

19
2EJ



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUANTIZACION DE SISTEMAS COVARIANTES:
UNA PRIMERA APROXIMACION

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A:

ROMAN LINARES ROMERO



MEXICO, D. F. FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

1995

FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron EL pasante(s) LINARES ROMERO ROMAN

con número de cuenta 8609251-7 con el Título: "CUANTIZACION DE SISTEMAS COVARIANTES: UNA PRIMERA APROXIMACION"

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de FISICO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
	DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER		
Director de Tesis	DR. MANUEL TORRES LABANSAT		
	DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS		
	DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL		
Suplente	DR. JEMAL JANER GUVEN SEFRV		
Suplente			

Dedico esta Tesis con todo mi cariño y respeto

a mis abuelos José y Benita

por todo lo que me brindaron.

a mis padres por todo su amor y apoyo que me han dado

para poder cumplir mis objetivos.

a mis tíos Beto, Gloria, Víctor, Pepe, Celia y Juana

porque sin ellos no sería lo que soy.

a mis hermanos por todo su cariño.

y, a la persona con la que he convivido
estos años de estudio, mi enojona Emily.

A G R A D E C I M I E N T O S

Expreso mi más profundo agradecimiento al Dr. José David Vergara Oliver por haberme guiado en la elaboración de esta tesis. Durante el tiempo en que fue realizado este trabajo, el Dr. Vergara no solo fue un buen profesor, sino también un gran (y optimista) amigo.

También deseo agradecer a los doctores Luis Fernando Urrutia Ríos, Manuel Torres Labansat, Hugo Aurelio Morales Tecotl y Jemal Jauer Juven Seery por la revisión y las correcciones hechas al texto, las cuales contribuyeron a mejorarlo.

Agradezco, finalmente, al Instituto de Ciencias Nucleares por permitirme el uso de sus instalaciones durante la elaboración de la tesis.

Contenido

Introducción.	ii
1 SISTEMAS HAMILTONIANOS CON CONSTRICCIONES	1
1.1 CONSTRICCIONES HAMILTONIANAS	2
1.1.1 Constricciones primarias	2
1.1.2 Condiciones de regularidad	7
1.1.3 El hamiltoniano canónico	9
1.1.4 Ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana	11
1.1.5 Hamiltoniano total	13
1.1.6 Ecuaciones débiles y fuertes	14
1.1.7 Constricciones secundarias	14
1.1.8 Restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange	16
1.1.9 Funciones de primera clase y segunda clase	17
1.2 TRANSFORMACIONES DE NORMA	18
1.2.1 Transformaciones de Norma	18
1.2.2 El hamiltoniano extendido	20
1.3 EL PARENTESIS DE DIRAC	21

1.3.1	Separación en constricciones de primera y segunda clase	21
1.3.2	Tratamiento de constricciones de segunda clase: un ejemplo	22
1.3.3	Paréntesis de Dirac	23
1.4	FIJACION DE LA NORMA	25
1.4.1	Normas canónicas	25
1.4.2	Número de grados de libertad	27
1.5	FUNCIONES INVARIANTES DE NORMA	27
1.5.1	funciones sobre la superficie de restricción	27
1.5.2	Observables clásicos	28
1.6	EJEMPLOS	28
1.6.1	Partícula libre no relativista	28
1.6.2	Partícula libre relativista	30
1.6.3	Campo electromagnético	31
1.6.4	Modelo de Freedman-Townsend	33
2	INVARIANCIA DE NORMA DE LA ACCION	35
2.1	FORMALISMO HAMILTONIANO	35
2.1.1	Acción Hamiltoniana total	35
2.1.2	Algoritmo de consistencia	36
2.1.3	Número de transformaciones de norma independientes	38
2.2	HAMILTONIANO EXTENDIDO	39
2.2.1	Conjetura de Dirac	39
2.2.2	Un contraejemplo a la conjetura de Dirac	40
2.2.3	Acción extendida	41

2.2.4	Invariancia de norma de la acción hamiltoniana extendida	41
2.3	FORMA LAGRANGIANA DE LAS TRANSFORMACIONES DE NORMA	43
2.3.1	Ecuaciones básicas	43
2.3.2	Soluciones de las ecuaciones básicas	44
2.4	CONTEO DE GRADOS DE LIBERTAD	45
2.5	EJEMPLOS	46
2.5.1	Ejemplo 1	46
2.5.2	Teoría abeliana de Chern-Simons en tres dimensiones	49
3	INTEGRAL DE TRAYECTORIA EN MECÁNICA CUÁNTICA	51
3.1	INTEGRAL DE TRAYECTORIA	51
3.1.1	Integral de trayectoria como un kernel	51
3.1.2	Integral de trayectoria lagrangiana	54
3.1.3	Integral sobre la parte cuadrática	55
3.1.4	Cálculo de determinantes	57
3.2	LA ECUACION DE SCHRÖDINGER	58
3.3	PRODUCTOS CRONOLÓGICOS DE OPERADORES	60
3.4	FUNCIONES DE GREEN	62
3.4.1	Definición de las funciones de Green	62
3.4.2	Generador funcional de las funciones de Green	65
3.5	EJEMPLO	67
3.5.1	Partícula libre no relativista	67
4	CUANTIZACIÓN DE SISTEMAS COVARIANTES	69

4.1	FUNCIONAL GENERADORA	70
4.1.1	Dificultades para cuantizar las teorías de norma	70
4.1.2	Factorización del volumen de norma: un ejemplo simple	72
4.1.3	Fórmula de Faddeev y Popov	78
4.2	SISTEMAS COVARIANTES	79
4.2.1	Descripción general	79
4.2.2	El tiempo como variable canónica	79
4.2.3	Hamiltoniano cero	80
4.2.4	Parametrización y dependencia explícita del tiempo	81
4.3	CUANTIZACION EN EL ESPACIO FASE REDUCIDO	81
4.3.1	Espacio fase reducido	81
4.3.2	Integral de trayectoria en el espacio fase reducido	82
4.3.3	Normas canónicas en el espacio fase reducido	82
4.4	CUANTIZACION BRST-BFV	83
4.4.1	Características generales	83
4.4.2	Formalismo BRST	84
4.4.3	Integral de trayectoria BRST	87
4.4.4	Normas canónicas	89
5	CUANTIZACIÓN DE SISTEMAS COVARIANTES II	91
5.1	PARTÍCULA LIBRE NO RELATIVISTA PARAMETRIZADA	92
5.1.1	Integral de trayectoria en el espacio fase reducido	92
5.1.2	Condiciones de norma canónicas	94
5.1.3	Norma $t=0$	94

5.1.4	Norma $t \approx \tau$	95
5.1.5	Integral de trayectoria BRST	96
5.1.6	Norma $t=0$	97
5.1.7	Norma $t \approx \tau$	98
5.2	GRAVEDAD CUÁNTICA EN 1+1	98
5.2.1	Modelo de Banks-O'Loughlin	98
5.2.2	Comparación con la gravitación	100
5.2.3	Integral de trayectoria en el espacio fase reducido	102
5.2.4	Condiciones de norma canónicas	103
5.2.5	Norma $\sigma \approx \tau$	104
5.2.6	Integral de trayectoria BRST en una norma canónica	105
5.2.7	Norma $\sigma \approx \tau$	106
	Conclusiones.	107
	Bibliografía.	108

Introducción

Después de la exitosa unificación de las interacciones débil y electromagnéticas en una teoría cuántica de campos unificada (Salam y Weinberg, 1967), algunos físicos teóricos se han impuesto la ambiciosa tarea no sólo de incluir las interacciones fuertes en el esquema (Teorías de gran unificación o GUTs), sino se desea incluir las cuatro interacciones conocidas en una teoría cuántica de campos unificada, por ejemplo, en una teoría de supergravedad o en una teoría de supercuerdas. Los intentos hechos hasta ahora para lograr esta unificación no han sido totalmente exitosos.

En la actualidad la opinión de los físicos sobre la viabilidad de las investigaciones en teorías de unificación está dividida. Hay quienes piensan que la "teoría de todo" es sólo una ilusión (*Lo que dios no ha unido no lo unen los físicos*, Pauli), y que la descripción de nuestro mundo físico no se refleja, aun al nivel más básico de la física, por un solo lagrangiano. Por otro lado algunos físicos están convencidos de que la teoría de unificación podra ser establecida algún día.

Una aproximación menos ambiciosa (pero no por ello menos difícil) es cuantizar el campo gravitacional. Una serie de argumentos de índole físico y de matemáticas formales sugiere que todos los campos e interacciones podrian ser tratados de una manera uniforme. Varios intentos se han hecho para alcanzar este objetivo, sin embargo hasta ahora no contamos con una teoría cuántica de la gravedad que sea totalmente satisfactoria.

El hecho que la teoría general de la relatividad sea un *sistema covariante* (un sistema covariante es aquel en el que se considera al tiempo como una variable canónica), ha despertado el interés de muchos físicos en el estudio de los métodos de cuantización de estos sistemas. Muchos avances se han hecho ya en la construcción de métodos eficaces de cuantización, sin embargo los problemas que aún se presentan, son muchos.

Dada la complejidad del problema que representa la cuantización de la gravedad, se ha optado por tratar de entender sistemas físicos mucho más sencillos, que nos den una pauta de como poder resolver el problema más general. El objetivo de la tesis sigue esta línea.

Para la elaboración de la tesis hemos seleccionado dos sistemas covariantes, estos son:

- Partícula libre no relativista parametrizada.
- Modelo de Banks-O'Loughlin de gravedad en 1+1 dimensiones.

El objetivo específico de la tesis es calcular el propagador para cada uno de estos sistemas en dos normas canónicas diferentes.

Un *sistema covariante* puede ser pensado como un caso particular de las llamadas *teorías de norma*. Una *teoría de norma* se distingue por tener un lagrangiano singular (un lagrangiano (L) singular es aquel para el cual $\det(\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) = 0$) lo cual tiene como consecuencia que al pasar al formalismo hamiltoniano de la teoría, aparezcan con- stricciones (una constricción es una relación entre las variables canónicas). A pesar de

que consideraciones naturales permiten una cuantización correcta de la electrodinámica, la cual es una teoría de norma, una aplicación no crítica de un esquema de cuantización análogo en casos más complicados puede producir resultados físicamente inadmisibles.

En este sentido, *la cuantización de sistemas covariantes* cae en el interés del problema más general de la *cuantización de teorías de norma*. El esquema de cuantización más consistente y mejor desarrollado hasta la fecha es el basado en la formulación hamiltoniana.

El análisis clásico y las ideas básicas de cuantización de dichos sistemas fueron presentadas en el artículo pionero de *Dirac* (1950). *Faddeev* sugirió el método de cuantización y construcción de la integral funcional para teorías con constricciones lineales en los momentos y de primera clase, en normas canónicas. Después *Fradkin* consideró la cuantización de teorías con constricciones de primera y segunda clase en dichas normas y su extensión al caso de variables de Grassman.

Enfatizamos que a pesar de que el método de cuantización canónica (tratamiento hamiltoniano) tiene ventajas esenciales (usando este método uno puede controlar fácilmente importantes propiedades de la teoría cuántica tales como unitaridad y métricas positivamente definidas), este no es manifiestamente covariante. Las formulaciones covariantes de la teoría cuántica son más convenientes en la práctica. Ellas pueden también ser obtenidas por el método de cuantización canónica. Así, *Fradkin*, *Fradkinu*, *Vilkovisky*, *Batalin* y *Vasiliev* trataron la cuantización de sistemas hamiltonianos con constricciones en las llamadas normas relativistas. En la construcción de la formulación de operadores por el método de cuantización canónica surgen problemas conectados con el ordenamiento de operadores. La solución a estos problemas de ordenamiento sigue siendo un problema abierto.

Un método alternativo de cuantización de las teorías de norma es la cuantización lagrangiana, esta formulación es manifiestamente covariante. Para teorías invariantes bajo grupos de Lie, las reglas de cuantización lagrangiana fueron formuladas por *De Witt*, *Faddeev*, *Popov* y *Mandelstam*. En la literatura estas reglas son conocidas las reglas de *Faddeev* y *Popov*.

En el caso general del método de cuantización Lagrangiana, algunas de las preguntas esenciales permanecen sin respuesta, tales como la prueba de unitaridad de una teoría cuántica obtenida por este método y su relación con la teoría obtenida por cuantización canónica.

En este trabajo hacemos una revisión introductoria a la cuantización de sistemas covariantes en la *formulación hamiltoniana utilizando integral de trayectoria*. Cabe señalar que aunque el método de operadores es considerado como el método de cuantización correcto, utilizamos el método de cuantización con integral de trayectoria por ser un método sencillo y formalmente correcto en el tratamiento de los sistemas de norma (y por lo tanto de sistemas covariantes), además de que nos provee de una visión clara de la física del problema.

El objetivo de hacer la cuantización en una norma canónica para uno de los dos sistemas que se trabajan en esta tesis, nace de la inquietud de mostrar en un ejemplo específico con interacción (*modelo de Banks-O'Loughlin*), que contrario a lo que se creía (*Teitelboim* (1982)), *es posible cuantizar un sistema covariante en una norma canónica*

(Henneaux, Teitelboim y Vergara (1992)), ya que para avalar esta última afirmación, sólo se han presentado ejemplos en los que no hay interacción. Esto es lo que consideramos la mayor contribución de esta tesis.

En los cinco capítulos que forman el presente trabajo, se ha pretendido hacer un planteamiento, desarrollo y solución al problema mencionado de la manera más autocontenida posible. La tesis está organizada de la siguiente manera: El capítulo uno es introductorio. Este da la definición de teorías de norma y muestra que un sistema de norma es siempre un sistema hamiltoniano con constricciones. Algunos de los conceptos que se presentan en este capítulo se ilustran con ejemplos sencillos.

En el segundo capítulo se discute un método sistemático para obtener las transformaciones de norma de un lagrangiano dado y un criterio preciso para contar los grados de libertad efectivos a partir de las transformaciones. Además se da una prueba de la conjetura de Dirac bajo ciertas restricciones. El capítulo finaliza con ejemplos particulares.

El capítulo tres está dedicado a dar una introducción a la formulación de integral de trayectoria de la mecánica cuántica, el desarrollo se hace en la representación de coordenadas (que es la más usual). Se muestra también la relación entre esta formulación y la ecuación de Schrödinger.

En el capítulo cuatro se muestra la dificultad que se encuentra para cuantizar las teorías de norma poniendo como ejemplo el caso electromagnético. De manera detallada se factoriza el volumen de norma para un caso particular, generalizando el resultado después hasta obtener la solución que *Faddeev y Popov* dieron a esta dificultad de cuantización. Además se define lo que se entiende por un sistema covariante y se discuten dos de los métodos que existen para su cuantización, estos son: *el método del espacio fase reducido y el método BRST-BFV*.

Como corolario, en el capítulo cinco se cuantizan 2 sistemas covariantes, *la partícula libre no relativista parametrizada y el modelo de Banks-O'Loughlin de gravedad en 2-dimensiones*, ambos sistemas se cuantizan en dos diferentes normas canónicas.

Capítulo 1

SISTEMAS HAMILTONIANOS CON CONSTRICCIONES

Una teoría de norma puede ser pensada como una teoría en la cual las variables dinámicas se especifican con respecto a un "sistema de referencia local" cuya elección es arbitraria en todo instante de tiempo. Las variables que son físicamente importantes son aquellas que no dependen de la elección del sistema de referencia local. Una transformación de las variables, inducida por un cambio en el sistema de referencia arbitrario, es llamada una transformación de norma. Se dice entonces que las variables físicas ("observables") son invariantes de norma.

En una teoría de norma, uno no puede esperar que las ecuaciones de movimiento determinen los valores de todas las variables dinámicas para todos los tiempos si las condiciones iniciales son dadas, debido a que siempre es posible cambiar el sistema de referencia en el futuro aún cuando las condiciones iniciales estén fijas, por lo consiguiente, una distinta evolución temporal puede obtenerse partiendo de las mismas condiciones iniciales. Así, una propiedad intrínseca de las teorías de norma es que *la solución general de las ecuaciones de movimiento contiene funciones arbitrarias del tiempo*.

El tratamiento más sencillo y directo de los sistemas de norma es aquel que proviene de la formulación hamiltoniana, misma con la que empezaremos este trabajo. Aún cuando uno puede correctamente considerar a la formulación hamiltoniana como la más fundamental, comenzaremos la discusión por asumir que el principio de acción es dado en forma lagrangiana, pasando después a partir de ahí, a la formulación hamiltoniana. Haremos ésto así, porque es la situación más usual en la práctica.

Veremos que la presencia de funciones arbitrarias del tiempo en la solución general de las ecuaciones de movimiento implica que las variables canónicas no son todas independientes, más aún, veremos que hay relaciones entre ellas llamadas constricciones. Así, un

sistema de norma es siempre un sistema hamiltoniano con constricciones. Sin embargo, la afirmación inversa no es válida. No todas las constricciones de un sistema Hamiltoniano provienen de una invariancia de norma. El análisis que desarrollaremos cubrirá no obstante, todos los tipos de constricciones.

1.1 CONSTRICCIONES HAMILTONIANAS

1.1.1 Constricciones primarias

El punto de partida para discutir el formalismo canónico de los sistemas con constricciones será el principio de mínima acción en forma Lagrangiana.

La expresión más general posible de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico viene dada por el llamado principio de mínima acción. Este principio se basa en el hecho de que cada sistema mecánico es caracterizado por una función

$$L = L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

llamada función lagrangiana, donde las q^i y \dot{q}^i representan las coordenadas y las velocidades generalizadas del sistema. Esta función puede no ser única como en el caso de los lagrangianos equivalentes (ver por ejemplo Matzner and Shepley (1991)), los cuales a pesar de ser diferentes funciones y de dar lugar a diferentes ecuaciones de movimiento describen la misma dinámica.

Con esta función lagrangiana, se define la funcional de acción S_L como

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) dt. \quad (1.2)$$

El principio de mínima acción señala que las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico en consideración, son aquellas que se obtienen al hacer que la acción S_L sea estacionaria bajo variaciones $\delta q^i(t)$ de las variables lagrangianas $q^i(t)$, cuando dichas variaciones se anulan en los extremos t_1, t_2

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0. \quad (1.3)$$

Deduscamos pues, las ecuaciones que se obtienen al aplicar el principio de mínima acción a la funcional S_L .

Sea $q^i = q^i(t)$ el conjunto de las N funciones para las cuales S_L tiene un valor estacionario. Esto significa que el valor de S_L cambiará, si las funciones q^i se substituyen por cualesquiera N funciones de la forma

$$q^i + \delta q^i. \quad (1.4)$$

La variación de S_L cuando se hace este remplazo de funciones es

$$S'_L - S_L = \int_{t_1}^{t_2} [L(q^i + \delta q^i, \dot{q}^i + \delta \dot{q}^i, t) - L(q^i, \dot{q}^i, t)] dt, \quad (1.5)$$

donde puede notarse que no se está variando el tiempo.

Haciendo un desarrollo en serie de la diferencia bajo el signo de integral en potencias de δq^i y $\delta \dot{q}^i$, y tomando en cuenta que la condición de que S_L sea estacionaria sólo impone restricciones sobre la primer potencia del desarrollo, se obtiene que el principio de mínima acción puede expresarse como

$$S'_L - S_L \approx \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right] dt = 0, \quad (1.6)$$

si se toma en cuenta que $\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \delta q^i$ dado que no existe variación temporal, y se integra por partes la expresión anterior, se obtiene

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i dt. \quad (1.7)$$

En virtud de las condiciones (1.3) el término $(\partial L / \partial \dot{q}^i) \delta q^i$ se anula, quedando así solo el término que contiene a la integral. Este último término debe anularse para toda δq^i y esto sucede únicamente si el integrando es idénticamente nulo, es decir, si

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad (1.8)$$

Estas son las condiciones que hacen a la acción estacionaria y por lo tanto constituyen las ecuaciones de movimiento del sistema. Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Escribiendo en una forma más explícita estas ecuaciones tenemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j. \quad (1.9)$$

De esta ecuación se desprende como consecuencia inmediata que las aceleraciones \ddot{q}^j a un tiempo dado, están únicamente determinadas por las posiciones y las velocidades a ese tiempo, si y sólo si la matriz $W_{ij} \equiv (\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j)$ puede ser invertida, o expresado de otra manera, si y sólo si el determinante

$$\det(W_{ij}) \equiv \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0. \quad (1.10)$$

Si por otro lado el $\det(W_{ij}) = 0$ ¹, se tiene que no todas las aceleraciones pueden

¹en dicho caso hablaremos de lagrangianos singulares

ser determinadas por las posiciones y las velocidades, y la solución de las ecuaciones de movimiento pueden entonces contener funciones arbitrarias del tiempo.

Analícemos con más detenimiento, ésto último que hemos mencionado.

Si la matriz W_{ij} es singular, el rango R que se obtiene para dicha matriz bajo la consideración de que todas las variables $q_1, \dots, q_i, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i$ son independientes entre sí, es menor que N , en consecuencia existen $N - R$ vectores propios nulos $\lambda_a^i(q^k, \dot{q}^k)$ linealmente independientes ²

$$\lambda_a^i(q^k, \dot{q}^k)W_{ij}(q^k, \dot{q}^k) = 0, \quad a = 1, 2, \dots, N - R, \quad (1.11)$$

y de la ecs. (1.9) ³ se obtiene

$$\lambda_a^i(q^k, \dot{q}^k)W_{ij}(q^k, \dot{q}^k)\ddot{q}^j = \lambda_a^i(q^k, \dot{q}^k)\alpha_i(q^k, \dot{q}^k) = 0, \quad (1.12)$$

como en general las aceleraciones $\ddot{q}^j \neq 0$ entonces concluimos que

$$\lambda_a^i(q^k, \dot{q}^k)\alpha_i(q^k, \dot{q}^k) = 0. \quad (1.13)$$

Estas relaciones entre las coordenadas y las velocidades son llamadas constricciones en el sentido lagrangiano, ellas son consecuencia de las ecuaciones de movimiento y son idénticamente satisfechas, por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange determinan completamente el movimiento del sistema.

Dado que el rango de la matriz W_{ij} es R , podemos usar las ecuaciones de movimiento (1.9) para expresar R de las aceleraciones en términos de las restantes $N - R$ aceleraciones, de las N coordenadas y de las N velocidades. Sin pérdida de generalidad, supongamos que podemos resolver para $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_R$. Tendremos entonces R ecuaciones de la forma

$$\ddot{q}_r = f_r(q_1, \dots, q_R; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_R; q_{R+1}, \dots, q_N; \dot{q}_{R+1}, \dots, \dot{q}_N; \ddot{q}_{R+1}, \dots, \ddot{q}_N), \quad (1.14)$$

con $r = 1, \dots, R$.

Las soluciones de las ecuaciones de movimiento pueden por tanto ser descritas como sigue; elegimos un conjunto de $N - R$ funciones arbitrarias del tiempo para las coordenadas q_{R+1}, \dots, q_N ; asignamos después un conjunto arbitrario de valores a $t = 0$ para las coordenadas q_1, \dots, q_R y $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_R$ ⁴, entonces a partir de las ecs. (1.14) las R coordenadas q_1, \dots, q_R estarán unívocamente determinadas para todos los tiempos.

Así, la característica cualitativa más importante en este análisis es la aparición de funciones arbitrarias del tiempo en la solución general de las ecuaciones de movimiento. Esta es una característica general de la dinámica para los sistemas con constricciones, y por lo tanto, el caso de interés para sistemas con grados de libertad de norma, es aquel para el cual W_{ij} no puede ser invertida.

² para mayor facilidad en la escritura, en lo sucesivo se omitirán todas las dependencias explícitas de t

³ $\alpha_i(q^k, \dot{q}^k) \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$

⁴ claro está que estos valores deben ser físicamente significativos

El punto de partida para pasar al formalismo hamiltoniano a partir del formalismo lagrangiano, es definir unas nuevas variables p_i llamadas momentos canónicos

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (1.15)$$

En la teoría dinámica estándar ⁵ se considera el caso en el cual las velocidades pueden escribirse como funciones que dependen exclusivamente de las coordenadas y los momentos, sin embargo se sigue de la definición (1.15) que

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \quad (1.16)$$

y por lo tanto, si permitimos que $\det(W_{ij}) = 0$ se tiene que la consideración usual ya no es válida, debido a que esta relación es precisamente la condición de no invertibilidad de las velocidades como funciones de las coordenadas y los momentos. En otras palabras, si el lagrangiano de nuestro sistema es singular, entonces los momentos canónicos no son todos independientes entre sí, y por lo tanto existen ciertas relaciones entre ellos, estas relaciones son del tipo

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (1.17)$$

las cuales se siguen de la definición (1.15) del momento canónico.

Cuando los momentos p_i son reemplazados por su definición en términos de las coordenadas q^i y las velocidades \dot{q}^i en las relaciones (1.17), éstas se reducen a una identidad. Estas ecuaciones son llamadas *constricciones primarias* para enfatizar que las ecuaciones de movimiento no son usadas para obtenerlas y que ellas no implican restricciones sobre las coordenadas q^i y sus velocidades \dot{q}^i .

De aquí en adelante supondremos por simplicidad, (i) que el rango de la matriz W_{ij} es constante en todo el espacio (q^i, \dot{q}^i) , (ii) que las constricciones (1.17) son independientes entre sí y (iii) que estas definen una subvariedad suave embebida en el espacio fase. Esta subvariedad es conocida como la *superficie de constricciones primarias*.

Dichas suposiciones las haremos para evitar que la exposición sea más larga y menos clara. La extensión al caso de constricciones dependientes (caso reducible) es directa y sigue la misma línea que el caso irreducible. Esta extensión puede encontrarse en (Henneaux and Teitelboim (1992)). Al final de este capítulo, será expuesto un ejemplo en el cual las constricciones son dependientes.

Si el rango de W_{ij} es R , entonces existirán $N - R \equiv M$ relaciones independientes $\phi_m(q^i, p_i) = 0$ y la superficie de constricciones será una subvariedad del espacio fase de dimensión $2N - M$.

Visto esto en una forma más intuitiva, lo que se tiene es un mapeo del espacio (q^i, \dot{q}^i) el cual constituye una subvariedad de dimensión $2N$, a una subvariedad del espacio fase, de dimensión $2N - M$ mediante la relación $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$. Así entonces, dado un punto

⁵para la cual se tiene un lagrangiano no-singular

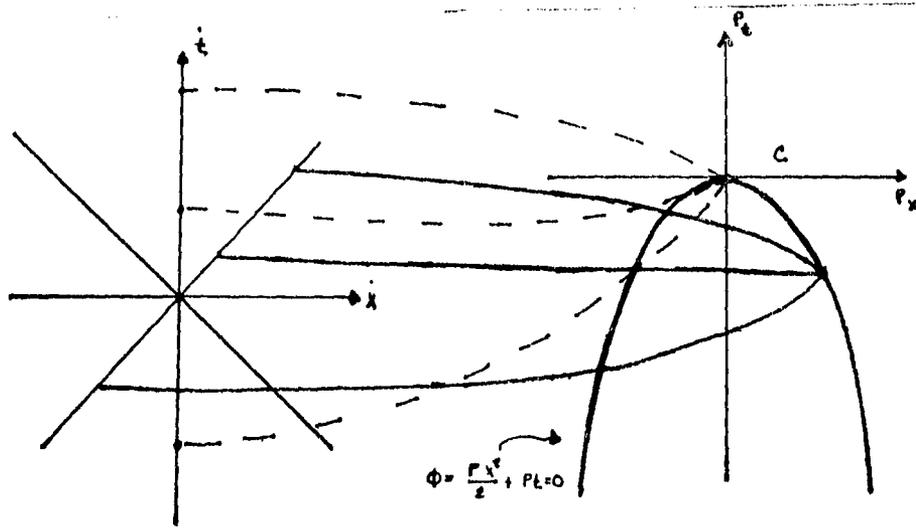


Figura 1.1: La figura muestra el ejemplo de un sistema con dos coordenadas $q^1 = x$, $q^2 = t$ y lagrangiano $L = \dot{x}^2/2t$. Los momentos son $p_x = \dot{x}/t$ y $p_t = (-1/2)(\dot{x}/t)^2$. La ecuación de movimiento es $\dot{x}/t = \text{cte}$. Hay una restricción primaria $\phi = (p_x^2/2) + p_t = 0$. Todo el espacio \dot{q} es mapeado sobre la parábola $(p_x^2/2) + p_t$ del espacio p . Más aún, todas las velocidades \dot{q} sobre la línea $\dot{x} = ct$ son mapeadas al mismo punto $p_x = c = (-2p_t)^{1/2}$ perteneciente a la superficie de restricción $\phi = 0$. La transformación $\dot{q} \rightarrow p$ no es uno a uno ni sobre. Para tener una transformación invertible, uno necesita adicionar parámetros extras a los momentos p_i (ver abajo).

(q^i, p_i) que satisface las restricciones (1.17), se tiene que su "imagen inversa" (q^i, \dot{q}^i) que satisface la definición (1.15) no es única, por lo que la imagen inversa de un punto dado de (1.17) forma una variedad de dimensión M (ver fig.1). Por consiguiente, para hacer que las transformaciones del espacio (q^i, \dot{q}^i) al espacio fase (q^i, p_i) sean univalueadas, es necesario introducir al menos M parámetros extras en la teoría que indiquen la ubicación de las velocidades \dot{q}^i en la variedad inversa. Como veremos después, estos parámetros aparecerán como multiplicadores de Lagrange cuando definamos el hamiltoniano y estudiemos sus propiedades.

1.1.2 Condiciones de regularidad

Existen muchas maneras equivalentes de representar a una superficie de constricción dada, mediante ecuaciones de la forma $\phi_m(q^i, p_i) = 0$.

Por ejemplo, dada la superficie de constricción

$$p_1 = 0, \quad (1.18)$$

podríamos escribir a ésta en una forma equivalente como

$$p_1^2 = 0, \quad (1.18b)$$

o como

$$\sqrt{|p_1|} = 0, \quad (1.19c)$$

o aún en una forma que sea más redundante,

$$p_1 = 0, \quad p_1^2 = 0. \quad (1.19d)$$

Sin embargo, para poder pasar al formalismo hamiltoniano, es necesario imponer ciertas restricciones en la elección de la representación de las constricciones ϕ_m , estas restricciones juegan un papel muy importante en el formalismo hamiltoniano de los sistemas con constricción y son conocidas como las *condiciones de regularidad*.

Estas condiciones pueden ser establecidas como sigue; la superficie de constricción $\phi_m = 0$ de dimensión $2N - M$ puede ser cubierta por regiones abiertas, sobre cada una de las cuales "localmente", la matriz jacobiana $\partial(\phi_m)/\partial(q^i, p_i)$ es de rango M .

La condición sobre la matriz jacobiana $\partial(\phi_m)/\partial(q^i, p_i)$ puede ser formulada de varias maneras alternativas, como:

1. Las funciones ϕ_m pueden ser tomadas localmente, como las primeras M coordenadas de un nuevo sistema coordenado regular, en la vecindad de la superficie de constricción.
2. Localmente los gradientes $d\phi_1, \dots, d\phi_M$ son linealmente independientes sobre la superficie de constricción.
3. Las variaciones $\delta\phi_m$ son de orden ϵ para variaciones arbitrarias δq^i y δp_i de orden ϵ (terminología de Dirac).

Regresemos al ejemplo de la superficie de constricción $p_1 = 0$, y apliquemosle a ésta las condiciones de regularidad.

Bajo la condición sobre la matriz jacobiana, se tiene que $\partial(p_1)/\partial(q^i, p_i)$ es de rango 1, y $p_1^2 = 0$, es una consecuencia inmediata de $p_1 = 0$, por lo que (1.18a) y (1.18d) son

buenas representaciones de la superficie de constricción. Pero por otro lado ni (1.18b) ni (1.18c) son representaciones admisibles debido a que el rango de la matriz $\partial(p_i^2)/\partial(q^i, p_i)$ se anula en $p_i = 0$, mientras que la matriz $\partial(\sqrt{|p_i|})/\partial(q^i, p_i)$ es singular ahí.

Veamos que las formulaciones alternativas de las condiciones de regularidad nos llevan a las mismas conclusiones que acabamos de obtener, al aplicarlas al mismo ejemplo.

Consideremos la primera alternativa; en este caso para que las funciones ϕ_m puedan ser tomadas localmente como las coordenadas de un sistema coordenado regular, debe existir un mapeo uno a uno entre por lo menos un abierto que contenga a la localidad en donde se quiera construir el nuevo sistema coordenado y el propio sistema coordenado. Con la superficie de constricción $p_i = 0$ es posible construir este mapeo uno a uno, gracias a la linealidad de la función $p_i = 0$, y dado que $p_i^2 = 0$ es una consecuencia inmediata de $p_i = 0$, tenemos que (1.18a) y (1.18d) son buenas representaciones de la superficie de constricción. No sucede lo mismo con (1.18b) ni con (1.18c), dado que p_i y $-p_i$ se mapean con p_i^2 y esto no constituye un mapeo uno a uno, lo mismo sucede con $\sqrt{|p_i|}$, ya que p_i y $-p_i$ se mapean con $\sqrt{|p_i|}$.

La segunda alternativa, no es más que una consecuencia de la condición sobre la matriz jacobiana, ya que como es sabido del álgebra lineal, si la matriz jacobiana es de rango M , hay M renglones de la matriz que son linealmente independientes entre sí, y cada renglón esta constituido por las componentes de un gradiente.

Analicemos la tercera formulación; las variaciones arbitrarias δq^i y δp_i de orden ϵ sobre la superficie $p_i = 0$ nos dan como resultado $\delta p_i = 0$ siendo δp_i de orden ϵ , y nuevamente, dado que $p_i^2 = 0$ es una consecuencia inmediata de $p_i = 0$, concluimos que (1.18a) y (1.18d) son buenas representaciones de la superficie de constricción. Por otro lado, la variación sobre la superficie $p_i^2 = 0$ nos da como resultado $2p_i \delta p_i = 0$ pero como $p_i = 0$, tenemos que la variación es 0, lo cual evidentemente no es de orden ϵ . Así mismo, la variación sobre la superficie $\sqrt{|p_i|} = 0$ es $\frac{1}{2}(|p_i|)^{-1/2} \delta p_i = 0$, y dado que $|p_i| = 0$ la variación es singular. Por lo tanto se concluye que (1.18b) y (1.18c) no son buenas representaciones de la superficie de constricción.

Señalemos dos propiedades que son válidas para las funciones de constricción ϕ_m , cuando éstas satisfacen las condiciones de regularidad. Estas propiedades serán de utilidad en el desarrollo de la teoría.

Teorema 1. Si una función suave G del espacio fase, se anula sobre la superficie $\phi_m = 0$ entonces $G = g^m \phi_m$ para algunas funciones g^m .

Teorema 2. Si $\lambda_i \delta q^i + \mu^i \delta p_i = 0$ para variaciones arbitrarias $\delta q^i, \delta p_i$ tangentes a la superficie de constricción, entonces

$$\lambda_i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \quad y \quad \mu^i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}$$

para algunas u^m . Estas igualdades son válidas sobre la superficie (1.17).

La prueba del primer teorema se basa en el hecho de que uno puede elegir localmente las funciones de restricción ϕ_m , como las coordenadas de un sistema coordenado regular (y_m, x_α) , con $y_m \equiv \phi_m$. En estas coordenadas uno tiene, dado que $G(0, x) = 0$,

$$G(y, x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(ty, x) dt = y_m \int_0^1 G_{,m}(ty, x) dt$$

y así

$$G = g^m \phi_m$$

con $g^m = \int_0^1 G_{,m}(ty, x) dt$ y $\bar{g}^m = 0$. La prueba de este teorema sobre todo el espacio fase puede consultarse en (Henneaux and Teitelboim (1992)).

La prueba del segundo teorema es basada sobre la observación de que la superficie de restricción es de dimensión $(2N - M)$, y por consiguiente, las variaciones $\delta q^i, \delta p_i$ en un punto, forman un espacio vectorial de dimensión $(2N - M)$. Así existen exactamente M soluciones independientes de $\lambda_i \delta q^i + \mu^i \delta p_i = 0$. Por las condiciones de regularidad, los M gradientes $(\partial \phi_m / \partial q^i, \partial \phi_m / \partial p_i)$ de las restricciones, son linealmente independientes. Dado que estos gradientes son claramente una solución de $\lambda_i \delta q^i + \mu^i \delta p_i = 0$ para variaciones tangentes, ellos constituyen una base de soluciones y el teorema 1.2 es válido.

1.1.3 El hamiltoniano canónico

El próximo paso en el análisis, es introducir el llamado hamiltoniano canónico H , el cual se define mediante la expresión

$$H \equiv \dot{q}^i p_i - L. \quad (1.19)$$

Bajo esta definición se tiene que H es una función de las coordenadas y de las velocidades. No obstante, si hacemos una variación de H en las variables q^i y \dot{q}^i el resultado es

$$\begin{aligned} \delta H &= \dot{q}^i \delta p_i + (\delta \dot{q}^i) p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Se obtiene así que esta variación sobre H envuelve únicamente las variaciones de las coordenadas y los momentos. Las variaciones en las velocidades se anulan debido a la definición que hemos hecho del momento en términos de la función lagrangiana, ésta es la característica que hace interesante a la función hamiltoniana. Aquí la variación de los momentos no es una variación independiente, ya que puede ser vista como una combinación lineal de la variación de las coordenadas y la variación de las velocidades, pero

dado que en (1.20) la variación de las velocidades aparece únicamente en combinaciones lineales precisas y no en otra manera, se puede concluir que la función hamiltoniana es una función que depende sólo de las coordenadas q^i y los momentos p_i .

Sin embargo, el hamiltoniano canónico definido en (1.19) no está únicamente determinado como una función de las coordenadas y los momentos, ésto puede ser entendido si nos damos cuenta de que las variaciones de los momentos en (1.20) no son todas independientes, ya que están restringidas a preservar las constricciones primarias $\phi_m = 0$.

Esto nos lleva a la conclusión de que el hamiltoniano canónico está bien definido sólo sobre la subvariedad determinada por las constricciones primarias y por lo tanto puede ser extendido arbitrariamente fuera de dicha subvariedad, de ésto se sigue que el formalismo permanece sin cambios si se reemplaza al hamiltoniano canónico, por este mismo hamiltoniano más alguna combinación lineal de las constricciones

$$H^* = H + c^m(q^i, p_i)\phi_m, \quad (1.21)$$

veremos que éste es realmente el caso a considerar.

Dado que el hamiltoniano H puede considerarse como una función que depende únicamente de las coordenadas q^i y de los momentos p_i , la variación de H se puede expresar en términos de estas variables como

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i, \quad (1.22)$$

con la ayuda de esta ecuación, se puede reescribir la ec. (1.20) como

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}^i \right) \delta p_i = 0, \quad (1.23)$$

de lo cual uno infiere utilizando el teorema 1.2 que

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \quad (1.24)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_q = \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_p + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \quad (1.24b)$$

La primera de estas ecuaciones es particularmente importante porque nos muestra que las velocidades \dot{q}^i pueden ser recuperadas del conocimiento de los momentos p_i sujetos a las constricciones (1.17) y de los M parámetros extras u^m . Así pues, podemos tomar como nuestras variables dinámicas básicas, las coordenadas, los momentos y los parámetros u^m , en lugar de las coordenadas y las velocidades. Estos parámetros extras u^m pueden ser considerados como coordenadas sobre la superficie de las imágenes de una \dot{q}^i dada.

Dado que estamos considerando a las constricciones como independientes, los vectores $\frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}$ son también independientes sobre la superficie de constricción debido a las condiciones de regularidad. Así, dos diferentes conjuntos de u^m no pueden llevarnos a las mismas

velocidades en (1.24). Esto significa que las u^m pueden, en principio, ser expresadas como funciones de las coordenadas y las velocidades si se resuelven las ecuaciones

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p(q, \dot{q})) + u^m(q, \dot{q}) \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}(q, p(q, \dot{q})). \quad (1.25)$$

Si definimos la transformación de Legendre del espacio (q^i, \dot{q}^i) a la superficie $\phi_m = 0$ del espacio (q^i, p_i, u^m) por medio de

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}), \\ u^m &= u^m(q, \dot{q}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

vemos que esta transformación entre espacios de la misma dimensionalidad $2N$ es invertible, dado que uno tiene

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \\ \phi_m(q^i, p_i) &= 0, \end{aligned} \quad (1.26b)$$

Así, las ecs. (1.26b) implican las (1.26) y viceversa. El análisis que se ha hecho, muestra claramente que si se quiere que las transformaciones de Legendre sean invertibles cuando $\det(\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) = 0$, se tienen que adicionar variables extras.

Se debe mencionar que la discusión precedente tiene validez sólo a nivel local, ya que la ec. (1.24) se obtiene del teorema 1.2. Apartir de este punto, asumiremos que las transformaciones (1.26) son de validez global, esto implica en particular, que el hamiltoniano H puede ser globalmente definido como una función de las coordenadas y los momentos por medio de (1.19) y no es multivaluado.

1.1.4 Ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana

Las ecs. (1.24) nos llevan a escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.8) en la forma hamiltoniana equivalente

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \quad (1.27)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \quad (1.27b)$$

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0. \quad (1.27c)$$

Que las ecs. (1.27) se siguen de (1.8), es una consecuencia directa de (1.25) y de la definición del momento en términos de las velocidades. Inversamente, que las ecs. (1.27) implican (1.8), resulta del hecho de que (1.27a) y (1.27c) nos llevan a que $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$. Cuando esta relación es insertada en (1.27 b), y (1.24b) es tomada en cuenta, uno obtiene las ecuaciones de movimiento lagrangianas originales.

Es conveniente para el desarrollo siguiente de la teoría expresar las ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana en términos de los paréntesis de Poisson, los cuales son definidos de manera usual como

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}, \quad (1.28)$$

donde F y G son funciones que dependen de las posiciones y los momentos. Estos paréntesis cumplen ciertas propiedades que son consecuencia de su definición.

El paréntesis es antisimétrico en F y G

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad (1.29)$$

es lineal en ambos miembros

$$\{F_1 + F_2, G\} = \{F_1, G\} + \{F_2, G\}, \quad (1.29b)$$

y satisface la ley del producto

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2. \quad (1.29c)$$

Entre los paréntesis de Poisson formados por tres funciones, existe la relación

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0, \quad (1.29d)$$

llamada identidad de Jacobi.

Para cualquier función F que depende de las coordenadas y los momentos, se tiene

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i. \quad (1.30)$$

Si se substituyen en esta ecuación las ecuaciones de movimiento (1.27) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \right) \\ &= \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Así por ejemplo

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} + u^m \{p_i, \phi_m\} \quad \text{y} \quad \dot{q}^j = \{q^j, H\} + u^m \{q^j, \phi_m\} \quad (1.32)$$

son las ecuaciones de movimiento hamiltonianas escritas en términos del formalismo de los paréntesis de Poisson.

1.1.5 Hamiltoniano total

La ecuación (1.31) puede ser escrita en una forma aún más concisa si extendemos un poco la noción de paréntesis de Poisson. De la definición (1.28) se sigue que los paréntesis están definidos únicamente para funciones que dependen de las coordenadas y los momentos. Si se tiene una función más general tal como una velocidad, la cual no pueda ser expresable en términos de las coordenadas y los momentos, entonces esta velocidad no puede tener un paréntesis de Poisson con ninguna cantidad. Si nosotros extendemos la noción de paréntesis de Poisson y suponemos que éstos existen para cualesquiera dos cantidades y, también suponemos que los paréntesis conservan su estructura y las propiedades (1.29), pero que sin embargo no pueden ser determinados cuando las funciones no dependen de los momentos y las coordenadas, entonces podemos reescribir la ec. (1.31) de la siguiente manera

$$\dot{F} = \{F, H + u^m \phi_m\}. \quad (1.33)$$

En esta expresión los coeficientes u^m aparecen dentro de los paréntesis de Poisson, pero como se ha visto anteriormente, estos coeficientes en general son funciones de las coordenadas y las velocidades, y no de las coordenadas y los momentos. Esto implica que no podemos utilizar la definición (1.28) para calcular el paréntesis de Poisson de la ec. (1.33).

Sin embargo, gracias a la extensión que hemos hecho del concepto de paréntesis de Poisson tenemos

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H + u^m \phi_m\} = \{F, H\} + \{F, u^m \phi_m\} \\ &= \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\} + \{F, u^m\} \phi_m, \end{aligned}$$

el paréntesis $\{F, u^m\}$ en la expresión anterior, no está bien definido, pero dado que está multiplicado por algo que se anula en la superficie de restricción, entonces el término $\{F, u^m\} \phi_m$ se anula, quedándonos que

$$\dot{F} = \{F, H + u^m \phi_m\} = \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\},$$

lo cual muestra la equivalencia entre (1.31) y (1.33). La función

$$H_T = H + u^m \phi_m \quad (1.34)$$

es llamada *hamiltoniano total*, notemos que los coeficientes u^m aparecen ahora como multiplicadores de Lagrange. En términos de este hamiltoniano total, las ecuaciones de movimiento se expresan de manera simple

$$\dot{F} = \{F, H_T\}. \quad (1.35)$$

1.1.6 Ecuaciones débiles y fuertes

Hay un punto en el que tenemos que ser cuidadosos cuando trabajamos dentro del formalismo de los paréntesis de Poisson.

Nosotros tenemos las ecuaciones de restricción (1.17), pero éstas no deben ser utilizadas antes de trabajar con los paréntesis de Poisson, dado que si hicieramos esto, entonces el término $\{F, \phi_m\}$ sería siempre igual a cero. Así entonces, tomaremos como una regla que los paréntesis de Poisson deben ser evaluados antes de hacer uso de las restricciones y, para recordar esta regla en el formalismo, introduciremos el símbolo " \approx " (el cual leeremos como: *débilmente igual*) para las ecuaciones de restricción. Con este símbolo ellas son escritas de la siguiente manera

$$\phi_m \approx 0, \quad (1.36)$$

esta notación enfatiza el hecho de que la cantidad ϕ_m es numéricamente restringida a ser cero, pero que no es idénticamente nula en todo el espacio fase.

En una manera más general, si tenemos dos funciones F y G que coinciden en la subvariedad definida por las restricciones $\phi_m \approx 0$, se dice entonces que las dos funciones son *débilmente iguales* entre sí, $F \approx G$. Por otro lado, si una ecuación es válida en todo el espacio fase y no sólo sobre la subvariedad $\phi_m \approx 0$, decimos que esta ecuación es *fuerte* y el símbolo usual de igualdad " $=$ " es utilizado. Así por el teorema 1

$$F \approx G \Rightarrow F - G = \epsilon^m(q, p)\phi_m. \quad (1.37)$$

Con esta nueva notación que hemos introducido, la expresión para la ecuación (1.35) es:

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \quad (1.38)$$

1.1.7 Restricciones secundarias

Examinemos ahora algunas de las consecuencias de las ecuaciones de movimiento (1.31). Un requerimiento de consistencia básico en la teoría, es que las restricciones primarias ϕ_m sean preservadas en el tiempo. Nosotros podemos tomar las ecuaciones (1.31) o (1.38) y poner a G como una de las restricciones ϕ_m , entonces por consistencia, tendremos que $\dot{\phi}_m \approx 0$, lo cual produce la siguiente ecuación

$$\dot{\phi}_{m'} = \{\phi_{m'}, H\} + u^m \{\phi_{m'}, \phi_m\} \approx 0. \quad (1.39)$$

El número de condiciones de consistencia aquí es M , estas ecuaciones pueden dar tres distintos tipos de resultados.

Un tipo de ecuaciones se reduce a $0 \approx 0$, es decir, $\dot{\phi}_{m'} \approx 0$ es idénticamente satisfecha con la ayuda de las restricciones primarias.

Un segundo tipo de ecuaciones son aquellas que se reducen a relaciones entre las coordenadas y los momentos, y son independientes de los multiplicadores u^m , estas ecuaciones deben ser independientes de las constricciones primarias, ya que si ésto no fuera así, se reducirían a una ecuación de las del tipo anterior.

Finalmente, un tercer tipo de estas ecuaciones son aquellas que no se reducen a ninguno de los dos casos anteriores, éstas imponen entonces condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange u^m .

Del primer tipo de ecuaciones, no nos preocuparemos más en este capítulo. Por otro lado, cada ecuación de las del segundo tipo significa que tenemos otra restricción entre las coordenadas y los momentos. Estas restricciones son llamadas *restricciones secundarias*. Las restricciones primarias difieren de las secundarias, en el sentido de que las primeras, son consecuencia exclusivamente de la definición del momento, mientras que en las segundas, también hacemos uso de las ecuaciones de movimiento para obtenerlas.

Si en nuestra teoría aparecen restricciones secundarias $\chi(q, p) \approx 0$, entonces debemos imponer nuevas condiciones de consistencia sobre estas restricciones, es decir, debemos pedir que estas restricciones secundarias se preserven en el tiempo

$$\{\chi, H\} + u^m \{\chi, \phi_m\} \approx 0. \quad (1.40)$$

Estas ecuaciones tienen que ser tratadas de igual manera que las ecs. (1.39). Debemos chequear de cual de los tres tipos de ecuaciones antes mencionados, es cada una de las ecs. (1.40). Si éstas resultan ser del segundo tipo, entonces debemos repetir el proceso una vez más debido a que tenemos nuevas restricciones secundarias, el proceso termina cuando las condiciones de consistencia no dan como resultado nuevas restricciones. El resultado final de estos procesos, será la obtención de un cierto número de restricciones secundarias $\chi(q, p)$, junto con un número de condiciones sobre los coeficientes u^m del tipo (1.39). El conjunto de restricciones secundarias será denotado por

$$\phi_l \approx 0, \quad l = M + 1, \dots, M + L, \quad (1.41)$$

donde L es el número total de restricciones secundarias. La razón para la notación (1.41), es que la distinción entre restricciones primarias y secundarias será de poca importancia en la forma final de la teoría, y es útil poder denotar todas las restricciones primarias y secundarias en forma única como

$$\phi_I \approx 0 \quad I = 1, 2, \dots, M + L \quad (1.42)$$

Nosotros aplicamos las mismas condiciones de regularidad sobre el conjunto completo de restricciones ϕ_I al igual que lo hicimos con las restricciones primarias. Es decir, no supondremos solamente que las restricciones (1.42) definen una subvariedad suave, sino que también asumiremos que las funciones de restricción ϕ_I obedecen las condiciones de regularidad descritas en §1.1.2. En lo subsiguiente supondremos que el rango de la matriz de los paréntesis $\{\phi_I, \phi_J\}$ es constante en toda la superficie (1.42) donde las restricciones son válidas.

1.1.8 Restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange

Analicemos ahora con mayor detenimiento las ecuaciones que imponen restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange u^m . Como ya hemos mencionado, estas ecuaciones son del tipo

$$\{\phi_I, H\} + u^m \{\phi_I, \phi_m\} \approx 0, \quad (1.43)$$

donde m es sumado de 1 a M y I puede tomar cualquiera de los valores de 1 a $M + L$.

Podemos considerar que las ecs. (1.43) constituyen un conjunto de $M + L$ ecuaciones lineales no homogéneas en las M incógnitas u^m , con coeficientes que son funciones de las coordenadas y los momentos. Estas ecuaciones deben tener solución ya que de otra manera, las ecuaciones lagrangianas de movimiento serian inconsistentes.

La solución más general de (1.43) es de la forma

$$u^m = U^m(q, p) + V^m(q, p), \quad (1.44)$$

donde $U^m(q, p)$ es una solución particular de la ecuación inhomogénea (1.43) y $V^m(q, p)$ es la solución más general del sistema homogéneo asociado

$$V^m(q, p)\{\phi_I, \phi_m\} \approx 0. \quad (1.45)$$

Que $V^m(q, p)$ sea la solución más general de (1.45) significa que V^m es una combinación lineal de soluciones linealmente independientes V_a^m , $a = 1, \dots, A$, del sistema homogéneo. El número A de soluciones independientes V_a^m es el mismo para toda (q^i, p_i) sobre la superficie de restricción porque hemos supuesto que la matriz $\{\phi_I, \phi_m\}$ es de rango constante en dicha superficie. Tenemos así que la solución general de (1.43) es

$$u^m \approx U^m + v^a V_a^m, \quad (1.46)$$

en términos de los coeficientes v^a , los cuales son *totalmente arbitrarios*. Podemos notar que en esta última expresión hemos separado la parte de u^m que permanece arbitraria, de aquella que está fija mediante las condiciones de requerimiento impuestas sobre las restricciones.

Si se substituye esta expresión de u^m en la expresión del hamiltoniano total (1.34) se obtiene

$$H_T = H + U^m \phi_m + v^a V_a^m \phi_m. \quad (1.47)$$

Definiendo las cantidades H' y ϕ_a como

$$H' \equiv H + U^m \phi_m \quad (1.48)$$

y

$$\phi_a \equiv V_a^m \phi_m. \quad (1.49)$$

se tiene que el hamiltoniano total puede escribirse de la siguiente manera

$$H_T = H' + v^a \phi_a. \quad (1.50)$$

1.1.9 Funciones de primera clase y segunda clase

Hemos mencionado anteriormente que la distinción entre constricciones primarias y secundarias, es de poca importancia para la forma final de la formulación hamiltoniana. En contraste, una clasificación diferente de las constricciones (y en forma más general, de funciones definidas sobre el espacio fase) juega un papel central en la teoría. Este es el concepto de funciones de *primera clase* y *segunda clase*.

Se dice que una función $F(q^i, p_i)$ es de primera clase, si su paréntesis de Poisson con todas las constricciones se anula débilmente,

$$\{F, \phi_I\} \approx 0, \quad I = 1, \dots, M + L. \quad (1.51)$$

Una función de las variables canónicas que no sea de primera clase, es llamada de segunda clase. Es decir, $F(q^i, p_i)$ es de segunda clase si hay alguna restricción ϕ_I para la cual se tenga

$$\{F, \phi_I\} \neq 0.$$

Si F es de primera clase, entonces $\{F, \phi_I\}$ tiene que ser fuertemente igual a alguna función lineal de las constricciones ϕ , ya que las constricciones ϕ_I son por definición, las únicas cantidades independientes que son débilmente cero.

Una característica importante de la propiedad "primera clase", es que ésta es preservada bajo la operación de paréntesis de Poisson. En otras palabras, el paréntesis de Poisson de dos funciones de primera clase, es de primera clase. Probemos esta propiedad: si F y G son de primera clase, entonces

$$\{F, \phi_I\} = f_I' \phi_{I'}, \quad \{G, \phi_I\} = g_I' \phi_{I'}, \quad (1.52)$$

ahora, utilizando la identidad de Jacobi (1.29d) obtenemos

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi_I\} &= \{F, \{G, \phi_I\}\} - \{G, \{F, \phi_I\}\} = \{F, g_I' \phi_{I'}\} - \{G, f_I' \phi_{I'}\} \\ &= \{F, g_I'\} \phi_{I'} + g_I' f_I'' \phi_{I''} - \{G, f_I'\} \phi_{I'} - f_I' g_I'' \phi_{I''} \approx 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Como una primera aplicación del concepto de primera clase, observemos que las funciones H' y ϕ_a que hemos definido en (1.48) y (1.49) son de primera clase. Si formamos el paréntesis de Poisson de ϕ_a con ϕ_I , obtenemos de la definición de ϕ_a , el término $V_a^m \{\phi_m, \phi_I\}$ más otros que se anulan débilmente. Dado que los V_a^m son definidos para satisfacer (1.45), ϕ_a es de primera clase. Similarmente $\{H', \phi_I\} \approx 0$ debido a la definición de H' y a (1.43). Más aún, las ϕ_a constituyen un conjunto completo de constricciones primarias de primera clase, esto es, cualquier restricción primaria de primera clase es una combinación lineal de las ϕ_a (con coeficientes que son funciones de las coordenadas q^i , los momentos p_i y módulo cuadrados de constricciones de segunda clase⁶). Esto es

⁶ya que el cuadrado y potencias sucesivas de constricciones de segunda clase es una cantidad de primera clase

así porque $v^a V_a^m$ es la solución más general de (1.45) sobre la superficie $\phi_I \approx 0$.

La introducción de esta nueva división de las constricciones, nos permite concluir que el hamiltoniano total (1.50) es la suma del hamiltoniano de primera clase H' y las constricciones primarias de primera clase ϕ_a multiplicadas por coeficientes arbitrarios v^a . Debemos mencionar que la división de H_T en H' y $v^a \phi_a$ no es única, porque la U^m que aparece en la definición (1.48) puede ser cualquier solución de la ecuación inhomogénea (1.43). Esto significa que por el solo renombramiento de las funciones v^a , podemos admitir dentro de H' en (1.50) cualquier combinación de las ϕ_a sin cambiar el Hamiltoniano total.

1.2 TRANSFORMACIONES DE NORMA

1.2.1 Transformaciones de Norma

En la teoría dinámica estándar, el problema mecánico de un sistema concreto queda resuelto si las ecuaciones de movimiento son dadas y si se especifica el estado físico inicial del sistema. En contraste, la presencia de funciones arbitrarias v^a en el hamiltoniano total de nuestra teoría, hace que esto ya no sea válido, o expresado de otra manera, que no todas las coordenadas q^i y los momentos p_i sean observables.

Las variables iniciales que necesitamos en nuestra teoría son las coordenadas q^i y los momentos p_i . Los valores iniciales de los coeficientes v^a no son necesarios ya que éstos son arbitrarios, es decir, el estado físico está determinado únicamente por las coordenadas y los momentos y no por los coeficientes v^a . El estado inicial debe determinar el estado a tiempos posteriores, pero las coordenadas y los momentos a estos tiempos posteriores no están únicamente determinados debido a que tenemos las funciones v^a . Esto significa que un estado físico no determina de manera única un conjunto de coordenadas y momentos, aún cuando un conjunto de coordenadas y momentos sí determinan de manera única a un estado físico dado. Veamos como se obtiene esta conclusión.

Si tenemos completamente definido el estado físico al tiempo t_1 , esperamos que las ecuaciones de movimiento *determinen completamente el estado físico a otros tiempos*. Así, por definición, cualquier ambigüedad en el valor de las variables canónicas a $t_2 \neq t_1$ será una ambigüedad físicamente irrelevante. Dado que los coeficientes v^a son funciones arbitrarias del tiempo, tenemos entonces que el valor de las variables canónicas a t_2 dependerá de la elección de las funciones v^a en el intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$. Consideremos en particular, $t_2 = t_1 + \delta t$. Los valores de la variable dinámica F al tiempo t_2 , correspondientes a dos diferentes elecciones v^a, \tilde{v}^a de las funciones arbitrarias al tiempo t_1 son

$$F(t_2) = F(t_1) + \delta t \{F, H' + v^a \phi_a\} \quad (1.54)$$

$$\tilde{F}(t_2) = F(t_1) + \delta t \{F, H' + \tilde{v}^a \phi_a\}.$$

La diferencia entre ambos valores de F es

$$\delta F = F - \tilde{F} = \delta t \{F, (v^a - \tilde{v}^a) \phi_a\} = \delta v^a \{F, \phi_a\}, \quad (1.55)$$

donde $\delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a) \delta t$ es un número arbitrariamente pequeño. Por consiguiente, la transformación (1.55) no altera el estado físico al tiempo t_2 . Decimos entonces, extendiendo la terminología usada en la teoría de campos de norma que *las constricciones primarias de primera clase generan transformaciones de norma*. Las transformaciones de norma (1.55) son independientes en el caso en el que las constricciones $\phi_a \approx 0$ son irreducibles.

En general las transformaciones (1.55) no son las únicas que no cambian el estado físico, de hecho, los siguientes dos resultados son válidos:

1. El paréntesis de Poisson $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ de cualesquiera dos constricciones primarias genera una transformación de norma.

Prueba. Aplicando a una variable dinámica F cuatro transformaciones de norma (1.55) en forma sucesiva con parámetros δv^a dados por $(\varepsilon^a, \eta^a, -\varepsilon^a, -\eta^a)$ obtenemos

$$\delta F = \varepsilon^a \eta^{a'} (\{\{F, \phi_a\}, \phi_{a'}\} - \{\{F, \phi_{a'}\}, \phi_a\}) + 0(\varepsilon^2) + 0(\eta^2),$$

si se toma en cuenta la identidad de Jacobi (1.29d) y se desprecian términos de segundo orden, la expresión final de las transformaciones es

$$\delta F = \varepsilon^a \eta^{a'} \{F, \{\phi_a, \phi_{a'}\}\} \quad (1.56)$$

dado que ε^a y $\eta^{a'}$ son arbitrarias, $\varepsilon^a \eta^{a'}$ es también arbitraria y el resultado se sigue.

2. El paréntesis de Poisson $\{\phi_a, H'\}$ de cualquier constricción primaria de primera clase ϕ_a con el hamiltoniano de primera clase H' genera una transformación de norma.

Prueba. Obtengamos los valores de la variable dinámica F al tiempo $t + \varepsilon$ de las siguientes dos maneras; (i) haciendo una transformación de norma (1.55) de parámetro $\delta v^a = \eta^a$ y evolucionando después al sistema con H' mediante las ecs. (1.30) y (1.31), (ii) haciendo las mismas operaciones en orden inverso. De (i) se obtiene

$$\delta \tilde{F}(t + \varepsilon) = \delta F(t) + \varepsilon \eta^a \{\{F, \phi_a\}, H'\}$$

y de (ii)

$$\delta \tilde{F}(t + \varepsilon) = \delta F(t) + \varepsilon \eta^a \{\{F, H'\}, \phi_a\}.$$

En ambos casos hemos despreciado términos de orden η^2 y ε^2 . La diferencia neta de estos dos resultados debe ser una transformación de norma porque ambos deben representar el mismo estado físico

$$\begin{aligned} \delta F(t + \varepsilon) = \delta \tilde{F} - \delta \tilde{F} &= (\{\{F, \phi_a\}, H'\} - \{\{F, H'\}, \phi_a\}) \varepsilon \eta^a \\ &= \{F, \{\phi_a, H'\}\} \varepsilon \eta^a. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Esto muestra que $\{\phi_a, H'\}$ genera transformaciones de norma.

Estos dos resultados nos llevan a la importante conclusión, de que al menos algunas constricciones secundarias de primera clase pueden generar transformaciones de norma. Esta conclusión la podemos obtener razonando de la siguiente manera. En (1.56) y (1.57) hemos visto que los paréntesis de Poisson $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ y $\{\phi_a, H'\}$ generan transformaciones de norma, pero dado que ϕ_a y H' son funciones de primera clase, podemos concluir por (1.53) que estos paréntesis también son funciones de primera clase, lo cual significa que ellos son combinaciones lineales de las constricciones de primera clase. Sin embargo, no hay razón para pensar que estas combinaciones lineales contengan sólo constricciones primarias de primera clase, de hecho en la práctica, las constricciones secundarias de primera clase aparecen en estas combinaciones lineales.

De estas consideraciones no es posible inferir que toda constricción secundaria de primera clase genere transformaciones de norma ("conjetura de Dirac" ver cap. 2). Sin embargo, *uno postula en general que todas las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma.* Este es el punto de vista que adoptaremos en este trabajo.

1.2.2 El hamiltoniano extendido

Hemos mencionado que la clasificación de constricciones realmente importante desde el punto de vista hamiltoniano, es aquella que distingue entre constricciones de primera clase y constricciones de segunda clase. Por lo consiguiente es útil introducir una nueva notación que distinga entre estos dos tipos de constricciones. Denotaremos las constricciones de primera clase con la letra γ y las de segunda clase con la letra χ . El conjunto de todas las constricciones (de primera y segunda clase) será denotado por $\{\phi_I\}$ como antes.

Por otro lado, en §1.2.1 hemos visto que existen ciertos cambios en las variables canónicas q^i, p_i , los cuales no corresponden a ningún cambio del estado físico. Llamamos a estos cambios transformaciones de norma y vimos que estas transformaciones son generadas por constricciones de primera clase. Esto sugiere que las ecuaciones de movimiento (1.38) podrían ser generalizadas de tal manera que permitan realizar una transformación de norma arbitraria mientras el sistema esta dinámicamente evolucionando en el tiempo. El movimiento generado por el hamiltoniano total (1.50) contiene únicamente tantas funciones de norma arbitrarias como constricciones primarias de primera clase hay. Para lograr la generalidad deseada, tenemos que adicionar a H_T las constricciones secundarias de primera clase multiplicadas por funciones arbitrarias adicionales. La función de primera clase que se obtiene de esta manera tiene la forma

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad (1.58)$$

y es llamado el *hamiltoniano extendido* (aquí el índice a corre sobre un conjunto completo de constricciones de primera clase).

Las variables dinámicas que tienen paréntesis de Poisson débilmente igual a cero con los generadores de norma γ_a , son llamadas variables invariantes de norma, para este tipo

de variables se tiene que la evolución obtenida mediante H' , H_T y H_E es de hecho la misma, pero para cualquier otro tipo de variable, debe utilizarse H_E , ya que este hamiltoniano es el que toma en cuenta toda la libertad de norma.

Enfatizamos aquí que la necesidad de extender el hamiltoniano a la forma (1.58) no es inducida por la teoría lagrangiana. Esta necesidad nace de la característica inherente al esquema hamiltoniano y tiene como consecuencia, producir ecuaciones de movimiento más generales que aquellas generadas por H_T , es decir, por las ecuaciones de movimiento lagrangianas originales.

Con este hamiltoniano extendido, las ecuaciones de movimiento se expresan como

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}. \quad (1.59)$$

1.3 EL PARENTESIS DE DIRAC

1.3.1 Separación en constricciones de primera y segunda clase

En la sección anterior se estudiarán las principales características de las constricciones de primera clase, estudiemos ahora las características de las constricciones de segunda clase.

Consideremos el caso en el que la matriz $C_{IJ} = \{\phi_I, \phi_J\}$ no se anula sobre la superficie de restricción ⁷. Recordemos que estamos suponiendo en esta exposición que las constricciones son irreducibles y que el rango de la matriz C_{IJ} de los paréntesis de todas las constricciones, es constante sobre toda la superficie de restricción.

Teorema 3. Si el $\det C_{IJ} \approx 0$, entonces existe (al menos) una restricción de primera clase entre las constricciones ϕ_I .

Prueba Si $\det C_{IJ} \approx 0$, puede encontrarse una solución no trivial λ^I de $\lambda^I C_{IJ} \approx 0$. La restricción $\lambda^I \phi_I$ es entonces fácilmente vista como de primera clase, lo cual prueba el teorema.

Si se redefinen las constricciones como $\phi_I \rightarrow a_I{}^{I'} \phi_{I'}$ mediante una apropiada matriz invertible $a_I{}^{I'}$, la restricción $\lambda^I \phi_I$, puede ser utilizada como la primera restricción. En esta nueva representación se tiene $C_{IJ} = -C_{J'I'} \approx 0$.

Aplicando repetidas veces el Teorema 1.3, es posible construir una descripción equivalente de la superficie de restricción en términos de las constricciones $\gamma_a \approx 0$, $\lambda_a \approx 0$, cuya matriz de paréntesis de Poisson se lee *débilmente*

$$\gamma_b \begin{pmatrix} \gamma_a & \lambda_a \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{ba} \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

⁷este es justamente el caso en el que hay constricciones de segunda clase

donde $C_{\beta\alpha}$ es una matriz invertible sobre toda la superficie de restricción.

En esta nueva representación, las restricciones están completamente divididas en restricciones de primera y segunda clase, es decir, ninguna combinación lineal de las λ_α tiene como resultado una restricción de primera clase, y las restricciones γ_a agotan todas las restricciones de primera clase. Es importante notar que el número de restricciones primarias debe ser par, de lo contrario, la matriz antisimétrica $C_{\beta\alpha}$ tendría determinante cero y entonces no todas las λ_α serían de segunda clase.

Notese que la separación (1.60) no es única, debido a que ésta es preservada por las redefiniciones

$$\gamma_a \rightarrow a_a^b \gamma_b, \quad \lambda_\alpha \rightarrow a_\alpha^j \lambda_\beta + a_\alpha^a \gamma_a \quad (1.61)$$

con $\det a_a^b \neq 0$, $\det a_\alpha^\beta \neq 0$. También uno puede sumar cuadrados de restricciones de segunda clase a γ_a sin cambiar la propiedad de primera clase, $\gamma_a \rightarrow \gamma_a + t_a^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta$. Asumiremos que las funciones de segunda clase λ_α son tales que $\det C_{\alpha\beta} \neq 0$ sobre toda la superficie $\lambda_\alpha = 0$ y no sólo sobre $\lambda_\alpha = 0$, $\gamma_a = 0$. Esto es necesario para manejar apropiadamente las restricciones de segunda clase.

1.3.2 Tratamiento de restricciones de segunda clase: un ejemplo

A diferencia de las restricciones de primera clase, las restricciones de segunda clase no pueden ser interpretadas como generadoras de transformaciones de norma, o más generalmente, como generadoras de transformaciones con significado físico. La razón es que por definición, la transformación de contacto generada por una restricción de segunda clase χ no preserva todas las restricciones $\phi_j \approx 0$

$$\delta\chi_\alpha = \{\chi_\alpha, \varepsilon^b \lambda_b\} = \varepsilon^b C_{ab} \neq 0,$$

y así mapea un estado permitido sobre un estado no permitido.

Para entender como deben ser tratadas las restricciones de segunda clase, analicemos el ejemplo más simple posible de una teoría con restricciones de segunda clase. Supongamos que tenemos N pares de coordenadas canónicas y que el primer par (q^1, p_1) está sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= q^1 \approx 0 \\ \lambda_2 &= p_1 \approx 0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Estas restricciones son de segunda clase porque

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = 1 \neq 0.$$

En este simple caso, la forma en que deben ser tratadas las restricciones de segunda clase es un tanto directa. Las ecuaciones (1.62) nos dicen que las variables q^1 y p_1 no son de interés y por consecuencia, que el primer grado de libertad no es de importancia relevante

en la teoría. Tenemos así que las variables canónicas q^i y p_i pueden ser descartadas y por lo tanto es posible trabajar sólo con los otros grados de libertad. Esto significa que podemos trabajar con un paréntesis de Poisson modificado y definido de la siguiente manera

$$\{F, G\}^* = \sum_{i=2}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \quad (1.63)$$

Este paréntesis debe ser suficiente porque considera todas las variables dinámicas que son de interés físico.

Notemos que el paréntesis modificado (1.63) de cualquiera de las dos constricciones (1.62) con una variable dinámica arbitraria es idénticamente cero

$$\{F, \chi_1\}^* = \{F, \chi_2\}^* = 0. \quad (1.64)$$

Esto significa que cuando trabajamos con (1.63), podemos poner las χ_α como iguales a cero antes de evaluar el paréntesis. Así, si en este ejemplo utilizamos la definición del paréntesis estrella (1.63) en vez de la del paréntesis de Poisson (1.28), podemos poner las constricciones de segunda clase fuertemente igual a cero

$$\chi_1 = \chi_2 = 0. \quad (1.65)$$

También es claro que las ecuaciones de movimiento para los otros ($n \geq 2$) grados de libertad, permanecen de la misma forma si reemplazamos el paréntesis de Poisson original por el paréntesis modificado. Más aún, el paréntesis (1.63) satisface las mismas propiedades (1.29) que el paréntesis de Poisson.

1.3.3 Paréntesis de Dirac

La generalización de (1.63) para un conjunto arbitrario de constricciones de segunda clase fue hecha por Dirac (Dirac(1950)). Esbozaremos aquí, como llegar a esta generalización.

Dado que el determinante de la matriz $C_{\alpha\beta}$ es distinto de cero, entonces esta matriz es invertible

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \quad (1.66)$$

Una propiedad que debe de cumplir el paréntesis que generaliza (1.63) es que, cualquier variable dinámica tenga un paréntesis general nulo con las constricciones de segunda clase. Si F es una función arbitraria del espacio fase podemos definir otra función F^* que sea igual a F sobre la superficie de constricciones de segunda clase $\chi_\alpha \approx 0$, como

$$F^* = F + \nu^\alpha \chi_\alpha,$$

con la propiedad

$$\{F^*, \chi_\alpha\} \approx 0.$$

Por cálculo directo puede obtenerse la expresión explícita para F^* en función de $C^{\alpha\beta}$

$$F^* = F - \{F, \lambda_\alpha\} C^{\alpha\delta} \lambda_\delta. \quad (1.67)$$

Ahora simplemente postulamos que el paréntesis de Poisson de dos cantidades F y G debe ser remplazado por el paréntesis de Poisson de sus variables estrellas F^* y G^*

$$\{F, G\} \rightarrow \{F^*, G^*\}. \quad (1.68)$$

Notese que a pesar de que $F \approx F^*$ y $G \approx G^*$, el paréntesis de Poisson $\{F^*, G^*\}$ no es débilmente igual a $\{F, G\}$

$$\{F^*, G^*\} \approx \{F, G\} - \{F, \lambda_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\lambda_\beta, G\}.$$

El paréntesis de Dirac es definido como

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \lambda_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\lambda_\beta, G\}, \quad (1.69)$$

y constituye la generalización de (1.63). Este paréntesis satisface las mismas propiedades que el paréntesis de Poisson

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\}^*, \quad (1.70)$$

$$\{F_1 + F_2, G\}^* = \{F_1, G\}^* + \{F_2, G\}^*, \quad (1.70b)$$

$$\{F_1 F_2, G\}^* = F_1 \{F_2, G\}^* + \{F_1, G\}^* F_2, \quad (1.70c)$$

$$\{\{F, G\}^*, H\}^* + \{\{G, H\}^*, F\}^* + \{\{H, F\}^*, G\}^* = 0 \quad (1.70d)$$

además de estas propiedades se tiene que

$$\{\lambda_\alpha, F\}^* = 0 \quad \text{para cualquier } F \quad (1.71)$$

$$\{F, G\}^* \approx \{F, G\} \quad \text{con } G \text{ de primera clase y } F \text{ arbitrario} \quad (1.72)$$

$$\{F, \{G, H\}^*\}^* \approx \{F, \{G, H\}^*\} \text{ con } G \text{ y } H \text{ de primera clase y } F \text{ arbitrario} \quad (1.72b)$$

Se sigue de (1.71) que las constricciones de segunda clase pueden ser puestas iguales a cero, antes o después de evaluar el paréntesis de Dirac. Mas aún, dado que el hamiltoniano extendido (1.58) es de primera clase, se deduce de (1.72) que H_E continua generando las ecuaciones de movimiento correctas en términos del paréntesis de Dirac

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}^*, \quad \text{para toda } F. \quad (1.73)$$

En particular, el efecto de una transformación de norma puede también ser evaluado mediante el paréntesis de Dirac

$$\{F, \gamma_a\} \approx \{F, \gamma_a\}^*, \quad \text{para toda } F. \quad (1.74)$$

Así, en lo sucesivo, todas las ecuaciones de la teoría son formuladas en términos del paréntesis de Dirac, y las constricciones de segunda clase son identidades que expresan algunas variables canónicas en términos de otras (ecuaciones fuertes).

1.4 FIJACION DE LA NORMA

1.4.1 Normas canónicas

Como hemos visto anteriormente, la presencia de constricciones de primera clase y la libertad de norma asociada a éstas, nos señalan que dado un estado físico, hay más de un conjunto de variables canónicas (q^i, p_i) que corresponden a dicho estado. En la práctica, muchas veces es deseable remover esta ambigüedad imponiendo condiciones extras sobre las variables canónicas (condiciones de norma canónicas), de tal manera que sólo exista un conjunto de estas variables que corresponda a un estado físico, es decir, de tal manera que exista una relación uno a uno entre los estados físicos y los valores de las variables canónicas que resulten de las condiciones extras sobre ellas. Como puede observarse, estas condiciones extras no son una consecuencia de la teoría que hemos desarrollado, sin embargo, son condiciones ad-hoc que uno puede imponer para evitar "el conteo múltiple de estados". Esto es permisible porque dichas condiciones pueden elegirse de tal manera que sólo remuevan los elementos no observables de la teoría y no afectan las propiedades observables (invariantes de norma).

Hay tres propiedades que debe satisfacer un conjunto

$$C_b(q^i, p_i) \approx 0 \quad (1.75)$$

de condiciones de norma, para que éstas cumplan con nuestros propósitos:

(a) La norma elegida debe ser accesible. Esto es, dada cualquier conjunto de variables canónicas debe existir una transformación de norma que mapee el conjunto dado de variables q^i y p_i sobre un conjunto que satisfaga (1.75). Esta transformación debe ser obtenida por iteración de transformaciones de la forma $\delta u^a \{F, \gamma_a\}$.

Esta condición nos asegura que las condiciones (1.75) no modificarán las propiedades físicamente relevantes del sistema, pero sí restringen la libertad de norma. Dado que el número de parámetros arbitrarios δu^a es igual al número de constricciones de primera clase γ_a , se concluye que el número de condiciones (1.75) no es mayor a el número de constricciones γ_a .

(b) Las condiciones (1.75) deben fijar completamente la norma. Esto significa que una vez impuestas las condiciones de norma, no debe existir transformación de norma alguna a excepción de la identidad, que preserve (1.75). Dicho de otra manera, las ecuaciones

$$\delta u^a \{C_b, \gamma_a\} \approx 0 \quad (1.76)$$

deben implicar

$$\delta u^a = 0 \quad (1.77)$$

Las ecs.(1.76) pueden implicar (1.77) únicamente si el número de ecuaciones independientes $\{C_b, \gamma_a\}$ es igual o más grande que el número de incógnitas δu^a .

(c) Las condiciones de norma deben satisfacer las condiciones de frontera (ver cap.

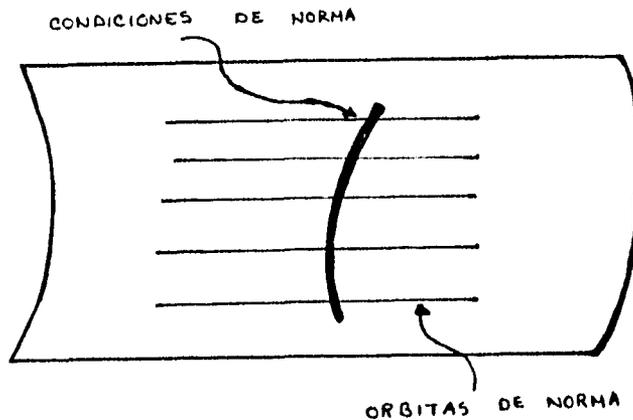


Figura 1.2: Un buen conjunto de condiciones de norma, debe determinar una superficie $C_a = 0$ que intersekte las orbitas de norma, una y sólo una vez.

4).

De estas condiciones se concluye que para fijar la norma satisfactoriamente, *el número de condiciones de norma independientes debe ser igual al número de constricciones de primera clase*. Los paréntesis de Poisson $\{C_b, \gamma_a\}$ forman entonces una matriz cuadrada y, de la condición (b), podemos notar que para que (1.76) implique (1.77), entonces esta matriz debe ser invertible. Así tenemos la condición

$$\det\{C_b, \gamma_a\} \neq 0. \quad (1.78)$$

Esta condición nos expresa que las constricciones C_b y γ_a juntas, forman un conjunto de constricciones de segunda clase, lo cual implica que una vez fijada la norma, las constricciones γ_a dejan de ser de primera clase y en la teoría quedan sólo constricciones de segunda clase. Esto que sucede es bastante razonable, ya que de lo contrario, si queda todavía alguna construcción de primera clase, seguiríamos teniendo alguna libertad de norma que correspondería a las transformaciones generadas por dicha construcción.

Una vez que es fijada la norma, podemos pasar al paréntesis de Dirac. Tendremos así entonces, una teoría que sea efectivamente libre de constricciones en el sentido de que todas las constricciones podran ser consideradas como identidades que expresan algunas variables dinámicas en términos de otras.

Uno puede dar una descripción geométrica del proceso de fijar la norma. La superficie $C_a = 0$ de las condiciones de norma intersekte las orbita de norma, las cuales yacen sobre la superficie de construcción, una y sólo una vez. La condición (1.78) garantiza esta propiedad localmente (ver fig.2).

1.4.2 Número de grados de libertad

Cuando una teoría posee únicamente constricciones de segunda clase, el hamiltoniano no contiene funciones arbitrarias del tiempo ⁸. En este caso, un conjunto de variables canónicas que satisfaga las constricciones determina un y sólo un estado físico. Dado que después de fijar la norma sólo hay constricciones de segunda clase, tenemos el siguiente conteo de grados físicos de libertad:

$$\begin{aligned}
 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de grados} \\ \text{físicos de libertad} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} \text{Número de variables} \\ \text{canónicas independientes} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de constricciones} \\ \text{originales de segunda clase} \end{array} \right) \\
 &\quad - \left(\begin{array}{c} \text{Número de constricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{condiciones de norma} \end{array} \right) \quad (1.79) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de constricciones} \\ \text{originales de segunda clase} \end{array} \right) \\
 &\quad - 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de constricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Dado que el número de constricciones de segunda clase es siempre par, se infiere de (1.79) que el número total de variables canónicas independientes es también par, lo cual corresponde a un número entero de grados de libertad.

El conteo anterior está bien definido y no es ambigüo para un número finito (o tal vez contable) de grados de libertad.

1.5 FUNCIONES INVARIANTES DE NORMA

1.5.1 funciones sobre la superficie de restricción

Introduzcamos a este punto, por completez, una serie de conceptos que juegan un rol importante en el análisis de los sistemas con restricción. Denotaremos al espacio fase por P y como es convencional, el espacio de las funciones suaves del espacio fase por $C^\infty(P)$.

El espacio vectorial $C^\infty(P)$ está dotado de dos estructuras algebraicas: una es la multiplicación ordinaria, para la cual $C^\infty(P)$ es un álgebra asociativa; la otra es la operación del paréntesis de Dirac, para la cual $C^\infty(P)$ es un álgebra de Lie. Estas dos operaciones están relacionadas por

$$\{F_1 F_2, F_3\}^* = \{F_1, F_2\}^* F_3 + F_1 \{F_2, F_3\}^*.$$

⁸de esto se concluye que no todo lagrangiano singular produce una teoría de norma

Debido a que el sistema dinámico está limitado a estar sobre la superficie de restricción, la cual denotaremos por Σ , dos funciones del espacio fase que coincidan sobre dicha superficie Σ , no pueden ser distinguidas. En otras palabras, no todas las funciones suaves del espacio fase son relevantes sino sólo aquellas funciones suaves sobre Σ .

1.5.2 Observables clásicos

Un "observable" clásico es por definición, una función sobre la superficie de restricción que es invariante de norma. De manera alternativa podemos decir que un observable puede ser descrito como una función del espacio fase que tiene un paréntesis de Dirac débilmente nulo con las restricciones de primera clase

$$\{F, \gamma_a\}^* \approx 0, \quad (1.80)$$

y uno podría identificar dos de dichas funciones que coinciden sobre la superficie de restricción. El concepto de observable, envuelve así, dos pasos: (i) la restricción sobre la superficie de restricción, (ii) la condición de invariancia de norma (1.80).

A pesar de que estamos utilizando la terminología "observable", en este trabajo no se intentará dar un significado experimental a este concepto por medio de aparatos, ya que esto no es necesario para el desarrollo de la teoría. Dado que no se necesitó más información que el principio de acción en la determinación y clasificación de las restricciones, tenemos que la propia acción nos lleva a decir cuales son los observables.

1.6 EJEMPLOS

1.6.1 Partícula libre no relativista

Para ilustrar algunos de los conceptos que hemos expuesto a lo largo de este capítulo, tomaremos como primer ejemplo a la partícula libre no relativista.

La acción para la partícula libre no relativista, está dada por la expresión

$$S[q(t)] = \int dt \frac{m}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2. \quad (1.81)$$

Para que esta pueda ser tratada como una acción con lagrangiano singular, debemos hacer que esta acción sea invariante bajo reparametrización. Esto se logra si incluimos al tiempo como una variable canónica (ver §4.2). La expresión para la acción invariante bajo reparametrización es

$$S[q(\tau), t(\tau)] = \int d\tau \frac{m}{2} \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}}, \quad (1.82)$$

donde $\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}$, $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$ y τ es un parámetro monótono arbitrario.

Es fácil checar que el lagrangiano de la acción invariante bajo reparametrización es realmente singular,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p = \frac{m\dot{q}}{\dot{t}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = p_t = -\frac{m\dot{q}^2}{2\dot{t}^2}, \quad (1.83)$$

$$\Rightarrow \det(W_{ij}) = \begin{vmatrix} \frac{m\dot{q}^2}{\dot{t}^3} & -\frac{m\dot{q}}{\dot{t}^2} \\ -\frac{m\dot{q}}{\dot{t}^2} & \frac{m}{\dot{t}} \end{vmatrix} = \frac{m^2\dot{q}^2}{\dot{t}^4} - \frac{m^2\dot{q}^2}{\dot{t}^4} = 0.$$

De la expresión que hemos obtenido para los momentos ec. (1.83), llegamos a una constricción primaria

$$\phi = \frac{p^2}{2m} + p_t \approx 0. \quad (1.84)$$

Además, el hamiltoniano canónico se anula

$$H = \frac{m\dot{q}}{\dot{t}}\dot{q} - \frac{m\dot{q}^2}{2\dot{t}^2}\dot{t} - \frac{m\dot{q}^2}{2\dot{t}} = 0, \quad (1.85)$$

con lo cual tenemos que la expresión para el hamiltoniano total H_T es

$$H_T = u\phi = u \left(\frac{p^2}{2m} + p_t \right). \quad (1.86)$$

Introduciendo el requerimiento de consistencia $\dot{\phi} \approx 0$, concluimos que ϕ es la única constricción del problema y por consiguiente que esta es de primera clase, ya que

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_T\} = \{\phi, 0\} + u\{\phi, \phi\} = 0. \quad (1.87)$$

Las ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana para este problema son

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u \frac{\partial \phi}{\partial p} = u \frac{p}{m}, \\ \dot{t} &= u \frac{\partial \phi}{\partial p_t} = u, \\ \dot{p} &= -u \frac{\partial \phi}{\partial q} = 0, \\ \dot{p}_t &= -u \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (1.88)$$

La segunda de estas ecuaciones da un significado al multiplicador de Lagrange u que aparece en el hamiltoniano total, este es la variación del tiempo con respecto al parámetro τ .

Por último mencionemos que debido a que sólo tenemos la constricción (1.84), la expresión para el hamiltoniano extendido H_E coincide con la del hamiltoniano total.

1.6.2 Partícula libre relativista

La acción para la partícula libre relativista esta dada por

$$S = -m \int_1^2 ds \equiv -m \int_1^2 (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} \quad \text{con} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

Elegimos un parámetro monótono arbitrario τ con el cual etiquetamos la posición de la partícula sobre su línea de mundo y definimos su cuadrivelocidad como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}. \quad (1.90)$$

En términos de esta cuadrivelocidad la acción (1.89) queda reescrita como una acción invariante bajo reparametrizaciones de τ ($\tau \rightarrow \tau'(\tau)$).

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{u^\mu u_\mu} d\tau. \quad (1.91)$$

Al igual que en el caso anterior, uno puede checar en forma directa que

$$\det \left(\frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (-m u^\mu u_\mu)^{1/2} \right) = 0.$$

La expresión para los momentos canónicos es

$$p^\mu = \frac{\partial(-m u^\nu u_\nu)^{1/2}}{\partial u^\mu} = -\frac{m u^\mu}{(u^\alpha u_\alpha)^{1/2}}, \quad (1.92)$$

de la cual concluimos que existe una constricción primaria, dado que

$$p^\mu p_\mu = m^2 \frac{u^\mu u_\mu}{u^\alpha u_\alpha} = m^2 \quad \Rightarrow \quad \phi = p^2 - m^2 = 0. \quad (1.93)$$

En este caso al igual que en el anterior, el hamiltoniano canónico se anula

$$H = p^\mu u_\mu - L = -\frac{m u^\mu}{(u^\alpha u_\alpha)^{1/2}} u_\mu + m (u^\mu u_\mu)^{1/2} = 0, \quad (1.94)$$

lo cual tiene como consecuencia, que la condición sobre $\dot{\phi}$ se cumpla idénticamente. Debido a esto concluimos que ϕ es la única constricción para la partícula libre relativista y por lo tanto es de primera clase.

1.6.3 Campo electromagnético

La acción para el campo electromagnético es

$$L = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^3x, \quad (1.95)$$

donde $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ es el tensor del campo electromagnético y A_μ es el 4-potencial del campo. Explícitamente la expresión para $F_{\mu\nu}$ es

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

De la definición del momento para una teoría de campo, obtenemos que para el campo electromagnético

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(A^{\mu,0})} = -\frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial(A^{\mu,0})} = -\frac{1}{2} \frac{\partial(F_{\mu 0} F^{\mu 0})}{\partial(A^{\mu,0})} = F_{\mu 0}, \quad (1.96)$$

y dado que $F_{00} = 0$ concluimos que existe una constricción primaria

$$\phi_1 = \Pi_0 \approx 0. \quad (1.97)$$

Calculemos ahora el hamiltoniano canónico.

$$\begin{aligned} H &\equiv \int \Pi_\mu A^{\mu,0} d^3x - L \\ &= \int \left(F_{i0} A^{i,0} + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} \right) d^3x \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3, \\ &= \int \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i + \Pi_i \partial^i A^0 \right) d^3x \\ &= \int \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - A^0 \Pi_{i,i} \right) d^3x. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Veamos si hay alguna otra constricción

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = \{\Pi^0, H\} &= \left\{ \Pi^0, \int \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - A^0 \Pi_{i,i} \right) d^3x \right\} \\ &= \int \left\{ \Pi^0, \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - A^0 \Pi_{i,i} \right) \right\} d^3x \\ &= - \int \Pi_{i,i}(x') \delta^3(x - x') d^3x' = -\Pi_{i,i} \approx 0 \end{aligned} \quad (1.99)$$

De esto concluimos que para el caso electromagnético aparece una constricción secundaria la cual denotaremos por ϕ_2

$$\phi_2 = \Pi_{i,i} \approx 0, \quad (\text{ecuación de Gauss}) \quad (1.100)$$

Segun lo expuesto en el capítulo, debemos imponer una nueva condición de consistencia $\phi_2 \approx 0$,

$$\begin{aligned}\phi_2 = \{\Pi_i^i, H\} &= \int d^3x \left[\frac{1}{4} \{\Pi_i^i, F^{jk} F_{jk}\} - \frac{1}{2} \{\Pi_i^i, \Pi^j \Pi_j\} - \{\Pi_i^i, A^0 \Pi_j^j\} \right] \\ &= \int d^3x \frac{1}{4} \{\Pi_i^i, F^{jk} F_{jk}\} = 0\end{aligned}$$

dato que ϕ_2 se anula idénticamente, concluimos que no hay más constricciones en la teoría. Y evaluando el corchete $\{\phi_1, \phi_2\}$ llegamos a la conclusión de que ambas constricciones son de primera clase.

Escribamos ahora la expresión para el hamiltoniano total H_T y para el hamiltoniano extendido H_E .

La expresión (1.98) para H es de primera clase, con lo cual H puede ser tomada como H' de (1.50). Obtenemos así

$$H_T = \int \left(\frac{1}{4} F^0_i F^0_i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i \right) d^3x - \int A^0 \Pi_i^i d^3x + \int v(x) \Pi_0 d^3x. \quad (1.101)$$

Aquí $v(x)$ es un coeficiente arbitrario para cada punto en el espacio tridimensional.

Como vimos en §1.1.5, la ecuación de movimiento en términos del hamiltoniano total H_T es

$$\dot{F} = \{F, H_T\}.$$

Si tomamos $F = A^0$, obtenemos

$$A^{0,0} = v(x), \quad (1.102)$$

porque A^0 tiene un paréntesis de Poisson nulo con cualquier cantidad excepto con Π_0 , y esta cantidad aparece en el último término de (1.101). Esto da un significado al coeficiente arbitrario $v(x)$ que aparece en el hamiltoniano total, $v(x)$ es la derivada temporal de A^0 . Obtengamos ahora el hamiltoniano extendido. Para hacer esto adicionemos a H_T la constricción secundaria de primera clase (1.100) con un coeficiente arbitrario $u(x)$,

$$H_E = H_T + \int u(x) \Pi_i^i d^3x. \quad (1.103)$$

Notemos que es posible simplificar la expresión para H_E . Esta simplificación se puede efectuar porque las variables A^0 , Π_0 no tienen significado físico alguno. $\Pi_0 = 0$ todo el tiempo (cc.(1.96)), por lo cual no es de interés y A^0 es algo cuya derivada temporal es bastante arbitraria (cc. (1.102)), por lo cual tampoco es de interés. Debido a esto, podemos ignorar estas variables y por lo tanto simplificar la expresión de H_T .

Para llevar a cabo esta simplificación, eliminemos el término $v(x)\Pi_0$ del hamiltoniano total. Este término tiene el efecto de permitir que A^0 varíe arbitrariamente. El término $-A^0 \Pi_i^i$ en H_T puede ser combinado con el término $u(x)\Pi_i^i$ en el hamiltoniano extendido. El coeficiente $u(x)$ es un coeficiente arbitrario en cualquier caso. Cuando combinamos estos dos términos, sólo estamos reemplazando $u(x)$, por la función $u'(x) = u(x) - A^0$, la

cual sigue siendo totalmente arbitraria. Obtenemos así finalmente que la expresión para el hamiltoniano extendido es

$$H_E = \int \left(\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i \right) d^3x + \int u'(x) \Pi_i{}^i d^3x. \quad (1.104)$$

1.6.4 Modelo de Freedman-Townsend

Para finalizar este capítulo, expondremos como último ejemplo el modelo de Freedman-Townsend para partículas sin espín (Freedman and Townsend (1981)). Este modelo corresponde a la generalización no-abeliana, de una teoría de norma tensorial antisimétrica.

La acción para la formulación a primer orden de este modelo es

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + A_\mu A^\mu) \quad (1.105)$$

en la cual $B_{\mu\nu}$ y A_μ son tratadas como variables independientes.

Esta acción puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + A_\mu A^\mu) \\ &= \int d^4x \text{Tr}(-\varepsilon^{0ijk} B_{0i} F_{jk} - \varepsilon^{0ijk} B_{jk} F_{0i} + \frac{1}{2} A_0^2 - \frac{1}{2} A^i A_i) \\ &= \int d^4x \text{Tr}(-\varepsilon^{ijk} B_{0i} F_{jk} - \varepsilon^{ijk} B_{jk} F_{0i} + \frac{1}{2} A_0^2 - \frac{1}{2} A^i A_i) \end{aligned}$$

más aún, dado que $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + g[A_i, A_j]$ y $A_i = A_i^a T^a$, la acción puede reescribirse como

$$S = \int d^4x \text{Tr}(-\varepsilon^{ijk} B_{0i} F_{jk} - \varepsilon^{ijk} B_{jk} \dot{A}_i - \varepsilon^{ijk} A_0 D_i B_{jk} + \frac{1}{2} A_0^2 - \frac{1}{2} A^i A_i) \quad (1.106)$$

donde $D_i = \partial_i + g[A_i, \]$ es la derivada covariante.

La expresión para los momentos conjugados a A_i y B_{jk} es

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\varepsilon^{ijk} B_{jk}, \quad \Theta^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{jk}} = 0. \quad (1.107)$$

Obtenemos así que los momentos canonicos conjugados a B_{jk} constituyen un conjunto de constricciones primarias.

De la ecuación de movimiento para A_0 obtenemos

$$A_0 - \varepsilon^{ijk} D_i B_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \varepsilon^{ijk} D_i B_{jk} = -D_i \Pi^i, \quad (1.108)$$

con lo cual la acción puede reescribirse en términos de los momentos y los campos como

$$S = \int d^4x \text{Tr} \left(\Pi^i \dot{A}_i - \frac{1}{2} A_i A^i - \frac{1}{2} (D_i \Pi^i)^2 - B_{0i} (\varepsilon^{ijk} F_{jk}) \right). \quad (1.109)$$

De esta última expresión podemos identificar al hamiltoniano con la expresión

$$\int d^4x \text{Tr} \left(\frac{1}{2} A_i A^i + \frac{1}{2} (D_i \Pi^i)^2 + B_{0i} (\varepsilon^{ijk} F_{jk}) \right). \quad (1.110)$$

Introduciendo el requerimiento de consistencia de que las constricciones primarias se mantengan en el tiempo, obtenemos un nuevo conjunto de constricciones

$$G^i \equiv \varepsilon^{ijk} F_{jk} \approx 0. \quad (1.111)$$

Sin embargo en este conjunto de constricciones secundarias no todas son independientes, ya que de la identidad de Bianchi

$$D_i G^i = \varepsilon^{ijk} D_i F_{jk} = 0. \quad (1.112)$$

Uno puede checar fácilmente que no aparecen nuevas constricciones en el formalismo. Con esto se concluye entonces que la expresión para el hamiltoniano canónico es

$$\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr} (A_i A^i + (D_i \Pi^i)^2), \quad (1.113)$$

y que la expresión (1.110) es la expresión del hamiltoniano extendido. Concluimos también que los B_{0i} (multiplicadores de Lagrange) son totalmente arbitrarios.

Capítulo 2

INVARIANCIA DE NORMA DE LA ACCION

En el capítulo anterior fueron definidas las transformaciones de norma, como transformaciones que no cambian el estado físico del sistema. Sin embargo, no discutimos en que sentido estas transformaciones eran una simetría de la acción. Este capítulo tiene como principal objetivo, analizar estas simetrías.

Restringimos nuestro análisis a un tipo particular de teorías de norma, sin embargo, la generalización de los resultados es directa y sigue la misma línea que aquí se expone.

Mostramos la relación precisa que existe entre las constricciones de primera clase y la invariancia de norma de la acción. Esto es hecho para la acción hamiltoniana extendida y para la acción original en forma lagrangiana.

Como consecuencia del análisis se obtiene: (i) una prueba de la Conjetura de Dirac, (ii) una manera sistemática para derivar todas las simetrías de norma de un lagrangiano dado, y (iii) un criterio preciso para contar los grados físicos de libertad de una teoría de norma, directamente de la forma de las transformaciones de norma en forma lagrangiana.

2.1 FORMALISMO HAMILTONIANO

2.1.1 Acción Hamiltoniana total

Como fue establecido por Dirac, el principio variacional lagrangiano (1.6) es equivalente (en el sentido explicado abajo) al principio variacional de primer orden

$$\delta S_T = 0, \tag{2.1}$$

donde S_T está dada en términos del hamiltoniano total (1.34)

$$S_T(q^i, p_i, u^m) = \int (p_i \dot{q}^i - H - u^m \phi_m) dt. \quad (2.1b)$$

En (2.1) uno considera variaciones arbitrarias de q^i , p_i y u^m sujetas a la condición $\delta q^i = 0$ en los extremos (condición (1.3)).

La equivalencia de los principios variacionales (1.6) y (2.1) significa que si eliminamos p_i y u^m de (2.1b) utilizando sus propias ecuaciones de movimiento $\delta S_T / \delta p_i = 0$, $\delta S_T / \delta u^m = 0$, obtenemos la acción lagrangiana (1.6), o dicho de otra manera, las ecuaciones de movimiento que se obtienen de (1.6) y (2.1) son equivalentes (ver §2.1.2 y §1.1.4).

Como una consecuencia de esta equivalencia, se tiene que cualquier simetría de (2.1b) induce una simetría de (1.2) tras una eliminación de p_i y u^m . Así, si encontramos un conjunto completo de transformaciones de norma para la acción (2.1b), automáticamente obtenemos un conjunto completo de transformaciones de norma para la acción (1.2). La afirmación inversa, de que cualquier simetría de (1.2) puede ser extendida a una simetría de (2.1b) es también verdadera, pero debido a que este resultado no será utilizado en nuestra exposición, no abundaremos sobre éste.

2.1.2 Algoritmo de consistencia

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de (2.1) son las que hemos llamado en el capítulo anterior, ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana (ecs. (1.27))

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \\ \phi_m(q, p) &= 0. \end{aligned}$$

Recordemos que un requerimiento básico de consistencia en la teoría es que las constricciones primarias (1.17) sean preservadas en el tiempo, lo cual da origen a las ecs. (1.39)

$$\dot{\phi}_{m'} = \{\phi_{m'}, H\} + u^m \{\phi_{m'}, \phi_m\} \approx 0.$$

cuyo análisis depende del rango de la matriz $\{\phi_{m'}, \phi_m\}$.

Hagamos un paréntesis aquí, para precisar las condiciones bajo las que trabajaremos y la notación que seguiremos en este capítulo.

Asumiremos lo siguiente: (i) Las constricciones son irreducibles, es decir, independientes; (ii) Las constricciones son de primera clase; (iii) El rango de la matriz de paréntesis de Poisson $\{\gamma_{m'}, \gamma_m\}$ es constante y débilmente igual a cero por la suposición anterior sobre la superficie de restricción $\gamma_{m'} \approx 0$. Similares condiciones sobre los paréntesis de

las constricciones secundarias, terciarias, etc. serán asumidas (ver abajo); (iv) Las condiciones de regularidad son satisfechas en la superficie de constricción. Las constricciones subsecuentes también serán elegidas de tal manera que satisfagan condiciones similares.

La primera suposición es hecha al igual que en el capítulo 1, para evitar hacer más extensa la exposición. La extensión al caso reducible es directa y sigue la misma línea que el caso irreducible, esta extensión puede hallarse nuevamente en (Henneaux and Teitelboim (1992)).

La segunda, es motivada por el hecho de que las constricciones de primera clase son las únicas que generan simetrías de norma, por lo que las constricciones de segunda clase no son de interés en el presente capítulo.

La tercera es más técnica. En principio ésta no necesita ser satisfecha, pero resulta siempre realizada en la práctica. Con (iii), el algoritmo de consistencia toma su forma más simple y las constricciones de la i -ésima generación aparecen por primera vez cuando se estudia la preservación en el tiempo de las constricciones de la $(i-1)$ -ésima generación. La cuarta suposición es requerida por la teoría de Dirac y la hemos discutido ya en §1.1.2.

En cuanto a la notación, ésta será puesta en una forma más detallada cuando así nos convenga. Esto lo haremos de la siguiente manera; cuando se haga referencia a las constricciones primarias, añadiremos el subíndice m_1 a γ . Cuando se haga referencia a las constricciones secundarias, añadiremos el subíndice m_2 a γ , etc. Así las constricciones de la i -ésima generación serán denotadas por

$$\gamma_{m_i}, \quad m_i = m_1, m_2, \dots$$

Como consecuencia de las suposiciones (ii) y (iii) uno encuentra (ver (1.52))

$$\{\gamma_{m_1}, \gamma_{m_1'}\} = C_{m_1 m_1'}^{m_1''} \gamma_{m_1''}. \quad (2.2)$$

Como resultado de (iii), notamos que no hay constricciones secundarias (o de orden mayor) en el miembro derecho de la ec. (2.2).

Debido a (2.2), la ec. (1.39) se reduce sobre la superficie de constricción $\gamma_{m_1} \approx 0$ a

$$\{\gamma_{m_1}, H\} \approx 0. \quad (2.3)$$

Esta ecuación impone condiciones únicamente sobre las variables canónicas q^i, p_i y no restringe a los multiplicadores de Lagrange u^{m_1} . Estas constricciones son llamadas constricciones "secundarias".

Si γ_{m_2} ($m_2 = 1, \dots, M_2$) es un conjunto completo de constricciones secundarias independientes (irreducible), tenemos por construcción

$$\{H, \gamma_{m_1}\} = V_{m_1}^{m_1'} \gamma_{m_1'} + V_{m_2}^{m_2'} \gamma_{m_2'}. \quad (2.4)$$

Completemos la suposición del rango que hemos formulado anteriormente, asumiendo que M_2 es más pequeño que M_1 y que la matriz $V_{m_1}^{m_2'}$ es de rango máximo $M_2 \leq M_1$ en el espacio fase. Estas condiciones son bastante naturales ya que dada la condición

$\dot{\gamma}_{m_1} \approx 0$ con $\gamma_{m_1} \approx 0$, implican claramente $\gamma_{m_2} \approx 0$. En lo subsiguiente, suposiciones similares sobre los rangos de las matrices $V_{m_s}^{m_{s+1}}$ que aparecen abajo, serán hechas. Con estas condiciones de rango, exhibiremos una prueba de la conjetura de Dirac en la sección siguiente.

Una vez obtenidas las constricciones secundarias, el siguiente paso de consistencia en la teoría, es pedir que estas constricciones secundarias sean preservadas en el tiempo. Por las suposiciones de constricciones de primera clase y de rango constante, obtenemos

$$\{\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2}\} = C_{m_1 m_2}^{m_1'} \gamma_{m_1'} + C_{m_1 m_2}^{m_2'} \gamma_{m_2'}, \quad (2.5)$$

$$\{H, \gamma_{m_2}\} = V_{m_2}^{m_1} \gamma_{m_1} + V_{m_2}^{m_2'} \gamma_{m_2'} + V_{m_2}^{m_3} \gamma_{m_3},$$

donde γ_{m_3} ($m_3 = 1, \dots, M_3 \leq M_2$) es un conjunto completo de "constricciones terciarias" independientes (irreducibles) y $V_{m_2}^{m_3}$ es de rango máximo M_3 , porque de (2.5), las condiciones $\dot{\gamma}_{m_2}$ no restringen los multiplicadores de Lagrange y en vez de esto implican $\gamma_{m_3} \approx 0$.

Prosiguiendo de esta manera, el algoritmo de consistencia nos lleva a obtener un conjunto de constricciones, $\gamma_{m_s} \approx 0$, $s = 1, \dots, L$, con

$$\{\gamma_{m_1}, \gamma_{m_s}\} = \sum_{i \leq s} C_{m_1 m_s}^{m_i'} \gamma_{m_i'}, \quad (2.6)$$

$$\{H, \gamma_{m_s}\} = \sum_{i \leq s+1} V_{m_s}^{m_i} \gamma_{m_i},$$

y si el algoritmo finaliza al orden L ,

$$\{H, \gamma_{m_L}\} = \sum_{i \leq L} V_{m_L}^{m_i} \gamma_{m_i}.$$

2.1.3 Número de transformaciones de norma independientes

Dado que los multiplicadores de Lagrange no son restringidos por las ecuaciones de movimiento, la solución general de las ees. (1.27) contiene M_1 funciones arbitrarias del tiempo. Estas M_1 funciones agotan completamente toda la libertad de norma porque una vez que son preescritas las u^{m_i} , las soluciones de las ecuaciones de movimiento son únicas. Así, el número de simetrías de norma independientes del lagrangiano original, es igual al número M_1 de constricciones primarias (primera clase).

2.2 HAMILTONIANO EXTENDIDO

2.2.1 Conjetura de Dirac

En el capítulo 1 hemos mencionado que en este trabajo asumimos que la conjetura de Dirac es válida. Dicha conjetura establece que *las transformaciones de norma que relacionan dos conjuntos de variables canónicas que representan el mismo estado físico al tiempo t_1 son generadas por todas las constricciones de primera clase.*

A pesar de que es posible construir contraejemplos de la conjetura, hay un número de muy buenas razones para asumir la validez de ésta. Primero, la distinción entre constricciones primarias y secundarias es basada en la función lagrangiana, pero esta distinción no es natural desde el punto de vista hamiltoniano. En contraste, la división de constricciones de primera y segunda clase, es producto únicamente de la estructura fundamental de la teoría hamiltoniana, el paréntesis de Poisson. Segundo, el esquema es consistente en: (i) las transformaciones generadas por una constricción de primera clase preserva todas las constricciones (primera y segunda clase) y así mapea un estado permitido sobre otro estado permitido, (ii) el paréntesis de Poisson de dos generadores de norma es también un generador de norma (el paréntesis de Poisson de dos constricciones de primera clase es también de primera clase). (iii) la conjetura es válida en todas las aplicaciones físicas conocidas.

Sin embargo a pesar de los contraejemplos es posible dar una prueba de la conjetura de Dirac que excluya a éstos. Dicha prueba se basa en las suposiciones de rango hechas en este capítulo (§2.1.2).

Hemos visto en §1.2.1 que el paréntesis de Poisson $\{\gamma_{m_1}, H\}$ de cualquier constricción de primera clase γ_{m_1} con el hamiltoniano, genera una transformación de norma que no cambia el estado físico. Se sigue del algoritmo de consistencia y de la manera en la cual aparecen las constricciones γ_{m_2} (ec. (2.4)), que todas las constricciones secundarias (primera clase) generan transformaciones de norma. Esto es así, porque el paréntesis de Poisson $\{\gamma_{m_1}, H\}$ contiene todas las constricciones secundarias γ_{m_2} cuando $V_{m_1}^{m_2}$ es de rango máximo sobre la superficie de constricción.

Similarmente, el paréntesis de poisson $\{\gamma_{m_2}, H\}$ contiene todas las constricciones terciarias, etc., . . . , así todas las constricciones de primera clase, primarias, secundarias o de cualquier generación, generan transformaciones de norma que no cambian el estado físico del sistema a un tiempo dado. Esto prueba la conjetura de Dirac bajo las suposiciones hechas anteriormente.

En conclusión, dos diferentes tipos de conjuntos de variables canónicas que describen el mismo estado físico del sistema, al tiempo t_1 , difieren por una transformación generada por

$$\mu^{m_1} \gamma_{m_1}, \quad (2.7)$$

donde todas las constricciones (primarias, secundarias, etc.) aparecen. Inversamente, cualesquiera dos conjuntos de variables canónicas relacionadas al tiempo t_1 por una trans-

formación generada por (2.7) puede ser obtenida a partir del mismo dato inicial por elegir diferentes funciones $u^m(t)$ en las ecuaciones de movimiento.

Mencionemos por último que los coeficientes μ^m son independientes al tiempo t_1 , pero no son independientes como funciones del tiempo, dado que la solución general de las ecs. (2.6) envuelve únicamente M_1 funciones arbitrarias (y no $M = M_1 + M_2 + \dots + M_L$). Veremos después cuales son las relaciones funcionales precisas entre las funciones $\mu^m(t)$.

2.2.2 Un contraejemplo a la conjetura de Dirac

Antes de continuar con nuestra exposición, ilustremos con un ejemplo que la conjetura de Dirac puede no cumplirse cuando las suposiciones que hicimos en §2.1.2 no son satisfechas.

Considere el sistema descrito por el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} e^y \dot{x}^2. \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de movimiento dejan a y arbitrario, pero restringen a x a ser una constante en el tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta x} &= e^y \ddot{x} + e^y \dot{x} \dot{y} = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta y} &= -\frac{1}{2} \dot{x}^2 e^y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La variable y es así, una norma pura. Un "estado físico" del sistema es completamente especificado por una simple constante x_0 , el valor inicial de x .

El paso a la formulación hamiltoniana es directa. Uno encuentra

$$\gamma_1 \equiv p_y \approx 0 \quad (2.10)$$

como una constricción primaria. El hamiltoniano canónico es

$$H = \frac{1}{2} e^{-y} p_x^2.$$

Hay una constricción secundaria,

$$\dot{p}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 \equiv p_x \approx 0.$$

Las constricciones son ambas de primera clase. Sin embargo, la primera genera una transformación de norma. La segunda genera cambios en x , pero estos cambios no corresponden a arbitrariedad alguna en la solución general de las ecuaciones de movimiento (2.9). Por consiguiente, la conjetura de Dirac no es válida para este sistema.

Notese que en este contraejemplo,

$$\{p_y, H\} = \frac{1}{2} e^{-y} p_x^2 \neq V_y^{-1} \gamma_1 + V_y^{-2} \gamma_2. \quad (2.11)$$

En general, los contraejemplos a la conjetura de Dirac, son tales que las matrices $V_{m_i}^{m_i+1}$ no satisfacen las condiciones de rango máximo. Estos sistemas aparecen así como sistemas físicamente patológicos, debido a que no poseen una estructura natural de paréntesis de Poisson en el espacio de los distintos datos iniciales permisibles físicamente. Para remover la patología, uno debe entonces *postular* que todas las constricciones de primera clase generan simetrías de norma. Esto significa que el lagrangiano original no exhibe todas las invariencias de norma relevantes.

Así, la obtención de las invariencias de norma de un lagrangiano son de interés real sólo para sistemas que satisfacen la conjetura de Dirac.

2.2.3 Acción extendida

En el capítulo anterior, hemos discutido la necesidad de introducir en la teoría al hamiltoniano extendido. Esto fue inicialmente sugerido por Dirac, para tener en el formalismo de una manera manifiesta, todas las simetrías del sistema. Recordemos que en el formalismo extendido, todas las constricciones de primera clase son tratadas al mismo nivel.

Las ecuaciones de movimiento de este nuevo formalismo se obtiene de la *acción extendida*

$$S_E[q^i, p_i, u^{m_i}] = \int (p_i \dot{q}^i - H - u^{m_i} \gamma_{m_i}) dt. \quad (2.12)$$

En la cual todas las constricciones de primera clase $\gamma_a = \gamma_{m_i} = (\gamma_{m_1}, \dots, \gamma_{m_L})$ y no sólo las primarias, son incluidas con un multiplicador de Lagrange independiente.

Las ecuaciones que se obtienen de la acción extendida, no coinciden con las ecuaciones lagrangianas originales ya que uno introduce funciones arbitrarias del tiempo adicionales en las soluciones. Es por esta razón que el formalismo a sido llamado "extendido" por Dirac.

Sin embargo, a pesar de que uno cambia las ecuaciones de movimiento, uno no cambia la evolución temporal de las funciones invariantes de norma, porque éstas conmutan con todas las constricciones de primera clase. Por lo tanto, el formalismo extendido describe el mismo sistema físico. Este simplemente contiene variables de norma puras adicionales-los nuevos multiplicadores- y consecuentemente, también invariencias de norma adicionales.

2.2.4 Invariancia de norma de la acción hamiltoniana extendida

Una ventaja de la acción hamiltoniana extendida (2.12) es que sus simetrías de norma son todas conocidas en forma cerrada. Un conjunto completo puede obtenerse si hacemos una transformación de norma a la acción extendida y observamos cual es la condición

para que dicha transformación sea nula.

Más explícitamente

$$\delta S_E = \int (p_i \delta q^i + \delta p_i q^i - \delta H - \delta u^a \gamma_a - u^a \delta \gamma_a) dt, \quad (2.13)$$

por (1.56) y (2.6) se tiene

$$\delta p_i = \{p_i, \gamma_a\} \varepsilon^a = -\frac{\partial \gamma_a}{\partial q^i} \varepsilon^a, \quad \delta q^i = \{q^i, \gamma_a\} \varepsilon^a = \frac{\partial \gamma_a}{\partial p_i} \varepsilon^a, \quad (2.13b)$$

$$\delta H = \{H, \gamma_a\} \varepsilon^a = V_a{}^b \gamma_b \varepsilon^a, \quad \delta \gamma_a = \{\gamma_a, \gamma_b\} \varepsilon^b = C_{ab}{}^c \gamma_c \varepsilon^b,$$

donde las ε^a son funciones arbitrarias del tiempo. Si se integra por partes (2.13) y utilizamos las expresiones (2.13b) obtenemos

$$\delta S = \int (\dot{\varepsilon}^a - \varepsilon^b V_b{}^a - \delta u^a - u^c \varepsilon^b C_{cb}{}^a) \gamma_a dt - \varepsilon^a \gamma_a + p_i \delta q^i$$

lo cual implica

$$\delta_\varepsilon u^a = \dot{\varepsilon}^a + u^c \varepsilon^b C_{bc}{}^a - \varepsilon^b V_b{}^a.$$

Así, un conjunto completo de simetrías de norma para la acción extendida es

$$\delta q^i = \{q^i, \gamma_a\} \varepsilon^a, \quad (2.14)$$

$$\delta_\varepsilon p_i = \{p_i, \gamma_a\} \varepsilon^a, \quad (2.14b)$$

$$\delta_\varepsilon u^a = \dot{\varepsilon}^a + u^c \varepsilon^b C_{bc}{}^a - \varepsilon^b V_b{}^a. \quad (2.14c)$$

Bajo estas simetrías, el cambio en S_E es un término de frontera.

Lo interesante de las transformaciones de norma (2.14) es que éstas son puramente hamiltonianas: las transformaciones de las coordenadas y de los momentos no involucran a los multiplicadores de Lagrange y por lo tanto están completamente definidas dentro del espacio fase. Que tal descripción sea posible, es una propiedad importante del formalismo hamiltoniano. Como veremos, esta característica no está presente en el formalismo hamiltoniano no extendido (total), el cual no es desde este punto de vista totalmente hamiltoniano. Más aún, este formalismo no extendido puede considerarse como una descripción intermedia, entre la descripción lagrangiana y la completamente hamiltoniana. Esto es así porque la distinción entre constricciones primarias, secundarias, etc., que mantiene el formalismo no extendido, es consecuencia de la descripción lagrangiana y no puede ser formulada en términos de conceptos intrínsecos del espacio fase.

Con el objetivo de hacer contacto con el formalismo no extendido y de encontrar las simetrías de norma de éste, utilizaremos una representación un poco diferente para las transformaciones de norma S_E . En esta nueva representación llevaremos los multiplicadores al interior de los paréntesis. Con esta representación se obtiene, procediendo de una manera análoga a la (2.13), las simetrías de norma

$$\delta_\mu F = \{F, G\}, \quad G = \mu^a \gamma_a. \quad (2.15)$$

$$\delta_\mu u^a = \frac{D\mu^a}{Dt} + u^c \mu^b C_{bc}{}^a - \mu^b V_b{}^a + \{\mu^a, H_E\}, \quad (2.15b)$$

donde F es una función arbitraria de q^i y p_i , y donde μ^a puede ser función de $q^i, p_i, u^a, \dot{u}^a, \ddot{u}^a, \dots$, y t . La derivada D/Dt en la ec. (2.15b) significa

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u}^a \frac{\partial}{\partial u^a} + \ddot{u}^a \frac{\partial}{\partial \dot{u}^a} + \dots,$$

es decir, ésta mide la dependencia explícita del tiempo en μ^a , así como la dependencia funcional que μ^a tiene con los multiplicadores de Lagrange y sus derivadas temporales.

Bajo las transformaciones de simetría (2.15) y (2.15b), la acción cambia en un término de frontera

$$\delta S = -\mu^a \gamma_a + p_i \delta q^i \approx \mu^a \left(\frac{\partial \gamma_a}{\partial p_i} - \gamma_a \right)$$

2.3 FORMA LAGRANGIANA DE LAS TRANSFORMACIONES DE NORMA

2.3.1 Ecuaciones básicas

Una vez que las simetrías de norma del hamiltoniano extendido son conocidas, es directo obtener las simetrías del hamiltoniano total, y así también, las del lagrangiano original si eliminamos los p_i y los u^{m_i} por medio de sus ecuaciones de movimiento.

Por comparación de (2.1b) y (2.12) notamos que la acción total S_T se obtiene de la acción extendida S_E , si imponemos en esta última la condición de norma

$$u^{m_i} = 0, \quad i \geq 2 \quad (2.16)$$

sobre los multiplicadores de Lagrange u^{m_2}, u^{m_3}, \dots , asociados con las constricciones secundarias, terciarias, etc. Estas condiciones de norma pueden ser extendidas mediante una transformación de norma (2.14) o (2.15) y más aún, es posible introducirlas dentro de la acción dado que uno no pierde ecuaciones por hacer esto. Las constricciones $\gamma_{m_2} \approx 0, \gamma_{m_3} \approx 0, \dots$, reaparecen a través del algoritmo de consistencia.

Podemos concluir que las simetrías de norma de la acción total S_T (y de la acción original S_L) sólo constituyen un caso particular de las simetrías de norma de la acción extendida S_E , el de la norma (2.16).

Así las simetrías de norma de S_T son

$$\delta F = \{F, G\}, \quad G \approx \mu^a \gamma_a, \quad (2.17)$$

con la condición de que μ^a debe preservar la condición de norma (2.16) (esta condición se sigue de (2.15b)).

$$\frac{D\mu^{m_i}}{Dt} + \{\mu^{m_i}, H\} + u^{m_1} \{\mu^{m_i}, \gamma_{m_1}\} - \sum_{j \geq i-1} \mu^{m_j} V_{m_j}{}^{m_i} - u^{m_1} \sum_{j \geq 1} \mu^{m_j} C_{m_1 m_j}{}^{m_i} = 0. \quad (2.17b)$$

para $i \geq 2$.

Por otro lado la variación de u^{m_1} está dada por

$$\delta u^{m_1} = \frac{D\mu^{m_1}}{Dt} + \{\mu^{m_1}, H\} + u^{m_1} \{\mu^{m_1}, \gamma_{m_1}\} - \sum_j \mu^{m_j} V_{m_j}^{m_1} - u^{m_1} \sum_j \mu^{m_j} C_{m_1 m_j}^{m_1}, \quad (2.17c)$$

Uno puede verificar directamente (aunque esto no es necesario) que las ecs. (2.17) dejan invariante a la acción S_T hasta un término de frontera.

2.3.2 Soluciones de las ecuaciones básicas

La solución general de la ec. (2.17b) puede ser construida si consideramos a ésta como un sistema de ecuaciones para las μ^{m_i} . Dicha construcción puede efectuarse paso a paso, comenzando por considerar la última ecuación, para la cual se tiene que $i = L$ y considerando después sucesivamente en orden descendente las ecuaciones para $i = L - 1, \dots$, etc., hasta $i = 1$.

La ec. (2.17b) con $i = L$ puede ser reescrita como

$$\mu^{m_{L-1}} V_{m_{L-1}}^{m_L} = \frac{D\mu^{m_L}}{Dt} + \{\mu^{m_L}, H\} + u^{m_1} \{\mu^{m_L}, \gamma_{m_1}\} - \mu^{m_L} V_{m_L}^{m_L} - u^{m_1} \mu^{m_L} C_{m_1 m_L}^{m_L} \quad (2.18)$$

La solución general de la ec. (2.18) contiene M_{L-1} funciones arbitrarias del tiempo. Esto puede ser visto como sigue. Primero, las M_L funciones μ^{m_L} no están determinadas por (2.18). Sin pérdida de generalidad, podemos tomar a estas μ^{m_L} como funciones arbitrarias que dependen únicamente de t .

Debido a que el rango máximo de $V_{m_{L-1}}^{m_L}$ es M_L , la ec. (2.18) determina entonces M_L de los parámetros $\mu^{m_{L-1}}$ en términos de μ^{m_L} , $\partial\mu^{m_L}/\partial t$, q^i , p_i y u^{m_1} . Los restantes $M_{L-1} - M_L$ parámetros pueden ser tomados como alguna solución de la ecuación $\mu^{m_{L-1}} V_{m_{L-1}}^{m_L} = 0$, estos parámetros pueden depender de t y también de q y p si las $V_{m_{L-1}}^{m_L} = 0$ son funciones de las variables canónicas. Por ejemplo, uno puede tomar $\mu^{m_{L-1}} = K^\rho(t) A_\rho^{m_{L-1}}(q, p)$ con $A_\rho^{m_{L-1}} V_{m_{L-1}}^{m_L} = 0$ y $K^\rho(t)$ arbitrario.

Así a este punto hay $M_L + (M_{L-1} - M_L) = M_{L-1}$ funciones arbitrarias en la solución de (2.17b) y M_L de ellas aparecen junto con sus primeras derivadas temporales debido al término $\frac{D\mu^{m_L}}{Dt}$.

El siguiente paso en el análisis, es escribir la ec. (2.17b) con $i = L - 1$

$$\begin{aligned} \mu^{m_{L-2}} V_{m_{L-2}}^{m_{L-1}} &= \frac{D\mu^{m_{L-1}}}{Dt} + \{\mu^{m_{L-1}}, H\} + u^{m_1} \{\mu^{m_{L-1}}, \gamma_{m_1}\} \\ &\quad - \mu^{m_{L-1}} V_{m_{L-1}}^{m_{L-1}} - u^{m_1} \mu^{m_{L-1}} C_{m_1 m_{L-1}}^{m_{L-1}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

La solución general de esta ecuación contiene $M_{L-2} - M_{L-1}$ funciones arbitrarias. Esto es porque una vez dada las M_{L-1} funciones arbitrarias en (2.18), conocemos de manera

completa, todas las $\mu^{m_{L-1}}$. Nuevamente por las suposiciones de rango (2.6) tenemos que la ec. (2.19) determina M_{L-1} de los parámetros $\mu^{m_{L-1}}$ en términos de $\mu^{m_{L-2}}$, $\partial\mu^{m_{L-1}}/\partial t$, q , p , u^{m_1} y \dot{u}^{m_1} . Los restantes $M_{L-2} - M_{L-1}$ parámetros son tomados como una solución de la ecuación $\mu^{m_{L-2}} V_{m_{L-2}}^{m_{L-1}} = 0$.

El análisis de la restantes ecs. (2.17b) se hace de la misma forma en que lo hemos hecho. La forma que toman estas ecuaciones cuando $i = k$ es

$$\begin{aligned} \mu^{m_{k-1}} V_{m_{k-1}}^{m_k} &= \frac{D\mu^{m_k}}{Dt} + \{\mu^{m_k}, H\} + u^{m_1} \{\mu^{m_k}, \gamma_{m_1}\} \\ &\quad - \sum_{j \geq k} \mu^{m_j} V_{m_j}^{m_k} - u^{m_1} \sum_{j \geq k} \mu^{m_j} C_{m_1 m_j}^{m_k}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

El lado derecho de esta ecuación depende únicamente de q^i , p_i , de u^{m_1} y de sus derivadas temporales hasta orden $L - k$, y de las funciones arbitrarias μ^{m_i} de orden más grande que $k - 1$ introducidas en el análisis de las ecs. (2.17b) con $i > k$ y sus derivadas temporales. Remarquemos que las derivadas son consecuencia del término $D\mu^{m_k}/Dt$.

Dado que $V_{m_{k-1}}^{m_k}$ es de rango máximo M_k , la ec. (2.20) determina M_k de las M_{k-1} funciones $\mu^{m_{k-1}}$. Las restantes $M_{k-1} - M_k$ son arbitrarias.

Así, en cada etapa uno incrementa el orden de las derivadas temporales de los parámetros de norma introducidos anteriormente en una unidad, e introduce $M_{k-1} - M_k$ nuevas funciones arbitrarias.

El número total de funciones arbitrarias es igual a M_1 . Este número es igual a el número de funciones arbitrarias en la solución general de las ecuaciones de movimiento que se siguen de S_T . Por lo tanto, la construcción que hemos mostrado, nos lleva a encontrar un conjunto completo de transformaciones de norma para la acción total S_T .

2.4 CONTEO DE GRADOS DE LIBERTAD

El número total de funciones arbitrarias del tiempo independientes, que aparecen en el generador de norma $G = \mu^{m_1} \gamma_{m_1}$ es igual a

$$M_L + (M_{L-1} - M_L) + \cdots + (M_1 - M_2) = M_1. \quad (2.21)$$

Esto es igual al número de constricciones primarias (primera clase). De estos M_1 parámetros de norma, $M_1 - M_2$ aparecen sin derivar, $M_2 - M_1$ aparecen junto con sus primeras derivadas temporales, $M_3 - M_1$ aparecen junto con sus primeras y segundas derivadas, etc. En otras palabras, el número de generación de las constricciones asociadas con una transformación de norma dada es igual al orden más alto de la derivada temporal de los parámetros de norma más uno. Más aún, los parámetros de norma y sus derivadas temporales aparecen todos en las leyes de transformación

$$\delta F = \{F, G\} \quad (2.22)$$

porque las constricciones son asumidas como irreducibles.

A un tiempo dado y en particular el tiempo al cual los datos iniciales son dados, uno puede elegir arbitrariamente cualquier función y sus sucesivas derivadas temporales. Así, si uno cuenta independientemente los parámetros de norma y sus derivadas temporales, uno encuentra un número total de parámetros de norma arbitrarios a $t = t_0$ igual al número de constricciones de primera clase (primarias, secundarias, terciarias, ...). Ya que uno tiene

$$(M_1 - M_2) + 2(M_2 - M_3) + 3(M_3 - M_4) + \cdots + k(M_k - M_{k+1}) + \cdots + LM_L = M_1 + M_2 + \cdots + M_L = M. \quad (2.23)$$

Queda así establecido el siguiente criterio: el número de constricciones de primera clase es igual al número M de parámetros de norma efectivos independientes que aparecen en las leyes de transformación de norma. En ausencia de constricciones de segunda clase, el número de grados físicos de libertad es $N - M$.

2.5 EJEMPLOS

2.5.1 Ejemplo 1

Como un ejemplo de la obtención de las transformaciones de norma de un Lagrangiano singular, consideremos el siguiente lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} [(q_2 - e^{q_1})^2 + (\dot{q}_1 - q_2)^2]. \quad (2.24)$$

Dado que este lagrangiano no contiene a \dot{q}_1 concluimos que existe una constricción primaria

$$\gamma_1 = p_1 \approx 0. \quad (2.25)$$

La expresión para los momentos canónicos conjugados a q_2 y q_1 son

$$p_2 = \dot{q}_2 - e^{q_1} \quad \text{y} \quad p_1 = \dot{q}_1 - q_2. \quad (2.26)$$

y la expresión del hamiltoniano canónico es

$$H = e^{q_1} p_2 + q_2 p_1 + \frac{1}{2} (p_2)^2 + \frac{1}{2} (p_1)^2. \quad (2.27)$$

Introduciendo el requerimiento de consistencia $\dot{\gamma}_1 \approx 0$ obtenemos la constricción secundaria γ_2

$$\dot{\gamma}_1 = \{H, p_1\} = e^{q_1} p_2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = e^{q_1} p_2. \quad (2.28)$$

e introduciendo nuevamente el requerimiento de consistencia $\dot{\gamma}_2 \approx 0$ obtenemos una con-
stricción terciaria

$$\dot{\gamma}_2 = \{H, e^{\eta} p_2\} = e^{\eta} p_3 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_3 = e^{\eta} p_3. \quad (2.29)$$

Estas son todas las constricciones de la teoría, ya que $\dot{\gamma}_3 = 0$ idénticamente. De las
ecs.(2.28) y (2.29) concluimos que

$$V_1^2 = V_2^3 = 1. \quad (2.30)$$

Las tres constricciones que hemos obtenido son de primera clase, ya que

$$\begin{aligned} \{\gamma_1, \gamma_2\} = \{p_1, e^{\eta} p_2\} = -e^{\eta} p_2 = -\gamma_2 &\quad \Rightarrow \quad C_{12}^2 = -C_{21}^2 = -1, \\ \{\gamma_1, \gamma_3\} = \{p_1, e^{\eta} p_3\} = -e^{\eta} p_3 = -\gamma_3 &\quad \Rightarrow \quad C_{13}^3 = -C_{31}^3 = -1, \\ \{\gamma_2, \gamma_3\} = \{e^{\eta} p_2, e^{\eta} p_3\} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tenemos así que para la elección que hemos hecho de las constricciones γ_2 y γ_3 , las
funciones de estructura $V_{m_i, m_j}^{m_k}$, $C_{m_i, m_j}^{m_k}$, son constantes.

Las transformaciones de norma que dejan invariante a la acción extendida se obtienen
de las ecs. (2.14). De (2.14) tenemos

$$\begin{aligned} \delta q^i &= \{q^i, p_1\} \varepsilon^1 + \{q^i, e^{\eta} p_2\} \varepsilon^2 + \{q^i, e^{\eta} p_3\} \varepsilon^3 \\ \Rightarrow \quad \delta q^1 &= \varepsilon^1, \quad \delta q^2 = e^{\eta} \varepsilon^2, \quad \delta q^3 = e^{\eta} \varepsilon^3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

De (2.14b) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon p_i &= \{p_i, p_1\} \varepsilon^1 + \{p_i, e^{\eta} p_2\} \varepsilon^2 + \{p_i, e^{\eta} p_3\} \varepsilon^3 \\ \Rightarrow \quad \delta p_1 &= \delta p_2 = \delta p_3 = 0. \end{aligned}$$

y de (2.14c)

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \lambda^a &= \dot{\varepsilon}^a + \lambda^2 \varepsilon^1 C_{12}^a + \lambda^3 \varepsilon^1 C_{13}^a + \lambda^1 \varepsilon^2 C_{21}^a + \lambda^1 \varepsilon^3 C_{31}^a - \varepsilon^1 V_1^a - \varepsilon^2 V_2^a \\ \Rightarrow \quad \delta_\varepsilon \lambda^1 &= \dot{\varepsilon}^1, \quad \delta_\varepsilon \lambda^2 = \dot{\varepsilon}^2 - \lambda^2 \varepsilon^1 + \lambda^1 \varepsilon^2 - \varepsilon^1, \quad \delta_\varepsilon \lambda^3 = \dot{\varepsilon}^3 - \lambda^3 \varepsilon^1 + \lambda^1 \varepsilon^3 - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Calculemos ahora el generador de norma G , de la acción hamiltoniana total. De la ec.
(2.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{D\mu^3}{Dt} = \{\mu^3, H\} + u^1 \{\mu^3, \gamma_1\} + u^1 u^3 \\ \mu^1 &= \frac{D\mu^2}{Dt} = \{\mu^2, H\} + u^1 \{\mu^2, \gamma_1\} + u^1 u^2. \end{aligned}$$

Tenemos así 2 ecuaciones con tres incógnitas. Eligiendo $\mu^3 = \varepsilon$ obtenemos

$$\mu^3 = \varepsilon, \quad \mu^2 = \dot{\varepsilon} + u^1 \varepsilon, \quad \mu^1 = \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} u^1 + \varepsilon \dot{u}^1 + u^1 (\dot{\varepsilon} + u^1 \varepsilon). \quad (2.33)$$

Concluimos así que el generador de norma $G = \mu^a \gamma_a$ es

$$G = [\ddot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}u^1 + \varepsilon \dot{u}^1 + (u^1)^2 \varepsilon] p_1 + (\dot{\varepsilon} + u^1 \varepsilon) p_2 e^{q^1} + \varepsilon p_3 e^{q^1}, \quad (2.34)$$

con lo cual las transformaciones de norma que dejan invariantes a la acción hamiltoniana total son

$$\begin{aligned} \delta q^1 &= \{q^1, G\} = \ddot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}u^1 + \varepsilon \dot{u}^1 + (u^1)^2 \varepsilon, \\ \delta q^2 &= \{q^2, G\} = (\dot{\varepsilon} + u^1 \varepsilon) e^{q^1} \\ \delta q^3 &= \{q^3, G\} = \varepsilon e^{q^1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Finalmente para obtener las transformaciones de norma lagrangianas debemos eliminar el multiplicador de lagrange u^1 en las ecuaciones (2.35), mediante las ecuaciones de movimiento $\delta S_T / \delta p_i$

$$\frac{\delta S_T}{\delta p_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}^1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} + u^1 \frac{\partial p_1}{\partial p_1} = u^1.$$

Obtenemos pues que las transformaciones de norma que dejan invariante al lagrangiano original son

$$\begin{aligned} \delta q^1 &= \ddot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}\dot{q}^1 + \varepsilon \ddot{q}^1 + \varepsilon (\dot{q}^1)^2, \\ \delta q^2 &= (\dot{\varepsilon} + \dot{q}^1 \varepsilon) e^{q^1}, \\ \delta q^3 &= \varepsilon e^{q^1}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Notemos que las transformaciones de norma dependen de la velocidad \dot{q}^1 la cual no puede ser expresada en términos de las coordenadas q y los momentos p únicamente, y de la aceleración \ddot{q}^1 la cual no está determinada por las ecuaciones de movimiento.

En este ejemplo la redefinición del parámetro $\varepsilon e^{q^1} \rightarrow \eta$ simplifica las transformaciones de norma

$$\begin{aligned} \delta q^1 &= e^{-q^1} \dot{\eta}, \\ \delta q^2 &= \dot{\eta}, \\ \delta q^3 &= \eta. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dado que tenemos involucradas en las transformaciones de norma a η , $\dot{\eta}$ y $\ddot{\eta}$ concluimos que el número de grados físicos de libertad es

$$3 - 3 = 0 \quad (2.38)$$

Para finalizar con este primer ejemplo comentemos que si en la ec. (2.28) tomamos como la constricción secundaria a $\gamma_2 = p_2$ y en la ec. (2.29) tomamos $\gamma_3 = p_3$, las transformaciones de simetría que se obtienen son desde luego las mismas que hemos encontrado, con la diferencia de que en el desarrollo del algoritmo para su obtención, aparecen todas las $C_{m,m}^{m_i} = 0$ y las $V_m^{m_j}$ se modifican en la siguiente forma

$$V_1^2 = e^{q^1}, \quad V_2^3 = 1,$$

notemos que V_1^2 deja de ser una función constante.

2.5.2 Teoría abeliana de Chern-Simons en tres dimensiones

Consideremos la acción de Chern-Simons, en la métrica $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$

$$S[A_\mu] = \frac{1}{4} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho. \quad (2.39)$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen para esta acción son

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.40)$$

y la expresión de los momentos canónicos es

$$\Pi^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{0\mu\nu} A_\nu. \quad (2.41)$$

Obtenemos así una restricción primaria

$$\gamma_1 = \Pi^0 \approx 0. \quad (2.42)$$

El hamiltoniano canónico que se obtiene para esta teoría es

$$H = \int d^3x \left(\Pi^i \partial_i A_0 - \frac{1}{4} \varepsilon^{0ij} F_{ij} A_0 \right). \quad (2.43)$$

Del algoritmo de consistencia $\dot{\gamma}_1 = 0$ se obtiene una restricción secundaria

$$\gamma_2 = \dot{\gamma}_1 = \{H, \Pi_0\} = -2\partial_i \Pi_i. \quad (2.44)$$

Estas son todas las restricciones de la teoría ya que $\dot{\gamma}_2 = 0$ idénticamente. De la ecuación anterior concluimos que

$$V_1^2 = -2. \quad (2.45)$$

Las restricciones γ_1 y γ_2 son de primera clase, y dado que $\{\gamma_1, \gamma_2\} = 0$ idénticamente concluimos que las funciones de estructura $C_{12}^{\alpha} = 0$.

Las transformaciones de norma que dejan invariante a la acción hamiltoniana extendida se obtienen de la expresión

$$\delta F^\mu = \int d^3y \left(\{F^\mu(x, t), \Pi_0(y, t)\} \varepsilon^1(y, t) + \{F^\mu(x, t), \partial^i \Pi_i(y, t)\} \varepsilon^2(y, t) \right) \quad (2.46)$$

y de la ecuación (2.14c). Obteniéndose

$$\begin{aligned} \delta A^0 &= \varepsilon^1, & \delta A^i &= -\partial^i \varepsilon^2 \\ & & \delta p_\mu &= 0 \\ \delta_\varepsilon \lambda^1 &= \varepsilon^1, & \delta_\varepsilon \lambda^2 &= \varepsilon^2 + 2\varepsilon^1. \end{aligned} \quad (2.47)$$

El generador de norma G para esta teoría es

$$G = \int d^3x (\mu^1 \gamma_1 + \mu^2 \gamma_2) = \int d^3x \left(-\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}(x, t) \Pi_0(x, t) + \varepsilon(x, t) \partial^i \Pi_i(x, t) \right) \quad (2.48)$$

y las transformaciones de norma que dejan invariante a la acción hamiltoniana total son

$$\delta A^0 = -\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}(x, t), \quad \delta A^j = -\partial^j \varepsilon(x, t). \quad (2.49)$$

Estas son también las expresiones de las transformaciones de simetría del lagrangiano original (ya que no hay momentos o multiplicadores de Lagrange que deban ser sustituidos).

Capítulo 3

INTEGRAL DE TRAYECTORIA EN MECÁNICA CUÁNTICA

Los conceptos físicos y matemáticos fundamentales en los que se sustenta la formulación de integral de trayectoria de la mecánica cuántica, fueron desarrollados primeramente por Wiener y R. P. Feynman. En la actualidad, la técnica de operadores aparece como la más apropiada en la solución de los problemas más generales de la mecánica cuántica, sin embargo, la formulación de integral de trayectoria (también conocida como integral funcional) nos provee de una apreciación intuitiva del comportamiento mecánico cuántico extremadamente valiosa e ilustrativa, pero no sólo eso, también ha probado ser una herramienta sumamente poderosa en algunas ramas de la física teórica, en particular el método de integral de trayectoria es muy útil en el análisis de las teorías cuánticas de norma. Es por esto que dedicaremos este capítulo a dar una muy breve introducción al estudio de las integrales de trayectoria.

3.1 INTEGRAL DE TRAYECTORIA

3.1.1 Integral de trayectoria como un kernel

La aplicación usual de la integral de trayectoria en mecánica cuántica es producir una representación de la amplitud de probabilidad de encontrar a una partícula en q al tiempo t , si ella estuvo en q_0 al tiempo t_0

$$K(q, t; q_0, t_0) \equiv \langle q_f | \hat{U}(t, t_0) | q_i \rangle. \quad (3.1)$$

En el caso que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right). \quad (3.1b)$$

K es el kernel del operador de evolución $\hat{U}(t, t_0)$ en la representación de coordenadas. Si $\psi(q, t_0)$ es la función de onda al tiempo t_0 entonces la función de onda al tiempo t está dada por

$$\psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 K(q, t; q_0, t_0) \psi(q_0, t_0). \quad (3.1c)$$

La amplitud (3.1) puede ser reescrita como

$$K(q, t; q_0, t_0) = \langle q, t | q_0, t_0 \rangle, \quad (3.1d)$$

donde los estados $|q, t\rangle$ forman una base de eigenestados del operador de Heisenberg $\hat{q}(t)$ al tiempo t . Esto es, uno puede ver la amplitud (3.1) como el elemento de matriz del operador unitario en la representación de Heisenberg.

La representación en integral de trayectoria del kernel K es obtenida insertando el operador $\hat{1}$ en la forma

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 |q_1, t_1\rangle \langle q_1, t_1|, \quad (3.2)$$

donde t_1 es un punto intermedio entre t_0 y t

$$K(q, t; q_0, t_0) = \langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \langle q, t | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle. \quad (3.3)$$

Repetimos la misma operación con t_2 , el cual se toma entre t_1 y t , ($t_1 < t_2 < t$).

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 \langle q, t | q_2, t_2 \rangle \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle,$$

y así sucesivamente para n puntos intermedios t_1, t_2, \dots, t_n

$$\begin{aligned} \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots dq_n \langle q, t | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots dq_n \langle q, t | q_n, t_n \rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde suponemos que el límite $n \rightarrow \infty$ existe y es único cualquiera que sea la partición del intervalo (t_0, t) . Para facilitar el cálculo elegiremos una partición particular del intervalo (t_0, t) , esta es la que toma partes iguales de longitud Δt ,

$$\Delta t = \frac{t - t_0}{n + 1}, \quad (3.5)$$

de tal manera que cuando $n \rightarrow \infty$ implica que $\Delta t \rightarrow 0$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1)\Delta t = t - t_0$.

El cálculo del kernel K se reduce entonces por (3.4), al cálculo de los kernels que involucren a dos estados que difieren en Δt

$$\begin{aligned} \langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle &= \langle q_j | e^{-i \frac{\Delta t}{\hbar} \hat{H}} | q_{j-1} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_j | 1 - \frac{i \Delta t}{\hbar} \hat{H}(q_j, p_j) | p_j \rangle \langle p_j | q_{j-1} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{ip_j \frac{(q_j - q_{j-1})}{\hbar}} \left[1 - \frac{i \Delta t}{\hbar} H(q_j, p_j) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{ip_j \frac{(q_j - q_{j-1})}{\hbar}} e^{-i \frac{\Delta t}{\hbar} H(q_j, p_j)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $H(q_j, p_j)$ es la función hamiltoniana clásica correspondiente a (3.1) escrita en función de las variables clásicas q_j, p_j y la cual se obtiene por ordenar todos los operadores de momento \hat{p} a la izquierda y todos los operadores de posición \hat{q} a la derecha. Substituyendo (3.6) en (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_n \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_{n+1}}{2\pi\hbar} e^{ip_{n+1} \frac{(q - q_n)}{\hbar}} e^{ip_n \frac{(q_n - q_{n-1})}{\hbar}} \dots e^{ip_1 \frac{(q_1 - q_0)}{\hbar}} \\ &\quad \cdot e^{-i \frac{\Delta t}{\hbar} H(q, p_{n+1})} e^{-i \frac{\Delta t}{\hbar} H(q_n, p_n)} \dots e^{-i \frac{\Delta t}{\hbar} H(q_1, p_1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{\alpha=1}^n \frac{dq_\alpha dp_\alpha}{(2\pi\hbar)^n} \right) \frac{dp_{n+1}}{2\pi\hbar} e^{i \sum_{j=1}^{n+1} p_j \frac{(q_j - q_{j-1})}{\hbar}} e^{-i \frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^{n+1} H(q_j, p_j)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

en la cual convenimos

$$q_{n+1} = q \quad \text{y} \quad q_0 = q_0. \quad (3.8)$$

Introduciendo la función $q(\tau)$ para la cual

$$q_j = q(t_j), \quad (3.9)$$

podemos reescribir q_{j-1} como

$$q_{j-1} = q(t_{j-1}) = q(t_j - \Delta t) = q(t_j) - \dot{q}(t_j) \Delta t = q_j - \dot{q}_j \Delta t,$$

con lo cual la ecuación (3.7) adopta la forma

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{\alpha=1}^n \frac{dq_\alpha dp_\alpha}{(2\pi\hbar)^n} \right) \frac{dp_{n+1}}{2\pi\hbar} e^{i \sum_{j=1}^{n+1} p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j)}. \quad (3.10)$$

Esta expresión se escribe comunmente en la siguiente forma simbólica

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) e^{i \int_{t_0}^t d\tau [p(\tau) \dot{q}(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))]} \quad (3.11)$$

Resaltemos dos características importantes de la expresión anterior.

- (i) La integral funcional aparece como una suma sobre todas las trayectorias del espacio fase que comienzan en q_0 al tiempo inicial t_0 y terminan en q al tiempo t , sin restricción sobre los momentos en q_0 y q .
- (ii) La medida de integración $\mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau)$ es formalmente un producto sobre el tiempo de la medida de Liouville a cada tiempo.

3.1.2 Integral de trayectoria lagrangiana

Si el momento aparece cuadráticamente en el hamiltoniano, es decir, si $H(q, p)$ es de la forma

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q),$$

es posible efectuar en (3.10) la integral sobre las variables p_1, \dots, p_{n+1} , ya que estas son de tipo Gaussiano y pueden ser calculadas exactamente utilizando la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}. \quad (3.12)$$

Con la ayuda de dicha fórmula se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_j e^{i \frac{\Delta t}{\hbar} (p_j \dot{q}_j - \frac{1}{2m} p_j^2)} = \left(\frac{2m\pi\hbar}{i\Delta t} \right)^{1/2} e^{i \frac{\Delta t}{\hbar} \frac{m\dot{q}_j^2}{2}}, \quad (3.13)$$

obteniéndose que (3.10) se convierte en la integral de trayectoria lagrangiana

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{\alpha=1}^n dq_{\alpha} \right) \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{n+1}{2}} e^{i \frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{m\dot{q}_j^2}{2} - V(q_j) \right)} \\ &= \int_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int_{t_0}^t d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau))} \\ &= \int_{q_0}^q \mathcal{D}q(\tau) e^{i S(t_0, t; [q])}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde el factor $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{n+1}{2}}$ esta contenido en la medida $\mathcal{D}q(\tau)$ y $S(t_0, t; [q]) = \int_{t_0}^t d\tau \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau) - V(q(\tau)) \right]$.

Expresemos en una forma más detallada la integral de trayectoria lagrangiana. Si

$q_{cl}(\tau)$ es la trayectoria clásica, esta es solución de la ecuación de Euler-Lagrange y además satisface condiciones específicas en los extremos

$$\frac{d}{d\tau} m \dot{q}_{cl} = - \left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q=q_{cl}} ; \quad q_{cl}(t_0) = q_0, \quad q_{cl}(t) = q. \quad (3.15)$$

Si introducimos en (3.14) el cambio de variable

$$q(\tau) = q_{cl}(\tau) + x(\tau) \Rightarrow \mathcal{D}q(\tau) \rightarrow \mathcal{D}x(\tau) \quad (3.16)$$

donde $x(\tau)$ representa la desviación de la trayectoria $q(\tau)$ con respecto a la trayectoria clásica $q_{cl}(\tau)$, se obtiene

$$\begin{aligned} K(q, t; q_0, t_0) &= \int_{x(t_0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau [\frac{1}{2} m (\dot{q}_{cl} + \dot{x})^2 - V(q_{cl} + x)]} \\ &= \int_{x(t_0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau [\frac{1}{2} m \dot{q}_{cl}^2 - V(q_{cl})]} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau [\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{t^2}{2} V''(q_{cl}) - \sum_{p \geq 3} \frac{t^p}{p!} V^{(p)}(q_{cl})]} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde hemos hecho uso de la ecuación de Euler-Lagrange y de las condiciones en los extremos sobre $x(\tau)$ para eliminar los términos de primer orden en $x(\tau)$.

La amplitud K se escribe finalmente como

$$K(q, t; q_0, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int_{x(t_0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau [\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{t^2}{2} V''(q_{cl}) - \sum_{p \geq 3} \frac{t^p}{p!} V^{(p)}(q_{cl})]}.$$

Si V es cuadrático en q entonces sólo los dos primeros términos del exponente en el integrando contribuyen a la integral, para un potencial V de mayor orden no se conoce hasta ahora como hacer la integral.

3.1.3 Integral sobre la parte cuadrática

Resolvamos el caso general para un potencial cuadrático en q , en este caso la ecuación (3.17) se reduce a la expresión

$$K(q, t; q_0, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int_{x(t_0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau [\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{t^2}{2} V''(q_{cl})]}, \quad (3.18)$$

y el problema queda resuelto si se obtiene el valor para la integral de la expresión anterior (ya que la acción clásica se puede calcular de una manera relativamente simple). Comencemos por notar que

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \frac{d}{d\tau} (x \dot{x}) - x \frac{d^2}{d\tau^2} x \Rightarrow \int_{t_0}^t d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{x^2}{2} V''(q_{cl}) \right] \\ &= \int_{t_0}^t d\tau \frac{m}{2} x(\tau) \left[- \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{V''(q_{cl})}{m} \right] x(\tau), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $x(t_0) = x(t) = 0$. La integral queda reescrita entonces como

$$\int_{x(t_0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \frac{m}{2} \dot{x}(\tau) \left[-\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{V''(q_{cl})}{m} \right] x(\tau)}. \quad (3.19)$$

Con la integral escrita de esta manera el problema se reduce a resolver la ecuación de valores propios (Sturm-Liouville)

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega(\tau) \right) \psi(\tau) = \lambda \psi(\tau) \quad \text{con} \quad \omega(\tau) \equiv -\frac{1}{m} V''(q_{cl}). \quad (3.20)$$

El operador diferencial debe ser formalmente autoadjunto en el producto escalar

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{t_0}^t d\tau \varphi(\tau) \psi(\tau), \quad (3.21)$$

y esto se cumple automáticamente si $\psi(t_0) = \psi(t) = 0$.

Sean λ_n sus valores propios y ψ_n las funciones propias ortonormales ($\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$) asociadas. Tendremos entonces

$$x(\tau) = \sum_n a_n \psi_n(\tau) \quad \text{con} \quad a_n = \langle \psi_n | x(\tau) \rangle \quad (3.22)$$

y

$$\int_{t_0}^t d\tau x(\tau) \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega(\tau) \right] x(\tau) = \int_{t_0}^t d\tau x(\tau) \sum_n a_n \lambda_n \psi_n(\tau) = \sum_n a_n^2 \lambda_n. \quad (3.22b)$$

Esta última ecuación nos sugiere un cambio de variable en la integral funcional y como consecuencia, un cambio de medida

$$x(\tau) \rightarrow a_n; \quad \mathcal{D}x(\tau) \rightarrow \prod_n da_n \cdot \text{Jacobiano}. \quad (3.23)$$

De (3.22) tenemos que la transformación $x(\tau) \rightarrow a_n$ es lineal, por lo que el Jacobiano $J = \{ \partial x / \partial a_n \}$ es constante y puede salir de la integral, así (3.19) se puede escribir como

$$\begin{aligned} J \cdot \int \prod_n (da_n) e^{\frac{im}{\hbar} \sum_n a_n^2 \lambda_n} &= J \prod_n \left(\frac{2i\pi\hbar}{m\lambda_n} \right)^{1/2} \\ &= J \left(\frac{2i\pi\hbar}{m} \right)^{n/2} \prod \frac{1}{\lambda_n^{1/2}} \\ &= C \cdot \frac{1}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega(\tau) \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ya que el determinante del operador diferencial se define como el producto de sus valores propios. Desde luego que el determinante puede llegar a ser divergente o anularse si algún $\lambda = 0$, pero podemos "regularizar" a éste calculando la razón de dos determinantes.

3.1.4 Cálculo de determinantes

Si consideramos funciones $\omega(\tau)$ acotadas en el intervalo (t_0, t) y si $\psi_\lambda(\tau)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega(\tau)\right) \psi_\lambda(\tau) = \lambda \psi_\lambda(\tau)$$

con $\psi_\lambda(t_0) = 0$ y $\dot{\psi}_\lambda(t_0) = 1$ (condiciones de Cauchy), entonces podemos obtener el valor del determinante del operador diferencial aplicando el siguiente teorema

Teorema: Si $\omega^{(1)}(\tau)$ y $\omega^{(2)}(\tau)$ son dos funciones acotadas de τ y $\psi_\lambda^{(1)}(\tau)$, $\psi_\lambda^{(2)}(\tau)$ son las soluciones respectivas de las ecuaciones de eigenvalores descritas, con las mismas condiciones de Cauchy, entonces

$$\frac{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^{(1)}(\tau) - \lambda\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^{(2)}(\tau) - \lambda\right)} = \frac{\psi_\lambda^{(1)}(t)}{\psi_\lambda^{(2)}(t)} \quad (t = \text{cota superior}),$$

La demostración de este teorema consiste en mostrar que los dos miembros son dos funciones meromorfas de λ que tienen los mismos ceros, los mismos polos y el mismo límite l cuando $\lambda \rightarrow \infty$ en toda dirección del plano complejo, excepto a lo largo del eje real, para una demostración detallada ver (Coleman, S. (1986)).

Del teorema obtenemos que para $\lambda = 0$

$$\frac{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^{(1)}(\tau)\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^{(2)}(\tau)\right)} = \frac{\psi_0^{(1)}(t)}{\psi_0^{(2)}(t)}. \quad (3.25)$$

Si tomamos el sistema (2) como la partícula libre entonces $\omega^2(\tau) = 0$ y $d^2\psi_0/d\tau^2 = 0 \Rightarrow \psi_0 = t - t_0 = T$ (notemos que esta solución satisface las condiciones de Cauchy) y la ecuación (3.25) toma la forma

$$\frac{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^{(1)}(\tau)\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}\right)} = \frac{\psi_0^{(1)}(t)}{T} \Rightarrow \det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^{(1)}(\tau)\right) = \frac{\psi_0^{(1)}(t) \det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}\right)}{T}, \quad (3.26)$$

con lo cual el propagador (3.18) toma la forma

$$K(q, t; q_0, t_0) = e^{ik^2 S_{cl}} \cdot \left[\frac{T}{\psi_0^{(1)}(t) \det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}\right)} \right]^{1/2}. \quad (3.27)$$

Para la partícula libre se infiere de la expresión explícita de su Kernel que

$$\left[\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}\right) \right]^{-1/2} = \frac{1}{c} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2},$$

finalmente obtenemos así que (3.18) queda dada por

$$K(q, t; q_0, t_0) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\psi_0'(t)} \right)^{1/2} e^{iS_{cl}}. \quad (3.28)$$

Señalemos 2 puntos importantes, (i) en la ecuación (3.26) estamos "regularizando" el determinante que deseamos calcular, esto lo hacemos tomando el cociente de dos determinantes donde uno de ellos es el de la partícula libre, como mencionamos anteriormente esto se hace para evitar problemas de divergencia. (ii) de (3.28) concluimos que para un potencial cuadrático el propagador queda completamente determinado por la acción clásica, salvo un factor que sólo depende de T .

3.2 LA ECUACION DE SCHRÖDINGER

Regresemos a la ecuación (3.1c) la cual nos expresa la función de onda al tiempo t' en términos de la función de onda al tiempo t

$$\psi(x, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dy K(x, t'; y, t) \psi(y, t). \quad (3.29)$$

Esta es la ecuación dinámica fundamental de la teoría y apesar de que esta es una ecuación integral, veremos que es completamente equivalente a la ecuación de Schrödinger, vía la integral de trayectoria. Para este fin consideremos nuevamente el movimiento en una dimensión para una partícula en un potencial $V(q)$, es decir, una partícula cuyo lagrangiano es $\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$ y con propagador

$$K(x, t'; y, t) = \int_{q(t)=y}^{q(t')=x} \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right] \right).$$

Para obtener la ecuación diferencial que buscamos, apliquemos esta relación en el caso especial en el que el tiempo t' difiere únicamente por un intervalo infinitesimal ε de t , es decir cuando $t' = t + \varepsilon$, con lo cual la ecuación integral (3.29) se escribe como

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dy K(x, t + \varepsilon; y, t) \psi(y, t). \quad (3.30)$$

Cuando la diferencia de tiempos es pequeña $K \sim e^{i\hbar^{-1}(\Delta t)L}$ por lo que el propagador se puede escribir de manera aproximada de la siguiente manera

$$K(x, t + \varepsilon; y, t) \simeq \frac{1}{A} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2} - V(y) \right] \varepsilon \right\}, \quad (3.31)$$

donde la constante A está aún indeterminada. Utilizando (3.31) en (3.30) tenemos

$$\psi(x, t + \varepsilon) \simeq \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{\varepsilon} - V(y)\varepsilon \right] \right\} \psi(y, t). \quad (3.32)$$

Si la cantidad $(x - y)^2/\varepsilon$ que aparece en el exponente es muy grande (lo cual ocurre si y es apreciblemente diferente de x) la exponencial oscila muy rápido cuando y varía, y la integral sobre y da un valor muy pequeño (debido al comportamiento suave del otro factor). Así únicamente si y es aproximadamente igual a x (donde la exponencial cambia más lentamente) tendremos contribuciones importantes. Por esta razón hacemos la substitución $y = x + \eta$ esperando que las contribuciones apreciables a la integral ocurran únicamente para η pequeña. Con esta substitución tendremos para la ecuación (3.32)

$$\psi(x, t + \varepsilon) \simeq \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \frac{\eta^2}{\varepsilon} - \varepsilon V(x + \eta) \right] \right\} \psi(x + \eta, t). \quad (3.33)$$

La mayor contribución a la integral ocurre cuando el término dominante en la fase cambia en orden de 1 radián, esto es cuando η es del orden de $\sqrt{\varepsilon \hbar / m}$. Podemos expandir ψ en serie de potencias y necesitamos considerar únicamente términos de orden ε , esto implica que el integrando debe ser expandido hasta términos cuadráticos en η . Expandiendo el lado izquierdo de (3.33) a primer orden en ε y el lado derecho a primer orden en ε y segundo orden en η , obtenemos

$$\psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{\frac{im\eta^2}{2\varepsilon\hbar}} \left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x, t) \right] \left[\psi(x, t) + \eta \frac{\psi}{x} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]$$

y usando las integrales

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[\frac{im\eta^2}{2\varepsilon\hbar} \right] &= \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \eta \exp \left[\frac{im\eta^2}{2\varepsilon\hbar} \right] &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \eta^2 \exp \left[\frac{im\eta^2}{2\varepsilon\hbar} \right] &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\varepsilon\hbar}{m} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

obtenemos la expresión

$$\psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{A} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2} \left[\psi(x, t) + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x, t) \psi(x, t) \right]. \quad (3.34)$$

Pidiendo por consistencia que ambos lados de la ecuación coincidan en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, es necesario que A sea elegida de tal manera que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2} = 1 \Rightarrow A = \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2},$$

substituyendo el valor de A en la última ecuación obtenemos

$$\psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \psi(x, t) + \varepsilon \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x, t) \psi(x, t) \right]. \quad (3.35)$$

esto será cierto a orden ε si ψ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x, t) \psi(x, t)$$

o lo que es lo mismo, si

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t), \quad (3.36)$$

que es la bien conocida ecuación de Schrödinger de una partícula moviéndose en una dimensión bajo un potencial $V(x)$. Un punto importante a señalar lo constituye el hecho de que esta ecuación no la hemos postulado, sino que la hemos obtenido como una condición de consistencia para una expansión a orden ε de la ecuación integral (3.29).

El propagador infinitesimal obtenido de esta manera ec. (3.31) puede ser factorizado como sigue

$$\begin{aligned} K(x, t + \varepsilon; y, t) &\simeq \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}} \exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\varepsilon}\right] \exp\left[\frac{-i}{\hbar} V(x)\varepsilon\right] \\ &= K_0(x, t + \varepsilon; y, t) \phi_C^I(x, t + \varepsilon; y, t), \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde K_0 es el propagador infinitesimal de la partícula libre y ϕ_C^I es el factor de fase que corresponde a la interacción

$$\phi_C^I = \exp\left[\frac{-i}{\hbar} \int_C dt V(x)\right]. \quad (3.38)$$

3.3 PRODUCTOS CRONOLÓGICOS DE OPERADORES

Consideremos el elemento de matriz

$$\langle q, t | \hat{q}(t_J) | q_0, t_0 \rangle, \quad (3.39)$$

donde $t_0 \leq t_1 \leq t$ y $\hat{q}(t_J)$ es un operador. Insertando en esta ecuación el operador $\hat{1}$ en la forma

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dq_J |q_J, t_J\rangle \langle q_J, t_J| \quad q_J = q(t_J),$$

se obtiene

$$\langle q, t | \hat{q}(t_J) | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_J \langle q, t | q_J, t_J \rangle q_J \langle q_J, t_J | q_0, t_0 \rangle, \quad (3.40)$$

si hacemos una partición del kernel $\langle q, t | q_J, t_J \rangle$ en $N - J$ pedazos y una partición del kernel $\langle q_J, t_J | q_0, t_0 \rangle$ en J partes, obtenemos por (3.10) que

$$\begin{aligned}
\langle q, t | \hat{q}(t_J) | q_0, t_0 \rangle &= \lim_{J \rightarrow \infty} \lim_{N-J \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_J A^{\frac{N-J}{2}} dq_{J+1} \cdots dq_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{K=J}^{N-1} \Delta t_L q(t_J)} \\
&\quad A^{\frac{J}{2}} dq_1 \cdots dq_{J-1} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{K=0}^{J-1} \Delta t_L q} \\
&= \lim_{J \rightarrow \infty} \lim_{N-J \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots dq_{J-1} dq_J dq_{J+1} \cdots dq_{N-1} A^{\frac{N}{2}} q(t_J) e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{K=0}^{N-1} \Delta t_L q} \\
&= \int_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q(\tau) q(t_J) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L(q, \dot{q}, t)}. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que deseamos calcular

$$\langle q, t | \hat{q}(t_K) \hat{q}(t_J) | q_0, t_0 \rangle,$$

si $t_0 \leq t_J \leq t_K \leq t$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle q, t | \hat{q}(t_K) \hat{q}(t_J) | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_K dq_J \langle q, t | q_K, t_K \rangle q_K \langle q_K, t_K | q_J, t_J \rangle q_J \langle q_J, t_J | q_0, t_0 \rangle \\
&= \int_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q(\tau) q(t_J) q(t_K) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L(q, \dot{q}, t)}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Si por el contrario $t_0 \leq t_K \leq t_J \leq t$, esto ya no es válido y en dicho caso tendremos

$$\begin{aligned}
\langle q, t | \hat{q}(t_J) \hat{q}(t_K) | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_J dq_K \langle q, t | q_J, t_J \rangle q_J \langle q_J, t_J | q_K, t_K \rangle q_K \langle q_K, t_K | q_0, t_0 \rangle \\
&= \int_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q(\tau) q(t_K) q(t_J) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L(q, \dot{q}, t)}, \tag{3.43}
\end{aligned}$$

notemos que a pesar de que la expresión del lado derecho de (3.42) coincide con la expresión del lado derecho de (3.43) (ya que $q(t_K)q(t_J) = q(t_K)q(t_J)$ porque son eigenvalores), el lado izquierdo de dichas ecuaciones depende de el orden de los tiempos. En general, el lado izquierdo de (3.42) y (3.43) es igual a

$$\langle q, t | \hat{T}[\hat{q}(t_J) \hat{q}(t_K)] | q_0, t_0 \rangle,$$

donde el operador \hat{T} que ordena el tiempo tiene la definición

$$\hat{T}[\hat{q}(t_J) \hat{q}(t_K)] = \begin{cases} \hat{q}(t_J) \hat{q}(t_K) & \text{si } t_J > t_K. \\ \hat{q}(t_K) \hat{q}(t_J) & \text{si } t_K > t_J. \end{cases} \tag{3.44}$$

\hat{T} tiene el efecto de poner los tiempos pasados a la derecha. El resultado que hemos mostrado es en general

$$\langle q, t | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_0, t_0 \rangle = \int_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) q(t_1) \cdots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L(q, \dot{q}, t)}. \tag{3.45}$$

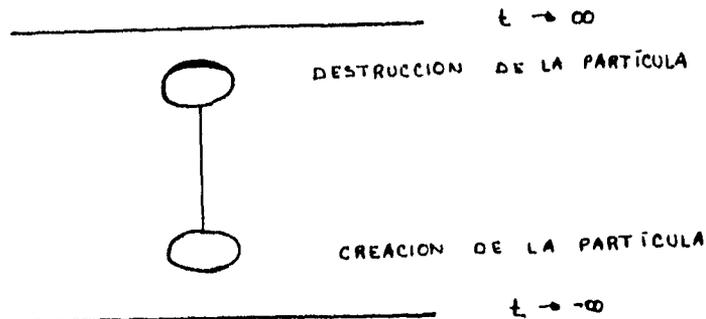


Figura 3.1: Representación de la amplitud de transición vacío-vacío en presencia de una fuente

3.4 FUNCIONES DE GREEN

3.4.1 Definición de las funciones de Green

Hemos visto que la amplitud de transición del estado $|q_0, t_0\rangle$ al estado $|q, t\rangle$ esta dada por

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{q_0}^q \mathcal{D}q(\tau) e^{iS(q_0, t; q)}$$

en el caso donde $H = p^2/2m + V(q)$ (el cual es suficientemente general para muchos de los problemas de interés) y las condiciones a la frontera del problema son $q(t) = q$, $q(t_0) = q_0$. Este tipo de condiciones a la frontera pueden ser apropiadas en el movimiento de partículas clásicas, sin embargo cuando uno mira más allá, por ejemplo en teoría de campos, se da uno cuenta que las condiciones análogas, $\psi(t) = \psi$, $\psi(t_0) = \psi_0$ no son las apropiadas. Lo que realmente pasa es que las partículas son creadas (por ejemplo por colisiones), ellas interactúan y después son destruidas por observación (por detección).

El acto de creación puede ser representado como una fuente y el de destrucción por un sumidero. Las condiciones de frontera del problema pueden entonces ser representadas como en la fig.3.1, el vacío a $t \rightarrow -\infty$ evoluciona hacia el vacío a $t \rightarrow \infty$, vía la creación, interacción y destrucción de una partícula y gracias a la mediación de una fuente. Lo que nosotros queremos conocer es la amplitud de transición vacío-vacío en presencia de una fuente. Esta formulación, usando el lenguaje de fuentes, es debida a Schwinger.

Comencemos por encontrar la forma funcional de las funciones de Green del sistema

$$G_n(t_1, \dots, t_n) \equiv \langle 0 | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | 0 \rangle, \quad (3.46)$$

donde $|0\rangle$ designa el estado fundamental:

$$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle, \quad (3.47)$$

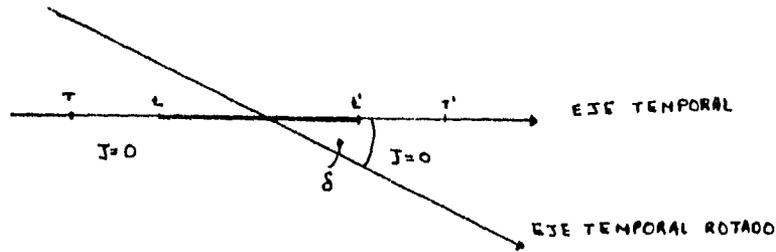


Figura 3.2: rotación del eje temporal en el cálculo de la amplitud de transición vacío-vacío

E_0 es el valor propio más pequeño de \hat{H} .

Para esto, partamos de $\langle q, t|q_0, t_0 \rangle$ e insertemos el operador \hat{I} asociado a la base de vectores propios de \hat{H} ($\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$),

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I},$$

$$\begin{aligned} \langle q, t|q_0, t_0 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle q, t|n\rangle\langle n|q_0, t_0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle q|e^{-i\frac{(t-t_0)}{\hbar}\hat{H}}|n\rangle\langle n|q_0 \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\frac{(t-t_0)E_n}{\hbar}} \langle q|n\rangle\langle n|q_0 \rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

y

$$\begin{aligned} \langle q, t|q_0, t_0 \rangle e^{i\frac{(t-t_0)E_0}{\hbar}} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\frac{(t-t_0)(E_n-E_0)}{\hbar}} \langle q|n\rangle\langle n|q_0 \rangle \\ &= \langle q|0\rangle\langle 0|q_0 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\frac{(t-t_0)(E_n-E_0)}{\hbar}} \langle q|n\rangle\langle n|q_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.49)$$

En la ecuación (3.49) uno obtiene explícitamente, si reemplazamos el intervalo de tiempo real $T = t - t_0$ por

$$T_\eta = T(1 - i\eta) \quad \text{con } \eta \in (0, \pi/2] \quad (3.50)$$

que en el límite $T \rightarrow \infty$, sólo subsistirá en el miembro de la derecha el primer término

$$\langle q|0\rangle\langle 0|q_0 \rangle,$$

ya que los otros términos se anulan debido al factor $e^{-\frac{T}{\hbar}\eta(E_n-E_0)}$.

La forma de visualizar la sustitución (3.50) es suponer que estoy en el plano complejo y hago ahí una rotación del eje temporal, fig.3.2, con esto lo que estamos haciendo es

darle una parte compleja al tiempo.

Con la sustitución (3.50) se tiene que en el límite $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta e^{i \frac{\epsilon_0}{\hbar} T_\eta} &\sim \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle \\ \Rightarrow \langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta &\sim e^{-i \frac{\epsilon_0}{\hbar} (t-t_0)(1-i\eta)} \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle \end{aligned} \quad (3.51)$$

Consideremos nuevamente el primer miembro de la ecuación (3.45), y elijamos dos tiempos t_a y t_b tales que $t_0 < t_a < t_1$ y $t_n < t_b < t$ tendremos entonces que

$$\langle q, t | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_0, t_0 \rangle_\eta = \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b \langle q, t | q_b, t_b \rangle \langle q_b, t_b | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_a, t_a \rangle \cdot \langle q_a, t_a | q_0, t_0 \rangle \quad (3.52)$$

considerando nuevamente el remplazo de intervalos de tiempo real a intervalos de tiempo complejo ec.(3.50) y tomando el límite $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$, obtenemos con la ayuda de la ecuación (3.51) para las componentes asintóticas

$$\begin{aligned} \langle q, t | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_0, t_0 \rangle_\eta &\sim \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b e^{-i \frac{\epsilon_0}{\hbar} (t-t_b)(1-i\eta)} \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_b \rangle \\ &\quad \langle q_b, t_b | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_a, t_a \rangle \langle q_a | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle e^{-i \frac{\epsilon_0}{\hbar} (t_a-t_0)(1-i\eta)} \\ &\sim \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle e^{-i \frac{\epsilon_0}{\hbar} (t-t_0)(1-i\eta)} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b \langle 0 | q_b, t_b \rangle \langle q_b, t_b | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_a, t_a \rangle \langle q_a, t_a | 0 \rangle \\ &\sim \langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta \cdot \langle 0 | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dividiendo ambos miembros de (3.53) por $\langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta$ obtenemos el comportamiento asintótico como una función de Green a n puntos

$$\frac{\langle q, t | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_0, t_0 \rangle_\eta}{\langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta} \sim \langle 0 | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | 0 \rangle. \quad (3.54)$$

Hemos así deducido una manera de calcular las funciones de Green $G(t_1, \dots, t_n)$ mediante el cociente de integrales de trayectoria

$$\begin{aligned} G(t_1, \dots, t_n) &= \lim \frac{\langle q, t | \hat{T}[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_0, t_0 \rangle_\eta}{\langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta} \\ &= \lim \frac{\int_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \cdots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t(1-i\eta)} d\tau L(q, \dot{q})}}{\int_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t(1-i\eta)} d\tau L(q, \dot{q})}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

El cociente (3.55) es en principio independiente de la elección de los valores límites de la trayectoria $q(t) = q$, $q(t_0) = q_0$. Las buenas condiciones (ver Faddeev y Slavnov) son las condiciones de radiación para las cuales la función $q(\tau)$ es tal que

$$q = q(\infty(1 - i\eta)) = 0 \quad q_0 = q(-\infty(1 - i\eta)) = 0. \quad (3.56)$$

3.4.2 Generador funcional de las funciones de Green

Las funciones de Green (3.55) pueden ser todas deducidas a partir del generador funcional $Z(J)$ definido de la siguiente manera

$$Z(J) \equiv \int \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int_{-\infty(1-i\eta)}^{\infty(1-i\eta)} d\tau (L(q, \dot{q}) + J(\tau)q(\tau))} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} &= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int_{-\infty(1-i\eta)}^{\infty(1-i\eta)} d\tau L(q, \dot{q})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n J(\tau_1) \cdots J(\tau_n) G_n(\tau_1 \cdots \tau_n) \right] \\ &= Z(0) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n J(\tau_1) \cdots J(\tau_n) G_n(\tau_1 \cdots \tau_n) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde $J(\tau)$ es una fuente arbitraria nula fuera de un segmento acotado del eje real, pero donde este intervalo es a la vez lo suficientemente grande como para contener a todos los argumentos t_1, \dots, t_n de G_n . En (3.57), las trayectorias $q(\tau)$ se anulan en $\tau \rightarrow -\infty(1 - i\eta)$ y $\tau \rightarrow \infty(1 - i\eta)$.

Las funciones de Green se obtienen mediante la expresión

$$G_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{1}{Z(0)} \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} Z(J) \Big|_{J=0} \quad (3.59)$$

donde $\delta/\delta J(t_i)$ denota la derivada funcional.

Como ejemplo de estas ideas calculemos explícitamente la funcional generatriz para el oscilador armónico lineal.

$$\begin{aligned} Z(J) &\equiv \int \mathcal{D}q(\tau) e^{\frac{i}{2} \int_{-\infty(1-i\eta)}^{\infty(1-i\eta)} d\tau (q^2 - \omega_0^2 q^2 + 2Jq)} \\ &= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{\frac{i}{2} \int d\tau \left(q(\tau) \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} - \omega_0^2 \right] q(\tau) + 2Jq(\tau) \right)} \\ &= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' \delta(\tau - \tau') \left(q(\tau') \left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} - \omega_0^2 \right] q(\tau) + J(\tau')q(\tau) + J(\tau)q(\tau') \right)} \\ &= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' (q(\tau') K(\tau - \tau') q(\tau) + J(\tau') \delta(\tau - \tau') q(\tau) + J(\tau) \delta(\tau - \tau') q(\tau'))}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

en donde hemos considerado $K(\tau - \tau') = \delta(\tau - \tau') \left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} - \omega_0^2 \right]$. De esta forma, la integral funcional no es más que la generalización cuando $(n \rightarrow \infty)$ de la integral siguiente

$$Z_0(j) = \int dx_1 \cdots dx_n e^{\frac{i}{2} (x_k K_{kl} x_l + x_k \delta_{kl} j_l + j_k \delta_{kl} x_l)}$$

$$= \int dx_1 \cdots dx_n e^{\frac{i}{2}(x^T K x + x^T j + j^T x)}, \quad (3.61)$$

donde la matriz K es simétrica e invertible. La integral (3.61) se calcula efectuando el cambio de variable (de jacobiano 1)

$$x_k = x'_k - (K^{-1})_{kl} j_l, \quad (3.62)$$

con lo cual el exponente se escribe en notación matricial como

$$\begin{aligned} x^T K x + x^T j + j^T x &= x'^T K x' + x'^T j + j^T x' + j^T K^{-1} K K^{-1} j - j^T K^{-1} K x' \\ &\quad - j^T K^{-1} j - j^T K^{-1} j - x'^T K K^{-1} j \\ &= x'^T K x' - j^T K^{-1} j, \end{aligned} \quad (3.63)$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} Z_0(j) &= \int dx'_1 \cdots dx'_n e^{\frac{i}{2}(x'^T K x' - j^T K^{-1} j)} \\ &= e^{-\frac{i}{2} j^T K^{-1} j} \int dx'_1 \cdots dx'_n e^{\frac{i}{2} x'^T K x'} \\ &= Z_0(0) e^{-\frac{i}{2} j^T K^{-1} j}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Al efectuar el mismo procedimiento pero ahora sobre la ec.(3.60) se obtiene directamente

$$Z_0(J) = Z_0(0) e^{-\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) K^{-1}(\tau - \tau') J(\tau')}, \quad (3.65)$$

con la condición de que $K^{-1}(\tau - \tau')$ esté bien definido, o lo que es lo mismo, que sobre el espacio de las funciones que satisfacen las condiciones de radiación, la "matriz" $K(\tau - \tau')$ admita una única inversa. Este requerimiento se cumple si se toma

$$K^{-1}(\tau - \tau') = \Delta_F(\tau - \tau'), \quad (3.66)$$

donde $\Delta_F(\tau - \tau')$ es la función de green del operador $\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2\right)$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2\right) \Delta_F(\tau) = -\delta(\tau). \quad (3.67)$$

Así, las funciones de Green del oscilador lineal armónico estan dadas por

$$\begin{aligned} G_n(t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{i^n} \frac{1}{Z_0(0)} \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} Z_0(J) \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} e^{-\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau')} \Big|_{J=0} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Finalicemos este capítulo calculando el valor de $Z_0(0)$ y reescribiendo la ec.(3.65). Para esto volvamos a utilizar la analogía entre (3.60) y (3.61). De (3.64) tenemos que

$$Z_0(0) = \int dx_1 \dots dx_n e^{\frac{i}{2} x^T K x}$$

y también que la matriz K es simétrica, por lo tanto existe una transformación ortogonal O que la diagonaliza, es decir existe O tal que

$$OKO^T = K' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad (3.69)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} x^T K x &= x^T O^T O K O^T O x = x^T O^T K' O x = y^T K' y \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde

$$y = O x, \quad y^T = x^T O^T. \quad (3.71)$$

Así

$$\begin{aligned} Z_0(0) &= \int dy_1 \dots dy_n e^{\frac{i}{2} (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2)} \\ &= \sqrt{\frac{2i\pi}{\lambda_1}} \dots \sqrt{\frac{2i\pi}{\lambda_n}} = (2i\pi)^{n/2} (\det K')^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

De manera análoga uno obtiene el resultado

$$Z_0(0) = \text{cte.} \left(\det \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} - \omega_0^2 \right] \right)^{-1/2}. \quad (3.73)$$

Obtenemos así finalmente que el generador funcional (3.65) queda reescrito como

$$Z_0(J) \sim \frac{1}{(\det K)^{1/2}} e^{-\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) K^{-1}(\tau-\tau') J(\tau')}. \quad (3.74)$$

3.5 EJEMPLO

3.5.1 Partícula libre no relativista

El hamiltoniano de la partícula libre relativista es $H(p_j) = \frac{p_j^2}{2m}$, con lo cual la expresión de la integral de trayectoria se escribe como

$$\langle x'', t'' | x_0, t_0 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} dx_1 \dots dx_{N-1} e^{i \sum_{j=0}^{N-1} \left(p_j(x_{j+1} - x_j) - \Delta t \frac{p_j^2}{2m} \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} dx_1 \dots dx_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1(p_0-p_1)+\dots+x_{N-1}(p_{N-2}-p_{N-1}))} \\
&\quad e^{\frac{i}{\hbar}(p_{N-1}x''-p_0x_0)} e^{-\frac{i}{2m}(p_0^2+p_1^2+\dots+p_{N-1}^2)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} dp_1 \dots dp_{N-1} \delta(p_0-p_1)\delta(p_1-p_2)\dots\delta(p_{N-2}-p_{N-1}) \\
&\quad e^{\frac{i}{\hbar}(p_{N-1}x''-p_0x_0-\frac{i}{2m}(p_0^2+p_1^2+\dots+p_{N-1}^2)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}((x''-x_0)p_0-\frac{T}{2m}p_0^2)} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2i\pi T\hbar}} e^{\frac{im(x''-x_0)^2}{2\hbar T}}. \tag{3.75}
\end{aligned}$$

Capítulo 4

CUANTIZACIÓN DE SISTEMAS COVARIANTES

Cuando uno escribe ingenuamente la amplitud de transición para un sistema con libertad de norma como la suma sobre todas las historias de la exponencial de la acción invariante de norma, uno se encuentra con el problema de que la integral de trayectoria diverge debido a la integración sobre los grados de libertad puros.

Existen dos métodos para resolver esta dificultad. La filosofía atrás de cada uno de estos métodos es radicalmente diferente.

El primer método reemplaza la integral de trayectoria sobre todas las variables por una integral de trayectoria que considera sólo los grados de libertad invariantes de norma. La eliminación de los grados de libertad puros puede llevarse a cabo, reformulando la teoría en el espacio fase reducido, lo cual, en la práctica, permite imponer condiciones de norma canónicas.

La idea del segundo método no es eliminar los grados de libertad de norma, los cuales son usualmente necesarios para preservar covariancia y localidad. Más aún, uno suma sobre todos ellos, así como sobre los fantasmas. Para obtener una integral de trayectoria no divergente, uno substituye la acción invariante de norma, por una sin invariancia de norma. El principio de invariancia de norma es reemplazado por el principio de invariancia BRST. La acción que aparece en la integral de trayectoria es invariante-BRST y esta es una extensión de la acción invariante de norma.

En este capítulo esbozaremos ambos métodos de la integral de trayectoria para sistemas de norma.

4.1 FUNCIONAL GENERADORA

4.1.1 Dificultades para cuantizar las teorías de norma

Mostremos que en el caso de una teoría de norma no es posible hacer una aplicación directa de las relaciones obtenidas en el capítulo anterior, para generalizar la expresión de la amplitud de transición vacío-vacío en presencia de una fuente. Para este fin consideremos el caso electromagnético.

En analogía con la ec.(3.57) escribimos la funcional generadora como

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\mathbf{A}_\mu \exp \left(i \int d^4x [\mathcal{L}_0(x) + \mathbf{J}_\mu(x) \cdot \mathbf{A}^\mu(x)] \right) \quad (4.1)$$

con

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}_0(x) &= -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu(y) \delta^4(x-y) (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Comparando (4.1) y (4.2) con (3.60) podemos identificar al operador $\delta^4(x-y)(g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu)$ con la "matriz" K , es decir, tenemos una situación muy similar a la de la mecánica cuántica y en principio uno podría esperar que si se copia el desarrollo subsecuente a la ec.(3.60) uno podría obtener apartir de la ec.(4.2), una ecuación análoga a la ec.(3.74)

$$Z_0[J] \sim \frac{1}{\sqrt{\det\{\delta^4(x-y)(g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu)\}}} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(y) [\delta^4(x-y)(g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu)]^{-1} J_\nu(x)}, \quad (4.3)$$

este es realmente el caso por ejemplo para la teoría del campo escalar (donde el operador que se identifica con K es $\delta^4(x-y) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right)$), sin embargo esto no es posible, en el caso del electromagnetismo (y en general de una teoría de norma) porque el operador

$$K_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu \quad (4.4)$$

en (4.2) no tiene una inversa como demostraremos.

Asumiendo que $G^{\nu\lambda}(x-y)$ es la inversa de $K_{\mu\nu}$ se tiene

$$(g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) G^{\nu\lambda}(x-y) = g_\mu^\lambda \delta^4(x-y). \quad (4.5)$$

Usando la transformada de Fourier

$$G^{\nu\lambda}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-k \cdot x} G^{\nu\lambda}(k), \quad (4.6)$$

tenemos

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) G^{\nu\lambda}(k) = g_\mu^\lambda. \quad (4.7)$$

Con la descomposición invariante

$$G^{\nu\lambda}(k) = a(k^2)g^{\nu\lambda} + b(k^2)k^\nu k^\lambda, \quad (4.8)$$

es claro que el lado izquierdo de la ecuación (4.7) $= -a(k^2)(k^2 g_\mu^\lambda - k_\mu k^\lambda)$ no puede ser igual a el lado derecho. Así $k_{\mu\nu}$ no tiene un inverso.

Vemos así que una dificultad aparece, cuando tratamos de definir la integral de trayectoria que represente la amplitud vacío-vacío, si una simetría local, tal como una simetría de norma, está presente en la acción clásica. La integral de trayectoria se vuelve más divergente de lo usual. El problema puede entenderse de la siguiente manera: Supongase que estamos cuantizando una teoría de campo clásico que tiene un campo genérico que depende de la norma $A_\mu(x)$. La acción, $S[A_\mu]$, es invariante de norma. La integral de trayectoria más simple, es la sugerida por la mecánica cuántica, $Z_0[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp(iS[A_\mu, J_\mu])$. En esta integral de trayectoria estamos integrando sobre todas las configuraciones del campo A_μ y cada configuración en la suma está relacionada a un número infinito de otras configuraciones mediante transformaciones de norma, más aún, el integrando es idéntico para dos configuraciones de norma equivalentes, obteniéndose así que las dos configuraciones contribuyen con la misma información. Esto significa que por integrar sobre todas las configuraciones, estamos calculando un número infinito de copias de alguna integral. Puesto en una manera un poco diferente, A_μ contiene componentes dependientes de la norma y componentes invariantes de norma, cuando integramos sobre el espacio de configuraciones, $\int \mathcal{D}A_\mu$, estamos integrando con respecto a ambas partes (dependientes e independientes de la norma), sin embargo, la acción, la cual es invariante de norma, depende únicamente de la parte invariante de norma de A_μ . El integrando para las partes dependientes de la norma es unitaria y así la integral sobre la parte dependiente de la norma diverge. Lo que se necesita hacer entonces es remover esta divergencia extra.

Un procedimiento para definir convenientemente la integral de trayectoria en cualquier norma lineal aceptable fue desarrollada por Faddeev y Popov (1967). La idea es seleccionar una norma y cambiar de coordenadas. Cuando elegimos una norma, sólo algunas de las configuraciones A^μ satisfacen la condición de norma. Sea \bar{A}^μ una configuración que satisface la condición de norma, si A^μ es una configuración que no satisface la condición de norma ($\bar{A}^\mu \neq A^\mu$) entonces hay una transformación de norma U que me lleva de una configuración a otra $A^\mu = U[\bar{A}^\mu]$. El cambio de coordenadas deseado es aquel que me lleva de un A^μ general a el conjunto (\bar{A}^μ, U) , este cambio involucra un jacobiano funcional J , el cual debe ser determinado, $\int \mathcal{D}A_\mu \rightarrow \int J \mathcal{D}\bar{A}^\mu \mathcal{D}U$. Dado que el integrando es invariante de norma, entonces este no puede depender de U y la integral $\int \mathcal{D}U$ puede ser factorizada y colocada en la normalización. La integral $\int \mathcal{D}U$ es llamada el "volumen de norma" o "volumen de la órbita" y este es el infinito que deseamos extraer para definir apropiadamente la integral de trayectoria. Dado que estamos escribiendo la integral como $\int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}\bar{A}^\mu$ de "algo" nosotros estamos integrando el "algo" sobre todas las transformaciones de norma. Así, no importando que norma elijamos mediante este procedimiento

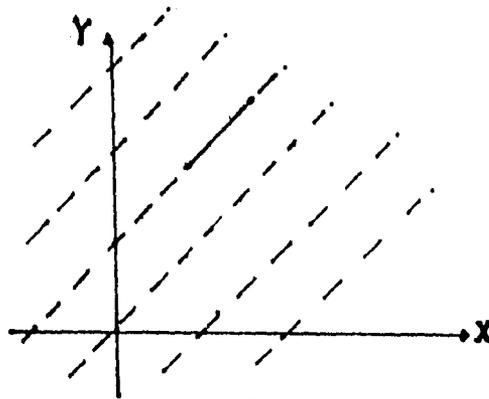


Figura 4.1: El movimiento de una "configuración", (x, y) , en el espacio de configuración, \mathbb{R}^2 , bajo la transformación de norma definida por (4.11). La trayectoria es llamada una órbita de norma. En el ejemplo simple que estamos tratando, las órbitas de norma son rectas cuya ecuación es $x - y = \text{cte}$.

(probado desde luego, que la elección de norma no nos lleve a un Jacobiano nulo), el resultado final debe ser invariante de norma.

Dada la importancia del método de Faddeev y Popov para nuestra exposición, daremos un ejemplo sencillo pero bastante ilustrativo del procedimiento que se sigue para factorizar el "volumen de norma".

4.1.2 Factorización del volumen de norma: un ejemplo simple

Consideremos la siguiente integral

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x-y)^2}. \quad (4.9)$$

Esta integral es divergente dado que el integrando depende únicamente de la diferencia entre x y y . El orden de la divergencia se puede determinar fácilmente haciendo el cambio de variables de (x, y) a $z_- = x - y$ y $z_+ = (x + y)/2$, con lo cual se obtiene

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dz_+ \int_{-\infty}^{\infty} dz_- e^{-z_-^2} = \sqrt{\pi} \int dz_+. \quad (4.10)$$

El tamaño de la divergencia es el volumen de los reales, esto es, la línea real 1-dimensional.

Tratemos ahora este problema en una manera un poco diferente. Notemos que el integrando es un invariante translacional ante las transformaciones

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + a \\ y &\rightarrow y + a \end{aligned} \quad (4.11)$$

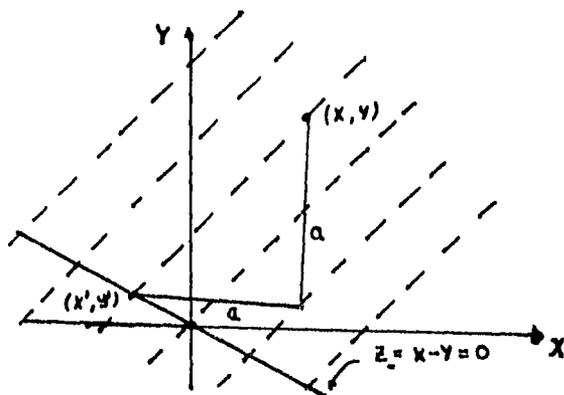


Figura 4.2: La elección de norma $\bar{x} + \bar{y} = 0$ define una “rebanada de norma” a través del espacio de configuración. (x', y') es una configuración sobre la rebanada, esta satisface la condición de norma. (x, y) es una configuración de norma equivalente, dado que (x, y) y (x', y') yacen sobre la misma órbita de norma. a es la transformación de norma que nos lleva de la rebanada a (x, y) .

donde $a \in \mathfrak{R}$. Llamemos a la operación de simetría (4.11), una transformación de norma, la “acción” $\exp(-(x-y)^2)$ es invariante de norma y a es un elemento del grupo de norma, los reales. El volumen de norma es $\int da$, el cual es el volumen de la línea real. Una “órbita” de norma, la trayectoria de una “configuración” (x, y) en \mathfrak{R}^2 bajo una transformación de norma es una línea con ecuación $x - y = cte.$, como se muestra en la fig.(4.1). Dado que la acción es invariante a lo largo de una órbita de norma, podemos fácilmente ver que por integrar sobre todas las configuraciones, el plano completo (x, y) , estamos sumando redundantemente un número infinito de copias de la integral Gaussiana (la cual es finita). Nosotros vamos a desarrollar un procedimiento para extraer esta integral finita de Z .

En términos de la palabra “norma”, es claro que la transformación en la ecuación (4.10) sólo expresa la separación de la configuración (x, y) en su componente invariante de norma z_- y en su componente dependiente de norma z_+ . Para poner la ec.(4.10) en una forma en la cual podamos generalizar un poco, cambiemos las variables de (x, y) a (z_-, a) en vez de (z_-, z_+) . Aquí a es la transformación de norma que lleva un punto sobre la línea $z_+ = x + y = 0$ a (x, y) , como es mostrado en la fig.(4.2). En otras palabras, nosotros cambiamos la coordenada dependiente de la norma z_+ , por el parámetro mismo de la transformación de norma.

Bajo este cambio de variables, Z es

$$Z = \int da \int dz_- e^{-z_-^2} = \int da \sqrt{\pi}. \quad (4.12)$$

donde el volumen de norma, $\int da$, aparece explícitamente. Reescribamos ahora la integral Gaussiana una vez más

$$Z = \int da \int dx dy 2\delta(x+y) e^{-(x-y)^2} = \int da \sqrt{\pi}. \quad (4.13)$$

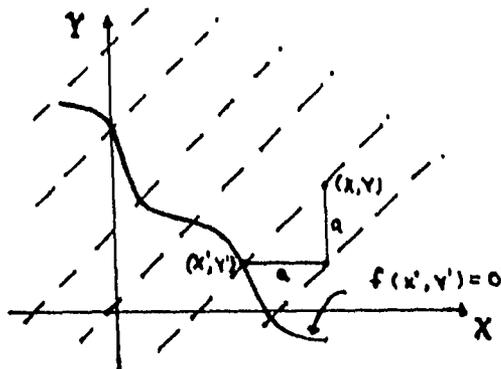


Figura 4.3: Ilustración de una elección de norma, $f(x, y) = 0$. El cambio deseado de coordenadas es de (x, y) a (s, a) , s es una variable que corre a lo largo de la rebanada, y a es la transformación de norma que va de la rebanada a (x, y) .

En esta forma podemos interpretar la función δ como un término que fija la norma. Esto es, nosotros hemos fijado la norma de tal manera que $x + y = 0$. Llamaremos a la elección de norma $x + y = 0$, la "rebanada" de norma. El factor de 2 que ha aparecido es el jacobiano del cambio de coordenadas de (x, y) a una variable que corre a lo largo de la rebanada de norma, junto con la transformación de norma que nos lleva de un punto sobre la rebanada de norma a un punto (x, y) fuera de esta.

Supongamos que deseamos hacer una elección de norma diferente, $f(x, y) = 0$, como en la fig.(4.3), ¿Cuál será la generalización de (4.13)? Sea s una variable que corre a lo largo de la rebanada de norma. $\partial/\partial s$ es un vector tangente a f , $df/ds = 0$. Nuevamente, sea $a(x, y)$ la transformación de norma que toma un punto particular sobre la rebanada de norma a un punto (x, y) fuera de la rebanada. El cambio de variables en Z de (x, y) a (s, a) nos da

$$Z = \int da ds J e^{-h(s)}, \quad (4.14)$$

donde el Jacobiano J es

$$J = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial a} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial a} \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Hasta aquí nuestra elección de s es arbitraria en el sentido de que podemos elegir el ritmo del incremento de s a medida que nos movamos a lo largo de la rebanada, incluso, el ritmo al cual s cambia a lo largo de la rebanada no necesita ser uniforme, por conveniencia, elegiremos la escala de s de tal manera que satisfaga

$$\int dx dy \delta(f(x, y)) = \int ds. \quad (4.16)$$

El ritmo de cambio de esta s cuando nos movamos a lo largo de la rebanada no será uniforme a menos que la elección de norma f sea lineal en x y y . La razón de esta

elección es que podamos sustituir la ec.(4.16) en (4.14) de tal manera que la elección de la norma aparezca explícitamente en la integral. El jacobiano asegurará que el resultado final será independiente de la elección de norma.

Calculemos el jacobiano para esta elección de s . Sea (x', y') las coordenadas de un punto sobre la rebanada, $f(x', y') = 0$, entonces por definición de la transformación de norma ec.(4.11)

$$\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + a. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dado que x' y y' residen sobre la rebanada, ellas deben ser funciones de s únicamente, $x' = x'(s)$, $y' = y'(s)$. por lo tanto

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 = \frac{\partial y}{\partial a}$$

así

$$J = \left| \frac{\partial x}{\partial s} \quad \frac{\partial y}{\partial s} \right| = \left| \frac{\partial x'}{\partial s} \quad \frac{\partial y'}{\partial s} \right|.$$

f es constante a lo largo de la rebanada de norma, de tal manera que $df/ds = 0$.

$$0 = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial s}. \quad (4.18)$$

Una solución particular a la ec.(4.18) que satisfaga la ec.(4.16) puede ser encontrada si realizamos la integral sobre el lado izquierdo de la ec.(4.16) con respecto a x o y . Usando la propiedad de la función δ

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|} \delta(x - x_i) \quad \text{con } x_i = \text{cero simple}$$

e integrando la ec.(4.16) con respecto a y , obtenemos

$$\int dx \, dy \left| \frac{df}{dy} \right|_{y=y'}^{-1} \delta(y - y') = \int dx \left| \frac{df}{dy} \right|_{y=y'}^{-1} = \int ds.$$

con lo cual

$$\frac{\partial x'}{\partial s} = \pm \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right|$$

Si elegimos el signo +, entonces la ec.(4.18) implica

$$\frac{\partial x'}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial y'} \quad , \quad \frac{\partial y'}{\partial s} = -\frac{\partial f}{\partial x'} \quad , \quad (4.19)$$

con lo cual el jacobiano que queremos es

$$J = \left| \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x'} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{f=0}, \quad (4.20)$$

y la definición adecuada de Z en presencia de la simetría es

$$Z = \int da \int dx \, dy \delta(f(x, y)) \left| \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \right| e^{-(x-y)^2}. \quad (4.21)$$

Hemos así separado explícitamente el volumen de norma para cualquier elección de norma legítima ($J \neq 0$), y esta divergencia puede ser ahora considerada dentro de la normalización y olvidada. Una manera conveniente de olvidarse de la divergencia, es decir que la Z que realmente deseamos es, por definición

$$Z = \frac{\int dx \, dy e^{-(x-y)^2}}{V_g}, \quad (4.22)$$

donde V_g es el volumen de norma.

Derivemos nuevamente la ec.(4.21) mediante una construcción más sencilla. Si insertamos la relación $1 = \int df \delta(f)$ en la expresión para Z dada por la ec.(4.9) tenemos

$$Z = \int dx \, dy \int df \delta(f) e^{-(x-y)^2} \quad (4.23)$$

Si partimos de la rebanada de norma (x', y') donde $f = 0$ y comenzamos a movernos fuera de la rebanada de norma via una transformación de norma, entonces el valor de f sobre la orbita de norma cambia, esto es, f no es constante a lo largo de una orbita de norma (de otro modo f no sería una buena elección de norma), por lo tanto podemos considerar a f como una función de a , $f = f(a)$. Así, cambiando variables de f a a en la ec. (4.23) se obtiene

$$Z = \int dx \, dy \int da \left. \frac{df}{da} \right|_{f=0} \delta(f(a)) e^{-(x-y)^2} \quad (4.24)$$

Sin embargo, de (4.17) tenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{da} \right|_{f=0} &= \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial a} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{f=0}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

y obtenemos la ec.(4.21) nuevamente.

Por un motivo de convención, reescribamos las ecs.(4.23)-(4.25) usando la notación

que a llegado a ser standard para las teorías de norma. Definimos

$$\begin{aligned}
 \Delta_f^{-1} &= \int da \delta(f(x(a), y(a))) \\
 &= \int df \det \left| \frac{da}{df} \right| \delta(f) \\
 &= \det \left| \frac{da}{df} \right|_{f=0}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Así,

$$\Delta_f = \det \left| \frac{df}{da} \right|_{f=0}.$$

insertando $1 = \Delta_f \Delta_f^{-1}$ en (4.9)

$$\begin{aligned}
 Z &= \int dx dy \Delta_f \Delta_f^{-1} e^{-(x-y)^2} \\
 &= \int dx dy \det \left| \frac{df}{da} \right|_{f=0} \int da \delta(f) e^{-(x-y)^2},
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

y regresamos a la ec.(4.24).

Veamos un ejemplo sencillo para utilizar lo que hasta aquí hemos visto. Tomemos la rebanada de norma como $f(x, y) = (x + y)^2 - (x - y) = 0$. De acuerdo a las ecuaciones (4.20) y (4.21), el jacobiano es $J = 4(x + y)$ y

$$Z = \int da \int dx dy \delta((x + y)^2 - (x - y)) 4(x + y) e^{-(x-y)^2} \tag{4.28}$$

alternativamente,

$$\begin{aligned}
 f(a) = f(x(a), y(a)) &= (x' + a + y' + a)^2 - (x' - a - y' + a) \\
 &= 4a^2 + 4a(x' + y') + (x' + y')^2 - (x' - y')
 \end{aligned}$$

así

$$\left. \frac{df}{da} \right|_{a=0} = 4(x' + y') \Rightarrow \left. \frac{df}{da} \right|_{f=0} = 4(x + y) = 4(x' + y')$$

y la ec.(4.24) nos lleva a un resultado idéntico a la ec.(4.28).

Hasta aquí hemos considerado únicamente el caso en el que la rebanada de norma satisface $f = 0$. Sin embargo, nuestro resultado es independiente de la elección de la rebanada, es decir, podemos elegir también $f = c$, donde c es una constante real. Nosotros hemos definido la parte de Z en la que estamos interesados de tal manera que sea distinta de cero únicamente sobre la rebanada de norma, pero esta no es la única opción. Nuestro objetivo después de todo, es encontrar una definición de Z que sea finita e independiente de la elección de la rebanada de norma. Una manera de garantizar la independencia de la rebanada es sumar todas las rebanadas, pesando cada rebanada de tal manera que la

integral a lo largo de una orbita de norma sea finita.

Por ejemplo, podemos sumar todas las contribuciones de todas las rebanadas integrando sobre c , pesando cada rebanada, $f = c$, por $\exp(-c^2)$. Partiendo de nuestra definición de Z para una sola rebanada

$$Z = \int da \int dx dy \delta(f(x, y) - c) \left. \frac{df}{da} \right|_{f=c} e^{-(x-y)^2}, \quad (4.29)$$

podemos insertar $1 = \int dc \exp(-c^2)/\sqrt{\pi}$. El resultado es

$$\begin{aligned} Z &= \int da \int dx dy \int dc \delta(f - c) \frac{e^{-c^2}}{\sqrt{\pi}} \left. \frac{df}{da} \right|_{a=c} e^{-(x-y)^2} \\ &= \int da \int dx dy \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-f^2} \left. \frac{df}{da} \right|_{a=0} e^{-(x-y)^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Podemos interpretar el resultado, ec.(4.30), como la adición de un término a la "acción", la nueva "acción" es $\exp((x-y)^2 + f^2)$. Este nuevo término es llamado "término que fija la norma".

4.1.3 Fórmula de Faddeev y Popov

Una vez entendido el juego de la subsección anterior, es directo escribir la expresión correcta de la funcional generadora $Z_0[J]$ en una teoría de norma. El procedimiento que se sigue es exactamente el mismo que utilizamos en el ejemplo que hemos discutido.

Considerando que la acción es invariante bajo la transformación de norma

$$A^\mu \rightarrow A_\Lambda^\mu \quad (4.31)$$

donde Λ juega un papel análogo al de a en el ejemplo anterior. Nosotros podemos factorizar el volumen de norma definiendo la función $\Delta_J^{-1}[A^\mu]$ como

$$\begin{aligned} \Delta_J^{-1}[A^\mu] &\equiv \int d\Lambda(x) \delta(F(A_\Lambda^\mu)) \\ &= \int \mathcal{D}F \det \left. \frac{\delta \Lambda}{\delta F} \right| \delta(F) \\ &= \det \left. \frac{\delta \Lambda}{\delta F} \right|_{F=0} \end{aligned} \quad (4.32)$$

con lo cual

$$\Delta_J[A^\mu] = \det \left. \frac{\delta F}{\delta \Lambda} \right|_{F=0}. \quad (4.33)$$

¹El subíndice Λ sólo significa que bajo la transformación de norma el campo A^Λ es substituido por una función que depende del campo A^μ y del parámetro Λ , por ejemplo para el caso electromagnético, $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$

Obteniéndose así en analogía con (4.27) que

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_f \Delta_f^{-1} e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0(x) + J_\mu(x) \cdot A^\mu(x)]} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \int d\Lambda \det \left. \frac{\delta F}{\delta \Lambda} \right|_{F=0} \delta(F[A_\mu^\Lambda]) \exp(iS[A, J]). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Esta última relación es lo que se conoce como la fórmula de Faddeev y Popov.

Finalmente para que la funcional generadora tome sentido en una teoría de norma, la expresión (4.34) se divide por el volumen de norma (ver ec.(4.22)), obteniéndose que

$$Z_0[J] \equiv V_{norma}^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \int d\Lambda \det \left. \frac{\delta F}{\delta \Lambda} \right|_{F=0} \delta(F[A_\mu^\Lambda]) \exp(iS[A, J]). \quad (4.35)$$

4.2 SISTEMAS COVARIANTES

4.2.1 Descripción general

Uno normalmente describe el movimiento de un sistema, dando las variables canónicas como función del tiempo. Se asume que el tiempo tiene un significado físico preciso pero no es en sí mismo una variable dinámica.

Existe una formulación diferente de la dinámica en la cual el tiempo físico y las variables dinámicas son tratadas en una manera más simétrica. Esta formulación incluye al tiempo entre las variables canónicas y describe las relaciones entre las variables dinámicas originales y el tiempo físico, esto se hace escribiendo el nuevo conjunto de variables canónicas en términos de un parámetro arbitrario. Este parámetro arbitrario no posee ningún significado físico, y el formalismo es por lo tanto invariante bajo reparametrizaciones de éste, o como comúnmente se dice, el formalismo es "generalmente covariante".

En la práctica, los sistemas generalmente covariantes aparecen en dos diferentes maneras. Uno puede tener un sistema en el cual originalmente el tiempo físico no es incluido como variable canónica y uno entonces procede a "parametrizar" la teoría para que esta se convierta en generalmente covariante. Esto puede ser hecho *siempre*. La otra manera es que el sistema puede ser de entrada, generalmente covariante. Un ejemplo de este tipo de sistemas es el campo gravitacional en relatividad general.

4.2.2 El tiempo como variable canónica

Consideremos un sistema con variables canónicas q^i, p_i , y hamiltoniano $H_0(q, p)$. Asumamos por simplicidad, que este no posee constricciones. La acción para tal sistema

es

$$S[q^i(t), p_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0 \right) dt. \quad (4.36)$$

Introducamos ahora el tiempo $t \equiv q^0$ y su momento conjugado asociado p_0 como variables canónicas reemplazando (4.36) por

$$S[q^0(\tau), q^i(\tau), p_0(\tau), p_i(\tau), u^0(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(p_0 \dot{q}^0 + p_i \dot{q}^i - u^0(p_0 + H_0) \right) d\tau, \quad (4.37)$$

donde el punto denota derivada con respecto al parámetro τ .

El movimiento obtenido por demandar que (4.37) sea estacionaria, es equivalente a aquel que se obtiene si se extremiza (4.36). Esto se puede visualizar si extremizamos primero (4.37) con respecto a u^0 y p_0 , lo cual nos lleva a las relaciones

$$\gamma \equiv p_0 + H_0 = 0 \quad (4.38)$$

y

$$\dot{t} - u^0 = 0. \quad (4.39)$$

Las ecuaciones (4.38) y (4.39) pueden ser resueltas para expresar aquellas variables que fueron variadas en términos de las otras. Es entonces legítimo reemplazar en (4.37) p_0 por $-H_0$ para obtener una acción reducida para las restantes variables. Esta acción reducida depende únicamente de $q^\mu(\tau)$ ($\mu = 0, i$) y $p_i(\tau)$ y es

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_i \dot{q}^i - H_0 \dot{t}) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0 \right) dt. \quad (4.40)$$

4.2.3 Hamiltoniano cero

La acción (4.37) contiene un par de variables canónicas extra que no aparecen en (4.36) pero también contiene la restricción $\gamma \approx 0$. Esta restricción -es la única- es de primera clase. Así de acuerdo al conteo hecho en §1.4.2, el número de grados de libertad independientes es el mismo para (4.36) y (4.37), lo cual está de acuerdo con la discusión que nos llevo a (4.40).

Una propiedad importante de (4.37) es que no hay un hamiltoniano H' en esta ecuación. Concluimos así que *el hamiltoniano extendido contiene únicamente la restricción γ* , y por lo tanto el movimiento es generado por una transformación de norma. Si la teoría original tiene inicialmente otros generadores de norma $\gamma_{a'}$ ($a' = 1, \dots, m$) y restricciones de segunda clase $\chi_\alpha = 0$, la acción que reemplaza a (4.37) es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_\mu \dot{q}^\mu - H_E) d\tau, \quad (4.41)$$

donde el hamiltoniano extendido es ahora una combinación de todas las restricciones

$$H_E = u^a \gamma_a + u^\alpha \chi_\alpha \quad (a = 0, \dots, m). \quad (4.42)$$

4.2.4 Parametrización y dependencia explícita del tiempo

Incorporar al tiempo como una variable canónica en una teoría que no está escrita originalmente en forma covariante, no sólo nos lleva a tener una formulación más simétrica de la teoría. Es también útil en la práctica para tratar problemas en los cuales hay una dependencia temporal explícita en las constricciones. Tal dependencia complica el formalismo porque las ecuaciones que expresan la conservación en el tiempo de las constricciones, incluyen “derivadas temporales explícitas” y no son formuladas sólo en términos de los paréntesis.

Esta dificultad desaparece cuando el tiempo es introducido como una variable canónica porque después de efectuar este paso, la derivada parcial temporal desaparece. El análisis se desarrolla entonces como en el caso ordinario pero en el espacio fase más grande que contiene a t y p_0 . La relación $p_0 + H(p, q, t)$ debe ser incluida entre las constricciones.

4.3 CUANTIZACION EN EL ESPACIO FASE REDUCIDO

4.3.1 Espacio fase reducido

Cuando en una teoría de norma tomamos el cociente de la superficie de restricción Σ y las órbitas de norma, uno obtiene un espacio más pequeño el cual está provisto de una dos forma que es invertible (estructura simpléctica) y también de un paréntesis de Poisson bien definido. Este espacio más pequeño que se obtiene por identificar todos los puntos sobre la misma órbita es conocido como el *espacio fase reducido*. Las funciones que son definidas sobre este espacio fase reducido, son constantes a lo largo de las órbitas de norma o dicho de otra manera, estas funciones son los “observables” definidos en (1.80). De hecho es posible mostrar (ver por ejemplo Henneaux and Teitelboim (1992)) que el paréntesis inducido en el espacio fase reducido es simplemente el paréntesis de Poisson original evaluado mediante las funciones invariantes de norma.

Cuando el hamiltoniano extendido es una combinación lineal de las constricciones (sistemas covariantes), un observable toma el mismo valor sobre una historia clásica entera y las relacionadas a ella mediante una transformación de norma. Esto puede ser pensado así como una función en el espacio de soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento.

El conjunto de observables es fácilmente caracterizado en el caso de sistemas parametrizados. La restricción $p_0 + H_0 = 0$ (ec.4.38) puede ser resuelta para p_0 . Por lo tanto, las funciones sobre las superficies de restricción pueden ser vistas como funciones de q^i, p_i y t . La condición $[A(q^i, p_i, t), p_0 + H_0] \approx 0$ puede entonces ser integrada, a menos en principio. Esto es equivalente a resolver las ecuaciones de movimiento y determinar completamente la dependencia temporal de A .

El conjunto de observables es así isomórfico a el conjunto de funciones $A(\dot{q}, \dot{p})$ de condiciones iniciales. El espacio de las condiciones iniciales \dot{q}, \dot{p} es en si mismo isomórfico al espacio de las q y p en cualquier tiempo fijo. Por lo tanto, los observables estan en correspondencia biyectiva con las variables dinámicas de la teoría no-parametrizada original.

4.3.2 Integral de trayectoria en el espacio fase reducido

Veamos como se escribe la integral de trayectoria para sistemas con constricciones de primera clase en el espacio fase reducido. Nuevamente por simplicidad de notación, asumiremos que no hay constricciones de segunda clase, y que las variables de la teoría son bosónicas. Si hubiera constricciones de segunda clase, necesitaríamos incluir el término $\prod_t \delta(\chi_\alpha) (\det\{\chi_\alpha, \chi_\beta\})^{1/2}$ en las fórmulas que obtendremos y remplazar el paréntesis de Poisson por el paréntesis de Dirac cuando sea necesario (ver por ejemplo Henneaux and Teitelboim (1992)). Denotaremos las coordenadas del espacio fase por z^A .

Si $z^{*\alpha}(z^A)$ es un conjunto completo de observables independientes, o lo que es lo mismo, un conjunto completo de funciones invariantes de norma

$$\{A, \gamma_a\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad A \approx A(z^{*\alpha}), \quad (4.43)$$

y si $\sigma^{\alpha\beta}$ es la matriz de los paréntesis de Poisson ($\sigma^{\alpha\beta} = \{z^{*\alpha}, z^{*\beta}\}$), la integral de trayectoria la cual es una suma sobre trayectorias en el espacio fase reducido se escribe como

$$P.I. = \int [Dz^{*\alpha}] \prod_t (\det\{z_a^*, z_\beta^*\})^{1/2} \exp iS[z^{*\alpha}(t)]. \quad (4.44)$$

Aquí la acción $S[z^{*\alpha}(t)]$ es la acción que induce en el espacio fase reducido la acción original $S[z^A(t)]$. La acción es manifiestamente invariante de norma en el sentido de que esta depende únicamente de $z^{*\alpha}$. Más aún, es posible mostrar que $S[z^{*\alpha}]$ difiere de $S[z^A]$ a lo más por un término de frontera, el cual no puede ser invariante bajo transformaciones generadas por γ_a . A pesar de que aquí no probaremos esta última afirmación, en el siguiente capítulo ilustraremos este resultado con ejemplos concretos.

La integral de trayectoria en el espacio fase reducido depende sólo de las variables de este espacio fase reducido original. Por ejemplo, si las $z^{*\alpha}$ se dividen en pares conjugados ($q^{*\alpha'}, p_{\alpha'}^*$), el kernel del operador de evolución en la representación de coordenadas dependera de $q^{\alpha'}$ a los tiempos inicial y final.

4.3.3 Normas canónicas en el espacio fase reducido

La integral de trayectoria es invariante de norma por construcción y puede ser aplicada a un problema particular una vez que mostremos que el espacio fase reducido puede ser calculado para dicho problema. Esta integral de trayectoria posee la importante

característica de que no requiere ninguna condición para fijar la norma. Sin embargo, la integral de trayectoria (4.44) no es muy conveniente en el sentido de que un conjunto completo de funciones invariantes de norma es necesario para formularla, y esto puede no ser posible en la práctica para un sistema en particular.

Si existe una buena condición de norma canónica, digamos

$$\chi_a(q, p) = 0, \quad (4.45)$$

uno puede identificar el espacio fase reducido con la rebanada de norma definida por (4.45) sobre la superficie de restricción $\gamma_a = 0$. El sistema de constricciones $\chi_\rho \equiv (\gamma_a, \chi_a)$ es de segunda clase. La matriz $\{\chi_\rho, \chi_\sigma\}$ es

$$\{\chi_\rho, \chi_\sigma\} \approx \begin{pmatrix} 0 & \{\gamma_a, \chi_b\} \\ \{\chi_a, \gamma_b\} & \{\chi_a, \chi_b\} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

y así

$$\det\{\chi_\rho, \chi_\sigma\} = (\det\{\gamma_a, \chi_b\})^2. \quad (4.47)$$

Además, el paréntesis de Dirac de funciones invariantes de norma en la norma canónica (4.45) coincide con el paréntesis de Poisson. Uno puede reescribir (4.44) como

$$P.I. = \int [Dz^A] \prod_{t,a} \delta(\chi_a) \delta(\gamma_a) \prod_t (\det\{\gamma_a, \chi_b\}) \exp iS'[z^A(t)]. \quad (4.48)$$

Aquí $S'[z^A(t)]$ contiene el término de frontera apropiado (ver cáp. 5), el cual es necesario para asegurar que $S'[z^A(t)] = S[z^{*\alpha}(t)]$ sobre la superficie $\chi_a = 0$ y $\gamma_a = 0$. Las condiciones de frontera sobre los observables $z^{*\alpha}$ en los puntos extremos determinan implícitamente las condiciones de frontera sobre las variables z^A a través de $z^{*\alpha} = z^{*\alpha}(z^A)$ y $\gamma_a = 0, \chi_a = 0$.

4.4 CUANTIZACION BRST-BFV

4.4.1 Características generales

La idea básica de este método consiste en extender el espacio de fase del problema promoviendo los multiplicadores de Lagrange a nivel de coordenadas e introduciendo nuevas variables canónicas, que se denominan fantasmas, con estadística opuesta a las ya existentes. Dicha extensión se realiza hasta implementar de manera exacta una transformación de supersimetría global que incorpora la simetría de norma original. Esta resulta ser la simetría BRST, que explicaremos con más detalle en esta sección. Una vez que el sistema original se ha completado con estas propiedades generales, se postula que la

correspondiente medida de la integral funcional está dada por la medida de Liouville correspondiente a todas las variables canónicas involucradas. Así, una vez integrados los fantasmas, se obtiene la medida correcta en las variables originales del sistema que define el producto escalar necesario para la interpretación de la teoría. Este procedimiento tiene la virtud de ser sistemático y en más de un caso ha producido correcciones no-triviales e inesperadas al método de Faddeev-Popov, que usualmente es el más utilizado para cuantizar teorías de norma.

Los fantasmas fueron introducidos por primera vez por Feynman, con el fin de mantener la unitariedad de una teoría de Yang-Mills. Se les dió el nombre de fantasmas porque, a pesar de ser escalares bajo transformaciones de coordenadas, no tienen estadística de bosón, es decir, violan el teorema de espín-estadística por lo cual no son observables. Estos campos adquirieron más sentido cuando Faddeev y Popov mostraron que los fantasmas podían obtenerse como resultado de un cálculo correcto de la medida de la integral de trayectoria, y por ésto se les dió el nombre de fantasmas de Faddeev-Popov. Posteriormente, con el trabajo de Becchi-Rouet-Stora y Tyutin, éstos adquirieron un carácter más formal ya que se mostró que eran parte esencial de una nueva simetría, que ahora se conoce con el nombre de simetría BRST. Esta simetría tiene dos características esenciales: *i*) es el residuo de la simetría de norma una vez que ésta se ha fijado, es decir, es una simetría que prevalece aún a pesar de que se haya seleccionado una norma. *ii*) A diferencia de la simetría de norma, esta simetría es de carácter global, es decir, el parámetro de la transformación no depende de la posición. Además, este parámetro es un número de Grassmann, por lo cual la simetría BRST es un tipo de supersimetría ya que la transformación relaciona bosones con fermiones. Las variables de Grassmann pueden considerarse como el límite clásico de campos fermiónicos, que están cuantizados con anticonmutadores con el objeto de satisfacer la estadística de Fermi-Dirac. En efecto, si consideramos el límite clásico ($\hbar \rightarrow 0$) del anticonmutador $\{\psi_a, \psi_b\} = \hbar \delta_{ab}$ obtenemos que el álgebra satisfecha por las variables $\theta_a = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \psi_a$ está dada por $\theta_a \theta_b + \theta_b \theta_a = 0$. En particular $\theta_a^2 = 0$. Las relaciones anteriores definen la estructura básica de un álgebra de Grassmann.

4.4.2 Formalismo BRST

Como un ejemplo de la simetría BRST consideremos el caso de la electrodinámica, que como hemos visto tiene un lagrangiano igual a

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

Este lagrangiano es invariante bajo las transformaciones de norma locales

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda. \quad (4.50)$$

El lagrangiano efectivo en la norma de Lorentz es

$$L_{eff} = L + L_{gf} + L_{FPG}. \quad (4.51)$$

con

$$L_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (4.52)$$

$$L_{FPG} = -i\partial^\mu \bar{c}\partial_\mu c, \quad (4.53)$$

donde L_{gf} impone la condición de norma de Lorentz y L_{FPG} es el lagrangiano de los fantasmas que en este caso simple se desacoplan. El lagrangiano efectivo ya no es invariante bajo las transformaciones (3.3), sin embargo, es invariante bajo las siguientes transformaciones

$$\delta A_\mu = -\frac{\omega}{g}\partial_\mu c, \quad (4.54)$$

$$\delta \bar{c} = -i\frac{\omega'}{g\xi}\partial^\mu A_\mu,$$

$$\delta c = 0.$$

De las ecuaciones anteriores vemos que dicha transformación es del tipo supersimétrico dado que relaciona fantasmas, que son fermiones, con el campo bosónico A_μ . En consecuencia, el parámetro de la transformación ω debe ser un número de Grassmann impar. Estas transformaciones se conocen con el nombre de transformaciones de BRST.

Del teorema de Noether sabemos que dada una simetría existe una carga conservada, en este caso la carga de BRST. En el formalismo lagrangiano de las ecuaciones anteriores dicha carga está dada por

$$Q_{BRST} = \frac{1}{g} \int d^3x [c\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\xi} \bar{c}\partial^\mu A_\mu] \quad (4.55)$$

Esta expresión es lineal en los fantasmas y en consecuencia es una variable Grassmanniana impar. Esta propiedad la vamos a tomar como de carácter fundamental. Para implementar esta idea introducimos el concepto de paridad de Grassmann $\epsilon(z)$ de la variable z , que toma los valores 0 o 1 según z sea par o impar en los generadores del álgebra de Grassmann respectivamente. De este modo tenemos que

$$\epsilon(Q_{BRST}) = 1. \quad (4.56)$$

El problema ahora es construir una expresión general para esta carga dentro del formalismo hamiltoniano de una teoría de norma, sin fijar una norma específica. Para hacer esto agrandamos el espacio fase (p, q) considerando a los multiplicadores de Lagrange λ^a asociados a las constricciones de primera clase como nuevas variables canónicas. Por lo tanto es necesario también agregar sus momentos conjugados π_a de tal modo que

$$\{\lambda^a, \pi_a\} = -\{\pi_a, \lambda^a\} = \delta_a^b. \quad (4.57)$$

Para que la teoría original no se modifique es necesario considerar que estos momentos van a ser nuevas constricciones de primera clase $\pi_a \approx 0$. Así, el conjunto total de constricciones es ²

$$C_A = (\pi_a, \gamma_a). \quad (4.58)$$

²Estamos considerando que nuestras constricciones son bosónicas y de primera clase)

con $A = 1, \dots, 2n$, donde n es el número de constricciones de primera clase sin tomar en cuenta a los momentos conjugados de los multiplicadores de Lagrange.

Como siguiente paso introducimos los fantasmas η^A y consideramos que también son variables canónicas, a las cuales asociamos sus momentos canónicos conjugados \mathcal{P}_A , que llamaremos antifantasmas

$$\{\eta^B, \mathcal{P}_A\} = \{\mathcal{P}_A, \eta^B\} = -\delta_A^B, \quad (4.59)$$

donde $\epsilon(\mathcal{P}_A) = \epsilon(\eta^A) = 1$, $(\eta^A)^* = \eta^A$ y $(\mathcal{P}_A)^* = -\mathcal{P}_A$. Imponemos además que las nuevas variables canónicas η^A, \mathcal{P}_A tengan paréntesis de Poisson cero con el resto de las variables $Z_\Delta = (p_i, q^i, \lambda^a, \pi_a)$

$$\{\eta^A, Z_\Delta\} = \{\mathcal{P}_A, Z_\Delta\} = 0. \quad (4.60)$$

El espacio de fase extendido con coordenadas $(Z_\Delta, \eta^A, \mathcal{P}_A)$, equipado con esta estructura de paréntesis de Poisson se denomina el superespacio fase. Además de la paridad de Grassman es conveniente definir en este superespacio una estructura adicional \mathcal{G} , que denominaremos número de fantasma. Esto lo hacemos atribuyendo a cada una de las variables básicas un número de fantasma de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(Z_\Delta) = 0, \quad \mathcal{G}(\eta^A) = 1, \quad \mathcal{G}(\mathcal{P}_A) = -1. \quad (4.61)$$

Además requerimos que el número de fantasma de un producto de variables sea igual a la suma del número de fantasma de sus componentes.

La carga de BRST se construye pidiendo que genere las transformaciones de norma asociadas a las constricciones de primera clase dadas en la ec.(4.58), al orden más bajo en una expansión en serie de potencias de los fantasmas. Por otra parte, en base a la expresión (4.55), consideraremos que dicha carga es real, tiene número de fantasma $\mathcal{G}(\Omega) = 1$ y paridad de Grassman $\epsilon(\Omega) = 1$. Con estas condiciones la carga de BRST queda completamente determinada a orden más bajo, donde debe tener la forma

$$\Omega = \eta^A C_A + \text{términos de orden superior.} \quad (4.62)$$

Los términos de mayor orden quedan determinados por la propiedad de nilpotencia

$$\{\Omega, \Omega\} = 0. \quad (4.63)$$

Para entender mejor esta propiedad, tomemos en cuenta que Ω genera las transformaciones de BRST, entonces una segunda variación de una función arbitraria está dada por

$$\delta^{(2)}F = \{\{F, \Omega\}, \Omega\}. \quad (4.64)$$

Empleando en (3.16) la superidentidad de Jacobi

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + (-)^{\epsilon_{F_1}(\epsilon_{F_2} + \epsilon_{F_3})} \{\{F_2, F_3\}, F_1\} + (-)^{\epsilon_{F_3}(\epsilon_{F_1} + \epsilon_{F_2})} \{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0, \quad (4.65)$$

válida para cuando se tienen cantidades con paridad Grassmann arbitraria, se obtiene

$$\delta^{(2)}F = -\frac{1}{2} \{\{\Omega, \Omega\}, F\}. \quad (4.66)$$

Así, vemos que si Ω es nilpotente, una transformación de BRST queda completamente determinada por la primera variación. La propiedad de nilpotencia determina Ω hasta una transformación de BRST, dado que

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \Rightarrow \{\Omega', \Omega'\} = 0, \quad (4.67)$$

con

$$\Omega' = \Omega + \{K, \Omega\}, \quad (4.68)$$

para K arbitraria. Una solución de la condición de nilpotencia (4.63), que toma en cuenta (4.62) y las condiciones que $\mathcal{G}(\Omega) = 1$ y $\epsilon(\Omega) = 1$, está dada por

$$\begin{aligned} \Omega = & \eta^A C_A + \eta^B \eta^C \text{}^{(1)}U_{BC}{}^A \mathcal{P}_A + \eta^C \eta^D \eta^E \text{}^{(2)}U_{CDE}{}^{AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B + \dots \\ & + \eta^{B_1} \dots \eta^{B_{n+1}} \text{}^{(n)}U_{B_1 \dots B_{n+1}}{}^{A_1 \dots A_n} \mathcal{P}_{A_1} \dots \mathcal{P}_{A_n}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

con

$$\text{}^{(1)}U_{BC}{}^A = -\frac{1}{2} C_{CB}{}^A, \quad (4.70)$$

donde las $C_{AB}{}^C$ son las funciones de estructura dadas en (2.6). Las expresiones para las funciones de estructura de mayor orden pueden encontrarse por ejemplo en (Henneaux and Teitelboim (1992)). Para algunas teorías conocidas, como por ejemplo las que describen el modelo estandar $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ y la gravitación de Einstein, el desarrollo de Ω llega sólo hasta orden uno.

Una vez calculada la carga de BRST, se definen los observables del sistema como aquellas cantidades con número de fantasma igual a cero y que son invariantes bajo BRST, es decir que tienen paréntesis de Poisson igual a cero con Ω . La dinámica del sistema queda determinada por el hamiltoniano BRST. Este se encuentra definido por la condición que al orden más bajo en los fantasmas debe reducirse al hamiltoniano canónico. Además, debe tener paridad Grassmann cero, ser real y con número de fantasma igual a cero. Por último, debe preservar la invariancia BRST del sistema de tal manera que

$$\{H_{BRST}, \Omega\} = 0. \quad (4.71)$$

Bajo estas condiciones, a primer orden en los fantasmas el hamiltoniano de BRST está dado por

$$H_{BRST} = H_0 + \eta^A V_A{}^B \mathcal{P}_B + \text{"mas"} \quad (4.72)$$

donde "mas" significa términos de al menos cuatro fantasmas.

4.4.3 Integral de trayectoria BRST

El siguiente paso es evaluar el operador de evolución del sistema utilizando el método de BRST-BFV. Tomando en cuenta que este operador es unitario una vez que hemos introducido los fantasmas, podemos tomar la representación de éste en términos de la integral

de trayectoria de Feynman. Además debemos considerar que los estados que son de interés físico son aquellos aniquilados por la carga de BRST, en consecuencia únicamente es necesario considerar elementos de matriz del operador de evolución entre estos estados. Esto implica que debemos imponer condiciones de frontera en la integral de trayectoria que sean BRST invariantes. Esta condición no garantiza unicidad en las condiciones de frontera, dado que tenemos la libertad de seleccionar una clase de equivalencia de estados físicamente permisibles, además de que podemos elegir la representación en que deseamos trabajar (momentos o coordenadas). Existen al menos tres tipos de condiciones de frontera adecuadas y nosotros elegiremos una representación que hace contacto con el método de Faddeev-Popov. En esta representación las constricciones se clasifican de manera análoga a (4.58) y los fantasmas se ordenan de la siguiente manera

$$\eta^A = (-i\mathcal{P}^a, \mathcal{C}^a), \quad \mathcal{P}_A = (i\bar{\mathcal{C}}_a, \bar{\mathcal{P}}_a). \quad (4.73)$$

Las variables $\mathcal{C}^a, \bar{\mathcal{C}}_a$ son reales y respectivamente conjugadas a $\bar{\mathcal{P}}_a, \mathcal{P}^a$, que son puramente imaginarias, de tal modo que se satisfacen los siguientes paréntesis de Poisson

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}^a, \bar{\mathcal{C}}_b\} = \{\mathcal{C}^a, \mathcal{P}^b\} = \{\bar{\mathcal{C}}_a, \bar{\mathcal{P}}_b\} = \{\bar{\mathcal{P}}_a, \mathcal{P}^b\} = 0, \\ \{\bar{\mathcal{P}}_a, \mathcal{C}^b\} = -\delta_a^b = \{\bar{\mathcal{P}}^b, \bar{\mathcal{C}}_a\}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Las condiciones de frontera a tiempo final τ_2 y tiempo inicial τ_1 , que son BRST invariantes para este conjunto de variables, son

$$\mathcal{C}^a(\tau_2) = \mathcal{C}^a(\tau_1) = 0, \quad (4.75)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_a(\tau_2) = \bar{\mathcal{C}}_a(\tau_1) = 0, \quad (4.75b)$$

$$\pi_a(\tau_2) = \pi_a(\tau_1) = 0, \quad (4.75c)$$

donde recordamos que π_a denota los momentos canónicos conjugados asociados a los multiplicadores de Lagrange λ^a . Estas condiciones de frontera son BRST invariantes en general, dado que, en términos de estas variables la carga de BRST puede escribirse como

$$\Omega = \mathcal{C}^a \gamma_a - i\mathcal{P}^a \pi_a + \text{"más"}$$

donde "más" contiene al menos un antifantasma y dos fantasmas. Así, la variación de \mathcal{C} se cancela debido a (4.75) y la variación de $\bar{\mathcal{C}}$ se cancela por (4.75b). Por último, la variación de π es automáticamente igual a cero.

Es claro que aún falta fijar las condiciones de frontera de las restantes variables dinámicas, lo que dependerá específicamente del problema en cuestión. Una vez determinadas éstas, el operador de evolución está dado por la acción efectiva cuántica

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}\mu \exp(iS_{eff}), \quad (4.76)$$

donde $\mathcal{D}\mu$ es la medida de Liouville correspondiente a todas las variables canónicas introducidas y

$$S_{eff} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\dot{q}^i p_i - \lambda^a \dot{\pi}_a + i\eta^A \mathcal{P}_A - H_{eff} \right). \quad (4.76b)$$

4.4.4 Normas canónicas

El hamiltoniano efectivo H_{eff} no se encuentra únicamente definido, ya que como mencionamos en (4.68), todo observable en BRST-BFV queda indeterminado hasta un operador de la forma $\{\Omega, K\}$. Por lo tanto el hamiltoniano efectivo lo podemos definir como

$$H_{eff} = H_{BRST} - \{\Psi, \Omega\} \quad (4.77)$$

donde Ψ se conoce como la condición de norma fermiónica. Una de las propiedades fundamentales de (4.76b) es su invariancia ante transformaciones infinitesimales de Ψ lo que quiere decir que la integral de trayectoria es independiente de la elección de norma (Teorema de Fradkin-Vilkovisky). Esto permite realizar diversas pruebas de consistencia de las teorías de norma sin imponer alguna condición de norma. Sin embargo, no es posible utilizar el valor $\Psi = 0$, ya que en este caso la integral no se encuentra bien regularizada.

La elección

$$K = i\bar{C}_a \lambda^a - \mathcal{P}_a \lambda^a, \quad (4.78)$$

nos produce una acción de norma fija S_K que es lineal en π con un coeficiente igual a $\lambda^a - \chi^a$. Como consecuencia la integral sobre π da la funcional delta $\delta(\lambda^a - \chi^a)$, es decir, restringe la integral de trayectoria a la "derivada de norma" $\lambda^a - \chi^a = 0$. Uno podría preguntarse si es posible escribir la amplitud (4.76b) como una integral de trayectoria en una norma canónica

$$\chi_a(q, p) = 0. \quad (4.79)$$

La respuesta es que esto es posible si existe una transformación de norma en los puntos extremos tal que las condiciones de frontera puedan ser transformadas en nuevas condiciones de frontera que satisfagan (4.79). Asumamos que este es el caso y que la transformación de norma ha sido hecha. Esta transformación modificara en general, la acción por un término de frontera.

Si uno toma en la integral de trayectoria BRST la norma fermiónica

$$K = (i/\varepsilon)\bar{C}_a \lambda^a - \mathcal{P}_a \lambda^a, \quad (4.80)$$

haciendo el cambio de variables de integración

$$b_a \rightarrow \varepsilon b_a \quad \bar{C}_a \rightarrow \varepsilon \bar{C}_a$$

cuyo Jacobiano es unitario, y tendiendo ε a cero, uno obtiene

$$P.I. = \int [Dq Dp Db D\lambda D\eta D\bar{C} Dc Dp] \left[\int (p\dot{q} - H - \lambda\gamma - b\chi - \bar{C}[\chi, \gamma]\eta) + \text{B.T.} \right] \quad (4.81)$$

donde B.T. es el término de frontera inducido por la transformación de norma mencionada anteriormente. La integral sobre el multiplicador de Lagrange da $\delta(\gamma)$, la integral sobre los momentos π , da $\delta(\chi_a)$, mientras que la integral sobre los fantasmas da el determinante de Faddeev-Popov. Así, las trayectorias son restringidas por (4.79) en la suma sobre

trayectorias. Notese que hay una $\delta(\chi_a)$ y un determinante de Faddeev y Popov más dado que las λ no estan restringidas en los extremos mientras que las π , las \tilde{C} y las η estan restringidas a ser cero (ecs. (4.76)). La derivación anterior de la integral de trayectoria en una norma canónica ha sido dada en (Fradkin y Vilkovisky (1977)).

Capítulo 5

CUANTIZACIÓN DE SISTEMAS COVARIANTES II

En este capítulo presentamos dos ejemplos concretos de cuantización de sistemas covariantes, en los cuales empleamos parte de los conceptos que hemos desarrollado a lo largo de este trabajo.

Comenzamos cuantizando la partícula libre no relativista parametrizada. Esto se hace primeramente en el espacio fase reducido y después mediante la integral de trayectoria BRST. Se discute la cuantización en dos diferentes normas canónicas y se muestra que los resultados que se obtienen mediante los dos distintos métodos y en las dos diferentes normas canónicas, son sólo una reescritura de una misma amplitud de probabilidad, y esta es la de la partícula libre no relativista que hemos calculado en el capítulo tres.

El segundo ejemplo que se trabaja es el modelo de gravedad en 1+1 dimensiones de Banks-O'Loughlin. Los procedimientos y técnicas que utilizamos para cuantizar este modelo, son las mismas que utilizamos para la partícula libre no relativista parametrizada. Se hace además una comparación de la acción hamiltoniana de este modelo, con la acción hamiltoniana de la gravedad de Einstein. Cabe mencionar que la cuantización de este modelo en normas canónicas, es el primer ejemplo explícito que se da, de la efectividad de los dos métodos de cuantización que hemos abordado en este trabajo, en un modelo con interacción.

5.1 PARTÍCULA LIBRE NO RELATIVISTA PARAMETRIZADA

5.1.1 Integral de trayectoria en el espacio fase reducido

En esta sección ilustramos el análisis general de la integral de trayectoria en el espacio fase reducido y su expresión en términos de normas específicas para el caso de la partícula libre no relativista parametrizada, un punto importante a ilustrar es ver que las diferentes elecciones de condiciones de norma canónicas son meras reescrituras de la misma amplitud en el espacio fase reducido.

Se sigue de §4.2.2, que la partícula libre relativista parametrizada puede ser vista como un sistema cuya acción es

$$S[q, p, t, p_t, N] = \int (p\dot{q} + p_t \dot{t} - N\mathcal{H}) d\tau, \quad (5.1)$$

donde \mathcal{H} es una constricción de primera clase

$$\mathcal{H} = p_t + \frac{p^2}{2m} \approx 0, \quad (5.2)$$

y N es un multiplicador de Lagrange.

Las ecuaciones de movimiento para esta acción son

$$\dot{q} = N \frac{p}{m}, \quad \dot{t} = N, \quad \dot{p} = 0, \quad \dot{p}_t = 0. \quad (5.3)$$

De estas ecuaciones de movimiento obtenemos que para cualquier valor de la constante c , un conjunto completo de observables está dado por

$$q_c^*(\tau) = q(\tau) - \frac{p(\tau)}{m}(t(\tau) - c(\tau)), \quad p^*(\tau) = p(\tau). \quad (5.4)$$

Estas son constantes de movimiento¹ las cuales coinciden con q y p en la norma canónica $t = c$. Los operadores de Heisenberg $q_c^*(\tau)$ son independientes de τ . Para diferentes valores de c , ellos están relacionados por una transformación unitaria

$$q_{c_1}^* = \exp \left[i \frac{p^2}{2m} (c_1 - c_2) \right] q_{c_2}^* \exp \left[-i \frac{p^2}{2m} (c_1 - c_2) \right], \quad (5.4b)$$

y los correspondientes eigenestados están relacionados por

$$\{q_{c_1}^*, \tau_1\} = e^{i(p^2/2m)(c_1 - c_2)} \{q_{c_2}^*, \tau_2\}. \quad (5.4c)$$

¹uno puede checar directamente esto calculando $\{q_c^*, \mathcal{H}\}$

La amplitud de transición (ver §3.5)

$$\langle q_{c_2}^*, \tau_2 | q_{c_1}^*, \tau_1 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i(c_2 - c_1)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m(q_{c_2}^* - q_{c_1}^*)^2}{2i(c_2 - c_1)} \right] \quad (5.5)$$

puede ser escrita como una suma sobre las trayectorias del espacio fase reducido (las cuales definimos como $q_{c=0}^*(\tau) \equiv q^*(\tau)$, $p_{c=0}^*(\tau) \equiv p^*(\tau)$) de la exponencial de la acción del espacio fase reducido $S_R[q^*(\tau), p^*(\tau)]$. Para visualizar esto, consideremos la integral de trayectoria

$$\int [\mathcal{D}q \mathcal{D}p] \exp i \int \left[p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} \right] d\tau, \quad (5.6)$$

sumada sobre todas las trayectorias $q(\tau)$, $p(\tau)$ que satisfacen

$$q(\tau_1) = q_1, \quad q(\tau_2) = q_2. \quad (5.6b)$$

Haciendo el cambio de variables de integración

$$q^*(\tau) = q(\tau) - \frac{p^*(\tau)}{m}\tau, \quad p^*(\tau) = p(\tau), \quad (5.7)$$

obtenemos que (5.6) puede ser reescrita como

$$\int [\mathcal{D}q^* \mathcal{D}p^*] \exp i \left\{ \int p^* \dot{q}^* d\tau + \frac{1}{2} \left[\frac{p^{*2}\tau}{m} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \right\} \quad (5.8)$$

donde las trayectorias q^* , p^* están sujetas a las condiciones de borde

$$q^*(\tau_1) + \frac{p^*}{m}\tau_1 = q_1, \quad q^*(\tau_2) + \frac{p^*}{m}\tau_2 = q_2, \quad (5.8b)$$

o escritas en términos de $q_{c_1}^*$, $q_{c_2}^*$ ²

$$\left[q^* + \frac{p^*}{m}c_1 \right] (\tau_1) = q_{c_1}^*, \quad (5.8c)$$

$$\left[q^* + \frac{p^*}{m}c_2 \right] (\tau_2) = q_{c_2}^*.$$

Mencionemos que a pesar de que en (5.8) el hamiltoniano se anula, el valor de la acción en los extremos contiene (como es de esperarse) el factor $\exp im(q_2 - q_1)^2/2(\tau_2 - \tau_1)$ de la amplitud de transición.

Concluimos así que la acción reducida difiere de $\int p^* \dot{q}^*$ por un término de frontera adaptado a las condiciones de borde (5.8c)

$$S_R[q^*(\tau), p^*(\tau)] = \int p^* \dot{q}^* d\tau + \left[\frac{p^{*2}}{2m} \left(c_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (5.8d)$$

²estas expresiones se obtienen al utilizar en 5.8b las relaciones entre $q_{c_1}^*$, $q_{c_2}^*$ y q^* , p^*

5.1.2 Condiciones de norma canónicas

La integral de trayectoria en el espacio fase reducido

$$\langle q_{c_2}^*, \tau_2 | q_{c_1}^*, \tau_1 \rangle = \int [Dp^* Dq^*] \exp iS[q^*(\tau), p^*(\tau)] \quad (5.9)$$

puede ser escrita en términos de q, p, t, p_t y condiciones de norma. Para tal fin, uno observa que la acción (5.1) difiere débilmente de la acción reducida (5.8d) por un término de superficie

$$S_R \approx S + \left[\frac{p^2}{2m} \left(c_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) - t \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (5.10)$$

Consideraremos condiciones de norma canónicas de la forma

$$t - f(\tau) = 0, \quad (5.11)$$

para la cual el determinante $[t - f(\tau), p_t + H_0]$ es uno. La integral de trayectoria en el espacio fase reducido es, de acuerdo a nuestra discusión de §4.3.3, igual a

$$\langle q_{c_2}^*, \tau_2 | q_{c_1}^*, \tau_1 \rangle = \int [Dq Dp Df Dp_t] \Pi_t \delta(t - f(\tau)) \delta(p_t + H) \exp iS', \quad (5.12)$$

$$S' = \int \left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} \frac{dt}{d\tau} \right) + \left[\frac{p^2}{2m} \left(c_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) - t \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (5.12b)$$

Las trayectorias están sujetas a las condiciones de frontera

$$\left(q - \frac{p}{m} (t(\tau) - c_1) \right) (\tau_1) = q_{c_1}^*, \quad (5.12c)$$

$$\left(q - \frac{p}{m} (t(\tau) - c_2) \right) (\tau_2) = q_{c_2}^*.$$

5.1.3 Norma $t=0$

En la norma $t=0$, el hamiltoniano de la acción (5.12b) se anula. Uno encuentra, sin embargo, de las ecs. (5.12) que la integral de trayectoria puede ser descrita en esta norma como

$$\begin{aligned} \langle q_{c_2}^*, \tau_2 | q_{c_1}^*, \tau_1 \rangle &= \int [Dq Dp Df Dp_t] \Pi_t \delta(t) \delta(p_t + H) \exp iS' \\ &= \int [Dq Dp] \exp i \left\{ \int p\dot{q} d\tau + \left[\frac{p^2}{2m} c \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

con las condiciones de frontera

$$q(\tau_1) + \frac{p(\tau_1)}{m}c_1 = q_{c_1}^*, \quad q(\tau_2) + \frac{p(\tau_2)}{m}c_2 = q_{c_2}^*. \quad (5.13b)$$

Haciendo el cambio de variables de integración

$$Q = q + \frac{p}{m}c_1 + \frac{p}{m} \frac{c_2 - c_1}{\tau_2 - \tau_1} (\tau - \tau_1), \quad (5.13c)$$

$$P = p,$$

y reescalando al parámetro τ , $\bar{\tau} = \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) + c_1$, uno puede reescribir (5.13) en la forma

$$P.I. = \int [\mathcal{D}Q\mathcal{D}P] \exp i \left[\int_{c_1}^{c_2} d\bar{\tau} \left(P \frac{dQ}{d\bar{\tau}} - \frac{P^2}{2m} \right) \right], \quad (5.14)$$

con las condiciones de frontera

$$Q(\bar{\tau} = \tau_1) = q_{c_1}^*, \quad Q(\bar{\tau} = \tau_2) = q_{c_2}^*. \quad (5.14b)$$

Esta es justamente la integral de trayectoria standard para la partícula libre no relativista no parametrizada, la cual como hemos visto en §3.5 es

$$P.I. = \left(\frac{m}{2\pi i(c_2 - c_1)} \right)^{1/2} \exp - \left[\frac{m(q_{c_2}^* - q_{c_1}^*)^2}{2i(c_2 - c_1)} \right]^{1/2}.$$

Concluimos así que nada está mal si “el tiempo no fluye”.

5.1.4 Norma $t \approx \tau$

Uno puede permitir también que el tiempo fluya como esto es ordinariamente hecho. A pesar de que la elección de norma $t = \tau$ es posible, es más simple, ajustar los puntos finales tal que $t(\tau_1) = c_1$ y $t(\tau_2) = c_2$. Así elegimos

$$t = f(\tau) = c_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1). \quad (5.15)$$

La ventaja de esta elección de norma es que ésta hace que el término de superficie en (5.12b) sea nulo, lo cual simplifica la forma de las condiciones de frontera. Uno obtiene en esta norma de las ecs. (5.12)

$$\langle q_{c_2}^*, \tau_2 | q_{c_1}^*, \tau_1 \rangle = \int [\mathcal{D}q\mathcal{D}p] \exp i \int \left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} \frac{c_2 - c_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) d\tau \quad (5.16)$$

con

$$q(\tau_1) = q_{c_1}^*, \quad q(\tau_2) = q_{c_2}^*. \quad (5.16b)$$

Si $c_2 - c_1 \neq 0$ ³, uno puede transformar el lado derecho de (5.16) por reescribir la integral como una integral sobre t . Esto nos lleva a la forma usual de la amplitud de transición derivada en §3.5

$$\int [\mathcal{D}q\mathcal{D}p] \exp i \int_{c_1}^{c_2} \left(p \frac{dq}{dt} - \frac{p^2}{2m} \right) dt.$$

con lo cual concluimos nuevamente que

$$P.I. = \left(\frac{m}{2\pi i(c_2 - c_1)} \right)^{1/2} \exp - \left[\frac{m(q_{c_2}^* - q_{c_1}^*)^2}{2i(c_2 - c_1)} \right]^{1/2},$$

sujeta a las condiciones de borde (5.16b).

De estos resultados podemos observar, que no importa que elección de norma canónica tomemos, la expresión de la amplitud de transición será siempre la misma.

5.1.5 Integral de trayectoria BRST

Para escribir la integral de trayectoria en una norma canónica, partamos de la acción covariante de la partícula libre

$$S = \int \left(p\dot{q} + p_t \dot{t} - N \left(p_t + \frac{p^2}{2m} \right) \right) d\tau, \quad (5.17)$$

con

$$q(\tau_1) = q_1, \quad q(\tau_2) = q_2, \quad t(\tau_1) = t_1, \quad t(\tau_2) = t_2, \quad (5.17b)$$

en los extremos.

Consideremos nuevamente condiciones de norma de la forma

$$t - f(\tau) = 0. \quad (5.18)$$

Las condiciones de frontera (5.17b) no satisfacen en general las condiciones de norma (5.18), es así necesario realizar primeramente una transformación de norma tal que (5.18) sea válida en los extremos.

Las transformaciones de norma requeridas son

$$\delta q \approx \varepsilon \frac{p}{m}, \quad \delta p \approx 0 \quad (5.19)$$

$$\delta t \approx \varepsilon, \quad \delta p_t \approx 0 \quad (5.19b)$$

$$\delta N \approx \dot{\varepsilon}, \quad (5.19c)$$

³lo cual implica que $d\tau/df$ está bien definido

y de $\delta t \approx \varepsilon$ concluimos que

$$\varepsilon(\tau_1) = t(\tau_1) - t_1 \quad y \quad \varepsilon(\tau_2) = t(\tau_2) - t_2. \quad (5.19d)$$

Las transformaciones de norma (5.19) no se anulan en τ_1 y τ_2 , y *modifican por consiguiente las condiciones de frontera y la acción por un término de superficie*. Más precisamente, las trayectorias que obedecen (5.17b) son mapeadas por (5.19) sobre las trayectorias que obedecen

$$q(\tau_1) - \varepsilon(\tau_1) \frac{p(\tau_1)}{m} = q_1 \quad q(\tau_2) - \varepsilon(\tau_2) \frac{p(\tau_2)}{m} = q_2 \quad (5.20)$$

o

$$q(\tau_1) - \frac{p}{m}(t(\tau_1) - t_1) = q_1, \quad q(\tau_2) - \frac{p}{m}(t(\tau_2) - t_2) = q_2, \quad (5.20a)$$

y la acción se transforma en

$$\begin{aligned} S &= \int \left[p(\dot{q} - \dot{\varepsilon} \frac{p}{m} - \varepsilon \frac{\dot{p}}{m}) + p_t(t - \varepsilon) - (N - \dot{\varepsilon}) \left(p_t + \frac{p^2}{2m} \right) \right] d\tau \\ &= \int \left[p\dot{q} + p_t t - N \left(p_t + \frac{p^2}{2m} \right) \right] - \varepsilon(\tau) \frac{p^2}{2m} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

De acuerdo a la discusión hecha en §4.4.4, tenemos que la integral de trayectoria se escribe como

$$\begin{aligned} P.I. &= \int [\mathcal{D}q \mathcal{D}p \mathcal{D}t \mathcal{D}p_t] \delta(t - f(\tau)) \delta \left(p_t + \frac{p^2}{2m} \right) \exp i \int d\tau [p\dot{q} + p_t t] - \varepsilon(\tau) \frac{p^2}{2m} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \\ &= \int [\mathcal{D}q \mathcal{D}p \mathcal{D}t \mathcal{D}p_t] \delta(t - f(\tau)) \delta \left(p_t + \frac{p^2}{2m} \right) \\ &\quad \exp i \int d\tau \left[p\dot{q} + p_t \frac{dt}{d\tau} \right] - \frac{p^2}{2m} \left[t(\tau) - \left(t_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (t_2 - t_1) \right) \right] \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Analicemos ahora esta expresión para la integral de trayectoria BRST en las mismas normas que utilizamos para la integral de trayectoria en el espacio fase reducido.

5.1.6 Norma $t=0$

En la norma $t = 0$, el hamiltoniano se anula. Uno encuentra sin embargo de (5.20) y (5.22)

$$P.I. = \int [\mathcal{D}q \mathcal{D}p] \exp i \int d\tau p\dot{q} + \frac{p^2}{2m}(t_2 - t_1), \quad (5.23)$$

donde las trayectorias están sujetas a las condiciones de frontera

$$q(\tau_1) + \frac{p}{m}t_1 = q_1, \quad q(\tau_2) + \frac{p}{m}t_2 = q_2. \quad (5.23a)$$

Estas ecuaciones coinciden con las ecs. (5.13), por lo cual concluimos que la expresión para la integral de trayectoria será

$$P.I. = \left(\frac{m}{2\pi i(t_2 - t_1)} \right)^{1/2} \exp - \left[\frac{m(q_2 - q_1)^2}{2i(t_2 - t_1)} \right]^{1/2}$$

con

$$Q(\bar{\tau} = \tau_1) = q_1, \quad Q(\bar{\tau} = \tau_2) = q_2.$$

5.1.7 Norma $t \approx \tau$

En la norma $t(\tau) = f(\tau) = t_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}(t_2 - t_1)$ tenemos

$$\begin{aligned} P.I. &= \int [\mathcal{D}q\mathcal{D}p\mathcal{D}t\mathcal{D}p_i] \delta(t - f(\tau)) \delta \left(p_i + \frac{p^2}{2m} \right) \\ &\quad \exp i \int d\tau \left[p\dot{q} + p \frac{dt}{d\tau} \right] - \frac{p^2}{2m} \left[t(\tau) - \left(t_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}(t_2 - t_1) \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \\ &= \int [\mathcal{D}q\mathcal{D}p] \exp i \int d\tau \left[p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} \frac{df}{d\tau} \right] \\ &= \int [\mathcal{D}q\mathcal{D}p] \exp i \int d\tau \left[p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} \frac{t_2 - t_1}{\tau_2 - \tau_1} \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

con las trayectorias sujetas a las condiciones

$$q(\tau_1) = q_1, \quad q(\tau_2) = q_2. \quad (5.24b)$$

Estas son las mismas relaciones que obtuvimos en el caso del espacio fase reducido para esta misma norma (ecs. (5.16)), con lo cual concluimos que la expresión de la integral de trayectoria es

$$P.I. = \left(\frac{m}{2\pi i(t_2 - t_1)} \right)^{1/2} \exp - \left[\frac{m(q_2 - q_1)^2}{2i(t_2 - t_1)} \right]^{1/2},$$

en la cual las trayectorias $q(\tau)$ están sujetas a las condiciones (5.24b).

5.2 GRAVEDAD CUÁNTICA EN 1+1

5.2.1 Modelo de Banks-O'Loughlin

El modelo de Banks-O'Loughlin de gravedad en 2 dimensiones, se basa en la construcción de un conjunto de lagrangianos covariantes locales, para la gravedad en interacción con un campo escalar.

Nuestro punto de partida es considerar las acciones que tienen como características (i) ser funcionales de la métrica y de un campo escalar, (ii) depender a lo más de las segundas derivadas de los campos y (iii) ser las funcionales invariantes ante transformaciones de coordenadas más generales. Las densidades lagrangianas toman la forma (Banks and O'Loughlin (1991))

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) + D(\phi)R \right) = \sqrt{-g}(\mathcal{L}_S + DR). \quad (5.25)$$

El análisis de estas acciones lleva a la conclusión de que la solución general para la métrica siempre tiene un vector de Killing. Este vector de Killing es ortogonal a el gradiente de ϕ , tal que las superficies de ϕ constante son líneas de flujo del campo vectorial de Killing. Esta observación motiva una elección de coordenadas en el espacio-tiempo.

Más aún, la teoría general de espacios simétricos garantiza que siempre es posible elegir un sistema coordenado en el cual los elementos de línea toman la forma

$$ds^2 = g_{11}(x^1)dx^{1^2} + g_{22}(x^1)dx^{2^2}. \quad (5.26)$$

Aquí x^2 parametriza la dirección homogénea a lo largo del flujo de los vectores de Killing. Dado que estas son superficies de ϕ constantes, el campo escalar dependerá únicamente de x^1 en este sistema de coordenadas. El trabajo es realizado sobre espacios tiempos con la topología del cilindro, con la dirección compacta elegida como tipo-espacio. Hay entonces dos clases de soluciones, dependiendo de que la dirección homogénea sea tomada tipo-espacio o tipo-tiempo. La elección adecuada del espacio fase corresponde a las configuraciones espacialmente homogéneas, las cuales se propagan en el tiempo. x^1 es una coordenada tipo tiempo no acotada que nosotros llamaremos t . El elemento de línea puede ser escrito como

$$ds^2 = g^2(t)dt^2 - h^2(t)dx^2, \quad (5.27)$$

y la acción llega a ser (el volumen coordenado de x es tomado como uno)

$$S = \int dt \left(\frac{\dot{D}(\phi)h}{g} + \frac{h\dot{\phi}^2}{2g} - hgV \right). \quad (5.28)$$

Hemos escrito esta ecuación en términos de la variable h , pero usaremos $\sigma = \ln h$ como variable canónica para evitar la confusión de tener que identificar configuraciones que difieran solamente en el signo de h

$$S = \int dt \left(\frac{\dot{D}\sigma e^\sigma}{g} + \frac{e^\sigma \dot{\phi}^2}{2g} - e^\sigma gV \right). \quad (5.29)$$

El lagrangiano homogéneo continúa siendo invariante bajo reparametrizaciones globales del tiempo si, h , ϕ y g transforman de la siguiente manera bajo dicha reparametrización

$$h(f(t)) = h(t),$$

$$\begin{aligned}\phi(f(t)) &= \phi(t), \\ g(f(t)) &= \frac{dt}{df}g(t).\end{aligned}\tag{5.30}$$

Escribiendo la acción (5.29) en términos de los momentos canónicos

$$\pi_\sigma = \frac{e^\sigma \dot{D}}{g}, \quad \pi_\phi = \frac{e^\sigma D' \dot{\sigma}}{g} + \frac{e^\sigma \dot{\phi}}{g},\tag{5.31}$$

($D' \equiv dD/d\phi$) obtenemos ⁴

$$S = \int d\tau \left(\frac{d\phi}{d\tau} \pi_\phi + \frac{d\sigma}{d\tau} \pi_\sigma - g\mathcal{H} \right),\tag{5.32}$$

donde \mathcal{H} aparece como una constricción

$$\mathcal{H} = -\frac{\pi_\sigma^2}{2D'^2} + \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{D'} + e^{2\sigma} V \approx 0.\tag{5.33}$$

A esta constricción se le conoce como la constricción de Wheeler-DeWitt.

Es posible resolver la constricción clásicamente y así reducir el espacio fase. Por ejemplo podemos resolver para π_σ obteniendo

$$\pi_\sigma = D' \left[\pi_\phi \pm \sqrt{\pi_\phi^2 + 2e^{2\sigma} V} \right].\tag{5.34}$$

$$S = \int d\tau \left(\frac{d\phi}{d\tau} \pi_\phi + \frac{d\sigma}{d\tau} \pi_\sigma - g\mathcal{H} \right),\tag{5.35}$$

o

$$S = \int d\sigma \left(\frac{d\phi}{d\sigma} \pi_\phi + \pi_\sigma \right).\tag{5.36}$$

En una primera aproximación a la cuantización de este sistema, elegiremos el único lagrangiano de los que estamos trabajando que es invariante bajo translaciones de ϕ , éste tiene $D(\phi) = Q\phi$ y $V(\phi) = \lambda$, la constante cosmológica.

5.2.2 Comparación con la gravitación

Antes de comenzar nuestro análisis para obtener la expresión de la integral de trayectoria en el modelo de Banks-O'Loughlin, hagamos un paréntesis para comparar la estructura de la gravitación de Einstein y nuestro modelo. Esto lo haremos a partir de la acción en

⁴esta es el análogo de la acción 5.1 para el modelo de Banks-O'Loughlin, g aparece como un multiplicador de Lagrange

forma hamiltoniana.

El principio de acción hamiltoniano para las ecuaciones de Einstein se escribe como ⁵

$$S = \int (\pi^{ij} g_{ij} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i) d^3x d\tau, \quad (5.37)$$

donde la acción debe ser extremizada con respecto a variaciones de g_{ij} , π^{ij} , N y N^i .

La integral en (5.36) se efectúa sobre la región de espacio-tiempo que se encuentra entre dos superficies tipo espacio $\tau = \tau_1$, $\tau = \tau_2$, que no se intersectan así mismas. Las g_{ij} son las componentes del tensor métrico sobre la superficie tridimensional tipo espacio $\tau = \text{cte.}$, y π^{ij} son sus momentos canónicamente conjugados. Las funciones "lapse" N y las componentes del vector "shift" N^i son multiplicadores de Lagrange los cuales describen la posición relativa de dos superficies tipo espacio vecinas.

La única restricción sobre las variaciones de las funciones involucradas en (5.36) es que el tensor métrico espacial g_{ij} debe permanecer fijo hasta un cambio de coordenadas espaciales, ambos a $\tau = \tau_1$ y $\tau = \tau_2$.

Las constricciones \mathcal{H} y \mathcal{H}_i están dadas por

$$\mathcal{H} = 2G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} + \frac{g}{2}(-R + 2\lambda), \quad (5.38)$$

$$\mathcal{H}_i = -2\nabla_j \pi^j_i \quad (5.39)$$

con

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk} - g_{ij}g_{kl}), \quad (5.40)$$

y donde g , R , y ∇ son respectivamente, el determinante, la curvatura y la derivada covariante correspondiente a g_{ij} , λ es la constante cosmológica.

Comparando las ecuaciones (5.32) y (5.37) podemos ver directamente varias analogías, (i) el multiplicador de Lagrange g del modelo de Banks-O'Loughlin es el análogo de la función "lapse" de la gravitación, (ii) en el modelo de Banks-O'Loughlin no existe un análogo del vector "shift", (iii) debido a (ii), no existe una restricción análoga a \mathcal{H}_i , (iv) comparando las constricciones \mathcal{H} de la gravitación (ec. (5.38)) y del modelo de Banks-O'Loughlin (ec. (5.33)) interpretamos al factor λ de la restricción (5.33), como el análogo de la constante cosmológica.

Por último veamos cuantos grados de libertad existen en ambos modelos. En la gravitación tenemos 12 variables canónicas (6 g_{ij} y 6 π^{ij}) y 4 constricciones de primera clase (\mathcal{H} y 3 componentes \mathcal{H}_i). Así según el conteo de grados de libertad hecho en §1.4.2 tenemos después de fijar la norma, $\frac{12-4}{2} = 2$ grados de libertad.

En el caso del modelo de Banks-O'Loughlin tenemos 4 variables canónicas y una restricción (que es obviamente de primera clase), con lo cual tenemos una vez fijada la norma $\frac{4-2}{2} = 1$ grado de libertad.

⁵a la formulación hamiltoniana de la gravitación se le conoce como formalismo ADM (Arnold, Deser, Misner)

5.2.3 Integral de trayectoria en el espacio fase reducido

Las ecuaciones de movimiento para esta acción son

$$\dot{\phi} = g \frac{\pi_\sigma}{D}, \quad \dot{\sigma} = g \left(-\frac{\pi_\sigma}{D'^2} + \frac{\pi_\phi}{D'} \right), \quad \dot{\pi}_\phi = 0, \quad \dot{\pi}_\sigma = -2\lambda g e^{2\sigma}. \quad (5.41)$$

De estas ecuaciones de movimiento obtenemos que para cualquier valor de la constante c , un conjunto completo de observables están dados por (en el caso $\pi_\sigma = Q[\pi_\phi + \sqrt{\pi_\phi^2 + 2e^{2\sigma}\lambda}]$)

$$\phi_c^* = \phi + Q \left[2(\sigma - c) - \ln \left| \frac{\pi_\sigma}{\pi_c} \right| \right], \quad \pi_\phi^* = \pi_\phi, \quad (5.42)$$

donde $\pi_c \equiv \pi_\phi + \sqrt{\pi_\phi^2 + 2\lambda e^{2c}}$. Estas son constantes de movimiento⁶, las cuales coinciden con ϕ y π_ϕ en la norma canónica $\sigma = c$.

La amplitud de transición $\langle \phi_{c_2}^*, \tau_2 | \phi_{c_1}^*, \tau_1 \rangle$ puede ser escrita como una suma sobre las trayectorias del espacio fase reducido (las cuales definimos como $\phi_{c=0}^*(\tau) \equiv \phi^*(\tau)$, $\pi_{\phi c=0}^*(\tau) \equiv \pi_\phi^*(\tau)$) de la exponencial de la acción del espacio fase reducido. Para visualizar esto, consideremos la integral de trayectoria

$$\int [\mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi_\phi] \exp i \int \left[\pi_\phi \dot{\phi} + Q \left[\pi_\phi + \sqrt{\pi_\phi^2 + 2e^{2\sigma}\lambda} \right] \right] d\tau, \quad (5.43)$$

sumada sobre todas las trayectorias ϕ , π_ϕ que satisfacen

$$\phi(\tau_1) = \phi_1, \quad \phi(\tau_2) = \phi_2. \quad (5.43b)$$

Haciendo el cambio de variables de integración

$$\phi^*(\tau) = \phi(\tau) + Q \left[2\tau - \ln \left| \frac{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda e^{2\sigma}}}{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda}} \right| \right], \quad \pi_\phi^* = \pi_\phi, \quad (5.44)$$

obtenemos que (5.43) puede ser reescrita como

$$\int [\mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\pi_\phi^*] \exp i \left\{ \int \pi_\phi^* \dot{\phi}^* d\tau + Q \left[\sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda e^{2\sigma}} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \right\} \quad (5.45)$$

donde las trayectorias ϕ^* , π_ϕ^* están sujetas a las condiciones de borde

$$\begin{aligned} \phi^*(\tau_1) - Q \left[2\tau_1 - \ln \left| \frac{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda e^{2\sigma}}}{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda}} \right| \right] &= \phi_1, \\ \phi^*(\tau_2) - Q \left[2\tau_2 - \ln \left| \frac{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda e^{2\sigma}}}{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda}} \right| \right] &= \phi_2, \end{aligned}$$

⁶uno puede chequear directamente esto calculando $\{q_c^*, \mathcal{H}\}$

o escritas en términos de $q_{c_1}^*$, $q_{c_2}^*$ ⁷

$$\phi_{c_1}^* = \left[\phi^* - Q \left(2c_1 - \ln \left| \frac{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda e^{2c_1}}}{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda}} \right| \right) \right] (\tau_1),$$

$$\phi_{c_2}^* = \left[\phi^* - Q \left(2c_2 - \ln \left| \frac{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda e^{2c_2}}}{\pi_\phi^* + \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda}} \right| \right) \right] (\tau_2).$$

Dado que el hamiltoniano reducido $H(\phi^*, \sigma^*)$ se anula, concluimos que la acción reducida difiere de $\int \pi^* \dot{\phi}^* d\tau$ por un término de frontera adaptado a las condiciones de frontera (5.38c),

$$S_R[\phi^*(\tau), \pi_\phi^*(\tau)] = \int \pi_\phi^* \dot{\phi}^* d\tau + \left[Q \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda \exp 2 \left(c_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) \right)} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (5.46)$$

5.2.4 Condiciones de norma canónicas

La integral de trayectoria del espacio fase reducido

$$\langle \phi_{c_2}^*, \tau_2 | \phi_{c_1}^*, \tau_1 \rangle = \int [\mathcal{D}\pi_\phi^* \mathcal{D}\phi^*] \exp i S_R[\phi^*(\tau), \pi_\phi^*(\tau)] \quad (5.47)$$

puede ser escrita en términos de $\phi, \pi_\phi, \sigma, \pi_\sigma$ y condiciones de norma. Para tal fin, uno observa que la acción (5.34) difiere débilmente de la acción reducida (5.41) por un término de superficie

$$S_R \approx S + Q \left[\sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda \exp 2 \left(c_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) \right)} - \sqrt{\pi_\phi^{*2} + 2\lambda e^{\sigma(\tau)}} \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (5.48)$$

Consideraremos condiciones de norma de la forma

$$\sigma - f(\tau) = 0 \quad (5.49)$$

para las cuales el determinante $\{\sigma - f(\tau), -\frac{\pi_\sigma^2}{2Q^2} + \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{Q} + e^{2\sigma} \lambda\} = -\frac{\pi_\sigma^2}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q}$. La integral de trayectoria en el espacio fase reducido es, de acuerdo a nuestra discusión de §4.4.4, igual a

$$\begin{aligned} \langle q_{c_2}^*, \tau_2 | q_{c_1}^*, \tau_1 \rangle &= \int [\mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi_\sigma] \left(-\frac{\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q} \right) \prod_\sigma \delta(\sigma - f(\tau)) \\ &\quad \delta \left(-\frac{\pi_\sigma^2}{2Q^2} + \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{Q} + e^{2\sigma} \lambda \right) \exp i S'. \end{aligned} \quad (5.50)$$

⁷ estas expresiones se obtienen al utilizar en (5.40b) las relaciones entre $q_{c_1}^*$, $q_{c_2}^*$, ϕ^* y π_ϕ^*

$$S' = \int d\tau \left(\pi_\phi \dot{\phi} + \pi_\sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \right) + Q \left[\sqrt{\pi_\phi^2 + 2\lambda \exp 2 \left(c_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) \right)} - \sqrt{\pi_\phi^2 + 2\lambda e^{\sigma(\tau)}} \right]_{\tau_1}^{\tau_2}$$

Las trayectorias estan sujetas a las condiciones de frontera

$$\phi_{c_1}^* = \left[\phi + 2Q(\sigma(\tau) - c_1) + Q \ln \left| \frac{\pi_\phi + \sqrt{\pi_\phi^2 + 2\lambda e^{2c_1}}}{\pi_\phi + \sqrt{\pi_\phi^2 + 2\lambda e^{2\sigma(\tau)}}} \right| \right]_{(\tau_1)} \quad (5.50b)$$

$$\phi_{c_2}^* = \left[\phi + 2Q(\sigma(\tau) - c_2) + Q \ln \left| \frac{\pi_\phi + \sqrt{\pi_\phi^2 + 2\lambda e^{2c_2}}}{\pi_\phi + \sqrt{\pi_\phi^2 + 2\lambda e^{2\sigma(\tau)}}} \right| \right]_{(\tau_2)}$$

5.2.5 Norma $\sigma \approx \tau$

Consideremos la norma

$$\sigma(\tau) = f(\tau) = \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) + c_1. \quad (5.51)$$

En esta norma tenemos que el término de frontera de la acción se anula (ec.(5.50), con lo cual el propagador queda dado por la expresión

$$\langle q_{c_2}^* | q_{c_1}^* \rangle = \int [D\pi_\phi D\phi D\sigma D\pi_\sigma] \left(-\frac{\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q} \right) \prod_\sigma \delta \left(-\frac{\pi_\sigma^2}{2Q^2} + \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{Q} + e^{2\sigma} \lambda \right) \delta(\sigma - f(\tau)) \exp i \int d\tau \left(\pi_\phi \dot{\phi} + \pi_\sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \right), \quad (5.52)$$

Es posible simplificar un poco más la expresión del propagador, esto se hace de la siguiente manera. Integrando primeramente sobre π_σ

$$P.I. = - \int [D\phi D\sigma D\pi_\sigma] \left(\frac{1}{2Q} + \frac{e^{2\sigma} \lambda Q}{\pi_\sigma^2} \right) \delta(\sigma - f(\tau)) \exp i \int d\tau \left(\phi \left[\frac{\pi_\sigma}{2Q} + \frac{e^{2\sigma} \lambda Q}{\pi_\sigma} \right] + \pi_\sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \right),$$

y haciendo el cambio de variable $\pi = \frac{\pi_\sigma}{2Q} + \frac{e^{2\sigma} \lambda Q}{\pi_\sigma}$, la P.I. se reescribe como

$$P.I. = - \int [D\phi D\sigma D\pi] \delta(\sigma - f(\tau)) \exp i \int d\tau \left(\dot{\phi} \pi + Q[\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\lambda e^{2\sigma}}] \frac{d\sigma}{d\tau} \right),$$

integrando después en π y ϕ obtenemos

$$P.I. = - \frac{1}{2\pi} \int d\pi_0 e^{i\pi_0(\phi_{\tau_2} - \phi_{\tau_1})} \int D\sigma \delta(\sigma - f(\tau)) \exp i \int \left(\pi_0 + \sqrt{\pi_0^2 + 2\lambda e^{2\sigma}} \frac{d\sigma}{d\tau} \right),$$

integrando finalmente en σ y tomando en cuenta explícitamente la condición de norma obtenemos

$$P.I. = -\frac{1}{2\pi} \int d\pi_0 e^{i\pi_0(\phi_{c_2} - \phi_{c_1})} \exp i \int \left(d\tau \left(\pi_0 + \sqrt{\pi_0^2 + 2\lambda \exp 2 \left(c_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (c_2 - c_1) \right) \frac{c_2 - c_1}{\tau_2 - \tau_1}} \right) \right). \quad (5.53)$$

con

$$\phi(\tau_1) = \phi_{c_1}, \quad \phi(\tau_2) = \phi_{c_2}. \quad (5.53b)$$

Considerando que τ va de $0 \rightarrow 1$, podemos escribir la ecuación como

$$P.I. = -\frac{1}{2\pi} \int d\pi_0 e^{i\pi_0(\phi_{c_2} - \phi_{c_1})} \exp i \int_0^1 d\tau \left(\pi_0 + \sqrt{\pi_0^2 + 2\lambda e^{2(c_1 + \tau(c_2 - c_1))}} (c_2 - c_1) \right). \quad (5.54)$$

5.2.6 Integral de trayectoria BRST en una norma canónica

Para escribir la integral de trayectoria en una norma canónica, partamos de la acción covariante (5.32)

$$S[\phi, \pi_\phi, \sigma, \pi_\sigma, g] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\pi_\sigma \dot{\sigma} + \pi_\phi \dot{\phi} - g \left(-\frac{\pi_\sigma^2}{2Q^2} + \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{Q} + \lambda e^{2\sigma} \right) \right], \quad (5.55)$$

con

$$\phi(\tau_1) = \phi_1, \quad \phi(\tau_2) = \phi_2; \quad \sigma(\tau_1) = \sigma_1, \quad \sigma(\tau_2) = \sigma_2, \quad (5.55b)$$

donde ϕ_1, ϕ_2, σ_1 , y σ_2 son números- c dados y g es un multiplicador de Lagrange. Consideraremos aquí normas del mismo tipo que en el caso anterior,

$$\sigma - f(\tau) = 0 \quad (5.56)$$

Las condiciones de frontera dadas (5.55b) no satisfacen en general las condiciones de norma. Es así necesario realizar primeramente una transformación de norma para que la condición de norma $\sigma - f(\tau)$ sea válida en los puntos extremos. La transformación de norma requerida es

$$\begin{aligned} \delta\phi &\approx \epsilon \left(\frac{\pi_\sigma}{Q} \right), & \delta\pi_\phi &\approx 0 \\ \delta\sigma &\approx \epsilon \left(\frac{-\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q} \right), & \delta\pi_\sigma &\approx \epsilon(-2\lambda e^{2\sigma}) \end{aligned} \quad (5.57)$$

con

$$\epsilon[\pi_\phi, \sigma, \pi_\sigma](\tau_1) = \frac{1}{\left(\frac{-\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q} \right)} (\sigma(\tau_1) - \sigma_1), \quad \epsilon[\pi_\phi, \sigma, \pi_\sigma](\tau_2) = \frac{1}{\left(\frac{-\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q} \right)} (\sigma(\tau_2) - \sigma_2).$$

Las transformaciones de norma no se anulan en τ_1 y τ_2 y *modifican por consiguiente las condiciones de frontera y la acción por un término de superficie*. Más precisamente, las trayectorias que obedecen (5.55b)) son mapeadas por (5.57)) sobre las trayectorias que obedecen

$$\phi(\tau_1) - \epsilon(\tau_1) \frac{\pi_\sigma}{Q} = \phi_1, \quad \sigma(\tau_1) - \epsilon(\tau_1) \left(-\frac{\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q} \right) = \sigma_1 \quad (5.58)$$

$$\phi(\tau_2) - \epsilon(\tau_2) \frac{\pi_\sigma}{Q} = \phi_2, \quad \sigma(\tau_2) - \epsilon(\tau_2) \left(-\frac{\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q} \right) = \sigma_2,$$

y la acción llega a ser

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\pi_\sigma \dot{\sigma} + \pi_\phi \dot{\phi} - g \left(-\frac{\pi_\sigma^2}{2Q^2} + \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{Q} + \lambda e^{2\sigma} \right) \right] + \epsilon \left(\frac{\pi_\sigma^2}{2Q^2} - \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{Q} + \lambda e^{2\sigma} \right) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (5.59)$$

De acuerdo a la discusión hecha en §4.4.4, tenemos que la integral de trayectoria se escribe como

$$P.I. = \int [\mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi_\sigma] \det \left(-\frac{\pi_\sigma}{Q^2} + \frac{\pi_\phi}{Q} \right) \prod_\sigma \delta \left(-\frac{\pi_\sigma^2}{2Q^2} + \frac{\pi_\sigma \pi_\phi}{Q} + \lambda e^{2\sigma} \right) \delta(\sigma - f(\tau)) \exp iS \quad (5.60)$$

5.2.7 Norma $\sigma \approx \tau$

Como un ejemplo explícito en una norma canónica, consideremos la norma

$$\sigma(\tau) = f(\tau) = \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_1. \quad (5.61)$$

Para esta norma canónica, observamos de (5.57) y (5.59) que las condiciones de frontera en la acción respectiva son nulas, y por lo tanto la expresión de la integral de trayectoria se reduce a la expresión (5.52) y (5.54)

$$P.I. = -\frac{1}{2\pi} \int d\pi_0 e^{i\pi_0(\phi_{\tau_2} - \phi_{\tau_1})} \exp i \int \left(d\tau \left(\pi_0 + \sqrt{\pi_0^2 + 2\lambda \exp 2\left(\sigma_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (\sigma_2 - \sigma_1) \right)} \right) \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\tau_2 - \tau_1} \right).$$

con las condiciones de borde

$$\phi(\tau_1) = \phi_1, \quad \phi(\tau_2) = \phi_2.$$

Conclusiones

Hemos visto que para calcular las amplitudes físicas, el método BRST-BFV presenta la ventaja de que no necesitamos conocer las soluciones de las ecuaciones de movimiento para obtener una expresión del propagador. Este es el principal problema que presenta el método del espacio fase reducido, dado que este requiere resolver las ecuaciones de movimiento para valores iniciales arbitrarios, y no siempre es posible hacer esto. Por ejemplo, si uno intentara cuantizar el oscilador armónico parametrizado uno se encontraría con una gran dificultad para poder resolver las ecuaciones de movimiento para valores iniciales y después implementar estas en la integral de trayectoria. La ventaja principal que tenemos en los dos sistemas que aquí hemos presentado es que en ambos tenemos por lo menos un momento canónico constante (de hecho en el caso de la partícula libre no relativista, ambos momentos canónicos son constantes p y p_t , mientras que en el caso del modelo de Banks-O'Loughlin π_ϕ es constante), y esto nos permite resolver la restricción en términos de sólo un parámetro que no es constante (de hecho en la partícula libre no relativista el hamiltoniano canónico es constante), con lo cual uno puede utilizar el método del espacio fase reducido. De esto se concluye que la cuantización mediante el método BRST-BFV es la más apropiada para obtener el propagador de un sistema dado.

En este trabajo hemos checado por primera vez que la expresión general para la integral de trayectoria en una norma canónica, es válida para un modelo con interacción y que el método del espacio fase reducido trabaja bien en este caso. Debemos mencionar sin embargo que esto era de esperarse ya que la expresión general de la integral de trayectoria en una norma canónica ha sido deducida en forma general (Henneaux, Teitelboim y Vergara (1992)), sólo que no se había presentado explícitamente un ejemplo con interacción.

Se sigue de nuestro análisis también, que en el caso del modelo con interacción, la acción del espacio fase reducido y la acción invariante ante BRST no son iguales. Sin embargo la expresión final del propagador es la misma para ambos casos. Esto es algo que no es claro para nosotros. Por otro lado debemos mencionar que el hecho de que hayamos obtenido la misma expresión para el propagador mediante los dos métodos con los que hemos trabajado para cada uno de los dos sistemas que presentamos aquí, no quiere decir que en general esto suceda. Para ser precisos, en términos generales no existe un consenso sobre cual debería ser la relación entre las expresiones de los propagadores que se obtienen por ambos métodos. Creemos que en nuestros ejemplos se obtiene directamente la misma expresión para el propagador por los dos diferentes métodos de cuantización debido a su simplicidad.

Bibliografía

- Henneaux, M. and Teitelboim, C. 1992, *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press.
- Dirac, P.A.M. 1950, "Generalized hamiltonian Dynamics", *Can. J. Math.* **2**:129.
- Dirac, P.A.M. 1967, *Lectures on Quantum Mechanics*. Yeshiva University, New York: Academic Press.
- Dirac, P.A.M. 1958, "Generalized Hamiltonian Dynamics", *Proc. Roy. Soc. (London)* **A246**:326.
- Hanson, A., Regge, T., Teitelboim, C. 1976. *Constrained Hamiltonian Systems*. Rome: Accad. Naz. dei Lincei.
- Sudarshan, E.D.G., and Mukunda, N. 1974. *Classical Dynamics: a modern perspective*. New York: Wiley.
- Landau, L.D. y Lifshitz, E. M. 1991, *Mecánica*. España: Reverté.
- Matzner, R. A. and Shepley, L. C. 1991, *Classical Mechanics*. Prentice-Hall.
- Freedman, D. Z., and Townsend, P. K. 1981. "Antisymmetric tensor gauge theories and non-linear σ -models", *Nucl. Phys.* **B177**:282.
- Henneaux, M., Teitelboim, C., and Zanelli, J. 1990. "Gauge invariance and degree of freedom count", *Nucl. Phys.* **B332**:169.
- Cawley, R. 1979. "Determination of the hamiltonian in the presence of constraints", *Phys. Rev. Lett.* **25**:180.
- Schomblond, C. *L'Integrale fonctionnelle en mecanique quantique et en theorie quantique des champs*. (notes), Université libre de Bruxelles, faculté des sciences.
- Feynman, R. P. 1948. "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **20**:267.
- Feynman, R. P., and Hibbs, A. R. 1965. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York: McGraw-Hill.
- Ryder, L. H. 1985. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.
- Faddeev, L. D., and Slavnov, A. A. 1980. *Gauge fields: Introduction to quantum theory*. Reading: Benjamin/Cummings.
- Coleman, S. 1985. *Aspects of symmetry*. Cambridge University Press.
- Teitelboim, C. 1982. "Quantum mechanics of the gravitational field", *Phys. Rev.* **D25**:3159.

- Fradkin, E. S., and Vilkovisky, G.A., 1977. "Quantization of relativistic systems with constraints equivalence of canonical and covariant formalisms in quantum theory of gravitational field", CERN Report **TH-2332**
- Batalin, I.A., and Vilkovisky, G.A., 1977. "Relativistic S-Matrix of dynamical systems with bosons and fermion constraints", *Phys. Lett.* **69B**:309.
- Fradkin, E. S., and Fradkina, T. E. 1977. "Quantization of relativistic systems with bosons and fermion first-and second-class constraints", *Phys. Lett.* **72B**:3-13.
- Cheng, Ta-Pei., and Li, Ling-Fong. 1984. *Gauge Theory of elementary particle physics.* Oxford University Press.
- Hatfield B. 1992. *Quantum field theory of point particles and strings.* Addison Wesley Publishing Company.
- Zenteno, A. G., Urrutia, L.F., and Vergara, J. D. 1994. "Introducción a la cuantización de teorías de norma empleando el método BRST-BFV", *Rev. Mex. Fis.* **40**:476.
- Henneaux, M., and Vergara, J. D. 1991. "BRST formalism and gauge invariant operators: the example of the free relativistic particle", Proceedings of the first international A. D. Sakharov Conference on Physics. Moscow
- Henneaux, M., Teitelboim, C., and Vergara, J. D. 1992. "Gauge invariance for generally covariant systems", *Nucl. Phys.* **B387**:391.
- Banks, T., and O'Loughlin, M. 1991. "Two-dimensional quantum gravity in Minkowski space", *Nucl. Phys.* **B362**:649.
- Weinberg, S., 1965. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.* New York: Wiley.