870120

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA

1

Incorporada a la Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela de Matemáticas

Dos Sistemas de Axiomas Equivalentes para la obtención de Topologías

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA fundada en 1935

CIENCIA Y LIBERTAD

TESIS PROFESIONAL

que para obtener el título de:

MATEMATICO

Presenta:

Armando Luis Bezies Kindling

2002

Guadalajara, Jal. [redacted]

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA
fundada en 1935

ESCUELA DE MATEMATICAS

23 de Agosto de 1984.

AL PASANTE DE MATEMATICO
SR. ARMANDO LUIS BEZIES KINDLING
P R E S E N T E

En contestación a su solicitud de fecha 17 de Agosto del presente año, me es grato informarle que la H. Comisión de Tesis que me honro en presidir, aprobó como tema que usted deberá desarrollar para su-examen de Matemático, el que a continuación transcribo:

"DOS SISTEMAS DE AXIOMAS EQUIVALENTES PARA LA OBTENCION DE - TOPOLOGIAS"

		INTRODUCCION
Capítulo	I.	Teorías Matemáticas
Capítulo	II.	Teorías Básicas
Capítulo	III.	La Teoría de Conjuntos
Capítulo	IV.	Teorías más fuertes que la Teoría de Conjuntos
Capítulo	V.	Estructuras Topológicas
		CONCLUSIONES
		BIBLIOGRAFIA

Ruego a usted tomar nota, que la copia fotografiada del presente oficio, deberá ser incluída en los preliminares de todo ejemplar de su tesis.

A T E N T A M E N T E
"CIENCIA Y LIBERTAD"

ING. EDUARDO MANUEL OJEDA PEÑA
DIRECTOR DE LA ESCUELA DE MATEMATICAS.

UNIV. AUT. DE GDALA.

AV. PATRIA No. 1201. APDO. POSTAL 1-440 DIRECCION CABLEGRAFICA: UAG GUADALAJARA C.P. 44100 GUADALAJARA, JAL. MEXICO.

Dedicatoria

Con dulce recuerdo a Dora e Isabel,
con profundo cariño a Armando, Bruno y Beatriz.

INTRODUCCION

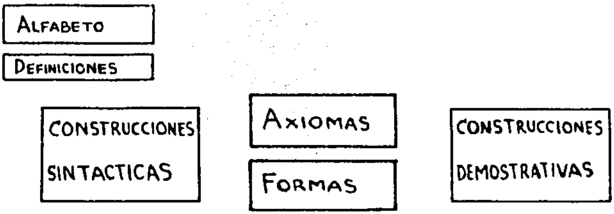
La conducta humana ha sido objeto de un gran número de estudios, sin embargo su sutileza no ha permitido una descripción total de la misma. Parcialmente el ser humano se auxilia de un lenguaje para determinar, mediante un proceso psicológico, objetos, propiedades y relaciones. Estos elementos se confrontan dentro de un procedimiento lógico y se reflejan en su conducta.

Hace menos de cien años se consideró a la Matemática con la capacidad de transformarse en un lenguaje perfecto, lo que conduciría a hacer realidad el sueño de Gottfried W. Leibniz: ...no habría ya mayor necesidad de discusión entre dos filósofos que entre dos contables. Les bastaría tomar sus lápices, sentarse ante un tablero y decir...: " Calculemos. " Estas ideas se vinieron abajo con los resultados de Kurt Gödel, que culminó el trabajo de grandes matemáticos, e inició muchos resultados posteriores, haciendo ver que la Matemática se encuentra irremediablemente limitada en el sentido antes dicho, aún así, actualmente la Matemática continúa siendo una herramienta muy valiosa para muchas ciencias, al igual que es introducida en muchas otras que aparentaban no tener conexión con ella.

El trabajo presente pretende dos objetivos; primero enmarcar el funcionamiento básico de la Matemática como un lenguaje formal, lo cual esencialmente permite ser a la Matemática tan versátil, y segundo ilustrar un pequeño sector con la demostración de un resultado que permite cambiar los axiomas clásicos que definen una Topología por un sistema de axiomas equivalentes. A grandes rasgos el trabajo se desarrolla de la siguiente forma: se establese el concepto y el funcionamiento de lo que se llamará una Teoría Matemática, que es un sistema formal independiente que permite obtener resultados lógicos a partir de otros y que en un momento dado pueden tener interpretación real. Se establecen después condiciones para conectar una y otra teoría y deducir resultados de una en otra. Posteriormente se presenta la construcción de la Teoría de Conjuntos que es la teoría base de la Matemática y algunos de sus resultados, y como a partir de esta se construyen muchas otras teorías (muchas de las cuales forman los capítulos más importantes de la Matemática) llamadas Teorías de Estructuras y las condiciones para aplicar los resultados de una en otra, para así concluir con el primer objetivo dando el concepto de Teorías de Estructuras equivalentes. El segundo objetivo se desarrolla presentando dos estructuras específicas, siendo una de ellas la estructura Topológica, para demostrar que son equivalentes.

CAPITULO I. TEORIAS MATEMATICAS

Las partes que constituyen una Teoría Matemática se presentan en el siguiente diagrama:



El alfabeto es un grupo de signos divididos en:

+ Signos lógicos
+ Letras
+ Signos relacionales
+ Signos sustantivales

Los signos lógicos son cuatro, a saber: τ, $\square$, $\vee$, $\sim$.

Las letras pueden tomarse del alfabeto: latino, griego, árabe, germano, etc.... Son usadas tanto mayúsculas como minúsculas, acentuadas con uno o más acentos, o bien subindizadas con los números: 0, 1, 2,..., para hacer distinciones.

Los signos relacionales y los signos sustantivales son de forma tipográfica arbitraria y a cada uno de ellos se le asocia un entero no negativo llamado peso.

Una vez establecido el alfabeto de la Teoría se puede construir una infinidad de sucesiones finitas de signos del mismo, escritos uno enseguida del otro, en linea horizontal. Dichas sucesiones reciben el nombre de reuniones de la Teoría.

Las reuniones son de dos tipos:

+ Reuniones de primera especie
+ Reuniones de segunda especie

Las reuniones de primera especie son las que consisten de una sola letra, o comienzan con un signo sustantival o bien con el signo lógico τ.

Las reuniones de segunda especie son las que no son de primera especie.

Las definiciones son formas tipográficas arbitrarias, muchas veces oraciones del lenguaje común, usadas para denotar una reunión específica. Normalmente contienen las letras que aparecen en la reunión que denotan.

El uso de las definiciones permite llevar un desarrollo adecuado, sin perderse en la manipulación de reuniones extremadamente complicadas.

Dada la dificultad que se presenta al intentar describir una construcción sintáctica, nos auxiliaremos de la siguiente notación:

- $\mathbf{A};\mathbf{B}';\mathbb{C}_i;\ldots$ denotarán reuniones cualesquiera y por lo tanto también letras. (i es cualquier número: 1,...)
- $\omega;x';y_i;\ldots$ denotarán exclusivamente letras.
- $(\mathbb{A})(\mathbb{B})$ o $\mathbb{A}\mathbb{B}$, denotará a la reunión obtenida al escribir $\mathbb{B}$ enseguida de $\mathbb{A}$.
- $\tau_x(\mathbb{A})$, denotará la reunión $\tau\mathbb{A}$, en caso que x se encuentre en $\mathbb{A}$, todas las x son sustituidas por $\square$.
- $(\mathbb{B}|x)(\mathbb{A})$, denotará a la reunión $\mathbb{A}$, en caso que x se encuentre en $\mathbb{A}$, todas las x son sustituidas, simultaneamente, por $\mathbb{B}$.
- $\mathbb{A}\{x_1;\ldots;x_p\}$, denotará la reunión $\mathbb{A}$, e indicará que estamos interesados en la aparición y en el lugar de aparición de las letras $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$, en $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{A}\{\mathbb{B}_1;\ldots;\mathbb{B}_p\}$, denotará la reunión $\mathbb{A}\{x_1;\ldots;x_p\}$, en la que simultaneamente se reemplaza x_1 por $\mathbb{B}_1$, x_2 por $\mathbb{B}_2$, etc...

Se entiende que dada una definición $\Theta\{x_1,\ldots,x_p\}$, el signo $\Theta\{\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_p\}$ fue obtenido de $\Theta\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$, donde $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_p$ son letras que no aparecen en las reuniones $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p$.

Una construcción sintáctica de una Teoría Matemática, es una sucesión finita de reuniones de la teoría, $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_q$, escritas una debajo de otra, donde cada $\mathbb{A}_i$, cumple con alguna de las siguientes afirmaciones:

+ $\mathbb{A}_i$ consiste de una sola letra.
+ Existe en la sucesión $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{i-1}$, una reunión de segunda especie, digamos $\mathbb{A}_j$, de tal forma que $\mathbb{A}_i$ es la reunión $\sim \mathbb{A}_j$.
+ Existe en la sucesión $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{i-1}$, dos reuniones de segunda especie, digamos $\mathbb{A}_j$ y $\mathbb{A}_k$, de tal forma que $\mathbb{A}_i$ es $\vee(\mathbb{A}_j)(\mathbb{A}_k)$.
+ Existe en la sucesión $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{i-1}$, una reunión de segunda especie, digamos $\mathbb{A}_j$, de tal forma que $\mathbb{A}_i$ es la reunión $\tau_x(\mathbb{A}_j)$, donde x es una letra cualquiera.
+ Existe en la sucesión $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{i-1}$, "m" reuniones de primera especie, digamos $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_m$, de tal forma que $\mathbb{A}_i$ es la reunión $\circledast(\mathbb{B}_1)(\mathbb{B}_2)\ (\mathbb{B}_m)$ donde $\circledast$ es un signo relacional o sustantival de peso "m".

Las reuniones que aparecen en una construcción sintáctica de una teoría dada se llaman: términos de la teoría, si la reunión es de primera especie y, relaciones de la teoría, si la reunión es de segunda especie.

Los axiomas de la teoría son una cantidad finita de relaciones de la teoría (posiblemente tomadas de construcciones sintácticas distintas) escritas una debajo de otra.

Las letras que aparecen en los axiomas de una teoría reciben el nombre de: constantes de la teoría.

Una forma de una teoría, es un esquema que permite obtener reuniones a partir de reuniones dadas y son tales que:

a) Aplicada a relaciones se obtiene una relación.

b) Si $\mathbb{R}$ es una relación obtenida de una forma, entonces la reunión $(\mathbb{T}|x)(\mathbb{R})$ puede ser también obtenida por la misma forma, donde $\mathbb{T}$ denota un término.

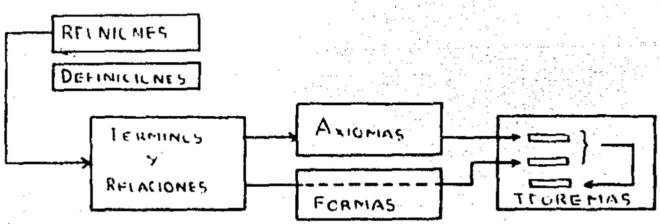
Se hace notar que siempre se hace referencia a reuniones, términos y relaciones de la teoría en consideración.

Dada una construcción sintáctica, digamos $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_q$, una construcción demostrativa es una sucesión de reuniones, digamos $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_n$, escritas una debajo de otra, donde cada $\mathbb{B}_i$ satisfase alguna de las siguientes afirmaciones:

+ $\mathbb{B}_i$ es un axioma de la teoría.
+ $\mathbb{B}_i$ es obtenida por alguna de las formas de la teoría aplicada a alguna de las $\mathbb{A}_i$.
+ Existe en la sucesión $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_{i-1}$ una reunión $\mathbb{B}_j$, y otra reunión $\vee(\neg\mathbb{B}_j)(\mathbb{B}_i)$.

Un teorema de una teoría es cualquier reunión de segunda especie que aparece en una construcción demostrativa.

El funcionamiento de una Teoría Matemática podemos representarlo mediante el siguiente diagrama:



El alfabeto determina las reuniones; las construcciones sintácticas determinan términos y relaciones a partir de reuniones; los axiomas, las formas y las construcciones demostrativas determinan teoremas y términos que satisfacen dichos teoremas; las definiciones son auxiliares para la representación de reuniones muy complicadas.

El estudio anterior forma parte de la Metamatemática, y se seguirán dando una serie de resultados de la misma. Estos serán claramente determinados por el uso de la notación anterior, y por el uso de la lógica propia del idioma. Estos resultados permitirán describir el comportamiento de las teorías sin necesidad de referirse a manejos muy complicados de las reuniones, las construcciones formativas y las construcciones demostrativas.

Aunque algunos de los resultados metamatemáticos se establecen usando ideas matemáticas más sofisticadas, en su mayoría pueden establecerse construyendo materialmente la hipótesis, que irá dando la pauta a seguir, auxiliándose de las definiciones de reunión, término, relación, axiomas, etc., o bien apoyandose en resultados obtenidos de dicha forma.

Se darán también nombres a estados específicos de una teoría, al igual que a ciertas relaciones existentes entre ellas, que serán tituladas especificaciones.

Para denotar una Teoría Matemática se usarán las letras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, etc.

Si bien las definiciones se establecen sobre reuniones específicas, se dará el mismo nombre a las notaciones tipográficas que denoten reuniones arbitrarias.

Dado que una finalidad del presente trabajo es presentar la demostración de un resultado, se presentan los resultados más importantes necesarios para ello y se presentan únicamente algunas demostraciones ilustrativas.

CAPITULO II. TEORIAS BASICAS

Se denotarán con los signos $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}$, a relaciones cualesquiera de la teoría que se considere y los signos $\mathbb{U}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}_1$, ..., denotarán términos cualesquiera de la teoría que se considere.

Especificación: Si $(\mathbb{T}|x)(\mathbb{A})$ es teorema en $\mathcal{A}$, decimos que: $\mathbb{T}$ es solución de $\mathbb{A}\{x\}$ en $\mathcal{A}$.

Especificación: Si $\sim\mathbb{A}$ es teorema en $\mathcal{A}$, decimos que: $\mathbb{A}$ es una relación falsa en $\mathcal{A}$.

Especificación: Si $\mathbb{A}$ y $\sim\mathbb{A}$ son teoremas en $\mathcal{A}$, decimos que: $\mathcal{A}$ es una teoría contradictoria.

Especificación: Si todo signo de $\mathcal{A}$, es signo de $\mathcal{B}$, y si toda forma de $\mathcal{A}$, es forma de $\mathcal{B}$, y si todo axioma de $\mathcal{A}$, es teorema de $\mathcal{B}$, decimos que: $\mathcal{B}$ es una teoría más fuerte que $\mathcal{A}$.

Definición: La reunión $\vee(\mathbb{A})(\mathbb{B})$ se denota $(\mathbb{A})\vee(\mathbb{B})$ ó $\mathbb{A}\vee\mathbb{B}$.

Definición: La reunión $\vee(\sim\mathbb{A})(\mathbb{B})$ se denota $(\mathbb{A})\Rightarrow(\mathbb{B})$ ó $\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$.

Definición: La reunión $\sim((\sim\mathbb{A})\vee(\sim\mathbb{B}))$ se denota $(\mathbb{A})\wedge(\mathbb{B})$ ó $\mathbb{A}\wedge\mathbb{B}$.

Definición: La reunión $((\mathbb{A})\Rightarrow(\mathbb{B}))\wedge((\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{A}))$ se denota $(\mathbb{A})\Leftrightarrow(\mathbb{B})$ ó $\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$.

Definición: La reunión $(\tau_x(\mathbb{R})|x)(\mathbb{R})$ se denota $(\exists x)(\mathbb{R})$ ó $(\exists_x)(\mathbb{R}\{x\})$.

Definición: La reunión $\sim(\exists x)(\sim\mathbb{R})$ se denota $(\forall x)(\mathbb{R})$ ó $(\forall_x)(\mathbb{R}\{x\})$.

Criterio 1. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$ son teoremas en $\mathcal{A}$, entonces $\mathbb{B}$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Criterio 2. Si $\mathcal{A}$ es más fuerte que $\mathcal{B}$, entonces todo teorema de $\mathcal{B}$ es teorema de $\mathcal{A}$.

Criterio 3. Si $(\mathbb{T}_1|a_1)(\mathbb{T}_2|a_2)\cdots(\mathbb{T}_n|a_n)(\mathbb{A}_i)$ son teoremas en $\mathcal{A}$ $(i=1,2,\dots,p)$ y si $\mathbb{B}$ es teorema en $\mathcal{B}$, entonces $(\mathbb{T}_1|a_1)\cdots(\mathbb{T}_n|a_n)(\mathbb{B})$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde: Los $\mathbb{A}_i$ $(i=1,\dots,p)$ son los axiomas de $\mathcal{B}$ y las a_j $(j=1,\dots,n)$ son sus constantes. Los $\mathbb{T}_1,\dots,\mathbb{T}_n$, son términos de $\mathcal{B}$. Los signos de $\mathcal{B}$ son signos de $\mathcal{A}$ y las formas de $\mathcal{B}$ son formas de $\mathcal{A}$.

Especificación: Cuando es usado el criterio 3, decimos que: aplicamos los resultados de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$.

Una Teoría Lógica es cualquier Teoría Matemática que tiene entre sus formas las siguientes cuatro:

Forma 1. $((\mathbb{A}) \vee (\mathbb{A})) \rightarrow (\mathbb{A})$

Forma 2. $(\mathbb{A}) \rightarrow ((\mathbb{A}) \vee (\mathbb{B}))$

Forma 3. $((\mathbb{A}) \vee (\mathbb{B})) \rightarrow ((\mathbb{B}) \vee (\mathbb{A}))$

Forma 4. $(\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow ((\mathbb{C} \vee \mathbb{A}) \rightarrow (\mathbb{C} \vee \mathbb{B}))$

No existe dificultad en verificar que son formas.

A partir de dichas formas se deducen todos los resultados de la Lógica Matemática.

En adelante consideraremos solo Teorías Lógicas.

Criterio 4. Si $\mathbb{B}$ es teorema en $\mathcal{B}$, entonces $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde: $\mathcal{B}$ es la teoría $\mathcal{A}$, a la que se le ha añadido a sus axiomas la relación $\mathbb{B}$.

Criterio 5. Si $\mathcal{B}$ es contradictoria, entonces $\mathbb{A}$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde: $\mathcal{B}$ es la teoría $\mathcal{A}$, a la que se le ha añadido a sus axiomas la relación $\sim \mathbb{A}$.

Criterio 6. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son teoremas en $\mathcal{A}$, entonces $\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Una Teoría con Cuantificadores es cualquier Teoría Lógica que tiene entre sus formas la siguiente:

Forma 5. $(\mathbb{T}|x)(\mathbb{R}) \rightarrow (\exists x)(\mathbb{R})$

En adelante consideraremos solo Teorías con Cuantificadores.

Criterio 7. $(\forall x)(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{T}|x)(\mathbb{R})$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Criterio 8. Si $\mathbb{A}$ es teorema en $\mathcal{A}$, entonces $(\forall x)(\mathbb{A})$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde x no es constente de $\mathcal{A}$.

Una Teoría de Igualdad es cualquier Teoría con Cuantificadores que tiene entre sus signos relacionales de peso 2, al signo "=", y entre sus formas las dos siguientes:

Forma 6. $(=(\mathbb{T})(\mathbb{U})) \rightarrow (\mathbb{R}|\mathbb{T}| \leftrightarrow \mathbb{R}|\mathbb{U}|)$

Forma 7. $(\forall x)(\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{S}) \rightarrow (=(\tau_x(\mathbb{R}))(\tau_x(\mathbb{S})))$

En adelante consideraremos solo Teorías de Igualdad.

Definición: La reunión $=(\mathbb{T})(\mathbb{U})$ se denota $\mathbb{T} = \mathbb{U}$ ó $(\mathbb{T}) = (\mathbb{U})$.

La Teoría de Igualdad Básica $\mathcal{E}$.

Signos relacionales: $=$ de peso 2.

No tiene signos sustantivales.

Formas: las formas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 expuestas anteriormente.

No tiene axiomas.

Las siguientes relaciones de $\mathcal{E}$ son teoremas de $\mathcal{E}$.

Teorema 1. $(\forall x)(x = x)$

Teorema 2. $(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x)$

Teorema 3. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z)$

Obtención del Teorema 1.

$\sim(x = x) \Leftrightarrow \sim(x = x)$	deducible de las formas.
$(\forall x)(\sim(x = x) \Rightarrow \sim(x = x))$	criterio 8.
$\tau_x(\sim(x = x)) = \tau_x(\sim(x = x))$	deducible de las formas.
$(\tau_x(\sim(x = x)) \mid x)(x = x)$	misma reunión.
$\sim\sim(\tau_x(\sim(x = x)) \mid x)(x = x)$	deducible de las formas.
$\sim(\tau_x(\sim(x = x)) \mid x)(\sim(x = x))$	misma reunión.
$\sim(\exists x)(\sim(x = x))$	definición.
$(\forall x)(x = x)$	definición.

Consideremos una teoría $\mathcal{A}$, más fuerte que $\mathcal{E}$.

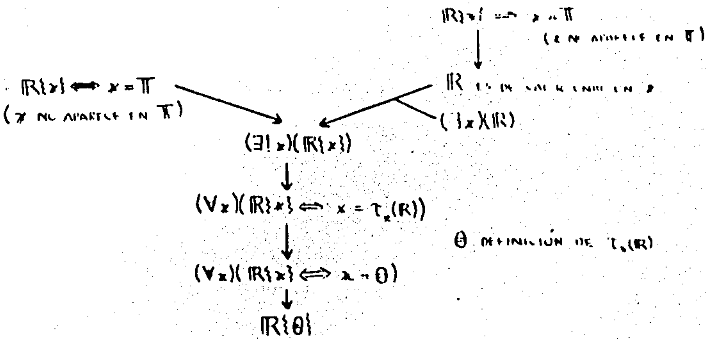
Definición: La reunión $(\forall y)(\forall z)(((y|x)(\mathbb{R}\{x\}) \wedge (z|x)(\mathbb{R}\{x\})) \Rightarrow y = z)$ se denota $\mathbb{R}\{x\}$ es de valor único en x.

Donde: y, z son distintas, distintas de x, no aparecen en $\mathbb{R}$ y no son constantes de $\mathcal{A}$.

Definición: La reunión $(\exists x)(\mathbb{R}) \wedge \mathbb{R}$ es de valor único en x, se denota $(\exists! x)(\mathbb{R}\{x\})$.

El siguiente diagrama que representa una colección de criterios, determina el proceso de introducción de un término - funcional, concepto importantísimo, que entre otras cosas da la solución única de la relación $\mathbb{R}\{x\}$.

Al final del diagrama se extrae un criterio como ilus tración del diagrama.



Criterio. Si $\mathbb{R}\{x\} \Rightarrow x = \mathbb{T}$ es teorema en $\mathcal{A}$, entonces $\mathbb{R}$ es de valor único en x, es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde: x no se encuentra en $\mathbb{T}$ y no es constante de $\mathcal{A}$.

El término $\tau_x(\mathbb{R})$ que contiene todas las letras que aparecen en $\mathbb{R}$ a excepción de la letra x, se denota mediante una definición que contiene todas esas letras menos x. Este tipo de definiciones abundan mucho en Matemáticas. El término $\tau_x(\mathbb{R})$ se denomina término funcional.

La Teoría de Conjuntos $\mathcal{T}$.

Signos relacionales: $=$ de peso 2.

$\in$ de peso 2.

Signos sustantivales: $\supset$ de peso 2.

Definición: La reunión $\in(\mathbb{T})(\mathbb{U})$ se denota $\mathbb{T}\in\mathbb{U}$ ó $(\mathbb{T})\in(\mathbb{U})$.

Definición: La reunión $\supset(\mathbb{T})(\mathbb{U})$ se denota $(\mathbb{T};\mathbb{U})$.

Definición: La reunión $(\exists x)(\forall y)(y\in x \Leftrightarrow \mathbb{R}\{y\})$ se denota $\mathrm{Coll}_y(\mathbb{R}\{y\})$.

Donde: x, y son distintas y x no aparece en $\mathbb{R}$.

Definición: La reunión $(\forall z)(z\in y \Rightarrow z\in x)$ se denota $y\subset x$.

Formas: las formas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 expuestas anteriormente, junto con la siguiente forma:

Forma 8. $(\forall y)(\exists x)(\forall u)(\mathbb{R}\{u,y\} \Rightarrow u\in x) \Rightarrow (\forall w)(\mathrm{Coll}_u((\exists y)(y\in w \wedge \mathbb{R}\{u,y\})))$

Donde: u, y son distintas: x, w son distintas y no se encuentran en $\mathbb{R}$.

Axiomas:

Axioma 1. $(\forall x)(\forall y)((x\subset y \wedge y\subset x) \Rightarrow x=y)$

Axioma 2. $(\forall x)(\forall y)(\mathrm{Coll}_z(z=x \vee z=y))$

Axioma 3. $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')((x,y)=(x',y') \Rightarrow (x=x' \wedge y=y'))$

Axioma 4. $(\forall x)(\mathrm{Coll}_y(y\subset x))$

Axioma 5. $(\exists x)(x$ ES INFINITO$)$ (SOLO SE MENCIONA)

Se denotarán con los signos $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}$, a relaciones cualesquiera de la teoría que se considere y los signos $\mathbb{U}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}_1$, ..., denotarán términos cualesquiera de la teoría que se considere.

Consideremos una teoría $\mathcal{E}$ más fuerte que $\mathcal{T}$. Sea x una letra que no es constante de $\mathcal{E}$.

Criterio 9. $(\forall x)(x\in y \Leftrightarrow \mathbb{R}\{x\})$ es de valor único en y, es teorema en $\mathcal{E}$.

Donde: x, y son distintas, y y no aparece en $\mathbb{R}$.

Criterio 10. $\mathrm{Coll}_x(x\in\mathbb{T} \wedge \mathbb{R}\{x\})$ es teorema en $\mathcal{E}$.

Donde: x no aparece en $\mathbb{T}$.

Criterio 11. $\mathrm{Coll}_y((\exists x)(x\in\mathbb{T} \wedge y=\mathbb{U}))$ es teorema en $\mathcal{E}$.

Donde: x, y son distintas: x no aparece en $\mathbb{T}$: y no aparece en $\mathbb{T}$ y no aparece en $\mathbb{U}$.

El siguiente diagrama muestra las condiciones para introducir el término funcional $\tau_y((\forall x)(x \in y \Leftrightarrow \mathbb{R}\{x\}))$ que permite agrupar a las posibles soluciones de una relación $\mathbb{R}\{x\}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathbb{R}\{x\} \Rightarrow x \in \mathbb{U} \arrow[d] & (x \text{ NO APARECE EN } \mathbb{U}) \\
(\exists y)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow \mathbb{R}\{x\}) \arrow[d, leftrightarrow] & (x, y \text{ DISTINTAS; } y \text{ NO EN } \mathbb{R}, \text{ NI CONSTANTE}) \\
\mathrm{Coll}_x(\mathbb{R}\{x\}) \arrow[d] & (\theta \text{ DEFINICION DEL TERMINO FUNCIONAL}) \\
(\forall x)(x \in \theta \Leftrightarrow \mathbb{R}\{x\}) &
\end{tikzcd}$$

El concepto anterior puede ampliarse a relaciones de la forma $\mathbb{R}\{x,y\}$.

Consideremos una teoría $\mathcal{A}$ más fuerte que $\mathcal{T}$. Sean x, y letras distintas que no son constantes de $\mathcal{A}$.

Definición: La reunión $(\exists x)(\exists y)(z = (x,y))$ se denota z es par ordenado.

Definición: La reunión $(\forall z)(z \in Y \Rightarrow z \text{ ES PAR ORDENADO})$ se denota Y es gráfica.

Definición: La reunión $(\exists x)(x \text{ ES GRAFICA} \wedge (\forall u)(\forall v)(\mathbb{R}\{u,v\} \Leftrightarrow (u,v) \in x))$ se denota $\mathbb{R}$ grafica en (u,v).

Donde: x, u, v son letras distintas; x no aparece en $\mathbb{R}$ y no es constante de $\mathcal{A}$.

Criterio 12. $[x \text{ es gráfica} \wedge (\forall u)(\forall v)(\mathbb{R}\{u,v\} \Leftrightarrow (u,v) \in x)]$ es de valor único en x, es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde: x, u, v son letras distintas; x no aparece en $\mathbb{R}\{u,v\}$.

Criterio 13. $[u \in \mathbb{T} \wedge w = \mathbb{U}]$ grafica en (u,w), es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde: u, w son letras distintas; u no aparece en $\mathbb{T}$; w no aparece en $\mathbb{T}$ y no aparece en $\mathbb{U}$.

El siguiente diagrama muestra las condiciones para introducir el término funcional $\tau_x(x \text{ ES GRAFICA} \wedge (\forall u)(\forall v)(\mathbb{R}\{u,v\} \Leftrightarrow (u,v) \in x))$ que permite agrupar a las posibles soluciones de una relación $\mathbb{R}\{u,v\}$.

$$\mathbb{R}\{u,\omega\} \Rightarrow (u,\omega)\in \mathbb{T} \quad (u,\omega \text{ NO APARECEN EN } \mathbb{T})$$

$$\downarrow$$

$$(\exists x)(x \text{ ES GRAFICA} \wedge (\forall u)(\forall \omega)(\mathbb{R}\{u,\omega\} \Longleftrightarrow (u,\omega)\in x)) \quad (x \text{ NO APARECE EN } \mathbb{R})$$

$$\updownarrow$$

$$\mathbb{R} \text{ GRAFICA EN } u,\omega \qquad (\theta \text{ DEFINICION DEL TERMINO FUNCIONAL})$$

$$\downarrow$$

$$\theta \text{ ES GRAFICA} \wedge (\forall u)(\forall \omega)(\mathbb{R}\{u,\omega\} \Longleftrightarrow (u,\omega)\in \theta)$$

Criterio 14. Si $(\forall x)(x\in \mathbb{T} \Rightarrow (\exists y)(y\in \mathbb{U} \wedge \mathbb{R}\{x,y\})$ es teorema en $\mathcal{A}$, entonces $x\in \mathbb{T} \wedge y = \tau_y(y\in \mathbb{U} \wedge \mathbb{R}\{x,y\})$ grafica en x,y es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde: x, y son letras distintas; x no aparece en $\mathbb{T}$; y no aparece en $\mathbb{T}$ y no aparece en $\mathbb{U}$.

Las siguientes relaciones de $\mathcal{T}$ son teoremas de $\mathcal{T}$. Se introducen directamente algunos términos funcionales sin mencionar el teorema que implica su existencia, ya que dicho teorema se obtiene facilmente siguiendo los diagramas anteriores. Se escribirá al final del teorema el término funcional, con intención de localizarlo rapidamente.

Teorema 4. $(\forall z)(z\in A\times B \Longleftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z=(x,y) \wedge x\in A \wedge y\in B))$ $\qquad A\times B$

Teorema 5. x ES GRAFICA $\Rightarrow (\forall y)(y\in PR_1\langle x\rangle \Longleftrightarrow (\exists z)((y,z)\in x))$ $\qquad PR_1\langle x\rangle$

Teorema 6. x ES GRAFICA $\Rightarrow (\forall y)(y\in PR_2\langle x\rangle \Longleftrightarrow (\exists z)((z,y)\in x))$ $\qquad PR_2\langle x\rangle$

Teorema 7. $(\forall y)(y\in \mathcal{P}(x) \Longleftrightarrow y\subset x)$ $\qquad \mathcal{P}(x)$

Teorema 8. $(\forall x)(x\in \mathcal{U}(A\ B) \Longleftrightarrow (x \text{ ES GRAFICA} \wedge PR_1\langle x\rangle\subset A \wedge PR_2\langle x\rangle\subset B))$ $\qquad \mathcal{U}(A\ B)$

Teorema 9. $(\forall z)(z\in \{x,y\} \Longleftrightarrow z=x \vee z=y)$ $\qquad \{x,y\}$

Teorema 10. $(\forall z)(z\in \{x\} \Longleftrightarrow z=x)$ $\qquad \{x\}$

Teorema 11. x ES GRAFICA $\Rightarrow (x|||A \text{ ES GRAFICA} \wedge (\forall u)(\forall v)((u,v)\in x|||A \Longleftrightarrow u\in A \wedge (u,v)\in x))$ $\qquad x|||A$

Teorema 12. x ES GRAFICA $\Rightarrow (x^{-1} \text{ ES GRAFICA} \wedge (\forall u)(\forall v)((u,v)\in x^{-1} \Longleftrightarrow (v,u)\in x))$ $\qquad x^{-1}$

Teorema 13. x ES GRAFICA $\wedge$ y ES GRAFICA $\Rightarrow (y\circ x \text{ ES GRAFICA} \wedge$
$(\forall u)(\forall v)((u,v)\in y\circ x \Longleftrightarrow (\exists z)((u,z)\in x \wedge (z,v)\in y)))$ $\qquad y\circ x$

Definición: La reunión $\mathcal{U}(A-B)\times(\{A\}\times\{B\})$ se denota $\hat{\mathcal{U}}(A-B)$.

Definición: La reunión $PR_2\langle G|||A\rangle$ se denota $G\langle A\rangle$.

Donde: G ES GRAFICA es teorema en $\mathcal{T}$.

Definición: La reunión G es gráfica $\wedge$ $G = G^{-1}$ se denota G es gráfica simétrica

Definición: La reunión G es gráfica $\wedge$ $(\forall x)((x,y)\in G$ es de valor único en $y)$ se denota G es gráfica funcional

Definición: La reunión G es gráfica $\wedge$ $(\forall y)((x,y)\in G$ es de valor único en $x)$ se denota G es gráfica de inyección

Teorema 14. $(\forall y)(y\in \Delta_A \iff (\exists x)(x\in A \wedge y=(x,x)))$ Δ_A

Teorema 15. $(\forall z)(z\in X-A \iff z\in X \wedge (z\notin A \wedge A\in \beta(X)))$ $X-A$

Teorema 16. $(\forall X)(X=\emptyset \iff (\forall y)(y\notin X))$ $\emptyset$

Teorema 17. z es par ordenado $\Rightarrow (\forall x)(x=PR_1(z) \iff (\exists y)(z=(x,y)))$ $PR_1(z)$

Teorema 18. z es par ordenado $\Rightarrow (\forall y)(y=PR_2(z) \iff (\exists x)(z=(x,y)))$ $PR_2(z)$

Teorema 19. $(\forall y)(y\in \bar{\bar{U}}(A,B) \iff (y\in U(A,B) \wedge$ y es gráfica funcional$))$ $\bar{\bar{U}}(A,B)$

Teorema 20. $(\forall y)(y\in F(A,B) \iff (y\in \hat{U}(A,B) \wedge$ $PR_1(y)$ es gráfica funcional $\wedge$ $PR_1\langle PR_1(y)\rangle = A))$ $F(A,B)$

Teorema 21. $(\forall y)(y\in \hat{F}(A,B) \iff (y\in F(A,B) \wedge$ $PR_1(y)$ es gráfica de inyección$))$ $\hat{F}(A,B)$

Teorema 22. $(\forall y)(y\in \tilde{F}(A,B) \iff (y\in F(A,B) \wedge PR_2\langle PR_1(y)\rangle = B))$ $\tilde{F}(A,B)$

Teorema 23. $(\forall y)(y\in \bar{F}(A,B) \iff y\in \tilde{F}(A,B) \wedge y\in \hat{F}(A,B))$ $\bar{F}(A,B)$

Definición: La reunión $\tau_y((x,y)\in G)$ se denota $G(x)$

Donde: $G\in \bar{\bar{U}}(A,B) \wedge x\in PR_1\langle G\rangle$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Teorema 24. $G\langle A,B\rangle \in \bar{F}(U(A,B), \hat{U}(A,B)) \wedge$

$(\forall x)(x\in U(A,B) \Rightarrow G\langle A,B\rangle(x) = (x,A,B))$ $G\langle A,B\rangle$

Definición: La reunión $G\langle B,A\rangle(x^{-1})$ se denota $x^{-1}_{(B,A)}$ ó x^{-1}

Donde: $x\in U(A,B)$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Definición: La reunión $G\langle A,B\rangle(X\circ Y)$ se denota $(X\circ Y)_{(A,B)}$ ó $X\circ Y$

Donde: $Y\in U(A,C) \wedge X\in U(C,B)$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Definición: La reunión $PR_2\langle PR_1(x) \| A\rangle$ se denota $x_{(B,C)}\langle A\rangle$ ó $x\langle A\rangle$

Donde: $x\in \hat{U}(B,C) \wedge A\subset B$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Teorema 25. G es gráfica $\Rightarrow [G\langle X\rangle = \emptyset \wedge X\subset PR_1\langle G\rangle \Rightarrow X=\emptyset]$

Teorema 26. G es gráfica $\wedge$ H es gráfica $\Rightarrow$

$[G\subset H \iff (\forall x)(G\langle\{x\}\rangle \subset H\langle\{x\}\rangle)]$

Teorema 27. G es gráfica $\Rightarrow [A\subset B \Rightarrow G\langle A\rangle \subset G\langle B\rangle]$

Criterio 15. $\tau_z(z$ es gráfica $\wedge (\forall u)(\forall \omega)(u\in \mathbb{T} \wedge \omega = Q_u \iff (u,\omega)\in z))$ es gráfica funcional, es teorema en $\mathcal{T}$.

Donde: u,ω denotan letras distintas; u no aparecen en $\mathbb{T}$; ω no aparece en $\mathbb{T}$ y tampoco en Q

: $\mathcal{A}$ es una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$: $\mathbb{T}$ y $\mathbb{G}$ denotan términos de $\mathcal{A}$.

Definición: El término $\tau_z(z$ [illegible] $, (\forall u)(\forall v)(u \in \mathbb{T}$, [illegible] $\mathbb{G} \Leftrightarrow$ [illegible] $z))$ se denota $\mathbb{T} \diamond \mathbb{G}$.

Criterio 16. $PR_1\langle \mathbb{T} \diamond \mathbb{G} \rangle = \mathbb{T}$

$PR_2\langle \mathbb{T} \diamond \mathbb{G} \rangle = \mathbb{B}$

$\mathbb{B} \subset \mathbb{A} \to (\mathbb{T} \diamond \mathbb{G}, \mathbb{T}, \mathbb{A}) \in F(\mathbb{T}, \mathbb{A})$

$(\forall u)(u \in \mathbb{T} \to (\mathbb{T} \diamond \mathbb{G})(u) = \mathbb{G})$, son teoremas en $\mathcal{A}$.

Donde: $\mathbb{B}$ es el término funcional implicado por $Coll_{u}((\exists u)(u \in \mathbb{T}$. [illegible] $\mathbb{G}))$: $\mathcal{A}$ es una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$.

Definición: Al término $(\mathbb{T} \diamond \mathbb{G}, \mathbb{T}, \mathbb{A})$ lo denotamos $u \to \mathbb{G}\,|\,u \in \mathbb{T}, \mathbb{G} \in \mathbb{A}|$

Donde: $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ es teorema en $\mathcal{A}$: $\mathbb{B}$ denota al término funcional implicado por $Coll_{u}((\exists u)(u \in \mathbb{T}$. [illegible] $\mathbb{G}))$; $\mathcal{A}$ es una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$.

Definición: La reunión $PR_1(\Gamma)(x)$ se denota $\Gamma_{(A,B)}(x)$ ó $\Gamma(x)$

Donde: $\Gamma \in F(A,B)$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Teorema 28. $X \in F(A,B) \Rightarrow (\forall x)(x \in \bigcup_{\hat{}} X \Leftrightarrow (\exists i)(i \in A \wedge x \in X(i)))$ $\qquad \bigcup_{i \in A} X(i)$

Definición: La reunión $(\Delta_A, A, \hat{A})$ se denota I_A

Teorema 29. $I_A \in \overline{F}(A,A)$

Definición: La reunión $X \to \Gamma\langle X \rangle [X \in \mathfrak{P}(A), \Gamma\langle X \rangle \in \mathfrak{P}(B)]$ se denota $\hat{\Gamma}_{(A,B)}$ ó $\hat{\Gamma}$

Donde: $\Gamma \in F(A,B)$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Definición: La reunión $z \to (u(PR_1(z)), v(PR_2(z)))\,|\,z \in A \times B,$ $(u(PR_1(z)), v(PR_2(z))) \in C \times D]$ se denota $u \times v$ ó $(u \times v)_{(A \times B,\, C \times D)}$

Donde: $u \in F(A,C)$, $v \in F(B,D)$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Definición: La reunión $\bigcup_{\hat{A}} I_A$ se denota $\bigcup A$ ó $\bigcup_{x \in A} x$

Teorema 30. $X \in F(A,B) \wedge f \in \tilde{F}(K,A) \Rightarrow \bigcup_{k \in K} X(f(k)) = \bigcup_{i \in A} X(i)$

Teorema 31. $f \in \overline{F}(A,B) \to \hat{f} \in \overline{F}(\mathfrak{P}(A), \mathfrak{P}(B))$

Teorema 32. $f \in \overline{F}(A,B) \wedge g \in \overline{F}(C,D) \Rightarrow f \times g \in \overline{F}(A \times C, B \times D)$

Teorema 33. $f \in \overline{F}(A,B) \Rightarrow \hat{f} = \hat{f}$

Definición: La reunión $x \to f(x)[x \in D, f(x) \in B]$ se denota $f|D$ ó $f_{(A,B)}|D$

Donde: $f \in F(A,B) \wedge D \subset A$ es teorema en $\mathcal{T}$.

En las teorías más fuertes que la Teoría de Conjuntos existen dos tipos de construcciones sintácticas llamadas Escalas de Conjuntos y Escalas de Funciones, que juegan un papel importante para la creación de nuevas teorías. Dada la dificultad que se presenta al describir dichas construcciones, nos auxiliaremos de la siguiente notación:

$((a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m))$ se llamará un Esquema de Formación sobre "p" términos, si se tiene que:

+ Los a_i y los b_i son enteros no negativos.
+ Si $b_i = 0$, entonces $1 \leq a_i \leq i-1$.
+ Si $a_i \neq 0$ y $b_i \neq 0$, entonces $1 \leq a_i \leq i-1$ y $1 \leq b_i \leq i-1$.
+ El b_i más grande que aparece en los elementos de la forma $(0; b_k)$, es p.

Denotaremos Esquemas de Formación sobre "p" términos con los signos; $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$, etc.

Consideremos una teoría $\mathcal{A}$, más fuerte que $\mathcal{T}$. Sea α_p, un Esquema de Formación sobre "p" términos y sean $T_1, T_2, \dots, T_p$, p términos de $\mathcal{A}$.

Una Escala de Conjuntos es una construcción sintáctica, digamos $A_1, A_2, \dots, A_m$, que fue construida mediante α_p, de la siguiente forma:

+ Si $a_i = 0$, entonces A_i es T_{b_i} .
+ Si $b_i = 0$, entonces A_i es $\mathcal{P}(A_{a_i})$.
+ Si $a_i \neq 0$ y $b_i \neq 0$, entonces A_i es $A_{a_i} \times A_{b_i}$.

Al término A_j, lo denotaremos $\alpha^*\{T_1, \dots, T_p\}_j$.

Consideremos una teoría $\mathcal{A}$, más fuerte que $\mathcal{T}$. Sea α_p, un Esquema de Formación sobre "p" términos y sean $T_1 \in F(E_1, F_1)$, $T_2 \in F(E_2, F_2), \dots, T_p \in F(E_p, F_p)$, teoremas en $\mathcal{A}$, donde $T_1, \dots, T_p$; $E_1, \dots, E_p$; $F_1, \dots, F_p$, son términos de $\mathcal{A}$.

Una Escala de Funciones es una construcción sintáctica, digamos $A_1, A_2, \dots, A_m$, que fue construida mediante α_p , de la siguiente forma:

+ Si $a_i = 0$, entonces A_i es T_{b_i} .

+ Si $b_\lambda = 0$, entonces $\mathbb{A}_\lambda$ es $\hat{\mathbb{A}}_{a_\lambda}$.

+ Si $a_\lambda \neq 0$ y $b_\lambda \neq 0$, entonces $\mathbb{A}_\lambda$ es $\mathbb{A}_{a_\lambda} \times \mathbb{A}_{b_\lambda}$.

Al término $\mathbb{A}_j$, lo denotaremos $\alpha^\circ\{\mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_p\}_j$.

Sea $\mathcal{A}$ una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$. Sean $\mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_p$; $\mathbb{U}_1, \ldots, \mathbb{U}_p$; $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_p$; términos de $\mathcal{A}$. Supongamos que $\mathbb{F}_1 \in \mathbb{F}(\mathbb{T}_1, \mathbb{U}_1)$ $, \ldots,$ $\mathbb{F}_p \in \mathbb{F}(\mathbb{T}_p, \mathbb{U}_p)$, son teoremas de $\mathcal{A}$. Sea α_p un Esquema de Formación. El Esquema de Formación tiene dos objetivos: primero crear dos escalas de conjuntos, una a partir de los términos $\mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_p$, y la otra a partir de $\mathbb{U}_1, \ldots, \mathbb{U}_p$; segundo establecer una función entre cada uno de los elementos correspondientes de una y otra escala de conjuntos. El siguiente diagrama ilustra esta situación:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{T}_1 & \text{———} & \mathbb{F}_1 & \dashrightarrow & \mathbb{U}_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{T}_p & \text{———} & \mathbb{F}_p & \dashrightarrow & \mathbb{U}_p \\
\alpha_p \downarrow & & \alpha_p \downarrow & & \alpha_p \downarrow \\
\mathbb{A}_1 & \text{———} & \mathbb{G}_1 & \dashrightarrow & \mathbb{B}_1 \\
| & & | & & | \\
\mathbb{A}_\lambda & \text{———} & \mathbb{G}_\lambda & \longrightarrow & \mathbb{B}_\lambda \\
| & & | & & | \\
\mathbb{A}_m & \text{———} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{B}_m
\end{array}$$

Sea $\mathcal{A}$ una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$. Sean $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m$, términos de $\mathcal{A}$. Sea $\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_m, u\}$ una relación de $\mathcal{A}$, donde las letras $x_1, \ldots, x_m, u$ son distintas, no son constantes de $\mathcal{A}$ y no aparecen en los términos $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m$. Sean $y_1, \ldots, y_m, v_1, \ldots, v_m$ letras distintas, distintas de $x_1, \ldots, x_m, u$, no son constantes de $\mathcal{A}$, no aparecen en $\mathbb{R}$ y no aparecen en los términos $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m$. Supongamos que añadimos a la teoría $\mathcal{A}$, la relación $v_1 \in \overline{\mathbb{F}}(x_1, y_1) \wedge \cdots \wedge v_m \in \overline{\mathbb{F}}(x_m, y_m)$ a sus axiomas. Sea $\mathcal{B}$ dicha teoría.

Consideremos el siguiente diagrama, donde $\alpha_{m,m}$ denota un esquema de formación.

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, dash] & v_1 \arrow[r] & y_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_n \arrow[r, dash] & v_n \arrow[r] & y_n \\
A_1 \arrow[r, dash] & I_{A_1} \arrow[r] & A_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
A_m \arrow[r, dash] \arrow[d, "\alpha_{n+m}"'] & I_{A_m} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n+m}"'] & A_m \arrow[d, "\alpha_{n+m}"'] \\
\mathbb{T}_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}_1 \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathbb{U}_1 \arrow[d, dash] \\
\mathbb{T}_i \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}_i \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathbb{U}_i \arrow[d, dash] \\
\mathbb{T}_q \arrow[r, dash] & \mathbb{F}_q \arrow[r] & \mathbb{U}_q
\end{tikzcd}
$$

Especificación: Si $u \in \mathbb{T}_i \Rightarrow [\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n,u\} \Leftrightarrow \mathbb{R}\{y_1,\dots,y_n,\mathbb{F}_i(u)\}]$ es teorema en $\mathcal{B}$, decimos que $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n,u\}$ es una relación transportable por $u \in \mathbb{T}_i$ en la teoría $\mathcal{A}$.

Criterio 17. $\mathrm{Coll}_u(u \in \alpha^*\{x_1,\dots,x_n,A_1,\dots,A_m\}_i \wedge \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n,u\})$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Donde: $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n,u\}$ es una relación transportable - por $u \in \alpha^*\{x_1,\dots,x_n,A_1,\dots,A_m\}_i$ en $\mathcal{A}$.

Definición: El término funcional implicado por el criterio ante rior lo denotaremos $\langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1,\dots,x_n,A_1,\dots,A_m\}_i$.

Criterio 18. $\langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1,\dots,x_n,A_1,\dots,A_m\}_i \subset \alpha^*\{x_1,\dots,x_n,A_1,\dots,A_m\}_i$ es teorema en $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{A}$ una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$. Sean $A_1,\dots,A_m$, términos de $\mathcal{A}$. Sea $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n,u\}$ una relación de $\mathcal{A}$, donde las letras $x_1,\dots,x_n,u$ son distintas, no son constantes de $\mathcal{A}$ y no aparecen en los términos $A_1,\dots,A_m$. Sean $y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_n$ letras distintas, distintas de $x_1,\dots,x_n,u$, no son constantes de $\mathcal{A}$, no aparecen en $\mathbb{R}$ y no aparecen en los términos $A_1,\dots,A_m$. Supongamos que añadimos a la teoría $\mathcal{A}$, la relación $v_1 \in \overline{F}(x_1,y_1) \wedge \dots \wedge v_n \in \overline{F}(x_n,y_n)$ a sus axiomas, sea $\mathcal{B}$ dicha teoría. Sea α_{n+m} un esquema de formación. Supongamos que $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n,u\}$ es una relación transportable por $u \in \alpha^*\{x_1,\dots,x_n,A_1,\dots,A_m\}_i$. Denotemos al término $\langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1,\dots,x_n,A_1,\dots,A_m\}_i$ con $\mathbb{M}\{x_1,\dots,x_n,A_1,\dots,A_m\}$. Sea $\mathcal{C}$

la teoría $\mathcal{A}$ a la que se le añade a sus axiomas la relación $\mathfrak{u} \in \mathbb{M}\{x_1, \ldots, x_m, A_1, \ldots, A_m\}$. Sea $W/\!/\{x_1, \ldots, x_m, \mathfrak{u}\}$ un término de $\mathcal{A}$ que contiene únicamente letras que son constantes de $\mathcal{T}$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & u_1 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & y_1 \arrow[d, phantom, "\vdots"] & \\
 & x_m \arrow[r, dash] & u_m \arrow[r] & y_m & \\
 & A_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & I_{A_1} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & A_1 \arrow[d, phantom, "\vdots"] & \\
 & A_m \arrow[r, dash] \arrow[d, "\alpha_{m,m}"'] & I_{A_m} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m,m}"'] & A_m \arrow[d, "\alpha_{m,m}"'] & \\
 & \mathbb{T}_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}_1 \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathbb{U}_1 \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{M} & \mathbb{T}_i \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}_i \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathbb{U}_i \arrow[d, dash] & \mathbb{M}' \\
 & \mathbb{T}_q \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}_q \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathbb{U}_q \arrow[d, dash] & \\
 & \mathbb{T}_r \arrow[r, dash] & \mathbb{F}_r \arrow[r] & \mathbb{U}_r &
\end{tikzcd}
$$

Especificación: Si $\mathfrak{u} \in \mathbb{M} \Rightarrow W/\!/\{x_1, \ldots, x_m, \mathfrak{u}\} \in \mathbb{T}_q$ es teorema en $\mathcal{A}$, y si $\mathfrak{u} \in \mathbb{M} \Rightarrow \mathbb{F}_q(W/\!/\{x_1, \ldots, x_m, \mathfrak{u}\}) = W/\!/\{y_1, \ldots, y_m, \mathbb{F}_i(\mathfrak{u})\}$ es teorema en $\mathcal{B}$, decimos que $W/\!/\{x_1, \ldots, x_m, \mathfrak{u}\}$ es un término intrínseco para $\mathfrak{u}$ en $\mathcal{A}$.

Donde: $\mathbb{T}_q$ denota un término cualquiera en la escala de conjuntos, $\mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_r$.

Especificación: Si $\mathbb{T} \in \langle \alpha - \mathbb{R} \rangle_{\mathfrak{u}}\{\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_m, A_1, \ldots, A_m\}_i$ es teorema en $\mathcal{A}'$, decimos que $\mathbb{T}$ es una estructura de especie $\langle \alpha - \mathbb{R} \rangle_i$ y que $\mathbb{E}_1, \mathbb{F}, \ldots, \mathbb{F}_m$, son fundados por $\mathbb{T}$.

Donde: $\mathcal{A}'$ es una teoría más fuerte que $\mathcal{A}$; y $\mathbb{T}, \mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_m$ son términos de $\mathcal{A}'$.

Criterio 19. Si $\mathbb{T} \in \langle \alpha - \mathbb{R} \rangle_{\mathfrak{u}}\{\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{E}_m, A_1, \ldots, A_m\}_i$ es teorema en $\mathcal{A}'$ y si $\mathbb{B}\{x_1, \ldots, x_m, \mathfrak{u}\}$ es teorema en $\mathcal{B}$, entonces la relación $\mathbb{B}\{\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_m, \mathbb{T}\}$ es teorema en $\mathcal{A}'$.

Donde: $\mathcal{A}'$ es una teoría más fuerte que $\mathcal{A}$. $\mathcal{B}$ es la teoría $\mathcal{A}$, a la que se le añadio a sus axiomas la relación $u \in \langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \dots, x_m, A_1, \dots, A_m\}_j$.

Especificación: Si $\mathbb{W} \in \langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m; A_1, \dots, A_m\}_j \wedge \mathbb{V} \in \langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_m, A_1, \dots, A_m\}_j \wedge \mathbb{T}_1 \in \overline{F}(\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_1) \wedge \dots \wedge \mathbb{T}_m \in \overline{F}(\mathbb{E}_m, \mathbb{F}_m) \Rightarrow \alpha^{\circ}\{\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_m, I_{A_1}, \dots, I_{A_m}\}_j(\mathbb{W}) = \mathbb{V}$ es teorema en $\mathcal{A}'$, decimos que $(\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_m)$ es un isomorfismo de $(\mathbb{E}_1; \mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m)$ fundado por $\mathbb{W}$, a $(\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_m)$ fundado por $\mathbb{V}$, y que $\mathbb{W}$ y $\mathbb{V}$ son isomórficos.

Donde: $\mathcal{A}'$ es más fuerte que $\mathcal{A}$; $\mathbb{W}, \mathbb{V}, A_1, \dots, A_m, \mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m; \mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_m; \mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_m$ son terminos de $\mathcal{A}'$.

Criterio 20. $\mathbb{W} \in \langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m, A_1, \dots, A_m\}_j \wedge \mathbb{T}_1 \in \overline{F}(\mathbb{E}_1; \mathbb{F}_1) \wedge \dots \wedge \mathbb{T}_2 \in \overline{F}(\mathbb{E}_m, \mathbb{F}_m) \Rightarrow (\exists! z)(z \in \langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_m, A_1, \dots, A_m\}_j \wedge \alpha^{\circ}\{\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_m; I_{A_1}, \dots, I_{A_m}\}_j(\mathbb{W}) = z)$ es teorema en $\mathcal{A}'$.

Donde: $\mathcal{A}'$ es más fuerte que $\mathcal{A}$; $\mathbb{W}$; $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m$; $\mathbb{F}_1; \dots; \mathbb{F}_m$; $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_m$ son términos de $\mathcal{A}'$.

Especificación: Si $u \in \langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \dots, x_m, A_1, \dots, A_m\}_j \Rightarrow \mathbb{P}\{x_1, \dots, x_m, u\} \in \langle\beta-\mathbb{S}\rangle_t\{\mathbb{V}_1\{x_1, \dots, x_m, u\}; \dots; \mathbb{V}_r\{x_1; \dots; x_m, u\}; \mathbb{B}_1; \dots; \mathbb{B}_q\}_K$ es teorema en $\mathcal{A}$, decimos que $\mathbb{P}\{x_1, \dots, x_m; u\}$ sobre $(\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_r)$ es un procedimiento de deducción de una estructura de especie $\langle\beta-\mathbb{S}\rangle_t\{\}_K$, a partir de una estructura de especie $\langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{\}_j$, en $\mathcal{A}$.

Donde: $\mathcal{A}$ es más fuerte que $\mathcal{T}$ y los términos $\mathbb{P}\{x_1, \dots, x_m, u\}, \mathbb{V}_1\{x_1, \dots, x_m, u\}, \dots, \mathbb{V}_r\{x_1, \dots, x_m, u\}$ son intrínsecos para u en $\mathcal{A}$.

Criterio 21. $\mathbb{M} \in \langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m, A_1, \dots, A_m\}_j \Rightarrow \mathbb{P}\{\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m; \mathbb{M}\} \in \langle\beta-\mathbb{S}\rangle_t\{\mathbb{V}_1\{\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m, \mathbb{M}\}; \dots; \mathbb{V}_r\{\mathbb{E}_1, \dots; \mathbb{E}_m; \mathbb{M}\}; \mathbb{B}_1; \dots; \mathbb{B}_q\}_K$ es teorema en $\mathcal{A}'$.

Donde: $\mathcal{A}'$ es más fuerte que $\mathcal{A}$ y se considera lo expuesto en la especificación anterior. $\mathbb{M}, \mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_m$ son términos de $\mathcal{A}'$.

Especificación: Si $\mathbb{P}\{x_1, \dots, x_m, u\}$ sobre $(x_1, \dots, x_m)$ es un procedimiento de deducción de una estructura de especie $\langle\alpha-\mathbb{S}\rangle_t\{x_1, \dots; x_m; A_1; \dots; A_m\}_K$ a partir de una estructura de especie $\langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \dots, x_m; A_1;$

$\ldots ; \mathbb{A}_m\}_j$ en $\mathcal{A}$, y si $\mathbb{Q}\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{t}\}$ sobre $(x_1, \ldots, x_m)$ es un procedimiento de deducción de una estructura de especie $\langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \ldots; x_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_j$ a partir de una estructura de especie $\langle\alpha - \mathbb{S}\rangle_t\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_k$ en $\mathcal{A}$, y si $u \in \langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_j \Rightarrow \mathbb{Q}\{x_1, \ldots, x_m; \mathbb{P}\{x_1, \ldots, x_m, u\}\} = u$ es teorema en $\mathcal{A}$, y si $t \in \langle\alpha - \mathbb{S}\rangle\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_k \Rightarrow \mathbb{P}\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{Q}\{x_1, \ldots, x_m, t\}\} = t$ es teorema en $\mathcal{A}$, decimos que las especies de estructuras $\langle\alpha - \mathbb{S}\rangle_t\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_k$ y $\langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_j$ son equivalentes por $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ en $\mathcal{A}$.

Donde: $\mathcal{A}$ es más fuerte que $\mathcal{T}$.

Criterio 22. Si $\langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{\}_j$ y $\langle\alpha - \mathbb{S}\rangle_t\{\}_k$ son equivalentes por $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ es teorema en $\mathcal{A}$, entonces si $\mathbb{B}\{x_1, \ldots, x_m, u\}$ es teorema en $\mathcal{B}$, se tiene que $\mathbb{B}\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{Q}\{x_1, \ldots, x_m, t\}\}$ es teorema en $\mathcal{C}$, y si $\mathbb{C}'\{x_1, \ldots, x_m, t\}$ es teorema en $\mathcal{C}$, se tiene que $\mathbb{C}'\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{P}\{x_1, \ldots, x_m, u\}\}$ es teorema en $\mathcal{B}$.

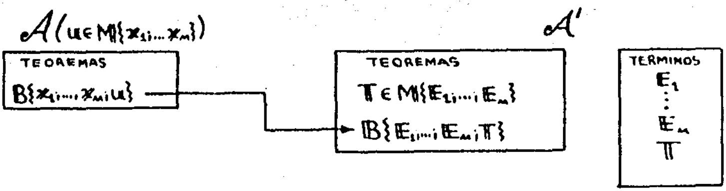
Donde: $\mathcal{A}$ es más fuerte que $\mathcal{T}$. $\mathcal{B}$ denota a la teoría $\mathcal{A}$ a la que se le añadió a sus axiomas la relación $u \in \langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \ldots, x_m; \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_j$. $\mathcal{C}$ denota a la teoría $\mathcal{A}$ a la que se le añadió a sus axiomas la relación $t \in \langle\alpha - \mathbb{S}\rangle_t\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_k$.

Especificación: Si $\langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_j$ y $\langle\alpha - \mathbb{S}\rangle_t\{x_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_k$ son equivalentes por $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ es teorema en $\mathcal{A}$, decimos que los sistemas de axiomas $\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_m, u\}$ y $\mathbb{S}\{x_1, \ldots, x_m, t\}$ son equivalentes.

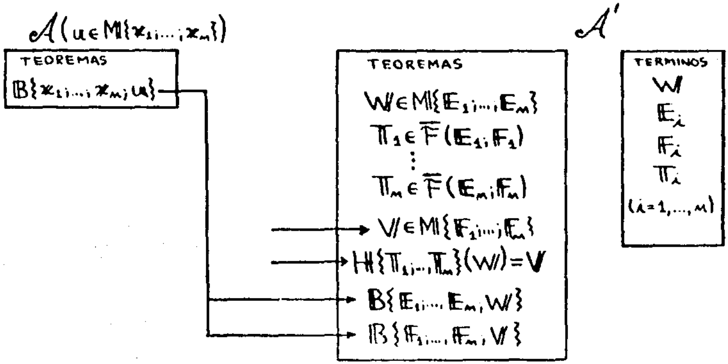
Donde: $\mathcal{A}$ es más fuerte que $\mathcal{T}$.

Se darán a continuación una ilustración de los criterios más importantes expuestos anteriormente.

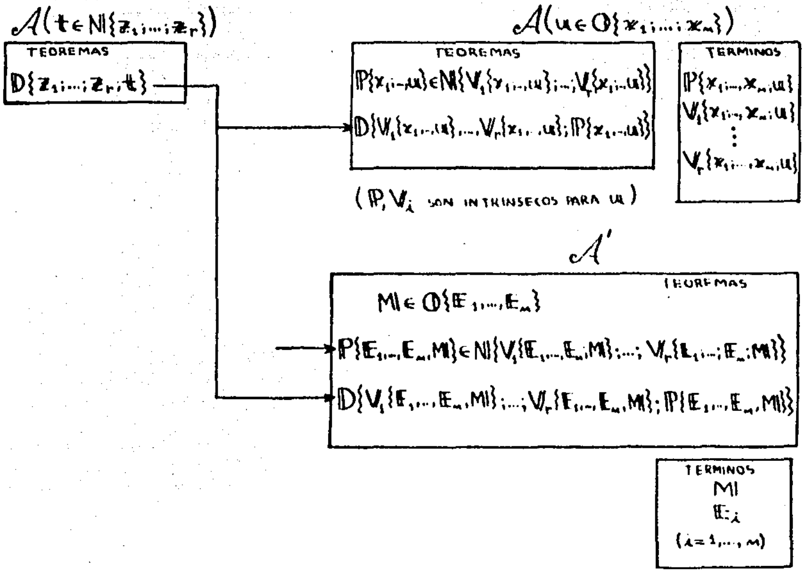
Criterio 19. Sea $\mathcal{A}$ una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{A}'$ una teoría más fuerte que $\mathcal{A}$. $\mathbb{M}\{x_1, \ldots, x_m\}$ denotará a el término $\langle\alpha - \mathbb{R}\rangle_u\{x_1, \ldots, x_m, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_m\}_j$. $\mathcal{A}(u \in \mathbb{M}\{x_1, \ldots, x_m\})$ denotará a la teoría $\mathcal{B}$.



Criterio 20. Sea $\mathcal{A}$ una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$. Sea $\mathcal{A}'$ una teoría más fuerte que $\mathcal{A}$. $\mathbb{M}\{x_1,\dots,x_m\}$ denotará al término $\langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{x_1,\dots,x_m,A_1,\dots A_m\}_j$. $\mathbb{H}\{v_1,\dots,v_m\}$ denotará al término $\alpha^{\circ}\{v_1,\dots;v_m;I_{A_1},\dots,I_{A_m}\}_j$.



Criterio 21. Sea $\mathcal{A}$ una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$. Sea $\mathcal{A}'$ una teoría más fuerte que $\mathcal{A}$. $\mathbb{N}\{z_1,\dots,z_r\}$ denotará al término $\langle\beta-\mathbb{S}\rangle_t\{z_1,\dots,z_r;B_1,\dots,B_q\}_K$. $\mathbb{O}\{x_1,\dots;x_m\}$ denotará al término $\langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{x_1,\dots,x_m,A_1,\dots,A_m\}_j$. Suponemos que α_{m+m} y β_{r+q} son esquemas de formación y que $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_m,u\}$ y $\mathbb{S}\{z_1,\dots,z_r,t\}$ son relaciones transportables respectivamente por $u\in\alpha^*\{x_1,\dots,x_m,A_1,\dots;A_m\}_j$ y $t\in\beta^*\{z_1,\dots,z_r,B_1,\dots,B_q\}_K$ en $\mathcal{A}$.



Criterio 22. Sea $\mathcal{A}$ una teoría más fuerte que $\mathcal{T}$. Sea $\mathcal{A}'$ una teoría más fuerte que $\mathcal{A}$. $\mathbb{N}\{x_1;\dots;x_m\}$ denotará al término $\langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_u\{x_1;\dots,x_m;\mathbb{A}_1;\dots;\mathbb{A}_m\}_j$. $\mathbb{O}\{x_1;\dots;x_m\}$ denotará al término $\langle\alpha-\mathbb{S}\rangle_t\{x_1,\dots,x_m;\mathbb{A}_1,\dots;\mathbb{A}_m\}_K$. Suponemos que $\alpha_{m,m}$ es un esquema de formación y que las relaciones $\mathbb{R}\{x_1;\dots;x_m;u\}$ y $\mathbb{S}\{x_1,\dots,x_m;t\}$ son transportables respectivamente por $u\in\alpha^*\{x_1,\dots,x_m;\mathbb{A}_1;\dots;\mathbb{A}_m\}_j$ y $t\in\alpha^*\{x_1,\dots,x_m;\mathbb{A}_1,\dots;\mathbb{A}_m\}_K$ en $\mathcal{A}$. $\mathcal{B}$ denota a la teoría $\mathcal{A}$ a la que se le añadió a sus axiomas la relación $u\in\mathbb{N}\{x_1;\dots;x_m\}$. $\mathcal{C}$ denota a la teoría $\mathcal{A}$ a la que se le añadió a sus axiomas la relación denotada por $t\in\mathbb{O}\{x_1;\dots;x_m\}$.

$\mathcal{A}(u \in \mathbb{N}\{x_1;\dots;x_m\})$

TEOREMAS

$\mathbb{P}\{x_1;\dots;x_m;u\} \in \mathbb{O}\{x_1;\dots;x_m\}$

$\mathbb{Q}\{x_1;\dots;x_m;\mathbb{P}\{x_1;\dots;u\}\} = u$

$\mathbb{B}\{x_1;\dots;x_m;u\}$

$\mathbb{C}\{x_1;\dots;x_m;\mathbb{P}\{x_1;\dots;x_m;u\}\}$

TERMINOS

$\mathbb{P}\{x_1;\dots;x_m;u\}$

x_i

$(i = 1,\dots,m)$

(TERMINOS INTRINSECOS PARA u)

$\mathcal{A}(t \in \mathbb{O}\{x_1;\dots;x_m\})$

TEOREMAS

$\mathbb{Q}\{x_1;\dots;x_m;t\} \in \mathbb{N}\{x_1;\dots;x_m\}$

$\mathbb{P}\{x_1;\dots;x_m;\mathbb{Q}\{x_1;\dots;t\}\} = t$

$\mathbb{B}\{x_1;\dots;x_m;\mathbb{Q}\{x_1;\dots;x_m;t\}\}$

$\mathbb{C}\{x_1;\dots;x_m;t\}$

TERMINOS

$\mathbb{Q}\{x_1;\dots;x_m;t\}$

x_i

$(i = 1,\dots,m)$

(TERMINOS INTRINSECOS PARA t)

$\mathcal{A}'$

TEOREMAS

$\mathbb{V} \in \mathbb{N}\{\mathbb{E}_1;\dots;\mathbb{E}_m\}$

$\mathbb{F}_1 \in \overline{\mathbb{F}}(\mathbb{E}_1;\mathbb{D}_1)$

$\vdots$

$\mathbb{F}_m \in \overline{\mathbb{F}}(\mathbb{E}_m;\mathbb{D}_m)$

$\mathbb{G}_0 \in \mathbb{N}\{\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_m\}$

$\mathbb{H}_0 \in \mathbb{O}\{\mathbb{E}_1;\dots;\mathbb{E}_m\}$

$\mathbb{I}_0 \in \mathbb{O}\{\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_m\}$

TERMINOS

$\mathbb{V}$

$\mathbb{E}_i$

$\mathbb{F}_i$

$\mathbb{D}_i$

$(i = 1,\dots,m)$

La Teoría Topológica $\mathcal{T}$ **, es la teoría** Υ **, a la que se le añade a sus axiomas la relación:**

Axioma 6. $V \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A)) \wedge A \in V \wedge (\forall V')(V' \subset V \Rightarrow \bigcup_{X \in V'} X \in V) \wedge (\forall X)(\forall Y)(X \in V \wedge Y \in V \rightarrow X \cap Y \in V)$

Definición: La reunión $A \in V \wedge (\forall V')(V' \subset V \Rightarrow \bigcup_{X \in V'} X \in V) \wedge (\forall X)(\forall Y)(X \in V \wedge Y \in V \Rightarrow X \cap Y \in V)$ **la denotaremos** $\mathbb{R}\{A,V\}$ **.**

Especificación: Si $\mathbb{T} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{U})) \wedge \mathbb{R}\{\mathbb{U},\mathbb{T}\}$ **es teorema en** $\mathcal{A}$**, decimos que** $\mathbb{T}$ **es una topología.**

Donde: $\mathcal{A}$ **es una teoría más fuerte que** Υ **.** $\mathbb{U};\mathbb{T}$ **son términos de** $\mathcal{A}$ **.**

La Teoría de Clausura $\mathfrak{C}$ **, es la teoría** Υ**, a la que se le añade a sus axiomas la relación:**

Axioma 6'. $W \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A) \times A) \wedge W\langle\{\emptyset\}\rangle \ \emptyset \wedge (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow Y \subset W\langle\{Y\}\rangle) \wedge (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow W\langle\{W\langle\{Y\}\rangle\}\rangle = W\langle\{Y\}\rangle) \wedge (\forall X)(\forall Y)(X \subset A \wedge Y \subset A \Rightarrow W\langle\{X \cup Y\}\rangle = W\langle\{X\}\rangle \cup W\langle\{Y\}\rangle)$

Definición: La reunión $W\langle\{\emptyset\}\rangle = \emptyset \wedge (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow Y \subset W\langle\{Y\}\rangle) \wedge (\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow W\langle\{Y\}\rangle = W\langle\{W\langle\{Y\}\rangle\}\rangle) \wedge (\forall X)(\forall Y)(X \subset A \wedge Y \subset A \ \ W\langle\{X \cup Y\}\rangle - W\langle\{X\}\rangle \cup W\langle\{Y\}\rangle)$ **la denotaremos** $\mathfrak{S}\{A;W\}$ **.**

Se probará que los sistemas de axiomas $\mathbb{R}\{A;V\}$ y $\mathfrak{S}\{A;W\}$ **son equivalentes.**

$((0;1);(1;0);(2,0),(2,1),(1,0))$ **será denotada por** α_1 **.**

α_1 **es un esquema de formación sobre un término.**

A **es un término de** $\mathcal{T}$**, por ser letra.**

$\mathcal{T}$ **es más fuerte que** Υ **.**

A

$\mathfrak{P}(A)$

$\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$

$\mathfrak{P}(A) \times A$

$\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A) \times A)$ ES LA ESCALA DE CONJUNTOS GENERADA POR α_1 A PARTIR DE A.

f

$\hat{f}$

$\hat{\hat{f}}$

$\hat{f} \times f$

$\widehat{\hat{f} \times f}$ ES LA ESCALA DE FUNCIONES GENERADA POR α_1 A PARTIR DE f.

SE PROBARA QUE:

$\mathbb{R}\{A;V\}$ ES TRANSPORTABLE POR $V\in\alpha^*\{A\}_3$

EN LA TEORIA $\mathcal{T}$.

ESTO SIGNIFICA QUE:

$V\in\alpha^*\{A\}_3 \wedge f\in\overline{F}(A;B) \Rightarrow$

$[\mathbb{R}\{A;V\}\Leftrightarrow \mathbb{R}\{B;\alpha^\circ\{f\}_3(V)\}]$ ES

TEOREMA EN $\mathcal{T}$.

NOTESE QUE:

$\alpha^*\{A\}_3 = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Y $\alpha^\circ\{f\}_3=\hat{\hat{f}}$.

I) SUPONGAMOS:

$V\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \wedge f\in\overline{F}(A;B)\wedge \mathbb{R}\{A;V\}$

PROBAREMOS: $\mathbb{R}\{B;\hat{\hat f}(V)\}$

$f\in \overline F(A;B)$

f ES BIYECTIVA

$f\langle A\rangle = B$

$\hat f(A)=B$

$A\in V$

$A\in V\wedge \hat f(A)=B$

$(\exists A)(A\in V\wedge \hat f(A)=B)$

$B\in \hat f\langle V\rangle$

$B\in\hat{\hat f}(V)$ *

QUEREMOS PROBAR:

$(\forall V')(V'\subset \hat{\hat f}(V)\Rightarrow \bigcup_{X\in V'} X\in \hat{\hat f}(V))$

$V'\subset\hat{\hat f}(V)$

$V'\subset \hat f\langle V\rangle$

$(\forall z)(z\in V'\Rightarrow(\exists X)(X\in V\wedge \hat f(X)=z))$

$(\exists g)(g\in F(V';V)\wedge(\forall z)(z\in V'\Rightarrow \hat f(g(z))=z))$

$g_0\in F(V';V)\wedge(\forall z)(z\in V'\Rightarrow\hat f(g_0(z))=z)$

$g_0\langle V'\rangle\subset V$

$\hat f|g_0\langle V'\rangle \in \widetilde F(g_0\langle V'\rangle;V')$

COMO SE TIENE QUE:

$(\forall V')(V'\subset V\Rightarrow \bigcup_{X\in V'}X\in V)$

TENDREMOS

$\bigcup_{X\in g_0\langle V'\rangle} X\in V$

$\hat f(\bigcup_{X\in g_0\langle V'\rangle} X)\in\hat f\langle V\rangle$

$f\langle \bigcup_{X\in g_0\langle V'\rangle} X\rangle\in\hat{\hat f}(V)$

$\bigcup_{X\in g_0\langle V'\rangle} f\langle X\rangle\in\hat{\hat f}(V)$

$\bigcup_{X\in g_0\langle V'\rangle} (\hat f|g_0\langle V'\rangle)(X)\in\hat{\hat f}(V)$

$\bigcup_{X\in V'} X\in\hat{\hat f}(V)$

ASI OBTENEMOS

$(\forall V')(V'\subset\hat{\hat f}(V)\Rightarrow\bigcup_{X\in V'}X\in\hat{\hat f}(V))$ *

QUEREMOS PROBAR:

$(\forall X)(\forall Y)(X\in\hat{\hat f}(V)\wedge Y\in\hat{\hat f}(V)\Rightarrow X\cap Y\in\hat{\hat f}(V))$

$X\in\hat{\hat f}(V)\wedge Y\in\hat{\hat f}(V)$

$X\in\hat f\langle V\rangle\wedge Y\in\hat f\langle V\rangle$

$(\exists U)(U\in V\wedge\hat f(U)=X)$

$(\exists W)(W\in V\wedge \hat f(W)=Y)$

$U_0\in V\wedge\hat f(U_0)=X\wedge W_0\in V\wedge\hat f(W_0)=Y$

$U_0\in V\wedge W_0\in V$

COMO SE TIENE QUE:

$(\forall X)(\forall Y)(X\in V\wedge Y\in V\Rightarrow X\cap Y\in V)$

TENDREMOS

$U_0\cap W_0\in V$

$\hat f(U_0\cap W_0)\in\hat f\langle V\rangle$

$f\langle U_0\cap W_0\rangle\in\hat f\langle V\rangle$

$f\langle U_0\rangle\cap f\langle W_0\rangle\in \hat f\langle V\rangle$

$\hat f(U_0)\cap\hat f(W_0)\in\hat{\hat f}(V)$

$X\cap Y\in\hat{\hat f}(V)$

ASI OBTENEMOS

$(\forall X)(\forall Y)(X\in \hat{f}(V) \wedge Y\in \hat{f}(V) \Rightarrow X\cap Y \in \hat{f}(V))$ •

POR LO QUE:

$\mathbb{R}\{B;\hat{f}(V)\}$ SE CUMPLE

ESTO SIGNIFICA QUE:

$V\in \alpha^{*}\{A\}_S \wedge f\in \bar{F}(A;B) \Rightarrow$
$[\mathbb{R}\{A;V\} \Rightarrow \mathbb{R}\{B;\hat{f}(V)\}]$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}$.

II) SUPONGAMOS:

$V\in\alpha^{*}\{A\}_S \wedge f\in\bar F(A,B) \wedge \mathbb{R}\{B,\hat f(V)\}$

PROBAREMOS: $\mathbb{R}\{A;V\}$

$f\in \bar F(A;B)$

$f\langle A\rangle = B$

$\hat f(A)=B$

$B\in \hat f(V)$

$\hat f(A)\in \hat f(V)$

$\hat f(A)\in \hat f\langle V\rangle$

$(\exists X)(X\in V \wedge \hat f(X)=\hat f(A))$

$X_0\in V\wedge \hat f(X_0)=\hat f(A)$

$X_0\in V\wedge X_0=A$

$A\in V$ •

QUEREMOS PROBAR:

$(\forall V')(V'\subset V\Rightarrow \bigcup_{X\in V'} X\in V)$

$V'\subset V$

f ES BIYECTIVA

$\hat f|V'\in F(V';\hat f(V))$

$(\hat f|V')\langle V'\rangle\subset \hat f(V)$

$\bigcup_{X\in(\hat f|V')\langle V'\rangle} X \in \hat f(V)$

YA QUE SUPONEMOS.

$(\forall V')(V'\subset \hat f(V)\Rightarrow \bigcup_{X\in V'}X\in \hat f(V))$

$\bigcup_{X\in(\hat f|V')\langle V'\rangle} X\in \hat f\langle V\rangle$

$(\exists Z)(Z\in V\wedge \hat f(Z)=\bigcup_{X\in(\hat f|V')\langle V'\rangle} X)$

$Z_0\in V\wedge \hat f(Z_0)=\bigcup_{X\in(\hat f|V')\langle V'\rangle} X$

$Z_0\in V\wedge \hat f^{-1}\langle \hat f\langle Z_0\rangle\rangle = \hat f^{-1}\langle \bigcup_{X\in(\hat f|V')\langle V'\rangle} X\rangle$

$Z_0\in V\wedge Z_0 = \bigcup_{X\in(\hat f|V')\langle V'\rangle} \hat f^{-1}\langle X\rangle$

$Z_0\in V\wedge Z_0=\bigcup_{X\in(\hat f|V')\langle V'\rangle} \hat f^{-1}(X)$

$\hat f^{-1}|(\hat f|V')\langle V'\rangle \in \bar F((\hat f|V')\langle V'\rangle; V')$

$Z_0\in V\wedge Z_0=\bigcup_{X\in (\hat f|V')\langle V'\rangle} (\hat f^{-1}|(\hat f|V')\langle V'\rangle)(X)$

$Z_0\in V\wedge Z_0=\bigcup_{X\in V'}X$

$\bigcup_{X\in V'}X\in V$

ASÍ OBTENEMOS

$(\forall V')(V'\subset V\Rightarrow \bigcup_{X\in V'}X\in V)$ •

QUEREMOS PROBAR:

$(\forall X)(\forall Y)(X\in V\wedge Y\in V\Rightarrow X\cap Y\in V)$

$X\in V\wedge Y\in V$

$V\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

$V\subset \mathcal{P}(A)$

f ES BIYECTIVA

$\hat f(X)\in \hat f\langle V\rangle \wedge \hat f(Y)\in\hat f\langle V\rangle$

$\hat f(X)\in \hat f(V)\wedge \hat f(Y)\in \hat f(V)$

COMO SE TIENE QUE:

$(\forall X)(\forall Y)(X\in \hat f(V)\wedge Y\in\hat f(V)\Rightarrow X\cap Y\in \hat f(V))$

TENDREMOS

$\hat f(X)\cap \hat f(Y)\in \hat f(V)$

$\hat f(X\cap Y)\in \hat f(V)$

$\hat f^{-1}(\hat f(X\cap Y))\in \hat f^{-1}\langle \hat f\langle V\rangle\rangle$

$X\cap Y\in V$

Asi obtenemos

$(\forall X)(\forall Y)(X\in V \wedge Y\in V \Rightarrow X\cap Y\in V)$ *

Por lo que

$\mathbb{R}\{A;V\}$ se cumple

Esto significa que:

$V\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \wedge f\in\overline{\mathcal{F}}(A;B) \Rightarrow$

$[\mathbb{R}\{B;\hat{f}(V)\} \Rightarrow \mathbb{R}\{A;V\}]$ es teorema en $\mathcal{T}$

Asi obtenemos que:

$V\in\alpha^{\bullet}\{A\}_3 \wedge f\in\overline{\mathcal{F}}(A;B) \Rightarrow$

$[\mathbb{R}\{A;V\} \Leftrightarrow \mathbb{R}\{B;\alpha^{\circ}\{f\}_3(V)\}]$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Esto significa que:

$\mathbb{R}\{A;V\}$ es transportable por $V\in\alpha^{\bullet}\{A\}_3$ en $\mathcal{T}$.

Asi podemos considerar el termino $\langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_V\{A\}_3$.

Ademas tenemos que:

$\mathcal{T}$ es la teoria $\mathcal{T}(V\in\langle\alpha-\mathbb{R}\rangle_V\{A\}_3)$, es decir la teoria $\mathcal{T}$, a la que se le añade la relacion $V\in\langle\alpha\ \mathbb{R}\rangle_V\{A\}_3$ a sus axiomas.

Se probara que:

$\mathbb{S}\{A;W\}$ es transportable por $W\in\alpha^{\bullet}\{A\}_5$ en la teoria $\mathcal{T}$.

Esto significa que:

$W\in\alpha^{\bullet}\{A\}_5 \wedge f\in\overline{\mathcal{F}}(A;B) \Rightarrow$

$[\mathbb{S}\{A;W\}\Leftrightarrow\mathbb{S}\{B;\alpha^{\circ}\{f\}_5(W)\}]$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Notese que:

$\alpha^{\bullet}\{A\}_5 = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)\times A) \wedge \alpha^{\circ}\{f\}_5 = \widehat{\hat{f}\times f}$

a) Supongamos:

$W\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)\times A) \wedge f\in\overline{\mathcal{F}}(A,B)$

Se probara primero la siguiente relacion que es muy util:

$(\forall Y)(f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle = (\widehat{\hat{f}\times f}(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle)$

Notese que la igualdad de los dos terminos podemos introducirla probando que: $f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle \subset (\widehat{\hat{f}\times f}(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle$

y que: $(\widehat{\hat{f}\times f}(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle \subset f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle$

$z\in f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle$

$(\exists x)(x\in W\langle\{Y\}\rangle \wedge f(x)=z)$

$x_0\in W\langle\{Y\}\rangle \wedge f(x_0)=z$

$(Y;x_0)\in W \wedge f(x_0)=z \wedge Y\subset A$

$(Y,x_0)\in W \wedge f\langle Y\rangle = f\langle Y\rangle \wedge f(x_0)=z$

$(Y,x_0)\in W \wedge \hat{f}(Y)=f\langle Y\rangle \wedge f(x_0)=z$

$(Y,x_0)\in W \wedge (\hat{f}\times f)(Y;x_0) = (f\langle Y\rangle, z)$

$(\exists u)(u\in W \wedge (\hat{f}\times f)(u) = (f\langle Y\rangle, z))$

$(f\langle Y\rangle; z)\in(\hat{f}\times f)\langle W\rangle$

$(f\langle Y\rangle; z)\in(\widehat{\hat{f}\times f})(W)$

$z\in((\widehat{\hat{f}\times f})(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle$

Asi se tiene que:

$(\forall z)(z\in f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle \Rightarrow z\in((\widehat{\hat{f}\times f})(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle)$

Lo que significa que

$f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle \subset ((\widehat{\hat{f}\times f})(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle$

Notese que

$w\in W\langle\{Y\}\rangle$

$(Y,w)\in W$

$W\subset\mathcal{P}(A)\times A$

$w\in A$

Por lo que $(\forall Y)(W\langle\{Y\}\rangle\subset A)$

$z\in((\widehat{\hat{f}\times f})(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle$

$(f\langle Y\rangle, z)\in(\widehat{\hat{f}\times f})(W)$

$(f\langle Y\rangle, z)\in(\hat{f}\times f)\langle W\rangle$

$(\exists u)(u\in W \wedge (\hat{f}\times f)(u) = (f\langle Y\rangle, z))$

$u_0\in W \wedge (\hat{f}\times f)(u_0) = (f\langle Y\rangle, z)$

$u_0 = (u_1, u_2)$

$(u_1,u_2) \in W \wedge (\hat{f}\times f)(u_1,u_2) = (f\langle Y\rangle, z)$

$(u_1,u_2)\in W \wedge \hat f(u_1) = f\langle Y\rangle \wedge f(u_2) = z$

$(u_1,u_2)\in W \wedge f\langle u_1\rangle = f\langle Y\rangle \wedge f(u_2)=z$

$(u_1,u_2)\in W \wedge u_1 = Y \wedge u_2 = f^{-1}(z)$

YA QUE f ES BIYECTIVA.

$(Y, f^{-1}(z)) \in W$

$f^{-1}(z) \in W\langle\{Y\}\rangle$

$f(f^{-1}(z)) \in f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle$

$z \in f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle$

ASI SE TIENE QUE:

$(\forall z)(z \in ((\hat f\times f)(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle \Rightarrow z\in f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle)$

LO QUE SIGNIFICA QUE:

$((\hat f\times f)(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle \subset f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle$

ASI QUEDA PROBADO QUE:

$W\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)\times A) \wedge f\in \bar{F}(A,B) \Rightarrow$

$(\forall Y)(f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle = ((\hat f\times f)(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle)$

ES TEOREMA EN $\mathcal{J}$.

I) SUPONGAMOS:

$W\in\mathcal P(\mathcal P(A)\times A)\wedge f\in \bar F(A,B)\wedge \mathfrak{S}\{A,W\}$

PROBAREMOS: $\mathfrak S\{B;(\hat f\times f)(W)\}$

$W\langle\{\emptyset\}\rangle = \emptyset$

$f\langle W\langle\{\emptyset\}\rangle\rangle = f\langle\emptyset\rangle$

$f\langle W\langle\{\emptyset\}\rangle\rangle = \emptyset$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{f\langle\emptyset\rangle\}\rangle = \emptyset$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{\emptyset\}\rangle = \emptyset$ *

QUEREMOS PROBAR:

$(\forall Y)(Y\subset B \Rightarrow Y\subset ((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle)$

$Y\subset B$

f ES BIYECTIVA

$f\langle A\rangle = B$

$Y\subset f\langle A\rangle$

$f^{-1}\langle Y\rangle \subset f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$

$f^{-1}\langle Y\rangle\subset A$

COMO SE TIENE QUE

$(\forall Y)(Y\subset A \Rightarrow Y\subset W\langle\{Y\}\rangle)$

TENDREMOS:

$f^{-1}\langle Y\rangle \subset W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle$

$f\langle f^{-1}\langle Y\rangle\rangle \subset f\langle W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle\rangle$

$Y \subset f\langle W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle\rangle$

$Y\subset ((\hat f\times f)(W))\langle\{f\langle f^{-1}\langle Y\rangle\rangle\}\rangle$

$Y\subset((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle$

ASI OBTENEMOS:

$(\forall Y)(Y\subset B\Rightarrow Y\subset((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle)$ *

QUEREMOS PROBAR

$(\forall Y)(Y\subset B\Rightarrow$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle = ((\hat f\times f)(W))\langle\{((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle\}\rangle)$

$Y\subset B$

$Y\subset f\langle A\rangle$

$f^{-1}\langle Y\rangle \subset f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$

$f^{-1}\langle Y\rangle\subset A$

COMO SE TIENE QUE:

$(\forall Y)(Y\subset A\Rightarrow W\langle\{W\langle\{Y\}\rangle\}\rangle = W\langle\{Y\}\rangle)$

TENDREMOS:

$W\langle\{W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle\}\rangle = W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle$

$f\langle W\langle\{W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle\}\rangle\rangle = f\langle W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle\rangle$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{f\langle W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle\rangle\}\rangle =$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{f\langle f^{-1}\langle Y\rangle\rangle\}\rangle.$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{((\hat f\times f)(W))\langle\{f\langle f^{-1}\langle Y\rangle\rangle\}\rangle\}\rangle =$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle.$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle\}\rangle =$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle.$

ASI OBTENEMOS:

$(\forall Y)(Y\subset B\Rightarrow$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle = ((\hat f\times f)(W))\langle\{((\hat f\times f)(W))\langle\{Y\}\rangle\}\rangle)$.

QUEREMOS PROBAR:

$(\forall X)(\forall Y)(X\subset B\wedge Y\subset B\Rightarrow$

$((\hat f\times f)(W))\langle\{X\cup Y\}\rangle =$

$((\widehat{f\times f})(W))\langle\{X\}\rangle \cup ((\widehat{f\times f})(W))\langle\{Y\}\rangle\,)$

$X\subset B \wedge Y\subset B$

$f^{-1}\langle X\rangle\subset A \wedge f^{-1}\langle Y\rangle\subset A$

Como se tiene que:

$(\forall X)(\forall Y)(X\subset A \wedge Y\subset A \Rightarrow$
$W\langle\{X\cup Y\}\rangle = W\langle\{X\}\rangle\cup W\langle\{Y\}\rangle)$

Tendremos:

$W\langle\{f^{-1}\langle X\rangle\cup f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle = W\langle\{f^{-1}\langle X\rangle\}\rangle\cup W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle$

$W\langle\{f^{-1}\langle X\cup Y\rangle\}\rangle = W\langle\{f^{-1}\langle X\rangle\}\rangle\cup W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle$

$f\langle W\langle\{f^{-1}\langle X\cup Y\rangle\}\rangle\rangle =$
$f\langle W\langle\{f^{-1}\langle X\rangle\}\rangle\cup W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle\rangle.$

$f\langle W\langle\{f^{-1}\langle X\cup Y\rangle\}\rangle\rangle =$
$f\langle W\langle\{f^{-1}\langle X\rangle\}\rangle\rangle\cup f\langle W\langle\{f^{-1}\langle Y\rangle\}\rangle\rangle.$

$((\widehat{f\times f})(W))\langle\{f\langle f^{-1}\langle X\cup Y\rangle\rangle\}\rangle =$
$((\widehat{f\times f})(W))\langle\{f\langle f^{-1}\langle X\rangle\rangle\}\rangle\cup((\widehat{f\times f})(W))\langle\{f\langle f^{-1}\langle Y\rangle\rangle\}\rangle.$

$((\widehat{f\times f})(W))\langle\{X\cup Y\}\rangle =$
$((\widehat{f\times f})(W))\langle\{X\}\rangle\cup((\widehat{f\times f})(W))\langle\{Y\}\rangle.$

Así obtenemos:

$(\forall X)(\forall Y)(X\subset B \wedge Y\subset B \Rightarrow$
$((\widehat{f\times f})(W))\langle\{X\cup Y\}\rangle =$
$((\widehat{f\times f})(W))\langle\{X\}\rangle\cup((\widehat{f\times f})(W))\langle\{Y\}\rangle\,).$ *

Por lo que
$\mathfrak{S}\{B;(\widehat{f\times f})(W)\}$ se cumple.

Esto significa que:
$W\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)\times A)\wedge f\in\overline{F}(A,B)\Rightarrow$
$[\,\mathfrak{S}\{A,W\}\Rightarrow\mathfrak{S}\{B;(\widehat{f\times f})(W)\}]$ es teorema en $\mathcal{T}$.

II) Supongamos:
$W\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)\times A)\wedge f\in\overline{F}(A,B)\wedge\mathfrak{S}\{B;(\widehat{f\times f})(W)\}$

Probaremos: $\mathfrak{S}\{A;W\}$

$(\widehat{f\times f})(W)\langle\{\emptyset\}\rangle=\emptyset$

$f\langle\emptyset\rangle=\emptyset$

$(\widehat{f\times f})(W)\langle\{f\langle\emptyset\rangle\}\rangle=\emptyset$

$f\langle W\langle\{f\langle\emptyset\rangle\}\rangle\rangle=\emptyset$

$f\langle W\langle\{\emptyset\}\rangle\rangle=\emptyset$

Además $W\langle\{\emptyset\}\rangle\subset A$

Así se tiene que:
$W\langle\{\emptyset\}\rangle=\emptyset$ *

Queremos probar:
$(\forall Y)(Y\subset A\Rightarrow Y\subset W\langle\{Y\}\rangle)$

$Y\subset A$

$f\langle Y\rangle\subset f\langle A\rangle$

$f\langle Y\rangle\subset B$

Como se tiene que:
$(\forall Y)(Y\subset B\Rightarrow Y\subset((\widehat{f\times f})(W))\langle\{Y\}\rangle)$

Tendremos:

$f\langle Y\rangle\subset((\widehat{f\times f})(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle$

$f\langle Y\rangle\subset f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle$

$f^{-1}\langle f\langle Y\rangle\rangle\subset f^{-1}\langle f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle\rangle$

$Y\subset W\langle\{Y\}\rangle$

Así obtenemos:
$(\forall Y)(Y\subset A\Rightarrow Y\subset W\langle\{Y\}\rangle)$ *

Queremos probar:
$(\forall Y)(Y\subset A\Rightarrow W\langle\{Y\}\rangle=W\langle\{W\langle\{Y\}\rangle\}\rangle)$

$Y\subset A$

$f\langle Y\rangle\subset f\langle A\rangle$

$f\langle Y\rangle\subset B$

Como se tiene que:
$(\forall Y)(Y\subset B\Rightarrow$
$(\widehat{f\times f})(W)\langle\{Y\}\rangle=(\widehat{f\times f})(W)\langle\{(\widehat{f\times f})(W)\langle\{Y\}\rangle\}\rangle)$

Tendremos:

$(\widehat{f\times f})(W)\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle=$
$(\widehat{f\times f})(W)\langle\{(\widehat{f\times f})(W)\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle\}\rangle.$

$f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle=(\widehat{f\times f})(W)\langle\{f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle\}\rangle$

$f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle=f\langle W\langle\{W\langle\{Y\}\rangle\}\rangle\rangle$

$f^{-1}\langle f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle\rangle=f^{-1}\langle f\langle W\langle\{W\langle\{Y\}\rangle\}\rangle\rangle\rangle$

$W\langle\{Y\}\rangle=W\langle\{W\langle\{Y\}\rangle\}\rangle$

Así obtenemos:

$(\forall Y)(Y\subset A \Rightarrow W\langle\{Y\}\rangle = W\langle\{W\langle\{Y\}\rangle\}\rangle)$ *

Queremos probar:

$(\forall X)(\forall Y)(X\subset A \wedge Y\subset A \Rightarrow$
$W\langle\{X\cup Y\}\rangle = W\langle\{X\}\rangle \cup W\langle\{Y\}\rangle)$

$X\subset A \wedge Y\subset A$

$f\langle X\rangle \subset B \wedge f\langle Y\rangle\subset B$

Como se tiene que:

$(\forall X)(\forall Y)(X\subset B\wedge Y\subset B \Rightarrow$
$(\hat{f^{-1}}(W))\langle\{X\cup Y\}\rangle =$
$(\hat{f^{-1}}(W))\langle\{X\}\rangle \cup (\hat{f^{-1}}(W))\langle\{Y\}\rangle)$

Tendremos:

$(\hat{f^{-1}}(W))\langle\{f\langle X\rangle \cup f\langle Y\rangle\}\rangle =$
$(\hat{f^{-1}}(W))\langle\{f\langle X\rangle\}\rangle \cup ((\hat{f^{-1}}(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle$.

$(\hat{f^{-1}}(W))\langle\{f\langle X\cup Y\rangle\}\rangle =$
$(\hat{f^{-1}}(W))\langle\{f\langle X\rangle\}\rangle\cup(\hat{f^{-1}}(W))\langle\{f\langle Y\rangle\}\rangle$.

$f\langle W\langle\{X\cup Y\}\rangle\rangle = f\langle W\langle\{X\}\rangle\rangle \cup f\langle W\langle\{Y\}\rangle\rangle$

$f\langle W\langle\{X\cup Y\}\rangle\rangle = f\langle W\langle\{X\}\rangle \cup W\langle\{Y\}\rangle\rangle$

$f^{-1}\langle f\langle W\langle\{X\cup Y\}\rangle\rangle\rangle =$
$f^{-1}\langle f\langle W\langle\{X\}\rangle\cup W\langle\{Y\}\rangle\rangle\rangle$.

$W\langle\{X\cup Y\}\rangle = W\langle\{X\}\rangle\cup W\langle\{Y\}\rangle$

Así obtenemos:

$(\forall X)(\forall Y)(X\subset A\wedge Y\subset A \Rightarrow$
$W\langle\{X\cup Y\}\rangle = W\langle\{X\}\rangle\cup W\langle\{Y\}\rangle)$ *

Por lo que
$\mathfrak{S}\{A;W\}$ se cumple

Esto significa que:

$W\in\beta(\beta(A)\times A) \wedge f\in \overline{F}(A;B) \Rightarrow$
$[\mathfrak{S}\{B;\hat{f^{-1}}(W)\} \Rightarrow \mathfrak{S}\{A;W\}]$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Así obtenemos que:

$W\in\alpha^{*}\{A\}_5 \wedge f\in\overline{F}(A;B) \Rightarrow$
$[\mathfrak{S}\{A;W\} \Leftrightarrow \mathfrak{S}\{B;\alpha^{\circ}\{f\}_5(W)\}]$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Esto significa que:

$\mathfrak{S}\{A;W\}$ es transportable por $W\in\alpha^{*}\{A\}_5$ en $\mathcal{T}$.

Así podemos considerar el término $\langle\alpha-\mathfrak{S}\rangle_W\{A\}_5$.

Además tenemos que:

$\mathcal{C}$ es la teoría $\mathcal{T}(W\in\langle\alpha-\mathfrak{S}\rangle_W\{A\}_5)$ es decir la teoría $\mathcal{T}$, a la que se le añade la relación $W\in\langle\alpha-\mathfrak{S}\rangle_W\{A\}_5$ a sus axiomas.

Se probará que:

"$X\in\beta(A)\wedge x\in A\wedge(\forall U)(U\in V\wedge x\in U \Rightarrow X\cap U\neq\emptyset)$ gráfica en (X,x)" es teorema en $\mathcal{T}$.

Supongamos:

$X\in\beta(A)\wedge x\in A\wedge(\forall U)(U\in V\wedge x\in U\Rightarrow X\cap U\neq\emptyset)$

Probaremos:

$(X,x)\in\mathbb{U}$, donde $\mathbb{U}$ es un término que no contiene a las letras $X;x$.

$X\in\beta(A)\wedge x\in A$

$(X;x)\in\beta(A)\times A$, donde $\beta(A)\times A$ no contiene a las letras X,x.

Esto significa que:

$[X\in\beta(A)\wedge x\in A\wedge(\forall U)(U\in V\wedge x\in U\Rightarrow X\cap U\neq\emptyset)] \Rightarrow (X,x)\in\beta(A)\times A$ es teorema en $\mathcal{T}$.

Por lo que:

$X\in\beta(A)\wedge x\in A\wedge(\forall U)(U\in V\wedge x\in U\Rightarrow X\cap U\neq\emptyset)$ gráfica en (X,x) es teorema en $\mathcal{T}$.

Al término funcional implicado por el teorema anterior lo denotaremos: $\mathbb{P}\{A;V\}$

Así tendremos que:

$\mathbb{P}\{A;V\}$ es gráfica $\wedge(\forall X)(\forall x)((X,x)\in\mathbb{P}\{A;V\}\Leftrightarrow X\in\beta(A)\wedge x\in A\wedge(\forall U)($

$U\in V \wedge x\in U \Rightarrow X\cap U\neq\emptyset))$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}$

SE PROBARA QUE:

"$\mathrm{Coll}_X(X\in\mathcal{P}(A) \wedge X\cap W\langle\{A-X\}\rangle=\emptyset)$" ES TEOREMA EN $\mathcal{C}$

SUPONGAMOS:

$X\in\mathcal{P}(A) \wedge X\cap W\langle\{A-X\}\rangle=\emptyset$

PROBAREMOS:

$X\in\mathbb{T}$, DONDE $\mathbb{T}$ ES UN TERMINO QUE NO CONTIENE A LA LETRA X.

$X\in\mathcal{P}(A)$ (INMEDIATO), DONDE $\mathcal{P}(A)$ NO CONTIENE A LA LETRA X.

ESTO SIGNIFICA QUE:

$[X\in\mathcal{P}(A) \wedge X\cap W\langle\{A-X\}\rangle=\emptyset] \Rightarrow X\in\mathcal{P}(A)$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}$

POR LO QUE:

$\mathrm{Coll}_X(X\in\mathcal{P}(A) \wedge X\cap W\langle\{A-X\}\rangle=\emptyset)$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}$

AL TERMINO FUNCIONAL IMPLICADO POR EL TEOREMA ANTERIOR LO DENOTAREMOS:

$Q\{A;W\}$

ASI TENDREMOS QUE:

$(\forall X)(X\in Q\{A;W\} \Leftrightarrow [X\in\mathcal{P}(A) \wedge X\cap W\langle\{A-X\}\rangle=\emptyset])$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}$

SE PROBARA QUE:

LOS TERMINOS $\mathbb{P}\{A;V\}$ Y A SON INTRINSECOS PARA V EN $\mathcal{T}$.

PROBAREMOS QUE:

1) $\mathbb{P}\{A;V\}\in\alpha^\bullet\{A\}_5$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}$

2) $\mathbb{P}\{B;\alpha^\bullet\{f\}_3(V)\}=\alpha^\bullet\{f\}_5(\mathbb{P}\{A,V\})$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}(f\in\bar{\mathcal{F}}(A,B))$

3) $A\in\alpha^\bullet\{A\}_1$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}$.

4) $B=\alpha^\bullet\{f\}_2(A)$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}(f\in\bar{\mathcal{F}}(A;B))$.

1) $z\in\mathbb{P}\{A,V\}$

$z=(z_1,z_2) \wedge z_1\in\mathcal{P}(A)\wedge z_2\in A$

$z=(z_1,z_2)\wedge(z_1,z_2)\in\mathcal{P}(A)\times A$

$z\in\mathcal{P}(A)\times A$

ASI OBTENEMOS

$(\forall z)(z\in\mathbb{P}\{A,V\}\Rightarrow z\in\mathcal{P}(A)\times A)$

$\mathbb{P}\{A,V\}\subset\mathcal{P}(A)\times A$

$\mathbb{P}\{A,V\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)\times A)$

$\mathbb{P}\{A,V\}\in\alpha^\bullet\{A\}_5$

2) $z\in\mathbb{P}\{B,\alpha^\bullet\{f\}_3(V)\}$

$z\in\mathbb{P}\{f\langle A\rangle, \hat{f}(V)\}$

$(z_1,z_2)\in\mathbb{P}\{f\langle A\rangle,\hat{f}(V)\}$

$z_1\subset f\langle A\rangle \wedge z_2\in f\langle A\rangle$

$z_1\subset f\langle A\rangle \wedge y_1\in A\wedge f(y_1)=z_2$

SE PROBARA

$(\forall U)(U\in V\wedge y_1\in U\Rightarrow f^{-1}\langle z_1\rangle\cap U\neq\emptyset)$

$U\in V\wedge y_1\in U$

$\hat{f}(U)\in\hat{f}(V)\wedge f(y_1)\in f\langle U\rangle$

$\hat{f}(U)\in\hat{f}(V)\wedge z_2\in f\langle U\rangle$

$f\langle U\rangle\in\hat{f}(V)\wedge z_2\in f\langle U\rangle$

COMO SE TIENE QUE:

$(\forall U)(U\in\hat{f}(V)\wedge z_2\in U\Rightarrow z_1\cap U\neq\emptyset)$

SE TENDRA QUE:

$z_1\cap f\langle U\rangle\neq\emptyset$

ADEMAS $z_1\subset f\langle A\rangle\wedge f\langle U\rangle\subset f\langle A\rangle$

$z_1\cap f\langle U\rangle\subset A$

$f^{-1}\langle z_1\cap f\langle U\rangle\rangle\neq\emptyset$

$f^{-1}\langle z_1\rangle\cap U\neq\emptyset$

ENTONCES TENDRIAMOS.

$y_1\in A\wedge f^{-1}\langle z_1\rangle\subset A\wedge f(y_1)=z_2\wedge f\langle f^{-1}\langle z_1\rangle\rangle=z_1\wedge(\forall U)(U\in V\wedge y_1\in U$

$\Rightarrow \overset{-1}{f}\langle z_1\rangle \cap U \neq \emptyset).$

POR LO TANTO

$(\overset{-1}{f}\langle z_2\rangle, y_1) \in \mathbb{P}\{A; V\} \wedge \hat{f}(\overset{-1}{f}\langle z_2\rangle) = z_1 \wedge f(y_1) = z_2$

$(\overset{-1}{f}\langle z_2\rangle, y_1) \in \mathbb{P} \wedge (\hat{f} \times f)(\overset{-1}{f}\langle z_2\rangle, y_1) \quad (z_1, z_2)$

$(\exists W)(W \in \mathbb{P} \wedge (\hat{f} \times f)(W) \quad (z_1, z_2))$

$(z_1, z_2) \in (\hat{f} \times f)\langle \mathbb{P}\rangle$

$z \in (\hat{f} \times f)\langle \mathbb{P}\rangle$

$z \in \widehat{\hat{f} \times f}(\mathbb{P})$

$z \in \alpha^{\circ}\{f\}_5(\mathbb{P}\{A; V\})$

CONCLUIRIAMOS CON:

$\mathbb{P}\{B; \alpha^{\circ}\{f\}_3(V)\} \subset \alpha^{\circ}\{f\}_5(\mathbb{P}\{A, V\})$

PROBAREMOS AHORA QUE

$\alpha^{\circ}\{f\}_5(\mathbb{P}\{A; V\}) \subset \mathbb{P}\{B, \alpha^{\circ}\{f\}_3(V)\}$

$z \in \alpha^{\circ}\{f\}_5(\mathbb{P}\{A; V\})$

$z \in \widehat{\hat{f} \times f}(\mathbb{P})$

$z \in \hat{f} \times f\langle \mathbb{P}\rangle$

$(z_1; z_2) \in \hat{f} \times f\langle \mathbb{P}\rangle$

$(\exists W)(W \in \mathbb{P} \wedge \hat{f} \times f(W) = (z_1, z_2))$

$(w_1, w_2) \in \mathbb{P} \wedge \hat{f}(w_1) = z_1 \wedge f(w_2) = z_2$

$w_2 \in A \wedge w_1 \subset A \wedge (\forall U)(U \in V \wedge w_2 \in U \Rightarrow w_1 \cap U \neq \emptyset)$

$f(w_2) \in f\langle A\rangle \wedge f\langle w_1\rangle \subset f\langle A\rangle$

SE PROBARA QUE:

$(\forall U)(U \in \hat{f}(V), f(w_2) \in U \Rightarrow f\langle w_1\rangle \cap U \neq \emptyset)$

$U \in \hat{f}(V) \wedge f(w_2) \in U$

$U \in \hat{f}\langle V\rangle \wedge f(w_2) \in U$

$y_0 \in V \wedge \hat{f}(y_0) = U \wedge f(w_2) \in U$

$y_0 \in V \wedge f\langle y_0\rangle = U \wedge f(w_2) \in U$

$y_0 \in V \wedge f(w_2) \in f\langle y_0\rangle$

$y_0 \in V \wedge \overset{-1}{f}(f(w_2)) \in \overset{-1}{f}\langle f\langle y_0\rangle\rangle$

$y_0 \in V \wedge w_2 \in y_0$

$w_1 \cap y_0 \neq \emptyset$

$w_1 \subset A \wedge y_0 \subset A$

$w_1 \cap y_0 \subset A$

$f\langle w_1 \cap y_0\rangle \neq \emptyset$

$f\langle w_1\rangle \cap f\langle y_0\rangle \neq \emptyset$

$f\langle w_1\rangle \cap U \neq \emptyset$

ASI PODEMOS CONCLUIR LO QUE SE PRETENDIA, PARA PODER DECIR:

$f(w_2) \in f\langle A\rangle \wedge f\langle w_1\rangle \subset f\langle A\rangle \wedge$

$(\forall U)(U \in \hat{f}(V) \wedge f(w_2) \in U \Rightarrow f\langle w_1\rangle \cap U \neq \emptyset)$

POR LO TANTO

$(f\langle w_1\rangle; f(w_2)) \in \mathbb{P}\{\hat{f}(A), \hat{f}(V)\}$

$(z_1, z_2) \in \mathbb{P}\{\hat{f}(A), \hat{f}(V)\}$

$z \in \mathbb{P}\{B, \alpha^{\circ}\{f\}_3(V)\}$

CON LO QUE SE PROBARIA QUE

$\mathbb{P}\{B, \alpha^{\circ}\{f\}_3(V)\} \quad \alpha^{\circ}\{f\}_5(\mathbb{P}\{A, V\})$

3) $A \subset A$

$A \in \beta(A)$

$A \in \alpha^{\circ}\{A\}_2$

4) f ES BIYECTIVA

$f\langle A\rangle \quad B$

$\hat{f}(A) \quad B$

$B \quad \alpha^{\circ}\{f\}_2(A)$

SE PROBARA QUE

LOS TERMINOS $Q\{A, W\}$ Y A SON INTRINSECOS PARA W EN Υ.

PROBAREMOS QUE

1) $Q\{A, W\} \in \alpha^{\circ}\{A\}_5$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}$

2) $Q\{B, \alpha^{\circ}\{f\}_5(W)\} = \alpha^{\circ}\{f\}_3(Q\{A, W\})$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}(f \in \mathcal{F}(A, B))$

3) $A \in \alpha^{\circ}\{A\}_2$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}$

4) $B = \alpha^{\circ}\{f\}_2(A)$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}(f \in \mathcal{F}(A, B))$.

1) $z \in Q\{A, W\}$

$z \in \beta(A)$

POR LO QUE

$(\forall z)(z \in Q\{A, W\} \Rightarrow z \in \beta(A))$

ES DECIR:

$\mathbb{Q}\{A;W\} \subset \beta(A)$

$\mathbb{Q}\{A;W\} \in \beta(\beta(A))$

$\mathbb{Q}\{A;W\} \in \alpha^{*}\{A\}_3$

2) $z \in \mathbb{Q}\{B, \hat{f}\times f(W)\}$

$z \subset B \wedge \hat{f}\times f(W)\langle\{B-z\}\rangle \cap z = \emptyset$

$z \subset f\langle A\rangle \wedge (\hat{f}\times f)(W)\langle\{f\langle A\rangle - z\}\rangle \cap z = \emptyset$

$z \subset f\langle A\rangle \wedge (\hat{f}\times f)(W)\langle\{f\langle A - \overset{-1}{f}\langle z\rangle\rangle\}\rangle \cap z = \emptyset$

$z \subset f\langle A\rangle \wedge f\langle W\langle\{A - \overset{-1}{f}\langle z\rangle\}\rangle\rangle \cap z = \emptyset$

$\overset{-1}{f}\langle z\rangle \subset A \wedge W\langle\{A - \overset{-1}{f}\langle z\rangle\}\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle z\rangle = \emptyset$

$\overset{-1}{f}\langle z\rangle \subset A \wedge f\langle \overset{-1}{f}\langle z\rangle\rangle = z$

$\overset{-1}{f}\langle z\rangle \in \mathbb{Q}\{A;W\} \wedge \hat{f}(\overset{-1}{f}\langle z\rangle) = z$

$(\exists u)(u \in \mathbb{Q}\{A;W\} \wedge \hat{f}(u) = z)$

$z \in \hat{f}\langle \mathbb{Q}\{A;W\}\rangle$

$z \in \hat{\hat{f}}(\mathbb{Q}\{A;W\})$

$z \in \alpha^{\circ}\{f\}_3(\mathbb{Q}\{A;W\})$

POR LO QUE:

$\mathbb{Q}\{B, \hat{f}\times f(W)\} \subset \hat{\hat{f}}(\mathbb{Q}\{A;W\})$

$z \in \alpha^{\circ}\{f\}_3(\mathbb{Q}\{A;W\})$

$z \in \hat{\hat{f}}(\mathbb{Q}\{A;W\})$

$z \in \hat{f}\langle \mathbb{Q}\{A;W\}\rangle$

$(\exists u)(u \in \mathbb{Q}\{A;W\} \wedge \hat{f}(u) = z)$

$u_0 \in \mathbb{Q}\{A;W\} \wedge \hat{f}(u_0) = z$

$u_0 \subset A \wedge W\langle\{A - u_0\}\rangle \cap u_0 = \emptyset \wedge \hat{f}(u_0) = z$

$f\langle u_0\rangle \subset f\langle A\rangle$

$f\langle u_0\rangle \subset B \wedge f\langle W\langle\{A - u_0\}\rangle \cap u_0\rangle = \emptyset$

$(\hat{f}\times f)(W)\langle\{f\langle A - u_0\rangle\}\rangle \cap f\langle u_0\rangle = \emptyset$

$z \subset B \wedge (\hat{f}\times f)(W)\langle\{f\langle A\rangle - f\langle u_0\rangle\}\rangle \cap z = \emptyset$

$z \subset B \wedge (\hat{f}\times f)(W)\langle\{B - z\}\rangle \cap z = \emptyset$

$z \in \mathbb{Q}\{B, (\hat{f}\times f)(W)\}$

POR LO QUE:

$\hat{\hat{f}}(\mathbb{Q}\{A;W\}) \subset \mathbb{Q}\{B, \hat{f}\times f(W)\}$

POR LO QUE:

$\alpha^{\circ}\{f\}_3(\mathbb{Q}\{A;W\}) = \mathbb{Q}\{B, \alpha^{\circ}\{f\}_5(W)\}$

3) $A \subset A$

$A \in \beta(A)$

$A \in \alpha^{\circ}\{A\}_2$

4) f ES BIYECTIVA

$f\langle A\rangle = B$

$\hat{f}(A) = B$

$B = \alpha^{\circ}\{f\}_2(A)$

SE PROBARA QUE:

$\mathbb{P}\{A;V\} \in \langle\alpha - \mathcal{S}\rangle_{\omega}\{A\}_5$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}$.

YA SE TIENE QUE: $\mathbb{P} \in \alpha^{\circ}\{A\}_5$ *

SE PROBARA QUE: $\mathcal{S}\{A; \mathbb{P}\{A;V\}\}$

$\mathbb{P}\langle\{\emptyset\}\rangle \neq \emptyset$

$(\exists_{\omega})(\omega \in \mathbb{P}\langle\{\emptyset\}\rangle)$

$\omega_0 \in \mathbb{P}\langle\{\emptyset\}\rangle$

$(\emptyset; \omega_0) \in \mathbb{P}$

$\emptyset \subset A \wedge \omega_0 \in A \wedge (\forall u)(u \in V \wedge \omega_0 \in u \Rightarrow u \cap \emptyset \neq \emptyset)$

COMO $A \in V \wedge \omega_0 \in A$, SE TENDRA:

$A \cap \emptyset \neq \emptyset$

$\emptyset \neq \emptyset$ (CONTRADICCION)

ASI TENDREMOS

$\mathbb{P}\langle\{\emptyset\}\rangle = \emptyset$ *

PROBAREMOS:

$(\forall Y)(Y \subset A \Rightarrow Y \subset \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle)$

$Y \subset A$

$\omega \in Y$

$u \in V \wedge \omega \in u$

$u \in V \wedge \omega \in u \wedge \omega \in Y$

$Y \cap u \neq \emptyset$

ASI: $(\forall u)(u \in V \wedge \omega \in u \Rightarrow Y \cap u \neq \emptyset)$

POR LO QUE: $(Y;\omega) \in \mathbb{P}$

$\omega \in \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

Así tendremos:

$(\forall w)(w\in Y \Rightarrow w \in \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle)$

$Y\subset \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

Así: $(\forall Y)(Y\subset A \Rightarrow Y\subset \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle)$ *

Probaremos:

$(\forall Y)(Y\subset A \Rightarrow \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle = \mathbb{P}\langle\{\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\}\rangle)$

$Y\subset A$

Se probará: $\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\subset A$

$w\in \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

$(Y,w)\in\mathbb{P}$

$\mathbb{P}\subset \mathcal{P}(A)\times A$

$w\in A$

Así: $(\forall w)(w\in \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle \Rightarrow w\in A)$

$\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\subset A$

Para concluir:

$\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle \subset \mathbb{P}\langle\{\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\}\rangle$.

Se probará:

$\mathbb{P}\langle\{\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\}\rangle\subset \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

$w\in \mathbb{P}\langle\{\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\}\rangle$

$(\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle, w)\in\mathbb{P}$

$\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\subset A \wedge w\in A \wedge (\forall U)(U\in V \wedge w\in U \Rightarrow \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\cap U\neq\emptyset)$

Así se tiene: $Y\subset A \wedge w\in A$

Se probará $(\forall U)(U\in V \wedge w\in U \Rightarrow Y\cap U\neq\emptyset)$

$U\in V \wedge w\in U$

$\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\cap U\neq\emptyset$

$m_0\in \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle \wedge m_0\in U$

$m_0\in\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

Así: $(\forall W)(W\in V \wedge m_0\in W\Rightarrow W\cap Y\neq\emptyset)$

Por lo que: $U\in V\wedge m_0\in U \Rightarrow U\cap Y\neq\emptyset$

Así $U\cap Y\neq\emptyset$

Así probamos $(\forall U)(U\in V\wedge w\in U\Rightarrow Y\cap U\neq\emptyset)$

y como $Y\subset A \wedge w\in A$, se tiene:

$(Y,w)\in\mathbb{P}$

$w\in\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

Por lo que

$(\forall w)(w\in \mathbb{P}\langle\{\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\}\rangle \Rightarrow w\in \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle)$

Así: $\mathbb{P}\langle\{\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\}\rangle\subset\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

Por lo tanto

$\mathbb{P}\langle\{\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\}\rangle = \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

Así tendremos:

$(\forall Y)(Y\subset A\Rightarrow \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle = \mathbb{P}\langle\{\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\}\rangle)$ *

Probaremos:

$(\forall Y)(\forall Z)(Y\subset A \wedge Z\subset A \Rightarrow \mathbb{P}\langle\{Y\cup Z\}\rangle = \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\cup\mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle)$

$Y\subset A \wedge Z\subset A$

Se probará $\mathbb{P}\langle\{Y\cup Z\}\rangle\subset \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\cup\mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle$

Supongamos: $u\in\mathbb{P}\langle\{Y\cup Z\}\rangle \wedge u\notin \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$

Se tiene: $Y\cup Z\subset A \wedge u\in A$

Además $(\forall U)(U\in V\wedge u\in U\Rightarrow U\cap(Y\cup Z)\neq\emptyset)$

es decir

$(\forall U)(U\in V\wedge u\in U\Rightarrow U\cap Y\neq\emptyset \vee U\cap Z\neq\emptyset)$

Además $u\in A \wedge Z\subset A$

Se probará

$(\forall W)(W\in V\wedge u\in W\Rightarrow W\cap Z\neq\emptyset)$

$W\in V\wedge u\in W$

$W\cap Y\neq\emptyset \vee W\cap Z\neq\emptyset$

Supongamos $W\cap Y\neq\emptyset$

concluiríamos $(\forall W)(W\in V\wedge u\in W\Rightarrow W\cap Y\neq\emptyset)$

es decir que $u\in\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle$ (contradicción)

Se tiene entonces que $W\cap Z\neq\emptyset$

Así $u\in\mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle$

Tendremos con esto

$(\forall u)(u\in \mathbb{P}\langle\{Y\cup Z\}\rangle\wedge u\notin\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\Rightarrow u\in\mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle)$

Es decir que

$(\forall u)(u\in\mathbb{P}\langle\{Y\cup Z\}\rangle\Rightarrow u\in\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\vee u\in\mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle)$

$\mathbb{P}\langle\{Y\cup Z\}\rangle\subset\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\cup\mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle$

Se probará $\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\cup\mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle\subset\mathbb{P}\langle\{Y\cup Z\}\rangle$

$w\in\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\cup\mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle$

$w \in \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle \vee w \in \mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle$

$(Y,w) \in \mathbb{P} \vee (Z;w) \in \mathbb{P}$

a) SUPONGAMOS $(Y,w) \in \mathbb{P}$

$w \in A \wedge Y \subset A, (\forall U)(U \in V \wedge w \in U \Rightarrow U \cap Y \neq \emptyset)$

$w \in A \wedge Y \cup Z \subset A$

SE PROBARA QUE:

$(\forall W)(W \in V \wedge w \in W \Rightarrow W \cap (Y \cup Z) \neq \emptyset)$

$W \in V \wedge w \in W$

$W \cap Y \neq \emptyset$

$W \cap Y \neq \emptyset \vee W \cap Z \neq \emptyset$

$W \cap (Y \cup Z) \neq \emptyset$

ASI TENDRIAMOS $w \in \mathbb{P}\langle\{Y \cup Z\}\rangle$

b) SUPONGAMOS $(Z, w) \in \mathbb{P}$

SIMILARMENTE SE TIENE $w \in \mathbb{P}\langle\{Y \cup Z\}\rangle$

SE TIENE POR a) Y b) QUE

$(\forall w)(w \in \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle \cup \mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle \Rightarrow w \in \mathbb{P}\langle\{Y \cup Z\}\rangle)$

ES DECIR QUE

$\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle \cup \mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle \subset \mathbb{P}\langle\{Y \cup Z\}\rangle$

ASI TENDREMOS QUE

$(\forall Y)(\forall Z)(Y \subset A \wedge Z \subset A \Rightarrow$

$\mathbb{P}\langle\{Y \cup Z\}\rangle = \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle \cup \mathbb{P}\langle\{Z\}\rangle)$ *

ASI TENDRIAMOS:

$\mathbb{P}\{A, V\} \in \langle \alpha - \mathfrak{S} \rangle_w \{A\}_5$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}$

SE PROBARA QUE:

$\mathbb{Q}\{A, W\} \in \langle \alpha - \mathbb{R} \rangle_v \{A\}_3$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}$

YA SE TIENE QUE: $\mathbb{Q} \in \alpha^{0}\{A\}_3$

SE PROBARA $\mathbb{R}\{A; \mathbb{Q}\{A, W\}\}$

$A \subset A$

$A \in \beta(A)$

SUPONGAMOS $W\langle\{A - A\}\rangle \cap A \neq \emptyset$

$z_0 \in W\langle\{A - A\}\rangle \cap A$

$z_0 \in W\langle\{\emptyset\}\rangle \cap A$

$z_0 \in \emptyset \cap A$

$z_0 \in \emptyset$ (CONTRADICCION)

ASI TENDRIAMOS QUE:

$W\langle\{A - A\}\rangle \cap A = \emptyset \wedge A \in \beta(A)$

ASI SE TIENE QUE: $A \in \mathbb{Q}$ *

SE PROBARA

$(\forall M)(M \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \bigcup_{X \in M} X \in \mathbb{Q})$

$M \subset \mathbb{Q}$

SE PROBARA $\bigcup_{X \in M} X \subset A$

$z \in \bigcup_{X \in M} X$

$z \in X_0 \wedge X_0 \in M \wedge M \subset \mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \subset \beta(A)$

$X_0 \in \beta(A)$

$X_0 \subset A$

$z \in A$

POR LO QUE $\bigcup_{X \in M} X \subset A$

SE PROBARA $\bigcup_{X \in M} X \cap W\langle\{A - \bigcup_{X \in M} X\}\rangle = \emptyset$

SUPONGAMOS LO CONTRARIO:

$z_0 \in \bigcup_{X \in M} X \cap W\langle\{A - \bigcup_{X \in M} X\}\rangle$

$z_0 \in \bigcup_{X \in M} X$

$z_0 \in X_0 \wedge X_0 \in \mathbb{Q}$

$X_0 \in \beta(A) \wedge W\langle\{A - X_0\}\rangle \cap X_0 = \emptyset$

$z_0 \in W\langle\{A - \bigcup_{X \in M} X\}\rangle$

$z_0 \in W\langle\{\bigcap_{X \in M}(A - X)\}\rangle$

ADEMAS $(\forall Y)(Y \in M \Rightarrow \bigcap_{X \in M}(A - X) \subset (A - Y))$

POR OTRO LADO

$Z \subset A \wedge Y \subset A \wedge Z \subset Y$

$Z \cup Y = Y$

$W\langle\{Z \cup Y\}\rangle = W\langle\{Y\}\rangle$

$W\langle\{Z\}\rangle \cup W\langle\{Y\}\rangle = W\langle\{Y\}\rangle$

$W\langle\{Z\}\rangle \subset W\langle\{Y\}\rangle$

ES DECIR $(\forall Z)(\forall Y)(Z \subset A \wedge Y \subset A \Rightarrow$

$[Z \subset Y \Rightarrow W\langle\{Z\}\rangle \subset W\langle\{Y\}\rangle])$

POR LO QUE:

$W\langle\{\bigcap_{X\in M}(A-X)\}\rangle \subset W\langle\{A-X_0\}\rangle$

$z_0 \in W\langle\{A-X_0\}\rangle$

$z_0 \in W\langle\{A-X_0\}\rangle \cap X_0$ (CONTRADICCION)

POR LO QUE: $\bigcup_{X\in M} X \cap W\langle\{A-\bigcup_{X\in M} X\}\rangle = \emptyset$

ASI $\bigcup_{X\in M} X \in \mathbb{Q}$

ASI DEMOSTRAMOS:

$(\forall M)(M \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \bigcup_{X\in M} X \in \mathbb{Q})$ *

SE PROBARA:

$(\forall X)(\forall Y)(X \in \mathbb{Q} \wedge Y \in \mathbb{Q} \Rightarrow X\cap Y \in \mathbb{Q})$

$X \in \mathbb{Q} \wedge Y \in \mathbb{Q}$

$X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \cap W\langle\{A-X\}\rangle = \emptyset$

$Y \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \cap W\langle\{A-Y\}\rangle = \emptyset$

$X\cap Y \in \mathcal{P}(A)$

SUPONGAMOS: $(X\cap Y)\cap W\langle\{A-X\cap Y\}\rangle \neq \emptyset$

$z_0 \in (X\cap Y)\cap W\langle\{(A-X)\cup(A-Y)\}\rangle$

$z_0 \in (X\cap Y)\cap(W\langle\{A-X\}\rangle \cup W\langle\{A-Y\}\rangle)$

$z_0 \in (X\cap Y)\cap W\langle\{A-X\}\rangle \cup (X\cap Y)\cap W\langle\{A-Y\}\rangle$

$z_0 \in Y\cap(X\cap W\langle\{A-X\}\rangle) \cup X\cap(Y\cap W\langle\{A-Y\}\rangle)$

$z_0 \in (Y\cap\emptyset)\cup(X\cap\emptyset)$

$z_0 \in \emptyset$ (CONTRADICCION)

ASI OBTENEMOS $(X\cap Y)\cap W\langle\{A-X\cap Y\}\rangle = \emptyset$

POR LO QUE $X\cap Y \in \mathbb{Q}$

ASI SE HA PROBADO:

$(\forall X)(\forall Y)(X\in\mathbb{Q} \wedge Y\in\mathbb{Q} \Rightarrow X\cap Y\in\mathbb{Q})$ *

ASI CONCLUIRIAMOS QUE:

$\mathbb{Q}\{A,W\} \in \langle\alpha \cdot \mathbb{R}\rangle_v\{A\}_s$ ES TEOREMA EN $\mathcal{C}$

SE PROBARA QUE: $\mathbb{Q}\{A;\mathbb{P}\{A;V\}\} = V$ ES TEOREMA EN $\mathcal{T}$

SE PROBARA: $\mathbb{Q}\{A;\mathbb{P}\{A;V\}\} \subset V$

$z \in \mathbb{Q}\{A;\mathbb{P}\{A;V\}\}$

$z \in \mathcal{P}(A) \wedge z \cap \mathbb{P}\langle\{A-z\}\rangle = \emptyset$

SE PROBARA PRIMERO

$(\forall w)(w\in z \Rightarrow (\exists U)(U\in V \wedge w\in U \wedge (A-z)\cap U = \emptyset))$

$w \in z \wedge z \subset A$

$w \notin \mathbb{P}\langle\{A-z\}\rangle$

$(A-z, w) \notin \mathbb{P}$

$\sim(w\in A \wedge A-z \subset A \wedge (\forall U)(U\in V \wedge w\in U \Rightarrow (A-z)\cap U \neq \emptyset))$

$w\in A \wedge A-z \subset A \Rightarrow (\exists U)(U\in V \wedge w\in U \wedge (A-z)\cap U = \emptyset)$

COMO $w\in A \wedge A-z\subset A$, SE TIENE QUE

$(\exists U)(U\in V \wedge w\in U \wedge (A-z)\cap U = \emptyset)$

ASI CONCLUIMOS QUE:

$(\forall w)(w\in z \Rightarrow (\exists U)(U\in V, w\in U \wedge (A-z)\cap U = \emptyset))$

$(\exists g)(g\in F(z,V) \wedge (\forall x)(x\in z \Rightarrow x\in g(x) \wedge (A-z)\cap g(x) = \emptyset))$

$g_0 \in F(z,V) \wedge (\forall x)(x\in z \Rightarrow x\in g_0(x) \wedge (A-z)\cap g_0(x) = \emptyset)$

$g_0\langle z\rangle \subset V$

$\bigcup_{X\in g_0\langle z\rangle} X \in V$

SE PROBARA QUE: $\bigcup_{X\in g_0\langle z\rangle} X = z$

$s \in \bigcup_{X\in g_0\langle z\rangle} X$

$s\in X_0 \wedge X_0 \in g_0\langle z\rangle$

$s\in X_0 \wedge Y_0\in z \wedge g_0(Y_0) = X_0 \wedge X_0\in V \wedge X_0 \subset A$

$s\in X_0 \wedge (A-z)\cap g_0(Y_0) = \emptyset$

$s\in X_0 \wedge (A-z)\cap X_0 = \emptyset$

$s\notin (A-z)$

$s\in z$

ASI OBTENEMOS $\bigcup_{X\in g_0\langle z\rangle} X \subset z$

$s \in z$

$g_0(s) \in g_0\langle z\rangle \wedge s\in g_0(s)$

$(\exists r)(r\in g_0\langle z\rangle \wedge s\in r)$

$s \in \bigcup_{X\in g_0\langle z\rangle} X$

ASI OBTENEMOS $z \subset \bigcup_{X\in g_0\langle z\rangle} X$

DE DONDE:

$z = \bigcup_{X\in g_0\langle z\rangle} X$

$z \in V$

POR LO TANTO: $(\forall z)(z\in\mathbb{Q} \Rightarrow z\in V)$

$\mathbb{Q} \subset V$

SE PROBARA $V \subset \mathbb{Q}\{A,\mathbb{P}\{A,V\}\}$

Supongamos que: $(\exists x)(x\in V \wedge x\notin \mathbb{Q})$

$z_0\in V \wedge z_0\notin \mathbb{Q}$

$\sim(z_0\subset A \wedge z_0\cap \mathbb{P}\langle\{A-z_0\}\rangle=\emptyset)$

$z_0\subset A \Rightarrow z_0\cap\mathbb{P}\langle\{A-z_0\}\rangle\neq\emptyset$

$V\subset \mathcal{P}(A) \wedge z_0\in V$

$z_0\cap \mathbb{P}\langle\{A-z_0\}\rangle\neq\emptyset$

$w_0\in z_0 \wedge w_0\in\mathbb{P}\langle\{A-z_0\}\rangle$

$(A-z_0; w_0)\in\mathbb{P}$

$(\forall U)(U\in V \wedge w_0\in U \to (A-U)\cap U\neq\emptyset)$

$z_0\in V\wedge w_0\in z_0$

$(A-z_0)\cap z_0\neq\emptyset$ (CONTRADICCION)

Así obtenemos que: $\sim(\exists x)(x\in V\wedge x\notin \mathbb{Q})$

$(\forall x)(x\in V\to x\in\mathbb{Q})$

$V\subset\mathbb{Q}$

Así se ha probado que $V\subset \mathbb{Q}$

Así concluimos que $\mathbb{Q}\{A,\mathbb{P}\{A,V\}\}=V$ es teorema en $\mathcal{T}$

Se probará que: $\mathbb{P}\{A,\mathbb{Q}\{A,W\}\}=W$ es teorema en $\mathcal{C}$

Se probará: $W\subset \mathbb{P}\{A,\mathbb{Q}\{A,W\}\}$

Es decir: $(\forall Y)(W\langle\{Y\}\rangle\subset \mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle)$

O sea: $(\forall Y)(\forall z)((Y;z)\in W\to(Y;z)\in\mathbb{P})$

$(Y;z)\in W \wedge W\subset \mathcal{P}(A)\times A$

$Y\in\mathcal{P}(A)\wedge z\in A\wedge z\in W\langle\{Y\}\rangle$

$Y\subset A\wedge z\in A$

Se probará: $(\forall U)(U\in\mathbb{Q}\wedge z\in U\to Y\cap U\neq\emptyset)$

Supongase: $U_0\in\mathbb{Q}\wedge z\in U_0\wedge Y\cap U_0=\emptyset$

$U_0\in\mathbb{Q}$,

$U_0\subset A\wedge U_0\cap W\langle\{A-U_0\}\rangle=\emptyset$

Además $Y\subset(A-U_0)$

$W\langle\{Y\}\rangle\subset W\langle\{A-U_0\}\rangle$

$U_0\cap W\langle\{Y\}\rangle\subset U_0\cap W\langle\{A-U_0\}\rangle$

$U_0\cap W\langle\{Y\}\rangle\subset\emptyset$

$U_0\cap W\langle\{Y\}\rangle=\emptyset$

$z\notin W\langle\{Y\}\rangle$ (CONTRADICCION)

Así: $(\forall U)(U\in\mathbb{Q}\wedge z\in U\to Y\cap U\neq\emptyset)$

Por lo que $(\forall Y)(\forall z)((Y;z)\in W\to(Y;z)\in\mathbb{P})$

Así $W\subset\mathbb{P}$

Se probará: $(\forall Y)(\mathbb{P}\langle\{Y\}\rangle\subset W\langle\{Y\}\rangle)$

Esto es: $(\forall Y)(\forall z)((Y;z)\in\mathbb{P}\to(Y;z)\in W)$

Supongase: $(Y_0;z_0)\in\mathbb{P}\wedge(Y_0;z_0)\notin W$

$z_0\in\mathbb{P}\langle\{Y_0\}\rangle\wedge z_0\notin W\langle\{Y_0\}\rangle$

$z_0\in A\wedge Y_0\subset A\wedge(\forall U)(U\in\mathbb{Q}\wedge z_0\in U\to Y_0\cap U\neq\emptyset)$

$Y_0\subset W\langle\{Y_0\}\rangle\wedge W\langle\{Y_0\}\rangle\subset A$

Se probará: $A-W\langle\{Y_0\}\rangle\in\mathbb{Q}$

$A-W\langle\{Y_0\}\rangle\subset A$

Además:

$(A-W\langle\{Y_0\}\rangle)\cap W\langle\{Y_0\}\rangle=\emptyset$

$(A-W\langle\{Y_0\}\rangle)\cap W\langle\{W\langle\{Y_0\}\rangle\}\rangle=\emptyset$

$(A-W\langle\{Y_0\}\rangle)\cap W\langle\{A-(A-W\langle\{Y_0\}\rangle)\}\rangle=\emptyset$

$A-W\langle\{Y_0\}\rangle\in\mathbb{Q}$

Además: $z_0\in A-W\langle\{Y_0\}\rangle$

$Y_0\cap(A-W\langle\{Y_0\}\rangle)\neq\emptyset$

$u_0\in Y_0\wedge u_0\in(A-W\langle\{Y_0\}\rangle)$

$u_0\in Y_0\wedge u_0\notin W\langle\{Y_0\}\rangle$

como $Y_0\subset W\langle\{Y_0\}\rangle$

$u_0\in W\langle\{Y_0\}\rangle$ (CONTRADICCION)

Por lo que $\mathbb{P}\{A,\mathbb{Q}\{A,W\}\}\subset W$

Así se ha probado que $\mathbb{P}\{A,\mathbb{Q}\{A,W\}\}=W$ es teorema en $\mathcal{C}$

Así los sistemas de axiomas $\mathbb{R}\{A,V\}$ y $\mathbb{S}\{A,W\}$ son equivalentes.

CONCLUSIONES

Si bien existen objeciones para el formalismo, esencialmente fundadas por la aparente carencia de resultados genuinos, podemos decir que el formalismo mantiene bajo control el objeto de estudio, sin permitir ambigüedades, dejando ver un amplio panorama para su, por decirlo así, interpretación práctica.

Se espera haber dado un marco de referencia general que permita esclarecer en algunos aspectos el comportamiento de la Matemática. Queda clara, en cierta medida, la forma como se establecen sus resultados y de que manera se utilizan estos dentro de la propia Matemática, dejando pendiente algunos mecanismos más sofisticados y el arduo trabajo de manejar y crear teorías particulares, y más aún aplicarlas.

La Topología es materia básica en Geometría y análisis. Es por demás mencionar la importancia de los axiomas, ya que estos determinan en gran medida los resultados de una teoría. La importancia de poseer dos grupos de axiomas para estudiar el campo de la Topología resulta interesante. Aunque esencialmente ambos sistemas de axiomas determinan los mismos resultados, algunos serán más claros dentro de un sistema, o bien algunos podrán descubrirse más facilmente dentro del otro. Las posibles diferencias de trabajar con un sistema o con otro quedan fuera del límite del presente trabajo.

BIBLIOGRAFIA

Elements of Mathematics
Theory of Sets
Bourbaki
Addison-Wesley Publishing Company

Introduction to Mathematical Logic
J. Malitz
Springer-Verlag

Matemáticas en el Mundo Moderno
Selecciones de Scientific American
Editorial Blume

Los Métodos Actuales del Pensamiento
I. M. Bochenski
Ediciones Rialp

Filosofía de la Física
Mario Bunge
Editorial Ariel