \cdot a$

M_3) <u>Ley Asociativa</u>

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

M_4) <u>Existencia del Neutro Multiplicativo</u>

"Existe $1 \in Z$ tal que $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$ para cualquier $a \in Z$"

M_5) <u>Existencia del Inverso Multiplicativo</u>

"Para cualquier número a existe el número $a^{-1} = \frac{1}{a}$

tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$" [NOTA: a debe ser diferente de cero.]

Además hay una propiedad que relaciona las dos operaciones:

d) <u>La Ley Distributiva</u>

$$\boxed{a(b+c) = ab+ac}$$

Es claro que la propiedad M_5, no se cumple en los enteros, porque no existe el inverso multiplicativo para cada número entero, veámoslo con un contraejemplo: Para el número 5 no existe un número $x \in Z$ tal que $5 \cdot x = 1$ (de existir sería $x = 1/5$ pero $1/5 \notin Z$).

Ejemplos de aplicación de la Ley Distributiva:

a) $3(5+2) = 3 \cdot 5+3 \cdot 2 = 15+6=21$
b) $3(25) = 3(20+5) = 60+15 = 75$
c) $9(71) = 9(70+1) = 630+9 = 639$
d) $8(93) = 8(90+3) = 720+24 = 744$
e) $8(98) = 8(90+8) = 720+64 = 784$
también $= 8(100-2) = 800-16 = 784$
f) $7(314) = 7(300+10+4) = 2100+70+28 = 2198$

-Ejercicios:-

Diga qué propiedad de las operaciones + y •, se usa para poder pasar del 1er miembro al 2° miembro de la igualdad.

1er miembro = 2° miembro

1) $8 \cdot 1 = 8$ ______________________________
2) $5+(-5)=0$ ______________________________
3) $3+0=3$ ______________________________
4) $5+4=4+5$ ______________________________
5) $7 \cdot (6 \cdot 8)=(7 \cdot 6) \cdot 8$ ______________________________
6) $4 \cdot 9=9 \cdot 4$ ______________________________
7) $(3+5)+2=3+(5+2)$ ______________________________
8) $9+3 = 12$ ______________________________
9) $6(8+9)=6 \cdot 8+6 \cdot 9$ ______________________________
10) $1 \cdot 7=7$ ______________________________
11) $(-2)+2=0$ ______________________________
12) $3(x-4)=3x-12$ ______________________________
13) $(-7)+7=0$ ______________________________
14) $5(10+3)=5 \cdot 10+5 \cdot 3$ ______________________________

5.- La relación de Igualdad

a) Un sistema matemático consiste en un conjunto de números, una ó mas operaciones sobre los números, como la suma, resta, multiplicación - etc..., y una ó mas relaciones, tales como la igualdad ó la relación "menor que", junto con algunas propiedades ó axiomas que satisfacen los elementos del conjunto las operaciones y las relaciones.

b) La igualdad es una relación que se establece entre dos números del conjunto, denotadas por el símbolo "=" que se lee "...igual a..." y que cumple con las siguientes propiedades:

1a.) Toda cosa es igual a sí misma

$\boxed{a = a}$ (Propiedad de identidad)

Por ejemplo: $8 = 8$

$X + 2 = X + 2$

2a.) $\boxed{\text{Si } a = b \text{ entonces } b=a}$ (Prop. de simetría)

Por ejemplo: si $8=X + 3$ entonces $X + 3 = 8$

si $-6 = X - 9$ entonces $X - 9 = -6$

si $10 = 2X + 4$ entonces $2X + 4 = 10$

3a.) Dos cosas iguales a una tercera, son iguales entre sí.

$\boxed{\text{Si } a = b \text{ y } b = c \text{ entonces } a = c}$ (Prop. Transitiva)

Por ejemplo: si $X = y + 5$ y $y + 5 = -2$ entonces $X = -2$

si $2X + 3 = 5Z$ y $5Z = X + 9$ entonces $2X + 3 = X+9$

4a.) Si a iguales sumamos (ó restamos) iguales, los resultados son iguales.

$\boxed{\text{Si } a = b \text{ entonces } a + X = b + X}$ también Si $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$

entonces $a + c= b + d$

$\boxed{\text{Si } a = b \text{ entonces } a - X = b - X}$

y también si $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$

entonces $a - c = b - d$

Ejemplos:

De	$2X - 8 = 0$	De	$5X + 3 = 13$
obtenemos	$2X - 8 + 8 = 0 + 8$	Obtenemos	$5X + 3 - 3 = 13 - 3$
Por lo tanto:	$2X = 8$	Por lo tanto	$5X = 10$

5a.) Si a dos cantidades iguales las multiplicamos por un mismo número, entonces los resultados son iguales.

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ entonces } n.a = n.b}$$

Por ejemplo:

Si	$X = 2$	De	$5y = -3$
Entonces	$3.X = 3.2$	Tenemos	$(5y)\,8 = (-3)\,8$
Y nos queda	$3X = 6$	Por lo tanto	$40y = -24$

6a.) Si dos cantidades iguales se dividen por un mismo número diferente de cero, entonces los resultados son iguales.

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ entonces } \frac{a}{n} = \frac{b}{n}} \text{ con } n \neq 0$$

Por ejemplo:

Si $3X = 12$

entonces $\frac{3X}{3} = \frac{12}{3}$

es decir $\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} X = \frac{12}{3}$

nos queda $X = 4$

Si $2X = -6$

$\frac{\cancel{2}X}{\cancel{2}} = \frac{-6}{2}$

$X = -\frac{6}{2}$

$X = -3$

<u>Una ecuación</u> es una igualdad que solamente se cumple para determinados valores de las letras que aparecen.

Por ejemplo:

La ecuación $5X - 4 = 6$ Se cumple para $X = 2$

Porque $5(2) - 4 = 6$

es decir $10 - 4 = 6$

La ecuación $3X + 1 = -8$ se cumple para $X = -3$

La ecuación $3X - 2y = 8$ se cumple para $X = 4$ y $Y = 2$

Para resolver una ecuación, debemos encontrar los valores de las letras que hacen que la igualdad se cumpla. Y para resolverla aplicamos las propiedades de la igualdad.

Por ejemplo:

Veamos la ecuación $5X - 1 = 19$

Sumando 1: $5X - 1 + 1 = 19 + 1$

nos queda: $5X = 20$

y dividiendo entre 5 : $\frac{5X}{5} = \frac{20}{5}$

Tenemos $\boxed{X = 4}$

- E J E R C I C I O S -

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones, aplicando las propiedades de la igualdad.

a) $X - 3 = 5$

b) $X - 2 = 8$

c) $Y - 5 = -2$

d) $a + 2 = 5$

e) $b + 5 = 3$

f) $a + 4 = -2$

g) $4X - 1 = 7$

h) $3X + 1 = 14$

i) $6X + 2 = -10$

j) $2Y - 3 = 5$

k) $7Z + 4 = -10$

l) $3a + 1 = 7$

6.- La Aritmética de los Números Pares

Algunos subconjuntos de los enteros tienen un comportamiento especial. Entre estos los números pares y los números del reloj en donde 8+6 = 2 (es decir, 6 horas después de las 8 de la mañana será las 2 de la tarde).

Recordemos los números pares, P = {... ,-6,-4,-2,0,2,4,6,...}

Un número par se denota como 2n en donde n es un entero.

"Un número entero a es par ⇔ a es el doble de otro número entero".

Por otro lado: Los números impares, I = {...,-5,-3,-1,1,3,5,...}

Un número impar se denota como 2n+1 (el doble de n más 1) en donde n es un número entero. (También podría ser 2n-1).

Teorema 1.- La suma de dos números pares es par.

- Demostración -

un número par 2n

otro número par 2m

la suma = 2n+2m

=2(n+m) (por ley distributiva)

que es el doble de (n+m)

∴ es par

Teorema 2.- La suma de dos números impares es par.

- Demostración -

un número impar = 2n+1

otro número impar = 2m+1

La suma = 2n+2m+2

= 2(n+m+1) (por ley distributiva)

que es el doble de (n+m+1)

∴ es par

Teorema 3.- La suma de un número par y un impar es impar.
- Demostrarlo -

Teorema 4.- La suma de cualquier cantidad de números pares es par.

Teorema 5.- la suma de una cantidad par de números impares es par.

Teorema 6.- La suma de una cantidad impar de números impares es impar.

Teorema 7.- El producto de dos números pares es_______________

Teorema 8.- El producto de dos números impares es_____________

Teorema 9.- El produ cto de un número par por un impar es________

Teorema 10.- El cuadrado de cualquier número par es par.

Teorema 11.- El cuadrado de cualquier número impar es impar.

En la Aritmética del reloj, también llamada Aritmética Modular (de módulo 12) la suma y el producto se comportan de manera diferente:
Para empezar, se trabaja con un conjunto finito de números
[12] = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}
en donde 0 = 12 es el neutro aditivo.
También se cumple la Ley de la cerradura, por lo que 6+7 = 1

a) Completa la tabla para la suma.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1													
2													
3													
4									0	1	2	3	
5													
6													
7													
8													
9					1	2	3						
10							4						
11							5						11

b)Comprobar si se cumplen las leyes conmutativa y asociativa para la suma.

c) ¿Qué se puede decir para el inverso aditivo?

d) ¿Y acerca del producto?

CAPITULO V LOS NUMEROS RACIONALES

1.- Origen y definición de los números racionales.

2.- Quebrados y fracciones.
- **a) ¿Qué es un quebrado?**
- **b) ¿Cómo se interpreta?**
- **c) ¿Cuándo dos quebrados son iguales?**

3.- Dos Teoremas sobre quebrados

4.- Suma y Resta de quebrados.
- **1^{er}. Caso: con el mismo denominador**
- **2^{do}. Caso: con diferente denominador**

5.-Multiplicación y División de quebrados.
- **La multiplicación**
- **1^{er}. Caso: Entero por quebrado.**
- **2^{do}. Caso: Quebrado por quebrado.**
- **La división**

6.- Propiedades de las operaciones + y • que se cumplen en los racionales.

7.- Los Racionales y la recta Numérica.

8.- La Propiedad de Densidad.

9.- La Propiedad de Completez.
- **a) Correspondencia y Densidad.**
- **b) Demostrar que $\sqrt{2}$ no es racional.**
- **c) Existen otros números que no sean racionales**
- **d) Los Números Irracionales.**

10.- Los Números Reales.
- **a) Definición y Propiedades.**
- **b) La notación decimal y los números reales.**
- **c) Un detalle interesante 1.9999...=2**

LOS NUMEROS RACIONALES

1.-Origen y Definición

¿Por qué son necesarios los números racionales?

Hay ocasiones en que se reparte uno ó varios objetos completos, por ejemplo, un terreno, un pastel, una herencia, etc..., entre varias personas y la división no resulta entera.

Por ejemplo; al dividir 16 entre 5, la división se indica de diferentes maneras:

$5\overline{)16}$ expresa lo mismo que $\frac{16}{5}$ y tambien 16:5 ó 16÷5 pero el resultado no es un número entero, es decir no existe un número n tal que $\frac{16}{5} = n$ [porque si existiera $n \in Z$ tal que $\frac{16}{5} = n$ entonces tendríamos $16 = 5n$, es decir 16 sería múltiplo de 5].

- También, recordamos que en el conjunto de los numeros enteros no existe el inverso multiplicativo para cada número es decir, los enteros no son cerrados bajo la división y no existe solución para la ecuación de la forma $3x = 8$.

- Obviamente las expresiones del tipo $\frac{16}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{100}$, etc... son nuevos números que vienen a aumentar nuestros conjuntos de números conocidos, dando origen a los números racionales.

¿Cuáles son los números racionales?

- El conjunto de los números racionales se denota por Q (inicial de Quotient=cociente) y se define como:

$Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z \text{ y } b \neq 0\}$ que se lee " El conjunto de los números racionales es igual al conjunto de los números "a sobre b" ó "a entre b" tal que a y b son números enteros, pero $b \neq 0$".

Por ejemplo $\frac{3}{5} \in Q$, $\frac{7}{2} \in Q$, $-\frac{3}{8} \in Q$, $-\frac{12}{7} \in Q$, $\frac{0}{5} \in Q$, $\frac{0}{3} \in Q$, pero $\frac{4}{0} \notin Q$ porque el número bajo la raya (denominador) debe ser diferente de cero.

<u>Observe que</u> los números racionales son los números que se escriben como un cociente (ó división) indicado entre dos números enteros. Y por definición de divisibilidad: b|a (b divide a a) si existe c tal que a = b·c es decir $\frac{a}{b}$ = c si y solo si a = b·c ejemplos:

$\frac{8}{4} = 2$ porque $8 = 4{\cdot}2$, $\frac{24}{3} = 8$ porque $24 = 3{\cdot}8$, pero $\frac{4}{0}$ no existe, porque si $\frac{4}{0} = x$ entonces $4 = 0{\cdot}x$ pero $0{\cdot}x = 0$ y tendríamos en consecuencia que $4 = 0$

¡No puede ser! ∴ No puede ser que $\frac{4}{0} = x$, es decir $\frac{4}{0}$ no existe.

2.- Quebrados y Fracciones.

Desde la escuela primaria hemos trabajado con los números racionales a los que llamamos quebrados ó fracciones, haciendo alusión al hecho de no trabajar con números enteros sino con partes de ellos. De hecho, podemos enfocar la parte operativa de los números racionales refiriéndonos a ellos como quebrados:

a) ¿Qué es un quebrado ó fracción?

Un quebrado es un cociente ó división indicada entre dos numeros enteros de manera que el divisor sea diferente de cero.

Las partes de un quebrado son: $\frac{numerador}{denominador}$ ← *raya de quebrado*

ejemplos:

en $\frac{3}{4}$ el numerador es 3 y el denominador es 4 (recuerde que $\frac{3}{4}$ significa lo mismo que $4\overline{)3}$, 3:4, 3÷4) en $\frac{17}{9}$ el numerador es 17 y el denominador es 9.

Es claro que efectuando ése cociente ó división indicada obtenemos la expresión decimal equivalente al número racional, por ejemplo $\frac{3}{4} = 0.75$.

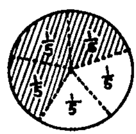
(comprobar que $\frac{5}{8} = 0.625$)

b) ¿Cómo se interpreta un quebrado?

En un quebrado, el denominador nos indica el número de partes iguales en que se dividen cada una de una ó varias unidades y el numerador nos indica el número de partes iguales que se toman de la división señalada por el denominador:

Por ejemplo: en $\frac{3}{5}$, una unidad (un pastel, una pizza, un terreno, una herencia, etc...) se divide en 5 partes iguales (denominador) y de esa división se toman 3 partes (numerador).

Es claro que al dividir una unidad entre tantas partes como indique el denominador, cada parte es, a su vez, considerada como una pequeña unidad, es decir como una partecita(un pedacito ó rebanada) — en el ejemplo es un quinto = $\frac{1}{5}$ — y sumando varias partecitas obtenemos un quebrado, por ejemplo $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$, y la suma de todas las pequeñas unidades me da la unidad total.



Otro ejemplo:

en el quebrado $\frac{7}{3}$, varias unidades se dividen en 3 partes iguales (denominador)

y de esa división se toman 7 partes.¿Cuántas unidades hay que dividir para obtener el número $\frac{23}{7}$?

c) ¿Cuándo dos quebrados son iguales?

¿serán iguales $\frac{6}{7}$ y $\frac{42}{56}$?

Se puede comprobar si son iguales, efectuando las divisiones y revisando que los resultados sean iguales, pero este procedimiento puede ser largo. Lo mejor será aplicar la definición de igualdad siguiente:

Definición:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } ad=bc}$$

ó sea que dos quebrados son iguales cuando los productos cruzados son iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

-por ejemplo-

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ porque $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

$12 = 12$

$\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ porque $2 \cdot 18 =$______(completar)

$\frac{7}{5} = \frac{42}{30}$ porque ________ $= 5 \cdot 42$ (completar)

pero $\frac{6}{7} \neq \frac{42}{56}$ porque $6 \cdot 56 \neq 7 \cdot 42$ es decir $336 \neq 294$.

También, de acuerdo a lo anterior, tenemos que:

$1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$, $4 = \frac{4}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$, $-2 = -\frac{2}{1}$, $-5 = -\frac{5}{1}$. etc...

Por lo cual es válido afirmar que $Z \subset Q$ porque cada número entero es también un número racional.

3.- Dos teoremas sobre quebrados:

Teorema 1.- Los dos términos de un quebrado se pueden multiplicar por un mismo número, diferente de cero, y el quebrado resultante es igual.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c} \qquad (c\neq 0)}$$

Vamos a demostrar que $a\cdot(b\cdot c) = b\cdot(a\cdot c)$ es decir, vamos a demostrar que los productos cruzados son iguales.

-Demostración-

$$\begin{aligned} a\cdot(b\cdot c) &= (a\cdot b)\cdot c \quad (\text{por ley asociativa})\\ &= (b\cdot a)\cdot c \quad (\text{por ley conmutativa})\\ &= b\cdot(a\cdot c) \quad (\text{por ley asociativa}) \end{aligned}$$

-Ejemplos-

$$\frac{3}{4} = \frac{3\quad 7}{4\quad 7} = \frac{21}{28} \qquad\qquad \frac{3}{4} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{56}{96},\quad \frac{5}{9} = \frac{30}{54},\quad \frac{13}{6} = \frac{65}{30},\quad \frac{6}{7} = \frac{42}{49}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{?}{16},\quad \frac{5}{8} = \frac{?}{56},\quad \frac{5}{8} = \frac{20}{?},\quad \frac{5}{8} = \frac{25}{?} \quad \text{completar}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{?}{12},\quad \frac{9}{4} = \frac{?}{28},\quad \frac{9}{4} = \frac{?}{36} \quad (\text{Completar})$$

Por otro lado, observemos que:

$1 = \frac{1}{1}, \quad 1 = \frac{2}{2}, \quad 1 = \frac{3}{3}, \quad 1 = \frac{4}{4}, \quad 1 = \frac{5}{5}, \quad 1 = \frac{6}{6}, \ldots$

o sea $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6}, \ldots$

también $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = \frac{16}{8} = \frac{18}{9} = \frac{20}{10} = \frac{22}{11} = \ldots$

$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = \frac{21}{7} = \frac{24}{8} = \frac{27}{9} = \frac{30}{10} = \frac{33}{11} = \ldots$

Es claro que cualquier número entero se puede escribir como un quebrado con el denominador que se desee.
-ejemplos-

$5 = \frac{40}{8}, \quad 5 = \frac{?}{7}, \quad 5 = \frac{?}{3}, \quad 5 = \frac{?}{17}, \quad 5 = \frac{?}{13}$

$6 = \frac{54}{9}, \quad 7 = \frac{?}{8}, \quad 9 = \frac{54}{6}, \quad 14 = \frac{126}{9}, \quad 8 = \frac{?}{5}$

$7 = \frac{7}{1} = \frac{21}{3}, \quad 8 = \frac{8}{1} = \frac{32}{4}, \quad 6 = \frac{6}{1} = \frac{42}{7}$

en general:

$$\boxed{a = \frac{a}{1} = \frac{ar}{r}}$$

Teorema 2.- Los dos términos de un quebrado se pueden dividir por un mismo número, diferente de cero, y el quebrado resultante es igual

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c} \quad , c \neq 0}$$

también

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \quad c \neq 0}$$

-Demostración -

$$a \cdot \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{a \cdot b}{c} \qquad (\text{por} \ldots \qquad)$$

$$= \frac{b \cdot a}{c} \qquad (\text{por} \ldots \qquad)$$

$$= b \cdot \left(\frac{a}{c}\right) \qquad (\text{por} \ldots \qquad)$$

Ejemplos-

$$\frac{21}{28} = \frac{\frac{21}{7}}{\frac{28}{7}} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{15}{20} = \frac{\frac{15}{5}}{\frac{20}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{56}{96} = \frac{7}{12}, \qquad \frac{30}{54} = \frac{5}{9}, \qquad \frac{36}{16} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

En el último ejemplo observamos que:

$\frac{36}{16} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ (se saca mitad y se saca mitad, es decir, se divide entre 2 y se divide entre 2)

Este proceso se conoce como simplificación del quebrado y es útil enfatizar que:

"CUALQUIER QUEBRADO SE PUEDE REDUCIR O SIMPLIFICAR HASTA QUE SUS DOS TERMINOS SEAN PRIMOS ENTRE SI." (Recuerde que dos números son primos entre sí cuando no tienen divisor común diferente de 1).

-EJERCICIO -

Simplificar los siguientes hasta que numerador y denominador sean primos entre sí.

a) $\frac{16}{24} =$ c) $\frac{32}{40} =$

b) $\frac{108}{60} =$ d) $\frac{60}{168} =$

4.- SUMA Y RESTA DE QUEBRADOS

1er. Caso: Cuando los quebrados tienen el mismo denominador.

Recuerde que; $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ y $\frac{2}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$

Por lo tanto: $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ y $\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$

$\frac{2}{7} + \frac{6}{7} + \frac{9}{7} = \frac{17}{7}$ $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$\therefore$ **Cuando los quebrados tienen el mismo denominador, simplemente se suman los numeradores y se conserva el denominador común.**

-Ejercicio -

a) $\frac{3}{7} - \frac{8}{7} + \frac{12}{7} =$ b) $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7}{3} + \frac{3}{3} =$ c) $\frac{8}{13} - \frac{5}{13}$

2°. Caso: Cuando los quebrados tienen diferente denominador.

Aquí lo ideal sería poder transformar los quebrados de diferente denominador en quebrados respectivamente iguales pero con el mismo denominador y aplicar la regla del 1^{er}. caso.
pero...¿Cómo se transforman dos quebrados de diferente denominador en dos quebrados respectivamente iguales, pero con el mismo denominador?
-Ejemplo-

transformar $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ al mismo denominador

1°.- Multiplicar la primera fracción $(\frac{3}{4})$ por el denominador de la segunda fracción (5) [por teorema 1].

2°.- Multiplicar la segunda fracción $(\frac{2}{5})$ por el denominador de la primera fracción (4) [por teorema 1]

3°.- Ya transformadas se puede efectuar la suma.

Veamos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & + & \frac{2}{5} \\ {\scriptstyle 5}\downarrow & & {\scriptstyle 4}\downarrow \\ \frac{15}{20} & + & \frac{8}{20} = \frac{15+8}{20} = \frac{23}{20} \end{array}$$

—otros ejemplos—

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{7} & - & \frac{1}{9} \\ {\scriptstyle 9}\downarrow & & {\scriptstyle 7}\downarrow \\ \frac{27}{63} & + & \frac{7}{63} = \frac{20}{63} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{9}{5} & + & \frac{3}{7} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{63}{35} & + & \frac{15}{35} = \frac{78}{35} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & - & \frac{5}{8} \\ 8\downarrow & & 4\downarrow \\ \frac{24}{32} & - & \frac{20}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \end{array}$$

<u>**Nota:**</u> **En este último ejemplo sería necesario solamente transformar la primera fracción, porque el denominador de la 2ª fracción es múltiplo del denominador de la primera. veámoslo:**

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & - & \frac{5}{8} \\ 2\downarrow & & \downarrow \\ \frac{6}{8} & - & \frac{5}{8} = \frac{1}{8} \end{array}$$

también

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{3} & + & \frac{1}{6} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{10}{6} & + & \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \end{array}$$

otra

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{6} & + & \frac{3}{4} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{10}{12} & + & \frac{9}{12} = \frac{19}{12} \end{array}$$

De todas maneras, sigue siendo válido el procedimiento original, que conduce al mismo resultado, aunque tenemos que simplificar al final.

Aplicando estas transformaciones efectuar las siguientes sumas:

a) $\frac{7}{5} + \frac{3}{9}$ **b)** $\frac{2}{3} - \frac{4}{7}$ **c)** $\frac{3}{8} - \frac{7}{5}$

___+___=___ ___ - ___ ___ - ___

¿Podría efectuar las siguientes operaciones mentalmente, sin usar lápiz?

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=$ c) $\frac{1}{4}-\frac{3}{5}=$ e) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=$

b) $\frac{9}{5}+\frac{5}{8}=$ d) $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}=$ f) $-\frac{5}{13}+\frac{2}{7}=$

¿Qué pasa cuando uno de los sumandos es un número entero?

Ejemplos: $\frac{3}{4}-1$, $3+\frac{2}{9}$, $\frac{2}{5}-2$ etc...

-simplemente transformaremos el número entero y efectuaremos la suma. por ejemplo :

$$3 + \frac{2}{9}$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$\frac{27}{9}+\frac{2}{9}=\frac{29}{9}$$

$$\frac{3}{4} - 1$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$\frac{3}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{1}{4}$$

Efectuar las siguientes operaciones mentalmente

a) $\frac{7}{3}-2=$ c) $1-\frac{3}{5}$ e) $\frac{4}{3}+2=$

b) $\frac{13}{2}-5=$ d) $8+\frac{3}{7}$ f) $11-\frac{6}{5}$

Aplicando estas transformaciones, obtenemos la regla general para la suma de dos números racionales:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \therefore \boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}}$$

-Ejemplos-

$$\frac{7}{12} + \frac{2}{5} = \frac{7(5) + 12(2)}{12(5)} = \frac{35 + 24}{60} = \frac{59}{60}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3(6) + 4(5)}{4(6)} = \frac{18 + 20}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$$

-Ejercicios-

a) $\frac{3}{4} - \frac{7}{9} =$

b) $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} =$

c) $\frac{9}{4} - \frac{5}{3} =$

d) $\frac{3}{5} - \frac{4}{9} =$

e) $\frac{2}{7} + 1 =$

f) $\frac{3}{5} - 1 =$

g) $\frac{9}{7} - 1 =$

h) $\frac{1}{2} - 1 =$

i) $-\frac{2}{7} + 1 =$

j) $4 - \frac{7}{3} =$

k) $8 - \frac{13}{5} =$

l) $\frac{2}{7} - 3 =$

Aplicar la ley asociativa para efectuar las siguientes sumas:

m) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = (\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) + \frac{1}{5} = (\frac{17}{12}) + \frac{1}{5} =$

n) $\frac{1}{7} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} =$

ñ) $\frac{8}{3} - \frac{13}{5} + \frac{5}{6} =$

o) $\frac{7}{4} + 1 - \frac{2}{3} =$

p) $4 - \frac{7}{5} + \frac{1}{9} =$

5.- Multiplicación y División de Quebrados.

Veamos la multiplicación por casos:

<u>1^er. caso:</u> Multiplicación de un entero por un quebrado.
- ejemplo-

$3 \cdot (\frac{2}{5})$ quiere decir "3 veces $\frac{2}{5}$" también { "3 partes de $\frac{2}{5}$" ó "3 de $\frac{2}{5}$" }

ó sea que

$$3 \cdot (\frac{2}{5}) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2+2}{5} = \frac{3(2)}{5} = \frac{6}{5}$$

por lo tanto

$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3(2)}{5}$ y en general

$$\boxed{a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}}$$

Observe que: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = ab \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} \cdot b$

en el caso del ejemplo: $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot 2$ etc...

también : $9 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$ (ó *simplemente:* $\cancel{9} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = 12$)

-Ejercicios-

a) $\frac{2}{7} \cdot 4 =$ d) $\frac{1}{5} \cdot 6 =$ g) $6 \cdot \frac{2}{3} =$

b) $5 \cdot \frac{3}{10} =$ e) $7 \cdot \frac{3}{4} =$ h) $8 \cdot \frac{3}{4} =$

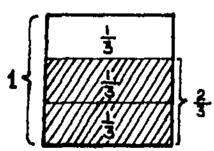
c) $\frac{1}{3} \cdot 8 =$ f) $8 \cdot \frac{2}{5} =$ i) $5 \cdot \frac{1}{10} =$

2°. Caso: Multiplicación de un quebrado por un quebrado.

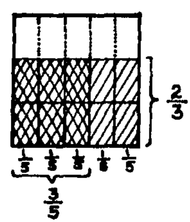
¿Qué significa $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)$ **?...... ¿3 quintas veces dos tercios?**

vamos a entenderlo como $\frac{3}{5}$ **(partes) de** $\frac{2}{3}$ **ó** ($\frac{3}{5}$ **de** $\frac{2}{3}$)

Primero interpretemos $\frac{2}{3}$



y ahora vamos a tomar tres quintos de esos dos tercios



Observemos las dos figuras.

La parte marcada con en la segunda figura es $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}$ que es igual a

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$

Pero...¿En cuántas partes iguales quedó dividida la unidad? <u>en 15</u> partes iguales. y ¿cuántas partes se marcaron con ? <u>6</u> partes.

Por lo tanto; la parte marcada corresponde a $\frac{6}{15}$ es decir $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15}$ ó sea

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$

Con lo anterior, podemos justificar nuestra regla para multiplicar dos números racionales :

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

observe que $\frac{a \overset{\cdot}{\dashrightarrow} c}{b \dashrightarrow d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Ejemplos:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 9} = \frac{12}{63} = \frac{4}{21}$$

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9} = \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 9} = \frac{35}{72}$$

Ejercicios:

a) $\frac{13}{4} \cdot \frac{3}{11}$

c) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} =$

e) $(\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4}) \cdot \frac{7}{2} =$

b) $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} =$

d) $\frac{3}{4} \cdot (\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}) =$

f) $\frac{1}{9} \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} =$

Nota: En la multiplicación de números racionales se respeta la ley de los signos para la multiplicación.

Ejemplo: $-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{(-3)\cdot 2}{4\cdot 5} = \frac{-6}{20} = \frac{-3}{10} = -\frac{3}{10}$

Resolver:

a) $(\frac{7}{2})(-3) =$

c) $(-\frac{4}{3})(-\frac{5}{7}) =$

b) $(-\frac{2}{5})(-\frac{1}{7}) =$

d) $(\frac{3}{4})(-\frac{1}{5}) =$

Se define, para cualquier número racional $\frac{a}{b}$, (con $\frac{a}{b} \neq 0$) el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ ó recíproco de $\frac{a}{b}$ como aquel número racional único denotado por

$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{1}{(\frac{a}{b})}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot (\frac{a}{b})^{-1} = 1$ y $(\frac{a}{b})^{-1} \cdot \frac{a}{b} = 1$

pero, por otro lado, tenemos que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Por lo tanto; el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ es decir $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ ó bien

$$\frac{1}{(\frac{a}{b})} = \frac{b}{a}$$

- Por ejemplo-

el inverso de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$ porque $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$

el inverso de $\frac{2}{7}$ es $\frac{7}{2}$ porque $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = 1$

el inverso de $-\frac{5}{9}$ es $-\frac{9}{5}$ porque $(-\frac{5}{9}) \cdot (-\frac{9}{5}) = 1$

el inverso de $\frac{1}{8}$ es 8 porque...

el inverso de $-\frac{1}{7}$ es -7 porque...

el inverso de 5 es $\frac{1}{5}$ porque...

el inverso de -6 es $-\frac{1}{6}$ porque...

¿Ya se dió cuenta de que para encontrar el inverso basta con invertir los términos?

Ahora se define la división de dos quebrados $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ como la multiplicación del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.
es decir:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$$

También podemos indicar el proceso de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

por ejemplo:

$$\frac{3}{2} : \frac{5}{7} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{5} = \frac{20}{18} = \frac{10}{19}$$

Efectuar las siguientes divisiones:

a) $\frac{1}{7} : \frac{1}{4} =$ e) $\frac{7}{4} : \frac{1}{3} =$ i) $3 : \frac{2}{5} =$

b) $4 : \frac{1}{7} =$ f) $8 : \frac{1}{3} =$ j) $\frac{1}{3} : \frac{2}{5} =$

c) $\frac{1}{7} : 4 =$ g) $10 : \frac{2}{7} =$ k) $\frac{2}{5} : 3 =$

d) $\frac{3}{2} : \frac{2}{9} =$ h) $6 : \frac{9}{2} =$ l) $\frac{2}{5} : \frac{1}{3} =$

Otra manera en que se presenta la división de racionales es como quebrado de quebrado, ó fracción de fracción:

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ que equivale a $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

por lo tanto:

$$\boxed{\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}}$$

También podemos esquematizar el proceso de la siguiente manera:

al numera-dor $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ al denominador

-Ejemplos-

$\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{21}{10}$, $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{5}} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$, $\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{21}{20}$,

$\dfrac{3}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{4}$ $\left[\text{porque, } \dfrac{3}{\frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{3}{1}}{\frac{4}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} = \frac{15}{4}\right]$

-otros ejemplos-

$$\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-12}{5}, \qquad \frac{\frac{4}{5}}{3} = \frac{4}{15}, \qquad \frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{15}, \qquad \frac{-5}{\frac{1}{3}} = -15$$

Efectuar las siguientes divisiones:

a) $\frac{2}{3} =$

b) $\frac{3}{9} =$

c) $\frac{2}{1} =$

d) $\frac{5}{1} =$

e) $\frac{4}{8} =$

f) $\frac{5}{3} =$

g) $\frac{3}{1} =$

h) $\frac{4}{7} =$

i) $\frac{2}{1} =$

<u>Nota importante:</u>

En algunas ocasiones se manejan fracciones propias, impropias y mixtas.
Las fracciones propias son aquellas en que el numerador es menor que el denominador.

$\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{2}{9}, \frac{9}{10}$ etc... [la expresión es propiamente una parte de la unidad].

Las fracciones impropias son aquell as en que el numerador es mayor que el denominador.

$\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{2}, \frac{90}{13}$ etc.... [la expresión es mayor que la unidad].

Las fracciones mixtas serían aquellas formadas de una parte entera y una fracción propia, y se escribirían, por ejemplo,

$3 \frac{2}{3}$ lo que es incorrecto (porque se confunde con la multiplicación) pues se quiere indicar $3 + \frac{2}{3}$

Es decir, en lugar de $3\ \frac{2}{3}$ debemos escribir $3 + \frac{2}{3}$ en lugar de $1\ \frac{1}{4}$ debemos escribir $1 + \frac{1}{4}$

Además, una fracción impropia se puede transformar a una parte entera más una fracción propia.

-Ejemplos-

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, $\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$, $\frac{90}{13} = 6 + \frac{12}{13}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3\overline{)5} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 2\overline{)9} \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ 13\overline{)90} \\ 12 \end{array}$$

Expresar las siguientes fracciones impropias como una parte entera más una fracción propia.

a) $\frac{25}{7} =$ c) $\frac{148}{23} =$ e) $\frac{3425}{127} =$

b) $\frac{37}{6} =$ d) $\frac{945}{64} =$ f) $\frac{492}{79} =$

6.- ¿Cuáles son las propiedades de + y • que se cumplen en los racionales?

S₁) Los racionales son cerrados bajo la suma.
porque la suma de dos números racionales es un número racional.

Veamos: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces $a,b,c,d, \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, $d \neq 0$ y

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ en donde $(ad+bc) \in Z$ $bd \in Z$ y $bd \neq 0$

por lo tanto $\frac{ad + bc}{bd} \in Q$ es decir $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \in Q$.

Ejemplo:

$\frac{2}{3} \in Q$ y $\frac{4}{5} \in Q$

$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$ con $\frac{22}{15} \in Q$ $\therefore (\frac{2}{3} + \frac{4}{5}) \in Q$

S_2) La suma de racionales es conmutativa.

porque $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

y por otro lado: $\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{cb + da}{db} = \frac{bc + ad}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$

por lo tanto: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

Ejemplo:

$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$

y $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{22}{15}$ $\therefore \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$

S_3) La suma de racionales es asociativa.

porque:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{(cf + de)}{df} = \frac{a(df) + b(cf + de)}{b(df)}$$

$$= \frac{adf + bcf + bde}{(bd)f} = \frac{(ad + bc)f + (bd)e}{(bd)f} =$$

$$= \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$$

S_4) El cero es elemento neutro para la suma en los racionales, es decir:

$0 = \frac{0}{1} \in \mathbf{Q}$, es tal que $r+0 = 0+r = r$ para cualquier $r \in \mathbf{Q}$.

porque: $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot b}{b \cdot 1} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b}$

S_5) También hay inverso aditivo en los racionales. Es decir, para cualquier $r \in \mathbf{Q}$ existe $-r \in \mathbf{Q}$, tal que $r + (-r) = -r + r = 0$

para $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ esta $\frac{-a}{b} \in \mathbf{Q}$ tal que $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a+(-a)}{b} = \frac{0}{b} = 0$

-Ejemplo-

El inverso de $\frac{3}{5}$ es $\frac{-3}{5}$ porque $\frac{3}{5} + \frac{-3}{5} = \frac{3+(-3)}{5} = \frac{0}{5} = 0$

Nota, observe que $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$ pero $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

y de la misma manera podemos comprobar que se cumplen:

M_1) Los racionales son cerrados bajo el producto

M_2) El producto de racionales es conmutativo.

M_3) El producto de racionales es asociativo.

M_4) El número $1 \in \mathbf{Q}$ es neutro para el producto.

M_3) El inverso multiplicativo (ó recíproco) de cualquier número racional $\frac{a}{b}$ (excepto el cero) es el número racional $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

Nota:[El cero no tiene inverso multiplicativo.]

Además se cumple la Ley Distributiva :

D)

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot (\frac{p}{q} + \frac{r}{s}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{s}}$$

-Ejercicios-

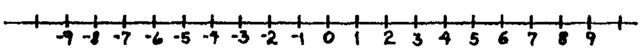
a) Demostrar que se cumple M_1 en los racionales.
b) Escribir dos ejemplos en los que se compruebe M_2 .
c) Escribir otros dos ejemplos para M_3 .

d) Encuentre el inverso multiplicativo de $\frac{3}{7}$, de $\frac{1}{6}$, de $\frac{-8}{5}$ y 5.

e) Comprobar que $\frac{3}{5} \cdot (\frac{7}{2} + \frac{4}{9}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9}$.

7.- Los Racionales y la recta Numérica.

En la recta númerica, como modelo geométrico para la representación de números, tenemos localizados a los enteros positivos ó naturales (a la derecha del orígen) al cero (en el origen) y a los enteros negativos (a la izquierda del origen).



Ahora podemos localizar a los racionales $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc... y para ello basta con dividir al segmento $\overline{0,1}$ y a cada segmento unitario $\overline{1,2}$, $\overline{2,3}$, $\overline{3,4}$, $\overline{-3,-2}$, $\overline{-2,-1}$, etc... en dos partes iguales. Pero...

¿Cómo se divide un segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales?

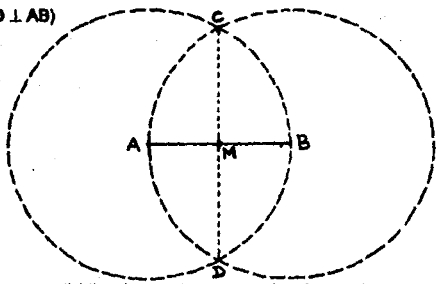
(ver figura)

1º.) Con centro en A y radio $\overline{AB}$ se traza la circunferencia $\widehat{CBD}$,

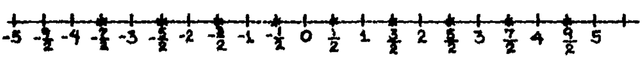
2º.) Con centro en B y radio $\overline{BA}$ se traza la circunferencia $\widehat{CAD}$,

3º.- Se unen los puntos de intersección $\overline{CD}$.

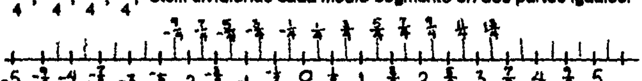
4º.- El punto M, donde $\overline{CD}$ intersecta a $\overline{AB}$ es el punto medio de $\overline{AB}$.
(en geometría se demuestra que $\Delta ACM = \Delta BCM$ y $\therefore$ $\overline{AM} = \overline{MB}$. Ademas $CD \perp AB$)



De esta manera, dividiendo en dos partes iguales cada segmento unitario, tenemos en la recta númerica:

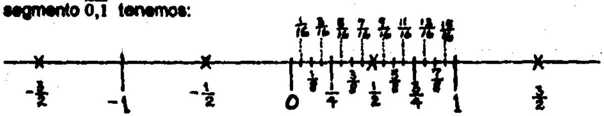


Con el mismo procedimiento podemos localizar a los números racionales $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, etc... dividiendo cada medio segmento en dos partes iguales.



Y los racionales correspondientes a

$\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \ldots, \frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \frac{3}{32}, \ldots$ etc... ilustrando sólo el segmento $\overline{0,1}$ tenemos:



Y a cada segmentito le vamos encontrando el punto medio y de esta manera localizamos todos los racionales con denominadores de la forma 2^n (2,4,8,16,32,64,...) es decir todos los racionales de la forma:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{2048}, \ldots \text{etc.}$$

pero aunque el proceso es infinito, aún nos quedan muchos números racionales sin localizar. Por ejemplo, ¿Cómo podemos localizar el punto que corresponde al número racional $\frac{3}{5}$, ó $\frac{2}{7}$, ó $\frac{7}{9}$? o sea ¿Cómo localizar en la recta los racionales de la forma:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \text{etc...?}$$

Veamos un ejemplo:

¿Cuál es el punto, sobre la recta númerica, que corresponde a $\frac{3}{5}$?

Para encontrarlo debemos dividir el segmento unitario $\overline{0,1}$ en 5 partes iguales y de ahí tomar 3 partes. pero...¿Cómo se divide un segmento $\overline{AB}$ en 5 partes iguales?

1°) Trazar una línea recta auxiliar $\overline{AX}$.

2°) A partir del punto A, marcar un pequeño segmento sobre $\overline{AX}$ y repetirlo 5 veces, marc ando los puntos 1,2,3,4 y 5 que señalan cinco partes iguales (construidas una tras otra).

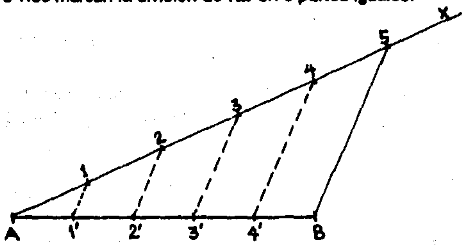
3°.) Trazar la recta que une a los puntos 5 y B.

4°.) Por el punto 4 trazar una paralela a la recta $\overline{5B}$ intersectando al segmento $\overline{AB}$ en el punto 4'.

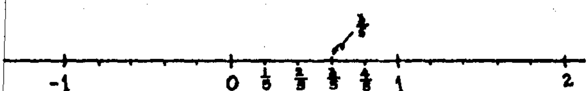
5°.) Por el punto 3 trazar una paralela a la recta $\overline{5B}$ intersectando al segmento $\overline{AB}$ en el punto 3'.

6°) De la misma manera se localizan los puntos 2' y 1'.

7°.) Por un Teorema de semejanza de triángulos, se demuestra que 1', 2', 3', 4', y B nos marcan la división de $\overline{AB}$ en 5 partes iguales.



Ahora sí, podemos aplicar el procedimiento al segmento 0,1 dividiéndolo en 5 partes iguales y tomando 3 de esas partes.

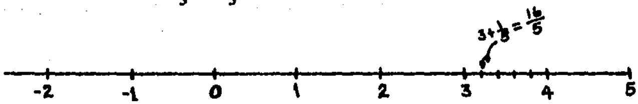


de manera semejante, podemos localizar los puntos correspondientes a

$\frac{4}{9}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{17}$, etc...

Sólo nos falta precisar cómo se localizan los puntos correspondientes a números racionales como $\frac{16}{5}$, $\frac{93}{17}$, $\frac{428}{23}$, $-\frac{77}{12}$, etc...

Ya sabemos que $\frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5}$, por lo tanto, basta con dividir el segmento unitario $\overline{3,4}$ en 5 partes iguales y de ahí tomar una parte para tener el punto correspondiente a $3+\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$



De la misma manera: $\frac{93}{17} = 5 + \frac{8}{17}$ y $\frac{428}{23} = 18 + \frac{14}{23}$, $-\frac{77}{12} = -6-\frac{5}{12}$

Con todo lo anterior, ya podemos afirmar que:

PARA CADA NUMERO RACIONAL HAY UN PUNTO CORRESPONDIENTE SOBRE LA RECTA NUMERICA

Ejercicios:

a) Investigar cómo se traza una perpendicular a una recta dada y que pase por un punto dado: Casos: 1°) por el punto medio, 2°.) por un punto cualquiera sobre la recta y 3°.) por un punto fuera de la recta.

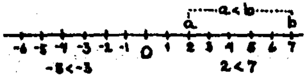
b) Investigar cómo se traza una paralela a una recta dada y que pase por un punto dado (fuera de la recta).

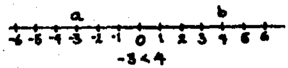
c) Diga cuál es el Teorema deTales sobre semejanza.

d) En la recta numérica, localizar $-\frac{8}{3}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{25}{11}$, y $-\frac{13}{6}$.

8.- La Propiedad de Densidad.

Recuerde que en los números enteros observamos que "a es menor que b", denotado por $a < b$, si y solo si, en la recta númerica, a esta a la izquierda de b.





es claro que, si $a < b$ entoncs $b > a$ (b es mayor que a)

Definición: $a < b$ si hay un número positivo c tal que $a + c = b$.

Por ejemplo:

$3 < 5$ porque con el número 2, $3 + 2 = 5$
$-5 < -3$ porque con el número 2, $-5 + 2 = -3$
$-3 < 4$ porque esta el número 7 tal que $-3 + 7 = 4$

Nota: $a \leq b$ quiere decir que "a es menor que b ó a es igual a b".
$a \leq b$ se lee "a es menor ó igual que b".

-La relación de orden es transitiva porque:

si $a<b$ y $b<c$ entonces $a<c$.

- Para dos enteros cualesquiera a y b, tenemos que se cumple una y solo una de las siguientes relaciones $a<b$ ó $a = b$ ó $a>b$ (Ley de Tricotomía)

Para definir la relación de orden en los números racionales suponemos que se escriben los racionales con denominador positivo, es decir $\frac{a}{b}$ con $b>0$ y $\frac{c}{d}$ con $d>0$.
Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si y solo si } ad < bc}$$

-ejemplos -

$\frac{3}{1} < \frac{5}{1}$ porque $3 \cdot 1 < 1 \cdot 5$ es decir $3<5$

$\frac{4}{3} < \frac{7}{5}$ porque $4 \cdot 5 < 3 \cdot 7$ es decir $20<21$

$\frac{-2}{5} < \frac{-1}{9}$ porque (-2)9<5(-1) es decir -18<-5

La propiedad de densidad para los números racionales afirma que:

ENTRE CADA PAR DE NUMEROS RACIONALES DIFERENTES SIEMPRE EXISTE OTRO NUMERO RACIONAL.

Por ejemplo, entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$ existe el racional $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

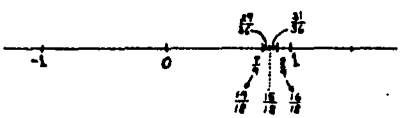
porque $\frac{14}{18} < \frac{15}{18} < \frac{16}{18}$ y también entre $\frac{14}{18}$ y $\frac{15}{18}$ y

entre $\frac{15}{18}$ y $\frac{16}{18}$ existen otros $\frac{28}{36} < \frac{29}{36} < \frac{30}{36} < \frac{31}{36} < \frac{32}{36}$ y entre cada pareja

consecutiva existen otros $\frac{56}{72} < \frac{57}{72} < \frac{58}{72} < \frac{59}{72} < \frac{60}{72} < \frac{61}{72} < \frac{62}{72} < \frac{63}{72} < \frac{64}{72}$ hasta este momento

Hemos encontrado 7 números racionales entre $\frac{7}{9}$ $(= \frac{56}{72})$ y $\frac{8}{9}$ $(= \frac{64}{72})$ que son los números $\frac{57}{72}$, $\frac{58}{72}$, $\frac{59}{72}$, $\frac{60}{72}$, $\frac{61}{72}$, $\frac{62}{72}$ y $\frac{63}{72}$ pero el proceso lo podemos continuar indefinidamente y damos cuenta de que en realidad entre cada pareja de números racionales diferentes hay una infinidad de números racionales, todos diferentes.

En la recta numérica se vería de la siguiente manera:



Ejemplos: a) encontrar tres números racionales entre $\frac{4}{17}$ y $\frac{5}{17}$

b) encontrar siete números racionales entre $\frac{5}{25}$ y $\frac{6}{25}$

c) encontrar ocho números racionales entre $\frac{16}{13}$ y $\frac{17}{13}$

En realidad, no es necesario reconstruir el proceso paso por paso para encontrar, por ejemplo, 8 números racionales entre $\frac{16}{13}$ y $\frac{17}{13}$, pues basta con multiplicar los dos términos de cada racional por el número 9 (ó uno mayor) para obtener:

$$\frac{16}{13} \quad y \quad \frac{17}{13}$$

$$9 \qquad\qquad 9$$

$$\frac{144}{117} < \underbrace{\frac{145}{117}, \frac{146}{117}, \frac{147}{117}, \frac{148}{117}, \frac{149}{117}, \frac{150}{117}, \frac{151}{117}, \frac{152}{117}, \frac{153}{117}}, < \frac{153}{117}$$

8 números racionales que están entre $\frac{16}{13}$ y $\frac{17}{13}$

Ejercicios:

a) Encuentre 5 números racionales entre $\frac{13}{6}$ y $\frac{14}{6}$

b) Encuentre 12 números racionales entre $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$

9.- La Propiedad de Completez.

a) Al estudiar los racionales en la recta numérica observamos dos puntos muy importantes:

Primero, que para cada número racional hay un punto sobre la recta númerica, y recuerde que los racionales son infinitos.
Y segundo, que entre cada pareja de números racionales diferentes siempre hay otro número racional, y todavía fuimos más lejos al comprobar que entre cada pareja de números racionales diferentes existe una infinidad de números racionales.
Tomando estos dos puntos en cuenta, todavía nos atrevemos a hacer las siguiente pregunta: ¿agotan los racionales a la recta númerica?, es decir, ¿llenan ó completan los racionales a la recta numérica?
la respuesta es NO, porque aún quedan puntos sobre la recta numérica que corresponden a números que no son racionales.
Ahora nos preguntamos, ¿cuáles números no son racionales?

Podemos decir que, por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ no es racional (nuestro siguiente paso será comprobar que $\sqrt{2}$ no es racional).

b) Demostrar que $\sqrt{2}$ no es racional ($\sqrt{2} \notin Q$)

Si $\sqrt{2}$ fuera un número racional, entonces $\sqrt{2}$ se podría escribir como un cociente de números enteros $\frac{p}{q}$ con $q \neq 0$ y, p y q primos entre sí. Y con esta idea arranca nuestra demostración:

- Demostración-

1) Supongamos que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $q \neq 0$, p y q primos entre sí.

2) Elevando al cuadrado: $(\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

3) multiplicando por q^2 : $2q^2 = p^2$

4) $\therefore$ p^2 es par (porque es el doble de q^2)

5) $\therefore$ $\boxed{\text{p es par}}$

sea $p = 2n$

6) sustituyendo en el paso 3) tenemos: $2q^2 = (2n)^2$

o sea $2q^2 = 4n^2$

7) y dividiendo entre 2 $q^2 = 2n^2$

8) $\therefore q^2$ es par (porque es el doble de n^2)

9) $\therefore \boxed{\text{q es par}}$

10) Ahora tenemos que p es par y q es par, que es una contradicción con el paso 1) porque p y q eran primos entre sí

$\therefore$ es falso que $\sqrt{2} \in Q$

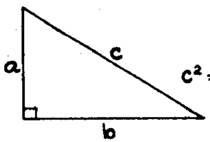
$\therefore$ $\sqrt{2} \notin Q$ ($\sqrt{2}$ no es racional)

-fin de la demostración-

Ahora...¿Qué punto sobre la recta númerica corresponde al número $\sqrt{2}$?

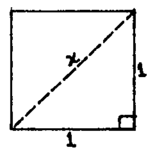
Primero veamos de dónde surge el número $\sqrt{2}$:

Recuerde el Teorema de pitágoras: "en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos."



$$c^2 = a^2 + b^2$$

En un cuadrado cuyos lados miden 1 tenemos:

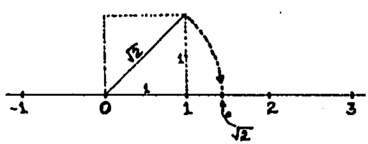


$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 1 + 1$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

$\therefore$ $\sqrt{2}$ es igual a la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyos lados miden 1.

Ahora, en la recta numérica, construimos un cuadrado sobre el segmento unitario $\overline{0,1}$.

La diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$, y con el compás trasladamos la longitud $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica, con lo que descubrimos el punto sobre la recta numérica que corresponde a $\sqrt{2}$. (en realidad $\sqrt{2}$ = 1.4142...)



c) ¿Existen otros números que no sean racionales?

los números que no son racionales se llaman irracionales.
otros números irracionales son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, π, e, etc...
Además podemos demostrar que el producto de un número racional diferente de cero, por un número irracional es irracional.

- es decir -

Si $\frac{p}{q} \in Q$ y $x \notin Q$ entonces $(\frac{p}{q} \cdot x) \notin Q$

porque: $\left(\frac{p}{q}\cdot x\right)\in\mathbb{Q}$ implica que $\frac{p}{q}\cdot x = \frac{r}{s}$

implica que $x=\frac{rq}{ps}$, pero $\frac{rq}{ps}\in\mathbb{Q}$

implica que $x\in\mathbb{Q}$ (es decir x sería racional)

Y simplemente multiplicando $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ por cada número racional, obtenemos una cantidad igual a la de los números racionales, pero de puros irracionales.
Lo mismo si multiplicamos $\sqrt{3}$ (y después π, etc...) por cada número racional.
De donde concluimos que la cantidad de números irracionales es muchísimo mayor que la de los números racionales.

d) Los números irracionales, $\mathbb{I}$, se definen como los números que no son racionales.

$$\mathbb{I}=\{x|x\notin\mathbb{Q}\}$$

Ahora, si unimos a los números racionales con los irracionales, obtenemos el conjunto de números reales que si llenan ó completan a la recta numérica.
los números reales se denotan por $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$$

ó bien $\mathbb{R}=\{x|x\in\mathbb{Q}\text{ ó }x\in\mathbb{I}\}$

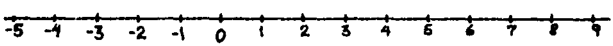
$\therefore$ Propiedad de Completez:

"PARA CADA NUMERO REAL HAY UN PUNTO SOBRE LA RECTA NUMERICA Y PARA CADA PUNTO SOBRE LA RECTA NUMERICA HAY UN NUMERO REAL."

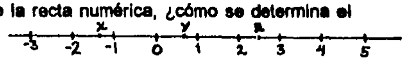
Ejercicios:

a) ¿Cómo se encuentra, sobre la recta numérica, el punto correspondiente a:

$x=\frac{27}{5}$, Y=8.349, Z=1.393393339.



b) Dados los puntos x, y ,z sobre la recta numérica, ¿cómo se determina el número real correspondiente?



10.- Los Números Reales.

a)Definición y Propiedades.

Los números reales $\mathbb{R}$, se definen como: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
y ya sabemos que los reales si cumplen la propiedad de completez, es decir que los reales s i "llenan" a la recta numérica (correspondencia biunívoca entre los reales y los puntos de la recta).
Además, los números reales cumplen todas las propiedades de la suma. desde S_1 hasta S_5 , con el número o como neutro aditivo y (-a) el inverso aditivo de a.
Y las propiedades de la multiplicación, de M_1 a M_5, con el número 1 como neutro multiplicativo y $a^{-1} = \frac{1}{a}$ el inverso multiplicativo de a, con la aclaración de que el número cero no tiene inverso multiplicativo. Y se cumple también la Ley Distributiva, la Propiedad de Densidad y una relación de orden.
b) La notación decimal y los números reales.
Ya vimos que cualquier número racional puede tener una representación decimal y para encontrarla, basta con efectuar la división del numerador entre el denominador:

Ejemplos:

$\frac{12}{5} = 2.4$, $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{5}{16} = 0.3125$ (comprobar las divisiones)
(Representación decimal finita)

Por otro lado:

$$\frac{2}{3} = 0.666... = 0.\bar{6}$$

$$\frac{4}{11} = 0.363636... = 0.\overline{36}$$

$$\frac{173}{330} = 0.52424... = 0.5\overline{24}$$

Esta es una representación decimal infinita pero periódica. (repetitiva).

Es claro que la representación decimal de cualquier número racional debe ser finita ó periódica, porque al efectuar la división del numerador entre el denominador, como el denominador es un número natural finito, los residuos que aparecen en el algoritmo, ó proceso de la división, pueden ir cambiando desde cero (lo que nos daría división exacta ó sea representación decimal finita) hasta el número inmediato menor al denominador, pero; por ser finito el denominador, en algún momento uno de los residuos se va a repetir y a partir de ese momento se repite el proceso (y obtenemos la expresión decimal periódica ó repetitiva).

———**veamos los casos de** $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, y $\frac{4}{11}$———

$$\begin{array}{r|l} & 0.75 \\ \hline 4 & 3.0 \\ & \;\;20 \\ & \;\;\;\;0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.66 \\ \hline 3 & 2 \\ & 20 \\ & \;\;20 \\ & \;\;\;\;2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.3636 \\ \hline 11 & 4.0 \\ & \;\;70 \\ & \;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;70 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;4 \end{array}$$

$\therefore \frac{3}{4} = 0.75$ $\qquad$ $\therefore \frac{2}{3} = 0.666... = 0.\bar{6}$ $\qquad$ $\therefore \frac{4}{11} = 0.363636... = 0.\overline{36}$

veamos ahora el caso de $\frac{6}{17}$

```
      0.3529411764705882
17 | 6.0
       90
        50
        160
          70
           20
            30
            130
             110
              080
               120
               0100
                 150
                  140
                   040
                     6
```

$$\therefore\ \frac{6}{17} = 0.\overline{3529411764705882}$$

Encontrar la representación decimal de:

a) $\frac{47}{20} =$ b) $\frac{8}{33} =$ c) $\frac{5}{12} =$

Recíprocamente, a cada expresión decimal, finita ó periódica, corresponde un número racional.

-Ejemplos:-

1er. Caso: Cuando la expresión decimal es finita.

$x = 0.48$

$x = \frac{48}{100} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$

$x = \frac{12}{25}$, $0.48 = \frac{12}{25}$

$y = 2.6$

$y = 2 + \frac{6}{10} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$

$\therefore\ 2.6 = \frac{13}{5}$

$z = 0.725$

$z = \frac{725}{1000} = \frac{145}{200}$

$= \frac{29}{40}$

$\therefore\ 0.725 = \frac{29}{40}$

2^{o}. Caso: Cuando la expresión decimal es periódica.

$X = 0.333... = 0.\bar{3}$

Sean $10X = 3.333...$

restando $X = 0.333...$

nos quedan

$9X = 3$

$X = \frac{3}{9}$

$\therefore\ X = \frac{1}{3}$

$Y = 0.181818... = 0.\overline{18}$

Sean $100Y = 18.181818...$

$- \ Y = 0.181818...$

$99Y = 18$

$Y = \frac{18}{99}$

$\therefore\ Y = \frac{2}{11}$

Encuentre los racionales correspondientes a los siguientes decimales:

$x = 0.8555... = 0.8\bar{5}$ $\quad z = 0.\overline{357}$ $\quad r = 0.\bar{8}$

$y = 0.64242... = 0.6\overline{42}$ $\quad w = 0.\overline{84}$ $\quad s = 0.\bar{9}$

Por otro lado, a los números irracionales corresponden expresiones decimales no-finitas y no-periódicas.

Ejemplos:

$\pi = 3.1415926...$
$\sqrt{2} = 1.414214...$
$x = 0.27207200720007...$
$y = 2.1911911991119...$

Veamos el siguiente Diagrama:

$$\text{Reales } (\mathbb{R}) \begin{cases} \text{Racionales } (\mathbb{Q}) \begin{cases} \text{decimales finitos o} \\ \text{decimales periódicos} \end{cases} \\ \text{Irracionales } (\mathbb{I}) \begin{cases} \text{decimales no finitos y} \\ \text{no periódicos} \end{cases} \end{cases}$$

Otro esquema que debemos recordar es:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

c) Como último detalle interesante observamos que se cumple la propiedad de densidad para los números reales. O sea que entre cada dos números reales diferentes existe otro número real.
trasladando esta idea a la recta numérica, concluimos que entre cada pareja de puntos diferentes, existe otro punto.

Es decir:
<u>No</u> hay dos puntos consecutivos sobre la recta; de la misma manera que:

<u>No</u> hay dos números reales consecutivos.

Con lo anterior, aún preguntamos:

¿Será posible que 1.9999....sea el número inmediato anterior a 2?

NO porque tendríamos dos números reales consecutivos.

Sea $x = 1.999...$
tomando $10x = 19.999...$
y restando $x = 1.999...$
obtenemos $9x = 18$

$$\therefore\ x = \frac{18}{9}$$

Y demostramos que $x = 2$ ó sea que $1.9999... = 2$

Por lo tanto, cada número real en expresión decimal, con una "cola" de ceros puede escribirse también con una "cola" de nueves.

1.000...= 0.9999...
3.14000...= 3.13999...

Ejercicios:

1.- transformar a expresión decimal los siguientes "quebrados"

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{27}{15}$ d) $\frac{3}{48}$ e) $\frac{9}{17}$

2.- Efectuar las operaciones y simplificar

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2} =$ e) $\frac{15}{8}-\frac{3}{4} =$ i) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} =$

b) $\frac{5}{6}+\frac{3}{4} =$ f) $\frac{11}{9}-\frac{7}{5} =$ j) $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} =$

c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3} =$ g) $\frac{6}{18}\cdot\frac{10}{7} =$ k) $\frac{\frac{17}{34}}{\frac{25}{10}} =$

d) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4} =$ h) $\frac{12}{15}\cdot\frac{28}{10} =$ l) $\frac{\frac{8}{3}}{5} =$

3.- Dar dos ejemplos para cada uno de los siguientes enunciados:

a) La suma de dos quebrados puede ser un entero (diferente de uno).

b) El producto de dos fracciones puede ser un entero.

c) El cociente de dos fracciones puede ser un entero.

4.- Mencionar a) un número racional y b) un número irracional comprendido
entre 0.25 y 0.26
entre 0.378 y 0.379
entre 0.53 y 0.54

5.- Transformar a "quebrado" los siguientes:

a) $2.\overline{1}$ d) $0.\overline{522}$ g) $12.\overline{268}$

b) $0.\overline{14}$ e) $5.\overline{2}$ h) $0.\overline{27}$

c) $0.\overline{45}$ f) $4.\overline{25}$ i) $0.4\overline{8}$

6.- Escribir en orden creciente (de menor a mayor)

a) $0.4\overline{5}$, $0.454554545...$, 0.45, 0.4545, $0.\overline{45}$

7.- escribir con "cola" de nueves.

a) 8.4 =

b) 0.28 =

c) 3 =

BIBLIOGRAFIA

1.- "CONCEPTOS MATEMATICOS, UN ENFOQUE HISTORICO"
Margaret f. Willerding
Ed. C.E.C.S.A.

2.- "ANTOLOGIA DE MATEMATICAS I"
Miguel Lara
Ed. U.N.A.M.

3.- "EL REINO DE LOS NUMEROS"
Isaac Asimov
Ed. DIANA

4.- "SISTEMAS DE NUMERACION"
S.V. Fomín
Ed. MIR-MOSCU

5.- "MATEMATICAS: SU CONTENIDO, METODOS Y SIGNIFICATIVO"
CAPITULO I. VISION GENERAL DE LA MATEMATICA
Aleksandrov-Kolmogorov y otros
Ed. MIR-MOSCU
(Alianza Editorial)

6.- "ARITMETICA RAZONADA"
Zubieta y Sánchez
Ed. del Autor

7.- "EL ORIGEN DEL CERO EN LA CIVILIZACION MESOAMERICANA (ANALISIS COMPARATIVO CON EL CASO HINDU)
Sonia Ursini Legovich
Comunicaciones Internas
Fac. Ciencias

8.- "¿QUE ES LA ARITMETICA?"
Fco. Zubieta
Ed. del Autor

9.- "INTRODUCCION A LAS MATEMATICAS"
B. Meserve y M. Subel
Ed. Reverte

10.- "MODELOS MATEMATICOS" Y "LENGUAJES SIMBOLICOS"
S. López de Medrano
Ed. ANUIES

11.- "TEORIA DE CONJUNTOS Y TEMAS AFINES"
Seymour Lipschutz
Mc. Graw Hill

12.- Colección SIGMA: "EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS" Vol. 4
TEXTOS: "CONTAR" por Levi Leonard Conant
"DE LOS NUMEROS A LOS NUMERALES Y DE LOS NUMERALES AL CALCULO"
por David Eugene Smith y Jekuthiel Ginsburg
Antología por James E. Newman
Ed. Grijalvo

13.- Notas Propias