



01161
UNIVERSIDAD NACIONAL
Autónoma de México 7

FACULTAD DE INGENIERIA

METODO DE ESTIMACIONES PUNTUALES Y SU APLICACION
EN ESPECTROS SISMICOS CON PROPIEDADES ALEATORIAS

TESIS

Que para obtener el Grado de
MAESTRO EN INGENIERIA
(ESTRUCTURAS)

P r e s e n t a

HONG HAN PING

México, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2002



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE ESTRUCTURAS



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENAMA

METODO DE ESTIMACIONES PUNTUALES Y SU APLICACION EN ESPEC-
TROS SISMICOS CON PROPIEDADES ALEATORIAS

TESIS QUE PRESENTA

HONG HAN PING

Para obtener el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA
(ESTRUCTURAS)

JURADO:

Presidente: DR. EMILIO ROSENBLUETH DEUTSCH

Vocal: DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

Secretario: DR. MARIO CHAVEZ GONZALEZ

Suplente: M. EN C. NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS

Suplente: M. EN I. RAFAEL ARANDA HERNANDEZ

CREDITOS ASIGNADOS

COORDINADOR DE LA SECCION

M. EN C. NEFTALI RODRIGUEZ C.

SECRETARIO ACADEMICO

M. EN I. GABRIELA MOELLER CH.

Cd. Universitaria, D.F., septiembre de 1984.

RECONOCIMIENTOS

Expreso mi más sincero agradecimiento al doctor Emilio Rosenblueth, Director del presente trabajo, por sus valiosas indicaciones, sabios consejos, su alentadora y estimulante atención y constante revisión del manuscrito durante el desarrollo del mismo.

Agradezco al Dr. Francisco Sánchez Sesma por la lectura crítica del manuscrito y sus recomendaciones.

Agradezco a todas aquellas personas que de una u otra forma han contribuido para la realización de esta tesis.

A mis padres

A mis hermanos

A Mei-Lin

I N D I C E

1. INTRODUCCION
2. METODO DE ESTIMACIONES PUNTUALES
 - 2.1 Funciones de una variable
 - 2.2 Funciones de varias variables
 - 2.3 Consideración de los terceros momentos cruzados
 - 2.4 Ejemplos ilustrativos del método
3. APLICACION DEL METODO DE ESTIMACIONES PUNTUALES EN ESPECTROS SISMICOS CON PROPIEDADES ALEATORIAS
 - 3.1 Nota introductoria
 - 3.2 Hipótesis y formulación del problema
 - 3.3 Resultados
4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
5. REFERENCIAS
6. TABLAS Y FIGURAS

1. INTRODUCCION

Por incertidumbres en los datos y en las teorías de diversos problemas frecuentemente se requeriría un análisis probabilista riguroso. Para rehuir esta labor que suele ser demasiado ardua, a menudo se aplica un tratamiento determinista; esto es, cada variable aleatoria se sustituye por un valor medio y se trata como si fuera conocida con exactitud y como si la teoría no introdujera errores. Ello obliga a adoptar factores de seguridad basados en la intuición y el empirismo, con lo que se producen diseños que en ocasiones son inseguros y en otros originan el dispendio de recursos.

Ante esta situación se ha desarrollado un método de estimaciones puntuales (refs 1 y 6) para calcular los tres primeros momentos de una función de variables aleatorias, el cual permite suplir las deficiencias señaladas del tratamiento determinista, sacrificando en cierta medida la precisión de un análisis probabilista riguroso, sacrificio que en múltiples problemas se justifica ampliamente.

En este trabajo se obtiene una solución que satisface todos los momentos de las distribuciones de las variables aleatorias, de orden igual o menor al tercero. Se lleva a cabo este desarrollo para funciones que dependen de dos o tres variables aleatorias y, en el Cap. 2 se presentan algunos ejemplos ilus-

trativos del método.

En el capítulo 3 se aplica el método mencionado a espectros sísmicos en suelos con propiedades aleatorias. Estas se han adoptado a partir de datos para arcillas del Lago de Texcoco de la ciudad de México. Finalmente, se presentan resultados con el método de estimaciones puntuales, y se comparan con el método determinista, que solamente considera valores medios. Se encuentran diferencias significativas.

Las hipótesis simplificadoras más drásticas habrán de superarse en investigaciones ulteriores pues los resultados obtenidos evidencian la importancia de tener en cuenta las principales incertidumbres. Entre esas hipótesis se hallan la de correlación completa entre las propiedades del suelo en diversos puntos del estrato blando, la linealidad del comportamiento y la idealización del fenómeno como unidimensional. Asimismo, el cálculo de los factores de amplificación basado en espectros de Fourier admite ser mejorado. Los resultados obtenidos indican que el método de estimaciones puntuales con 2^a concentraciones cuando existen n variables aleatorias, puede ser excesivamente burdo cuando las incertidumbres en una o más variables son desmesuradas por mas que mejore enormemente los resultados de análisis deterministas.

2. METODOS DE ESTIMACIONES PUNTUALES¹⁾

2.1 Función de una variable

La referencia 1 describe un método simple para aproximar los primeros tres momentos de una función real $Z=Z(X)$ de la variable aleatoria X . Sea $p_X(x)$ la función de densidad de probabilidades de X en $X=x$. Sus momentos centrales se definen como

$$M'_i = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{X})^i p_X(x) dx \quad i=1, 2, \dots \quad (1)$$

donde \bar{X} designa la esperanza de X .

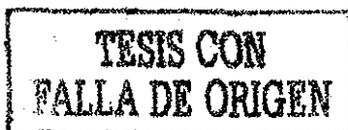
Se quiere obtener expresiones para la esperanza, desviación típica y coeficiente de sesgo de Z , respectivamente \bar{Z} , σ_Z y v_Z . Para ello, se asigna a X una distribución arbitraria que posea cuatro parámetros a fin de satisfacer las expresiones para los momentos de orden cero a tres de X . En la referencia mencionada se emplean dos concentraciones, P_1 y P_2 , de la función de densidad de probabilidades, respectivamente en $X=x_1$ y $X=x_2$.

$$p_X(x) = P_1 \delta(x-x_1) + P_2 \delta(x-x_2) \quad (2)$$

$\delta(\cdot)$ es la delta de Dirac de la variable (\cdot) . Se definen $\xi_1 = (x_1 - \bar{X})/\sigma$ y $\xi_2 = (x_2 - \bar{X})/\sigma$; σ y v respectivamente desviación típica y coeficiente de sesgo; las expresiones de interés son

$$1 = P_1 + P_2$$

1) En la literatura, se conoce el método como estimación de Rosenblueth (ref 2).



$$0 = \xi_1 P_1 - \xi_2 P_2$$

$$1 = \xi_1^2 P_1 + \xi_2^2 P_2$$

$$v = \xi_1^3 P_1 - \xi_2^3 P_2$$

para satisfacer los momentos de $p_X(x)$, su solución es

$$\xi_1 = v/2 + \sqrt{1 + (v/2)^2} \quad (3a)$$

$$\xi_2 = \xi_1 - v \quad (3b)$$

$$P_1 = \xi_1 / (\xi_1 + \xi_2) \quad (3c)$$

$$P_2 = 1 - P_1 \quad (3d)$$

con $z_i = Z(x_i)$ los tres primeros momentos centrales de Z son

$$0 = (z_1 - \bar{Z}) P_1 + (z_2 - \bar{Z}) P_2$$

$$\sigma_Z^2 = (z_1 - \bar{Z})^2 P_1 + (z_2 - \bar{Z})^2 P_2$$

$$v \sigma_Z^3 = (z_1 - \bar{Z})^3 P_1 + (z_2 - \bar{Z})^3 P_2$$

de donde

$$\bar{Z} = P_1 z_1 + P_2 z_2 \quad (4a)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{P_1 P_2} |z_1 - z_2| \quad (4b)$$

$$v \sigma_Z = (P_1 - P_2) (z_1 - z_2) / \sigma_Z \quad (4c)$$

Estas aproximaciones son respectivamente del tercero, segundo y primer orden. Si el coeficiente de sesgo de X, v es nulo la solución se simplifica y queda $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $P_1 = P_2 = 1/2$, $\bar{Z} = (z_1 + z_2)/2$, $\sigma_Z = |z_1 - z_2|/2$.

2.2 Función de varias variables

En ingeniería, multitud de problemas requieren tener en cuenta no sólo una variable aleatoria sino varias. Se necesita

generalizar el método para varias variables aleatorias. Como un primer paso se considera en la referencia 1 una función real $Z = Z(X, Y)$ de las variables aleatorias X y Y . Nos interesa obtener \bar{Z} , σ_Z y ν_Z . Para eso, asignamos una distribución que consiste en cuatro concentraciones P_{11} , P_{12} , P_{22} y P_{21} de la función de densidad de probabilidades $p_{XY}(x, y)$, respectivamente en los puntos que se muestran en la fig 1. Los momentos centrales de Z son

$$M'_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^i (y - \bar{Y})^j p_{XY}(x, y) dx dy \quad (5)$$

donde \bar{X} y \bar{Y} = respectivamente esperanza de X y Y .

Entonces, las expresiones a satisfacer quedan en la forma

$$\begin{aligned} P_{11} + P_{12} + P_{22} + P_{21} &= 1 \\ (P_{11} + P_{12}) \xi_1 - (P_{22} + P_{21}) \xi_2 &= 0 \\ (P_{11} + P_{21}) \eta_1 - (P_{12} + P_{22}) \eta_2 &= 0 \\ P_{11} \xi_1 \eta_1 - P_{12} \xi_1 \eta_2 + P_{22} \xi_2 \eta_2 - P_{21} \xi_2 \eta_1 &= \rho \\ (P_{11} + P_{12}) \xi_1^2 + (P_{22} + P_{21}) \xi_2^2 &= 1 \\ (P_{11} + P_{21}) \eta_1^2 + (P_{12} + P_{22}) \eta_2^2 &= 1 \\ (P_{11} + P_{12}) \xi_1^3 - (P_{22} + P_{21}) \xi_2^3 &= \nu_X \\ (P_{11} + P_{21}) \eta_1^3 - (P_{12} + P_{22}) \eta_2^3 &= \nu_Y \end{aligned}$$

donde σ_X y σ_Y = desviaciones típicas de X y Y ; ν_X y ν_Y = coeficientes de sesgo de X y Y , respectivamente; ρ = coeficiente de correlación entre X y Y , y ξ_1 , ξ_2 , η_1 y η_2 se definen como para el caso anterior. La solución es

$$\xi_1 = \nu_X / 2 + \sqrt{1 + (\nu_X / 2)^2} \quad (6a)$$

$$\xi_2 = \xi_1 - \nu_X \quad (6b)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\eta_1 = v_Y/2 + \sqrt{1 + (v_Y/2)^2} \quad (6c)$$

$$\eta_2 = \eta_1 - v_Y \quad (6d)$$

$$P_{ij} = (\xi_{3-i} \eta_{2j} + (-1)^{i+j} \rho) / \zeta \quad (6e)$$

donde $\zeta = (\xi_1 + \xi_2)(\eta_1 + \eta_2)$

En caso de que una función real de n variables aleatorias, se toman 2^n puntos de concentración de probabilidad colocadas en los vértices de un paralelepípedo rectangular de dimensiones n . Entonces las incógnitas son las concentraciones de probabilidad y las coordenadas de dos de ellas que no tengan coordenada en común. Esto resulta demasiado laborioso tan luego el número de variables aleatorias excede de 4 o 5. Lind (ref 2) ha ideado un método que exige solo $2n$ concentraciones en vez de 2^n . Sin embargo, dicho método no tiene en cuenta momentos arriba de segundo orden. Procreando emplear un método más preciso proponemos que se trata Y como función de sólo dos variables, a la vez y se emplee el enfoque descrito en la siguiente sección.

2.3 Consideración de los terceros momentos cruzados

La solución que se ha presentado no considera los momentos cruzados de tercer orden. En esta sección obtendremos la solución que satisface todos los momentos hasta de tercer orden, usando el método de perturbaciones.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sea nuevamente $Z = Z(X, Y)$. Primero, completaremos las expresiones que suministran los momentos de interés de X y Y de manera que los puntos de distribución no quedan en rectángulo sino un cuadrilátero (fig 2). Las condiciones quedan en forma

$$P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22} = 1 \tag{7a}$$

$$P_{11}\xi_{11} + P_{12}\xi_{12} - P_{21}\xi_{21} - P_{22}\xi_{22} = 0 \tag{7b}$$

$$P_{11}\eta_{11} - P_{12}\eta_{12} - P_{21}\eta_{21} + P_{22}\eta_{22} = 0 \tag{7c}$$

$$P_{11}\xi_{11}\eta_{11} - P_{12}\xi_{12}\eta_{12} + P_{21}\xi_{21}\eta_{21} - P_{22}\xi_{22}\eta_{22} = \rho \tag{7d}$$

$$P_{11}\xi_{11}^2 + P_{12}\xi_{12}^2 + P_{21}\xi_{21}^2 + P_{22}\xi_{22}^2 = 1 \tag{7e}$$

$$P_{11}\eta_{11}^2 + P_{12}\eta_{12}^2 + P_{21}\eta_{21}^2 + P_{22}\eta_{22}^2 = 1 \tag{7f}$$

$$P_{11}\xi_{11}^2 + P_{12}\xi_{12}^2 - P_{21}\xi_{21}^2 - P_{22}\xi_{22}^2 = v_X \tag{7g}$$

$$P_{11}\eta_{11}^2 - P_{12}\eta_{12}^2 - P_{21}\eta_{21}^2 + P_{22}\eta_{22}^2 = v_Y \tag{7h}$$

$$P_{11}\xi_{11}^2\eta_{11} - P_{12}\xi_{12}^2\eta_{12} - P_{21}\xi_{21}^2\eta_{21} + P_{22}\xi_{22}^2\eta_{22} = v_{XY} \tag{7i}$$

$$P_{11}\xi_{11}\eta_{11}^2 + P_{12}\xi_{12}\eta_{12}^2 - P_{21}\xi_{21}\eta_{21}^2 - P_{22}\xi_{22}\eta_{22}^2 = v_{YX} \tag{7j}$$

donde $v_{XY} = M_{21}' / \sigma_X^2 \sigma_Y$, $v_{YX} = M_{12}' / \sigma_X \sigma_Y^2$ y los demás coeficientes se definen como anteriormente.

El sistema de ecuaciones tiene 12 incógnitas, de las cuales 4 son valores de P_{ij} y 8 son coordenadas. Podríamos por tanto en cuenta también por los dos momentos marginales de cuarto orden. Sin embargo, ello nos impediría usar el método de perturbación partiendo de las ecs 6 como solución inicial y generando expresiones lineales pues se deberían tener en cuenta términos de orden superior, lo cual requeriría resolver un sistema de 12 ecuaciones no lineales cuya solución sería demasiado laboriosa. En vista de que la estimación puntual de probabilidades tiene por objeto suministrar un instrumento sencillo, nos



limitaremos a satisfacer las ecs 7, se tomarán las ecs 6 como solución inicial, se conservará la masa de concentración de probabilidades P_{ij} y sólo se perturbarán las coordenadas de las concentraciones.

Llamaremos ξ' y η' a los incrementos de la solución inicial ξ y η respectivamente y definiremos $\xi'_{ij} = (P/P_{ij})(-1)^{ij} \xi$
 $\eta'_{ij} = (P/P_{ij})(-1)^{ij} \eta$, $P = P_n$, ξ y η son incógnitas.

Cualesquiera ξ'_{ij} y η'_{ij} pequeñas satisfacen todas las ecs 7 excepto las 7i y 7j. Estas dos quedan en la forma

$$2(\xi_{i1} + \xi_{i2})(\eta_i + \eta_2)P\xi = \Delta_{i1} \quad (8a)$$

$$2(\xi_{j1} + \xi_{j2})(\eta_j + \eta_2)P\eta = \Delta_{j2} \quad (8b)$$

donde

$$\Delta_{i1} = v_{XY} - \rho v_X$$

$$\Delta_{j2} = v_{YX} - \rho v_Y$$

Retomando la definición $\xi = (\xi_1 + \xi_2)(\eta_1 + \eta_2)$ de las ecs 8 nos queda

$$\xi = (v_{XY} - \rho v_X) / 2\xi P \quad (9a)$$

$$\eta = (v_{YX} - \rho v_Y) / 2\xi P \quad (9b)$$

Finalmente

$$P_{ij} = (\xi_{i1} \eta_{j2} + (-1)^{ij} \rho) / \xi \quad (10a)$$

$$\xi_{ij} = \xi_i + (-1)^{ij} (v_{XY} - \rho v_X) / 2\xi P_{ij} \quad (10b)$$

$$\eta_{ij} = \eta_j + (-1)^{ij} (v_{YX} - \rho v_Y) / 2\xi P_{ij} \quad (10c)$$

Definimos los incrementos ξ'_{ij} y η'_{ij} proporcionales a ξ y η , respectivamente. Estamos pues empleando dos configuraciones correctivas (figs 3 y 4) a la solución inicial (fig 1). En cada configuración conservamos las concentraciones

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

nes de la solución inicial e introducimos cambios sólo en las coordenadas de concentraciones.

Para el caso de una función real $Z = Z(X, Y, t)$ presentamos la solución que satisface los momentos de tercer orden o menores. Es la siguiente

$$P_{ijk} = [Z_{,i} \eta_{,j} z_{,k} + (-1)^{ij} \rho_{XY} \sqrt{1+(v_x/2)^2} + (-1)^{ik} \rho_{Xt} \sqrt{1+(v_y/2)^2} + (-1)^{jk} \rho_{Yt} \sqrt{1+(v_x/2)^2} + (-1)^{ij+k} \rho_{XYt}] / Z \quad (11a)$$

$$z_{ijk} = z_i + [(-1)^{ij} (v_{20} - \rho_{XY} v_x) / \sqrt{1+(v_x/2)^2} + (-1)^{ik} (v_{21} - \rho_{Xt} v_x) / \sqrt{1+(v_y/2)^2}] / 2Z P_{ijk} \quad (11b)$$

$$\eta_{ijk} = \eta_j + [(-1)^{ik} (v_{21} - \rho_{Yt} v_y) / \sqrt{1+(v_x/2)^2} + (-1)^{ij} (v_{20} - \rho_{XY} v_x) / \sqrt{1+(v_x/2)^2}] / 2Z P_{ijk} \quad (11c)$$

$$z_{ijk} = z_k + [(-1)^{ik} (v_{21} - \rho_{Xt} v_x) / \sqrt{1+(v_y/2)^2} + (-1)^{ij} (v_{20} - \rho_{XY} v_x) / \sqrt{1+(v_x/2)^2}] / 2Z P_{ijk} \quad (11d)$$

donde P_{ijk} es la concentración de probabilidad en el punto

$$(X_{ijk}, Y_{ijk}, t_{ijk}) = (\bar{X} + (-1)^{ij} \sigma_X z_{ijk}, \bar{Y} + (-1)^{ik} \sigma_Y \eta_{ijk}, \bar{t} + (-1)^{ik} \sigma_t z_{ijk}) \quad (12)$$

$\rho_{XY}, \rho_{Xt}, \rho_{Yt}$ y ρ_{XYt} sus coeficientes de correlación respecto a las variables de sus índices, v_t el coeficiente de sesgo de t ,

$z_i = v_i/2 + \sqrt{1+(v_i/2)^2}$, $z_x = z_1 - v_x$, $z_y = 0 + \sqrt{1+(v_x/2)^2} \sqrt{1+(v_y/2)^2} \sqrt{1+(v_x/2)^2}$

y el coeficiente v_{ijk} vale $M_{ijk} / \sigma_X^i \sigma_Y^j \sigma_t^k$ para $i+j+k=3$, de los momentos de tercer orden cruzados.

2.4 Ejemplos ilustrativos del método

1. Función de una variable aleatoria

Para ilustrar como usar el método de estimación puntual de probabilidad, consideremos el ejemplo $Z = X^2$, $\bar{X} = 1$, $\sigma = 0.1$, $v = 0.5$. De las ecs 3, tenemos

$$\xi_1 = 0.5/2 + \sqrt{1 + (0.5/2)^2} = 1.2808$$

$$\xi_2 = 1.2808 - 0.5 = 0.7808$$

$$P_1 = 0.7808 / (1.2808 + 0.7808) = 0.3787$$

$$P_2 = 1.0 - 0.3787 = 0.6213$$

Según la definición de ξ , resulta

$$x_1 = 1 + 1.2808 \times 0.1 = 1.12808$$

$$x_2 = 1 - 0.7808 \times 0.1 = 0.9219$$

Aplicando las ecs 4 obtenemos

$$\bar{Z} = 0.3787 \times 1.12808 + 0.6213 \times 0.9219 = 1.01$$

$$\sigma_Z = \sqrt{0.3787 \times 0.6213 (1.12808^2 - 0.9219^2)} = 0.205$$

$$\nu_Z = (0.6213 - 0.3787)(1.12808^2 - 0.9219^2) / 0.205 = 0.5002$$

2. Función de dos variables

Aprovechamos un ejemplo que se calculó en la ref 1.

Sea $Z = x^2 y^3$, $\bar{X} = 1$, $\bar{Y} = 2$, $\sigma_X = 0.2$, $\sigma_Y = 0.5$, $\nu_X = 0.2$, $\nu_Y = 0.4$ y $\rho = 0.4$

Empleando las ecs 6 y las definiciones de ξ_i y η_i resulta

$\xi_1 = 1.105$, $\xi_2 = 0.905$, $\eta_1 = 1.2198$, $\eta_2 = 0.8198$, $x_1 = 0.8198$, $x_2 = 1.22$, $y_1 = 1.59$, $y_2 = 2.61$, $P_1 = 0.2785$
 $P_3 = 0.1717$, $P_4 = 0.4626$, $P_5 = 0.1234$ (fig 5). De acuerdo con la fig. 5 se tiene $\bar{Z} = 12.4173$

$\sigma_Z = 12.6709$. Ahora, si suponemos $\nu_{XY} = 0, \pm 0.5$ y $\nu_{YX} = 0, \pm 0$.

Aplicaremos las ecs 10. Obtendremos los resultados de las estadísticas que se muestran en la tabla 1 y las concentraciones para diferentes ν_{XY} y ν_{YX} que aparecen en las figs 5, 6 y 7. Las coordenadas de los puntos 1, 2, 3 y 4 en las figuras 5-7 siempre son las mismas mientras que éstas no ocurren para los puntos 1', 2', 3' y 4'. Las coordenadas estas se presentan en la tabla 2.

Observamos que las coordenadas de los puntos 1 y 3

no cambian gran cosa; no así las de los puntos 2 y 4. En la ta
bla 1 se aprecia la sensibilidad de la solución a ∇_{xy} y ∇_{yx} .

3. APLICACION DEL METODO DE ESTIMACIONES PUNTUALES EN ESPECTROS SISMICOS CON PROPIEDADES ALEATORIAS

3.1 Nota introductoria

Los espectros sísmicos han sido estudiados por diversos autores (ref. 3) y se aplican ampliamente en el diseño estructural. Una forma ventajosa de representar el espectro es en gráficas logarítmicas cuyas escalas se eligen de manera que las abscisas, las ordenadas las líneas a 45° en una dirección y las perpendiculares a éstas representan la frecuencia o período, seudovelocidad, desplazamiento máximo y pseudoaceleración, respectivamente.

En el presente capítulo se estudiarán los espectros tomando en cuenta la influencia de la aleatoriedad de las propiedades del suelo que descansa sobre la roca, ante una excitación horizontal conocida. Se empleará una teoría lineal unidimensional y se aplicará el método descrito en el capítulo anterior. se usarán datos de publicaciones que consignan las propiedades de arcillas bajo el lago de Texcoco de la ciudad de México para desarrollar un ejemplo numérico.

3.2 Hipótesis y formulación del problema

El problema se trata en un suelo de espesor H sobre la

roca o suelo firme (fig 8). En la superficie libre del terreno se supone colocado un oscilador simple. Se considera solamente la excitación horizontal en la base del suelo. Se desea conocer la respuesta del oscilador. Para resolver este problema se emplean las siguientes hipótesis:

- 1) El suelo está constituido por un material viscoelástico homogéneo, se deforma en el intervalo lineal y la base del suelo es un material viscoelástico también.
- 2) Las ondas sísmicas incidentes son ondas de cortantes e inciden verticalmente.
- 3) No se toma en cuenta el efecto de interacción suelo-estructura.
- 4) Se idealiza al estrato del suelo como una viga de cortante unidimensional empotrada en la base y libre en la parte superior.

Aceptando las hipótesis citadas, para el equilibrio se requiere que se satisfaga la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial s}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15)$$

donde s denota esfuerzo cortante, Z la coordenada vertical, la masa por unidad de volumen, u el desplazamiento horizontal y t el tiempo. A lo largo de la viga de cortante, s es cierta

funcional de la deformación $\partial u / \partial Z$. Si u es de la forma $u = \bar{u} \exp(i\omega t)$, con \bar{u} independiente de t , entonces la hipótesis de que la relación esfuerzo-deformación es lineal nos permite escribir $s = \bar{s} \exp(i\omega t)$, donde

$$\bar{s} = G(1 + i\alpha) \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \quad (14)$$

G = módulo de cortante y α son funciones reales de ω e independientes del tiempo.

Según lo anterior, para una perturbación armónica de estado estacionario, la ec se reduce a

$$(1 + i\alpha) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \bar{u} = 0 \quad (15)$$

donde $v = \sqrt{G/\rho}$ es la velocidad de la onda de cortante. Resolviendo la ec 15 se obtiene la solución

$$\bar{u} = a \cos(\omega Z / v \sqrt{1 + i\alpha}) + b \sin(\omega Z / v \sqrt{1 + i\alpha}) \quad (16)$$

De la hipótesis 4, la superficie del terreno debe estar libre de esfuerzo, por lo que $\left. \frac{\partial u}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0$, esto es, $b = 0$. Tenemos por tanto

$$\bar{u}(Z) = a \cos(\omega Z / v \sqrt{1 + i\alpha}) \quad (17)$$

Esta solución se aplica a \bar{u} así como a u . Ahora consideramos las ondas y las respuestas como si sus desplazamientos fueran aceleraciones. Para satisfacer la condición de

la superficie de la roca se tiene (refs 3 y 7)

$$a = 2 \left(\frac{-\rho_1 v_1 \sqrt{1+i\alpha_1}}{\rho_2 v_2 \sqrt{1+i\alpha_2}} \operatorname{sen} \frac{\omega H}{v_2 \sqrt{1+i\alpha_2}} + i \cos \frac{\omega H}{v_2 \sqrt{1+i\alpha_2}} \right)^{-1} \quad (18)$$

donde ρ_1 , v_1 y α_1 se suponen constantes en el estrato de suelo blando, H es el espesor del estrato y ρ_2 , v_2 y α_2 , son las constantes de la roca.

El movimiento estacionario de la superficie libre es la parte real de $a \exp(i\omega t)$, cuya amplitud es la del espectro de Fourier $|a|/2$ y en consecuencia, el factor de amplificación B resulta ser

$$B(\omega) = \left| \cos \frac{\omega H}{v_2 \sqrt{1+i\alpha_2}} + i \frac{\rho_1 v_1 \sqrt{1+i\alpha_1}}{\rho_2 v_2 \sqrt{1+i\alpha_2}} \operatorname{sen} \frac{\omega H}{v_2 \sqrt{1+i\alpha_2}} \right|^{-1} \quad (19)$$

Para calcular espectros sísmicos, se acepta la hipótesis de que el valor numérico máximo esperando de una respuesta a una familia de movimientos reales, que idealizados como gaussianos es proporcional a la raíz cuadrada de la esperanza del cuadrado de la respuesta al proceso gaussiano estacionario correspondiente en cualquier instante (ref 3). Esto es

$$E(Q) \propto \sqrt{E(q^2)} \quad (20)$$

donde q es la respuesta del oscilador simple que descansa en la superficie libre y Q su máximo: $Q = q_{\max} = Sv/\omega$, donde Sv representa pseudovelocidad espectral. Además, por la perturbación que es un proceso gaussiano estacionario caracterizado por la

densidad de potencia espectral $G^2(\omega)$ (refs 3 y 4), tenemos

$$E(q^4) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 G^2(\omega) d\omega \quad (21)$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función de transferencia.

Empleando las ecs 20 y 21, Kousner y Jennings han encontrado una excelente concordancia con la densidad media espectral de un número de sismos registrados en el terreno firme a lo largo de la costa occidental de Estados Unidos. Expresando $G(\omega)$ en $\text{cm/S}^{3/2}$, ω en S^{-1} y ajustando para los sismos mencionados la $G^2(\omega)$ se convierte en

$$G^2(\omega) = \frac{11.9(1+\omega^2/147.8)}{(1-\omega^2/42)^2 + \omega^2/147.8} \quad (22)$$

y para un sismo de duración de 30 segundos (ref 4)

$$S_V = 1.796 \sqrt{\frac{\pi G^2(\omega)}{2 \zeta \omega} (1 - \exp(-2 \zeta \omega \frac{30}{2.44}))} \quad (23)$$

donde ζ es el coeficiente de amortiguamiento del oscilador.

Para obtener espectros sísmicos adoptamos las ecs 22 y 23. Además sustituimos $B^2(\omega)G^2(\omega)$ en lugar de $G^2(\omega)$ en la ec 23. De aquí,

$$S_V = 1.796 \sqrt{\frac{\pi B^2(\omega)G^2(\omega)}{2 \zeta \omega} (1 - \exp(-2 \zeta \omega \frac{30}{2.44}))} \quad (24)$$

En nuestro problema, para el cálculo numérico del ejem

plo mencionado en la nota introductoria de presente capítulo, tomaremos la media y la desviación típica de los datos del suelo blando ref (5) Estos datos se consignan en la tabla 3. En el texto $\Sigma_0 = (\pi \alpha_0 / 4H) \sqrt{G_0 / \rho_0}$, y, suponemos el espesor del suelo blando H igual a 30 metros. En el suelo firme o en la roca, tomamos $v_2 = 152. \text{ m/s}$, $\rho_2 = 1831 \text{ T. s}^2/\text{m}^3$ y $\alpha_2 = 0$ o $v_2 = 400. \text{ m/s}$, $\rho_2 = 1831 \text{ T. s}^2/\text{m}^3$ y $\alpha_2 = 0$.

Usando el método de estimaciones puntuales (ecs 10), primero agrupamos G_i y ρ_i , para calcular las estadísticas de v_i y después incorporamos la variable aleatoria α_i , para hallar las estadísticas de α_i . Finalmente se combinan estas con las de $v_i \sqrt{1+i\alpha_i}$, Según la ec 19, se tiene

$$B(\omega) = \sum_{i=1}^3 B_i \quad (25)$$

donde

$$B_1 = .09979 \times B(\omega, \rho_1 = .1244, v_1 \sqrt{1+i\alpha_1} = 99.716 + 2.5340i) \quad (25a)$$

$$B_2 = .4443 \times B(\omega, \rho_2 = .1165, v_2 \sqrt{1+i\alpha_2} = 39.6431 + .9908i) \quad (25b)$$

$$B_3 = .0836 \times B(\omega, \rho_3 = .1251, v_3 \sqrt{1+i\alpha_3} = 29.9151 + 2.5310i) \quad (25c)$$

$$B_4 = .37227 \times B(\omega, \rho_4 = .1158, v_4 \sqrt{1+i\alpha_4} = 29.8244 + .9905i) \quad (25d)$$

Se aplica la solución que agrupa funciones de tres variables aleatorias (ecs 11 y 12). Se obtiene

$$B = \sum_{i=1}^4 B_i \quad (26)$$

donde

$$B_1 = .06269 \times B(\omega, \rho_1 = 0.1246, \sqrt{1+i\alpha}_1 = 33.74455 + 2.8948i) \quad (26a)$$

$$B_2 = .00345 \times B(\omega, \rho_2 = .1152, \sqrt{1+i\alpha}_2 = 58.1259 + 1.6827i) \quad (26b)$$

$$B_3 = 0.3159 \times B(\omega, \rho_3 = .1243, \sqrt{1+i\alpha}_3 = 38.9105 + 0.9189i) \quad (26c)$$

$$B_4 = 0.1703 \times B(\omega, \rho_4 = .1166, \sqrt{1+i\alpha}_4 = 40.2032 + 1.0081i) \quad (26d)$$

$$B_5 = 0.0052 \times B(\omega, \rho_5 = .1407, \sqrt{1+i\alpha}_5 = 16.8898 + 3.0523i) \quad (26e)$$

$$B_6 = 0.1120 \times B(\omega, \rho_6 = .1153, \sqrt{1+i\alpha}_6 = 23.4331 + 2.3286i) \quad (26f)$$

$$B_7 = 0.1526 \times B(\omega, \rho_7 = 0.1246, \sqrt{1+i\alpha}_7 = 23.7103 + 0.9712i) \quad (26g)$$

$$B_8 = 0.1778 \times B(\omega, \rho_8 = 0.1161, \sqrt{1+i\alpha}_8 = 30.4284 + 1.1184i) \quad (26h)$$

Para el caso determinista tomamos solamente los valores medios. Obtenemos así

$$B = B = B(\omega, \nu = 35.5861, \zeta_0 = 0.0667, \rho = 0.12064) \quad (27)$$

Dado el coeficiente ζ de amortiguamiento de un oscila

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

dor, usando ecs 22, 24 y 25, 26 o 27 se obtendrán las esperanzas de la respuesta. Si $\zeta = 0$, la ec 24 se convierte en

$$S_v = 1.15 \sqrt{\pi B^2(\omega) G^2(\omega) \cdot 30} \quad (26)$$

3.3 Resultados

En las figs 9.1-9.7 se muestra una comparación entre el factor de amplificación, su desviación típica, su coeficiente de sesgo y la seudovelocidad espectral que conduce por dos estimaciones diferentes (ecs 25 y 26) y el método determinista para $\zeta = 0$, $\zeta = 0.02$, $\zeta = 0.05$ y $\zeta = 0.1$ con la velocidad de propagación de onda en la roca 152. m/s o 400. m/s.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para problemas complicados, es decir, que comprenden muchas variables aleatorias, podemos usar las soluciones que se presentan en el capítulo 2, agrupando las variables de dos en dos o de tres en tres o alternando estas agrupaciones hasta tener en cuenta todas las variables. Con ello se reduce el número de concentraciones requeridas a la vez que se incluyen los efectos de todos los momentos hasta los de tercer orden sin omitir los momentos cruzados.

Quizá no se justifique buscar la solución que satisfaga los momentos de cuarto orden, porque se complicaría el análisis, con lo que se perdería la sencillez del método. Sin embargo, las formas de los espectros medios calculados señala que, cuando son muy elevadas las incertidumbres en una o más variables, como aquí sucede con el módulo de rigidez, puede justificarse sustituir al menos unas de las densidades de probabilidad con un mayor número de concentraciones. Esto se concluye de notar la presencia de dos máximos en la cercanía del período fundamental de vibración del suelo, cuando era de esperarse un máximo único, más tendido que el resultante de un análisis de terminista. El tema amerita investigaciones ulteriores.

Es recomendable hacer un análisis más preciso para el ejemplo que se presenta en el cap. 3. Primeramente, se apli-

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ca la fórmula general

$$G^2(\omega) = B \frac{1 + (2\eta\omega/p)^2}{(1-\omega/p)^2 + (2\eta\omega/p)^2}$$

donde B es una constante, η el grado de amortiguamiento del filtro y p su frecuencia circular natural, usando los sismos registrados en terreno firme de la ciudad de México, para ajustar dichas constantes.

En aplicaciones prácticas han de tenerse en cuenta todos los estratos bien diferenciados que existan, no solo uno como aquí se ha hecho con fines ilustrativos.

Las hipótesis simplificatorias que aquí se utilizan habrán de superarse en investigaciones posteriores pues en los resultados presentados se aprecia tanto la importancia de tener en cuenta las principales incertidumbres como la de emplear métodos más refinados de análisis probabilista. Será importante considerar también las correlaciones de las propiedades del suelo blando en diversos estratos del mismo, la no linealidad de comportamiento y tal vez la naturaleza tridimensional del fenómeno.

REFERENCIAS

1. Rosenblueth, E., "Estimaciones bipuntuales en probabilidades", Instituto de Ingeniería, UNAM, 464, Mar 1983
2. Lind, C.N., "Modelling of uncertainty in discrete dynamical systems", Appl. Math Modelling 7, jun 1983
3. Newmark, N.M., y Rosenblueth, E., Fundamentos de Ingeniería Sísmica. Diana, 1975, México
4. Housner, G.W. y P.C. Jennings, "Generation of artificial earthquakes", Proc. ASCE, 90 (EMI), 113-150. 1964
5. Martínez, B., et al., "Determinación de las propiedades dinámicas de la arcilla en el vaso de Texcoco" Instituto de Ingeniería UNAM, 338. abril 1974.
6. Rosenblueth, E., "Point estimates for probability moments", Procs, National Academy of Sciences, 72, 10, EUA, oct 1975, 3812-14
7. Aki, K., y Richards, P.G., Quantitative Seismology Theory and Methods., Vol I, cap. 7 W.H. Freeman and Company, San-Francisco 1980.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TABLA 1. ESTADÍSTICAS DE Z, EJEMPLO 2

v_{xy}	ESTA-DÍSTICA	$v_{yx} = 0.5$	$v_{yx} = 0$	$v_{yx} = 0.5$	$v_{xy} - \rho v_x$
-0.5	\bar{z}	12.2395	11.1694	11.3426	-0.58
	σ_z	9.7738	11.1180	11.4129	
	\bar{z}	12.0066	11.6253	11.8314	
0.	σ_z	10.3141	12.6226	12.9815	-0.08
	\bar{z}	12.0382	12.2316	12.4962	
0.5	σ_z	11.5124	14.3517	14.9359	0.48
$v_{yx} - \rho v_y$		-0.66	-0.16	0.34	

TABLA 2. COORDENADAS DE Z, EJEMPLO 2*

PUNTOS COORD. (X, Y) Fig.	1'	2'	3'	4'
5.1	1.1704 , 2.4654	1.3034 , 1.8245	0.7858 , 1.4957	0.9336 , 2.9361
5.2	1.1702 , 2.6070	1.3034 , 1.3838	0.7858 , 1.5928	0.9336 , 2.4170
5.3	1.1702 , 2.6289	1.3034 , 1.4194	0.7858 , 1.5785	0.9336 , 2.3680
6.1	1.2140 , 2.4654	1.2324 , 1.8245	0.8144 , 1.4957	0.8348 , 2.9361
6.2	1.2140 , 2.6070	1.2324 , 1.3838	0.8144 , 1.5928	0.8348 , 2.4170
6.3	1.2140 , 2.6289	1.2324 , 1.4194	0.8144 , 1.5785	0.8348 , 2.3680
7.1	1.2578 , 2.4654	1.1613 , 1.8245	0.8431 , 1.4957	0.7360 , 2.9361
7.2	1.2578 , 2.6070	1.1613 , 1.3838	0.8431 , 1.5928	0.7360 , 2.4170
7.3	1.2578 , 2.6289	1.1613 , 1.4194	0.8431 , 1.5785	0.7360 , 2.3680
PUNTOS COORD. (X, Y) Fig.	1	2	3	4
5.1 - 7.3	1.2210 , 2.6099	1.2210 , 1.5901	0.8190 , 1.5901	0.8190 , 2.6099

* En las figs. 507 en los puntos 1v1', 2v2', 3v3', v 4v4' tiene las concentraciones $P_{11} = 0.2785$, $P_{12} = 0.1717$, $P_{22} = 0.4264$ y $P_{21} = 0.1234$ respectivamente

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

TABLA 3a. DATOS SUPUESTOS PARA EL EJEMPLO NUMERICO

	Media m	Desviación Típica σ	Coefficiente de sesgo ν
G, T/m ²	152.28125	42.23414	-0.21039
ζ_0	0.06676	0.03137	1.63612
ρ_1 TS ² /m ²	0.12064	0.00426	-0.14600

TABLA 3b. DATOS SUPUESTOS PARA EL EJEMPLO NUMERICO

	$\rho_{G_1 \zeta_0}$	$\rho_{G_0 \rho_1}$	$\rho_{\zeta_1 \rho_1}$	$\rho_{G_1 \rho_1 \zeta_1}$
Coef. de correl.	-0.18293	0.33204	-0.157868	0.0

	$\rho_{\zeta_0^2 G}$	$\rho_{G_1^2 \zeta_0}$	$\rho_{G_1 \rho_1}$	$\rho_{\zeta_0 \rho_1^2}$	$\rho_{G \rho_0^2}$	$\rho_{\zeta_1 \rho_1^2}$
Coef. de correlación	0.18667	0.29236	-0.13409	0.04497	-0.2021	0.2349

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

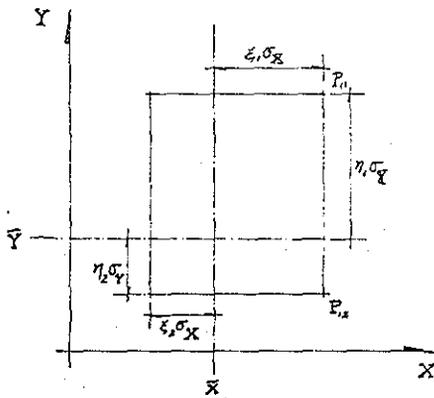


Fig 1. Concentraciones en un rectángulo para función de dos variables

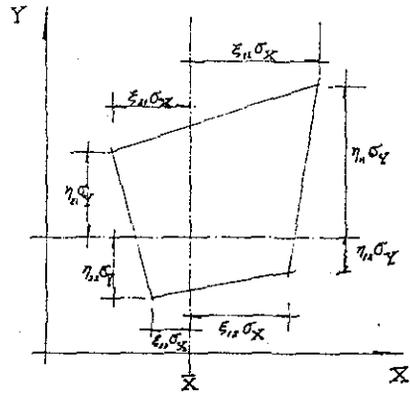


Fig 2. Concentraciones en un cuadrilátero para función de dos variables

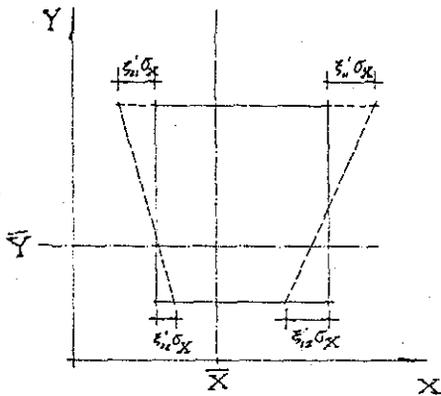


Fig 3. Primera configuración correctiva

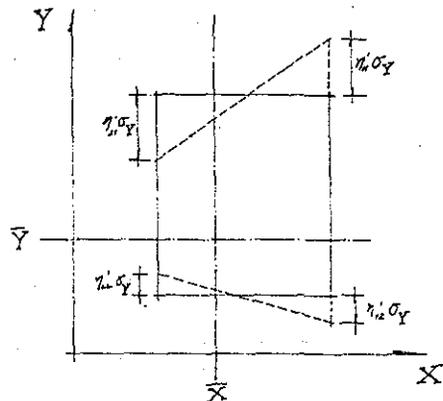


Fig 4. Segunda configuración correctiva

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

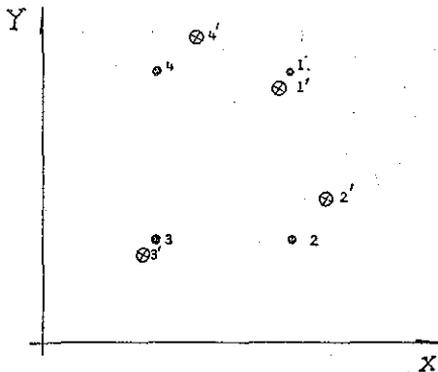


Fig 5.1 Coordenadas de las concentraciones modificadas, con $r_{XY} = -0.5$ y $r_{YX} = -0.5$, ejemplo 2

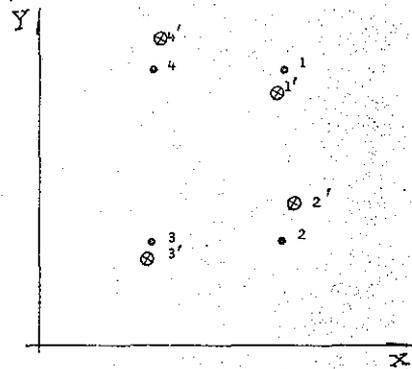


Fig 6.1 Coordenadas de las concentraciones modificadas, con $r_{XY} = 0$ y $r_{YX} = -0.5$, ejemplo 2

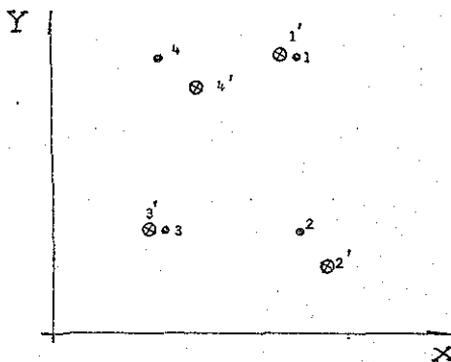


Fig 5.2 Coordenadas de las concentraciones modificadas, con $r_{XY} = -0.5$ y $r_{YX} = 0$, ejemplo 2

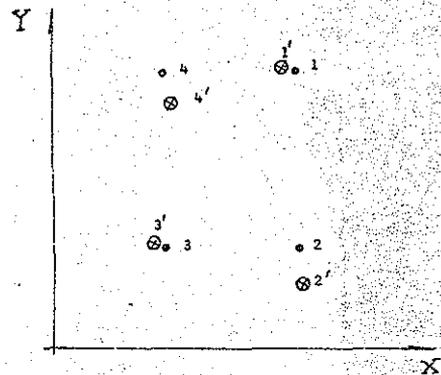


Fig 6.2 Coordenadas de las concentraciones modificadas, con $r_{XY} = 0$ y $r_{YX} = 0$, ejemplo 2

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

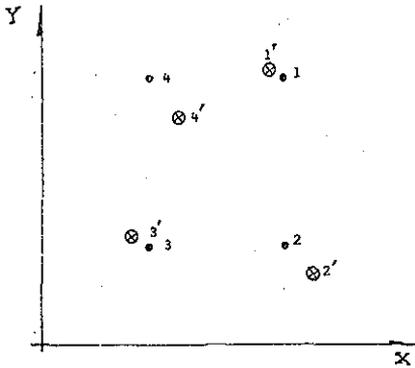


Fig 5.3 Coordenadas de las concentraciones mo dificadas, con $v_{xy} = -0.5$ y $v_{yx} = 0.5$, ejemplo 2

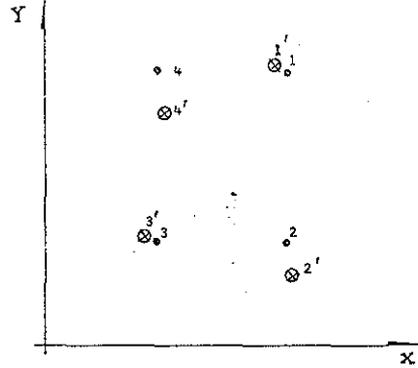


Fig 6.3 Coordenadas de las concentraciones mo dificadas, con $v_{xy} = 0$ y $v_{yx} = 0.5$, ejemplo 2

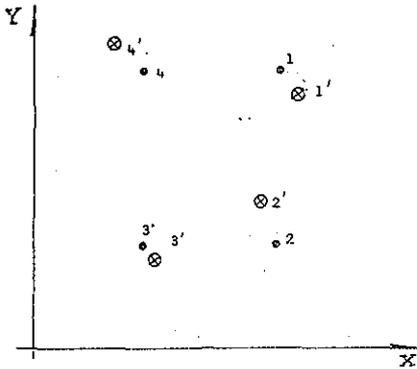


Fig 7.1 Coordenadas de las concentraciones mo dificadas, con $v_{xy} = 0.5$ y $v_{yx} = -0.5$, ejemplo 2

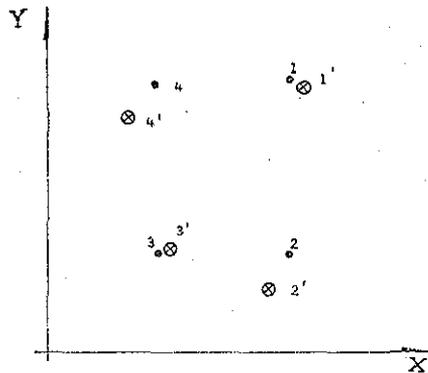


Fig 7.2 Coordenadas de las concentraciones mo dificadas, con $v_{xy} = 0.5$ y $v_{yx} = 0$, ejemplo 2

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

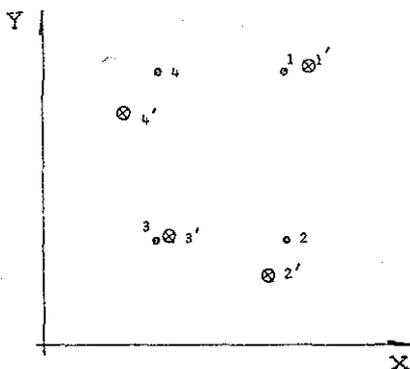


Fig 7.3 Coordenadas de las concentraciones modificadas, con $\nu_{xy}=+0.5$ y $\nu_{yx}=+0.5$, ejemplo 2

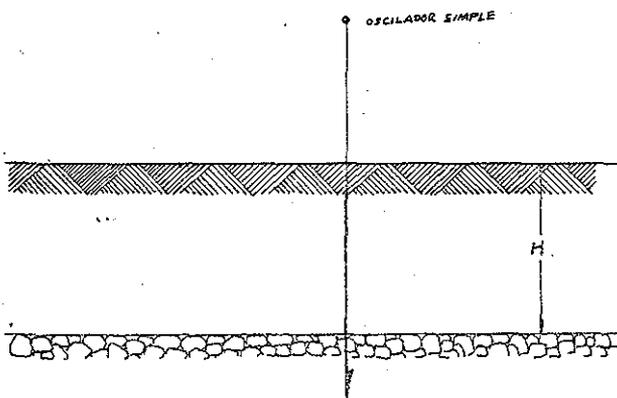


Fig 8. Sección de suelo

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

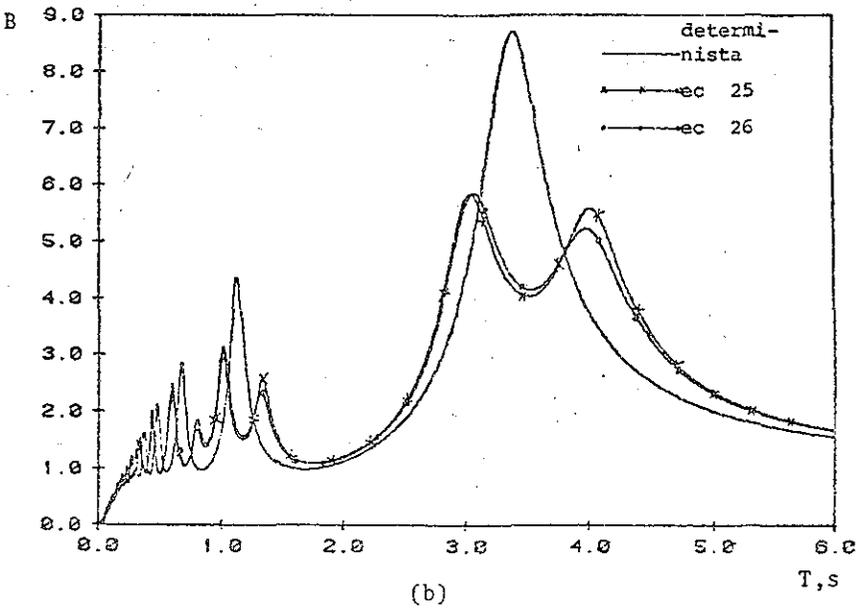
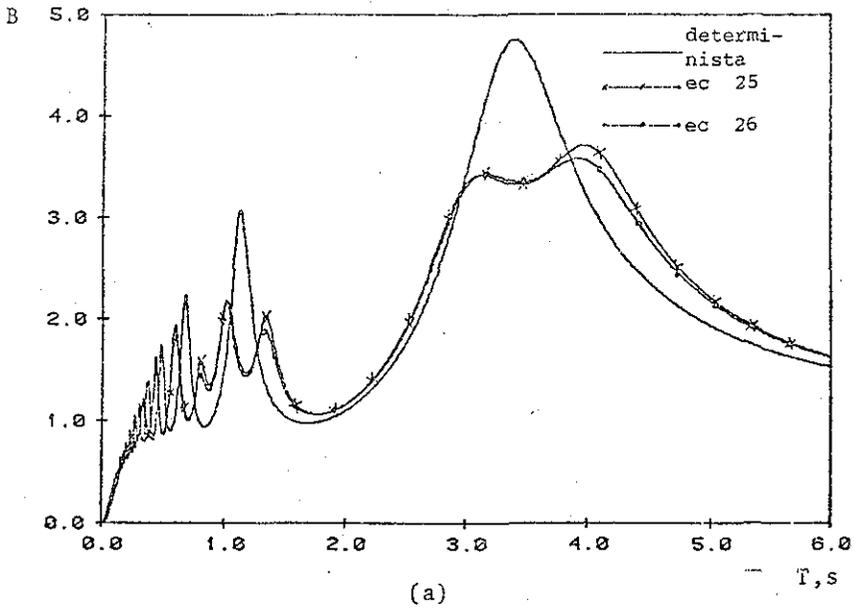


Fig 9.1 (a) Factor de amplificación, $v_2 = 152$ m/s

(b) Factor de amplificación, $v_2 = 400$ m/s

**ESTA TESIS NO SALI
DE LA BIBLIOTECA**

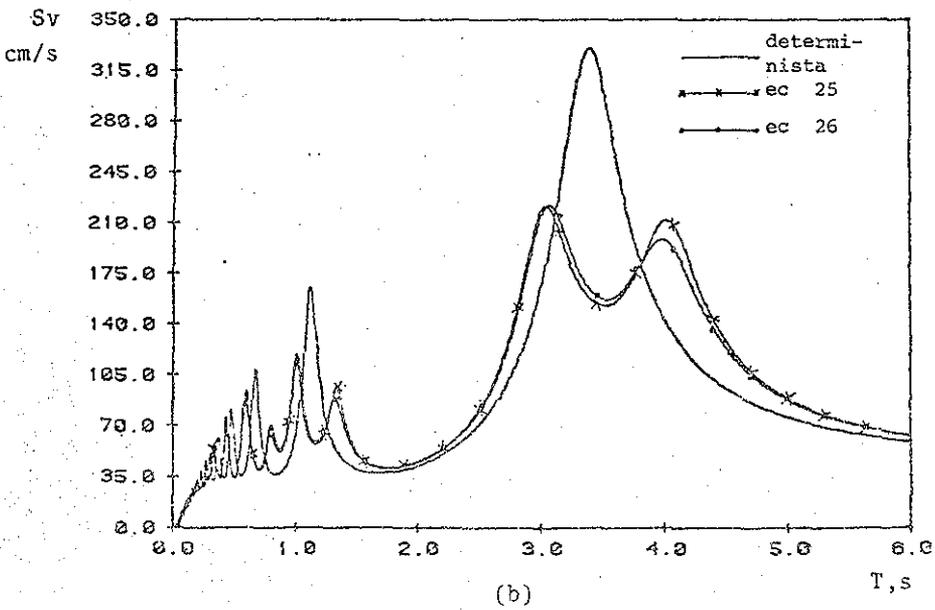
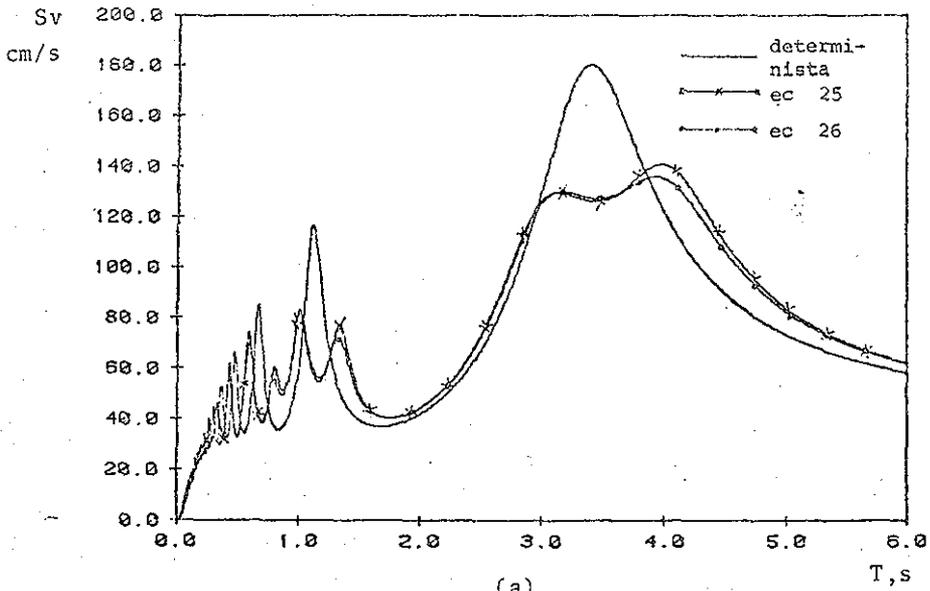


Fig 9.2 (a) Espectro de pseudovelocity, $\zeta = 0.0$ y $v_2 = 152$ m/s

(b) Espectro de pseudovelocity, $\zeta = 0.0$ y $v_2 = 400$ m/s

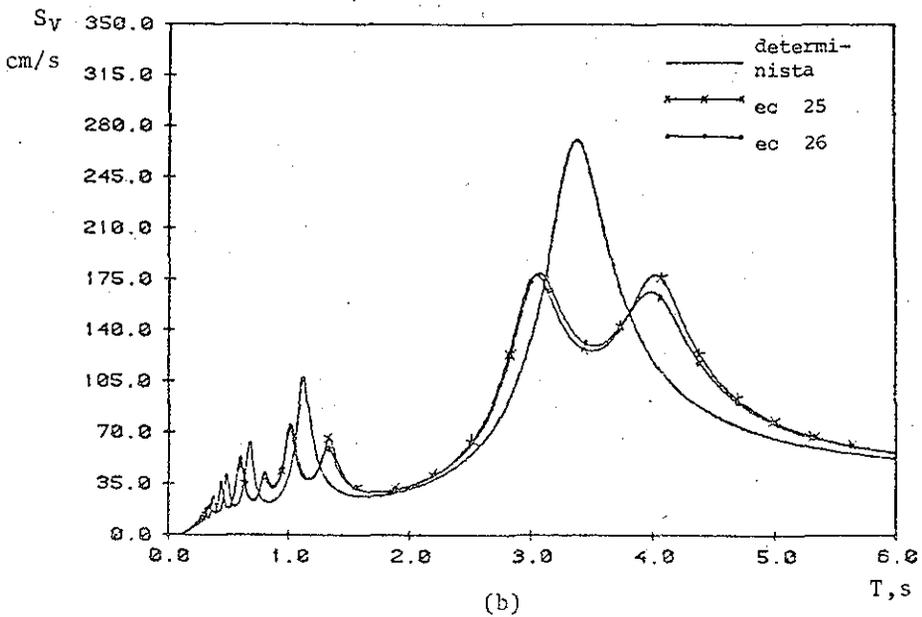
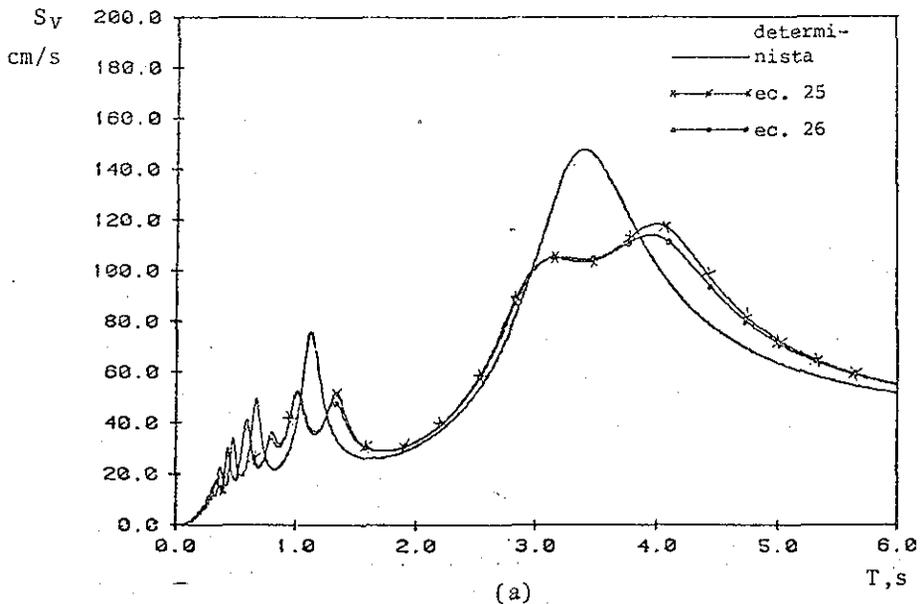


Fig 9.3 (a) Espectro de pseudovelocidad, $\tau = 0.02$ y $v_2 = 152$ m/s
 (b) Espectro de pseudovelocidad, $\tau = 0.02$ y $v_2 = 400$ m/s

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

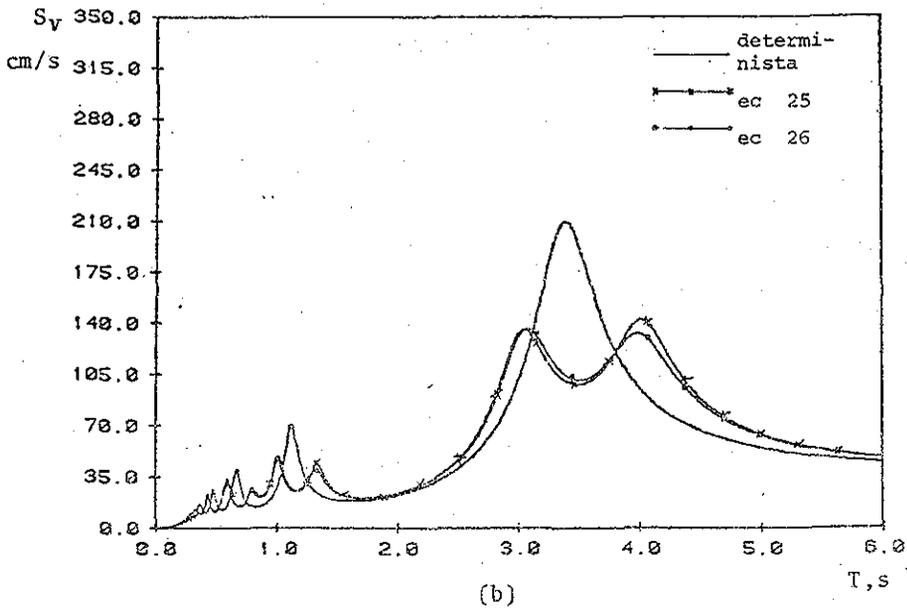
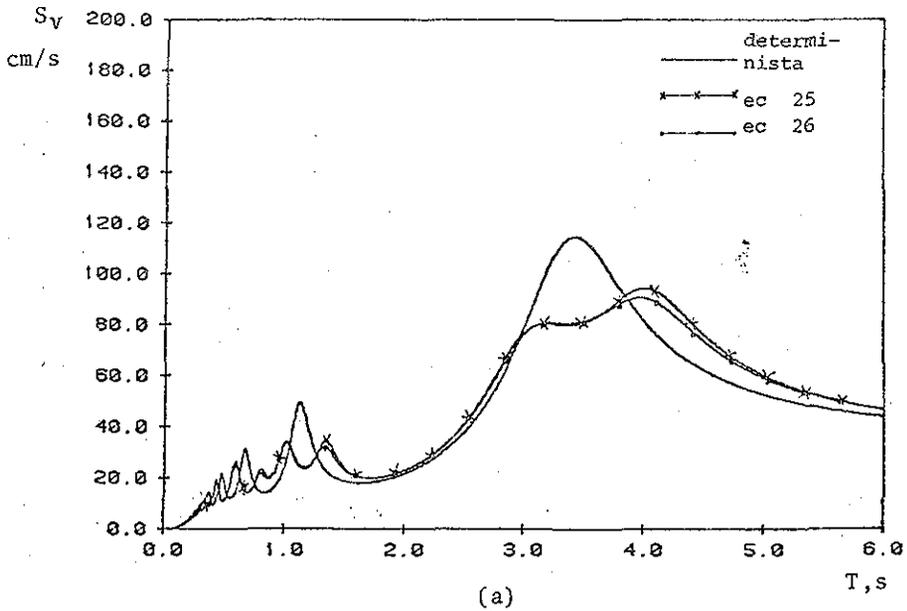


Fig 9.4 (a) Espectro de pseudovelocidad, $\zeta = 0.05$ y $v_2 = 152$ m/s
 (b) Espectro de pseudovelocidad, $\zeta = 0.05$ y $v_2 = 400$ m/s

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

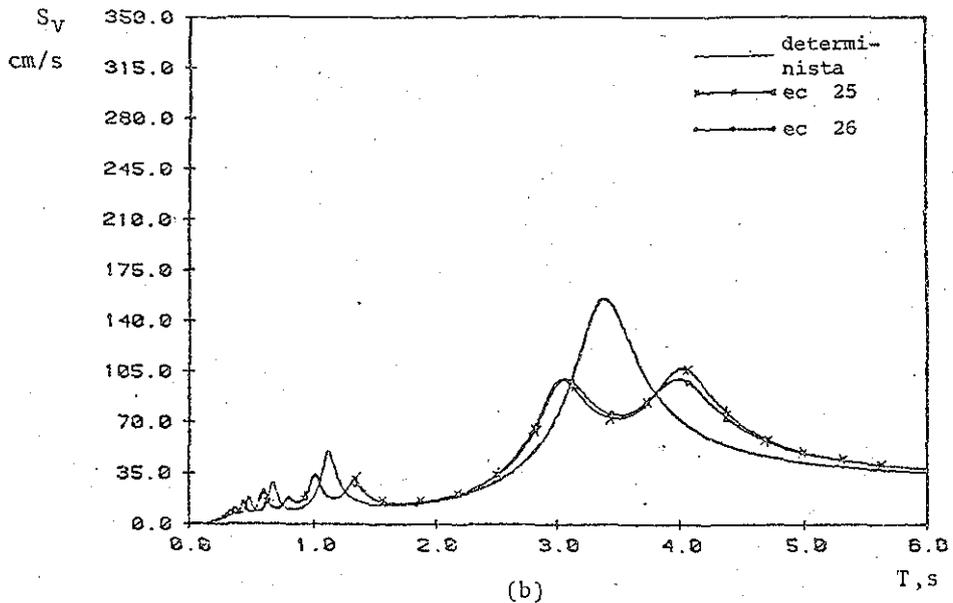
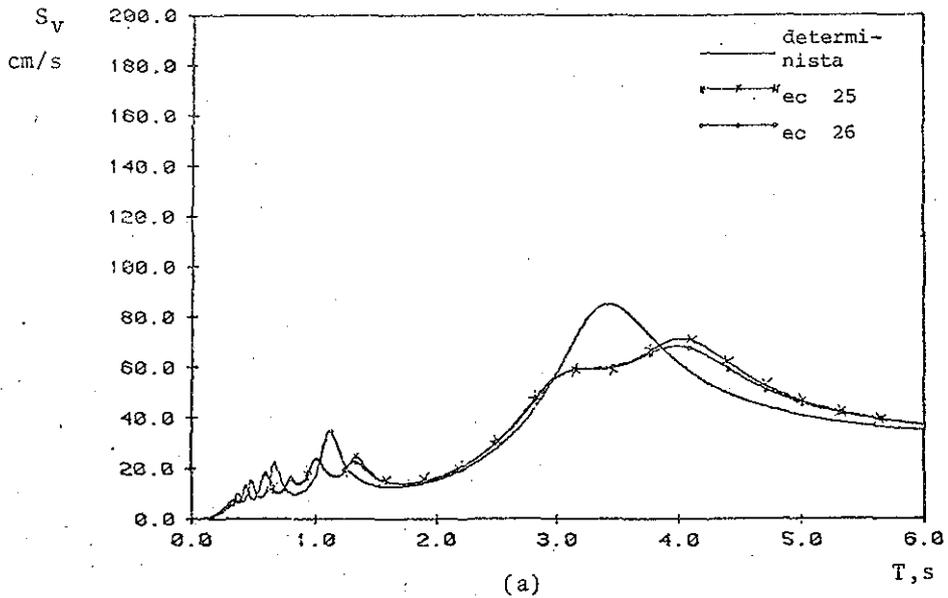


Fig 9.5 (a) Espectro de pseudovelocity, $\zeta = 0.1$ y $v_2 = 152$ m/s
 (b) Espectro de pseudovelocity, $\zeta = 0.1$ y $v_2 = 400$ m/s

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

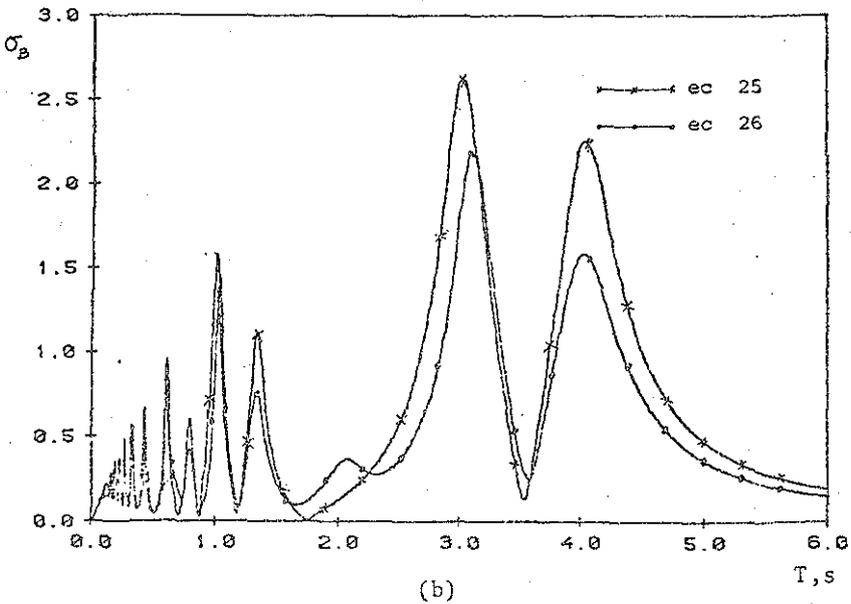
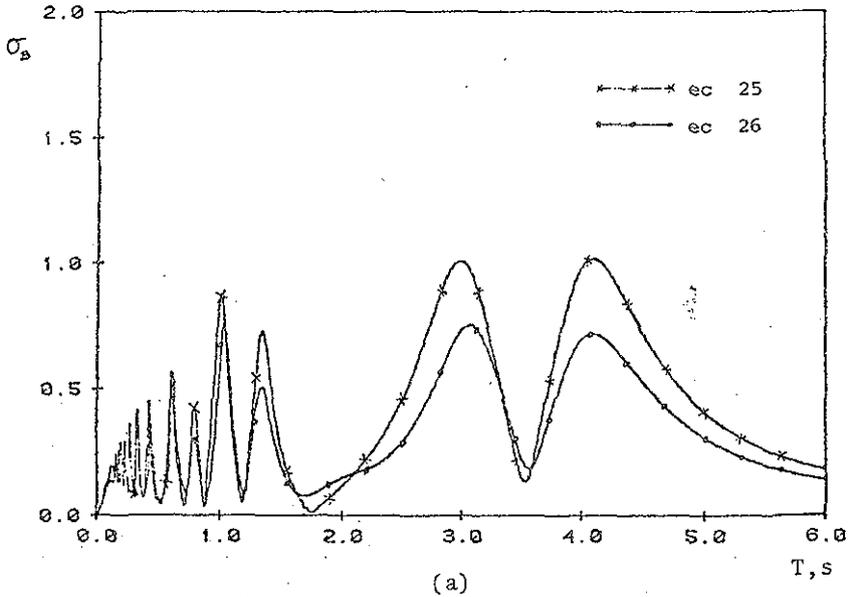


Fig 9.6 (a) Desviación típica de factor de amplificación para $v_2 = 152$ m/s
 (b) Desviación típica de factor de amplificación para $v_2 = 400$ m/s

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

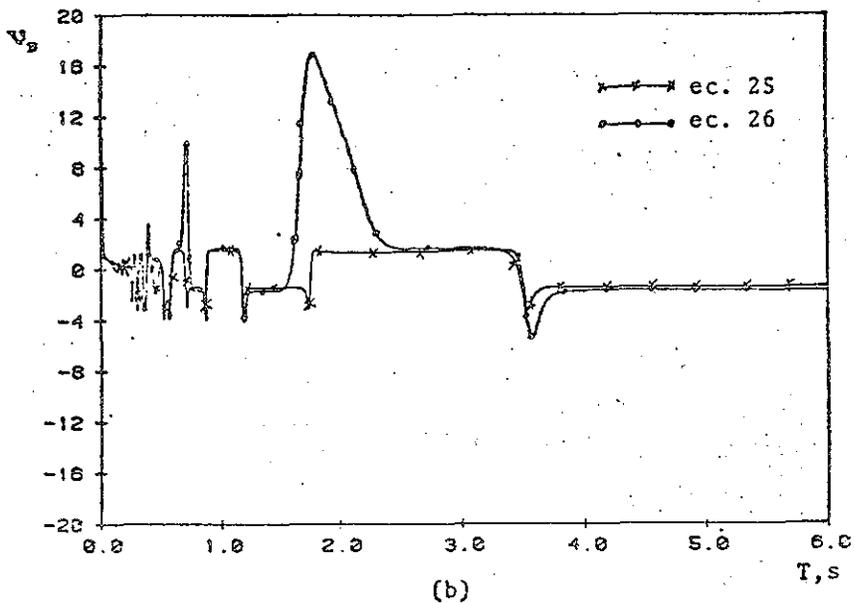
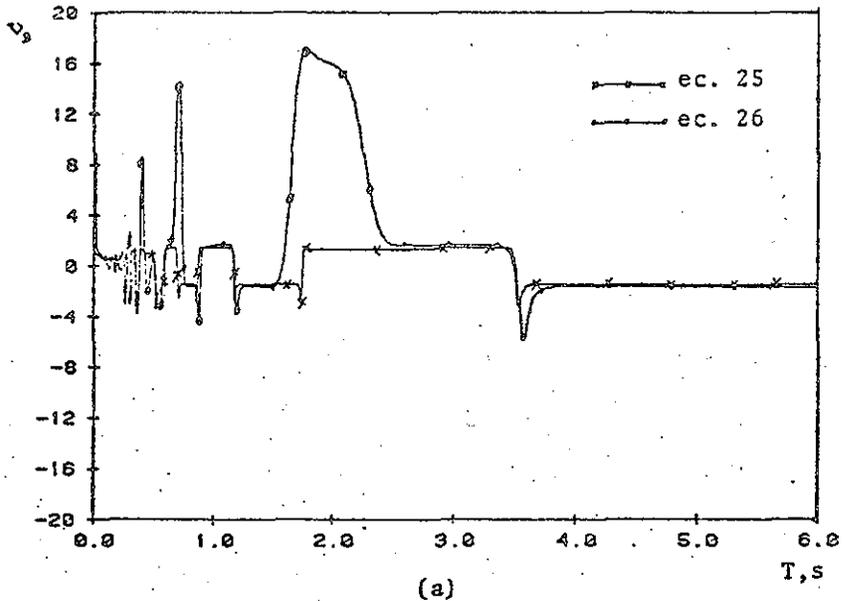


Fig 9.7 (a) Coeficiente de sesgo de factor de amplificación para $v = 152$. m/s
 (b) Coeficiente de sesgo de factor de amplificación para $v = 400$. m/s

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**