

01169  
2



# Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería  
División de Estudios de Postgrado

MODELOS DE ORDEN REDUCIDO

**T E S I S**

para obtener el grado de  
MAESTRO EN INGENIERIA (Control)

Presenta

JOAQUIN COLLADO MOCTEZUMA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

México, D. F.,

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA





UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA  
COORDINACION DE LA SECCION DE INGENIERIA ELECTRICA

MODELOS DE ORDEN REDUCIDO

Tesis que presenta:

JOAQUIN COLLADO MOCTEZUMA

para obtener el grado de Maestro en Ingenierfa (Control)

Créditos asignados a la Tesis 11

JURADO

PRESIDENTE: DR. STANISLAW RACZYNSKI  
VOCAL: DR. GUSTAVO MEDRANO CERDA  
SECRETARIO: DR. ROMEO ORTEGA MARTINEZ  
SUPLENTE: DR. GUILLERMO REBOLLEDO CORTIZO  
SUPLENTE: DR. LUIS ANDRES BUZO DE LA PEÑA

*[Handwritten signatures of Stanislaw Raczynski, Gustavo Medrano Cerda, Romeo Ortega Martinez, Guillermo Rebollo Cortizo, and Luis Andres Buzo de la Peña]*

*[Handwritten signature of Luis Andres Buzo de la Peña]*  
DR. LUIS ANDRES BUZO DE LA PEÑA  
COORDINADOR DE LA SECCION

*[Handwritten signature of Gabriela Moeller de Jalife]*  
M EN I GABRIELA MOELLER DE JALIFE  
SECRETARIA ACADEMICA

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

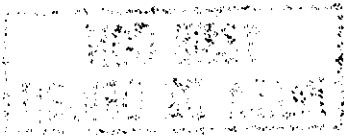
NO NET  
ESTADO DE ALABAMA

## RESUMEN.

En la presente Tesis de Maestría, se desarrolló un nuevo método para seleccionar los modos preservados en un modelo de orden reducido; éste método es aplicable a modelos determinísticos, de parámetros concentrados, lineales e invariantes en el tiempo. Esta selección de modos preservados se hace reteniendo aquellos polos que más contribuyan, en energía, a la respuesta a impulso del sistema. Se mostró que para el caso de usar el modelo reducido para diseñar un sistema realimentado, es importante preservar el orden relativo, la diferencia de polos y cercos de transmisión. Se hizo una generalización al caso multivariable. Se desarrollaron o modificaron programas para facilitar el cálculo de los procedimientos involucrados.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

I am writing to you to inform you that I have been notified that your application for a position at the University of North Carolina at Chapel Hill has been reviewed. We are pleased to inform you that you have been selected for an interview. The interview will be held on **November 20, 2003** at **10:00 AM** in the **1100 East Tower**. The interview will last approximately **15 minutes**. We would like to see you at the interview. Please bring a copy of your **resume** and a copy of your **transcript**. If you have any questions, please contact me at **734-4628**. We look forward to meeting with you.



**AGRADECIMIENTOS.**

*Deseo agradecer al Dr. Gustavo A. Medrano C. por su atinada y valiosa cooperaci3n al dirigir la presente investigaci3n. Por su apoyo financiero, agradezco a las siguientes instituciones: Banco de M3xico S. A. y al CONACYT; y al Instituto de Investigaciones El3ctricas por haberme permitido el estudiar esta Maestría.*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..

... ..  
... ..  
... ..  
... ..

*"Las mujeres inspiran grandes  
proyectos, pero casi siempre  
impiden realizarlos"*

*- Oscar Wilde -*

*A Betty:  
"Inspiró y permitió  
que fuera posible"*

*A Elisa, nuestra hijita  
"Quien sin saberlo, tuvo que  
sacrificar mucho"*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
LIBRARY

1968

1968

310 1231  
1 12 1968

INDICE.

8a		
CAPITULO 1.	Introducción	1
CAPITULO 2.	Formalización del problema y caracterización de los métodos	5
2.1	Descripción de modelos de orden reducido	5
2.2	Características deseables de los métodos	8
2.3	Métodos Agregados vs. No-Agregados	12
CAPITULO 3.	Algunas propiedades de Sistemas Lineales	13
3.1	Resultados sobre el orden relativo	13
3.2	Relación del Corolario 3.2 con resultados previos	17
3.3	Sistemas conectados en cascada	18
CAPITULO 4.	Caso Escalar	20
4.1	Generalidades	20
4.2	Método Básico	22
4.3	Método General	24
4.4	Ejemplos	25
4.5	Comentarios	41
CAPITULO 5.	Caso Multivariable	43
5.1	Método I	43
5.2	Ejemplo del método I	45
5.3	Método II	52
5.4	Ejemplos del Método II	52
5.5	Comentarios	65
CAPITULO 6.	Discusión	66
6.1	Conclusiones	66
6.2	Trabajo Futuro	67

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

<b>APENDICE A. Descripción de los métodos de</b>	
Chen y Gutman	68
A.1 Método de Chen	68
A.2 Método de Gutman	69
<b>APENDICE B. Listados de los programas.</b>	71
B.1 PARSEVAL. Fracciones Parciales	72
B.2 FACTO. Factorización prima	84
B.3 SMILLAN.	88
B.4 SMITH	92
B.5 RUTINAS	101
<b>REFERENCIAS.</b>	111

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

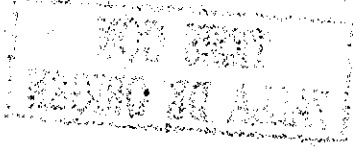
RECIBIDO  
1980

## INTRODUCCION

El tipo de modelos que se trataran en el presente trabajo son determinísticos, de parámetros concentrados (aquellos que pueden representarse mediante ecuaciones diferenciales totales), lineales e invariantes en el tiempo. El orden de tales sistemas será igual a la dimensión del espacio de estados.

Considerables esfuerzos son dedicados para la obtención de modelos precisos, es decir, de orden alto; por qué entonces, habría que reducirlo después? Algunas de las razones para hacer esto serian:

- Simplificar la comprensión del sistema. Es mucho más sencillo visualizar relaciones entre variables de un sistema de tercer o cuarto orden, que en uno de vigésimo.
- Reducir los requerimientos computacionales. Ya sea para Análisis, Simulación o diseño de un controlador, es mucho más sencillo hacerlo para un sistema de orden reducido, que para uno de orden alto.
- Reducir el costo de un controlador. En el caso de que usemos el modelo de orden reducido para diseñar un controlador;



puesto que, en la mayor parte de los métodos para síntesis de reguladores, el orden del modelo que se usó determina la complejidad del controlador y por ende su costo.

- Hacer factible el control Jerárquico en un sistema interconectado. En este tipo de Control, a mayor Jerarquía del controlador, menor la precisión (orden) requerida en el modelo del sistema a controlar; por lo que es necesario contar con un modelo de orden reducido para los controladores de alta jerarquía.

No obstante que el modelo sea capaz de predecir con razonable precisión la respuesta a ciertos estímulos, no deberá olvidarse que:

EL PROCESO DE REDUCCION IMPLICA CIERTA PERDIDA DE INFORMACION, QUE RESULTA EN ALGUNA DESVIACION ENTRE LO PREDICHO POR EL MODELO DE ORDEN REDUCIDO Y LA RESPUESTA ACTUAL DEL SISTEMA.

Existen dos grandes tipos de métodos para la obtención de modelos de orden reducido: 1) Métodos Agregados, y 2) Métodos No-Agregados; además por la naturaleza de los modelos que usan, pueden ser métodos en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia.

Métodos Agregados son aquellos que preservan algunos de los "modos" o polos del sistema original; entre los métodos típicos

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

NO SE  
DEBE EN LUGAR

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

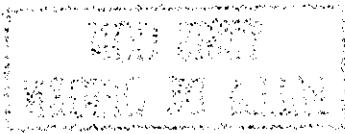
están el propuesto por M. Apki [11], el de Gould [16], y el de E. Davison [10].

Métodos No-Agregados son aquellos que en general no preservan ningún "modo" del sistema original; algunos métodos representativos son: el de Chen [8] que se basa en fracciones continuadas, el de Hutton [19] que se basa en el arreglo de Routh.

El presente trabajo propone un nuevo método para seleccionar los "modos" preservados en el modelo de orden reducido y se basa en representaciones en el dominio de la frecuencia. Originalmente se propone, este método agregado, para sistemas escalares, una entrada una salida; posteriormente se hace una generalización al caso multivariable.

En el capítulo 2 se presenta formalmente el problema, así como parámetros para medir la bondad del modelo reducido. En el capítulo 3 se exponen algunas propiedades de los sistemas lineales, que serán usadas de una u otra forma en el desarrollo de los métodos. En el capítulo 4 se desarrolla el método para el caso escalar, se presentan algunos ejemplos así como una comparación con algunos de los métodos ya existentes. En el capítulo 5 se presenta una generalización al caso multivariable, se presentan varios ejemplos, y en uno de ellos se compara con un método heurístico. En el capítulo 6 se muestran las conclusiones y se enumeran problemas abiertos detectados durante el transcurso de la presente investigación. Finalmente aparecen dos apéndices, el primero se exponen brevemente dos métodos para la





obtención de modelos de orden reducido:

- a) Método de Chen
- b) Método de Gutman

en el segundo aparecen listados de programa para el cálculo de:

- a) Fracciones parciales de  $h(s) * h(-s)$   
 $h(s)$  racional estrictamente propia
- b) Forma de Smith de una matriz polinomial
- c) Forma de Smith-McMillan de una matriz racional
- d) Factorización relativamente prima por la derecha de una matriz de transferencia propia.

## CAPITULO 2.

2.1 BREVE DESCRIPCION DE MODELOS DE ORDEN REDUCIDO. Los modelos tratados en este trabajo son lineales, invariantes en el tiempo y de parámetros concentrados; estos sistemas son frecuentemente representados mediante el siguiente modelo en el dominio del tiempo:

$$\dot{x} = A x + B u \quad (1)$$

$$y = C x + D u \quad (2)$$

en donde, A, B, C y D son de dimensiones (nxn), (nxm), (pxn) y (pxm) respectivamente. El sistema (1)-(2) es equivalente al siguiente modelo en el dominio de la frecuencia.

$$H(s) = C (Is - A)^{-1} B + D \quad (3)$$

Si el modelo (1)-(2) es irreducible, es decir completamente controlable y completamente observable; un modelo de orden reducido en el dominio del tiempo será:

$$z = A_r z + B_r u \quad (4)$$

$$y = C_r z + D_r u \quad (5)$$

1 Paréntesis cuadrados [ ] son usados para matrices racionales, los redondos ( ) son usados para matrices polinomiales.

en donde  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  y  $D_r$  son de dimensiones  $(r \times r)$ ,  $(r \times m)$ ,  $(p \times r)$  y  $(p \times m)$  respectivamente. Obviamente  $r < n$ , o aún  $r \ll n$ . En caso de que el sistema (1)-(2) no fuera irreducible, existiría una reducción trivial, la parte no-controlable y/o la parte no-controlable. La forma de obtener el sistema reducido  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  a partir del sistema original  $(A, B, C, D)$  es lo que constituye el método.

2.1.1 Métodos Agregados en el dominio del Tiempo. Describiremos brevemente el método propuesto por Aoki [1]. Si hacemos  $z = Hx$ ,  $H$  de rango completo y de dimensiones  $(r \times n)$ , entonces

$$A_r H = H A \quad (7)$$

$$B_r = H B \quad (8)$$

en donde:  $A_r = H A H^{-1} = H A H' (H H')^{-1}$ ,  $(\prime)$  significa transpuesta, o sea estamos usando la inversa generalizada en el sentido de Moore-Penrose.

$$H^{-1} = H' (H H')^{-1} \quad (9)$$

Puede demostrarse [1] que la matriz  $A_r$  retiene  $r$  valores característicos de la matriz  $A$ .

2.1.2 Métodos Agregados en el dominio de la Frecuencia. Considérese primero el caso escalar, sea el sistema irreducible  $(A, b, c, d)$  cuya función de transferencia es:

$$h(s) = c (Is - A)^{-1} b + d = \frac{K q(s)}{p(s)} \quad (10)$$

$p(s)$  y  $q(s)$  son mónicos y primos, expresemos  $p(s)$  como:

$$p(s) = (s - P_1) (s - P_2) \dots (s - P_n) \quad (11)$$

Si queremos un modelo agregado de orden reducido de orden  $r < n$ , seleccionemos  $r$  polos de (10) y de alguna forma se simplifica  $q(s)$ , no necesariamente se mantiene la diferencia de polos - ceros, ni tampoco se deben preservar algunos ceros.

El problema de obtener un modelo de orden reducido en el dominio de la frecuencia puede postularse como:

**PROBLEMA ESCALAR.** Dada la función de transferencia (10), encontrar  $h_r(s)$

$$h_r(s) = \frac{K_r q_r(s)}{p_r(s)} \quad (12)$$

tal que  $p_r(s)$  divide a  $p(s)$  y  $\text{grado}\{p_r(s)\} \geq \text{grado}\{q_r(s)\}$ , se puede imponer otro tipo de restricciones, pero eso ya depende del método en particular que se esté usando.

El caso Multivariable es similar pero con algunas complicaciones, sea el sistema multivariable irreducible  $(A, B, C, D)$  cuya matriz de transferencia es:

$$H(s) = C (I_s - A)^{-1} B + D = R(s) P^{-1}(s) \quad (13)$$

donde  $R(s)$  y  $P(s)$  son matrices polinomiales de dimensiones  $(p \times m)$  y  $(m \times m)$  respectivamente, el determinante de  $P(s)$  es diferente de cero para casi todo valor de "s" en el campo de los números complejos, además las matrices  $R(s)$  y  $P(s)$  son relativamente primas por la derecha, y  $P(s)$  matriz reducida por columnas.

<sup>2</sup> Reducida por columnas equivale a propia por columnas [28].

Ver Rosenbrock [26], Callier y Desoer [7] o Wolovich [28] para una descripción más detallada de este tipo de representación.

Ahora podremos establecer formalmente el problema de encontrar un modelo de orden reducido en el dominio de la frecuencia.

**PROBLEMA MULTIVARIABLE.** Dada la matriz de transferencia en (13), encontrar  $Hr[s]$

$$Hr[s] = Qr(s) Pr^{-1}(s) \quad (14)$$

tal que  $Qr(s)$  y  $Pr(s)$  son matrices polinomiales relativamente primas por la derecha,  $P(s)$  reducida por columnas y  $\text{Det}\{Pr(s)\}$  divide al  $\text{Det}\{P(s)\}$ , además  $Hr[s]$  es propia.

**2.2 CARACTERISTICAS DESEABLES DE LOS METODOS.** A continuación enumeraremos y describiremos ciertas propiedades que deberán cumplir los métodos de reducción, dependiendo del uso que se le dará al modelo de orden reducido obtenido.

### 2.2.1 Características Deseables para Análisis [4].

a) Estabilidad. La conservación de la propiedad de estabilidad es fundamental en la obtención de un modelo reducido, es decir, un modelo estable deberá reducirse en un modelo estable, y un modelo inestable nos deberá producir un modelo reducido inestable.

b) Conservación de la Ganancia Estática. La conservación de la ganancia estática es necesaria en un buen modelo

reducido, ya que nos permite asegurar que el error entre la respuesta del sistema y la respuesta del modelo reducido tienda a cero, cuando la entrada tiende a un valor constante.

c) Buena predicción a diferentes entradas. En general no es suficiente que un método conduzca a un modelo de orden reducido óptimo para una entrada particular, puesto que el comportamiento del modelo de orden reducido para otra entrada puede ser muy mala; por éstas razones frecuentemente se usa el diagrama de Nyquist para comparar el modelo original vs. el modelo reducido.

d) Aplicabilidad a Sistemas Multivariables. Es deseable que las características de un método de reducción escalar, se obtuvieran al aplicar una extensión del método directamente al caso multivariable.

e) Continuidad del modelo reducido. Quiere decir que si el modelo original es de orden "n", y el modelo de orden reducido es de orden "m"; ahora si  $m \rightarrow n$ , entonces  $h[s] \rightarrow h[s]$  monotónicamente, es decir la aproximación de orden  $(m + 1)$  es mejor que la aproximación de orden  $(m)$ .

f) Volumen de cálculo. Es deseable que además de las características anteriores el método fuera sencillo de implementar en una computadora; la solución por computadora de un método en particular puede tener una

resolución difícil o poco robusta desde el punto de vista numérico.

**2.2.2 Características Deseables para Síntesis.** Antes de enunciar esta última característica, introduciremos algunos conceptos:

**DEFINICIÓN 2.1** El orden relativo, para el caso escalar, está definido para funciones de transferencia racionales como [6]:

$$O = \text{orden relativo} = \text{Grado (numerador)} - \text{Grado (denominador)}$$

Hagamos una generalización al caso multivariable. Sea  $T(s)$  una matriz racional propia, sea la forma de Smith-McMillan de  $T(s)$ , ver Rosenbrock [26] y Wolovich [28], la siguiente:

$$SM(T(s)) = \text{diag} \{e_1(s)/f_1(s), \dots, e_r(s)/f_r(s), 0, \dots, 0\} \quad (15)$$

definamos los siguientes polinomios:

$$\text{Num}(s) = e_1(s) e_2(s) \dots e_r(s) \quad (16)$$

$$\text{Den}(s) = f_1(s) f_2(s) \dots f_r(s) \quad (17)$$

Las raíces de  $\text{Num}(s)$  son llamados Ceros de Transmisión del sistema multivariable, y juegan un papel muy similar a los ceros en el caso escalar. Las raíces de  $\text{Den}(s)$  son los polos del sistema. En base a éstos resultados, definase el Orden relativo multivariable como:

$$O = \text{Orden Relativo Multivar.} = \text{Grado (Den}(s)) - \text{Grado (Num}(s))$$

$Sm(X(s))$  Significa la forma de Smith-McMillan de  $X(s)$ .

El orden relativo es un parámetro muy importante en los sistemas realimentados, debido a los siguientes resultados:

a) Una de las propiedades del lugar geométrico positivo (Root Locus), es el número de asintotas es igual al orden relativo tanto para el caso escalar como para el multivariable.

b) La otra es que los polos del sistema realimentado tienden a los ceros de transmisión del sistema en malla abierta. Ver Davison y Wang [11] y [12].

Aquí introduciremos una propiedad que algunos métodos lo manejan implícitamente, pero no lo habían propuesto como objetivo del método, ni analizaron las consecuencias de este hecho; esta propiedad es:

g) Preservar el orden relativo. Esta condición se impone debido a que si usamos el modelo de orden reducido para diseñar un controlador, éste se conectará muy probablemente como la muestra la fig. 2.1

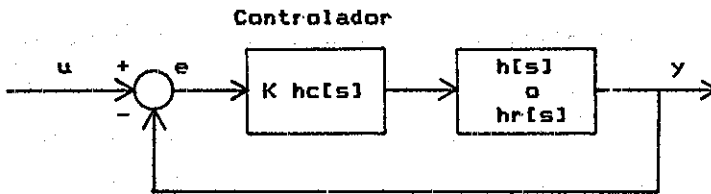


Fig. 2.1 Sistema con un compensador y realimentación unitaria.

4 En la siguiente referencia se puede encontrar una generalización del lugar geométrico multivariable.

A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems. Postlethwaite, I y MacFarlane, A. G. J. Springer-Verlag. 1979.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



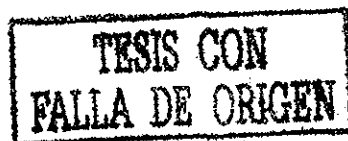
Debido que al conectar un sistema como en la fig 2.1, el orden relativo es un parámetro importante, es preciso preservarlo en caso de usar el modelo reducido para el diseño de sistemas realimentados.

2.3 METODOS AGREGADOS VS. METODOS NO-AGREGADOS. Mostraremos en la Tabla 2.1 algunas de las ventajas y desventajas en general de las dos clases de métodos.

	Características	Agregados	No-Agregados
1	Estabilidad	Si	En Gral. No
2	Complejidad	Alta	Baja
3	Aplicabilidad a Multivariabes	tiempo Si frec. Algunos	No es exact. el mismo método
4	Orden Relativo	En Gral. No	En Gral. No
5	Aplicabilidad a un proceso real	Si	No

TABLA 2.1 Métodos Agregados vs. No-Agregados.

En la característica 5 de la tabla 2.1, el conservar algunos modos y no introducir nuevos, nos permite en el caso de efectuar una realimentación de estados "medir" estas variables en el sistema original; este viene a ser un problema para los métodos No-Agregados puesto que en caso de tener una realimentación de estados, ésta no podrá conectarse en el sistema real, ver Gould [16]. Otra característica ventajosa de los métodos Agregados, es que las variables de estado preservadas tienen una interpretación física.



### CAPITULO 3.

En este capítulo describiremos solo algunas de las propiedades usadas en los desarrollos ulteriores, y que no existen en la literatura, o que si existen no están en la forma presentada aquí.

**3.1 RESULTADOS SOBRE EL ORDEN RELATIVO.** Sea un sistema multivariable irreducible en el dominio el tiempo:

$$\dot{x} = A x + B u \quad (1a)$$

$$y = C x \quad (1b)$$

con "m" entradas, "p" salidas y "n" estados, generalmente "n" es mayor que "m" o "p"; note que en este modelo hicimos igual a cero a la matriz D del capítulo anterior (este es el caso mas usualmente encontrado en la práctica). Estamos interesados en saber cuantos ceros tiene cada uno de los elementos de la matriz de transferencia ?

$$T(s) = C (Is - A)^{-1} B \quad (2)$$

T(s) puede expresarse como:

$$T(s) = \frac{C \text{ adj } (Is - A) B}{\text{Det } \{(Is - A)\}} \quad (3)$$

La adj (Is - A) puede expresarse como Gantmacher [14]:

$$\text{adj } (Is - A) = I_n s^{(n-1)} + E_1 s^{(n-2)} + \dots + E_{n-1} \quad (4)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

donde:

$$E1 = A - P1 In, \quad In: \text{matriz identidad de orden } n$$

$$E2 = A^2 - P1 A - P2 In, \text{ etc.}$$

$$\text{Det } (Is - A) = s^n - P1 s^{(n-1)} - P2 s^{(n-2)} - \dots - Pn \quad (5)$$

en general:

$$Ek = A^k - P1 A^{(k-1)} - \dots - Pk In, \quad k = 1, \dots, (n-1) \quad (6)$$

substituyendo (7) en (6), nos queda

$$T[s] = \frac{C \{In s^{(n-1)} + \dots + En-1\} B}{\text{Det } (Is - A)} \quad (7)$$

basandonos en (7) se prueba el siguiente:

**TEOREMA 3.1.** El elemento  $(i,j)$  de  $T[s]$  tiene  $(n-1)$  ceros si y solo si el elemento  $(i,j)$  de  $CB \neq 0$ .

Sea un sistema escalar irreducible  $(A,b,c,0)$ , los ceros de los elementos (en este caso solo hay un elemento) coincide con los ceros de transmisión. Sea la funcion de transferencia  $h[s]$

$$h[s] = \frac{K q(s)}{p(s)} \quad (8)$$

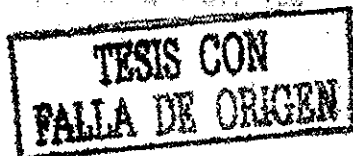
el teorema 3.1 dice que  $\text{Grado } \{q(s)\} = n - 1 \iff cb \neq 0$ .

Probaremos que éste es el caso más frecuente en un sistema  $(A,b,c,0)$  irreducible.

**Definicion 3.1 [29]** Sea  $G^n = [G1, G2, \dots, Gn]$  un elemento de  $R^n$  y considere los polinomios  $F_i(L1, L2, \dots, Ln)$  con coeficientes en  $R$ . Una **VARIEDAD**  $V \subset R^n$  se define como el conjunto de las raíces comunes de un número finito de polinomios  $F_1, \dots, F_k$ , es decir:

$$V = \{ G : F_i(G1, G2, \dots, Gn) = 0, \quad i = 1, \dots, k \} \quad (9)$$

$V$  es propia si  $V \neq R^n$  y no trivial si  $V \neq \emptyset$ .



Una propiedad  $Q$  es una función  $Q: R^n \rightarrow \{0,1\}$ , donde  $Q(G) = 1$  (o  $0$ ) significa la propiedad se cumple (falla) en  $G$ .  
 Sea  $V$  una variedad propia,  $Q$  es genérica relativa a  $V$  si  $Q(G) = 0$  solo si  $G$  pertenece a  $V$ ; y decimos que  $Q$  es GENERICA si existe la variedad  $V$  propia.

**Definición 3.2 [29]** Una propiedad  $Q$  se dice que está BIEN-CONDICIONADA (well-posed) en " $p$ " si  $Q$  se cumple en una vecindad de " $p$ " en  $R^n$ .

Para concluir diremos que el complemento del conjunto de puntos " $p$ " donde una propiedad es genérica y bien-condicionada, tiene una medida de Lebesgue cero; es decir, que la propiedad se cumple casi en cualquier parte.

**Definición 3.3 [30, pag. 334, vol. 1]** Polinomios en varias Variables. Un polinomio de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sobre el campo de los números reales es una función de la forma:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{N_1, N_2, \dots, N_n} A_{N_1 N_2 \dots N_n} X_1^{N_1} \dots X_n^{N_n} \quad (10)$$

donde la sumatoria anterior es finita.

**TEOREMA 3.2.** Sea un sistema lineal, invariante en el tiempo, irreducible y escalar  $(A, b, c, 0)$ , cuya función de transferencia es estrictamente propia

$$h(s) = c (Is - A)^{-1} b = \frac{K q(s)}{p(s)} \quad (11)$$

donde  $n = \text{Grado} \{ \text{Det} (Is - A) \} = \text{Grado} \{ p(s) \}$

entonces  $\text{Grado} \{ q(s) \} = n - 1$  es una propiedad Genérica y bien-condicionada.

**Prueba:** El Teorema 3.1 nos dice que  $\text{Grado} \{ q(s) \} = n - 1 \iff$



Si  $cb \neq 0$ , en ecuaciones puede escribirse

$$q(s) = cb s^{n-1} + \dots + q_0$$

puesto que  $n$  es finito  $cb$  es un polinomio en  $2n$

variables, defínase  $V = \{Z : cb = 0\}$ ,  $Z \in R^{2n}$

bastará con mostrar que  $V$  es propia en  $R^{2n}$

obviamente  $cb$  es un polinomio en  $2n$  variables

Existe  $c_1, b_1$  tal que  $c_1 b_1 \neq 0 \implies V \neq R^{2n}$

Existen  $c_2, b_2$  tal que  $c_2 b_2 = 0 \implies V$  no es trivial

$\implies V$  es propia

Por otro lado  $cb$  varía continuamente, por lo que existe

una vecindad alrededor de  $c_1, b_1$  tal que  $cb \neq 0$ ;  $\implies$  que

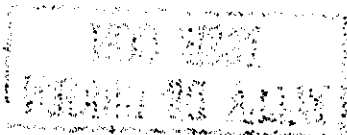
la propiedad es bien-condicionada QED

Ciertos comentarios son pertinentes a cerca del resultado anterior, note que estamos permitiendo variar los parámetros de  $b$  y  $c$  arbitrariamente, y si esto sucede el resultado es correcto.

Existen modelos en los que aparecen relaciones estructurales entre ciertas de sus variables de estado, por ejemplo, que alguna sea la derivada de otra; lo que implica que los parámetros de  $b$  y  $c$  no varíen libremente en  $R^{2n}$ , en éste caso no necesariamente se cumple la relación que predice el teorema 3.2.

Resumiendo, existen casos en los cuales  $b$  y  $c$  pueden tomar valores en subespacios ortogonales, lo que origina que  $cb = 0$  sin importar el conjunto de parámetros libres restantes.

**Corolario 3.2** Sea un sistema multivariable irreducible  $(A, B, C, 0)$ , cuya matriz de transferencia es:



$$T[s] = C (I_s - A)^{-1} B$$

El Grado del numerador del elemento  $(i,j)$  de  $T[s]$  es uno menos que el Grado de su denominador es una propiedad Genérica y bien-condicionada.

**3.2 RELACION DEL COROLARIO 3.2 CON RESULTADOS PREVIOS.** En esta sección encontraremos la relación del corolario 3.2, o sea, el orden relativo de cada uno de los elementos de una matriz de transferencia igual a 1, con el orden relativo multivariable para el caso de sistemas cuadrados. Para hacer esto nos basaremos en un Teorema de Kwakernaak y Sivan [22, pag. 39], el cual reproducimos a continuación.

**Teorema K&S.** Considere el sistema irreducible

$$\dot{x} = A x + B u \quad (12)$$

$$y = C x \quad (13)$$

donde  $\dim(x) = n$  y  $\dim(u) = \dim(y) = m$  Sea  $H[s]$  la matriz de transferencia, sea:

$$\text{Det}(H[s]) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (14)$$

donde  $p(s) = \text{Det}(I_s - A)$ , entonces Grado  $(q(s))$  es menor o igual a  $(n - m)$ .

Sea el elemento  $(i,j)$  de  $H[s]$  igual a:

$$h_{ij}[s] = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)} \quad (15)$$

tal que: Grado  $(n_{ij}(s)) + 1 = \text{Grado}(d_{ij}(s))$ .

Encontremos ahora la relación con este Teorema. Existe una factorización de  $H[s]$  de la forma [28]:

$$H(s) = R(s) * P^{-1}(s) \quad (16)$$

$R(s)$  y  $P(s)$  Matrices polinomiales relativamente primas por la derecha,  $P(s)$  triangular superior derecha y reducida por columnas de la forma:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_1(s) & * & \dots & * \\ 0 & P_2(s) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & & P_m(s) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{Det} (I s - A) = P_1(s) * P_2(s) * \dots * P_m(s)$$

$$\text{Sea } N_i = \text{Grado} ( P_i(s) )$$

$$\text{Grado} ( \text{Det} (I s - A) ) = n = N_1 + N_2 + \dots + N_m$$

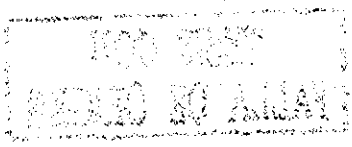
$$\text{Grado} (R_i(s)) = \text{Max Grado} ( \text{columna } i \text{ de } R(s) ) = N_i - 1$$

$$\Rightarrow \text{Grado} ( \text{Det}(R(s)) ) \leq (N_1 - 1) + \dots + (N_m - 1) = n - m$$

Usando los mismos argumentos que en la prueba del Teorema 3.2, puede probarse que para el caso de que los elementos de  $T(s)$  tengan orden relativo igual a uno  $\Rightarrow$  que el hecho de que existan  $(n - m)$  ceros de transmisión del sistema multivariable es una propiedad genérica y bien-condicionada; expresado en otras palabras, si el orden relativo de cada uno de los elementos de  $T(s)$  es uno, lo más probable es que el orden relativo multivariable sea "m".

Para el caso no cuadrado  $m \neq p$ , lo más probable es que el sistema no tenga ceros de transmisión finitos, o sea que su orden relativo multivariable es "n". Ver [26] y [28].

3.3 SISTEMAS EN CASCADA. Conectemos dos sistemas en cascada como lo muestra la fig 3.1; estamos interesados en saber cuantos



ceros de transmisión existen en el sistema interconectado.

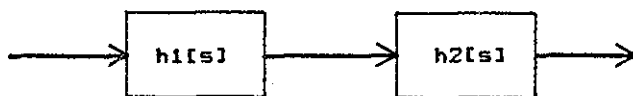
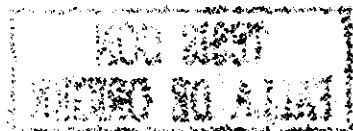


Fig 3.1 Sistemas interconectados en cascada.

Basándonos en el teorema 3.2, y suponiendo que  $h_1[s]$  y  $h_2[s]$  tienen  $n_1$  y  $n_2$  polos respectivamente, entonces  $h_1[s]$  tendrá  $(n_1 - 1)$  ceros y  $h_2[s]$  tendrá  $(n_2 - 1)$  ceros. Sea  $n = n_1 + n_2$ , el sistema interconectado tendrá  $n - 2$  ceros. El resultado es fácilmente extendible a cualquier número de subsistemas. El caso que anteriormente comentamos de que exista una variable de estado que sea la derivada de otra, puede interpretarse como dos subsistemas interconectados en cascada, con uno de los subsistemas siendo un integrador. Esta es una de las razones por la cual existen sistemas con orden relativo mayor a uno.





## CAPITULO 4.

4.1 GENERALIDADES. Desarrollemos primero algunas características del sistema, supondremos que la función de transferencia es estrictamente propia y estable

$$h(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (1)$$

lo que significa que las raíces  $P_i$  de  $p(s)$  tienen parte real negativa. Asociada a la función de transferencia está la respuesta a impulso del sistema

$$h(t) = \text{Laplace}^{-1} \{h(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} h(s) \exp(st) ds \quad (2)$$

donde  $c$  es la abscisa de convergencia, y para este caso puede tomarse igual a cero por ser el sistema estable.

La energía contenida en la respuesta a impulso " $E_h$ " está dada por:

$$E_h = \int_0^{\infty} h^2(t) dt \quad (3)$$

además la energía es finita ya que hemos restringido a  $h(s)$  a que sea estable.

Existen programas que calculan  $E_h$  [3, pag. 139]; pero nosotros estamos interesados en asociar parte de la energía total a cada uno de los polos del sistema (raíces de  $p(s)$ ), y no en el valor total de la energía; queremos saber cuál es la

contribución de Energía de cada polo a la Energía total  $E_h$ .

Expresemos (3) como:

$$E_h = \int_0^{\infty} h(t) \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} h(s) \exp(st) ds \right] dt \quad (4)$$

intercambiando el orden de integración,

$$E_h = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} h(s) \int_0^{\infty} h(t) \exp(st) dt ds \quad (5)$$

recordando la definición de Transformada de Laplace,

$$h[-s] = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-st) dt \quad (6)$$

substituyendo en (5), y haciendo  $c = 0$  debido a que  $h(s)$  es estable,

$$E_h = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{j\omega} h(s) h[-s] ds \quad (7)$$

aplicando el teorema del residuo de Cauchy, tendremos

$$E_h = \frac{1}{2\pi j} \sum^n \text{residuos\# de } h(s) h[-s] \quad (8)$$

donde  $\text{residuos\#}$ , son los residuos tomados unicamente en los polos de  $p(s)$ , es decir aquellos con parte real negativa de  $h(s) h[-s]$ ; expresándolo de otra forma

$$E_h = \sum_{P_i}^n \text{Residuos\# } \{ h(s) h[-s] \} \quad (9)$$

donde  $P_i$  es tal que  $p(P_i) = 0$ ; expandiendo  $h(s)$

$$h(s) = \frac{K (s+Z_1) \dots (s+Z_m)}{(s-P_1) \dots (s-P_n)} \quad n > m \quad (10)$$

además  $\text{Re}(P_i) < 0$  para  $i = 1, \dots, n$ ;

sea " $n$ " el número de polos distintos, " $n_i$ " la multiplicidad del polo  $i$ , la expansión en fracciones parciales de  $h(s)h[-s]$

queda:

$$h[s] h[-s] = \sum_{j=1}^{n'} \sum_{r=0}^{n_i-1} \frac{A_i, (n_i-r)}{(s - P_i)^{n_i-r}} - \sum_{j=1}^{n'} \sum_{r=0}^{n_i-1} \frac{A_i, (n_i-r)}{(s + P_i)^{n_i-r}} \quad (11)$$

de donde,

$$E_h = \text{residuos# } \{h[s] h[-s]\} = \sum_i \sum_r A_i, (n_i-r) \quad (12)$$

En este punto agregaremos la restricción de que  $h[s]$  deberá ser de fase mínima, esto se debe a que al efectuar  $h[s]h[-s]$ , aparecen todos los polos y ceros (de  $h[s]$ ) simétricos con respecto al eje imaginario, y en el caso de que  $h[s]$  no sea de fase mínima podría haber hasta cancelaciones en el producto mencionado. La fórmula general para evaluar  $A_i, r$  es:

$$A_i, (n_i-r) = \left. \frac{1}{r!} \frac{d^r}{ds^r} \left( h[s] h[-s] (s - P_i)^{n_i} \right) \right|_{s = P_i} \quad (13)$$

Las fórmulas (10), (12) y (13) nos permiten calcular explícitamente la Energía asociada a cada polo de la respuesta a impulso. El Apéndice B muestra un programa de computadora que calcula  $E_h$  como una suma de  $A_i, r$ , tal como se expresa en (12).

4.2 EL METODO BASICO. En este punto, se antoja lógico pensar que seleccionaremos los polos del modelo reducido a aquellos que más contribuyan en energía a la respuesta a impulso, es decir, preservaremos aquellos polos cuyos  $A_i, r$  asociados sean mayores en valor absoluto. Si imponemos la restricción de preservar el orden relativo del sistema original, tendremos ya una familia de métodos para la obtención de modelos de orden reducido; decimos que es una familia puesto que no hemos dicho nada, hasta el momento, a cerca de los ceros del sistema; únicamente tenemos fijo el número de ceros del modelo reducido.

La restricción de preservar el orden relativo falla en el caso de que en (10)  $m = 0$ , es decir que el sistema no tenga polos finitos; el Teorema 3.2 nos asegura que es una situación poco probable; aún así, en este caso la reducción se haría seleccionando los polos de la misma forma que en el caso anterior, pero ahora los polos preservados coincidirán con los polos dominantes.

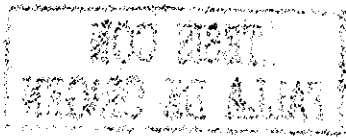
Como resultado del desarrollo en la sección 4.1, en particular la ecuación (12), proponemos una nueva definición: **POLOS MAS ENERGETICOS: SON AQUELLOS CUYOS  $A_{i,r}$  CORRESPONDIENTES EN (12) SON MAYORES EN VALOR ABSOLUTO.**

Sea  $r$  el orden del modelo reducido, uno de los métodos que proponemos será eliminar  $n - r$  polos de la siguiente forma. Conocemos  $n - r$  polos que se eliminarán en el modelo de orden reducido, si eliminamos los  $n - r$  polos más "ceranos" a los polos eliminados tendremos ya un método. Ahora basta con definir qué significa más "ceranos", consideremos la norma Euclidiana de la diferencia (polo-cero) en el campo de los números complejos de dimensión uno como medida de que tan cercanos están un polo-cero; por supuesto debe prevalecer el hecho de que los polinomios en el modelo reducido deberán tener coeficientes reales.

El modelo de orden reducido será:

$$h_r(s) = \frac{K' (s + Z_1) (s + Z_2) \dots (s + Z_{m+r-n})}{(s + P_1) (s + P_2) \dots (s + P_r)} \quad (14)$$

para preservar la ganancia estática en el modelo reducido, escógase  $K'$  tal que:  $h[0] = hr[0]$ .



4.3 METODO GENERAL. Al momento, impusimos la restricci3n de que  $h[s]$  fuera estable y de fase minima, en caso de no serlo, factorizemos  $h[s]$  como:

$$h[s] = h_e[s] h_i[s] \quad (15)$$

donde polos y ceros de  $h_e[s]$  tienen parte real negativa, y  $h_i[s]$  tiene polos y ceros con parte real positiva, es decir

$$h[s] = \frac{K (s+Z_1) \dots (s+Z_{m_1}) (s+Z_{m_1+1}) \dots (s+Z_m)}{(s+P_1) \dots (s+P_{n_1}) (s+P_{n_1+1}) \dots (s+P_n)} \quad (16)$$

de donde  $\text{Re}\{Z_i\} < 0$   $i = 1, \dots, m_1$ ;  $\text{Re}\{P_i\} < 0$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ ; y,  $\text{Re}\{Z_i\} \geq 0$  para  $i = m_1+1, \dots, m$ ;  $\text{Re}\{P_i\} \geq 0$  para  $i = n_1+1, \dots, n$ ; podremos reconocer a  $h_e[s]$  y  $h_i[s]$  como:

$$h_e[s] = \frac{K (s+Z_1) \dots (s+Z_{m_1})}{(s+P_1) \dots (s+P_{n_1})} \quad (17)$$

$$h_i[s] = \frac{(s+Z_{m_1+1}) \dots (s+Z_m)}{(s+P_{n_1+1}) \dots (s+P_n)} \quad (18)$$

Obviamente  $h_e[s]$  y  $h_i[s]$  no tienen que ser propias ambas, si ahora reducimos sobre  $h_e[s]$ , hacemos que el modelo reducido sea

$$h_r[s] = h_e[s] h_i[s] \quad (19)$$

donde  $h_e[s]$  es el modelo reducido anteriormente expuesto.

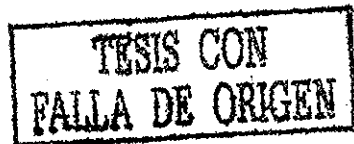
En el caso de que  $h_e[s]$  no resulte estrictamente propia, expresemos  $h_e[s]$  como:

$$h_e[s] = h_{ep}[s] + \sum_{i=0}^t q_i s^i, \quad t = \text{-orden relat. de } h_e[s] \quad (20)$$

efectuemos la simplificaci3n sobre  $h_{ep}[s]$  para obtener  $h_{epr}[s]$ , y  $h_e[s]$  ser3:

$$h_e[s] = h_{epr}[s] + \sum_{i=0}^t q_i s^i \quad (21)$$

Quando al efectuar cancelaciones polo-cero, 3stos, no est3n lo suficientemente "cercaos"; ser3 conveniente, en lugar de



preservar algunos ceros, ajustar los parámetros restantes para mejorar la respuesta transitoria; esto puede lograrse igualando la función de transferencia original con la reducida en alguna(s) frecuencia(s) de interés, siempre conservando la ganancia estática.

4.4 EJEMPLOS. En esta sección discutiremos tres ejemplos tomados de la literatura.

4.4.1 Ejemplo 1. Tomado de Shamash [27], sea la siguiente función de transferencia

$$a) \quad h[s] = \frac{100 (s+1) (s+10)}{(s+1) (s+10) (s+100)} \quad \text{ORIGINAL}$$

es claro que el mejor modelo reducido de primer orden, que coincide con el presente método, será:

$$hr[s] = \frac{100}{(s+100)} \quad \text{presente método}$$

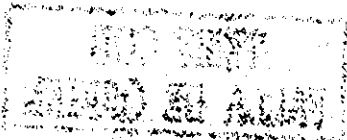
los métodos de Chen [8] y [2], Gutman [17] y Hutton [19] nos dan los siguientes modelos reducidos:

$$hr[s] = \frac{1000}{(370s + 1000)} \quad \text{Gutman}$$

$$hr[s] = \frac{100}{(s + 100)} \quad \text{Chen}$$

$$hr[s] = \frac{0.9009}{(s + 0.9009)} \quad \text{Hutton}$$

La fig 4.1 muestra la comparación de las diferentes respuestas a escalón unitario del modelo original y de los modelos obtenidos con cada uno de los métodos.



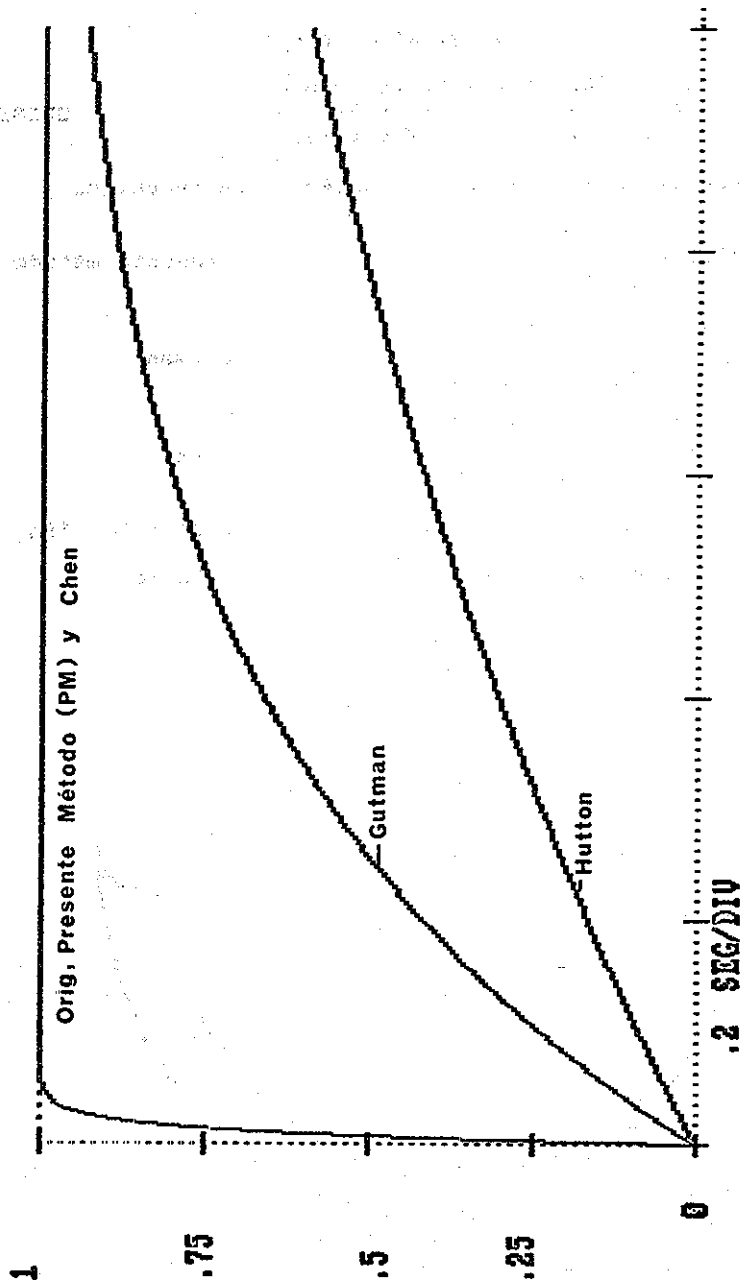


Fig. 4.1 Respuesta a escalón unitario de los modelos original y reducidos para el ejemplo 4.1 a).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



b) Perturbemos el sistema original un poco:

$$h[s] = \frac{90.009 (s + 1.1) (s + 10.1)}{(s + 1) (s + 10) (s + 100)}$$

ORIGINAL

con las respectivas funciones de transferencia reducidas

$$hr[s] = \frac{100}{(s + 100)}$$

Presente método

$$hr[s] = \frac{1000}{(370 s + 1000)}$$

Gutman

$$hr[s] = \frac{91.7184}{(s + 91.7184)}$$

Chen

La fig 4.2 compara los diagramas de Nyquist y la fig 4.3 muestra las diferentes respuestas a escalón unitario.

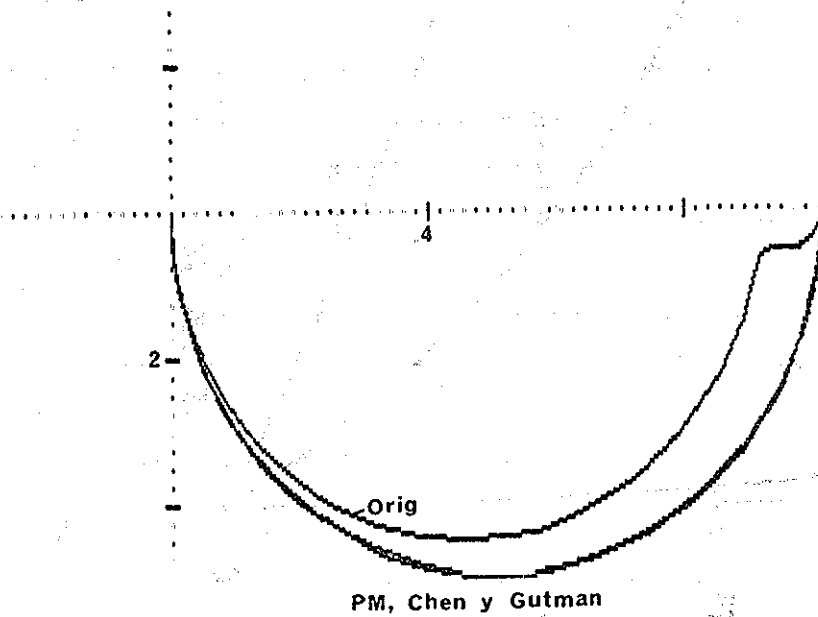


Fig 4.2 Diagramas de Nyquist del ejemplo 4.1 b)

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

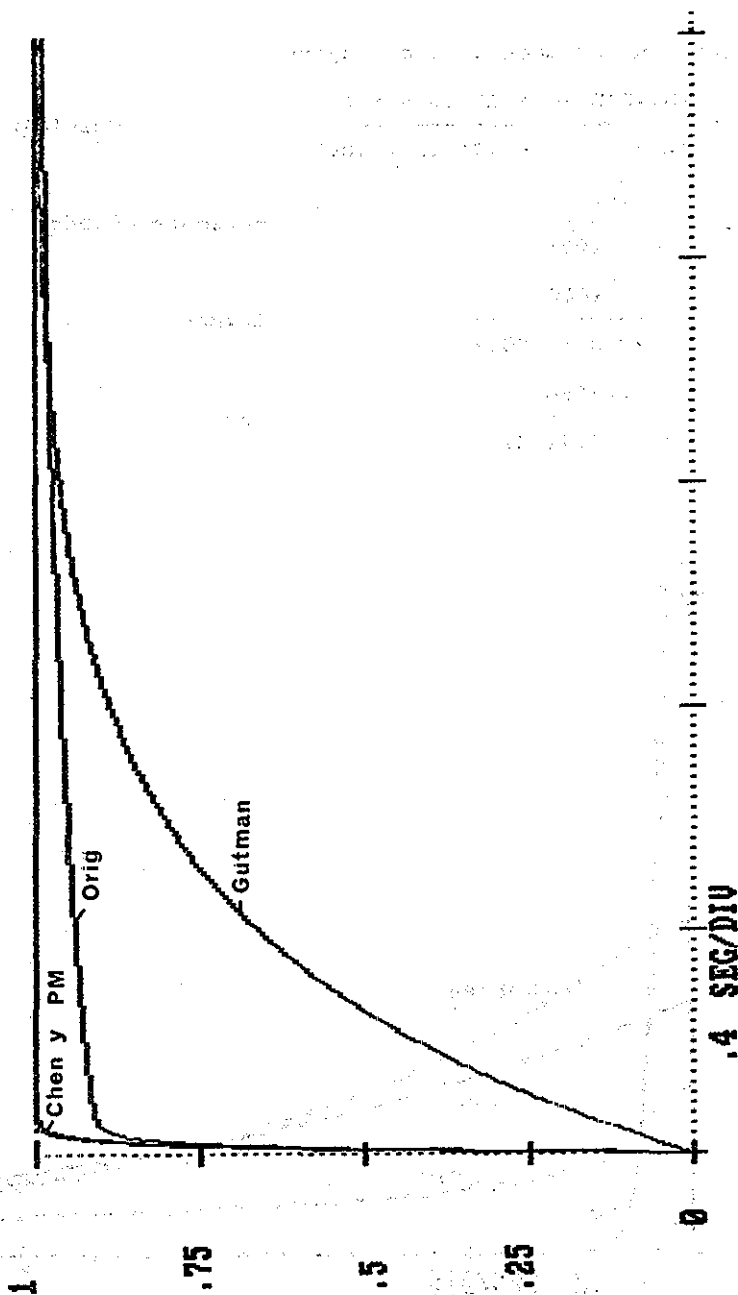


Fig 4.3 Respuestas a escalón unitario del ejemplo 4.1 b).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

c) Hagamos las perturbaciones un poco mayores

$$h[s] = \frac{45.4545 (s + 2) (s + 11)}{(s + 1) (s + 10) (s + 100)} \quad \text{ORIGINAL}$$

$$hr[s] = \frac{100}{(s + 100)} \quad \text{Presente método}$$

$$hr[s] = \frac{1000}{(370s + 1000)} \quad \text{Gutman}$$

$$hr[s] = \frac{1.9264}{(s + 1.9264)} \quad \text{Chen}$$

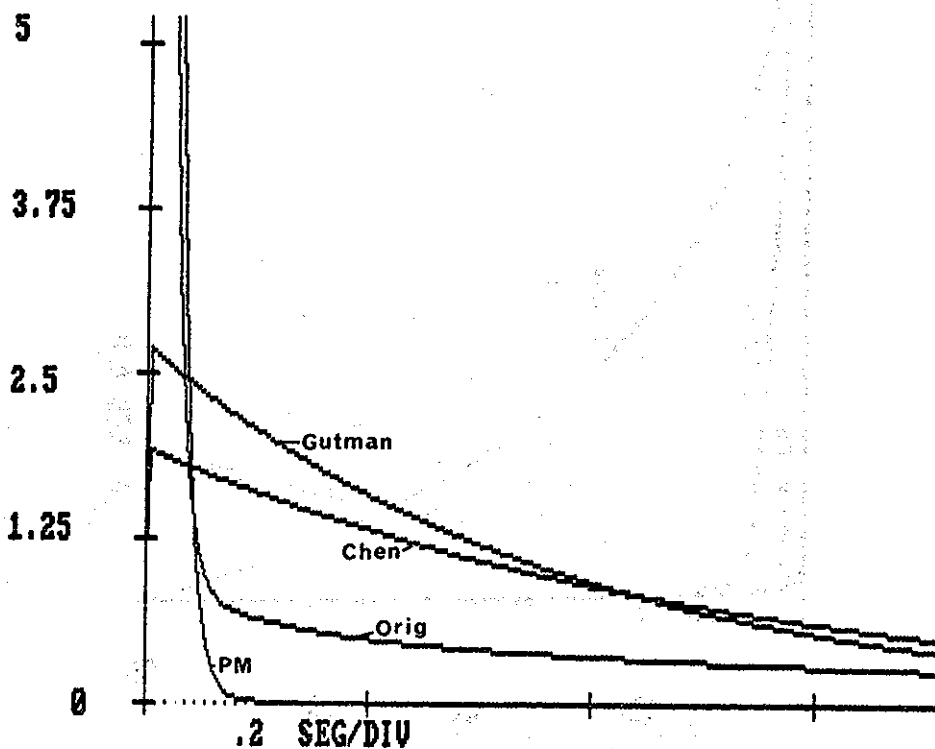
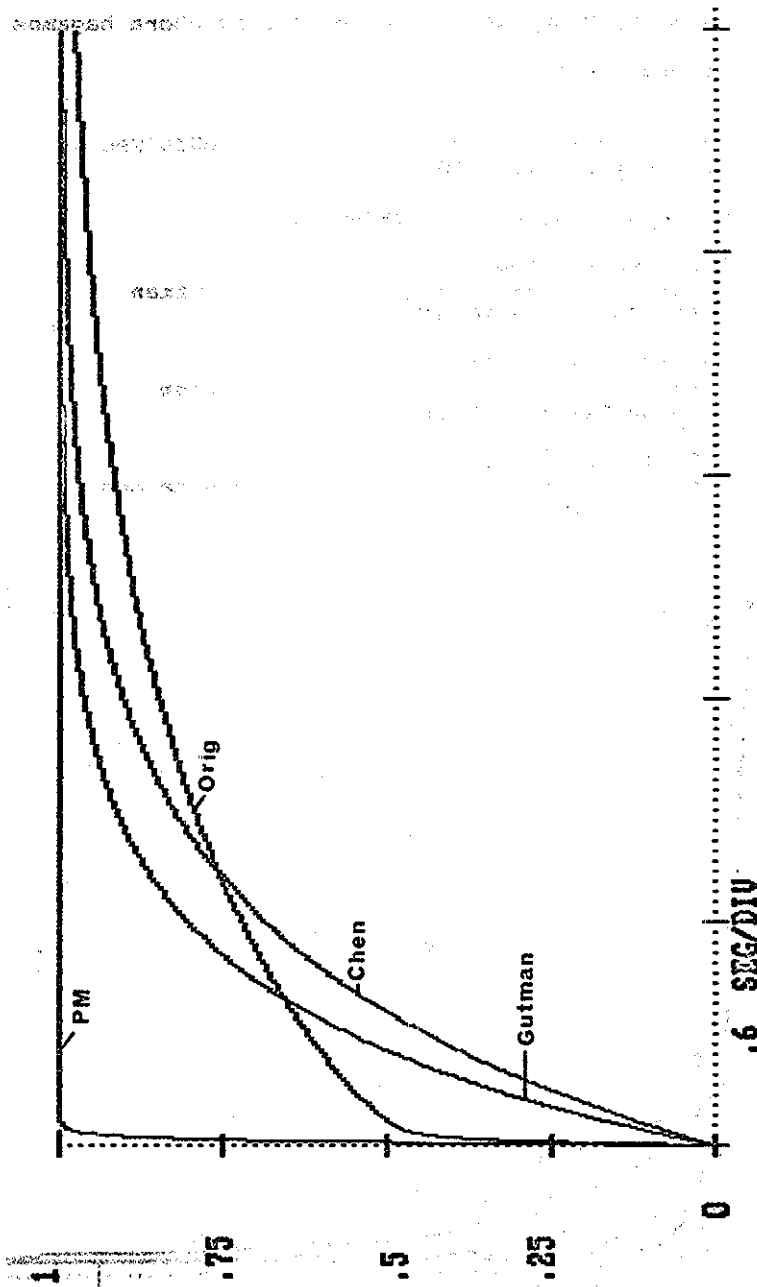


Fig 4.4 Respuestas a impulso del ejemplo 4.1 c)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig 4.5 Respuestas a escalón unitario del ejemplo 4.1 c)

d) tomemos el mismo caso que en el inciso c) pero ahora hagamos aproximaciones de 2do. orden,

$$h[s] = \frac{45.4545 (s + 2) (s + 11)}{(s + 1) (s + 10) (s + 100)} \quad \text{ORIGINAL}$$

Las funciones de transferencia aproximadas serian:

$$h[s] = \frac{295.4545 s + 1000}{37 (s + 1.4576) (s + 18.5424)} \quad \text{Gutman}$$

$$h[s] = \frac{29.3934 s + 59.1138}{(s + 1.0006) (s + 59.0789)} \quad \text{Chen}$$

$$h[s] = \frac{50.0 (s + 2)}{(s + 1) (s + 100)} \quad \text{Presente método}$$

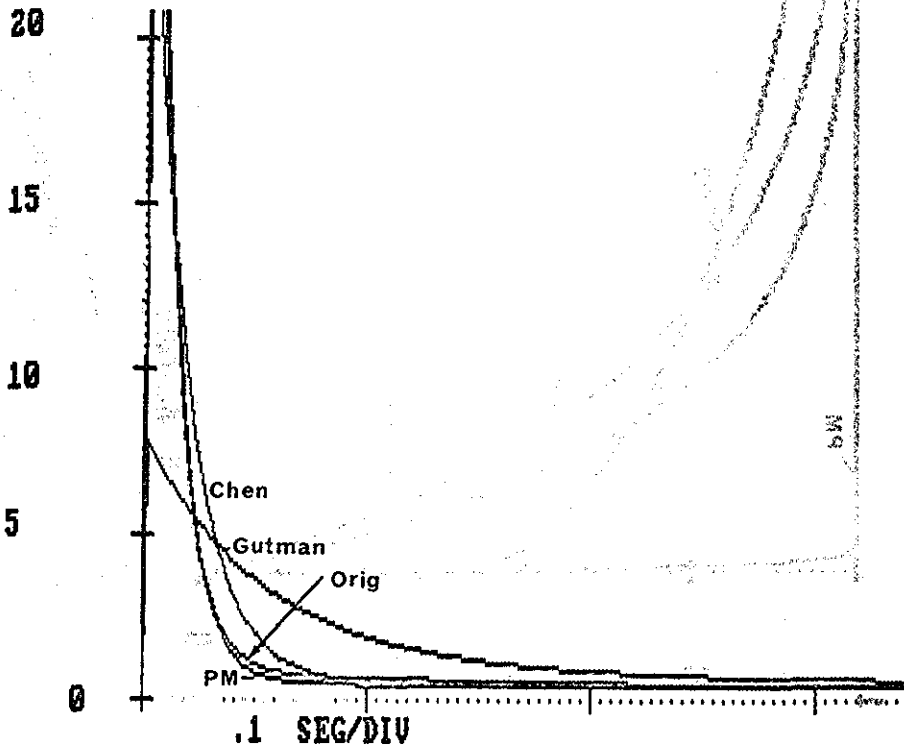


Fig 4.6 Respuesta a impulso ejemplo 4.1 d).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

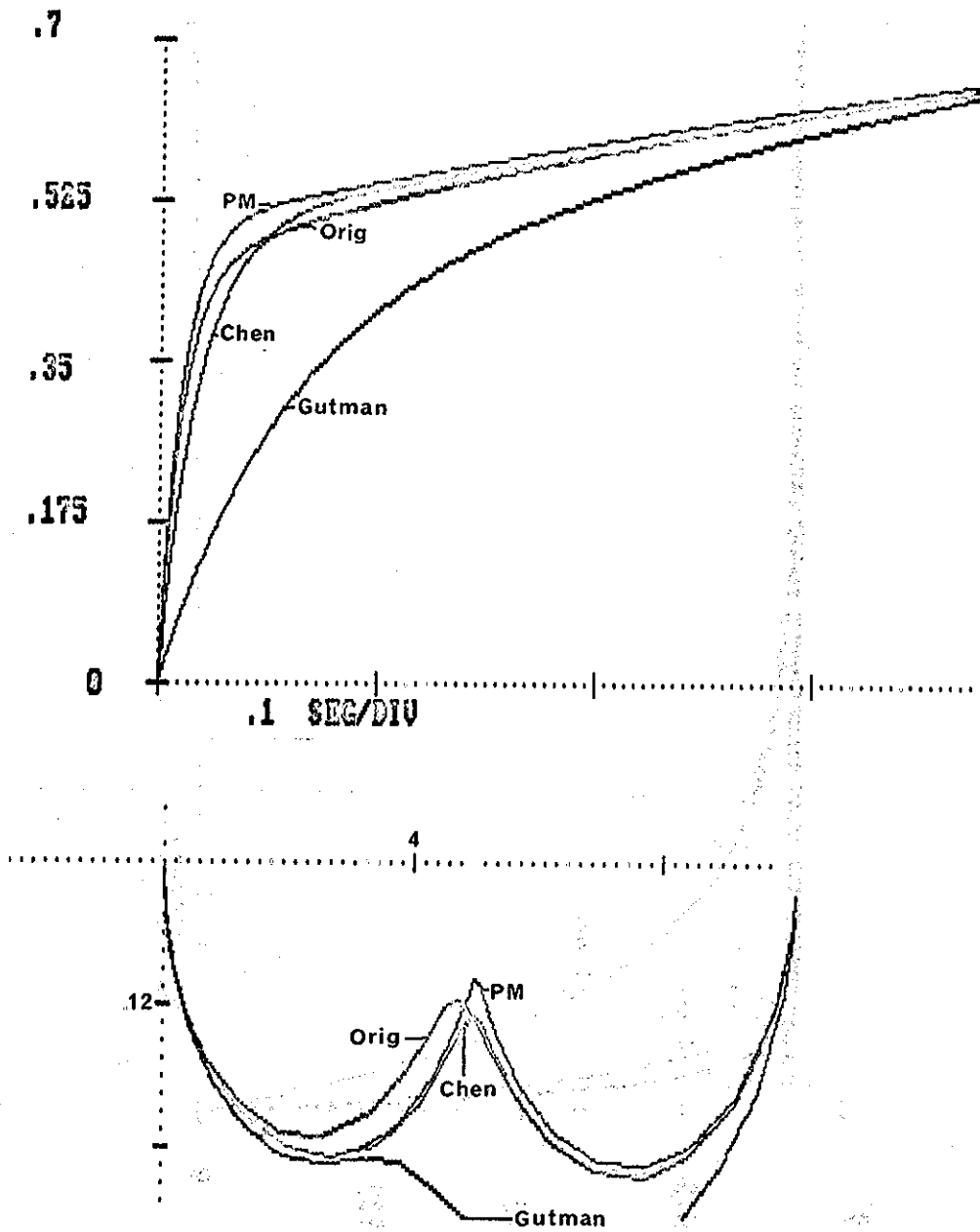


Fig 4.7 Respuesta a) escalón y b) Nyquist del ejemplo 4.1 d).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

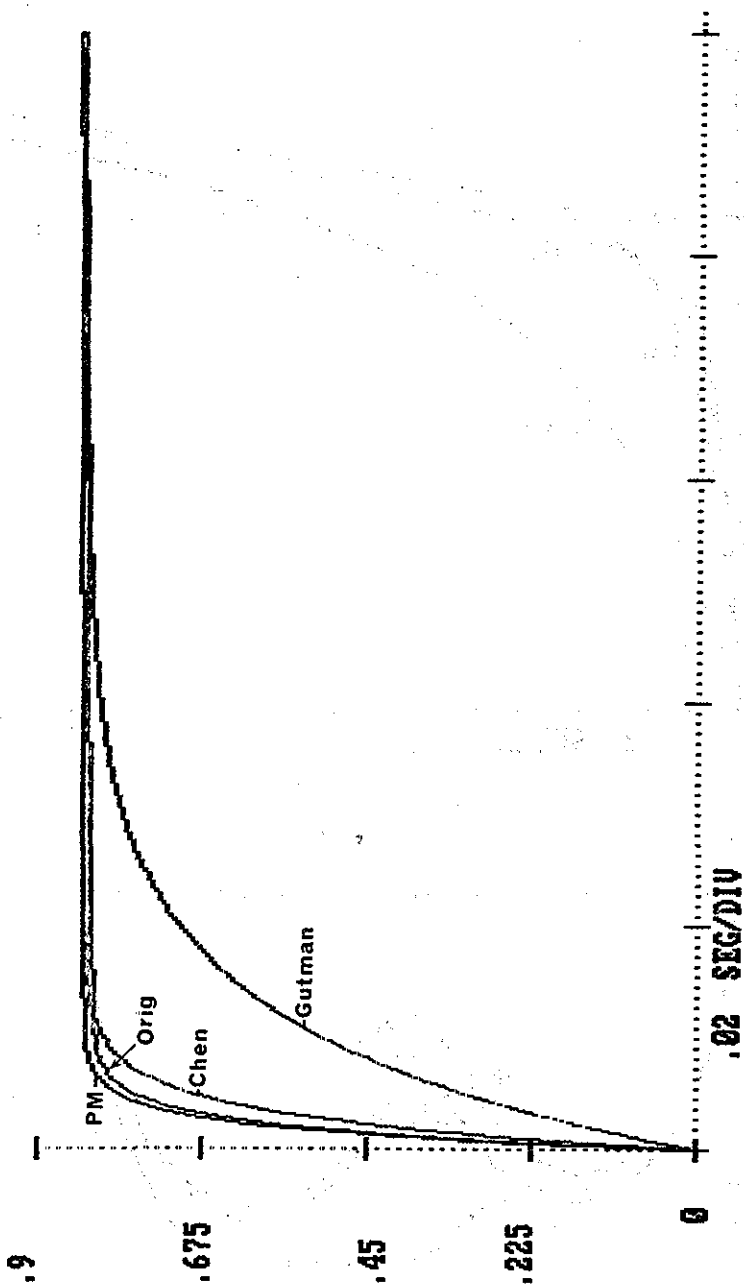


Fig 4.8 Respuesta a escalón unitario de los modelos, original y reducidos, conectados con realimentación unitaria y ganancia de 10.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

4.4.2 Ejemplo 2. Este ejemplo está tomado del artículo de

Chen [8].

$$h(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

donde

$$b(s) = b_1 s^4 + b_2 s^3 + \dots + b_5$$

$$a(s) = a_1 s^8 + a_2 s^7 + \dots + a_9$$

y los valores numéricos son:

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| $a_1 = 1.72729932 \text{ E-11}$ | $a_8 = 5.71677073 \text{ E-1}$ |
| $a_2 = 1.33469457 \text{ E-8}$  | $a_9 = 1.0$                    |
| $a_3 = 2.09672244 \text{ E-6}$  | $b_1 = 1.16074282 \text{ E-8}$ |
| $a_4 = 1.09963236 \text{ E-4}$  | $b_2 = 9.20121170 \text{ E-6}$ |
| $a_5 = 2.89073353 \text{ E-3}$  | $b_3 = 1.46464446 \text{ E-3}$ |
| $a_6 = 4.28268027 \text{ E-2}$  | $b_4 = 7.16799800 \text{ E-2}$ |
| $a_7 = 3.28968664 \text{ E-1}$  | $b_5 = 1.0$                    |

para el cual obtenemos los siguientes modelos reducidos de orden dos:

$$hr(s) = \frac{0.0027 s + 3.42377}{s^2 + 1.714586 s + 3.42377} \quad \text{Chen}$$

el método de Gutman [17] resulta en:

$$hr(s) = \frac{24215.31}{s^4 + 74.076s^3 + 1707.017s^2 + 6921.668s + 24215.31}$$

(s + 2.0338 ± j3.6187) (s + 35.007 ± j13.516)

el presente método quedaría como:

$$hr(s) = \frac{1394.3049}{s^4 + 22.7336s^3 + 395.1537s^2 + 672.6382s + 1394.3049}$$

(s + .8281 ± j1.7964) (s + 10.5387 ± j15.661)



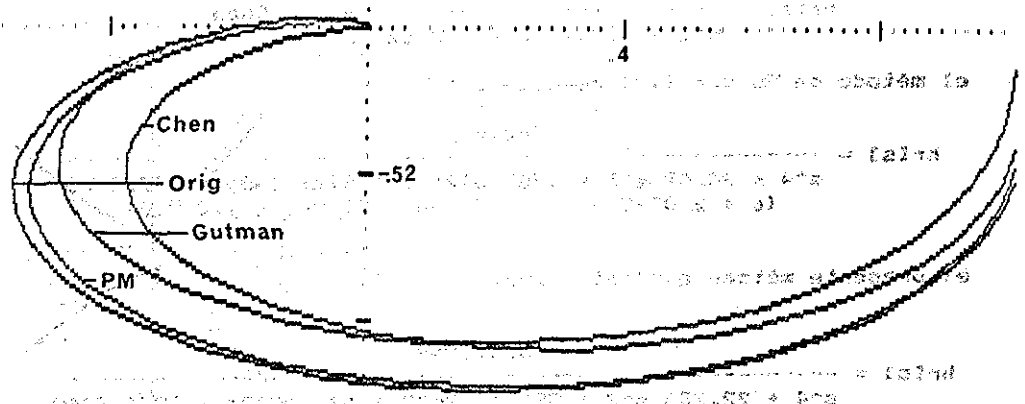
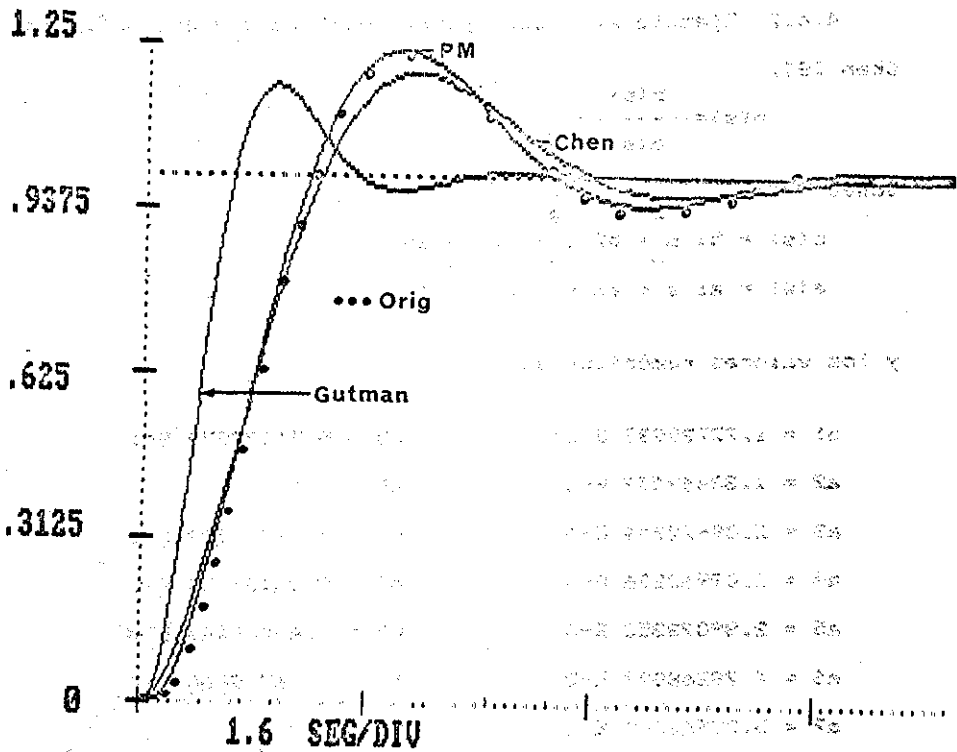


Fig 4.9 Respuesta a) a escalón y b) Nyquist del ejemplo 4.2.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

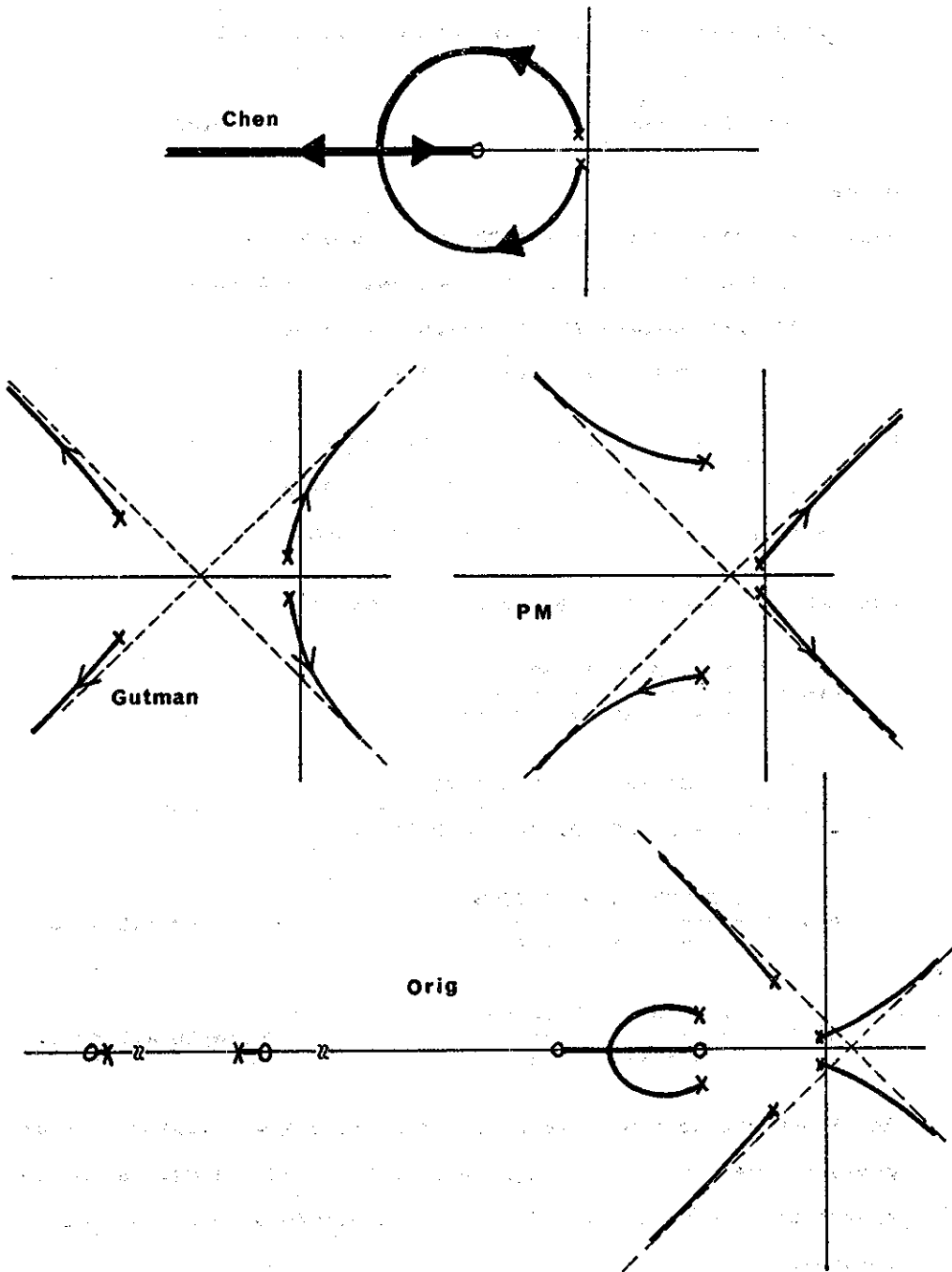


Fig 4.10 "Root Locus" del ejemplo 4.2.

4.4.3 Ejemplo 3. Tomado de Gutman y otros [17]

$$h[s] = \frac{a(s)}{b(s)} \quad \text{ORIGINAL}$$

donde

$$\begin{aligned} a(s) &= 35 s^7 + 1086 s^6 + 13285 s^5 + 82402 s^4 + \\ &278376 s^3 + 511812 s^2 + 482964 s + 194480 = \\ &= 35 (s+1.03464+j.63102) (s+2.637) (s+3.834) \\ &\quad (s+4.903) (s+7.8) (s+9.78542) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(s) &= s^8 + 33 s^7 + 437 s^6 + 3017 s^5 + 11870 s^4 + \\ &27470 s^3 + 37492 s^2 + 28880 s + 9600 = \\ &= (s+1) (s+1) (s+1+j) (s+3) (s+4) (s+5) (s+8) \end{aligned}$$

Las aproximaciones de segundo orden quedarían:

$$h[s] = \frac{51.5272 s + 145.2427}{(s + 2.38) (s + 3.01)} \quad \text{Gutman}$$

$$h[s] = \frac{39.134 s + 9.541294}{(s + 1.935676) (s + 0.243314)} \quad \text{Chen}$$

$$h[s] = \frac{2.070254 s + 20.2583}{(s + 1) (s + 1)} \quad \text{Presente método a)}$$

$$h[s] = \frac{31.7945 s + 20.2583}{(s + 1) (s + 1)} \quad \text{Presente método b)}$$

En el presente método a) se preservó el cero  $Z = -9.78542$ ; en el presente método b) se hizo  $h[j 1.0] = hr[j 1.0]$ . Solo se presentan las respuestas del presente método b) por ser mucho mejores.

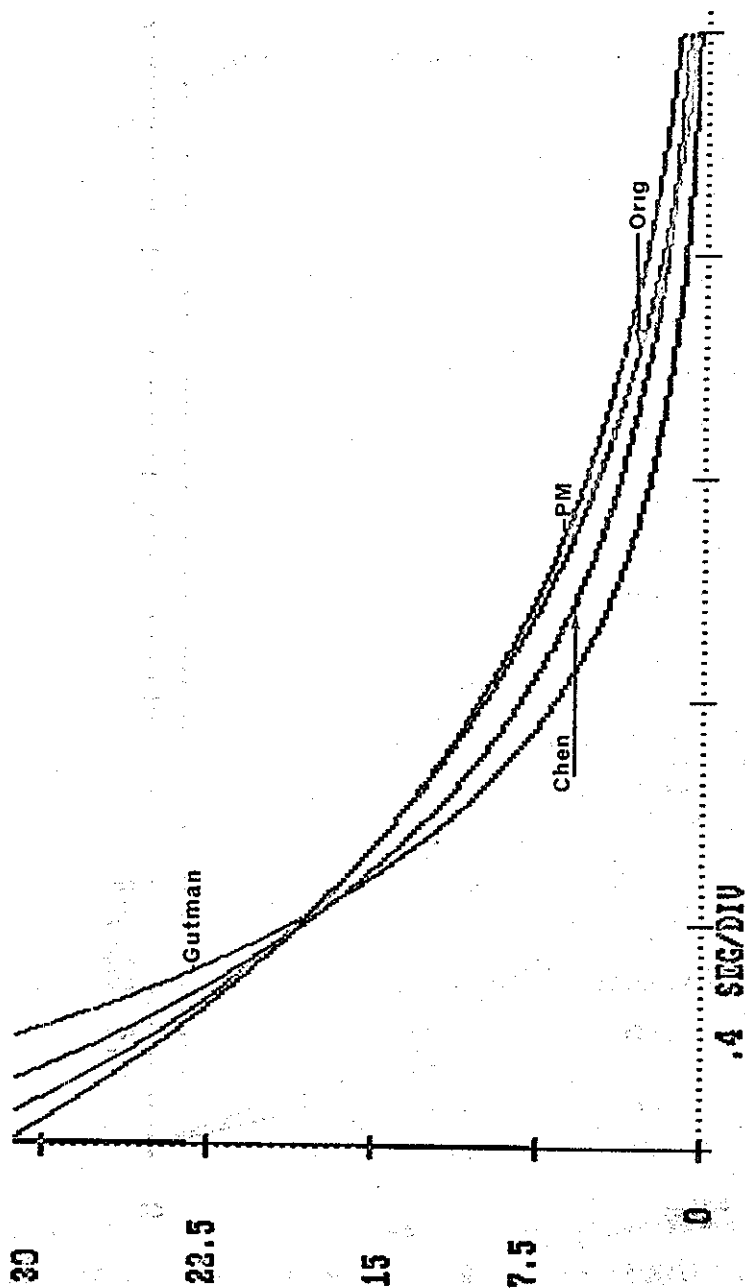


Fig 4.11 Respuesta a impulso del ejemplo 4.3.

400 2200  
 1970 30 11117

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

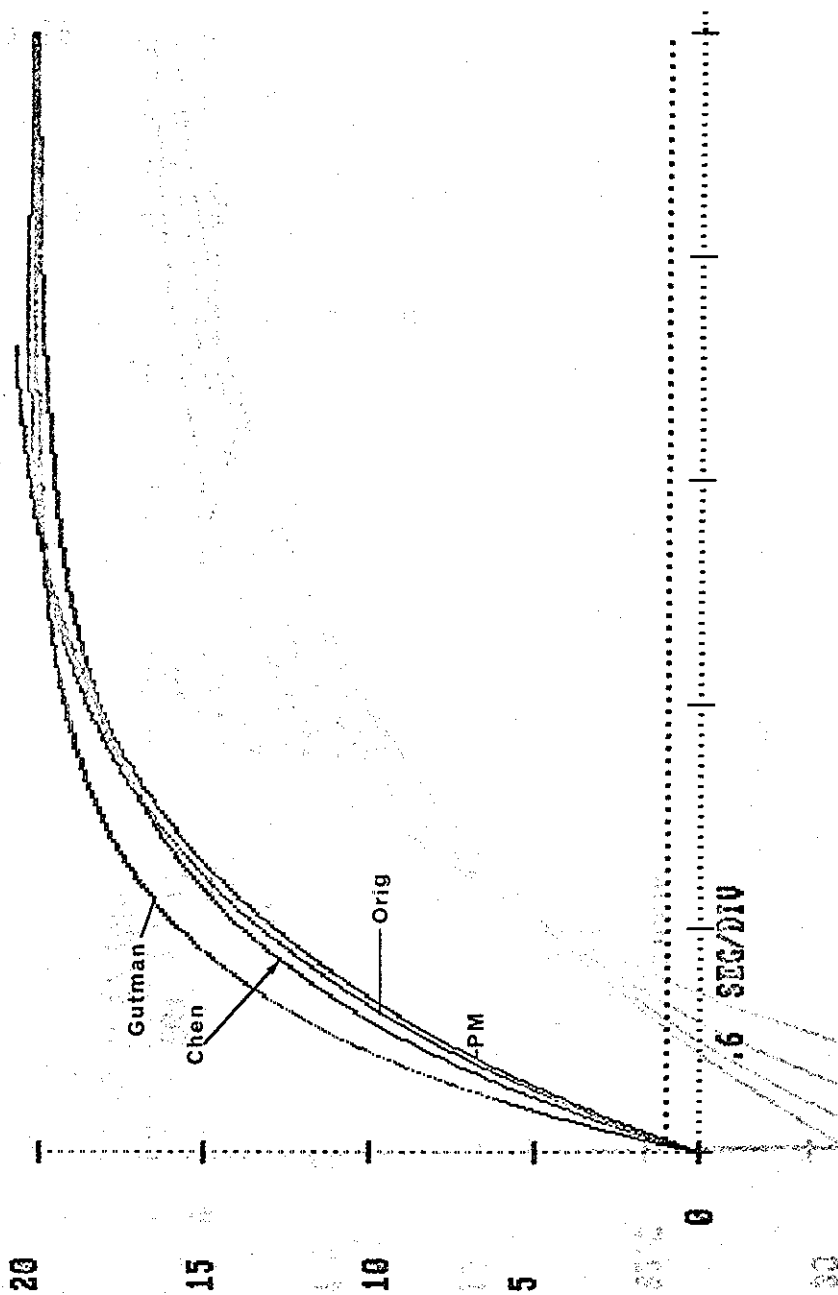


Fig 4.12 Respuesta a escalón unitario del ejemplo 4.3.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

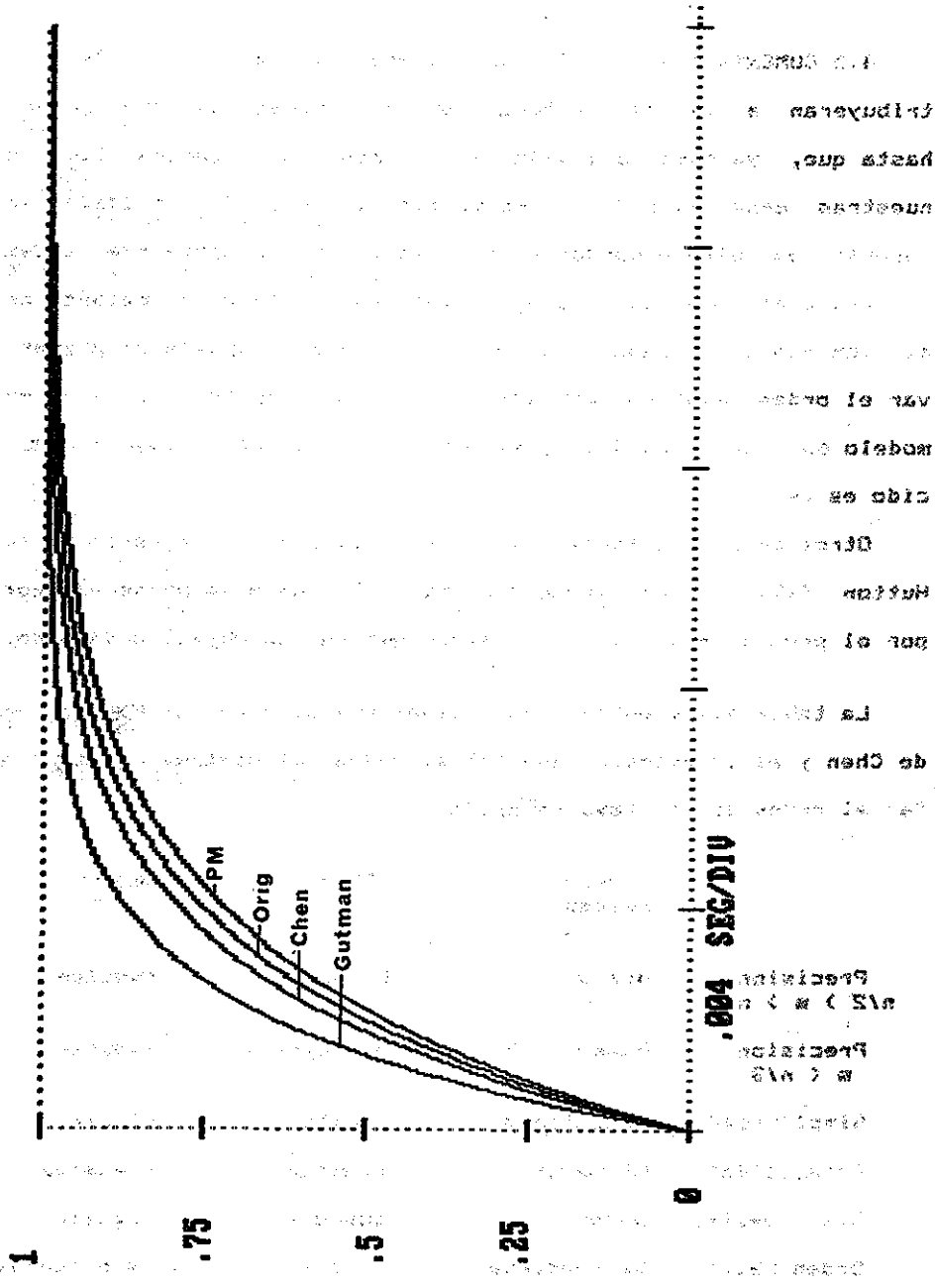


Fig 4.13 Sistema del ejemplo 4.3 realimentado unitariamente con ganancia de 10.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

4.5 COMENTARIOS. La idea de preservar los polos que más contribuyeran a la respuesta a impulso se creyó que era nueva; hasta que, ya casi concluida la presente investigación llegó a nuestras manos el artículo de Lastman y otros [23] en donde se reporta un método basado en esta idea. No obstante que estos autores usaron la misma idea, ellos desarrollaron su método en el dominio del tiempo y no impusieron la restricción de preservar el orden relativo; más aún, el número de polos y ceros en su modelo es igual, es decir, el orden relativo en el modelo reducido es cero.

Otros métodos preservan el orden relativo, por ejemplo el de Hutton [19] y el de Gutman y otros [17], pero lo preservan más por el propio desarrollo del método que por un objetivo deseado.

La tabla 4.1 muestra comparativamente al Presente Método, el de Chen y el de Gutman. Sea "n" el orden del sistema original y "m" el orden del sistema reducido.

	Presente Método	Chen	Gutman
Precisión $n/2 > m > n/3$	bueno	bueno *	regular
Precisión $m < n/3$	bueno	el mejor *	regular
Simplicidad	complicado	regular	simple
Estabilidad	El mejor	regular	preserva
Sis. Realim.	Bueno	bueno *	regular
Orden Relat.	Se preserva	--> 1	se preserva

Tabla 4.1 Comparación de los métodos.

\* Siempre y cuando se preserve la estabilidad.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

En el ejemplo 2 se hicieron aproximaciones de cuarto orden, tanto en el presete método como en el de Gutman; dado que los dos métodos preservan el orden relativo y éste era el orden mínimo que se podría obtener con éstos métodos. Al tratar de obtener un modelo reducido de cuarto orden por el método de Chen, éste resultó inestable, lo cual puede deberse a una de dos razones: a) la precisión de los datos no es suficiente, o b) el método de Chen produce un modelo inestables de cuarto orden.

Tanto el método de Chen como el de Gutman, y en general los métodos no-agregados tienen una "tendencia" a colocar polos "cercanos" a los polos dominantes del sistema original, sin importar que un cero casi lo anule. Otro método que tiene esta característica es el propuesto por Gould [16] el cual selecciona los modos preservados unicamente tomando en cuenta la matriz  $A$  de la realización  $(A,B,C,O)$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

NO POST  
NEEDS BE ALIVE

## CAPITULO 5.

**5.1 METODO I.** Considérese la matriz de transferencia cuadrada,  $m$  entradas y  $m$  salidas, estrictamente propia

$$h[s] = [ h_{ij}[s] ] \quad i, j = 1, \dots, m \quad (1)$$

o en alguna representación fraccionaria relativamente prima por la derecha

$$H[s] = R(s) P^{-1}(s) \quad (2)$$

además el sistema es estable, es decir, las raíces del  $\text{Det} ( P(s) )$  tienen parte real negativa. Asociada a la matriz de transferencia está el vector de respuesta a impulso del sistema (en cada una de las entradas se aplica un impulso unitario).

$$h_i[s] = \sum_j^m h_{ij}[s] \quad (3)$$

Es decir  $h_i[s]$  es la suma del  $i$ -ésimo renglón de  $H[s]$ . De aquí ya podremos obtener el vector de respuesta a impulso del sistema

$$h'(t) = \text{Laplace}^{-1} ( h_1[s], h_2[s], \dots, h_m[s] ) \quad (4)$$

Y la energía contenida en el vector de respuesta a impulso está dada por:

$$E_h = \langle h(t), h(t) \rangle = \int_0^{\infty} h'(t) h(t) dt \quad (5)$$

$$= \int_0^{\infty} \text{Laplace}^{-1} ( h_1[s], \dots, h_m[s] ) h(t) dt$$

tomando en cuenta la definición de la transformada inversa de Laplace, tenemos:

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

$$\begin{aligned}
 E_h &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \{ h_1(s), \dots, h_m(s) \} \exp(st) ds h(t) dt \quad (6) \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \{ h_1(s), \dots, h_m(s) \} \int_0^{\infty} h(t) \exp(st) dt ds \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \{ h_1(s), \dots, h_m(s) \} \{ h_1(-s), \dots, h_m(-s) \}' ds
 \end{aligned}$$

haciendo  $c = 0$  debido a que  $H(s)$  es estable,

$$\begin{aligned}
 E_h &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \sum_{i=1}^m h_i(s) h_i(-s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^n \text{residuos} \# \sum_{i=1}^m h_i(s) h_i(-s) \quad (7)
 \end{aligned}$$

si expandemos en fracciones parciales,

$$\begin{aligned}
 h_i(s) h_i(-s) &= \sum_k^n \frac{A_{ik}}{(s - P_i)} - \sum_k^n \frac{A_{ik}}{(s + P_i)} \quad (8) \\
 \Rightarrow E_h &= \sum_i^m \sum_k^n \frac{A_{ik}}{s - P_i}
 \end{aligned}$$

Resultado análogo al caso escalar. Escóganse  $r$  polos tal que sus correspondientes  $A_i$  sean mayores; sea

$t = \text{Grado (pol. min de } H(s))$ , entonces [15]  $H(s)$  podrá descomponerse en la siguiente representación

$$H(s) = \sum_{i=1}^t \frac{B_i}{(s - P_i)} = \sum_{i=1}^t \frac{C_i}{(T_i s - 1)} \quad T_i = \frac{1}{P_i} \quad (9)$$

si y solo si los polos de cada elemento de la matriz de transferencia no están repetidos.

Sean  $P_1, P_2, \dots, P_r$   $r < t$  los polos que se retendrán, el modelo reducido multivariable será:

$$H_r(s) = \sum_{i=1}^r \frac{C_i}{(T_i s - 1)} + \sum_{i=r+1}^t C_i \quad (10)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

5.2 EJEMPLO DEL METODO I. Ejemplo 1 tomado de Shamash [27].

Sea  $H(s)$

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{11s^2 + 40s + 20}{(s+1)(s+2)(s+10)} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{33s^2 + 122s + 80}{(s+1)(s+2)(s+10)} \end{bmatrix}$$

Una aproximación de primer orden por el presente método sería:

$$h1(s) = \frac{12s^2 + 52s + 40}{(s+1)(s+2)(s+10)}$$

$$h2(s) = \frac{34s^2 + 134s + 100}{(s+1)(s+2)(s+10)}$$

$$h1(s) h1(-s) = - \frac{144s^4 - 1744s^2 + 1600}{(s^2-1)(s^2-4)(s^2-100)}$$

$$h2(s) h2(-s) = - \frac{1156s^4 - 11156s^2 + 10000}{(s^2-1)(s^2-4)(s^2-100)}$$

$$h1(s) h1(-s) + h2(s) h2(-s) = - \frac{1300s^4 - 12900s^2 + 11600}{(s^2-1)(s^2-4)(s^2-100)}$$

$$= \frac{0.0}{s+1} + \frac{16.67}{s+2} + \frac{61.67}{s+10} + \dots$$

por lo que una aproximación de primer orden retendrá el polo

$$s = -10.0$$

$$Hr1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{s+10} \\ 1 & \frac{40}{s+40} \\ 1 & \frac{10}{s+10} \end{bmatrix}$$

De la misma manera obtendríamos una aproximación de segundo

orden:

$$Hr2[s] = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}{.1 s + 1} + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}{.5 s + 1} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-s^2 + 20}{(s + 2)(s + 10)} \\ 1 & \frac{-s^2 + 20s + 80}{(s + 2)(s + 10)} \end{bmatrix}$$

expresemos cada una de las aproximaciones en alguna representacion fraccionaria,

$$Hr1[s] = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & s+40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$hr2[s] = \begin{bmatrix} 0 & 12s+40 \\ 0 & 34s+100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)(s+10) \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

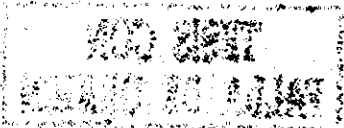
$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-s^2 + 20}{(s+2)(s+10)} \\ 1 & \frac{-s^2 + 22s + 80}{(s+2)(s+10)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)(s+10) \end{bmatrix}^{-1}$$

El método de Hutton nos da el siguiente modelo

$$Hh[s] = \frac{\begin{bmatrix} 0.9697 (s + 1.66666) & 3.232324 (s + .5) \\ 0.9697 (s + 1.66666) & 9.535353 (s + .667) \end{bmatrix}}{(s + 1.057335) (s + 1.528523)}$$

Pero el orden del supuestamente modelo reducido es 4, mientras que el original es de 3er orden.

Realimentemos unitariamente el sistema original y cada uno de los reducidos, y comparemos así sus respuestas a escalon unitario.



$$H[s] = \begin{bmatrix} 1 & 11s^2 + 40s + 20 \\ 1 & s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)(s+10) \end{bmatrix}^{-1}$$

pero, no son relativamente primas por la derecha; el máximo común divisor derecho (GCRD) de estas matrices es:

$$\text{GCRD} = \begin{bmatrix} 1 & 33s^2 + 122s + 80 \\ 0 & s + 1 \end{bmatrix}$$

extrayendo este factor común de la representación anterior, tenemos

$$H[s] = \begin{bmatrix} 1 & -22s-60 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1 & -(33s^2 + 122s + 80) \\ 0 & (s + 2)(s + 10) \end{bmatrix}^{-1}$$

Sea  $K = r \cdot I_2$ ,  $r$  escalar positivo,  $I_2$  matriz identidad (2x2).

La matriz de transferencia del sistema realimentado queda:

ORIGINAL

$$Hf[s] = \frac{r}{D} \begin{bmatrix} 1 & -22s-60 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+12s+20 & 33s^2+122s+22rs+80+60r \\ -r & s + 1 + r \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } D = s^3 + (13+34r)s^2 + (22r^2+134r+32)s + (60r^2 + 100r + 20)$$

si  $r = 1$

$$Hf[s] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} s^2+34s+80 & 11s^2+40s+20 \\ s^2+12s+20 & 33s^2+144s+140 \end{bmatrix}$$

$$D = (s + 1.50702) (s + 2.79751) (s + 42.69547)$$

si  $r = 13.5$

$$Hf[s] = \frac{13.5}{D} \begin{bmatrix} s^2+309s+830 & 11s^2+40s+20 \\ s^2+12s+20 & 33s^2+419s+890 \end{bmatrix}$$

$$D = (s + 2.68) (s + 10) (s + 459.32)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Hagamos lo mismo con las aproximaciones de primero y segundo ordenes y el modelo del método de Hutton.

APROXIMACION DE 1ER ORDEN

$$Hf1[s] = \frac{r}{D} \begin{bmatrix} (1+r)s + 10 & 10 \\ s + 10 - 30r & (1+r)s + 40 + 30r \end{bmatrix}$$

$$D = (1+r)^2 s + 10(1+2r)$$

si r = 1

$$Hf1[s] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 2s + 10 & 10 \\ s - 20 & 2s + 70 \end{bmatrix}$$

$$D = (4s + 30)$$

si r = 13.5

$$Hf1[s] = \frac{13.5}{D} \begin{bmatrix} 14.5s + 10 & 10 \\ s - 395 & 14.5s + 445 \end{bmatrix}$$

$$D = (210.25s + 280)$$

APROXIMACION DE 2DO ORDEN

$$= \frac{r}{D} \begin{bmatrix} 1 & -s^2+20 \\ 1 & -s^2+22s+80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-r)s^2+(12+22r)s+(20+80r) & rs^2-20r \\ -r & -r \end{bmatrix}$$

$$D = s^2 + (12+34r+22r^2) s + (20+80r+80r^2)$$

si r = 1

$$Hf2[s] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} s^2+34s+80 & -s^2+20 \\ s^2+12s+20 & -s^2+44s+140 \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } D = (s + 2.76) (s + 65.24)$$

si r = 13.5

$$Hf2[s] = \frac{13.5}{D} \begin{bmatrix} s^2+309s+830 & -s^2+20 \\ s^2+12s+20 & -s^2+319s+890 \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } D = (s + 3.5) (s + 4476.5)$$

MODELO DE HUTTON

$$r = 1 \quad \left[ \begin{array}{l} .9697 s^3 + 10.2325 s^2 + 20.635 s + 10.447 \\ .9697 s^3 + 4.123 s^2 + 5.7467 s + 2.6114 \\ 3.23 s^3 + 9.9742 s^2 + 9.4 s + 2.612 \\ 9.5353 s^3 + 37.233 s^2 + 32.128 s + 10.448 \end{array} \right]$$

$$Hfh[s] = \frac{\quad}{D}$$

$$D = s^4 + 15.6767 s^3 + 51.28 s^2 + 61.1195 s + 23.507$$

$$r = 13.5 \quad \left[ \begin{array}{l} .9697 s^3 + 86.64 s^2 + 206.725 s + 108.39 \\ .9697 s^3 + 4.133 s^2 + 5.75 s + 2.22 \\ 3.2323 s^3 + 9.97 s^2 + 9.4 s + 2.611 \\ 9.5353 s^3 + 113.63 s^2 + 234.421 s + 116.2285 \end{array} \right]$$

$$Hfh[s] = \frac{\quad}{D / 13.5}$$

$$D = s^4 + 146.99 s^3 + 1599.67 s^2 + 3232.92 s + 1606.9$$

Las figs 5.1 a 5.5 muestran las respuestas a escalón, aplicado a una de las entradas unicamente, de algunos de los elementos del sistema original y realimentado.

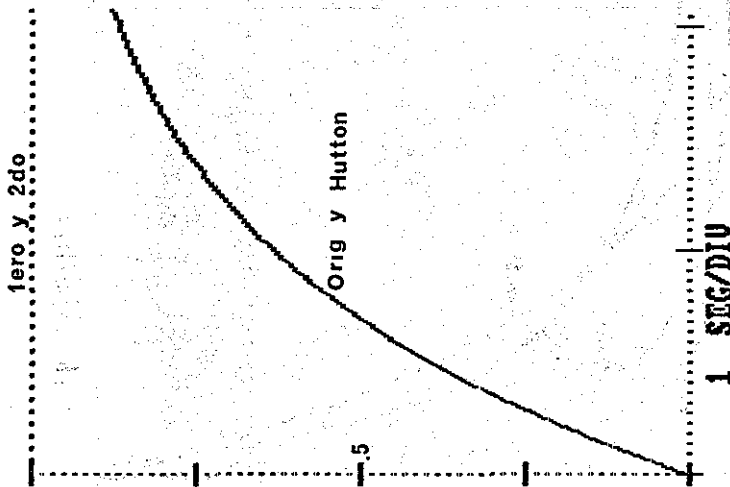
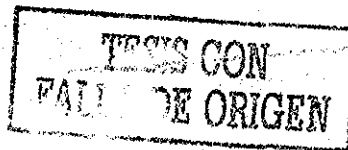


Fig 5.1 Respuesta a la entrada  $[1(t) \ 0]^T$  del elemento (1,1).  $1(t)$  representa un escalon unitario.





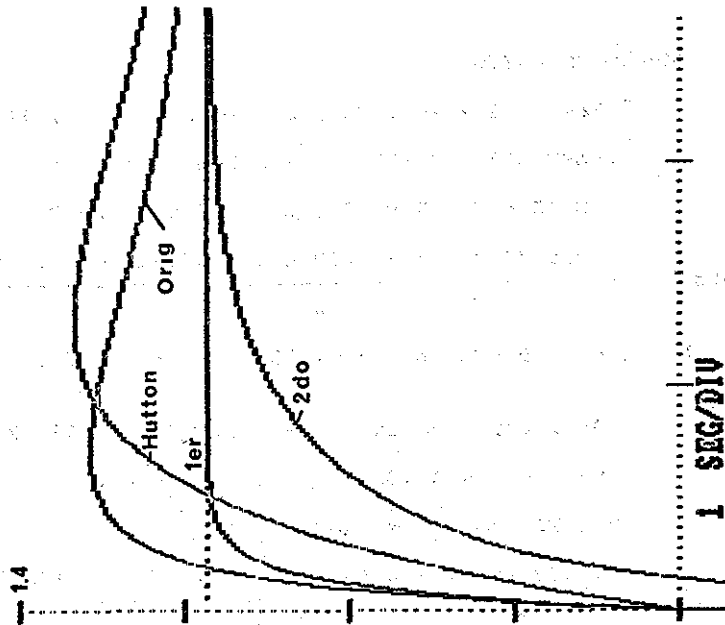


Fig 5.2 Respuesta a escalón del elemento (1,2)

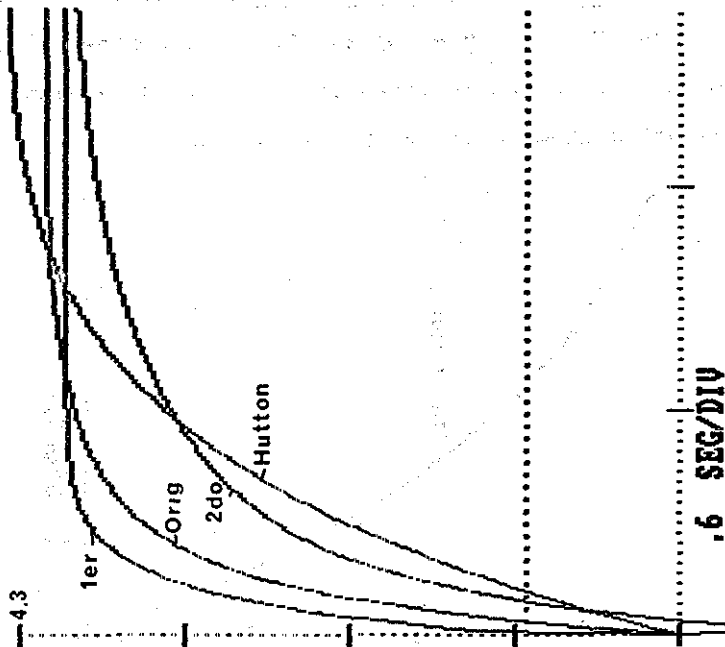


Fig 5.3 Respuesta a escalón del elemento (2,2)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

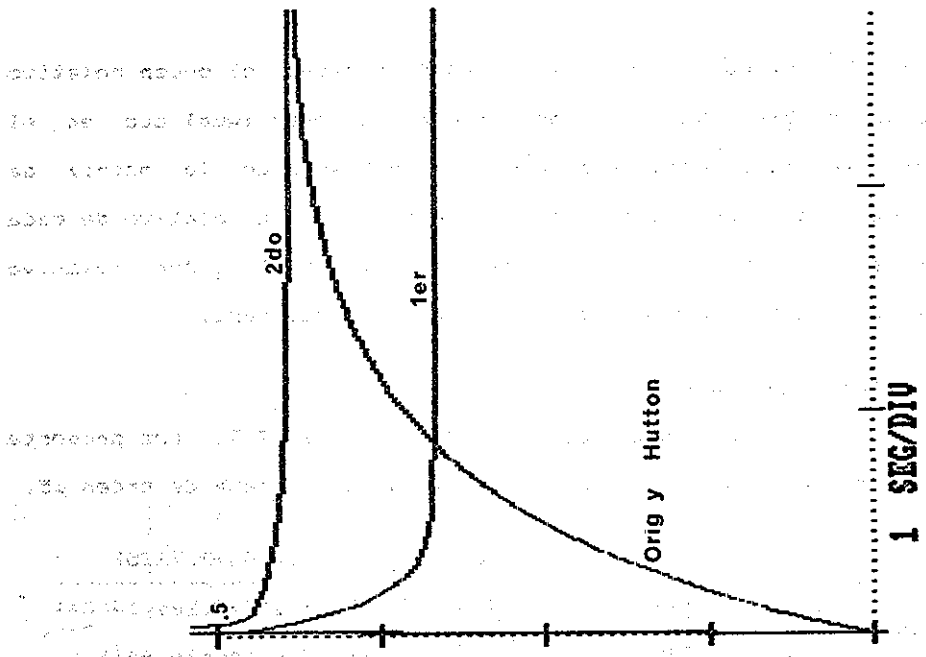


Fig 5.4 Respuesta a escalón del elemento (1,1) del sistema realimentado con ganancia 1.

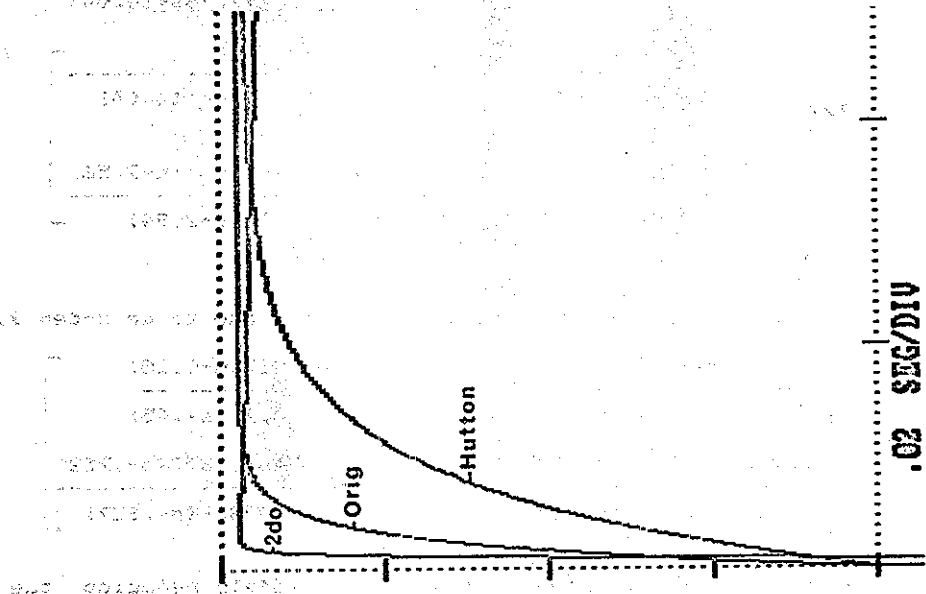


Fig 5.5 Respuesta a escalón del elemento (2,2) del sistema realimentado con ganancia 13.5

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

5.3 METODO II. Con el objeto de mantener el orden relativo multivariable, hagamos ahora las reducciones igual que en el caso escalar, pero elemento por elemento de la matriz de transferencia original; si mantenemos el orden relativo de cada elemento lo más probable es que se mantenga el orden relativo multivariable. Presentemos un ejemplo de éste caso.

5.4 EJEMPLOS DEL METODO II.

5.4.1 Este ejemplo 2 tomado de Marshall [24], nos presenta la siguiente matriz de transferencia de un sistema de orden 15.

$$G(s) = \begin{bmatrix} .0074878(s+.00978)(s+.0629)(s^2+2.66s+7.7225) \\ \hline (s+.00795)(s+.00881)(s+.0982)(s+.327)(s^2+7.26s+14.04) \\ .07(s-.339)(s+.00981)(s+.0218)(s^2+6.14s+16.661) \\ \hline (s+.00795)(s+.00881)(s+.0982)(s+.238)(s+.327) \\ \hline (s^2+7.26s+14.04) \\ .0018805(s-.737)(s+.203)(s+3.65) \\ \hline (s+.00795)(s+.0982)(s+.327)(s^2+7.26s+14.04) \\ .0088477(s-.139)(s-.752)(s+.00695)(s+.256)(s+7.56) \\ \hline s(s+.00795)(s+.0982)(s+.238)(s+.327)(s+2.94) \end{bmatrix}$$

Marshall propone el siguiente modelo reducido, que es de orden 9.

$$G_m(s) = \begin{bmatrix} 0.0033795 & .006017(s-0.15) \\ \hline (s+.0075)(s+.4) & (s+.007)(s+.45) \\ .0925(s-.339)(s+.0218) & .02139(s-.139)(s-.752) \\ \hline (s+.00795)(s+.238) & s(s+.0982)(s+.327) \\ (s+.0982)(s+.327) & \end{bmatrix}$$

El presente método II propone el siguiente modelo reducido que es de orden 8.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{.0008376 (s + .00925)}{(s+.00795) (s+.00881) (s+.0982)} & \frac{-0.0002237}{(s+.00795) (s+.0982)} \\ \frac{.006166 (s - .339)}{(s+.00795) (s+.0982) (s+.238)} & \frac{.02139 (s-.139) (s-.752)}{s (s+.0982) (s+.327)} \end{bmatrix}$$

Las figuras 5.6 a 5.9 muestran comparativamente los diagramas de Nyquist del modelo original y de cada una de las aproximaciones.

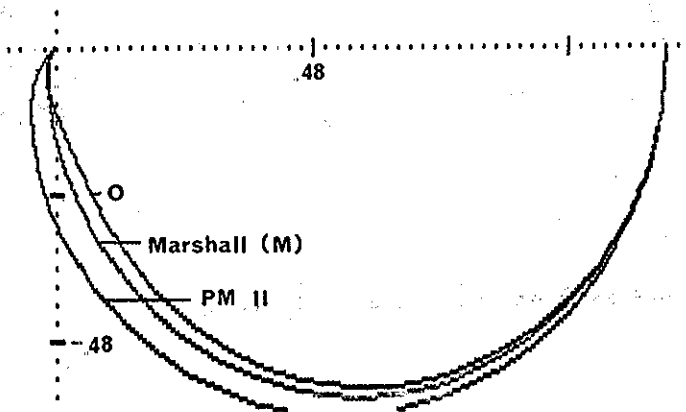


Fig 5.6 Nyquist del elemento (1,1) ej. 2

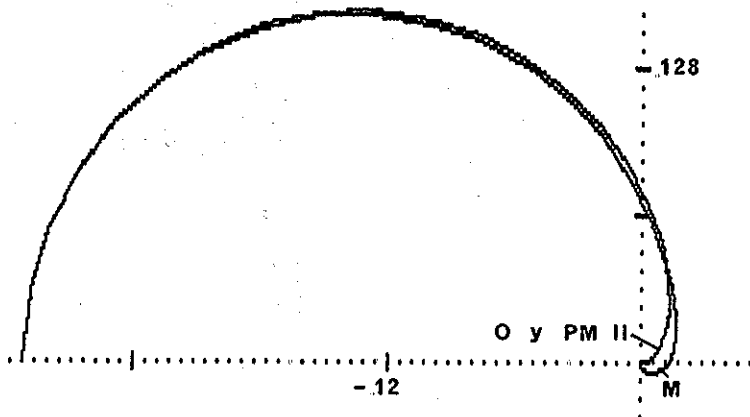


Fig 5.7 Nyquist el elemento (1,2) ej. 2

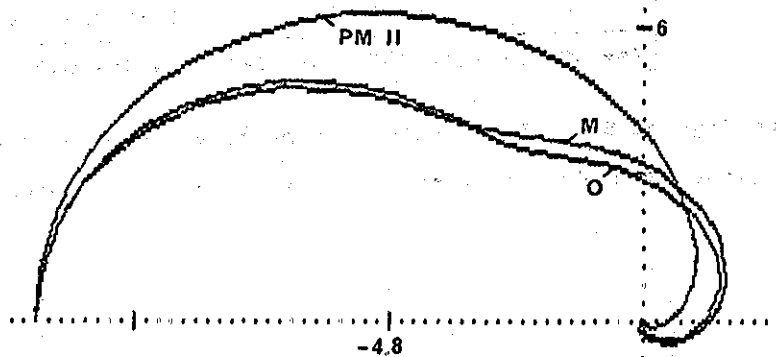


Fig 5.8 Nyquist del elemento (2,1) ej. 2

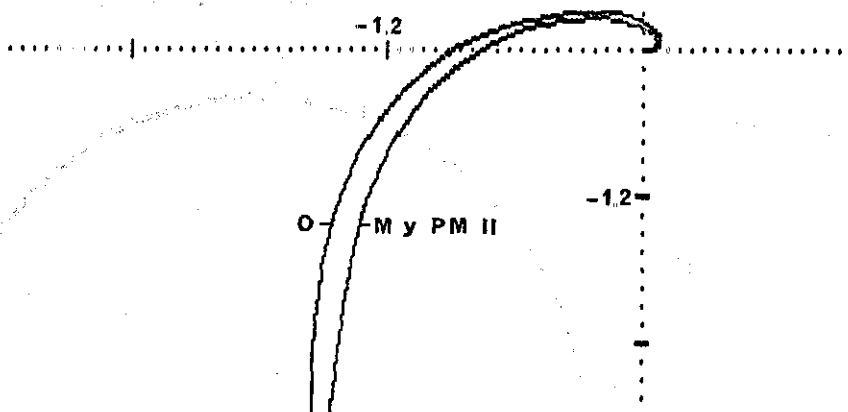


Fig 5.9 Nyquist del elemento (2,2) ej. 2

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

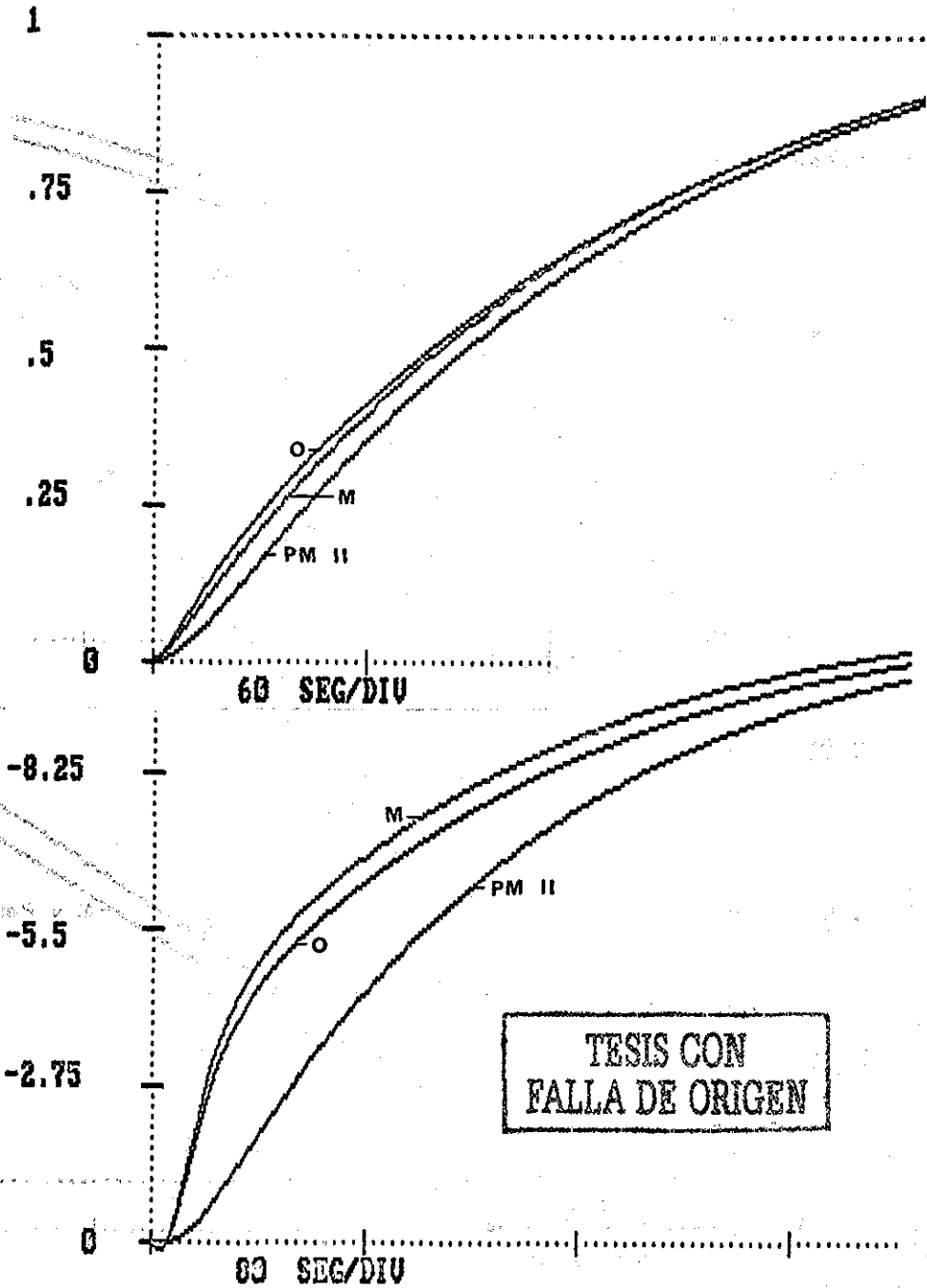


Fig 5.10 Respuesta a la entrada  $I_1(t) O_3'$ .

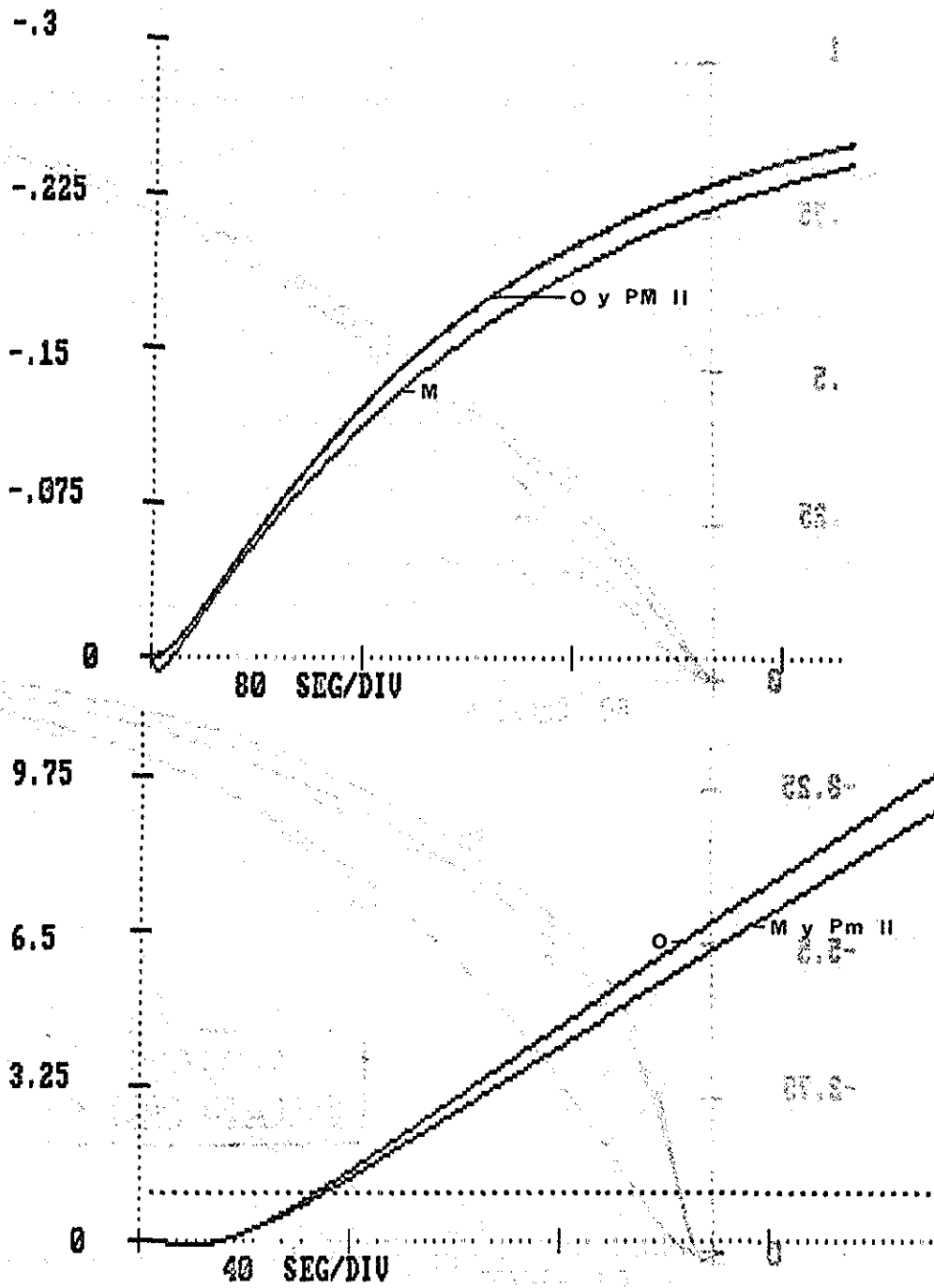


Fig 5.11 Respuesta a la entrada [O 1(t)]'. . . . .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

5.4.2 Ejemplo 3. Este ejemplo ilustrará la buena aproximación de un sistema multivariable realimentado si mantiene el orden relativo. Sea  $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)} \begin{bmatrix} 3s+7 & 2s^2+10s+2 \\ s^2+6s+2 & 2s+8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ -.75 & 1.5 \end{bmatrix}}{(s+1)} + \frac{\begin{bmatrix} -1/3 & 10/3 \\ 2 & -4/3 \end{bmatrix}}{(s+2)} + \frac{\begin{bmatrix} -2/3 & 1/6 \\ -1/4 & -1/6 \end{bmatrix}}{(s+5)}$$

lo que implica que es de orden 6, y puede expresarse como:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 3s+7 & 2s^2+10s+2 \\ s^2+6s+2 & 2s+8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2)(s+5) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)(s+5) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= R(s) P(s)^{-1}$$

donde  $R(s)$  y  $P(s)$  son relativamente primas por la derecha y  $P(s)$  reducida por columnas.

Las raíces de  $\text{Det} \{ R(s) \} = \{-4.5883, .84456, -1.0877, -6.1685\}$  = ceros de transmisión del sistema.

Las raíces de  $\text{Det} \{ P(s) \} = \{-1, -1, -2, -2, -5, -5\}$  = polos del sistema.

En base el método II proponemos el siguiente modelo reducido:

$$G_r(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.4}{(s+1)(s+2)} & \frac{1.9s+.4}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1.1s+.4}{(s+1)(s+2)} & \frac{1.6}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.4 & 1.9s+.4 \\ 1.1s+.4 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}^{-1}$$



Los ceros de transmisión del modelo reducido son:  $\{.751, -1.32517\}$ . Los polos del modelo reducido son  $\{-1, -1, -2, -2\}$ . Las figs 5.12 a 5.15 muestran los diagramas de Nyquist de cada uno de los elementos, y las figs 5.16 y 5.17 muestran la respuestas a escalón.

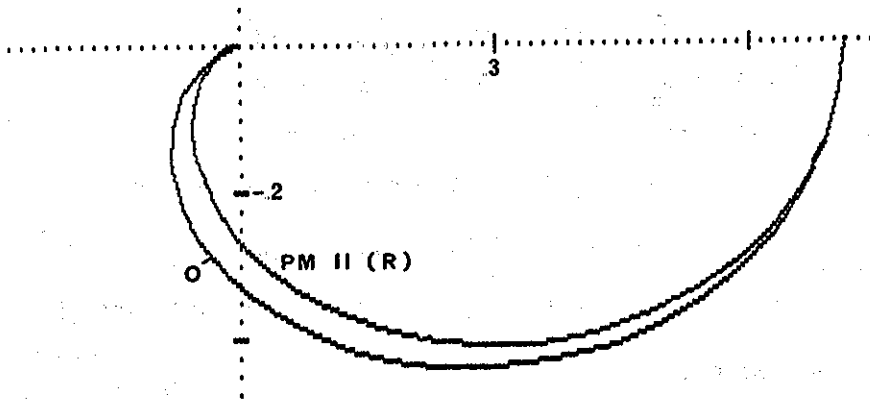


Fig 5.12 Nyquist del elemento (1,1) ejemplo 3.

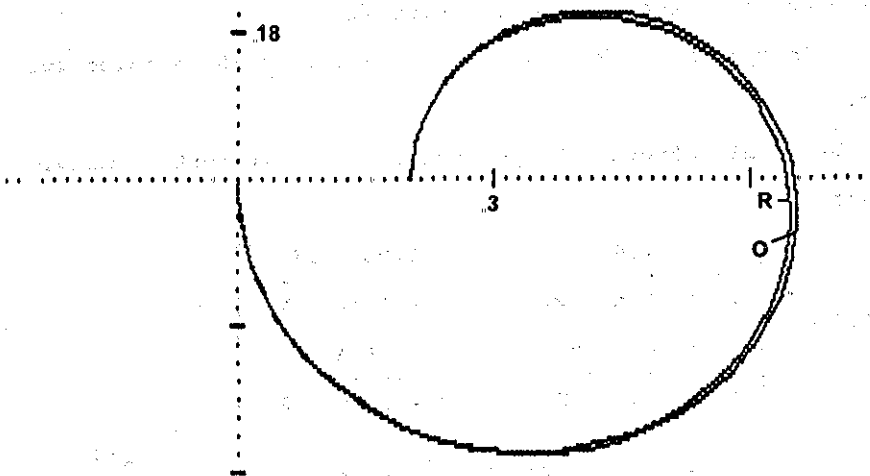
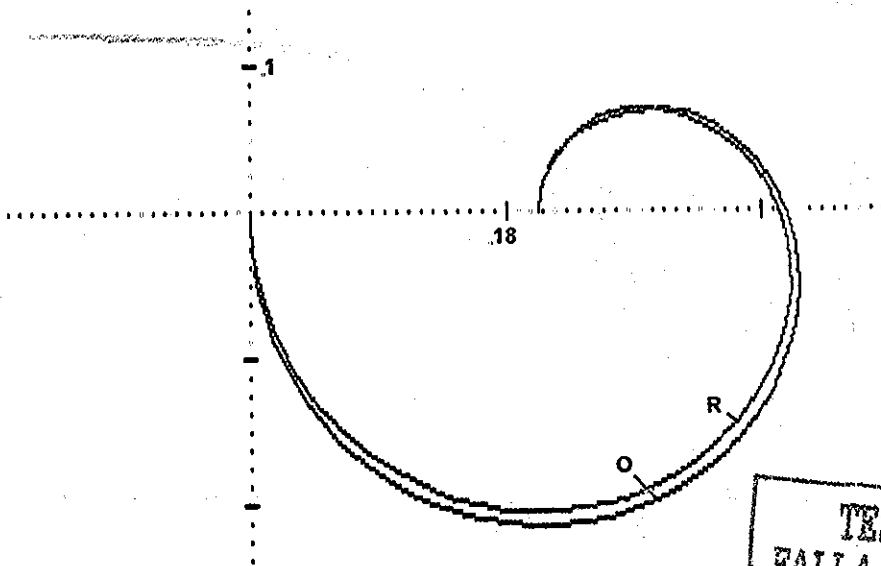


Fig 5.13 Nyquist del elemento (1,2) del ejemplo 3.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig 5.14 Nyquist del elemento (2,1) del ejemplo 3.

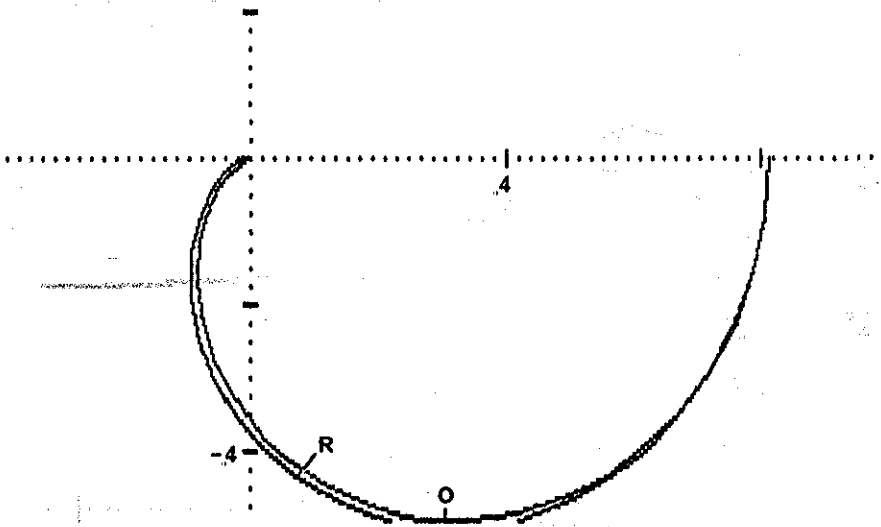


Fig 5.15 Nyquist del elemento (2,2) del ejemplo 3.

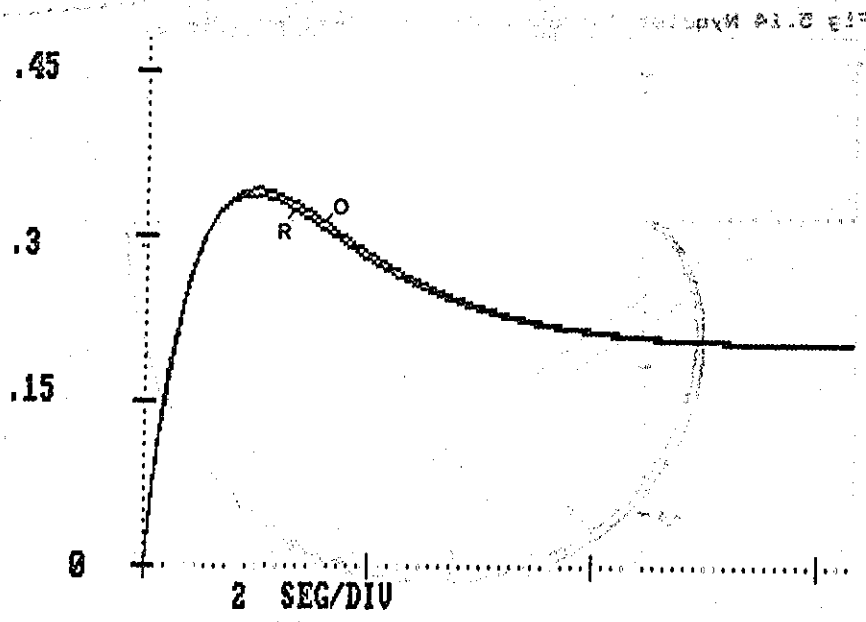
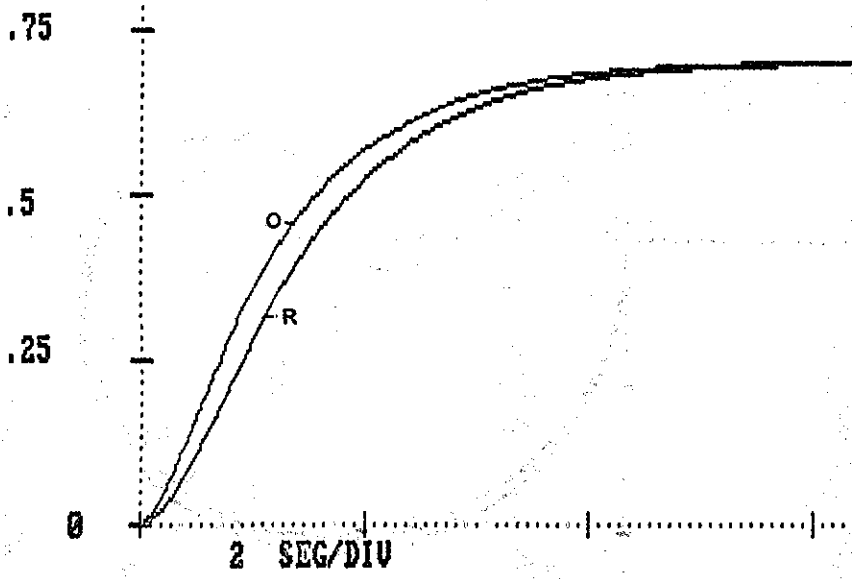


Fig 5.16 Respuesta a la entrada  $I_1(t)$  01:10:10 21.2 217

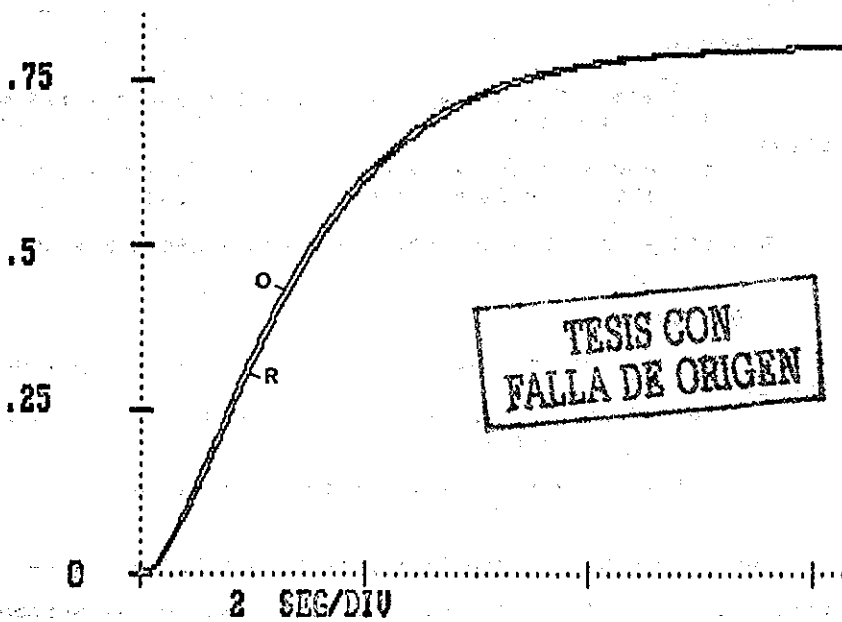
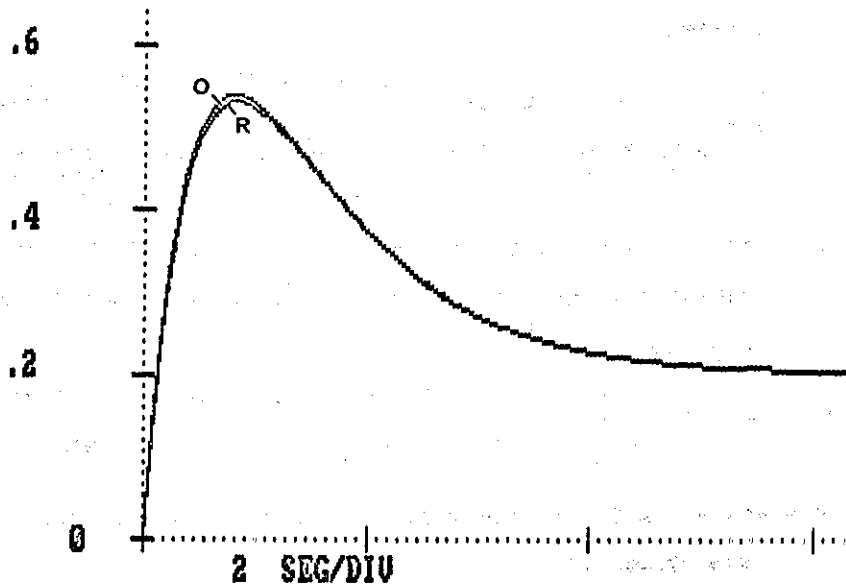


Fig 5.17 Respuesta a la entrada  $[0 \ 1(t)]'$ .

Realimentemos unitariamente y como compensador pongamos  $r \neq 12$

ORIGINAL

$$Gf[s] = \frac{r}{D} \begin{bmatrix} 3s+7 & 2s^2+10s+2 \\ s^2+6s+2 & 2s+8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3+8s^2+(17+2r)s & -2rs^2 \\ 10+8r & -10rs-2r \\ -rs^2-6rs-2r & s^3+8s^2+(17+3r)s+10+7r \end{bmatrix}$$

$$D = s^6 + 16s^5 + (98-2r^2+5r)s^4 + (292-22r^2+55r)s^3 + (449-60r^2+205r)s^2 + (340+305r+6r^2)s + 100+150r+52r^2$$

REDUCIDO

$$Grf[s] = \frac{r}{d} \begin{bmatrix} 1.4 & 1.9s+.4 \\ 1.1s+.4 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+3s+2+1.6r & -1.9rs-.4r \\ -1.1rs-.4r & s^2+3s+2+1.4r \end{bmatrix}$$

$$d = s^4 + 6s^3 + (13+3r-2.09r^2)s^2 + (12+9r-1.2r^2)s + (4+6r+2.08r^2)$$

-----  
 $r = 1$

ORIGINAL

$$Gf[s] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} s^4 + 9s^3 + 47s^2 & 2s^5 + 26s^4 + 116s^3 \\ 155s + 122 & 206s^2 + 134s + 20 \\ s^5 + 14s^4 + 67s^3 & 2s^3 + 38s^2 + 162s + 132 \\ 128s^2 + 94s + 120 & \end{bmatrix}$$

$$D = s^6 + 16s^5 + 101s^4 + 325s^3 + 594s^2 + 651s + 302$$

REDUCIDO

$$Grf[s] = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -.09s^2 + 3s + 4.88 & 1.9s^3 + 6.1s^2 + 5s + .8 \\ 1.1s^3 + 3.7s^2 + 3.4s + .8 & -.49s^2 + 3.6s + 5.28 \end{bmatrix}$$

$$d = s^4 + 6s^3 + 13.91s^2 + 19.8s + 12.08$$

Las figuras 5.18 y 5.19 muestran la respuesta a la entrada  $[i(t) \ 0]^T$  y  $[0 \ i(t)]^T$  del sistema realimentado unitariamente con ganancia 1.

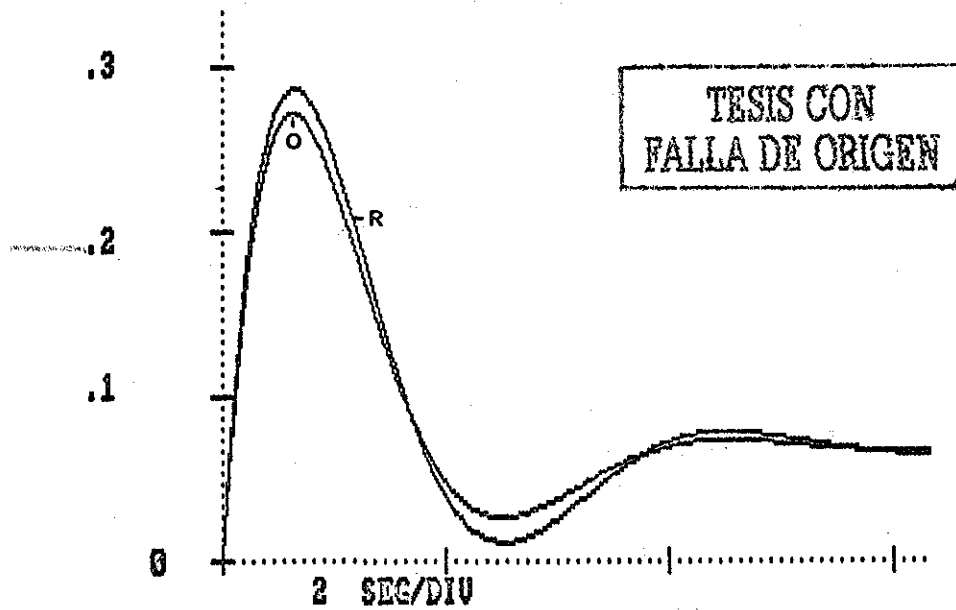
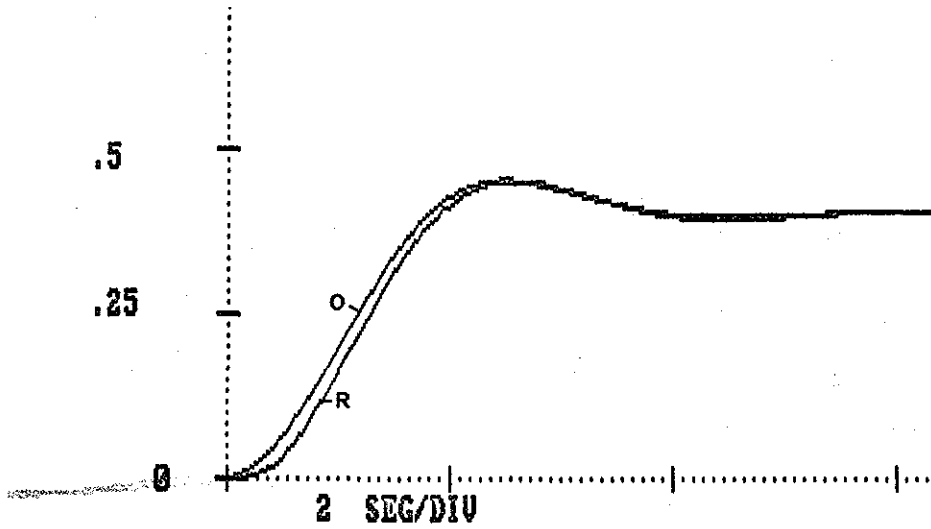


Fig. 5.18. Respuesta a la entrada  $[1(t) \cdot 0]'$  del sistema realimentado unitariamente con ganancia 1.

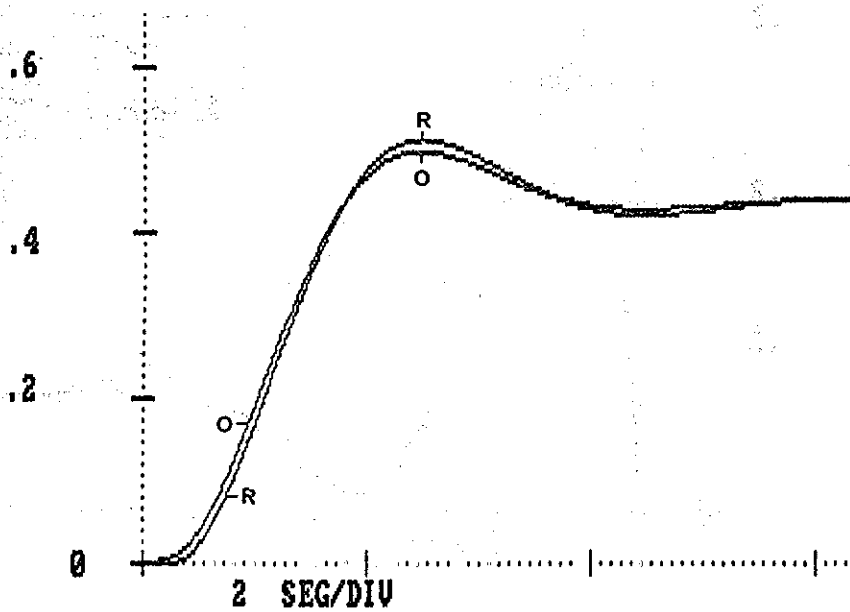
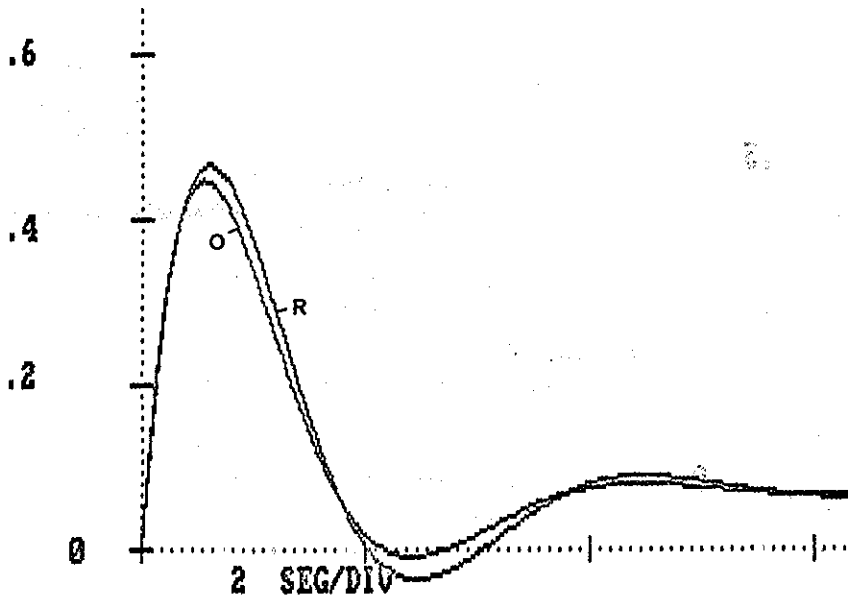


Fig. 5.19 Respuesta a la entrada  $[0 \ 1(t)]^T$  de un sistema realimentado unitariamente con ganancia 1.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

5.5 COMENTARIOS. En el ejemplo 2, al hacer las reducciones del elemento (1,2), despreciamos un cero con parte real positiva debido a que los polos preservados contribuían con casi el 100% de la energía; de hecho el diagrama de Nyquist y la respuesta a escalón no se distinguen el original del reducido.

De acuerdo a los resultados de los ejemplos, vemos que el mantener el orden relativo es importante y casi necesario para el caso de usar el modelo reducido para diseñar un sistema realimentado. El método I carece de esta propiedad, además que las aproximaciones no son monotónicas. Creemos que el método II es satisfactorio, aun cuando sería deseable desarrollar un método en el cual pudiésemos preservar algunos ceros de transmisión del sistema original.

El objetivo original en este capítulo era desarrollar un método multivariable que nos permitiera preservar ceros de transmisión, para lo cual dada la matriz de transferencia  $T(s)$ , encontraríamos la forma de Smith-McMillan de ella  $SM\{T(s)\}$ ; en base a esta última obtenemos  $Num(s)$  y  $Den(s)$ , los polinomios de ceros de transmisión y polos respectivamente, hacemos las cancelaciones igual que en el método escalar y posteriormente regresamos a una  $Tr(s)$  usando las inversas de las matrices unimodulares encontradas al calcular  $SM\{T(s)\}$ , pero no podemos regresar por este método ya que las matrices unimodulares tienen información relativa a  $T(s)$  y no de  $Tr(s)$ .



1. The first step is to identify the problem or goal.

2. Next, we need to gather information and resources.

3. Then, we should develop a plan or strategy.

4. After that, we must execute the plan carefully.

5. Finally, we should evaluate the results and learn from them.

6. It is important to stay flexible and adapt to changes.

7. Communication and teamwork are essential for success.

8. Persistence and a positive attitude can overcome obstacles.

9. Regularly reviewing progress helps in staying on track.

10. Celebrating small wins keeps motivation high.

11. Seeking feedback from others can provide new insights.

12. Keeping a journal or log can help track progress.

13. Remember, success is a journey, not a destination.

14. Stay focused and committed to your goals.

15. Believe in yourself and your abilities.

16. Surround yourself with supportive people.

17. Don't be afraid to take risks and try new things.

18. Stay organized and manage your time effectively.

19. Stay resilient in the face of setbacks and challenges.

20. Keep moving forward, one step at a time.

## CAPITULO 6.

**6.1 CONCLUSIONES.** Como primera, y más importante conclusión podremos señalar que el proceso de reducción de un modelo requiere un profundo análisis, y no podrá efectuarse "a ciegas". De los métodos usados para el caso escalar, que en opinión del autor son de los mejores, podríamos inclinarnos por el de Gutman por simplicidad y por el presente método por precisión; si el método de Chen preserva estabilidad es comparable al presente método. En el caso multivariable el método II presentado parece ser superior a los presentados.

Se mostró que si el modelo reducido se usa para diseñar un sistema realimentado, es importante preservar:

- a) el orden relativo
- b) ceros de transmisión con parte real positiva.

Se propuso un nuevo método para seleccionar los polos preservados en un modelo reducido usando el concepto de "modos más energéticos".

Durante el presente trabajo asumimos que es más sencillo, computacionalmente, reducir primero el modelo y posteriormente diseñar un sistema realimentado; pero podría primero diseñar un controlador para el sistema realimentado y después reducirlo. Es fácil visualizar que los dos procedimientos no necesariamente conmutan. De acuerdo con la fig 6.1, esto significa que la

trayectoria A es más sencilla que la trayectoria B; y ésta fue la forma usada en este trabajo.

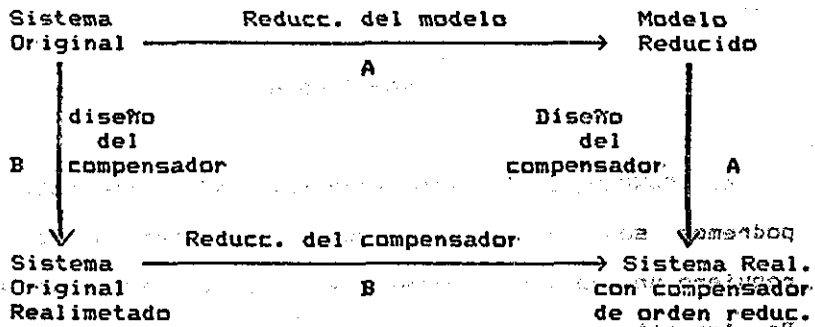


Fig 6.1 Dos procedimientos para diseño de un sistema realimentado con un compensador de orden reducido.

**6.2 TRABAJO FUTURO.** Como se mencionó en la discusión del capítulo 5, habrá que desarrollar un método multivariable que permita preservar, en caso de así deseárselo, ceros de transmisión del sistema original.

Investigar más acerca de la relación entre el orden relativo multivariable y los ordenes relativos de cada uno de los elementos de una matriz de transferencia.

Desde el punto de vista numérico, detectamos una serie de deficiencias al tratar con matrices polinomiales, a continuación se enumeran:

Desarrollar algoritmos numéricamente robustos, para determinar la forma de Smith, Smith-McMillan (matriz racional), resolver ecuaciones polinomiales, por ejemplo Diofantinas, etc.



APENDICE A.

A.1 METODO DE CHEN. Este método reportado originalmente en [8] se resume como el siguiente procedimiento; sea  $h[s]$  y  $hr[s]$  las funciones de transferencia original y reducida de orden "n" y "m" respectivamente. Expresemos  $h[s]$  como:

$$h[s] = \frac{A_{2,1} + A_{2,2} s + A_{2,3} s^2 + \dots + A_{2,n} s^{n-1}}{A_{1,1} + A_{1,2} s + A_{1,3} s^2 + \dots + A_{1,n+1} s^n} \quad (1)$$

por división repetida tenemos:

$$h[s] = \frac{1}{A_{1,1} + \frac{A_{2,1}}{s} + \frac{A_{3,1}}{s^2} + \frac{A_{4,1}}{s^3} + \frac{A_{5,1}}{s^4} + \dots} \quad (2)$$

Los coeficientes adicionales se determinan por el algoritmo de Routh:

$$A_{i,j} = A_{i-2,j+1} - \frac{A_{i-2,i} * A_{i-1,j+1}}{A_{i-1,1}} \quad (3)$$

para  $i = 3, 4, \dots, 2n+1$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$

Si se requiere un modelo reducido de orden "m", entonces se calcularán  $2m$  términos de la forma  $A_{i,1}/A_{i+1,1}$ ; y se desprecia de (2) las fracciones siguientes.

$$hr[s] = \frac{1}{\frac{A_{1,1}}{s} + \frac{A_{2,1}}{s}} \quad (4)$$

$$\frac{A_{2m-1,1}}{A_{2m,1}} + \frac{s}{A_{2m,1}} + \frac{s}{A_{2m+1,1}}$$

Se encuentra que el grado del numerador es siempre igual a  $(m-1)$ ; es decir, que el orden relativo del modelo reducido es siempre 1. Kumar y Singh [21], simplificaron el procedimiento de (4) a la forma normal de la función de transferencia.

**A.2 METODO DE GUTMAN [17].** Este método reduce por separado el numerador y el denominador de la función de transferencia, sea  $h[s]$  y  $hr[s]$  las funciones de transferencia original y reducida de ordenes "n" y "m" respectivamente.

$$h[s] = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad hr[s] = \frac{Qr(s)}{Pr(s)} \quad (5)$$

definamos  $w = n - m$ ;  $P_n(s) = P(s)$  y  $Q_k(s) = Q(s)$

$$P_{n-1}(s) = P_n(s) - \frac{s}{n} \frac{d}{dt} [P_n(s)] \quad (6)$$

$$Q_{k-1}(s) = Q_k(s) - \frac{s}{k} \frac{d}{dt} [Q_k(s)] \quad (7)$$

y efectuamos estas operaciones "w" veces; con lo que obtenemos:

$$Qr(s) = Q_{k-w}(s) ; \quad Pr(s) = P_{n-w}(s)$$

Este método se basa en el siguiente:

Lema. Dado el polinomio

$$p_n(s) = K \prod (s-z_i) \quad (8)$$



entonces los ceros de  $d/dt[p_n(s)]$  no caen fuera del envolvente convexo que forman las raices de  $p_n(s)$ .

Una de las propiedades interesantes de este método es que las raices del polinomio  $p_{n-1}(s)$  estan "cerca" o dentro del envolvente convexo de las raices de  $p_n(s)$ . Otra de las propiedades es que es extremadamente simple y su prediccion es aceptable.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1950

sup as shown

lab record

and of

as indicated

NO COPY  
RETURN TO ALIA

\*\*\*\*\*

APENDICE B.

En éste apéndice se presentan los listados de los programas

a) PARSEVAL para el cálculo de fracciones parciales de  $H(s)$ , el cual es una modificación de un programa publicado por Melsa y Jones [25]; b) FACTO que determina una factorización prima de una matriz racional propia; c) SMILLAN determina la representación  $H(s) = N(s) / d(s)$  de una matriz racional, donde  $d(s)$  es el polinomio mínimo de  $H(s)$  ver [26] o [28]; y d) SMITH determina la forma de Smith de una matriz polinomial. Para obtener la forma de Smith-McMillan de  $H(s)$ , habrá que ejecutar primero el programa SMILLAN, posteriormente ejecutar el programa SMITH y efectuar las cancelaciones triviales en los elementos de la diagonal. Los programas b) FACTO, c) SMILLAN y d) SMITH siguen la nomenclatura y formatos definidos en Elliot [13]; el algoritmo del programa SMITH fué tomado de Callier y Desoer [7] y la implementación es nueva. Finalmente el programa RUTINAS asocia muchas de las rutinas comunes a los programas FACTO, SMILLAN y SMITH. Para una documentación completa ver Melsa [25] para el programa PARSEVAL, y Elliot [13] para los demás.

Todos los programas fueron desarrollados en una microcomputadora Columbia VP-1600 con 256K de memoria, compilados con el lenguaje Fortran77 versión 3.2 de Microsoft.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



\$floatcalls

PROGRAM PARSEV

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

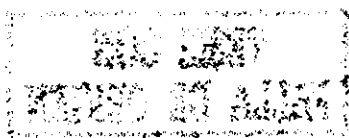
```
*****  
*  
*           P A R S E V A L           *  
*  
*****
```

```
DIMENSION A(40),B(40),M(40),RR(40),RI(40),CR(40),  
1 RESR(40,40),RESI(40,40),CI(40)  
CHARACTER IPP,KEY  
DATA IPP/'P'/  
EPSLN = 0.00001  
2 FORMAT (8F10.4)  
14 FORMAT (20X,'HAY UN POLO COMPLEJO MULTIPLE')  
2000 FORMAT (//,20X,'MATRIZ DE RESIDUOS - PARTE REAL',//)  
2001 FORMAT (5X,6F14.7)  
2002 FORMAT (//,20X,'MATRIZ DE RESIDUOS - PARTE IMAG',//)  
2003 FORMAT (5X,'COEFS DEL NUMERADOR EN POTENCIAS ASCEND',//)  
2004 FORMAT (5X,'COEFS DEL DENOMINAD EN POTENCIAS ASCEND',//)  
2005 FORMAT (5X,'GANANCIA = ',F10.4)  
2006 FORMAT (5X,'RAICES DEL DENOMINADOR',/7X,  
1 'PARTE REAL',5X,'PARTE IMAG',2X,'MULTIPLICIDAD')  
2007 FORMAT (A1,I2)  
2008 FORMAT (5X,2F14.7,I6)  
2010 FORMAT (5X,'EXPANSION EN FRACCIONES PARCIALES',//)  
2012 FORMAT (5X,45('*'))  
2013 FORMAT (5X,F10.3)  
2014 FORMAT (' RAICES DEL NUMERADOR',/7X,'PARTE REAL',8X,  
1 'PARTE IMAG')  
2015 FORMAT (5X,2F14.7)
```

C

```
WRITE (*,2010)  
DO 100 I = 1, 20  
DO 99 J = 1, 20  
RESR(I,J) = 0.0  
RESI(I,J) = 0.0  
99 CONTINUE  
A(I) = 0.0  
B(I) = 0.0  
M(I) = 0  
RR(I) = 0.0  
RI(I) = 0.0  
CR(I) = 0.0  
CI(I) = 0.0  
100 CONTINUE  
READ (*,2) GAIN  
WRITE (*,2005) GAIN  
GAIN = GAIN * GAIN  
KOUNT = 0  
400 KOUNT = KOUNT + 1  
READ (*,2007) KEY,N  
NP = N + 1  
IF (KEY.EQ.IPP) GO TO 404
```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



```

      IF (N.EQ.0) GO TO 404
      I = 0
401  I = I + 1
      READ (*,2) RREAL,RIMAG
      RR(I) = - RREAL
      RI(I) = RIMAG
      IF (RIMAG) 402,403,402
402  I = I + 1
      RR(I) = - RREAL
      RI(I) = - RIMAG
403  IF (I.LT.N) GO TO 401
      CALL SEMBL(N,RR,RI,B)
      GO TO (407,410), KOUNT
404  READ (*,2) (B(I),I=1,NP)
      B(NP) = 1.
      IF (N) 406,406,405
405  CALL PROOT(N,B,RR,RI,+1)
406  GO TO (407,410), KOUNT
407  DO 408 I = 1, NP
408  A(I) = B(I)
      NNUM = NP
      NNM = N
      DO 500 I = 1, NNM
          RR(I+N) = - RR(I)
          RI(I+N) = RI(I)
500  CONTINUE
      CALL AACONJ(A,NNM,GAIN)
      WRITE (*,2003)
      WRITE (*,2013) (A(I),I=1,NNM+1)
      IF (N.LE.0) GO TO 400
      WRITE (*,2014)
      DO 409 I = 1, NNM
409  WRITE (*,2015) RR(I),RI(I)
      GO TO 400
410  NDN = NP
      NDM = N
      DO 590 I = 1, NDM
          RR(I+N) = - RR(I)
          RI(I+N) = RI(I)
590  CONTINUE
      NDNOM = NDM
      NDM = NDM + NDM
      IF (FLOAT(NDNOM)/2. - FLOAT(NDNOM/2).EQ.0.) GO TO 600
      GAIN = - GAIN
600  DO 411 I = 1, NNM+1
411  A(I) = A(I) * GAIN
      IT = 0
      DO 3 I = 1, NDM
          IF (IT) 6,6,20
20  DO 4 J = 1, IT
          IF (ABS(RR(I) - CR(J)) - EPSLN) 5,5,4
          IF (ABS(RI(I) - CI(J)) - EPSLN) 3,3,4
5  IF (ABS(RI(I) - CI(J)) - EPSLN) 3,3,4
4  CONTINUE
6  IT = IT + 1
      CR(IT) = RR(I)

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

      CI(IT) = RI(I)
      DO 7 J = 1, NDM
        IF (ABS(CR(IT) - RR(J)) - EPSLN) 8,8,7
8      IF (ABS(CI(IT) - RI(J)) - EPSLN) 9,9,7
9      M(IT) = M(IT) + 1
7      CONTINUE
3 CONTINUE

C
C      * CLASIFICA LAS RAICES
C
      CALL SORT(CR,CI,IT,M)
      WRITE (*,2012)
      WRITE (*,2006)
      WRITE (*,2008) (CR(I),CI(I),M(I),I=1,IT)
      DO 11 I = 1, IT
        IF (ABS(CI(I)).LE.EPSLN) GO TO 11
12      IF (M(I) - 2) 11,13,13
13      WRITE (*,14)
        GO TO 102
11 CONTINUE
      CALL PFEXP(A,NNM,CR,CI,M,IT,RESR,RESI)
      WRITE (*,2012)
205 WRITE (*,2000)
      DO 209 I = 1, IT
        IJL = M(I)
209 WRITE (*,2001) (RESR(I,J),J=1,IJL)
        WRITE (*,2002)
        DO 210 I = 1, IT
          ILL = M(I)
210 WRITE (*,2001) (RESI(I,J),J=1,ILL)
        WRITE (*,2012)

C
C      * DETERMINA EL % DE CADA RAIZ
C
      IT = IT / 2
      SUMA = 0.
      DO 700 I = 1, IT
        IJL = M(I)
        DO 710 J = 1, IJL
          SUMA = SUMA + RESR(I,J)
710 CONTINUE
700 CONTINUE
      DO 720 I = 1, IT
        IJL = M(I)
        DO 730 J = 1, IJL
          RESR(I,J) = (RESR(I,J) * 100.) / SUMA
730 CONTINUE
720 CONTINUE
      WRITE (*,2020)
2020 FORMAT (/,10X,'% DE ENERGIA DE CADA MODO',/)
      DO 750 I = 1, IT
        IJL = M(I)
        DO 760 J = 1, IJL
          K = IJL - J + 1
          WRITE (*,2030) CR(I),CI(I),K,RESR(I,J)

```

```

760     CONTINUE
750 CONTINUE
2030 FORMAT (/, ' % DE ENERG DE (',F14.7,' + j ',F14.7,
1      ') ** -',I2,' = ',F14.6,' % ')
102 STOP
END

```

```

C
C     SUBROUTINE AACONJ(A,NNM,GAIN)

```

```

C     * CALCULA A(S) * A(-S)
C
DIMENSION A(40),AA(40),Z(40)
NUM = NNM + 1
DO 10 I = 1, NUM
    AA(I) = A(I)
10 CONTINUE
DO 20 I = 2,NUM,2
    AA(I) = - AA(I)
20 CONTINUE
CALL PMUL(Z,IZ,A,NNM,AA,NNM)
CALL PEXCG(A,NNM,Z,IZ)
IF (A(NNM+1)) 30,40,40
30 DO 35 I = 1, NNM+1
    A(I) = - A(I)
35 CONTINUE
GAIN = - GAIN
40 RETURN
END

```

```

C
C     SUBROUTINE DIVP (P,IP,X,IXA,Y,IYA,TOL,IER)

```

```

C     * CALCULA P(S) = X(S) / Y(S)
C
DIMENSION X(40),Y(40),P(40)
IX = IXA + 1
INUM = IX
IY = IYA + 1
CALL NORMP(Y,IY,TOL)
IF (IY) 50,50,10
10 IP = IX - IY + 1
IF (IP) 20,30,60
20 IP = 0
30 IER = 0
40 RETURN
50 IER = 1
GO TO 40
60 IX = IY - 1
IF (IX.EQ.0) GO TO 110
I = IP
70 II = I + IX
P(I) = X(II) / Y(IY)
DO 80 K = 1, IX
    J = K - 1 + I

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

X(J) = X(J) - P(I) * Y(K)
80 CONTINUE
I = I - 1
IF (I) 90,90,70
90 CALL NORMP(X,IX,TOL)
IP = IP - 1
GO TO 30
110 DO 120 K = 1, INUM
P(K) = X(K) / Y(I)
X(K) = 0.0
120 CONTINUE
GO TO 30
END

```

C  
C  
C  
C  
C

SUBROUTINE NORMP (X,IX,EPS)

\* HACE CERO LOS COEFICIENTES (LEADING) QUE NO NO SOBREPASEN UN EPSILON

```

DIMENSION X(40)
1 IF (IX) 4,4,2
2 IF (ABS(X(IX)) - EPS) 3,3,4
3 IX = IX - 1
GO TO 1
4 RETURN
END

```

C  
C  
C  
C

SUBROUTINE PADD (Z,IZ,X,IXA,Y,IYA)

\* CALCULA Z(S) = X(S) + Y(S)

```

DIMENSION Z(40),X(40),Y(40)
IX = IXA + 1
IY = IYA + 1
ND = IX
IF (IX - IY) 10,20,20
10 ND = IY
20 IF (ND) 90,90,30
30 DO 80 I = 1, ND
IF (I-IX) 40,40,60
40 IF (I-IY) 50,50,70
50 Z(I) = X(I) + Y(I)
GO TO 80
60 Z(I) = Y(I)
GO TO 80
70 Z(I) = X(I)
80 CONTINUE
90 IZ = ND - 1
RETURN
END

```

C  
C

SUBROUTINE PEXCG (A,IA,B,IB)

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**

```

C
C * A(S) = B(S)
C
DIMENSION A(40),B(40)
JJ = IB + 1
DO 1 I = 1, JJ
    A(I) = B(I)
1 CONTINUE
IA = IB
RETURN
END

C
C SUBROUTINE PFEXP (A,NNM,CR,CI,MST,IT,RESR,RESI)
C
C * DETERMINA LA EXPANSION EN FRACCIONES PARCIALES
C DE UNA FUNCION RACIONAL PROPIA
C
DIMENSION A(40),CR(40),CI(40),RESR(40,40),RESI(40,40),
1 D(40),P(40),Q(40),DX(40),DXX(40),M(40),MST(40),
2 ANS(40)
DO 198 I = 1, IT
198 M(I) = MST(I)
DO 199 I = 1, 20
    D(I) = 0.0
    P(I) = 0.0
    Q(I) = 0.0
    DXX(I) = 0.0
    DX(I) = 0.0
199 CONTINUE
200 DO 30 I = 1, IT
    CALL PVAL(A,NNM,CR(I),CI(I),VR,VI)
    IMI = M(I)
    PR = 1.
    PI = 0.0
    IF (IMI) 30,30,390
390 DO 31 J = 1, IT
    IF (I-J) 32,31,32
    32 IMJ = M(J)
    IF (IMJ) 31,31,33
    33 A1 = CR(I) - CR(J)
    B1 = CI(I) - CI(J)
    DO 34 K = 1, IMJ
        A2 = PR * A1 - PI * B1
        B2 = PR * B1 + A1 * PI
        PR = A2
        PI = B2
34 CONTINUE
31 CONTINUE
DIV = PR * PR + PI * PI
RESR(I,IMI) = (PR * VR + PI * VI) / DIV
RESI(I,IMI) = (PR * VI - PI * VR) / DIV
30 CONTINUE
DO 300 I = 1, IT
    IF (M(I) - 1) 300,300,301
300 CONTINUE

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

```

GO TO 205
301 JJ = 0
DO 40 I = 1, 20
    Q(I) = 0.0
    P(I) = 0.0
40 CONTINUE
IQ = 0
IQ = 0
Q(1) = 1.
42 JJ = JJ + 1
ICH = M(JJ)
IF (ICH) 42,42,422
422 IF (CI(JJ)) 43,45,43
43 D(1) = -2. * RESI(JJ,ICH) * CI(JJ) - 2. * RESR(JJ,ICH) * CR(JJ)
D(2) = 2. * RESR(JJ,ICH)
ID = 1
CALL PMUL(DX,IDX,D,ID,Q,IQ)
D(1) = CI(JJ) * CI(JJ) + CR(JJ) * CR(JJ)
D(2) = 2. * CR(JJ)
D(3) = 1.
ID = 2
CALL PMUL(DXX,IDX,P,IP,D,ID)
CALL PADD(P,IP,DX,IDX,DXX,IDX)
CALL PMUL(DX,IX,Q,IQ,D,ID)
CALL PEXCG(Q,IQ,DX,IX)
JJ = JJ + 1
IF (IT - JJ) 500,500,42
45 D(1) = - CR(JJ)
D(2) = 1.
ID = 1
DO 46 IN = 1, ICH
    CALL PMUL(DX,IXX,D,ID,P,IP)
    CALL PEXCG(P,IP,DX,IXX)
46 CONTINUE
IQP1 = IQ + 1
DO 48 IXX = 1, IQP1
    DXX(IXX) = RESR(JJ,ICH) * Q(IXX)
48 CONTINUE
IK = IP
CALL PADD(P,IP,DX,IK,DXX,IQ)
DO 49 IXX = 1, ICH
    CALL PMUL(DX,IKX,D,ID,Q,IQ)
    CALL PEXCG(Q,IQ,DX,IKX)
49 CONTINUE
IQ = IKX
IF (JJ - IT) 42,500,500
500 CALL SUBP(ANS,IANS,A,NNM,P,IP)
CALL PEXCG(A,NNM,ANS,IANS)
TDL = 0.001
I = 0
501 I = I + 1
IF (M(I)) 501,501,502
502 M(I) = M(I) - 1
IF (CI(I)) 507,504,507
507 D(1) = CR(I) * CR(I) + CI(I) * CI(I)

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

D(2) = -2. * CR(I)
D(3) = 1.
ID = 2
I = I + 1
M(I) = M(I) - 1
GO TO 505
504 D(1) = - CR(I)
D(2) = 1.
ID = 1
505 CALL DIVP(ANS, IANS, A, NNM, D, ID, TOL, IER)
CALL PEXCG(A, NNM, ANS, IANS)
IF (I - IT) 501, 200, 200
205 RETURN
END

```

```

C
C
SUBROUTINE PMUL (Z, IZ, X, IXA, Y, IYA)

```

```

C
C
* Z(S) = X(S) * Y(S)
C
DIMENSION X(40), Y(40), Z(40)
IX = IXA + 1
IY = IYA + 1
IF (IX * IY) 10, 10, 20
10 IZ = 0
GO TO 50
20 IZ = IX + IY
DO 30 I = 1, 20
    Z(I) = 0.0
30 CONTINUE
DO 40 I = 1, IX
    DO 40 J = 1, IY
        K = I + J - 1
        Z(K) = Z(K) + X(I) * Y(J)
40 CONTINUE
IZ = IZ - 2
50 RETURN
END

```

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

```

C
C
SUBROUTINE PROOT (N, A, U, V, IR)
C
C
* DETERMINA LAS RAICES DE UN POLINOMIO POR EL METODO
C
C
DE BARSTOW MODIFICADO

```

```

DIMENSION A(40), U(40), V(40), H(21), B(21), C(21)
IREV = IR
NC = N + 1
DO 1 I = 1, NC
1 H(I) = A(I)
P = 0.
Q = 0.
R = 0.
3 IF (H(1)) 4, 2, 4
2 NC = NC - 1

```

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA



```

V(NC) = 0.
U(NC) = 0.
DO 1002 I = 1, NC
1002 H(I) = H(I+1)
GO TO 3
4 IF (NC - 1) 5,100,5
5 IF (NC - 2) 7,6,7
6 R = - H(1) / H(2)
GO TO 50
7 IF (NC - 3) 9,8,9
8 P = H(2) / H(3)
Q = H(1) / H(3)
GO TO 70
9 IF (ABS(H(NC-1)/H(NC)) - ABS(H(2)/H(1))) 10,19,19
10 IREV = - IREV
M = NC / 2
DO 11 I = 1, M
NL = NC + 1 - I
F = H(NL)
H(NL) = H(I)
11 H(I) = F
IF (Q) 13,12,13
12 P = 0.0
GO TO 15
13 P = P / Q
Q = 1. / Q
15 IF (R) 16,19,16
16 R = 1. / R
19 E = 5.E-10
B(NC) = H(NC)
C(NC) = H(NC)
B(NC+1) = 0.0
C(NC+1) = 0.0
NP = NC + 1
20 DO 49 J = 1, 1000
DO 21 I1 = 1, NP
I = NC - I1
B(I) = H(I) + R * B(I+1)
21 C(I) = B(I) + R * C(I+1)
IF (ABS(B(1) / H(1)) - E) 50,50,24
24 IF (C(2)) 23,22,23
22 R = R + 1.
GO TO 30
23 R = R - B(1) / C(2)
30 DO 37 I1 = 1, NP
I = NC - I1
B(I) = H(I) - P * B(I+1) - Q * B(I+2)
37 C(I) = B(I) - P * C(I+1) - Q * C(I+2)
IF (H(2)) 32,31,32
31 IF (ABS(B(2)/H(1)) - E) 33,33,34
32 IF (ABS(B(2)/H(2)) - E) 33,33,34
33 IF (ABS(B(1)/H(1)) - E) 70,70,34
34 CBAR = C(2) - B(2)
D = C(3) ** 2 - CBAR * C(4)
IF (D) 36,35,36

```

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

```

35   P = P - 2.
      Q = Q * (Q + 1.)
      GO TO 49
36   P = P + (B(2) * C(3) - B(1) * C(4)) / D
      Q = Q + (-B(2) * C(3) + B(1) * C(4)) / D
49  CONTINUE
      E = E * 10.
      GO TO 20
50  NC = NC - 1
      V(NC) = 0.
      IF (IREV) 51,52,52
51  U(NC) = 1. / R
      GO TO 53
52  U(NC) = R
53  DO 54 I = 1, NC
54   H(I) = B(I+1)
      GO TO 4
70  NC = NC - 2
      IF (IREV) 71,72,72
71  QP = 1. / Q
      PP = P / (Q * 2.)
      GO TO 73
72  QP = Q
      PP = P / 2.
73  F = PP ** 2 - QP
      IF (F) 74,75,75
74  U(NC+1) = - PP
      U(NC) = - PP
      V(NC+1) = SQRT(-F)
      V(NC) = -V(NC+1)
      GO TO 76
75  IF (PP) 81,80,81
80  U(NC+1) = - SQRT(F)
      GO TO 82
81  U(NC+1) = - (PP / ABS(PP)) * (ABS(PP) + SQRT(F))
82  CONTINUE
      V(NC+1) = 0.
      U(NC) = QP / U(NC+1)
      V(NC) = 0.
76  DO 77 I = 1, NC
77   H(I) = B(I+2)
      GO TO 4
100 RETURN
      END

```

C  
C  
C  
C  
C

SUBROUTINE PVAL (A,NN,PR,PI,VR,VI)

EVALUA A(S) EN  $S = PR + J * PI$

DIMENSION A(40)  
 COMPLEX S,P  
 S = CMPLX(PR,PI)  
 P = CMPLX(A(NN+1),0.)  
 DO 100 J = 1, NN

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

```

100   P = P * S + A(NN+1-J)
      VR = REAL(P)
      VI = AIMAG(P)
      RETURN
      END

C
C
      SUBROUTINE SEMBL (N,RR,RI,CF)
C
C   * DETERMINA EL POLINOMIO A PARTIR DE SUS RAICES
C
      COMPLEX R(40),C(21),PR,SUM
      DIMENSION RR(40),RI(40),J(21),CF(40)
      NN = N + 1
      DO 10 I = 1, N
10     R(I) = CMPLX(RR(I),RI(I))
      CF(NN) = 1.
      DO 14 M = 1, N
          SUM = CMPLX(0.0,0.0)
          L = 1
          J(1) = 1
          GO TO 2
1         J(L) = J(L) + 1
2         IF (L - M) 3,5,50
3         MM = M - 1
          DO 4 I = L, MM
              II = I + 1
4             J(II) = J(I) + 1
5             PR = CMPLX(1.0,0.0)
          DO 7 I = 1, M
              ICK = J(I)
7             PR = - PR * R(ICK)
              SUM = SUM + PR
          DO 6 I = 1, M
              L = M - I + 1
              IF (J(L)-N+M-L) 1,6,50
6             CONTINUE
          MP = N - M + 1
14     CF(MP) = REAL(SUM)
      RETURN
50     WRITE (*,2000)
2000    FORMAT (/,10X,'ERROR EN SEMBL',/)
      RETURN
      END

C
C
      SUBROUTINE SORT (AR,AI,IT,ICK)
C
C   * CLASIFICA, DE MENOR A MAYOR, LOS ELEMENTOS
C     DE LOS ARREGLOS AR Y AI
C
      DIMENSION AR(40),AI(40),ICK(40)
      ITM1 = IT - 1
      IF (ITM1) 30,30,1
1     DO 10 I = 1, ITM1

```

```

IP1 = I + 1
DO 20 J = IP1, IT
  IF (AR(I) - AR(J)) 20,2,3
2  IF (ABS(AI(I)) - ABS(AI(J))) 20,20,3
3  SAVE1 = AR(I)
  SAVE2 = AI(I)
  ISAVE = ICK(I)
  AR(I) = AR(J)
  AI(I) = AI(J)
  ICK(I) = ICK(J)
  AR(J) = SAVE1
  AI(J) = SAVE2
  ICK(J) = ISAVE
20 CONTINUE
10 CONTINUE
30 RETURN
END

```

C  
C  
C  
C

```

SUBROUTINE SUBP (Z,IZ,X,IXA,Y,IYA)
* CALCULA Z(S) = X(S) - Y(S)
DIMENSION X(40),Y(40),Z(40)
IX = IXA + 1
IY = IYA + 1
ND = IX
IF (IX - IY) 10,20,20
10 ND = IY
20 IF (ND) 90,90,30
30 DO 80 I = 1, ND
  IF (I - IX) 40,40,60
  IF (I - IY) 50,50,70
  Z(I) = X(I) - Y(I)
  GO TO 80
  Z(I) = - Y(I)
  GO TO 80
  Z(I) = X(I)
80 CONTINUE
90 IZ = ND - 1
RETURN
END

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#FLOATCALLS

```
PROGRAM FACTO
*****
C *
C * Factorizacion Prima T(s) = R(s)*Inv(P(s)) *
C *
C *****
IMPLICIT REAL*8 (T,R,P,X)
DIMENSION TD(4,4,40),TN(4,4,40),R(4,4,40),RN(4,4,40),
* P(4,4,40),PD(4,4,40),XX(40),P2(40),PROD(40),
* PDEN(40),PCOC(40),XNUM(40)
CHARACTER IND*1
WRITE(*,'(A)') ' DESEA IMPRIMIR LOS RESULTADOS EN IMPR O PANT'
WRITE(*,'(A)') ' <I/P>'
READ(*,*) IND
IF (IND.EQ.'I'.OR.IND.EQ.'i') OPEN(6,FILE='LPT1:',STATUS='NEW')
IF (IND.EQ.'P'.OR.IND.EQ.'p') OPEN(6,FILE='CON:',STATUS='NEW')
WRITE(6,100)
DO 5 I = 1, 4
  DO 5 J = 1, 4
    DO 5 K = 1, 40
      TN(I,J,K) = 0.0
      TD(I,J,K) = 0.0
      P(I,J,K) = 0.0
      R(I,J,K) = 0.0
      PD(I,J,K) = 0.0
      RN(I,J,K) = 0.0
5 CONTINUE
DO 7 K = 1, 40
  XX(K) = 0.0
  P2(K) = 0.0
  PROD(K) = 0.0
  PDEN(K) = 0.0
  PCOC(K) = 0.0
7 CONTINUE
ID1 = 40
WRITE(*,'(A)') ' TECLEE TOLERANCIA'
READ(*,*) TOL
WRITE(6,800)
CALL PMREAD(TN,N,M)
CALL SPLIT(TN,RN,1,N,1,M,L2,M2,ID1)
WRITE(6,810)
CALL PMREAD(TD,N1,M1)
IF (N.NE.N1.OR.M.NE.M1) STOP
CALL SPLIT(TD,PD,1,N,1,M,L2,M2,ID1)
WRITE(6,900)
CALL PRNT(RN,N,M,ID1,TOL)
WRITE(6,910)
CALL PRNT(TD,N,M,ID1,TOL)
CALL TRFCT(TN,TD,P,R,RN,M,N,ID1,TOL)
WRITE(6,920)
CALL PRNT(P,N,M,ID1,TOL)
WRITE(6,930)
CALL PRNT(R,N,M,ID1,TOL)
```

```

800 FORMAT (//,10X,'TECLEE MATRIZ DE NUMERADORES',/)
810 FORMAT (//,10X,'TECLEE MATRIZ DE DENOMINADORES',/,
1      10X,'RECUERDE QUE UN ELEMENTO CERO, SU DENOMINADOR',
2      ,/,10X,'DEBE SER 1.',/)
900 FORMAT (13X,//,'***** MATRIZ DE NUMEPADORES *****')
910 FORMAT (13X,//,'***** MATRIZ DE DENOMINADORES *****')
920 FORMAT (1X,//,'***** MATRIZ P DE T=R*INVIPJ *****')
930 FORMAT (1X,//,'***** MATRIZ R DE T=R*INVIPJ *****')
100 FORMAT (1X,//,25X,'FACTORIZACION PRIMA')
STOP
END

```

C

```

SUBROUTINE TRFCT (TN,TD,P,R,AUX,M,N,IDI,TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,R,P,X)
DIMENSION P(4,4,40),R(4,4,40),TN(4,4,40),TD(4,4,40),X(40),
1      AUX(4,4,40),P1(40),P2(40),XNUM(40),XDEN(40),
2      XCOC(40),XTEMP(40)
L = M
IF (M.LT.N) L = N
DO 1 I = 1, L
DO 1 J = 1, L
DO 1 K = 1, IDI
P(I,J,K) = 0.0
R(I,J,K) = 0.0
1 CONTINUE
IF (N.NE.1) GO TO 20

```

C  
C  
C

\* CASO CUANDO LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA TIENE UN RENGLON

```

DO 15 I = 1, M
K1 = NZEL(TD,I,N,IDI,TOL)
DO 5 K = 1, K1
P(I,I,K) = TD(I,N,K)
5 CONTINUE
K1 = NZEL(TN,I,N,IDI,TOL)
DO 10 K = 1, K1
R(I,N,K) = TN(I,N,K)
10 CONTINUE
15 CONTINUE
GO TO 110

```

C  
C  
C

\* EJECUTA LA FACTORIZACION MATRICIAL DIAGONAL

```

20 DO 70 I = 1, M
DO 30 J = 1, N
DO 30 K = 1, IDI
AUX(I,J,K) = TD(I,J,K)
30 CONTINUE
CALL GCRD (AUX,R,N,1,IDI,TOL,IER)
DO 35 K = 1, IDI
XTEMP(K) = AUX(1,1,K)
P1(K) = 0.0
35 CONTINUE
P1(1) = 1.0
DO 50 J = 1, N

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

DO 40 K = 1, ID1
    XNUM(K) = TD(I,J,K)
40 CONTINUE
    CALL DIVPOL(XNUM,XTEMP,XCOC, ID1, TOL)
    CALL MULPOL(P1,XCOC,P2, ID1, TOL)
    DO 45 K = 1, ID1
        P1(K) = P2(K)
45 CONTINUE
50 CONTINUE
    CALL MULPOL(P1,XTEMP,P2, ID1, TOL)
    DO 60 K = 1, ID1
        P(I,I,K) = P2(K)
60 CONTINUE
70 CONTINUE
    DO 100 I = 1, M
        DO 100 J = 1, N
            DO 80 K = 1, ID1
                XNUM(K) = P(I,I,K)
                XDEN(K) = TD(I,J,K)
                P1(K) = TN(I,J,K)
80 CONTINUE
                CALL DIVPOL(XNUM,XDEN,XCOC, ID1, TOL)
                CALL MULPOL(P1,XCOC,P2, ID1, TOL)
                DO 85 K = 1, ID1
                    R(I,J,K) = P2(K)
85 CONTINUE
100 CONTINUE

```

```

C
C * DETERMINA LA FACTORIZACION PRIMA
C

```

```

110 CALL RCOMB(P,R,TN,M,N,M,N1,M1, ID1)
    CALL RCOMB(P,R,TD,M,N,M,N1,M1, ID1)
    CALL GCRD(TN,R,N1,M1, ID1, TOL, IER)
    DO 120 I = 1, M1
        DO 120 J = I + 1, M1
            TN(I,J,1) = 0.
120 CONTINUE

```

```

    CALL FACT(TD,TN,P,N1,M1, ID1, TOL)
    LO = M + 1
    MO = 1
    CALL SPLIT(P,R,LO,N1,MO,M,K1,K2, ID1)
    RETURN
    END

```

```

C
SUBROUTINE DIVPOL(XNUM,PDEN,PCOC, ID1, TOL)
    IMPLICIT REAL*8 (P,X,T)
    DIMENSION XNUM(40),PDEN(40),PCOC(40)
    DO 5 K = 1, ID1
        INUM = ID1 + 1 - K
        IF (DABS(XNUM(INUM)).GT.TOL) GO TO 10
5 CONTINUE
10 DO 15 K = 1, ID1
    IDEN = ID1 + 1 - K
    IF (DABS(PDEN(IDEN)).GT.TOL) GO TO 20
15 CONTINUE

```

```

RETURN
20 IX = INUM
   IY = IDEN
   DO 30 K = 1, ID1
      PCOC(K) = 0.0
30 CONTINUE
   IP = IX - IY + 1
   IX = IY - 1
   IF (IX.EQ.0) GO TO 110
   I = IP
70 II = I + IX
   PCOC(I) = XNUM(II) / PDEN(IY)
   DO 80 K = 1, IX
      J = K - 1 + I
      XNUM(J) = XNUM(J) - PCOC(I) * PDEN(K)
80 CONTINUE
   I = I - 1
   IF (I) 90,90,70
90 DO 100 K = IX + 1, ID1
   XNUM(K) = 0.0
100 CONTINUE
RETURN
110 DO 120 I = 1, INUM
   PCOC(I) = XNUM(I) / PDEN(I)
   XNUM(I) = 0.0
120 CONTINUE
RETURN
END

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

C

```

SUBROUTINE MULPOL(P1,P2,PROD,ID1,TOL)
IMPLICIT REAL*8 (P,T)
DIMENSION P1(40),P2(40),PROD(40)

```

C

```

* PROD(S) = P1(S) * P2(S)

```

C

C

```

DO 5 K = 1, ID1
   I1 = ID1 + 1 - K
   IF (DAES(P1(I1)).GT.TOL) GO TO 10
5 CONTINUE
10 DO 15 K = 1, ID1
   I2 = ID1 + 1 - K
   IF (DAES(P2(I2)).GT.TOL) GO TO 20
15 CONTINUE
20 IP = I1 + I2
   DO 30 I = 1, ID1
      PROD(I) = 0.0
30 CONTINUE
   DO 40 I = 1, I1
      DO 50 J = 1, I2
         K = I + J - 1
         PROD(K) = PROD(K) + P1(I) * P2(J)
50 CONTINUE
40 CONTINUE
RETURN
END

```



#FLOATCALLS

```
PROGRAM SMILLAN
C *****
C *
C *      Determina T[s] = N(s) / d(s)      *
C *      d(s) = polinomio minimo de T[s]  *
C *
C *****
IMPLICIT REAL*8 (T,R,P,X)
DIMENSION TD(4,4,40),TN(4,4,40),R(4,4,40),RN(4,4,40),
*      P(4,4,40),PD(4,4,40),XX(40),P2(40),PROD(40),
*      PDEN(40),PCOC(40),XNUM(40)
CHARACTER IND*1
WRITE(*,'(A)') ' DESEA IMPRIMIR LOS RESULTADOS EN IMPR O PANT'
WRITE(*,'(A)') ' <I/P>'
READ(*,*) IND
IF (IND.EQ.'I'.OR.IND.EQ.'i') OPEN(6,FILE='LPT1:',STATUS='NEW')
IF (IND.EQ.'P'.OR.IND.EQ.'p') OPEN(6,FILE='CON:',STATUS='NEW')
WRITE(6,100)
DO 5 I = 1, 4
  DO 5 J = 1, 4
    DO 5 K = 1, 40
      TN(I,J,K) = 0.0
      TD(I,J,K) = 0.0
      P(I,J,K) = 0.0
      R(I,J,K) = 0.0
      PD(I,J,K) = 0.0
      RN(I,J,K) = 0.0
5 CONTINUE
DO 7 K = 1, 40
  XX(K) = 0.0
  P2(K) = 0.0
  PROD(K) = 0.0
  PDEN(K) = 0.0
  PCOC(K) = 0.0
7 CONTINUE
ID1 = 40
WRITE(*,'(A)') ' TECLEE TOLERANCIA'
READ(*,*) TOL
WRITE(6,800)
CALL PMREAD(TN,N,M)
WRITE(6,810)
CALL PMREAD(TD,N1,M1)
IF (N.NE.N1.OR.M.NE.M1) STOP
WRITE(6,900)
CALL PRNT(TN,N,M,ID1,TOL)
WRITE(6,910)
CALL PRNT(TD,N,M,ID1,TOL)
CALL POLMIN(TD,XX,N,M,ID1,TOL)
WRITE(6,'(A)') '
WRITE(6,'(A)') ' POLINOMIO MINIMO
WRITE(6,'(A)') '
KX = NZEL1(XX,ID1,TOL)
TX = XX(KX)
DO 30 K = 1, ID1
```

```

      XX(K) = XX(K) / TX
30 CONTINUE
  CALL PRNT3(XX, ID1, TOL)
  DO 50 J = 1, M
    DO 60 I = 1, N
      DO 70 K = 1, ID1
        PDEN(K) = TD(I, J, K)
        P2(K) = TN(I, J, K)
        XNUM(K) = XX(K)
70 CONTINUE
      CALL DIVPOL(XNUM, PDEN, PCOC, ID1, TOL)
      CALL MULPOL(PCOC, P2, PROD, ID1, TOL)
      DO 80 K = 1, ID1
        TN(I, J, K) = PROD(K)
80 CONTINUE
60 CONTINUE
50 CONTINUE

C
  CALL PRNT(TN, N, M, ID1, TOL)
C
C
C
  * CREA ARCHIVO INTERMEDIO

  OPEN (7, FILE='A:TN.DAT', STATUS='NEW')
  WRITE (7, 1000) N, M
  DO 1010 I = 1, N
    DO 1020 J = 1, M
      DO 1030 K = 1, ID1
        WRITE (7, *) TN(I, J, K)
1030 CONTINUE
1020 CONTINUE
1010 CONTINUE
1000 FORMAT (Z13)
      CLOSE (7)

800 FORMAT (//, 10X, 'TECLEE MATRIZ DE NUMERADORES', /)
810 FORMAT (//, 10X, 'TECLEE MATRIZ DE DENOMINADORES', /,
1 10X, 'RECUERDE QUE UN ELEMENTO CERO, SU DENOMINADOR',
2 10X, 'DEBE SER 1.', /)
100 FORMAT (1X, //, 25X, 'SMILLAN')
  STOP
  END

C
C
  SUBROUTINE POLMIN (TD, X, N, M, ID1, TOL)
C *****
C *
C * DETERMINA EL POLINOMIO MINIMO (MINIMO COMUN
C * MULTIPLO DE LOS ELEMENTOS) DE LA MATRIZ TD
C *
C *****
  IMPLICIT REAL*8 (A, T, X)
  DIMENSION TD(4, 4, 40), A(2, 40), X(40), XNUM(40), XDEN(40), XCOC(40)
  DO 10 K = 1, ID1
    A(1, K) = 0.0
    X(K) = 0.0
10 CONTINUE

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

```

A(1,1) = 1.0
X(1) = 1.0
DO 100 I = 1, N
  DO 90 J = 1, M
    DO 30 K = 1, ID1
      A(2,K) = TD(I,J,K)
30    CONTINUE
      CALL MCD(A, ID1, TOL)
      DO 40 K = 1, ID1
        XDEN(K) = A(1,K)
        XNUM(K) = TD(I,J,K)
40    CONTINUE
      CALL DIVPOL (XNUM, XDEN, XCOC, ID1, TOL)
      CALL MULPOL (XCOC, X, XNUM, ID1, TOL)
      DO 50 K = 1, ID1
        X(K) = XNUM(K)
        A(1,K) = XNUM(K)
50    CONTINUE
90    CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C
SUBROUTINE MCD (A, ID1, TOL)
C *****
C *
C *   DETERMINA EL MAXIMO COMUN DIVISOR DE LOS
C *   ELEMENTOS A(1,*) y A(2,*)
C *
C *****
IMPLICIT REAL*8 (A,T,X)
DIMENSION A(2,40), XNUM(40), XDEN(40), XCOC(40)
100 KX = NZEL2 (A, 1, ID1, TOL)
    KY = NZEL2 (A, 2, ID1, TOL)
    IF (KY.EQ.0) GO TO 500
    IF (KY.LT.KX) CALL RWSHF1(A, ID1)
    DO 200 K = 1, ID1
      XDEN(K) = A(1,K)
      XNUM(K) = A(2,K)
200 CONTINUE
    CALL DIVPOL (XNUM, XDEN, XCOC, ID1, TOL)
    CALL OPREN1(A, XCOC, ID1, TOL)
    GO TO 100
500 RETURN
END

```

```

C
C
FUNCTION NZEL2 (A, I, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,X)
DOUBLE PRECISION DABS
DIMENSION A(2,40)
DO 5 K = 1, ID1
  K1 = ID1 + 1 - K
  X = DABS(A(I,K1))

```

```
IF (X.GT.TOL) GO TO 7
5 CONTINUE
6 K1 = 0
7 NZEL2 = K1
RETURN
END
```

C  
C

```
SUBROUTINE OPREN1 (A,PMUL, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,P,T)
DIMENSION A(2,40),
1 P1(40), PMUL(40), TEMP(40)
```

C  
C  
C

```
* ELEM REN 2 = ELEM REN 2 ANT - PMUL * ELEM RENGLO 1

DO 20 K = 1, ID1
P1(K) = A(1,K)
20 CONTINUE
CALL Mulpol(P1,PMUL,TEMP, ID1, TOL)
DO 30 K = 1, ID1
A(2,K) = A(2,K) - TEMP(K)
30 CONTINUE
RETURN
END
```

C  
C

```
SUBROUTINE RVSHF1 (A, ID1)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,U)
DIMENSION A(2,40)
DO 20 K = 1, ID1
TMP = A(1,K)
A(1,K) = A(2,K)
A(2,K) = TMP
20 CONTINUE
RETURN
END
```

C  
C  
C  
C  
C

Las siguientes subrutinas aparecen listadas en el programa  
FACTO

```
SUBROUTINE DIVPOL (XNUM, PDEN, PCOC, ID1, TOL)
```

```
SUBROUTINE Mulpol (P1, P2, PROD, ID1, TOL)
```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

\$FLOATCALLS

```
PROGRAM SMITH
C *****
C *
C *   Determina la forma de Smith de una   *
C *   matriz polinomial                   *
C *
C *****
IMPLICIT REALS (T,R,P,U,X)
DIMENSION TN(4,4,40),UI(4,4,40),UTINV(4,4,40),UDINV(4,4,40),
* UD(4,4,40),T1(4,4,40),PDEN(40),PCOC(40),XNUM(40)
CHARACTER IND*1
WRITE (*,'(A)') ' DESEA LOS RESULTADOS EN IMPRESORA/PANTALLA'
WRITE (*,'(A)') ' <I/P>'
READ (*,*) IND
IF (IND.EQ.'I'.OR.IND.EQ.'i') OPEN(6,FILE='LPT1:',STATUS='NEW')
IF (IND.EQ.'P'.OR.IND.EQ.'p') OPEN(6,FILE='CON:',STATUS='NEW')
WRITE (6,100)
DO 5 I = 1, 4
  DO 5 J = 1, 4
    DO 5 K = 1, 40
      TN(I,J,K) = 0.0
      T1(I,J,K) = 0.0
5 CONTINUE
DO 10 K = 1, 40
  PDEN(K) = 0.0
  PCOC(K) = 0.0
  XNUM(K) = 0.0
10 CONTINUE
ID1 = 40
TOL = 0.00001
WRITE (*,'(A)') 'LEE TN.DAT <S/N>'
READ (*,*) IND
IF (IND.EQ.'N'.OR.IND.EQ.'n') GO TO 5000
C
C * SE LEE DEL ARCHIVO TN.DAT
C
OPEN (7,FILE = 'TN.DAT',STATUS='OLD')
READ (7,6000) N,M
DO 6010 I = 1, N
  DO 6020 J = 1, M
    DO 6030 K = 1, ID1
      READ (7,*) TN(I,J,K)
6030 CONTINUE
6020 CONTINUE
6010 CONTINUE
6000 FORMAT (2I3)
CLOSE (7)
GO TO 7000
5000 CALL PMREAD(TN,N,M)
7000 CALL PRNT(TN,N,M,ID1,TOL)
N1 = MINO(N,M)
C
C * SE DIAGONALIZA SOLO N1-1 VECES
C
```

```

DO 2000 I = 1, 4
  DO 2000 J = 1, 4
    DO 2000 K = 1, ID1
      UI(I,J,K) = 0.0DO
      UD(I,J,K) = 0.0DO
      UIINV(I,J,K) = 0.0DO
      UDINV(I,J,K) = 0.0DO
2000 CONTINUE
  DO 2010 I = 1, N
    UI(I,I,1) = 1.0DO
    UIINV(I,I,1) = 1.0DO
2010 CONTINUE
  DO 2020 I = 1, M
    UD(I,I,1) = 1.0DO
    UDINV(I,I,1) = 1.0DO
2020 CONTINUE
  II = 0
2030 II = II + 1
  CALL MNEL1(TN,N,M,II,IM,JM,IPOS,ID1,TOL)
  IF (IPOS.EQ.100) GO TO 2200
  IF (II.NE.IM) CALL CLSHFT(TN,UD,UDINV,N,M,ID1,II,IM)
  IF (II.NE.JM) CALL RWSHFT(TN,UI,UIINV,N,M,ID1,II,JM)
C
2040 CALL DIAGON(UI,UIINV,TN,UD,UDINV,N,M,II,ID1,TOL)
  CALL MONICO(TN,UI,UIINV,N,M,II,ID1,TOL)
  IF (II.EQ.N1) GO TO 2200
  IDIV = 1
  DO 2050 K = 1, ID1
    PDEN(K) = TN(II,II,K)
2050 CONTINUE
  DO 2060 I = II+1, M
    DO 2070 J = II+1, N
      DO 2080 K = 1, ID1
        XNUM(K) = TN(I,J,K)
2080 CONTINUE
      CALL DIVPOL(XNUM,PDEN,PCOC,ID1,TOL)
      DO 2090 K = 1, ID1
        IF (DABS(XNUM(K)).GT.TOL) IDIV = 0
2090 CONTINUE
2070 CONTINUE
2060 CONTINUE
C
  IF (IDIV.EQ.1) GO TO 2030
  CALL MNEL1(TN,N,M,II+1,IM,JM,IPOS,ID1,TOL)
  DO 2100 K = 1, ID1
    PCCC(K) = 0.0
2100 CONTINUE
  PCCC(1) = -1.0
  CALL CLSHFT(TN,UD,UDINV,N,M,ID1,II,IM)
  CALL OFCOL(TN,UD,UDINV,N,M,PCCC,IM,II,ID1,TOL)
  CALL CLSHFT(TN,UD,UDINV,N,M,ID1,II,IM)
  GO TO 2040
C
2200 WRITE (6,2910)
  CALL PRNT(TN,N,M,ID1,TOL*1.0D-5)

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

CALL NORMA(TN,N,M,IDI,TOL)
WRITE (6,2930)
CALL PRNT(UI,N,N,IDI,TOL)
WRITE (6,2940)
CALL PRNT(UD,M,M,IDI,TOL)
WRITE (6,2950)
CALL PRNT(UIINV,N,N,IDI,TOL)
WRITE (6,2960)
CALL PRNT(UDINV,M,M,IDI,TOL)
WRITE (*,'(A)')
WRITE (*,'(A)')
WRITE (*,'(A)')
RECONSTRUYE TN(S)
CALL PMMULT(UIINV,TN,UI,N,N,N,N,L3,M3,IDI,TOL)
CALL PMMULT(UI,UDINV,TN,N,N,N,N,L3,M3,IDI,TOL)
CALL PRNT(TN,N,M,IDI,TOL*2.0D2)
DO 8060 I = 1,4
  DO 8060 J = 1, 4
    DO 8060 K = 1, IDI
      TN(I,J,K) = 0.0
8060 CONTINUE
C
2910 FORMAT(//,10X,'LA FORMA DE SMITH ES:',//)
2920 FORMAT(//,10X,'MATRIZ SINGULAR',//,10X,'EJECUCION TERMINADA')
2930 FORMAT(//,20X,'LA MATRIZ UI ES:')
2940 FORMAT(//,20X,'LA MATRIZ UD ES:')
2950 FORMAT(//,20X,'LA INVERSA DE UI ES:',//)
2960 FORMAT(//,20X,'LA INVERSA DE UD ES:',//)
100 FORMAT(1X,//,20X,'S M I T H ')
STOP
END
C
C
SUBROUTINE DIAGON (UI,UIINV,A,UD,UDINV,N,M,II,IDI,TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,U,T,X)
DIMENSION A(4,4,40),UI(4,4,40),UD(4,4,40),UIINV(4,4,40),
1 UDINV(4,4,40),XNUM(40),XDEN(40),XCOC(40)
5 DO 19 K = 1, IDI
  XDEN(K) = A(II,II,K)
19 CONTINUE
IGRADO = 40
IM = 0
JM = 0
C
C
* ANALIZA LOS ELEMENTOS DEL RENGLON II
DO 20 I = II+1, M
  DO 30 K = 1, IDI
    XNUM(K) = A(I,II,K)
30 CONTINUE
CALL DIVPOL(XNUM,XDEN,XCOC,IDI,TOL)
DO 40 K = 1, IDI
  K1 = IDI - K + 1
  IF (DABS(XNUM(K1)).LT.TOL) GO TO 40
  IF (K1.GE.IGRADO) GO TO 40
  IM = I

```

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

```

        JM = II
        IGRADO = KI
40    CONTINUE
20    CONTINUE
C
C    * ANALIZA LOS ELEMENTOS DE LA COLUMNA II
C
    DO 50 J = II+1, N
        DO 60 K = 1, ID1
            XNUM(K) = A(II,J,K)
60    CONTINUE
        CALL DIVPOL(XNUM,XDEN,XCOC, ID1,TOL)
        DO 70 K = 1, ID1
            KI = ID1 - K + 1
            IF (DABS(XNUM(KI)).LT.TOL) GO TO 70
            IF (KI.GE.IGRADO) GO TO 70
            IM = II
            JM = J
            IGRADO = KI
70    CONTINUE
50    CONTINUE
C
C    * VERIFICA SI TODOS LOS RESIDUOS FUERON CERO
C
    IF (IM.EQ.0) GO TO 110
    DO 90 K = 1, ID1
        XNUM(K) = A(IM,JM,K)
90    CONTINUE
    CALL DIVPOL(XNUM,XDEN,XCOC, ID1,TOL)
    IF (IM.EQ.II) GO TO 100
C
C    * OPERACIONES POR COLUMNAS
C
    CALL OPCOL(A,UD,UDINV,N,M,XCOC,IM,II, ID1,TOL)
    KX = NZEL(A,II,II, ID1,TOL)
    KY = NZEL(A,IM,II, ID1,TOL)
    IF (KY.LT.KX.AND.KY.NE.0) CALL CLSFT(A,UD,UDINV,N,M, ID1,II,IM)
    GO TO 5
C
C    * OPERACIONES POR RENGLONES
C
100 CALL OPREN(A,UI,UIINV,N,M,XCOC,JM,II, ID1,TOL)
    KX = NZEL(A,II,II, ID1,TOL)
    KY = NZEL(A,II,JM, ID1,TOL)
    IF (KY.LT.KX.AND.KY.NE.0) CALL RWSFT(A,UI,UIINV,N,M, ID1,II,JM)
    GO TO 5
C
C    * TODOS LOS RESIDUOS FUERON CERO
C
110 DO 120 I = II+1, M
        DO 130 K = 1, ID1
            XNUM(K) = A(I,II,K)
130    CONTINUE
        CALL DIVPOL(XNUM,XDEN,XCOC, ID1,TOL)
        CALL OPCOL(A,UD,UDINV,N,M,XCOC,I,II, ID1,TOL)

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



```

120 CONTINUE
    DO 140 J = II+1, N
        DO 150 K = 1, ID1
            XNUM(K) = A(II,J,K)
150     CONTINUE
        CALL DIVPOL(XNUM,XDEN,XCOC, ID1, TOL)
        CALL OPREN(A,UI,UIINV,N,M,XCOC,J,II, ID1, TOL)
140 CONTINUE
    RETURN
    END

```

C  
C

```

SUBROUTINE OPCOL (A,UD,UDINV,N,M,PMUL,ICOL,II, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,P,T,U)
DIMENSION A(4,4,40),UD(4,4,40),UDINV(4,4,40),
1     PMUL(40),TEMP(40),P1(40)

```

C  
C  
C

```

* ELEM ICOL = ELEM ICOL ANT - PMUL * ELEM DE COLUMNA II
DO 10 J = 1, N
    DO 20 K = 1, ID1
        P1(K) = A(II,J,K)
20     CONTINUE
    CALL MULPOL(P1,PMUL,TEMP, ID1, TOL)
    DO 30 K = 1, ID1
        A(ICOL,J,K) = A(ICOL,J,K) - TEMP(K)
30     CONTINUE
10 CONTINUE
DO 50 J = 1, M
    DO 60 K = 1, ID1
        P1(K) = UD(II,J,K)
60     CONTINUE
    CALL MULPOL(P1,PMUL,TEMP, ID1, TOL)
    DO 70 K = 1, ID1
        UD(ICOL,J,K) = UD(ICOL,J,K) - TEMP(K)
70     CONTINUE
50 CONTINUE
DO 100 I = 1, M
    DO 80 K = 1, ID1
        P1(K) = UDINV(I,ICOL,K)
80     CONTINUE
    CALL MULPOL(P1,PMUL,TEMP, ID1, TOL)
    DO 90 K = 1, ID1
        UDINV(I,II,K) = UDINV(I,II,K) + TEMP(K)
90     CONTINUE
100 CONTINUE
CALL NORMA(UD,M,M, ID1, TOL)
CALL NORMA(UDINV,M,M, ID1, TOL)
RETURN
END

```

C  
C

```

SUBROUTINE OPREN (A,UI,UIINV,N,M,PMUL,IROW,II, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,P,T,U)
DIMENSION A(4,4,40),UI(4,4,40),UIINV(4,4,40),

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1 (SNOW) P1(40), PMUL(40), TEMP(40)

C  
C  
C

\* ELEM IROW = ELEM IROW ANT - PMUL \* ELEM RENGLON II

```
DO 10 I = 1, M
  DO 20 K = 1, ID1
    P1(K) = A(I, II, K)
20  CONTINUE
  CALL MULPOL(P1, PMUL, TEMP, ID1, TOL)
  DO 30 K = 1, ID1
    A(I, IROW, K) = A(I, IROW, K) - TEMP(K)
30  CONTINUE
10 CONTINUE
DO 50 I = 1, N
  DO 60 K = 1, ID1
    P1(K) = UI(I, II, K)
60  CONTINUE
  CALL MULPOL(P1, PMUL, TEMP, ID1, TOL)
  DO 70 K = 1, ID1
    UI(I, IROW, K) = UI(I, IROW, K) - TEMP(K)
70  CONTINUE
50 CONTINUE
DO 100 J = 1, N
  DO 80 K = 1, ID1
    P1(K) = UIINV(IROW, J, K)
80  CONTINUE
  CALL MULPOL(P1, PMUL, TEMP, ID1, TOL)
  DO 90 K = 1, ID1
    UIINV(II, J, K) = UIINV(II, J, K) + TEMP(K)
90  CONTINUE
100 CONTINUE
CALL NORMA(UI, N, N, ID1, TOL)
CALL NORMA(UIINV, N, N, ID1, TOL)
RETURN
END
```

C  
C

```
SUBROUTINE MNEL1(A, N, M, NO, IM, JM, IPOS, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A, T)
DIMENSION A(4, 4, 40)
IPOS = 100
IM = 0
JM = 0
DO 10 I = NO, M
  DO 10 J = NO, N
    KX = NZEL(A, I, J, ID1, TOL)
    IF (KX.EQ.0) GO TO 10
    IF (KX.GE.IPOS) GO TO 10
    IPOS = KX
    IM = I
    JM = J
```

```
10 CONTINUE
RETURN
END
```

C

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

SUBROUTINE RWSHFT (A,UI,UIINV,N,M,IDI,IROW1,IROW2)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,U)
DIMENSION A(4,4,40),UI(4,4,40),UIINV(4,4,40)
DO 10 I = 1, M
  DO 20 K = 1, ID1
    TMP = A(I,IROW1,K)
    A(I,IROW1,K) = A(I,IROW2,K)
    A(I,IROW2,K) = TMP
  20 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 30 I = 1, N
  DO 40 K = 1, ID1
    TMP = UI(I,IROW1,K)
    UI(I,IROW1,K) = UI(I,IROW2,K)
    UI(I,IROW2,K) = TMP
  40 CONTINUE
30 CONTINUE
DO 60 J = 1, N
  DO 50 K = 1, ID1
    TMP = UIINV(IROW1,J,K)
    UIINV(IROW1,J,K) = UIINV(IROW2,J,K)
    UIINV(IROW2,J,K) = TMP
  50 CONTINUE
60 CONTINUE
CALL NORMA(UI,N,N,IDI,TOL)
CALL NORMA(UIINV,N,N,IDI,TOL)
RETURN
END

```

C  
C

```

SUBROUTINE CLSHT (A,UD,UDINV,N,M,IDI,ICOL1,ICOL2)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,U)
DIMENSION A(4,4,40),UD(4,4,40),UDINV(4,4,40)
DO 10 J = 1, N
  DO 20 K = 1, ID1
    TMP = A(ICOL1,J,K)
    A(ICOL1,J,K) = A(ICOL2,J,K)
    A(ICOL2,J,K) = TMP
  20 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 30 J = 1, M
  DO 40 K = 1, ID1
    TMP = UD(ICOL1,J,K)
    UD(ICOL1,J,K) = UD(ICOL2,J,K)
    UD(ICOL2,J,K) = TMP
  40 CONTINUE
30 CONTINUE
DO 60 I = 1, M
  DO 50 K = 1, ID1
    TMP = UDIV(I,ICOL1,K)
    UDIV(I,ICOL1,K) = UDIV(I,ICOL2,K)
    UDIV(I,ICOL2,K) = TMP
  50 CONTINUE
60 CONTINUE
CALL NORMA(UD,M,M,IDI,TOL)

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

```
CALL NORMA(UDINV,M,M, ID1, TOL)
RETURN
END
```

C  
C

```
SUBROUTINE PMMULT (A1,A2,A3,L1,M1,L2,M2,L3,M3, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,T)
DIMENSION A1(4,4,40),A2(4,4,40),A3(4,4,40),TEMP(10,40)
IF (M1.NE.L2) GO TO 100
L3 = L1
M3 = M2
DO 50 I = 1, M3
  DO 50 J = 1, L3
    DO 20 N = 1, M1
      NA1 = NZEL(A1,N,J, ID1, TOL)
      NA2 = NZEL(A2,I,N, ID1, TOL)
      DO 5 K1 = 1, ID1
        5 TEMP(N,K1) = 0.0
        IF (NA1.EQ.0) GO TO 20
        IF (NA2.EQ.0) GO TO 20
        DO 10 K2 = 1, NA2
          DO 10 K1 = 1, NA1
            10 TEMP(N,K1+K2-1)=TEMP(N,K1+K2-1)+A1(N,J,K1)*A2(I,N,K2)
        20 CONTINUE
      DO 30 K1 = 1, ID1
        A3(I,J,K1) = 0.0
        DO 25 N = 1, M1
          25 A3(I,J,K1) = A3(I,J,K1) + TEMP(N,K1)
        30 CONTINUE
      50 CONTINUE
    RETURN
  100 WRITE (6,900)
  900 FORMAT(//,10X,'MULTIPLICACION MATRICIAL ILEGAL',//)
  RETURN
END
```

C  
C

```
SUBROUTINE NORMA(A,N,M, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,T)
DIMENSION A(4,4,40)
DO 50 I = 1, N
  DO 40 J = 1, N
    KX = NZEL(A,I,J, ID1, TOL) + 1
    DO 30 K = KX, ID1
      A(I,J,K) = 0.0
    30 CONTINUE
  40 CONTINUE
  50 CONTINUE
  RETURN
END
```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

C  
C

```
SUBROUTINE MONICO (A,UI,UIINV,N,M,II, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,U)
DIMENSION A(4,4,40),UI(4,4,40),UIINV(4,4,40)
```

```

KX = NZEL(A,II,II,IDI,TOL)
TAUX = A(II,II,KX)
DO 30 I = II, M
  KX = NZEL(A,I,II,IDI,TOL)
  DO 10 K = 1, KX
    A(I,II,K) = A(I,II,K) / TAUX
10  CONTINUE
  DO 20 K = KX + 1, ID1
    A(I,II,K) = 0.0
20  CONTINUE
30 CONTINUE
DO 60 I = 1, N
  KX = NZEL(UI,I,II,IDI,TOL)
  DO 40 K = 1, KX
    UI(I,II,K) = UI(I,II,K) / TAUX
40  CONTINUE
  DO 50 K = KX + 1, ID1
    UI(I,II,K) = 0.0
50  CONTINUE
60 CONTINUE
DO 90 J = 1, N
  KX = NZEL(UIINV,II,J,IDI,TOL)
  DO 70 K = 1, KX
    UIINV(II,J,K) = UIINV(II,J,K) * TAUX
70  CONTINUE
  DO 80 K = KX + 1, ID1
    UIINV(II,J,K) = 0.0
80  CONTINUE
90 CONTINUE
RETURN
END

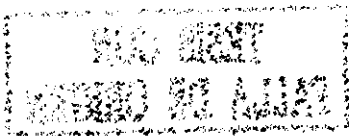
```

C  
C  
C

Las siguientes subrutinas aparecen en el programa FACTO

SUBROUTINE DIVPOL(XNUM,PDEN,PCOC,IDI,TOL)

SUBROUTINE MULPOL(P1,P2,PROD,IDI,TOL)



\$FLOATCALLS

```
C *****
C *
C *           R U T I N A S
C *
C *****
C
```

```

SUBROUTINE RANS (A1,A2,L1,M1,L2,M2,IDI)
IMPLICIT REAL*8 (A)
DIMENSION A1(4,4,40),A2(4,4,40)
DO 10 I = 1, M1
    DO 10 J = 1, L1
        DO 10 K = 1, IDI
10      A2(J,I,K) = A1(I,J,K)
L2 = M1
M2 = L1
RETURN
END
```

```
C
SUBROUTINE GCRD (A,A1,L,M,IDI,TOL,IER)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,X)
DOUBLE PRECISION DABS
DIMENSION A(4,4,40),A1(4,4,40)
INTEGER POSM,POSJ
DO 2 I = 1, L
    DO 2 J = 1, L
        DO 2 K = 1, IDI
2      A1(I,J,K) = 0.0
DO 3 I = 1, L
3      A1(I,I,1) = 1.0
```

```
C
C * LOOP PRINCIPAL PARA LA MANIPULACION MATRICIAL
C
ML = M
IF (L.LT.M) ML = L
DO 100 I = 1, ML
```

```
C
C * ENCUENTRA NUEVO RENGLON PRINCIPAL DE MENOR GRADO
C
7 CALL MNROW (A,I,L,IDI,MROW,IMAX,TOL)
IF (IMAX.EQ.-1) GO TO 500
IF (I.EQ.L) GO TO 56
IF (I.NE.MROW) CALL RSHFT (A,A1,L,M,IDI,I,MROW)
MROW = I + 1
POSM = NZEL(A,I,I,IDI,TOL)
```

```
C
C * EJECUTA OPERACIONES POR RENGLONES DEBAJO DEL RENGLON
C PRINCIPAL
```

```
DO 50 J = MROW, L
    POSJ = NZEL(A,I,J,IDI,TOL)
    IF (POSJ.EQ.0) GO TO 50
    CALL ROWOP(A,A1,I,J,POSJ,POSM,L,M,IDI,TOL)
```

50 CONTINUE

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

C      * VERIFICA SI LA SUBMATRIZ DEBAJO DEL RENGLON PRINCIPAL
C      ES REDUCIDA
C
DO 55 J = MROWB, L
  K = NZEL(A,I,J,IDI,TOL)
  IF (K.NE.0) GO TO 7
55 CONTINUE

C      * REDUCE EL ORDEN DE LOS POLINOMIOS ARRIBA DEL RENGLON
C      PRINCIPAL SI ES POSIBLE
C
56 IF (I.EQ.1) GO TO 100
  POSM = NZEL(A,I,I,IDI,TOL)
  MROWA = I - 1
  DO 95 J = 1, MROWA
57   POSJ = NZEL(A,I,J,IDI,TOL)
     IF (POSJ.LT.POSM) GO TO 95
     CALL ROWOP (A,A1,I,J,POSJ,POSM,L,M,IDI,TOL)
     GO TO 57
95   CONTINUE
100 CONTINUE

C      * NORMALIZA LOS RENGLONES TAL QUE LOS COEFICIENTES
C      * DE MAYOR GRADO DE LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL SEAN 1.
C
DO 25 J = 1, ML
  K3 = NZEL(A,J,J,IDI,TOL)
  IF (K3.EQ.0) GO TO 25
  X = A(J,J,K3)
  DO 20 I = J, M
    K2 = NZEL(A,I,J,IDI,TOL)
    IF (K2.EQ.0) GO TO 20
    DO 15 K = 1, K2
      IF ( DABS(A(I,J,K)).GE.TOL) GO TO 13
      A(I,J,K) = 0.0
      GO TO 15
13    A(I,J,K) = A(I,J,K) / X
15    CONTINUE
20    CONTINUE
    DO 24 I = 1, L
      K2 = NZEL(A1,I,J,IDI,TOL)
      IF (K2.EQ.0) GO TO 24
      DO 23 K = 1, K2
        IF ( DABS(A1(I,J,K)).GE.TOL) GO TO 22
        A1(I,J,K) = 0.0
        GO TO 23
22    A1(I,J,K) = A1(I,J,K) / X
23    CONTINUE
24    CONTINUE
25 CONTINUE
  IER = 0
  RETURN
500 IER = 1
  RETURN
  END

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

```

SUBROUTINE MNROW (A, I, L, ID1, MROW, IMAX, TOL)
  IMPLICIT REAL*8 (A, T, X)
  DOUBLE PRECISION DABS
  DIMENSION A(4, 4, 40)
  IMAX = -1
  DO 10 J = I, L
    N = 0
    DO 5 K = 1, ID1
      K1 = ID1 + 1 - K
      X = DABS(A(I, J, K1))
      IF (X.GT.TOL) GO TO 6
      A(I, J, K1) = 0.0
      N = N + 1
    5 CONTINUE
    GO TO 10
    6 IF (N.LE.IMAX) GO TO 10
      IMAX = N
      MROW = J
  10 CONTINUE
  RETURN
  END

```

C  
C

```

SUBROUTINE RSHFT (A, A1, L, M, ID1, IROW1, IROW2)
  IMPLICIT REAL*8 (A, T, X)
  DOUBLE PRECISION DABS
  DIMENSION A(4, 4, 40), A1(4, 4, 40), TMP1(40), TMP2(40)
  DO 5 I = 1, M
    DO 5 K = 1, ID1
      TMP1(K) = A(I, IROW1, K)
      A(I, IROW1, K) = A(I, IROW2, K)
      A(I, IROW2, K) = TMP1(K)
    5 CONTINUE
    DO 10 I = 1, L
      DO 10 K = 1, ID1
        TMP2(K) = A1(I, IROW1, K)
        A1(I, IROW1, K) = A1(I, IROW2, K)
        A1(I, IROW2, K) = TMP2(K)
    10 CONTINUE
  RETURN
  END

```

C  
C

```

SUBROUTINE ROWOP (A, A1, I, J, POSJ, POSM, L, M, ID1, TOL)
  IMPLICIT REAL*8 (A, T, X)
  DOUBLE PRECISION DABS
  DIMENSION A(4, 4, 40), A1(4, 4, 40), TMP1(40), TMP2(40)
  INTEGER POSJ, POSM
  NSHFT = POSJ - POSM
  X = A(I, J, POSJ)
  DO 55 I1 = I, M
    IF (NSHFT.EQ.0) GO TO 18
    DO 15 K = 1, NSHFT
      TMP1(K) = 0.0
    15 CONTINUE

```



```

18   K1 = ID1 - NSHFT
    DO 20 K = 1, K1
      TMP1(K+NSHFT) = A(I1,I,K)
20   CONTINUE
45   DO 50 K = 1, ID1
      IF (DABS(TMP1(K)).GE.TOL) GO TO 48
      TMP1(K) = 0.0
      GO TO 50
48   TMP1(K) = TMP1(K) * X / A(I,I,POSM)
50   A(I1,J,K) = A(I1,J,K) - TMP1(K)
55  CONTINUE
    DO 75 I1 = 1, L
      IF (NSHFT.EQ.0) GO TO 60
      DO 56 K = 1, NSHFT
        TMP2(K) = 0.0
56   CONTINUE
60   K1 = ID1 - NSHFT
      DO 65 K = 1, K1
        TMP2(K + NSHFT) = A1(I1,I,K)
65   CONTINUE
      DO 70 K = 1, ID1
        IF (DABS(TMP2(K)).GE.TOL) GO TO 68
        TMP2(K) = 0.0
        GO TO 70
68   TMP2(K) = TMP2(K) * X / A(I,I,POSM)
70   A1(I1,J,K) = A1(I1,J,K) - TMP2(K)
75  CONTINUE
    RETURN
    END

```

C

```

FUNCTION NZEL (A,I,J,ID1,TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,X)
DOUBLE PRECISION DABS
DIMENSION A(4,4,40)
DO 5 K = 1, ID1
  K1 = ID1 + 1 - K
  X = DABS(A(I,J,K1))
  IF (X.GT.TOL) GO TO 7
5 CONTINUE
6 K1 = 0
7 NZEL = K1
RETURN
END

```

C

```

FUNCTION NZEL1(X, ID1, TOL)
IMPLICIT REAL*8 (X,T)
DIMENSION X(40)
DO 5 K = 1, ID1
  K1 = ID1 + 1 - K
  IF (DABS(X(K1)).GT.TOL) GO TO 7
5 CONTINUE
K1 = 0
7 NZEL1 = K1
RETURN
END

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

SUBROUTINE PMREAD (A,N,M)

C  
C  
C

\* LEE UNA MATRIZ POLINOMIAL EN UN ARREGLO 3D

IMPLICIT REAL\*8 (A)

DIMENSION A(4,4,40)

WRITE (\*,'(A)') \*      TECLEE NUMERO DE COLUMNAS'

READ (\*,\*) M

WRITE (\*,'(A)') \*      TECLEE NUMERO DE RENGLONES'

READ (\*,\*) N

DO 30 I = 1, M

    WRITE (\*,700) I

    READ (\*,\*) IDA1

    IDA1 = IDA1 + 1

    DO 20 J = 1, N

        WRITE (\*,710) J,I

        DO 10 K = 1, IDA1

            WRITE (\*,720) K-1

            READ (\*,\*) A(I,J,K)

10      CONTINUE

20      CONTINUE

30      CONTINUE

700    FORMAT (10X,'TECLEE EL GRADO MAX DE LA COLUMNA',I2,')

710    FORMAT (15X,'COEFICIENTES DEL RENGLON',I2,' COLUMNA',I2,')

720    FORMAT (1X,'COEF DE S',I2)

    RETURN

    END

C  
C

SUBROUTINE PRNT (A,L,M,IDI,TOL)

C  
C  
C  
C

\* IMPRIME LOS ELEMENTOS DE UNA MATRIZ POLINOMIAL,

\* CADA POLINOMIO PUEDE SER DE GRADO IDI

IMPLICIT REAL\*8 (A,T,X)

DIMENSION A(4,4,40),X(40)

DO 20 I = 1, M

    DO 20 J = 1, L

        DO 2 K = 1, IDI

            X(K) = A(I,J,K)

        CONTINUE

        WRITE (6,1000) J,I

        CALL PRNT3(X,IDI,TOL)

20      CONTINUE

1000    FORMAT (/,20X,'ELEM ('I2,' ',',I2,'):',/)

    RETURN

    END

C  
C

SUBROUTINE VLOAD (A,X,I,J,KX,IDI,TOL)

IMPLICIT REAL\*8 (A,X,T)

DIMENSION A(4,4,40),X(40)

DO 5 K = 1, KX

    X(K) = A(I,J,K)

5      CONTINUE



```

IF (KX.EQ.ID1) RETURN
K1 = KX + 1
DO 10 K = K1, ID1
  X(K) = 0.0
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C  
C

```

SUBROUTINE MVMULT (A,X,I,J,KA,KX,IDI,TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,T,X,R)
DIMENSION A(4,4,40),X(40),R(40)
IF (KX.EQ.0) RETURN
IF (KA.EQ.0) KX = 1
DO 5 K1 = 1, ID1
  R(K1) = 0.0
5 CONTINUE
DO 10 K1 = 1, KA
  DO 10 K2 = 1, KX
    R(K1+K2-1) = R(K1+K2-1) + A(I,J,K1) * X(K2)
10 CONTINUE
DO 15 K1 = 1, ID1
  X(K1) = R(K1)
15 CONTINUE
KX = KA + KX - 1
RETURN
END

```

C  
C

```

SUBROUTINE RCOMB (A1,A2,A3,L1,L2,M,L3,M3,IDI)
IMPLICIT REAL*8 (A)
DIMENSION A1(4,4,40),A2(4,4,40),A3(4,4,40)
DO 30 I = 1, M
  DO 10 J = 1, L1
    DO 10 K = 1, ID1
      A3(I,J,K) = A1(I,J,K)
  DO 20 J = 1, L2
    DO 20 K = 1, ID1
      A3(I,J+L1,K) = A2(I,J,K)
30 CONTINUE
L3 = L1 + L2
M3 = M
RETURN
END

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

C  
C

```

SUBROUTINE FACT (R,A,X,M,N,IDI,TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,R,T,X)
DIMENSION A(4,4,40),R(4,4,40),TEMP(2,40)
INTEGER ERR
DO 5 I = 1, N
  DO 5 J = 1, M
    DO 5 K = 1, ID1
      X(I,J,K) = 0.0
5 CONTINUE

```

```

I = 1
DO 20 J = 1, M
  DO 15 K = 1, ID1
    TEMP(1,K) = R(I,J,K)
    TEMP(2,K) = A(I,I,K)
  15 CONTINUE
  CALL DIV(A,X,TEMP,I,J,IDI,TOL,ERR)
  IF (ERR.EQ.1) RETURN
20 CONTINUE

```

C

```

DO 25 I = 2, N
  DO 22 J = 1, M
    CALL SUMPR(A,X,TEMP,I,J,IDI,TOL)
    DO 22 K = 1, ID1
      TEMP(1,K) = R(I,J,K) - TEMP(1,K)
      TEMP(2,K) = A(I,I,K)
    22 CONTINUE
    CALL DIV(A,X,TEMP,I,J,IDI,TOL,ERR)
    IF (ERR.EQ.1) RETURN
25 CONTINUE
RETURN
END

```

C  
C

```

SUBROUTINE DIV (A,X,TEMP,I,J,IDI,TOL,ERR)
  IMPLICIT REALS (A,R,T,X)
  DOUBLE PRECISION DABS
  DIMENSION A(4,4,40),X(4,4,40),TEMP(2,40),IPOS(2)
  INTEGER ERR
  DO 10 I1 = 1, 2
    DO 5 K = 1, ID1
      IPOS(I1) = ID1 + 1 - K
      IF ( DABS(TEMP(I1,IPOS(I1))) .GT. TOL) GO TO 10
    5 CONTINUE
    IF (I1 - 1) 25,25,30
  10 CONTINUE
  NSHFT = IPOS(1) - IPOS(2) + 1
  IP2 = IPOS(2)
  IF (NSHFT.LE.0) GO TO 30
  DO 20 I1 = 1, NSHFT
    N1 = NSHFT + 1 - I1
    IP1 = IPOS(1) + 1 - I1
    X(I,J,N1) = TEMP(1,IP1) / TEMP(2,IP2)
    DO 15 I2 = 1, IP2
      TEMP(1,I2+N1-1) = TEMP(1,I2+N1-1) - X(I,J,N1)*TEMP(2,I2)
    15 CONTINUE
  20 CONTINUE
  IP1 = IPOS(1)
  DO 22 K = 1, IP1
    IF ( DABS(TEMP(1,K)) .LE. TOL) GO TO 22
    WRITE (*,901) I,J
    ERR = 0
    RETURN
  22 CONTINUE
25 ERR = 0

```

```
RETURN
30 WRITE (*,903) I,J
ERR = 1
RETURN
```

```
C
901 FORMAT (/ ,10X, 'CUIDADO, RESIDUO MAYOR QUE LA TOLERANCIA', 2I3)
903 FORMAT (/ ,10X, 'DIVISION POR CERO O ERROR EN EL GRADO', 2I3)
END
```

```
C
C
```

```
SUBROUTINE SUMPR (A,X,TEMP,I,J,IDI,TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,R,T,X)
DIMENSION A(4,4,40),X(4,4,40),TEMP(2,40),TEMP1(10,40)
II = I - 1
DO 20 K = 1, II
  NX = NZEL(X,K,J,IDI,TOL)
  NA = NZEL(A,I,K,IDI,TOL)
  DO 5 K1 = 1, IDI
    TEMP1(K,K1) = 0.0
5  CONTINUE
  IF (NX.EQ.0) GO TO 20
  IF (NA.EQ.0) GO TO 20
  DO 10 I1 = 1, NA
    DO 10 K1 = 1, NX
      TEMP1(K,K1+I1-1) = TEMP1(K,K1+I1-1) + X(K,J,K1) * A(I,K,I1)
10  CONTINUE
20  CONTINUE
  DO 30 K1 = 1, IDI
    TEMP(1,K1) = 0.0
    DO 25 K = 1, II
      TEMP(1,K1) = TEMP(1,K1) + TEMP1(K,K1)
25  CONTINUE
30  CONTINUE
RETURN
END
```

```
C
C
```

```
SUBROUTINE SPLIT (A1,A2,LO,L1,MO,M1,L2,M2,IDI)
IMPLICIT REAL*8 (A)
DIMENSION A1(4,4,40),A2(4,4,40)
DO 10 I = MO, M1
  DO 10 J = LO, L1
    DO 10 K = 1, IDI
      A2(I+1-MO,J+1-LO,K) = A1(I,J,K)
10  CONTINUE
L2 = L1 - LO + 1
M2 = M1 - MO + 1
RETURN
END
```

```
C
C
```

```
SUBROUTINE PRNT3 (A,IDI,TOL)
IMPLICIT REAL*8 (A,T)
DIMENSION A(40)
K1 = NZEL(A,IDI,TOL)
```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

K2 = K1 / 4
DO 100 I = 1, K2
  K = K1 - (I - 1) * 4
  WRITE (6,1000) K - 1, K - 2, K - 3, K - 4
  WRITE (6,1010) A(K), A(K-1), A(K-2), A(K-3)
100 CONTINUE
  K = K1 - K2 * 4
  IF (K.EQ.0) RETURN
  IF (K.NE.1) GO TO 200
  WRITE (6,1000)
  WRITE (6,1020) A(K)
  RETURN
200 IF (K.EQ.3) GO TO 300
  WRITE (6,1000) K - 1
  WRITE (6,1030) A(K), A(K-1)
  RETURN
300 WRITE (6,1000) K - 1, K - 2
  WRITE (6,1040) A(K), A(K-1), A(K-2)
  RETURN
1000 FORMAT (6X,4(25X,12))
1010 FORMAT (7X,4(1PD23.15,' S +'))
1020 FORMAT (7X,1PD23.15)
1030 FORMAT (7X,1PD23.15,' S +',1PD23.15)
1040 FORMAT (7X,2(1PD23.15,' S +'),1PD23.15)
END

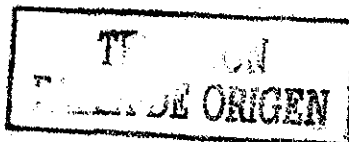
C
C
SUBROUTINE DETERM (R,A,M,IDI,TOL,XX)
  IMPLICIT REAL*8 (A,D,R,T,X)
  DIMENSION A(4,4,40),R(4,4,40),IDR(10),DET(40),X(40),XX(40),
  1 DROOTR(40),DROOTI(40)

C
C * TRANSFORMA LA MATRIZ A UNA TRIANGULAR SUPERIOR EQUIV
C
CALL GCRD(R,A,M,M,IDI,TOL,IER)
IF (IER.EQ.1) GO TO 60
ICD = 0

C
C * DETERMINA SI LA MATRIZ ES UNIMODULAR
C
DO 10 I = 1, M
  IDR(I) = NZEL(R,I,I,IDI,TOL)
  ICD = ICD + IDR(I)
10 CONTINUE
IF (ICD.GT.M) GO TO 20
WRITE (6,900)
RETURN

C
C * MULTIPLICA LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL DE LA MATRIZ
C * TRIANGULAR SUPERIOR PARA FORMAR EL DETERMINANTE NORM
C
20 I = 1
  KX = IDR(I)
  CALL VLEDD(R,X,I,I,KX,IDI,TOL)
  IF (M.EQ.1) GO TO 45

```



```

DO 40 I = 2, M
  KR = IDR(I)
  CALL MVMULT(R,X,I,I,KR,KX,IDI,TOL)
40 CONTINUE
45 DO 47 I = 1, ID1
  XX(I) = X(I)
47 CONTINUE
  KY = NZEL1(XX,IDI,TOL)
  TAUX = XX(KY)
  DO 49 K = 1, ID1
  XX(K) = XX(K) / TAUX
49 CONTINUE
  WRITE (6,905)
  CALL PRNTPS(XX,IDI,TOL)
  WRITE (6,910)

C
C * ENCUENTRA E IMPRIME LAS RAICES DE LOS ELEMENTOS DE LA
C * DIAGONAL INDIVIDUALMENTE
C
DO 55 I = 1, M
  IF (IDR(I).EQ.1) GO TO 55
  IDEG = IDR(I)
  DO 50 K = 1, IDEG
  50  DET(K) = R(I,I,K)
  IDEG = IDEG - 1
  KY = NZEL1(DET,IDI,TOL) - 1
  CALL PROOT(KY,DET,DROOTR,DROOTI,+1)
  DO 100 K = 1, IDEG
  100  WRITE (6,920) DROOTR(K),DROOTI(K)
  55 CONTINUE
  RETURN
  60 WRITE (6,907)
  RETURN

C
C
900 FORMAT (/,10X,'MATRIZ UNIMODULAR')
905 FORMAT (/,10X,'EL DETERMINANTE POLINOMIAL NORMALIZADO',/,
  * 15X,' DE ESTA MATRIZ ES:')
907 FORMAT (/,10X,'MATRIZ SINGULAR')
910 FORMAT (/,10X,'LAS RAICES DE LA MATRIZ POLINOMIAL SON:')
920 FORMAT (/,15X,'S = ',F13.6,' + ',F13.6,' j')
END

C
C La siguiente subrutina aparece en el programa PARSEVAL
C
SUBROUTINE PROOT (N,A,U,V,IR)

```

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

## REFERENCIAS

- [11] Aoki, M. "Control of Large-Scale Dynamic System by Aggregation". Trans. on Automatic Control, vol. AC-13, No. 3, Junio 1968, pags. 246-253.
- [12] Ashworth, M. J. "Feedback design of Systems with significant Uncertainty". Wiley 1982.
- [13] Astrom, K. J. "Introduction to Stochastic Control Theory". Academic Press 1970.
- [14] Binder, Z. y C. Connault "Una Revue des Methods de Simplification de Modeles Dynamiques Lineares Invariants". RAIRO Automatique, vol. 12, No. 3, 1978, pags. 199-219.
- [15] Bosley, M. J. y F. P. Lees "A Survey of Simple Transfer Function Derivations from High-Order State-Variable Models". Automatica, vol. 8, 1972, pags. 765-775.
- [16] Brockett, R. W. "Poles, Zeros and Feedback: State Space Interpretation". IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-10, Abril 1965, pags. 129-135.
- [17] Callier, F. M. y C. A. Desoer "Multivariable Feedback Systems". Springer-Verlag 1982.
- [18] Chen, C. F. y L. S. Shieh "An Algebraic Method for Control System Design". Int. J. Control, vol. 11, No. 5,



pags. 717-739.

- [9] Chen, C. T. "Linear System Theory and Design". Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [10] Davison, E. J. "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems". IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-11, No. 1, Enero 1966, pags. 93-101.  
Extensión "A New Method for Simplifying Large Linear Dynamic System". Ibid, vol. AC-13, 1968, pags. 214-215.
- [11] Davison, E. J. y S. H. Wang "Properties and Calculations of Transmission zeros of Linear Multivariable Systems". Automatica, vol. 10, 1974, pags. 643-658.
- [12] Davison, E. J. y S. H. Wang "An Algorithm for the calculation of Transmission zeros of the System (C,A,B,D) Using High Gain Output Feedback". IEEE trans. on Automatic Control, vol. AC-23, NO. 4, Agosto 1978, pags. 738-741.
- [13] Elliot, H. "Implementation of Computer Algorithms related to Multivariable Systems Theory". M. Sc. Thesis, Brown University, 1975.
- [14] Gantmacher, F. R. "The Theory of Matrices", vol. I. Chelsea Publishing Co. 1959.
- [15] Gilbert, E. "Controllability and Observability in

Multivariable Control Systems". SIAM J. Control,  
vol. 1, No. 2, 1963.

[16] Gould, L. A. "Chemical Process Control: Theory and  
Applications". Addison-Wesley, 1969.

[17] Gutman, P.; C. F. Mannerfelt y P. Molander. "Contributions  
to the Model Reduction Problem". IEEE trans. on  
Automatic Control, vol. AC-27, No. 2, Abril 1982,  
pags. 454-453.

[18] Hickin, J. y N. K. Sinha "Model Reduction for Linear  
Multivariable Systems". Ibid, vol. AC-25, No. 6,  
Diciembre 1980, pags. 1121-1127.

[19] Hutton, M. F. y B. Friedland "Routh Approximations for  
Reducing order of Linear, Time-Invariant Systems".  
Ibid, vol. AC-20, No. 3, Junio 1975, pags. 329-  
337.

[20] Krishnamurthy, V. y V. Seshadri "Model Reduction Using the  
Routh Stability Criterion". Ibid, vol. AC-23, No.  
4, Agosto 1978, pags. 729-731.

[21] Kumar, A. y V. Singh "Improved Algorithm for Continued  
Fraction Inversion". Ibid, vol. AC-23, No. 5,  
Octubre 1978, pags. 938-940.

[22] Kwakernaak, H. y R. Sivan "Linear Optimal Control  
Systems". John Wiley and Sons, 1972.

[23] Lastman, G. J. y N. K. Sinha y P. Rózsa "On the Selection

- of States to be retained in a reduced-order model". IEE Proceedings, vol. 131, Part D, No. 1, Enero 1984, pags. 15-22.
- [24] Marshall, S. A. "The Design of Reduced-Order Systems". Int. J. Control, vol. 31, No. 4, 1980, pags. 677-690.
- [25] Melsa, J. L. y S. K. Jones "Computer Programs for Computational Assistance in the Study of Linear Control Theory". McGraw-Hill, 1973.
- [26] Rosenbrock, H. H. "State-Space and Multivariable Theory". Wiley, 1970.
- [27] Shamash, Y. "Critical Review of Methods for Deriving Stable Reduced-Order Models". IFAC, Modelling and Identification World Congress. Washington, D. C. 1982, USA.
- [28] Wolovich, W. A. "Linear Multivariable Systems". Springer-Verlag, 1974.
- [29] Wonham, W. M. "Linear Multivariable Control: a Geometric Approach". 2nd Edition. Springer-Verlag 1979.
- [30] Enciclopedia Dictionary of Mathematics. Mathematical Society of Japan. MIT Press 1980, vols 1 y 2.

1981

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**