

3 0 0 3 6 3



Universidad Nacional Autónoma de México

1
1g.

FACULTAD DE CIENCIAS

PROFUNDIDAD DE INVESTIGACION EN
SONDEOS ELECTRICOS VERTICALES.

EJEMPLAR UNICO

T E S I S

Que para obtener el Título de
MAESTRO EN CIENCIAS
(G E O F I S I C A)

P r e s e n t a

ADAN PERALTA CARDONA

México, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1984



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Dedicatorias

A mi esposa

Belkys

Por su cariño, apoyo y comprensión.

A mis hijos

Carlos Adán

Leonidas Alberto

Con toda mi abnegación y cariño.

A mi madre

Mónica

Con todo respeto.

A mi hermano

Mario

Con cariño.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agradecimientos

Al M. en I. Enrique M. Lima Lobato por sus consejos y el apoyo brindado durante mis estudios, además por las sugerencias tan valiosas durante el desarrollo de este proyecto.

A Rosy por su colaboración en los momentos más difíciles.

A Fausto y Martín por su valiosa ayuda.

Especialmente deseo agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua por su apoyo decidido en estos años tan críticos para Nicaragua.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

INDICE GENERAL

Introducción	1
Distribución del Trabajo	4
Antecedentes	5
CAPITULO I	
Fundamentos	
I.1 Ecuaciones de Distribución de Potencial en Modelos de Capas Horizontales Homogéneas Isotrópicas	11
I.2 Obtención de Ecuaciones Características	15
I.3 Estudio de la Función Kernel	23
I.3.1 Analogías Matemáticas del Valor Característico λ , Función Generadora $L(\lambda)$ y Función Kernel $K(\lambda)$.	23
I.3.2 Formación de Curvas de la Función Kernel	28
I.4 Método de Integración de las Ecuaciones de Distribución de Potencial	49
1.4.1 Partición Logarítmica de la Transformada de Resistividad.	50
I.4.2 Cálculo de Potenciales Eléctricos en cualquier Capa del Modelo.	51
CAPITULO II	
Profundidad de Investigación en Sondeos Eléctricos Verticales	
II.1 Estudio de los Coeficientes de Integración	55
II.2 Contribución Individual de cada Interface al Potencial Total.	60

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

II.3 Profundidad de Detección de Interfaces.	65
II.3.1 Análisis de Profundidad de Detección de Interfaces.	65
II.3.2 Definición de Profundidad de Investigación.	68
II.3.3 Determinación de la Profundidad de Investigación para un Arreglo Electrónico.	68
II.3.4 Diferencia de Profundidades de Investigación en Arreglos Wenner y Schlumberger.	69
II.3.5 Generalidad del Método.	70
II.4 Ejemplos.	70
CAPITULO III	
Resultados y Conclusiones	
III.1 Curvas de Contribución de Interfaces al Potencial	71
III.2 Curvas de Profundidad de Investigación	87
Conclusiones	100
Apéndice A	102
Bibliografía	108

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

INTRODUCCION

En todo metodo de exploración geofísica, siempre se tiene una señal a cuantificarse. En el caso particular del estudio del subsuelo, es deseable estar en capacidad de inferir del análisis de esa señal o señales, la estructura de este. Por esto, es de interés fundamental, tener conocimiento de las contribuciones individuales de cualquier porción a la señal medida. Lo anterior conduce al diseño de sistemas de prospección que sean lo suficientemente sensibles, para poder tener información de las regiones del subsuelo que son de interés.

En el caso particular del metodo de prospección eléctrica por corriente continua (metodo de resistividad) la señal medida sobre la superficie es una diferencia de potencial producida por una corriente eléctrica constante en el tiempo, que es inyectada al subsuelo. Utilizando modelos matemáticos para la interpretación, uno de los principales objetivos del presente trabajo es intentar reconocer la profundidad de la porción productora de señal detectable. Este estudio, tratará especialmente el caso unidimensional formado por capas horizontales, homogéneas e isotrópicas eléctricamente. En este tipo de modelos se encontrarán las contribuciones de cada capa a la diferencia de potencial medida en superficie, y consiguientemente poder determinar las contribuciones a la resistividad aparente.

Como consecuencia de la concepción del método de prospección de resistividad por corriente continua, nació la pregunta: cuál es la profundidad de penetración de la corriente inyectada? O preguntas parecidas tales como: profundidad efectiva para un arreglo electrodo dado? o simplemente cuál es el factor de profundidad?.

Por un factor de profundidad, en prospección eléctrica generalmente se entiende como aquel factor que transforma a una distancia de separación electrodo en una profundidad efectiva. Esta idea puede tener su origen en el hecho de que la profundidad promedio de penetración de una corriente continua en

el subsuelo, en determinadas condiciones es proporcional a la distancia de separación de electrodos de corriente. La profundidad de penetración es aquella a la cual penetra la mitad de la corriente total, EvJen, H. M. (1938).

EvJen (1938) es el primero que da una concepción mas clara del problema y define Factor de Profundidad como aquella profundidad de máximo peso en contribución al potencial, expresada como una fracción de la separación electrodoica. Esta definición ha servido de base para muchos trabajos sobre este tema y sigue siendo aceptada.

Roy y Apparao (1971), redefine Factor de Profundidad como: la profundidad que tiene mayor contribución en la señal total medida en superficie. Y le llama Profundidad de Investigación.

Es muy importante tener en cuenta la diferencia que existe entre Profundidad de Investigación y Profundidad de Penetración de corriente, debido que en un determinado modelo matematico, la penetración de corriente en el medio es funcion solamente de la posición de electrodos de corriente, en cambio la Profundidad de Investigación está determinada por las posiciones tanto de los electrodos de corriente como de los de potencial.

Por otra parte, teóricamente se sabe que la corriente penetra a todas las profundidades, con una disminución gradual en magnitud, lo que dificulta dar una definición de Profundidad de Investigación en términos de penetración o distribución de densidades de corriente.

Aún teniendo el conocimiento del concepto de Profundidad de Penetración, en la práctica existen ideas tales como: que un arreglo Wenner la profundidad efectiva de investigación es un tercio de la separación de electrodos de corriente o bien en el caso Schlumberger es un medio de la separación de electrodos de corriente. Ideas o suposiciones de este tipo acerca de Profundidad de Investigación son obviamente sin fundamento, aunque para un determina-

do modelo exista una disposición de electrodos de potencial y de corriente, que lo anterior es aproximadamente correcto.

Existen otras suposiciones semejantes; una de ellas es que la profundidad a la cual se encuentra una interface en un modelo de capas puede determinarse de los puntos de inflexión en las curvas de resistividad aparente, multiplicando la separación electrodiica en la cual sucede la inflexión por una constante numérica, y en algunos casos esa constante se toma como la unidad.

Lo anterior es producto de no tener ni aún en casos teóricos una forma práctica como determinar profundidades de investigación. Lo cual es el objetivo principal del presente trabajo de tesis.

En modelos de capas horizontales, homogéneas e isotrópicas eléctricamente, para un arreglo electrodiico dado, no basta conocer la contribución individual de cada interface a la diferencia de potencial total medido en superficie, sino que también debe considerarse si esa contribución puede ser registrada por el receptor que se utiliza, como cantidad significativa, es decir si la contribución al potencial esta por arriba de la sensibilidad del receptor. Por lo tanto si la contribución de la i -sima interface de un modelo de N capas es inferior a la sensibilidad del aparato receptor, esta no será registrada como cifra significativa, conseqüentemente traerá complicaciones para la interpretación de los resultados. Por ejemplo, si la contribución de la i -sima interface no es detectable puede suceder: a) que si la $(i+1)$ -sima capa es más resistiva que la anterior, la contribución de esta, puede ser que si sea detectable. b) Si la resistividad de la $(i+1)$ -sima capa es menor que la anterior, también no será detectable. Lo cual significa que la profundidad de investigación en este último caso es inferior a la profundidad a la cual se encuentra la interface superior de la última capa detectable.

Lo anterior servirá de base para la definición del concepto de Profundidad de Investigación que se

dará en el capítulo II del presente trabajo, para modelos de capas. Para esta definición, no solo se toma en cuenta el modelo de subsuelo y el arreglo electrodiódico sino también la sensibilidad del aparato receptor utilizado en la investigación.

El método que se expondrá en el capítulo II es general para modelos de N capas, sin restricciones de espesores de capas ni resistividades, además que se cumple para cualquier tipo de arreglo electrodiódico, aunque para la exposición del método se trabajará únicamente para arreglos Schlumberger y modelos de 2 y 3 capas.

A continuación se dan las sensibilidades de algunos aparatos

Modelo	Marca	Sensibilidad	Error
IPR-8	Scintrex	+5 mV	+3%
IPR-10	Scintrex	+0.1mv	+3%
	Geoelec	+0.01mV	+0.1%
M4	Huntec	+0.01mV	

Distribución de Trabajo

Para el logro de los objetivos propuestos para el presente trabajo, los cuales ya fueron mencionados; primero se darán los antecedentes, esto es, se hará una breve exposición de los trabajos publicados que tratan sobre el tema "Profundidad de Investigación".

Posteriormente en el capítulo I, se establecerán los fundamentos que permitirán el desarrollo del tema fundamental, analizado en el capítulo II. Siendo estos: a) Relación entre las funciones caracte-

rísticas de la solución de la ecuación de Laplace y sus respectivas expresiones en forma recurrencial utilizando una función generadora $L(\lambda)$. b) Estudio de la función Kernel; su expresión en términos de la generadora $L(\lambda)$ y su respectiva interpretación para lo cual, se establece una analogía matemática entre el caso eléctrico y el caso sísmico de reflexión en modelos de capas horizontales, homogéneas e isotropas. c) Luego se establece un método de integración de las ecuaciones de distribución de potencial a cualquier profundidad.

En el capítulo II, se hace un estudio de las contribuciones individuales de las interfaces al potencial total medido en superficie, en función de las separaciones electrodicás; posteriormente se da una definición de Profundidad de Investigación en base al análisis de la Profundidad de Detección de las Interfaces. Luego se establece un procedimiento para la determinación de la Profundidad de Investigación para un arreglo electrodicó Schlumberger y se establece la generalidad del método.

Finalmente en el capítulo III, se presentan para diferentes modelos de dos y tres capas, las gráficas de contribución de interfaces al potencial total; b) contribución de interfaces a la resistividad aparente y c) profundidad a las interfaces contra separaciones electrodicás. Y como última parte de este capítulo se establecen las conclusiones y recomendaciones.

ANTECEDENTES

El estudio de la Profundidad de Investigación en prospección geoelectrica (corriente continua), fue iniciado por EvJen, H.M. (1938) definiendo Factor de Profundidad de la forma siguiente: es aquella profundidad de máximo peso en contribución al potencial, expresada como una fracción de la separación electrodicá.

Para encontrar la profundidad que contribuye con mayor peso al potencial, se basa en el método de las imágenes desarrollado por Ehremsburg y

rísticas de la solución de la ecuación de Laplace y sus respectivas expresiones en forma recurrencial utilizando una función generadora $L(\lambda)$. b) Estudio de la función Kernel; su expresión en términos de la generadora $L(\lambda)$ y su respectiva interpretación para lo cual, se establece una analogía matemática entre el caso eléctrico y el caso sísmico de reflexión en modelos de capas horizontales, homogéneas e isotropas. c) Luego se establece un método de integración de las ecuaciones de distribución de potencial a cualquier profundidad.

En el capítulo II, se hace un estudio de las contribuciones individuales de las interfaces al potencial total medido en superficie, en función de las separaciones electrodicás; posteriormente se da una definición de Profundidad de Investigación en base al análisis de la Profundidad de Detección de las Interfaces. Luego se establece un procedimiento para la determinación de la Profundidad de Investigación para un arreglo electrodicó Schlumberger y se establece la generalidad del método.

Finalmente en el capítulo III, se presentan para diferentes modelos de dos y tres capas, las gráficas de contribución de interfaces al potencial total; b) contribución de interfaces a la resistividad aparente y c) profundidad a las interfaces contra separaciones electrodicás. Y como última parte de este capítulo se establecen las conclusiones y recomendaciones.

ANTECEDENTES

El estudio de la Profundidad de Investigación en prospección geoelectrica (corriente continua), fue iniciado por EvJen, H.M. (1938) definiendo Factor de Profundidad de la forma siguiente: es aquella profundidad de máximo peso en contribución al potencial, expresada como una fracción de la separación electrodicá.

Para encontrar la profundidad que contribuye con mayor peso al potencial, se basa en el método de las imágenes desarrollado por Ehremsburg y

Watson(1932) para prospección eléctrica.

Para un modelo homogéneo e isotrópico, propone una función $W(r)$ que es un promedio pesado de la suma de imágenes $G(z)$. Donde $W(r)$ tiene un tipo general de función de peso Q_n :

donde

$$Q_n = r^{2n} z^{2n+1} / kn(r^2 + z^2)^n$$

1

y

z : profundidad

r : distancia radial

n : n -ésima imagen

kn es un factor de normalización dado por:

$$kn = \int_0^1 (1+x^2)^n x^{2n} dx$$

2

La función de peso de tipo general tiene un máximo en

$$z_m = (2n+1)^{1/2} r / (2n+2)^{1/2}$$

3

Por lo tanto $W(r)$ es de la forma:

$$W_n(r) = \int_0^{\infty} Q_n(z, r) G(z) dz$$

4

Como resultado final Evjen encuentra que la Profundidad de Investigación en un medio homogéneo, para un arreglo electrodo tipo Wenner es un noveno de la distancia entre electrodos de corriente.

Muskat, M., and Evinser, H.H. (1941) se dedican a calcular la fracción de corriente $4I/I$ que fluye desde la superficie hasta una profundidad z a través de

un plano que es perpendicular a la línea donde se encuentran los electrodos de corriente y pasando por el punto medio de la separación electrodoica, para modelos de dos y tres capas, pero no relacionan directamente la profundidad de investigación de un sistema dado a la contribución hecha por una porción específica del subsuelo a la señal total medida sobre la superficie.

Al'Pin et al(1966) consideraron el problema de profundidad de investigación para el caso específico de un modelo de 2 capas, considerando infinita la resistividad de la segunda capa. De las comparaciones en las cuales las curvas de resistividad aparente se hacían asintóticas, dedujeron las profundidades de investigación para algunos arreslos electrodoicos. Encontrando que la Profundidad de Investigación para un arreslo Schlumberger es aproximadamente igual a la de un dipolo radial y que un dipolo azimutal tiene una Profundidad de Investigación dos veces mayor que la de un arreslo Schlumberger.

Keller, G.V., y Frischknecht, F.C.(1966) siguiendo el mismo método de Al'Pin et al(1966), encuentran la profundidad de investigación para otros arreslos electrodoicos. De la fig. 66, Pass. 118-119 que presentan Keller y Frischknecht, se puede decir que la Profundidad de Investigación de un arreslo Wenner es liseramente menor que la de un arreslo Schlumberger.

Keller, G.V.(1966) continúa el método de Al'Pin et al(1966) y considera el caso de tres capas. En este caso considera la resistividad de la tercera capa no completamente infinita y encuentra la profundidad de investigación para ciertos arreslos electrodoicos. Concluyendo, que para obtener una misma Profundidad de Investigación los arreslos: dipolos ecuatoriales, dipolos polares y Schlumberger, las separaciones deben estar en una proporción de 1:1.2:2.

Basados en la definición de Factor de Profundidad dada por Evjen(1938), Roy, A., and Apparao, A.(1971) definen Profundidad de Investigación como

la profundidad que tiene mayor contribución a la señal total medida en superficie. Pero a diferencia de Evjen(1938) no utilizan el método de las imágenes sino que usan la equivalencia entre cargas estáticas y campos estacionarios, para calcular la contribución de una capa en particular al potencial total medido en superficie. Del gráfico de contribuciones individuales de las capas contra las profundidades respectivas resulta una curva que le llaman Profundidad Característica de investigación para el arreslo electrodo utilizado. La profundidad en la cual esta curva alcanza el máximo, es de acuerdo a su definición la Profundidad de Investigación. En el uso del concepto de equivalencia electrostática usan un factor de proporcionalidad $1/2\pi$ para el cálculo de los momentos dipolares para cada elemento de volumen del medio, sin dar una justificación matemática. Sin embargo esa justificación fue dada posteriormente por Koefoed, D.(1972) y Roy, A.(1978). Consideran el caso homogéneo y modelos de dos capas. Por ejemplo, en el caso homogéneo encuentran que la Profundidad de Investigación para un arreslo Wenner es $0.11L$, donde L es la separación de electrodos de corriente y, para el caso Schlumberger es $0.125L$, L tiene el mismo significado que en el caso anterior.

Roy, A.(1972), Apparao, A., y Gangadhara Rao, T.(1974), Bhattacharya, B.B., and Indrajit Dutta(1982) utilizan el mismo método que Roy, A. and Apparao, A.(1971) para encontrar la Profundidad de Investigación en diferentes tipos de arreslos electrodo en un semi-espacio homogéneo. Roy, A.(1974) hace un estudio de las contribuciones individuales a la resistividad aparente en modelos de dos y tres capas, basandose en el método de Roy y Apparao(1971). En el caso de dos capas, considera unitario el espesor de la primera capa. Y en el caso de tres capas considera unitarios los espesores de la primera y segunda capa y las resistividades ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

Para el caso de 2 capas encuentra que la contribución de la primera capa a la resistividad aparente en un arreslo Wenner es:

$$\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)_{1w} = 1 + 2/3(k-1)A \quad 5$$

donde

k: Coeficiente de reflexión

Y la contribución de la segunda capa es:

$$\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)_{2w} = 2/3(k+1)A \quad 6$$

donde

$$A = L \sum_{n=0}^{\infty} k^n \left\{ \frac{1}{[L^2/q + 4(n\pi)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[4L^2/q + 4(n\pi)^2]^{3/2}} \right\} \quad 7$$

Y la resistividad aparente total:

$$\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)_v = 1 + 4/3kA \quad 8$$

Para el caso Schlumberger y modelos de 2 capas, cuando la separación AB de electrodos de corriente es L y MN es la separación de electrodos de potencial, donde AM=0.45L, MN=0.1L, NB=0.45L. Obtiene, que las contribuciones de la primera y segunda capa son:

$$\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)_{1s} = 1 + 2.475(k-1)B \quad 9$$

$$\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)_{2s} = 2.475(k+1)B \quad 10$$

$$\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)_s = 1 + 4.95kB \quad 11$$

donde

$$B=L \sum_{n=0}^{\infty} k^n \left\{ \frac{1}{[(0.45L)^2 + 4(nH)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(0.55L)^2 + 4(nH)^2]^{1/2}} \right\}$$

Para encontrar las contribuciones individuales de cada capa a la resistividad aparente en modelos de tres capas, primero calcula las profundidades características de investigación, utilizando las ecuaciones para el cálculo de potenciales dadas por Van Nostrand and Cook (1966) o por Bhattacharya and Patra (1968):

$$V_1 = \frac{I \rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \int_0^{\infty} \frac{(k_{12} e^{-2mH_1} + k_{23} e^{-2mH_2})(e^{-mz} + e^{mz}) J_0(mr) dm}{1 - k_{12} e^{-2mH_1} - k_{23} e^{-2mH_2} + k_{12} k_{23} e^{-2m(H_2 - H_1)}} \right]$$

donde k_{12} y k_{23} son los coeficientes de reflexión

Siempre basados en el método de Roy y Apparao (1971), Bhattacharya, B.B., y Sen, M.K. (1981) se dedican a estudiar la profundidad de investigación en medios homogéneos anisotrópicos eléctricamente, utilizando arreslos electrodomésticos colineales.

Onodera, S. (1983) hace un estudio de la Profundidad Asequible en sondeos eléctricos, considerando modelos de tres capas del tipo K (curva de resistividad aparente cóncava hacia arriba) y H (curva de resistividad aparente cóncava hacia abajo). Manteniendo constante el espesor h de la segunda capa, varía el espesor de la primera capa hasta que la curva de resistividad aparente de tres capas se aproxime a la curva de resistividad de dos capas. Esto lo hace para diferentes coeficientes de reflexión (k_1 y k_2) y separaciones electrodomésticas.

Luego grafica h , en función de la razón k_1/k_2 . Este diagrama alcanza un máximo en $k_1/k_2 = -1$ y decrece para valores de k_1/k_2 tendiendo a $-\infty$ y -0 . en conclusión, obtiene que la región por debajo de la curva da la profundidad máxima a la cual puede identificar la segunda capa en modelos de tres capas de los tipos ya mencionados, y la parte por encima de la curva indica las profundidades a las cuales el modelo se comporta como uno de dos capas.

CAPITULO I

FUNDAMENTOS

En este capítulo se tiene como objetivo establecer los fundamentos que permitirán desarrollar el tema Profundidad de Investigación que se analizará en el capítulo II, para esto, primero se establecen las ecuaciones de Distribución de Potencial tanto en superficie como a profundidad y la relación entre las funciones características en forma recurrencial, utilizando para ello una función generadora; luego se hace un estudio de la función Kernel y se da una interpretación de esta, haciendo uso de la analogía matemática entre el caso eléctrico y el caso de reflexión sísmica en modelos de capas horizontales, homogéneas e isotrópicas. Finalmente, se establece un método de integración de las ecuaciones de Distribución de Potencial a cualquier profundidad y se dan algunos ejemplos.

I.1 Ecuaciones de Distribución de Potencial

Las ecuaciones de distribución de potencial cuando se inyecta una corriente continua en la superficie de un modelo de N capas horizontales, homogéneas e isotrópicas fis.II, através de un electrodo A

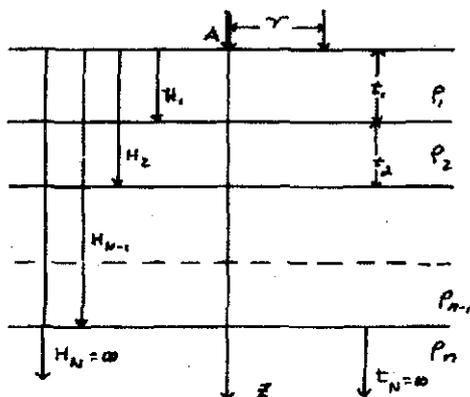


Fig. I.1 Modelo de capas horizontales.

han sido deducidas por Stefanescu y Schlumberger (1930), resolviendo las ecuaciones $\nabla^2 V = 0$ y $\nabla^2 V = I \delta(r, z, \theta)$. En la solución de la Ec. $\nabla^2 V = I \delta(r, z, \theta)$ que es la ecuación de Poisson se cumple en el caso de existencia de fuentes, como es el caso de la primera capa, donde la solución consta de una solución homogénea y una particular. Y en ausencia de fuentes, se cumple la Ec. de Laplace $\nabla^2 V = 0$, como es el caso del resto de capas del modelo.

Considerando la isotropía de las capas, se tiene una simetría cilíndrica, lo cual conduce a resolver las ecuaciones en un sistema coordenado del mismo tipo. Donde por simetría se tiene que el potencial es independiente del ángulo. En vista que $V(r, z, \theta)$ puede ser escrito como:

$$V(r, z, \theta) = R(r)Z(z)T(\theta)$$

Pero no existe variación de $V(r, z, \theta)$ con respecto a θ , debido a la simetría. Utilizando separación de variables se tiene:

$$Z(z) = A(\lambda) e^{\lambda z}$$

$$Z(z) = B(\lambda) e^{-\lambda z}$$

donde:

λ son los valores característicos de la solución, donde $0 < \lambda < \infty$

$A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ tienen valores arbitrarios al menos que se haga consideración de condiciones de frontera.

Y

$$R(r) = J_0(\lambda r)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde $J_0(\lambda r)$ es la función Bessel de primera clase de orden cero.

Por lo tanto, la Ec. de Laplace que se cumple en cualquiera de las capas que carecen de fuente de corriente, tiene dos soluciones:

$$V = A(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} \tag{I.1}$$

$$V = A(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z}$$

De donde cada una de estas ecuaciones representa un infinito de soluciones. Sin embargo, una combinación lineal de cualquier número de soluciones de este tipo es también una solución. Se tiene que la expresión más general de tal combinación lineal de soluciones es:

$$V(r, z) = \int_0^\infty (A(\lambda) e^{\lambda z} + B(\lambda) e^{-\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda \tag{I.2}$$

En esta ecuación la integración con respecto a λ , es el hecho que puede tomar cualquier valor mayor que cero, y que la suma de un número infinito de soluciones es también una solución de la ecuación de Laplace.

De lo anterior se tiene que la distribución de potencial dentro de la primera capa está dado por:

$$V_i^N(r, z) = \int_0^\infty [A_i^N(\lambda) e^{\lambda z} + B_i^N(\lambda) e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda + \frac{\rho I}{2\pi(r^2 + z^2)^{3/2}} \tag{I.3}$$

donde, el sub - índice i se refiere a la primera capa, y el supra-índice N al número total de capas del modelo.

La distribución de potencial en el resto de capas es:

$$V_j^*(r, z_j) = \int_0^\infty [A_j^*(\omega) e^{\lambda z} + B_j^*(\omega) e^{-\lambda z}] J_0(\omega r) d\omega$$

I.4

donde,

el sub-índice j se refiere al número de capa donde se calcula el potencial, y el supra-índice N al número total de capas del modelo.

y

$$j = 2, 3, 4, \dots, N$$

$$z_j = z - T_{j-1}$$

$$T_{j-1} = \sum_{i=1}^{j-1} t_i$$

$$T_0 = 0$$

N : número total de capas

z : profundidad total

La relación entre las dos funciones características $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ y las ecuaciones de distribución de potencial se realiza mediante la aplicación de las siguientes condiciones de fronteras:

a) La resistencia del aire al flujo de corriente es infinita,

$$\left. \frac{\partial V_i^*}{\partial z_i} \right|_{z_i=0} = 0$$

I.5

b) La componente vertical de la densidad de corriente en la interface entre dos capas adyacentes debe ser continua:

$$\frac{1}{\beta_j} \left. \frac{\partial V_j^*}{\partial z_j} \right|_{z_j=z_j} = \frac{1}{\beta_{j+1}} \left. \frac{\partial V_{j+1}^*}{\partial z_{j+1}} \right|_{z_{j+1}=z_j}$$

I.6

donde

β_j : resistividad de la j -ésima capa.

t_j : espesor de la j -ésima capa. c) En las inter-

faces entre capas adyacentes, el potencial es continuo,

$$V_i^N \Big|_{z_i=z_i^+} = V_{j+1}^N \Big|_{z_{j+1}^-} \quad \text{I.7}$$

d) El potencial a una profundidad infinita es cero,

$$V_N^N \Big|_{z_N=\infty} = 0 \quad \text{I.8}$$

I.2 Obtención de Funciones Características

Mediante la aplicación de las condiciones de frontera anteriores, Lima, E. (1979) obtiene una forma recurrencial entre las funciones características $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ por medio de una función generadora $L(\lambda)$. De donde la ecuación de distribución de potencial en la primera capa, queda:

$$V_1^N(r, z_1) = \frac{P_i I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2 + z_1^2)^{3/2}} + \int_0^{\infty} \left[\frac{[k_i + L_2^N(\omega)] e^{-2\lambda z_1}}{1 + k_i L_2^N(\omega) - [k_i + L_2^N(\omega) e^{2\lambda z_1}]} \right] [e^{-\lambda z_1} + e^{\lambda z_1}] J_0(\omega r) d\lambda \right\}$$

donde

I.9

k_i : coeficiente de reflexión

$$k_i = \frac{P_{in} - P_i}{P_{in} + P_i} \quad \text{I.10}$$

Donde la función generadora $L(\lambda)$, tiene la forma recurrencial:

$$L_j^N(\lambda) = \frac{k_j + L_{j+1}^N(\lambda)}{1 + k_j L_{j+1}^N(\lambda)} e^{-2\lambda z_j} \quad \text{I.11}$$

y

$J=1, 2, 3, \dots, N-1$

$$L_N^N(\lambda) = 0. \quad \text{I.12}$$

Luego define una función Kernel como:

$$K_1^N(\lambda) = \frac{[k_1 + L_2^N(\lambda)] e^{-2\lambda z_1}}{1 + k_1 L_2^N(\lambda) - [k_1 + L_2^N(\lambda)] e^{-2\lambda z_1}} \quad \text{I.13}$$

O bien, expresada en función de la generadora $L(\lambda)$

$$K_1^N(\lambda) = \frac{L_1^N(\lambda)}{1 - L_1^N(\lambda)} \quad \text{I.14}$$

Por lo que el potencial en superficie $z_1 = 0$, en términos de la función Kernel es:

$$V_1^N(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + 2 \int_0^\infty K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad \text{I.15}$$

Finalmente, las funciones características en términos de la función Kernel y la generadora $L_1^N(\lambda)$ son:

a) Para la primera capa:

$$A_1^N(\lambda) = B_1^N(\lambda) \quad \text{I.16}$$

y

$$A_1^N(\lambda) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} K_1^N(\lambda) \quad \text{I.17}$$

donde $K_1^N(\lambda)$ está dado por I.14

b) Para la segunda capa:

$$B_2^N(\lambda) = \frac{2}{1 + L_2^N(\lambda)} \left(\frac{\rho_1 I}{2\pi} \right) (e^{-\lambda z_1} + K_1^N(\lambda) (e^{-\lambda z_1} + e^{-\lambda z_2})) \quad \text{I.18}$$

$$A_2^N(\lambda) = L_2^N(\lambda) B_2^N(\lambda) \quad \text{I.19}$$

c) Para capas intermedias

$$B_j^N(\lambda) = \frac{e^{\lambda t_{j-1}} A_{j-1}^N(\lambda) + e^{-\lambda t_j} B_{j-1}^N(\lambda)}{1 + L_j^N(\lambda)} \quad \text{I.20}$$

y

$$A_j^N(\lambda) = L_j^N(\lambda) B_j^N(\lambda) \quad \text{I.21}$$

$$j=3, 4, 5, \dots, N-1 \quad \text{I.22}$$

d) Para la última capa

$$B_N^N(\lambda) = e^{\lambda t_N} A_N^N(\lambda) + B_{N-1}^N(\lambda) e^{-\lambda t_{N-1}} \quad \text{I.23}$$

$$A_N^N(\lambda) = 0. \quad \text{I.24}$$

En la sección I.4 se proporciona un algoritmo para efectuar la integración numérica de las ecuaciones I.3, I.4 y I.15.

En vista que las ecuaciones I.18, I.19 y I.22 tienen el término $e^{\lambda t_j}$, donde el valor λt_j crece muy rápido, para poder efectuar la integración numérica, es necesario expresar las ecuaciones recurrenciales antes mencionadas en una forma que permita a la computadora realizar los cálculos.

Esto se logra mediante la transformación de la función generadora $L(\lambda)$, tal como sigue:

$$L_j^N(\lambda) = M_j^N(\lambda) e^{-2\lambda t_j} \quad \text{I.25}$$

de donde

$$M_j^N(\lambda) = L_j^N(\lambda) e^{2\lambda t_j} \quad \text{I.26}$$

A la función $M_j^N(\lambda)$ se le dará el nombre de función generadora modificada. Su forma recurrencial se obtiene sustituyendo la Ec. I.24 en la Ec. I.11:

$$M_j^N(\lambda) = \frac{k_j + M_{j+1}^N(\lambda) e^{-2\lambda t_{j+1}}}{1 + k_j M_{j+1}^N(\lambda) e^{-2\lambda t_{j+1}}} \quad \text{I.27}$$

Para

$$j=1, 2, 3, \dots, N-1$$

De las ecuaciones I.12 y I.25, se tiene que:

$$M_N^N(\lambda) = 0 \quad \text{I.28}$$

Para encontrar la expresi3n de la funci3n Kernel en t3rminos de la funci3n generadora modificada, basta sustituir la Ec. I.24 en I.14:

$$K_1^N(\lambda) = \frac{M_1^N e^{-2\lambda t_1}}{1 - M_1^N e^{-2\lambda t_1}} \quad \text{I.29}$$

Las expresiones para las funciones caracteristicas en t3rminos de la generadora modificada $M(\lambda)$, se encuentran de la siguiente forma:

a) Para primera capa:

$$A_1^N(\lambda) = B_1^N(\lambda) \quad \text{I.16}$$

y

$$A_1^N(\lambda) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} - K_1^N(\lambda) \quad \text{I.17}$$

donde $K_1^N(\lambda)$ est3 dado por la Ec. I.28

b) Para las expresiones de $A_2^N(\lambda)$ y $B_2^N(\lambda)$ de la segunda capa, es necesario sustituir I.25 y I.29 en la ecuaci3n I.18

$$B_2^N(\lambda) = \frac{1}{1 + M_2^N(\omega) e^{-2\lambda t_2}} \left(\frac{\rho_1 I}{2\pi} \right) \left(e^{-\lambda t_1} + \frac{M_1^N(\omega) e^{-2\lambda t_1}}{1 - M_1^N(\omega) e^{-2\lambda t_1}} (e^{\lambda t_2} + e^{-\lambda t_2}) \right)$$

$$+ e^{-2\lambda t_1} B_2^N(\lambda) = \frac{1}{1 + M_2^N(\omega) e^{-2\lambda t_2}} \left(\frac{\rho_1 I}{2\pi} \right) \left(e^{-\lambda t_1} + \frac{M_1^N(\lambda) e^{-2\lambda t_1}}{1 - M_1^N(\omega) e^{-2\lambda t_1}} e^{\lambda t_2} \right) \{ 1$$

$$B_2^M(\lambda) = \frac{1}{1 + M_2^N(\lambda)e^{-2\lambda z_2}} \left(\frac{\rho_1 \Gamma}{2\pi} \right) \left(e^{-\lambda z_1} + \frac{M_1^N(\lambda)e^{-\lambda z_1}}{1 - M_1^N(\lambda)e^{-\lambda z_1}} (1 + e^{-2\lambda z_1}) \right)$$

I.30

Extrayendo $e^{-\lambda z_1}$ como factor en I.28, queda:

$$B_2^N(\lambda) = \frac{1}{1 + M_2^N(\lambda)e^{-2\lambda z_2}} \left(\frac{\rho_1 \Gamma}{2\pi} \right) \left(1 + \frac{M_1^N(\lambda)}{1 - M_1^N(\lambda)e^{-\lambda z_1}} (1 + e^{-2\lambda z_1}) \right) e^{-\lambda z_1}$$

I.31

Y de la Ec. I.19, se obtiene:

$$A_2^N(\lambda) = B_2^N(\lambda) M_2^N(\lambda) e^{-2\lambda z_2}$$

I.32

c) Para las funciones características $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ de capas intermedias, primero se sustituye la Ec. I.21 en la Ec. I.20, de donde:

$$B_j^N(\lambda) = \frac{e^{\lambda z_{j-1}} L_{j-1}^N(\lambda) B_{j-1}^N(\lambda) + e^{-\lambda z_{j-1}} B_{j-1}^N(\lambda)}{1 + L_j^N(\lambda)}$$

$$B_j^N(\lambda) = \frac{e^{\lambda z_{j-1}} L_{j-1}^N(\lambda) + e^{-\lambda z_{j-1}}}{1 + L_j^N(\lambda)} B_{j-1}^N(\lambda)$$

I.33

Ahora, sustituyendo la Ec. I.25 en I.33, se tiene:

$$B_j^N(\lambda) = \frac{M_{j-1}^N e^{-\lambda z_{j-1}} + e^{-\lambda z_{j-1}}}{1 + M_j^N(\lambda) e^{-2\lambda z_j}} B_{j-1}^N(\lambda)$$

de donde:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$B_j^N(\lambda) = \frac{1 + M_{j-1}^N(\lambda)}{1 + M_j^N(\lambda)e^{-2\lambda z_j}} B_{j-1}^N(\lambda) e^{-\lambda z_{j-1}}$$

y

$$A_j^N(\lambda) = B_j^N(\lambda) M_j^N(\lambda) e^{-2\lambda z_j} \quad \text{I.35}$$

donde

$$j=2,3,4,\dots,N-1$$

Para la última capa, se tiene, que utilizando la Ec. I.35 en la Ec. I.23, queda:

$$B_N^N(\lambda) = e^{\lambda z_{N-1}} B_{N-1}^N(\lambda) M_{N-1}^N(\lambda) e^{-2\lambda z_{N-1}} + e^{-\lambda z_{N-1}} B_{N-1}^N(\lambda)$$

$$B_N^N(\lambda) = (M_{N-1}^N(\lambda) + 1) e^{-\lambda z_{N-1}} B_{N-1}^N(\lambda) \quad \text{I.36}$$

y

$$A_N^N(\lambda) = 0 \quad \text{I.37}$$

Como puede notarse, expresadas de esta manera las funciones características no contienen el término $e^{\lambda z}$, lo cual permite a la computadora el cálculo de estas funciones.

Por otra parte, si se define una función $T(\lambda)$ (de la ecuación I.4) como:

$$T_j^N(\lambda) = A_j^N(\lambda) e^{\lambda z_j} + B_j^N(\lambda) e^{-\lambda z_j} \quad \text{I.38}$$

y se sustituye la Ec. I.21 en la Ec. I.38, obtiene:

$$T_j^N(\lambda) = B_j^N(\lambda) [L_j^N(\lambda) e^{\lambda z_j} + e^{-\lambda z_j}] B(\lambda) \quad \text{I.39}$$

donde $B_j^N(\lambda)$ está dado por la Ec. I.36, pero

$$L_j^N(\lambda) = M_j^N(\lambda) e^{-2\lambda z_j}$$

entonces:

$$T_j^N(\lambda) = [M_j^N(\lambda)e^{-\lambda(2j-2)} + e^{-\lambda 2j}] B_j^N(\lambda) \quad \text{I.40}$$

$$j=2,3,4,\dots,N \quad \text{I.41}$$

La Ec. I.40 se cumple para cualquier capa exceptuando la primera.

$T(\lambda)$ para la primera capa, se obtiene sustituyendo la Ec. I.16 en I.38:

$$T_1^N(\lambda) = (e^{\lambda 2} + e^{-\lambda 2}) A_1^N(\lambda) \quad \text{I.42}$$

En superficie $z_1=0$, la Ec. I.42 es:

$$T_1^N(\lambda) = 2A_1^N(\lambda) \quad \text{I.43}$$

donde $A_1^N(\lambda)$ esta dado por la Ec. I.17.

Debido que en las secciones I.4.1 y I.4.2 se utilizaran las derivadas de $T_1^N(\lambda)$ y $T_j^N(\lambda)$, es conveniente encontrar estas expresiones.

$$\begin{aligned} [T_1^N(\lambda)]' &= \frac{e^{-\lambda(2t_1-2)} + e^{-\lambda(2t_1+2)}}{1 - M_1^N(\omega)e^{-2\lambda t_1}} [M_1^N(\lambda)]' - 2t_1 T_1^N(\lambda) + \\ &+ \frac{2M_1^N(\omega)[e^{-\lambda(2t_1-2)} - e^{-\lambda(2t_1+2)}]}{1 - M_1^N(\omega)e^{-2\lambda t_1}} - T_1^N(\lambda) \frac{(2t_1 M_1^N(\omega) - [M_1^N(\omega)]')e^{-2\lambda t_1}}{1 - M_1^N(\omega)e^{-2\lambda t_1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [T_j^N(\lambda)]' &= \{ [M_j^N(\omega)]' e^{-\lambda(2t_j-2)} - (2t_j-2) M_j^N(\omega) e^{-\lambda(2t_j-2)} - 2e^{-\lambda 2j} \} B_j^N(\lambda) \\ &+ [M_j^N(\lambda) e^{-\lambda(2t_j-2)} + e^{-\lambda 2j}] [B_j^N(\lambda)]' \end{aligned}$$

De ahora en adelante a la función $I(\lambda)$, definida por la ecuación I.38 se le llamará Transformada de Resistividad.

Utilizando la función $T(\lambda)$, las ecuaciones de distribución de potencial I.3 y I.4 se convierten en:

a) Distribución de potencial en la primera capa:

$$V_1^N(r, z_1) = \frac{\rho_1 I}{2\pi(r^2 + z_1^2)^{3/2}} + \int_0^\infty T_1^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{I.44}$$

b) Distribución de potencial en el resto de capas:

$$V_j^N(r, z_j) = \int_0^\infty T_j^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{I.45}$$

Las ecuaciones de distribución de potencial expresadas en términos de la transformada de resistividad $T(\lambda)$, definida por las ecuaciones I.40 y I.42 según sea el caso, facilitan el cálculo numérico del potencial a cualquier profundidad como en superficie.

Para la obtención del potencial en superficie la Ec. I.44, tiene la misma forma que la Ec. I.15, o sea que solamente se utiliza la función Kernel expresada en términos de la función generadora modificada $M(\lambda)$, la cual está determinada por los coeficientes de reflexión y los espesores de las capas.

En vista que en prospección eléctrica (corriente continua), la señal que se obtiene en superficie es una diferencia de potencial, la cual multiplicada por un cierto factor geométrico que involucra la corriente y las separaciones electrodoicas, da la resistividad aparente; se hace necesario estudiar con

detenimiento la generación recurrencial de la función kernel del modelo que se estudia, como también la formación de sus curvas correspondientes. Esto ayudará al entendimiento físico de las contribuciones individuales de cada interface al potencial total medido en superficie.

1.3 Estudio de la Función Kernel

1.3.1 Analogías Matemáticas del Valor Característico λ , Función Generadora $L(\lambda)$ y Función Kernel $K(\lambda)$

A fin de facilitar el cálculo numérico del potencial, se expresó la función Kernel en términos de la función generadora modificada $M(\lambda)$. Sin embargo, para el estudio del comportamiento de esta función, conviene analizarla en términos de la función generadora $L(\lambda)$; recordando la Ec. I.14, se tiene:

$$K_j^N(\lambda) = \frac{L_j^N(\lambda)}{1 - L_j^N(\lambda)} \quad \text{I.14}$$

donde $L_j^N(\lambda)$, tiene la forma general:

$$L_j^N(\lambda) = \frac{k_j + L_{j+1}^N}{1 + k_j L_{j+1}^N} \quad \text{I.11}$$

y

$$j=1, 2, 3, \dots, N-1$$

para el caso de $j=N$, se tiene:

$$L_N^N(\lambda) = 0$$

donde

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

k_j : Coeficiente de reflexión de la j -ésima interfase, definido como:

$$k_j = \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{\rho_{j+1} + \rho_j}$$

t_j : espesor de la j -sima capa

ρ_j : resistividad de la j -sima capa.

Como puede observarse la función Kernel en el dominio de los valores característicos λ depende de los coeficientes de reflexión de todas las interfaces, así también de las profundidades a que se encuentran estas. Sin embargo, para poder interpretar la información que proporciona la función Kernel de la conformación del modelo, primero se hará una analogía del caso en estudio con el caso de reflexión sísmica en modelos de capas horizontales, homogéneas e isotrópicas, cuando un tren de pulsos del tipo Vibroseis(R) incide verticalmente en las interfaces; este es uno de los métodos utilizados en la generación de sismogramas sintéticos. A continuación se describen las ecuaciones resultantes desarrolladas por Waters, K.H.(1978) para la generación de dichos sismogramas:

En un modelo de N capas, con las siguientes características:

- 1.- ρ_m : densidad de la m -sima capa.
- 2.- x_m : espesor de la m -sima capa.
- 3.- C_m : velocidad compleja en la m -sima capa

$$C_m = V_m + i v \tag{I.46}$$

- 4.- α_m : constante de atenuación de la m -sima capa

$$\alpha_m = \frac{\omega \beta_m}{V_m^2} \tag{I.47}$$

donde, ω es la frecuencia angular de la onda incidente.

5.- Z_m : impedancia acústica compleja de la m -sima capa

$$Z_n = C_n \rho_n \quad \text{I.48}$$

6.- r_m : coeficiente de reflexión de la m -sima interface

$$r_m = \frac{Z_m - Z_{m+1}}{Z_m + Z_{m+1}} \quad \text{I.49}$$

7.- R_m : razon de amplitudes de las ondas viajando hacia arriba a las ondas viajando hacia abajo en la m -sima interface,

$$R_m = \frac{A_m^-}{A_m^+} \quad \text{I.50}$$

Donde las amplitudes A_m^- de las ondas viajando hacia arriba y las amplitudes A_m^+ de las ondas viajando hacia abajo en la m -sima interface pueden calcularse a partir del siguiente gráfico:

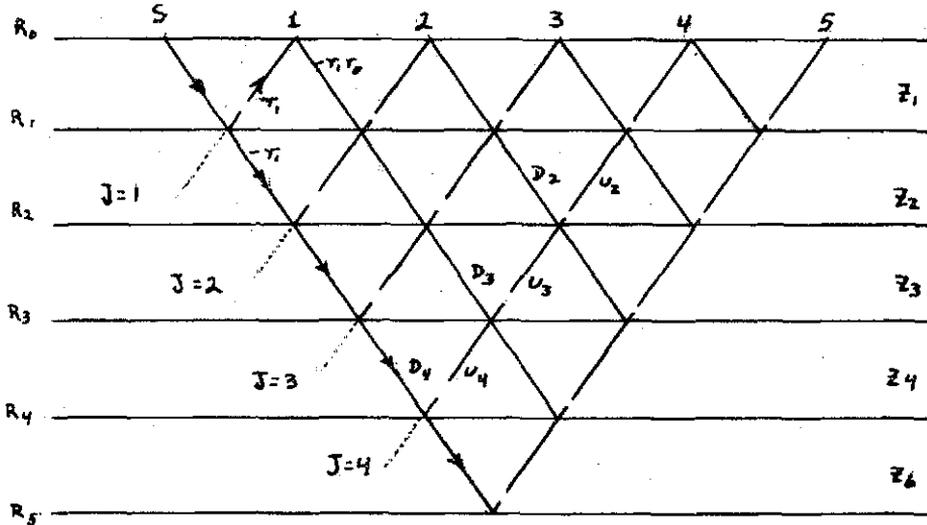


Fig I.2 Trayectorias posibles de rayos en un modelo de capas horizontales.

Si las amplitudes A_m^- en un punto J de la interface N , se denomina por U_N^J y A por D , entonces:

$$U_N^J = r_N D_N^J + (1 + r_N) U_{N+1}^J$$

$$D_{m+1}^J = (1 - \gamma_N) D_N^J - \gamma_N U_{N+1}^J \quad I.52$$

$$D_N^{J+1} = D_N^J \quad I.53$$

Donde

$1 + \gamma_N$: coeficiente de transmisión hacia arriba.

De donde se obtiene la siguiente forma recursiva:

$$R_m = \frac{\gamma_m + R_{m+1}}{1 + \gamma_m R_{m+1}} e^{-2b\omega} \quad I.54$$

donde

$$b = \frac{\alpha_m}{V_m} x_m + \frac{x_m}{V_m} i \quad I.55$$

Para la última capa $R_N = 0$, debido que en el semiespacio infinito no hay reflexiones. Comparando la función generadora $L_j^N(\lambda)$ (Ec. I.11) del caso eléctrico con R_m del caso de reflexión sísmica, se observa que existe una similitud matemática entre estas dos expresiones, resta entonces, establecer una analogía de los términos b y w , con el espesor t_j de la j -ésima capa y los valores característicos λ .

En el caso sísmico se tiene que la constante de atenuación $\alpha_m = -\frac{\omega V_m}{V_m^2}$, es mayor para frecuencias grandes. Por lo tanto, se puede establecer una correspondencia entre frecuencia ω y profundidad de penetración de la onda, es decir para frecuencias grandes poca penetración y para frecuencias pequeñas mayor penetración. Este mismo efecto se observa en los métodos electromagnéticos (efecto de película).

En la sección I.3.2 se mostrará a través del estudio de la formación de las curvas de la función Kernel, que los valores característicos (λ) grandes proporcionan información de las capas superficiales, en cambio, los valores característicos (λ) pequeños proporcionan información de las propiedades de capas que se encuentran a mayor profundidad. Por lo tanto,

se puede establecer la analogía física entre los valores característicos (método corriente continua) con la frecuencia ω de los métodos: sísmicos y electro-magnéticos. Y el factor b del argumento del exponencial de la Ec. 1.54 sería equivalente al espesor t_j utilizado en la Ec. 1.11.

Szaraniec, E. (1976) establece las analogías entre los parámetros de la función Kernel (método de corriente continua) y la impedancia de entrada del método magnetotelúrico, de la siguiente manera:

$$\rho_j K_n \longleftrightarrow Z_n$$

$$\rho_j \longleftrightarrow \sqrt{\rho_j}$$

$$h_j \longleftrightarrow h_j / \sqrt{\rho_j}$$

y

$$\lambda \longleftrightarrow x_j \sqrt{\rho_j}$$

donde

ρ_j : resistividad eléctrica de la j -sima capa

K_n : función Kernel (método eléctrico)

Z_n : impedancia de entrada (magnetotelúrico)

h_j : espesor de la j -sima capa

λ : valor característico (método eléctrico)

x_j : número de onda en la j -sima capa (magnetotelúrico)

Pero el número de onda en términos de la

frecuencia ω es:

$$x = \frac{\omega}{c}$$

C : velocidad en la j-sima capa

Por lo tanto:

$$\lambda \longleftrightarrow \frac{\omega}{c} \sqrt{\rho_j}$$

1.3.2 Formación de Curvas de la Función Kernel

Todo modelo de N capas se puede construir de la forma siguiente: superponiendo en un modelo homogéneo una segunda capa, la cual producirá una perturbación en el potencial primario leído en superficie, cuando es inyectada una corriente I. Así, sucesivamente se pueden ir agregando capas hasta formar el modelo matemático deseado.

Lo anterior ayudará a entender los resultados obtenidos por Koefoed, O. (1968); Lima, E., y Onodera, S. (1980).

$$a) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} K_1^N(\lambda) = 0 \quad \text{I.56}$$

$$b) \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} K_1^N(\lambda) = \frac{\rho_N - \rho_1}{2 \rho_1} \quad \text{I.57}$$

c) En general, todo modelo de N capas, cuando se incrementa el valor de lambda, la función Kernel $K_1^N(\lambda)$ de N capas se aproxima a la función Kernel $K_1^{N-1}(\lambda)$ de las N-1 capas superiores del modelo. Luego la función $K_1^{N-1}(\lambda)$ se aproxima a $K_1^{N-2}(\lambda)$ y así sucesivamente hasta llegar a $K_1^0 = 0$ que corresponde al caso homogéneo. Por ejemplo, en un modelo de tres capas, $K_1^3(\lambda)$ se encuentra aplicando las ecuaciones I.11 y I.14 de la siguiente manera:

$$K_1^3(\lambda) = \frac{L_1^3(\lambda)}{1 - L_1^3(\lambda)}$$

donde

$$L_1^3(\lambda) = \frac{k_1 + L_2^3(\lambda)}{1 + k_1 L_2^3(\lambda)} e^{-2\lambda t_1}$$

$$L_2^3(\lambda) = k_2 e^{-2\lambda t_2}$$

Haciendo las operaciones requeridas, se obtiene:

$$K_1^3(\lambda) = \frac{[k_1 + k_2 e^{-2\lambda t_2}] e^{-2\lambda t_1}}{1 + k_1 k_2 e^{-2\lambda t_2} - [k_1 + k_2 e^{-2\lambda t_2}] e^{2\lambda t_1}} \quad \text{I.58}$$

Debido a la formación recursiva de la función generadora $L(\lambda)$, se tiene que para valores crecientes de λ , se debe iniciar por analizar los valores de $L_2^3(\lambda)$.

A medida que λ va creciendo, se tiene que $L_2^3(\lambda) \rightarrow 0$ en tal caso $L_1^3(\lambda) \rightarrow k_1 e^{2\lambda t_1}$, que es precisamente el valor de $L_1^2(\lambda)$.

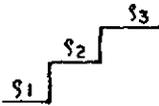
Para mostrar lo anterior se expondrán y se analizarán las curvas de la función Kernel para el caso de tres capas, posteriormente, en el caso de cuatro capas se estudiará esta función cuando se varía el espesor de una de las capas intermedias(*). En este último caso la función Kernel se analizará en el dominio "z" ($z = e^{-2\lambda}$) (**).

*.- Las curvas que se exponen fueron tomadas de Lima, E. y Onoderá, S. (1980), con permiso de uno de los autores.

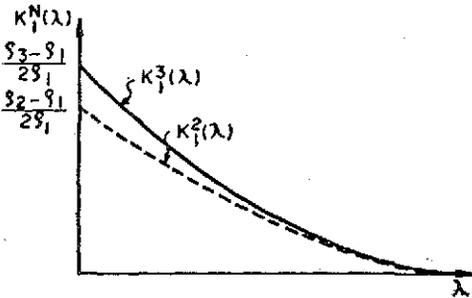
**.- En el dominio "z" ($z = e^{-2\lambda}$) se tiene:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} z = 1$$

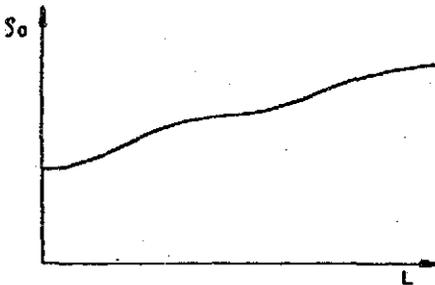
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} z = 0$$



a) - distribución de resistividades

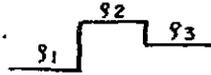


b) - forma de la curva Kernel

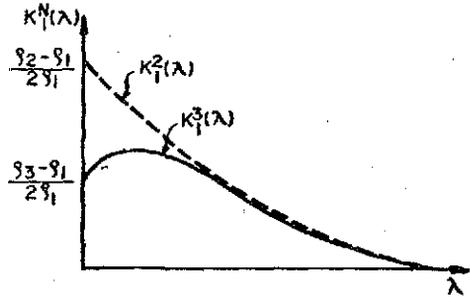


c) - forma de la curva de resistividades

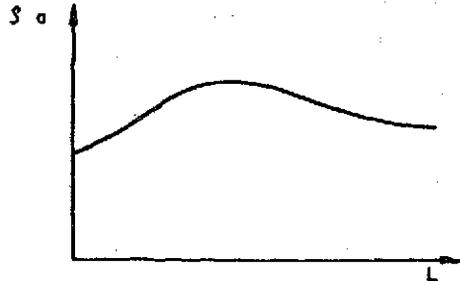
Fig. I.3
CURVAS TIPO I PARA
Modelo de 3 capas



a) - distribución de resistividades

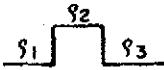


b) - forma de la curva Kernel

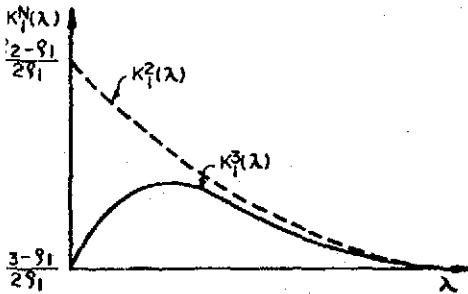


c) - forma de la curva de resistividades

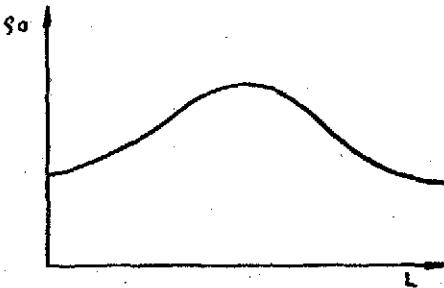
Fig. I.4
CURVAS TIPO II PARA
Modelo de 3 capas



a) - distribución de resistividades

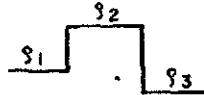


b) - forma de la curva Kernel

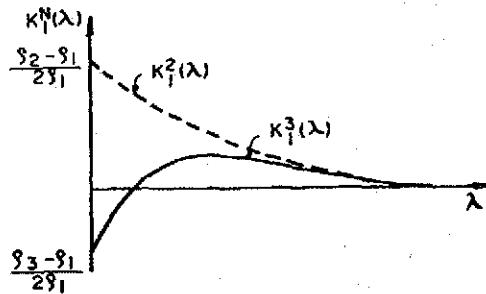


c) - forma de la curva de resistividades

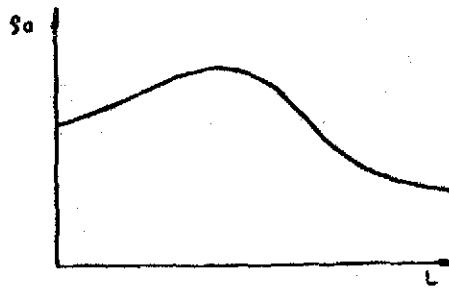
Fig. I.5
CURVAS TIPO III PARA
Modelo de 3 capas



a) - distribución de resistividades



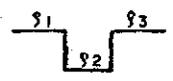
b) - forma de la curva Kernel



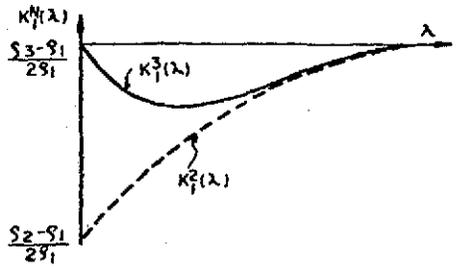
c) - forma de la curva de resistividades

Fig. I.6
CURVAS TIPO IV PARA
Modelo de 3 capas

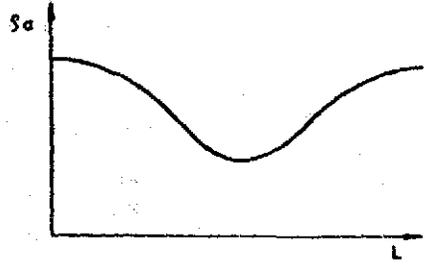
TESIS CON FALLA DE ORIGEN



a) - distribución de resistividades

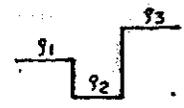


b) - forma de la curva Kernel

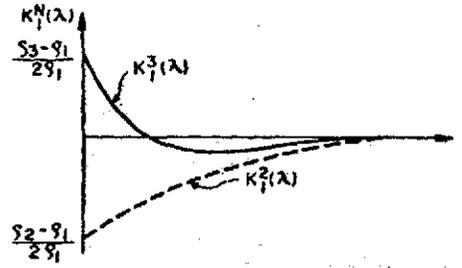


c) - forma de la curva de resistividades

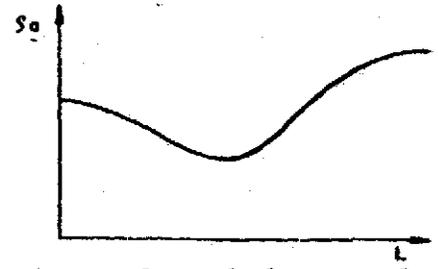
Fig. I.7
CURVAS TIPO V PARA
Modelo de 3 capas



a) - distribución de resistividades



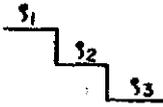
b) - forma de la curva Kernel



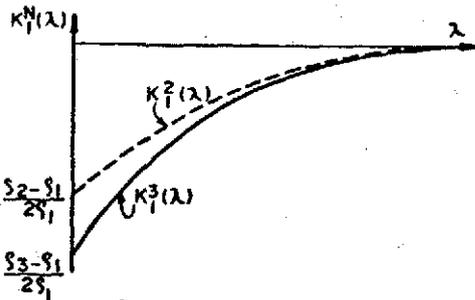
c) - forma de la curva de resistividades

Fig. I.8
CURVAS TIPO VI PARA
Modelo de 3 capas

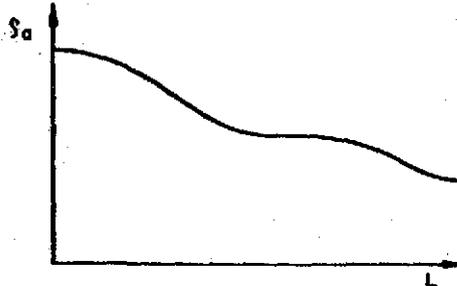
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



a) - distribución de resistividades

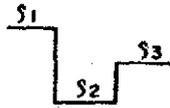


b) - forma de la curva de Kernel

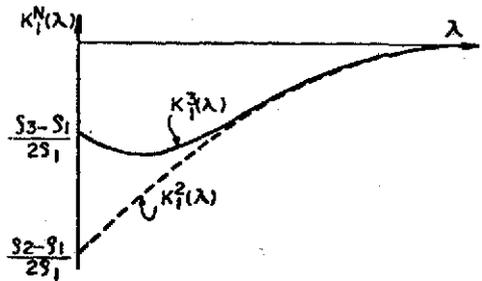


c) - forma de la curva de resistividades

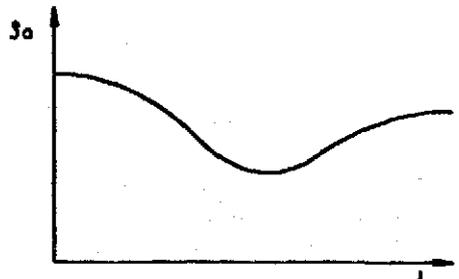
Fig. I.9
CURVAS TIPO VII PARA
Modelo de 3 capas



a) - distribución de resistividades

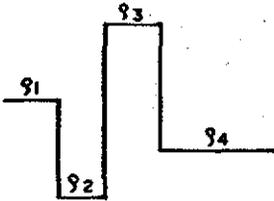


b) - forma de la curva de Kernel



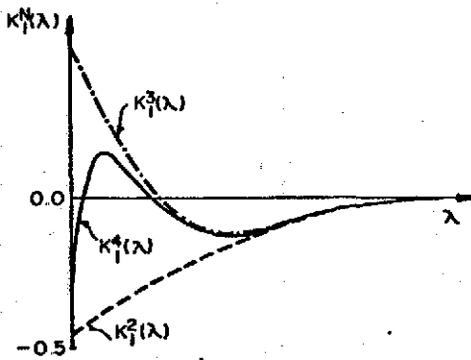
c) - forma de la curva de resistividades

Fig. I.10
CURVAS TIPO VIII PARA
Modelo de 3 capas



a) - modelo original

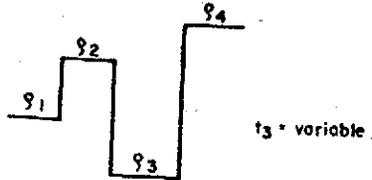
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



b) - formas de las curvas Kernel

Fig. 1.11 formación de curvas Kernel para modelo de 4 capas.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



a) - modelo original

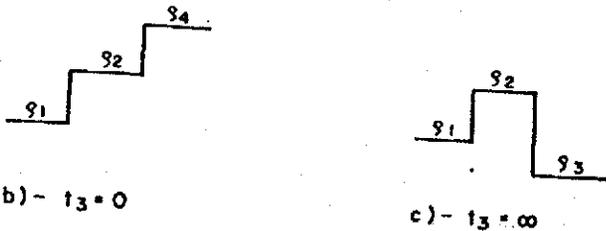
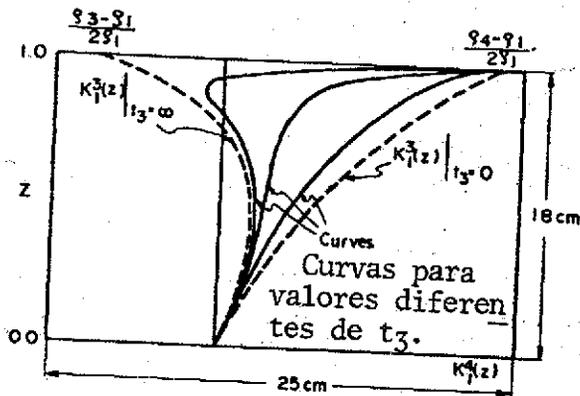
b) - $t_3 = 0$ c) - $t_3 = \infty$ 

Fig. I.12 Formación de curvas kernel para modelo de 4 capas y el espesor de la tercera es variable.

En cada una de las curvas de la función Kernel $K_1^3(\lambda)$ para un determinado modelo de tres capas, se observa que existe un intervalo de valores de λ en el cual el Kernel $K_1^3(\lambda)$ de tres capas tiene valores muy diferentes del Kernel $K_1^2(\lambda)$ de dos capas. Esta diferencia se acentúa más aún cuando $\lambda \rightarrow 0$, lo cual es un indicativo que son los valores menores de λ los que proporcionan mayor información de la tercera capa.

A continuación se expone el comportamiento de la función Kernel para modelos de tres capas, al variar el espesor de la segunda capa, después se estudia la función Kernel para un modelo de cuatro capas, variando el espesor de la tercera capa. El análisis se hará en el dominio " z " ($z = \bar{c}$), por lo que debe tenerse en cuenta lo siguiente:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} z = 1 \quad \text{I.59}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} z = 0 \quad \text{I.60}$$

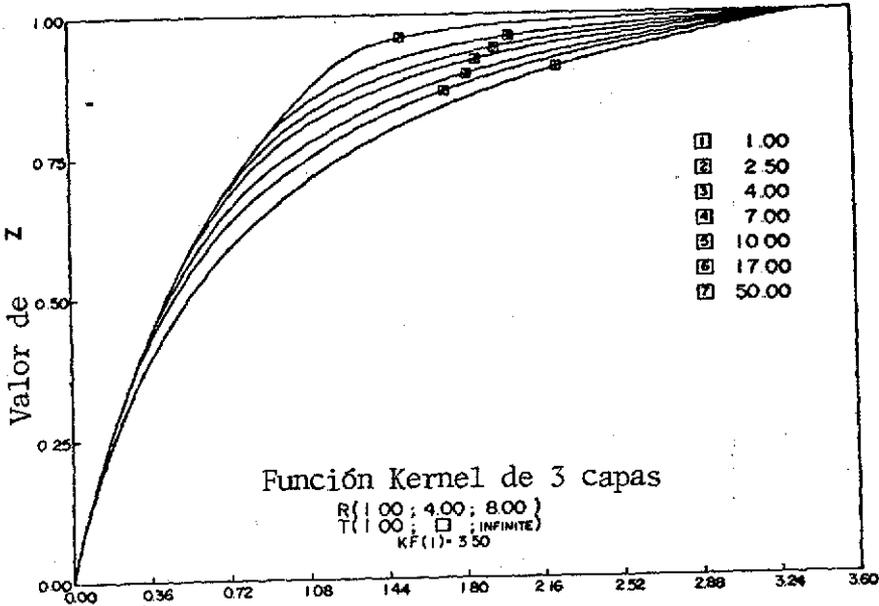


Fig 1.13 Valores de la Función Kernel (x6.94)

Curvas maestras de la función Kernel para modelos de tres capas. (R: Resistividad, T: Espesor, $KF(z) = K^m(z)$). (x6.94): Factor de Escala Horizontal. Valido Para Eqs. 1.14 A 1.20

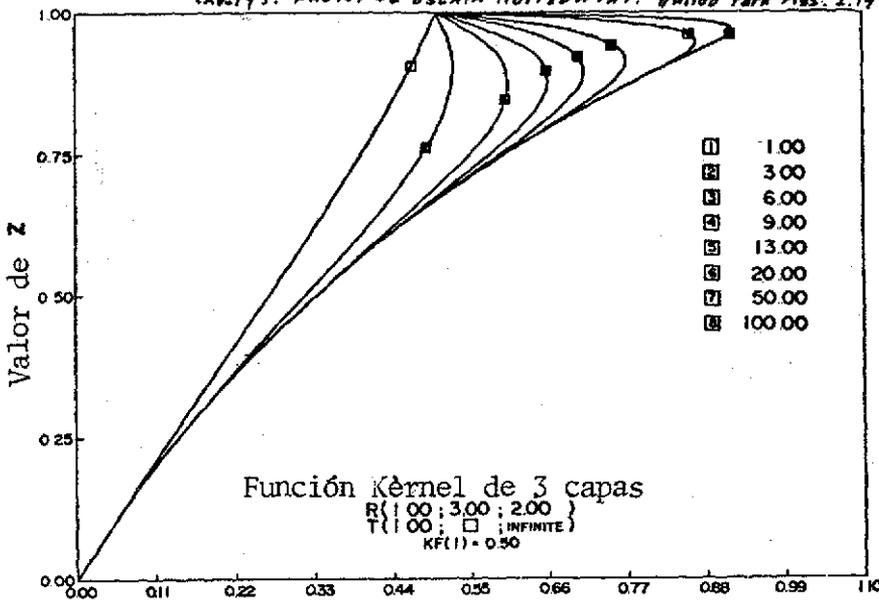


Fig 1.14 Valores de la Función Kernel (x22.73)

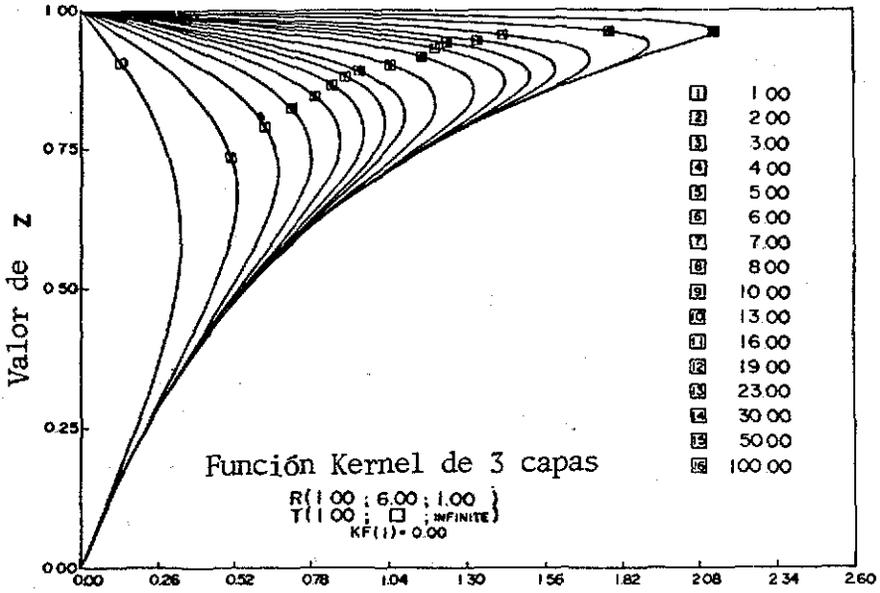


Fig. I.15 Valores de la Función Kernel (x 962)

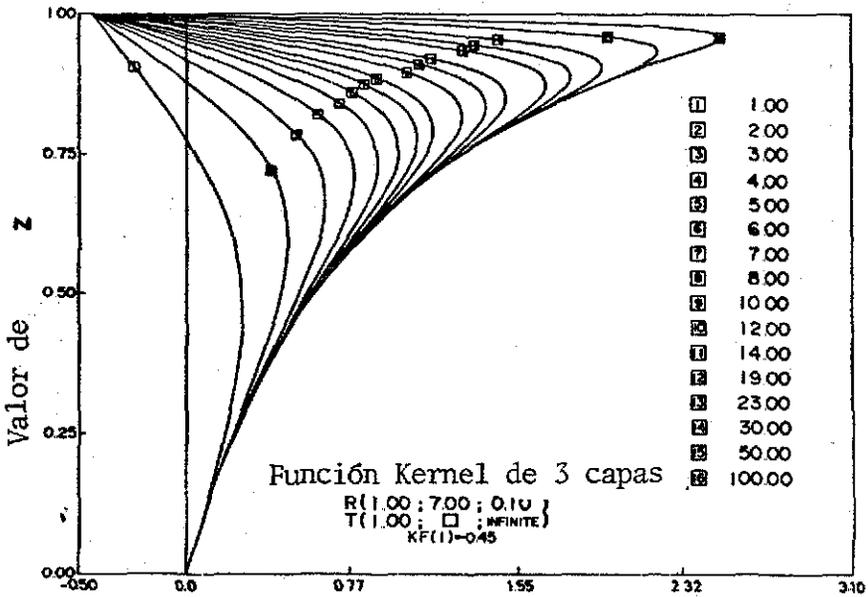


Fig. I.16 Valores de la Función Kernel (x 694)

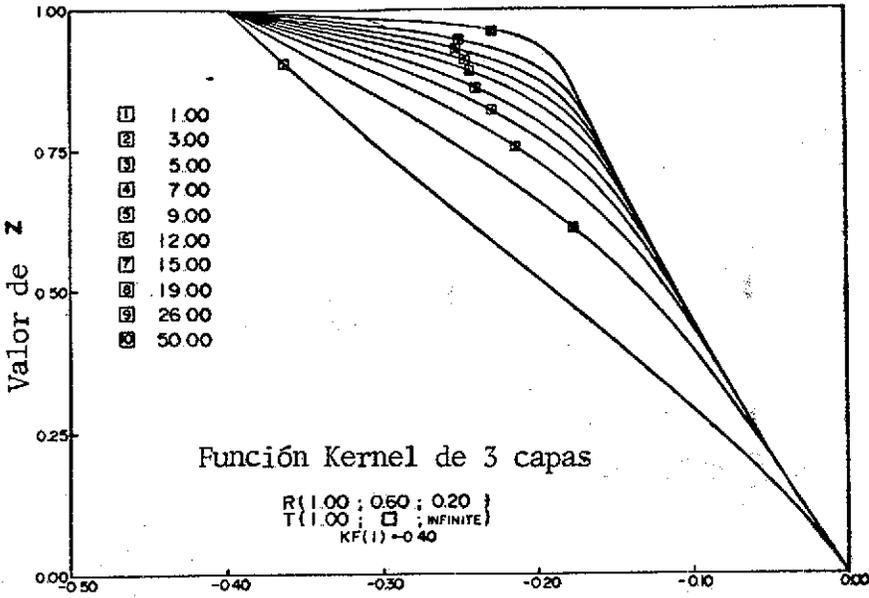


Fig. 17 Valores de la Función Kernel (x5000)

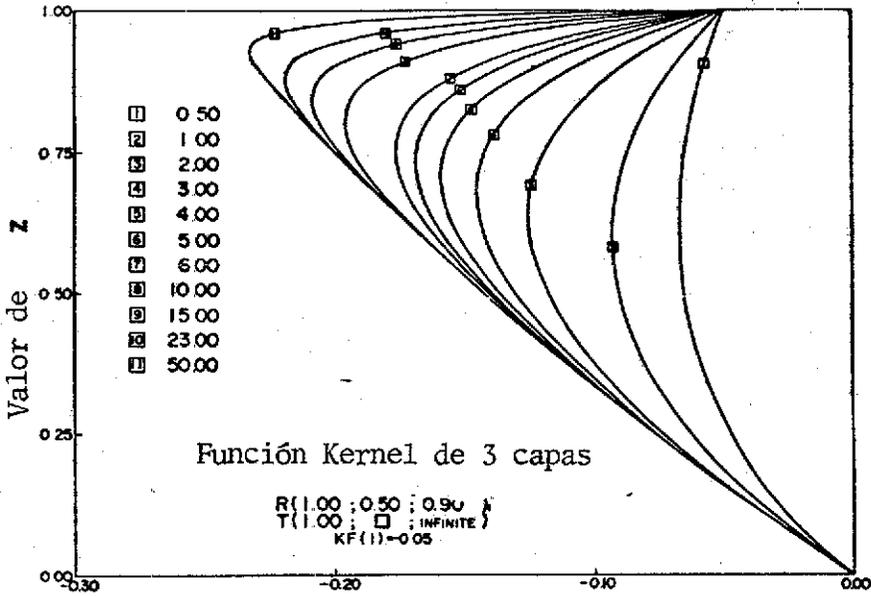


Fig. 18 Valores de la Función Kernel (x 8333)

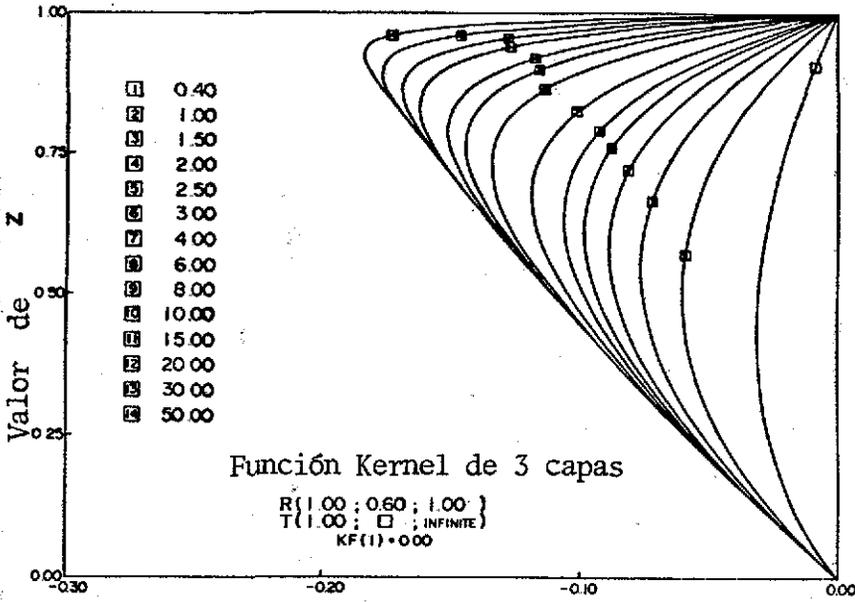


Fig. I.19 Valores de la Función Kernel (x83.33)

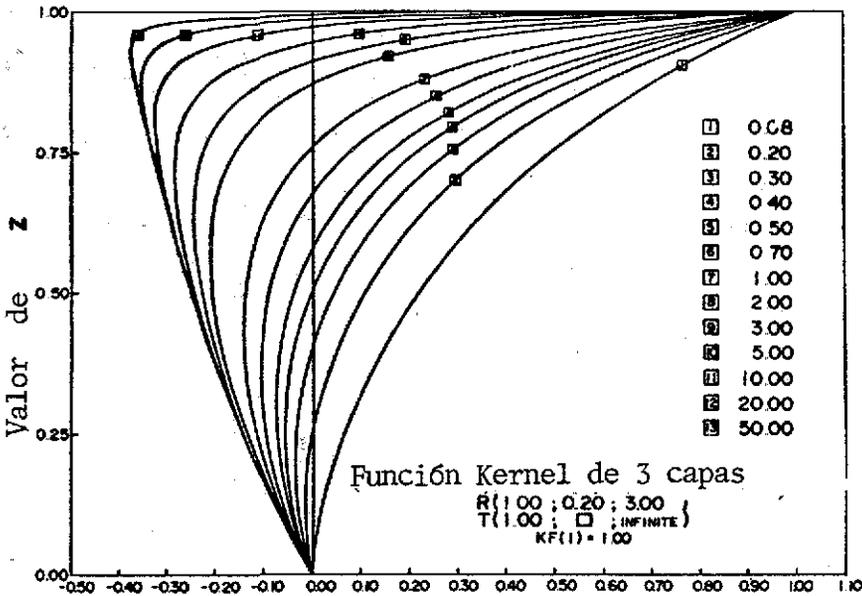


Fig. I.20 Valores de la Función Kernel (x15.62)

Como puede observarse, al ir incrementando el espesor de la tercera capa el máximo y/o el mínimo del Kernel $K_n(\lambda)$ se va corriendo hacia los valores más pequeños de λ , con lo cual queda completamente demostrado que los valores pequeños de λ proporcionan información de las capas que se encuentran a mayor profundidad, en cambio la información que proporcionan los valores grandes de λ corresponde a las características de las capas más superficiales.

Teniendo en cuenta lo anterior puede notarse la analogía del valor característico con la frecuencia ω de los métodos sísmicos y electromagnéticos.

Habiéndose encontrado una interpretación de los valores característicos λ , corresponde ahora, interpretar a la función Kernel, pero para ello debe iniciarse por dar una interpretación de la función $L(\lambda)$. Recordando la similitud matemática que existe entre la función $L(\lambda)$ y la Ec. I.50 correspondiente a la razón R de las amplitudes de las ondas que viajan hacia arriba a las amplitudes de las ondas que viajan hacia abajo en la m -sima interface, donde estas amplitudes están determinadas por las ecuaciones I.51 y I.53.

Debido que las amplitudes están relacionadas con la energía, R se puede interpretar como la razón de energía reflejada a la incidente en una interface dada; esta razón se conoce como reflectancia de la interface. De igual manera en el caso de prospección eléctrica (corriente continua) $L_j^N(\lambda)$ se puede interpretar como la reflectancia de la energía o de la densidad de corriente en la j -sima interface. Es decir, que el valor de $L_j^N(\lambda)$ es representativo de la cantidad de densidad de corriente que sale hacia arriba de la j -sima interface.

* Si se hace la salvedad siguiente: se toma como energía reflejada hacia arriba, las sumas parciales de la reflexión en la parte superior en la interface de la onda que viaja hacia abajo más la parte transmitida de la onda incidente en la parte inferior de la interface producto de alguna reflexión en interfaces inferiores.

En vista que sólo en la superficie superior de la primera capa existen fuentes y sumideros y en el resto de capas no y tratándose de un caso estacionario, se tiene que la absorvancia de densidad de corriente es cero, entonces, se tendrá que la transmitancia en cualquier interface es la unidad menos la reflectancia. Llamando a la transmitancia por $t(\lambda)$ se tiene:

$$t_j^N(\lambda) = 1 - L_j^N(\lambda) \quad \text{I.61}$$

donde:

$t_j^N(\lambda)$: transmitancia de la j-sima interface

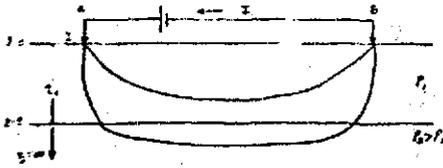
En términos de la reflectancia $L(\lambda)$ y la transmitancia $t(\lambda)$, la función Kernel queda:

$$K_1^N(\lambda) = \frac{L_1^N(\lambda)}{t_1^N(\lambda)} \quad \text{I.62}$$

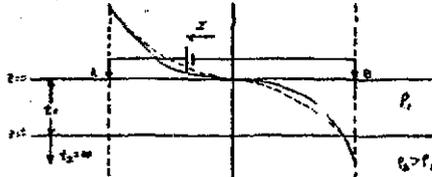
$$K_1^N(\lambda) = \frac{\text{Reflectancia de la primera Interface}}{\text{Transmitancia de la primera Interface}}$$

Expresada de esta manera la función Kernel puede interpretarse como la opacidad al paso de la densidad de corriente de todo el conjunto de discontinuidades relacionadas entre si através de la función generadora.

Para ejemplificar esto, se analizará a continuación el caso de dos capas:



a) Diagrama de líneas de corriente para un modelo de 2 capas con coeficiente de reflexión $k > 0$.



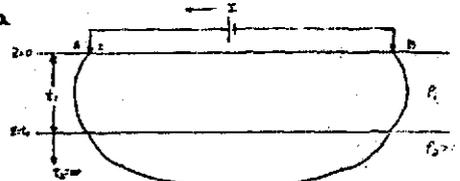
c) Gráfico de diferencia de potencial medido en superficie para modelos de 2 capas con $k > 0$. La línea continua corresponde a la diferencia de potencial para el caso homogéneo y la curva punteada al de los capas.



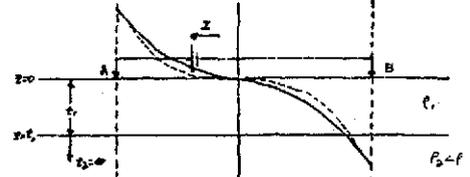
e) Componentes del vector densidad de corriente en la interfaz de un modelo de dos capas, donde $k > 0$.

$$J_x = J_x \neq J_x$$

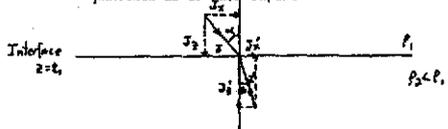
38 a



b) Diagrama de líneas de corriente para un modelo de 2 capas con coeficiente de reflexión $k < 0$.



d) Gráfico de diferencia de potencial medido en superficie para modelos de 2 capas con $k < 0$. La línea continua corresponde a la diferencia de potencial para el caso homogéneo y la curva punteada al de los capas.



f) Componentes del vector densidad de corriente en la interfaz de un modelo de dos capas, donde $k < 0$.

$$J_x = J_x \neq J_x$$

Fig 1.01

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El coeficiente de reflexión k para la interface entre la primera y segunda capa es:

$$k_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad \text{I.63}$$

considerando casos limites para k_1 , se tiene:

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} k_1 = 1 \quad \text{I.64}$$

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow 0} k_1 = -1 \quad \text{I.65}$$

La ecuación I.64 corresponde al caso cuando la primera capa es muy conductora y la Ec. I.65 es cuando la segunda capa es muy conductora.

De las gráficas a, b, c y d de la Fig. I.19 se infiere que el vector densidad de corriente al cruzar una interface se refracta en la forma mostrada en las gráficas e y f de la misma figura. Es decir, cuando en una interface incide el vector densidad de corriente J con un ángulo α y el coeficiente de reflexión es positivo, el ángulo de refracción $\alpha < \beta < \pi/2$ con respecto a la vertical, teniendo, que si el coeficiente es cercano a 0 el ángulo de refracción se aproxima a α , pero si el coeficiente k es próximo a 1, el ángulo de refracción tiende a $\pi/2$. Ahora bien, si el coeficiente de reflexión es negativo, el ángulo de refracción es $0 < \beta < \alpha$ (con respecto a la vertical) en este caso se tendrá que si el coeficiente k es próximo a -1 , el ángulo de refracción tiende a 0 y si el coeficiente k es cercano a 0 el ángulo de refracción se aproxima a α .

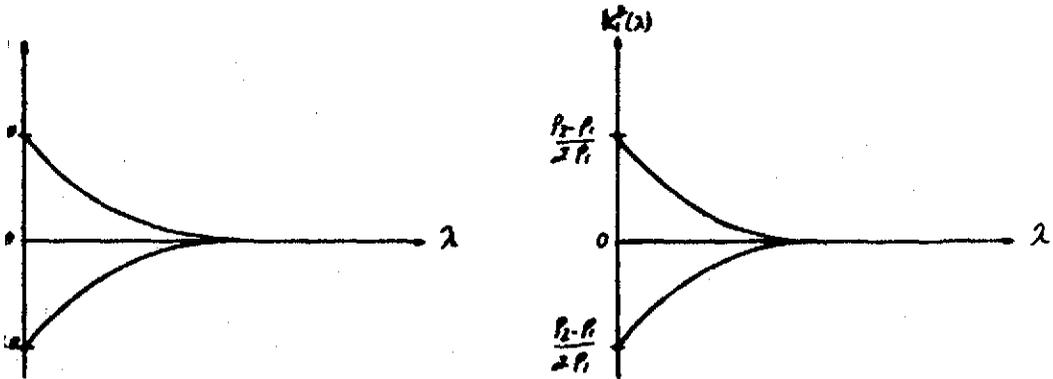
La función generadora $L(\lambda)$ para ambos casos, esto es, para $k_1 > 0$ y $k_1 < 0$, es la misma,

$$L^2(\lambda) = k_1 e^{-2\lambda t} \quad \text{I.66}$$

y la función Kernel es:

$$K^2(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda t}}{1 - k_1 e^{-2\lambda t}} \quad \text{I.67}$$

Las gráficas correspondientes a estas funciones presentan en las siguientes figuras:



a) Gráfico de la función generadora $L(\lambda)$ o reflectancia. La parte superior corresponde al caso cuando $k > 0$ y la inferior cuando $k < 0$.

b) Gráfico de la función Kernel $K(\lambda)$. La parte superior corresponde al caso cuando $k > 0$ y la inferior cuando $k < 0$.

Fig. 1.22

Observando el comportamiento de la función generadora $L(\lambda)$ y teniendo en cuenta la interpretación que se le ha dado a esta función como reflectancia, además habiendo demostrado que las λ pequeñas son las que proporcionan información de las capas que se encuentran a mayor profundidad, se tiene entonces, que los valores pequeños de λ son los que tienen mayor capacidad de reflexión en las interfaces correspondientes a capas más profundas. Esto significa que mediante las curvas de la función generadora, se puede saber que tan reflectora es una determinada interface.

Sin embargo, la función Kernel es quien proporciona más información, puesto que es un indicador de la opacidad a la densidad de corriente J de las diferentes interfaces. Es decir, la función Kernel muestra que tan transparentes son las interfaces al paso de los vectores densidad de corriente. Tal como muestra en la Fig. 1.22a, la función Kernel en el caso de dos capas puede ser positiva o bien negativa, dependiendo si el coeficiente de reflexión es

positivo o negativo. Esto se interpreta de la siguiente manera: si el Kernel es positivo significa que la contribución individual de la interface entre la primera y segunda capa al potencial total en superficie será positiva e indica que tan reflectora es la interface, o sea que la perturbación al potencial debido al caso homogéneo, ocasionado por esta interface será una anomalía positiva. Por lo tanto el potencial total V_T será el potencial debido a un medio homogéneo V_H cuando se le ha inyectado una corriente I , mas el potencial perturbador V_2 .

$$V_T = V_H + V_2 \quad \text{I.68}$$

Ahora bien, si el Kernel es negativo, sucede lo contrario del caso anterior, entonces, la perturbación al potencial debido al caso homogéneo, ocasionado por la interface ya mencionada se tomará como una anomalía negativa e indica que tan transmisora es la capa. Por lo que el potencial V_T será:

$$V_T = V_H - V_2 \quad \text{I.69}$$

Para modelos de tres o mas capas, existen casos donde la función Kernel cruza el eje horizontal, por lo tanto los intervalos $\Delta\lambda_i$ donde el Kernel es positivo, corresponderán zonas donde existen interfaces que producirán anomalías positivas y los intervalos $\Delta\lambda_j$ donde el Kernel es negativo corresponderán interfaces productoras de anomalías negativas. Se puede decir entonces, que el potencial total V_T en superficie es igual al potencial debido a un medio homogéneo más la suma algebraica de los potenciales perturbadores V_i o anomalías correspondientes a cada una de las interfaces.

Por lo tanto:

$$V_T = V_H + \sum_{i=2}^N V_i \quad \text{I.70}$$

donde

N : número de capas

El sub-índice de la suma se inicia en 2, para

indicar el potencial perturbador de la interface de la superficie superior de la segunda capa, y así evitar confusiones, pues el V_1 corresponde a V_H .

La Ec. 1.70 será de gran utilidad para el cálculo de la Profundidad de Investigación en los Sondeos Eléctricos Verticales, tema que será analizado en el capítulo II del presente trabajo.

Para analizar las reflexiones del vector densidad de corriente en una interface, se propone el caso mas sencillo que es el de dos capas y una sola fuente aún, cuando sucede lo mismo en cualquier interface de un modelo de N capas.

Para facilitar la comprensión de este análisis, primero debe observarse el compartamiento de la curva de potencial, medido en superficie, tanto para el caso homogéneo como para el caso de dos capas (Fis. I.23)

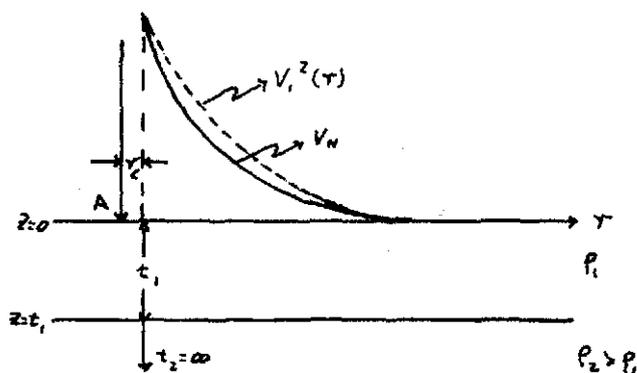


Fig. I.23 La línea continua representa el potencial debido al caso homogéneo y la línea punteada al potencial debido a dos capas.

De acuerdo a lo expresado en la Ec. 1.70, se tiene que el potencial perturbador debido a la interface entre la primera y segunda capa corresponde a una anomalía positiva.

El potencial total esta dado por:

$$V_1^N(r) = -\frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + \int_0^{\infty} K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad I.15$$

Donde la parte integral representa el potencial perturbador.

Conviene ahora, observar el comportamiento de la función Kernel y las funciones Bessel para diferentes separaciones electroquímicas:

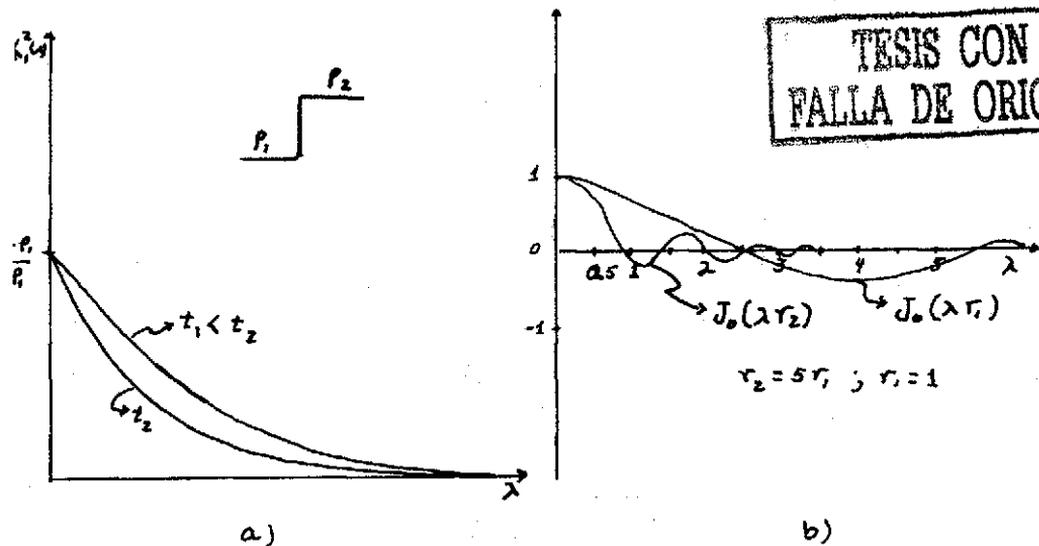
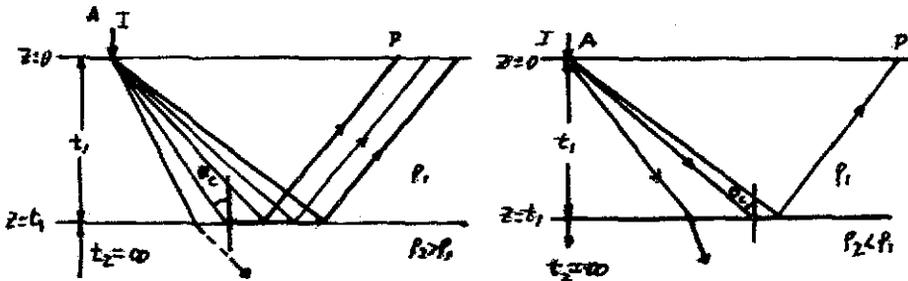


Fig. I.24

Como puede verse en la gráfica I.24b, para valores pequeños de r , se tendrá que los valores de la parte integral son muy pequeños y lo mismo sucede para el caso de r grandes.

Como resultado final se tiene, que para valores pequeños de r , el potencial de dos capas tiende al valor del potencial del caso homogéneo, y para valores grandes de r de nuevo, se tiene que la curva del potencial debido a dos capas es asintótica a la del caso homogéneo.

Ahora bien, en la interface entre la primera y segunda capa se tiene que el ángulo de incidencia de los vectores densidad de corriente de las coordenadas del punto donde se analice. Existiendo un punto donde el ángulo de incidencia es crítico y en el cual no se producirá refracción alguna. Para ángulos de incidencia mayores que el crítico se tiene que solamente existen reflexiones. Lo anterior se muestra en la Fig. I.25



a) Reflexiones en la interface entre la 1a. y 2a. capa, cuando $k > 0$

b) Reflexiones en la interface entre la 1a. y 2a. capa, cuando $k < 0$

Fig. I.25

En superficie existe un punto P de incidencia de la primera reflexión del vector densidad de corriente J. Se tendrá entonces que el potencial medido en cualquier punto entre A y P, este corresponderá al potencial del medio homogéneo únicamente, o sea, que no se tiene ninguna perturbación de la interface uno (de ahora en adelante se le llamará interface uno a aquella entre la primera y segunda capas) A partir del punto P hacia la derecha se tienen los potenciales perturbados.

Por lo tanto, existe una separación electrodinámica mínima capaz de detectar la presencia de la segunda capa. En el capítulo II se hará un estudio más profundo sobre este tema.

Para el caso cuando se tiene una fuente y un sumidero, el análisis y los resultados son similares.

Hasta aquí se ha analizado el comportamiento de las funciones generadoras y el Kernel, así mismo la información que proporcionan de las características del modelo. Pero se ha visto que existen separaciones electrodoicas críticas, a partir de las cuales los potenciales medidos en superficie comienzan a ser perturbados por la presencia de los cuerpos extraños al modelo homogéneo. Por otra parte, se tiene que esas distancias críticas dependen de las reflexiones que se produzcan en las interfaces.

En las ecuaciones de distribución de potencial, en la parte integral sólo intervienen dos funciones: la transformada de resistividad que depende directamente del Kernel, el cual ya ha sido analizado y la función Bessel de primera clase y orden cero $J_0(\lambda r)$. Se tendrá entonces, que la función del $J_0(\lambda r)$, será controlar lateralmente el comportamiento de las reflexiones. Como fácilmente puede notarse esta función es la que tiene la información del arreslo electrodoico utilizado.

Debido que en la prospección eléctrica la señal que se mide es una diferencia de potencial y en vista que para un modelo dado la función Kernel es igual, conviene más, analizar la diferencia de funciones Bessel. A continuación se presentan las gráficas de las diferencias de $J_0(\lambda r)$, para algunas separaciones electrodoicas en un dispositivo Schlumberger,

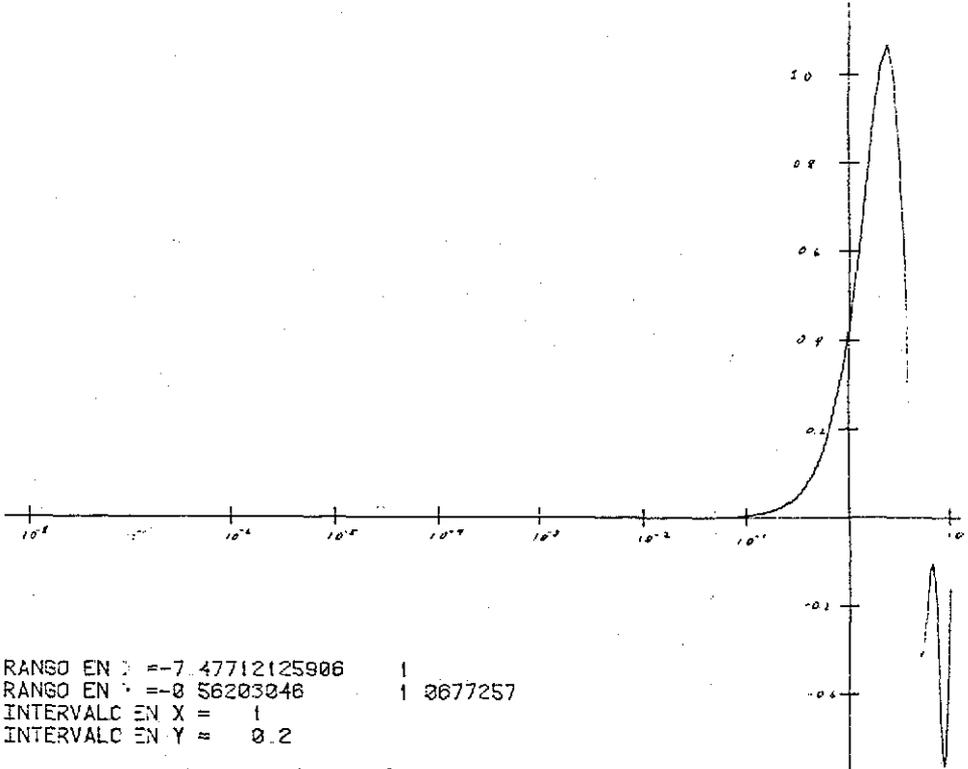
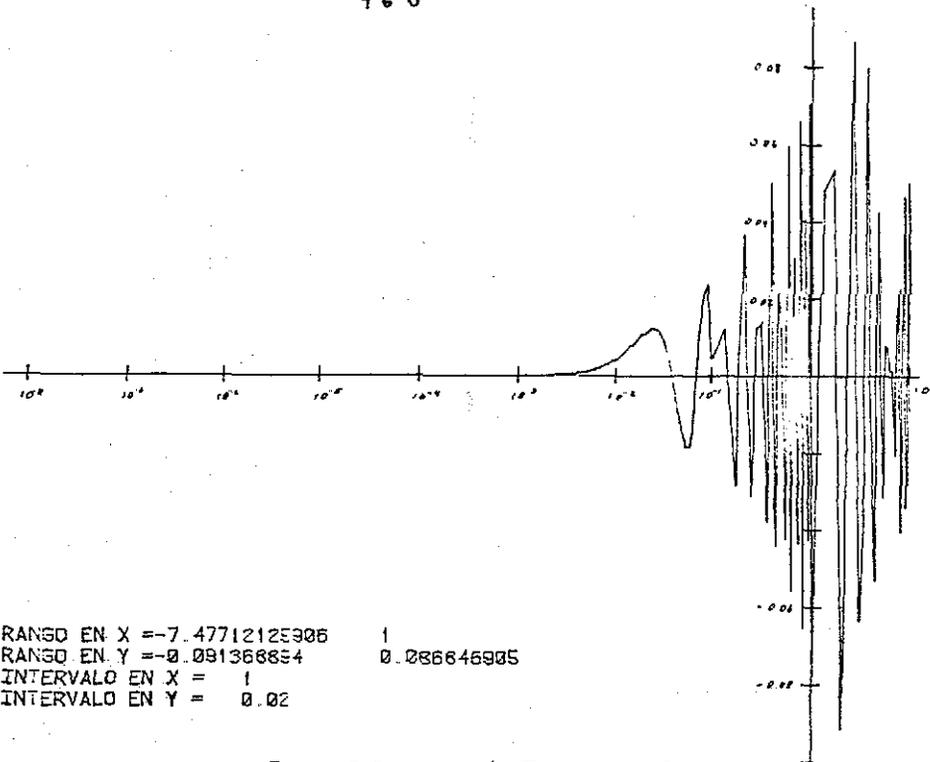


Fig. 126 Diferencia de Funciones Bessel $\Delta J_0(xr)$
 $AB/2 = 1.0$, $MN/2 = 0.5$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

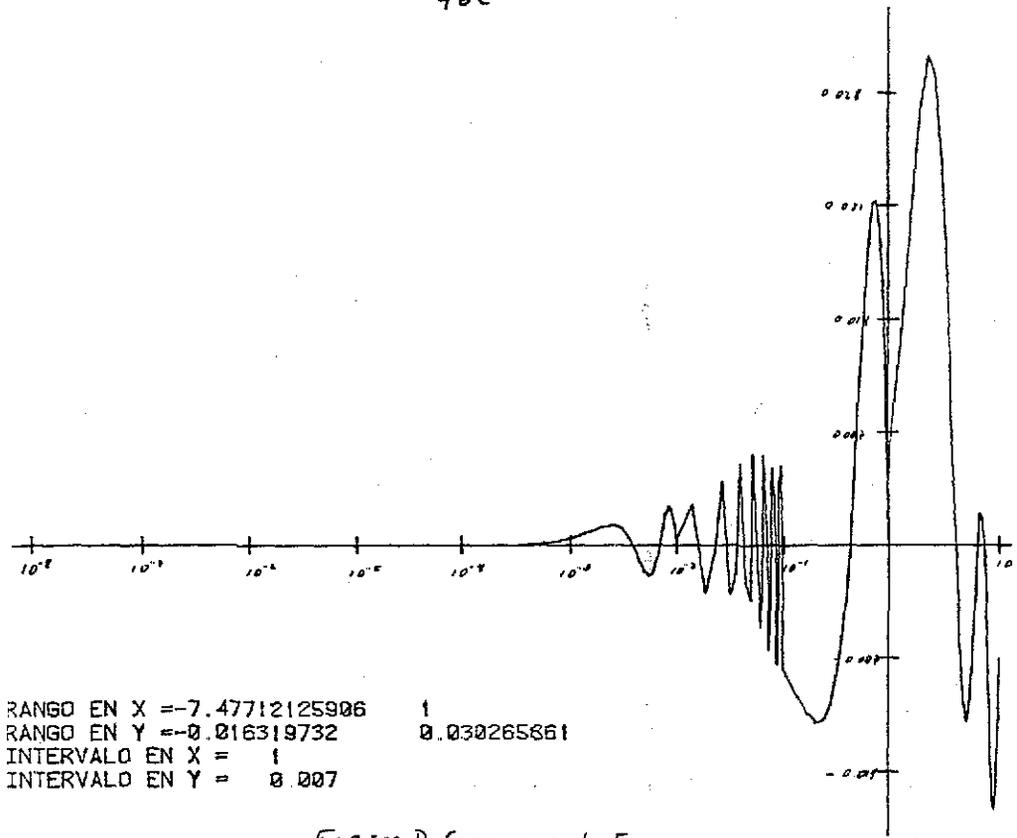


RANGO EN X = -7.47712125906 1
 RANGO EN Y = -0.091368834 0.086846905
 INTERVALO EN X = 1
 INTERVALO EN Y = 0.02

FIG 124 Diferencia de Funciones Bessel $J_0(x)$
 $AB/2 = 100.0, MN/2 = 0.5$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

460



RANGO EN X = -7.47712125906 1
RANGO EN Y = -0.016319732 0.030265661
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 0.007

FIG.128 Diferencia de Funciones Bessel $\Delta J_0(x)$
 $AB/2 = 1000.0$ $MN/2 = 0.5$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

47a

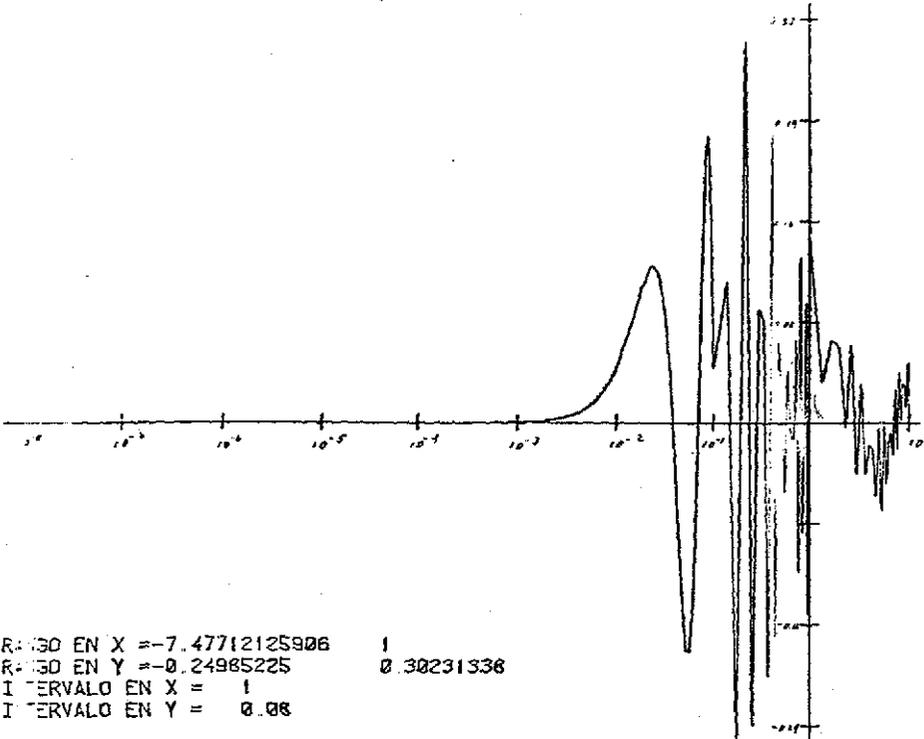
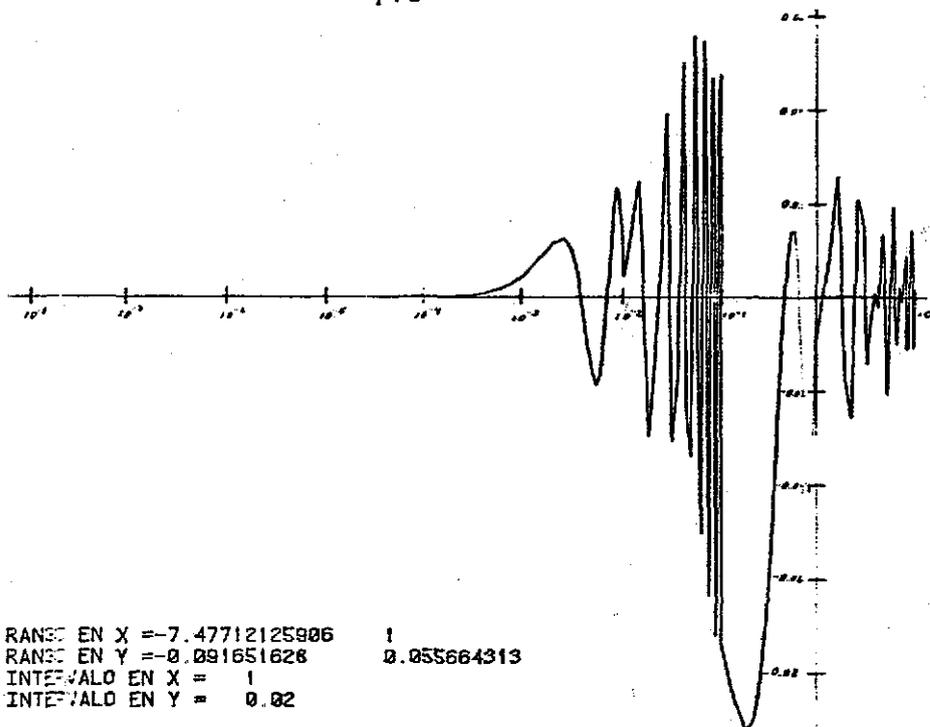


Fig. 1.19 Diferencia de Funciones Bessel $J_0(x)$
 $AB/2 = 100.0$, $HN/2 = 5.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

47b

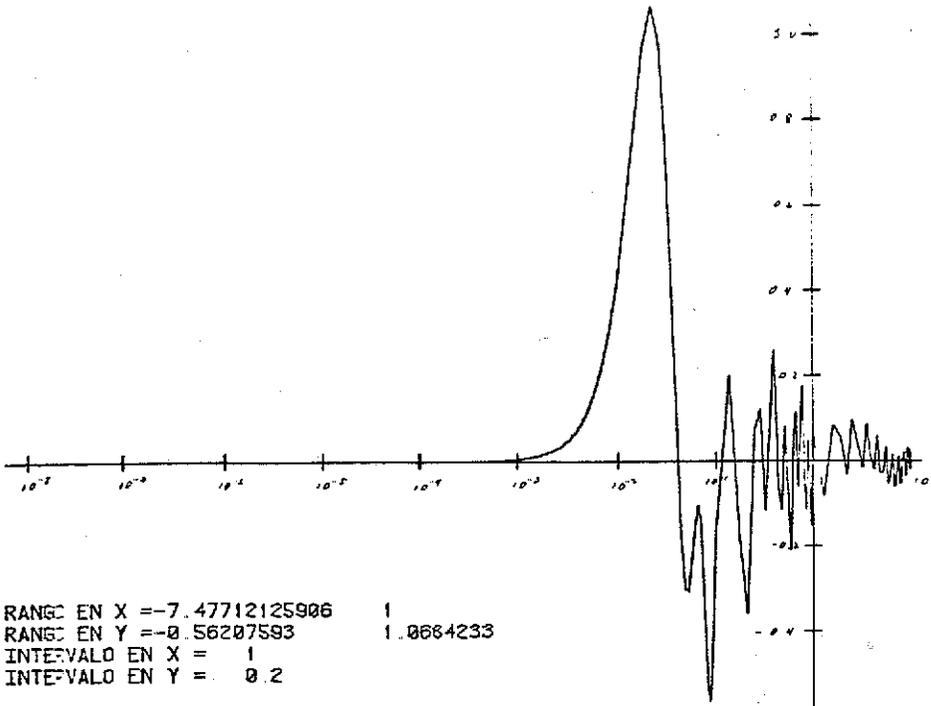


RANEO EN X = -7.47712125906 1
RANEO EN Y = -0.091651628 0.055664313
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 0.02

Fig. 10. Diferencia de Funciones Bessel $J_0(x) - J_1(x)$
 $AB/2 = 1000.0, MN/2 = 5.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

48a



RANGO EN X = -7.47712125906 1
RANGO EN Y = -0.56207593 1.0664233
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 0.2

Fig. 3.31 Diferencia de Funciones Bessel $J_0(xr)$
 $AB/2 = 100.0$, $MN/2 = 50.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

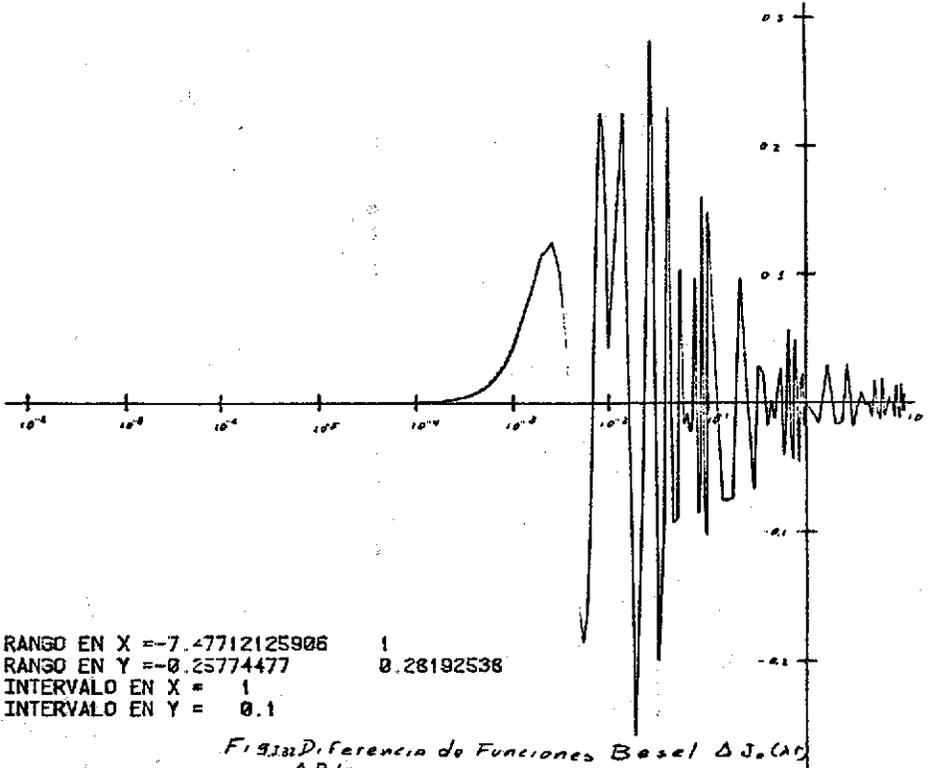
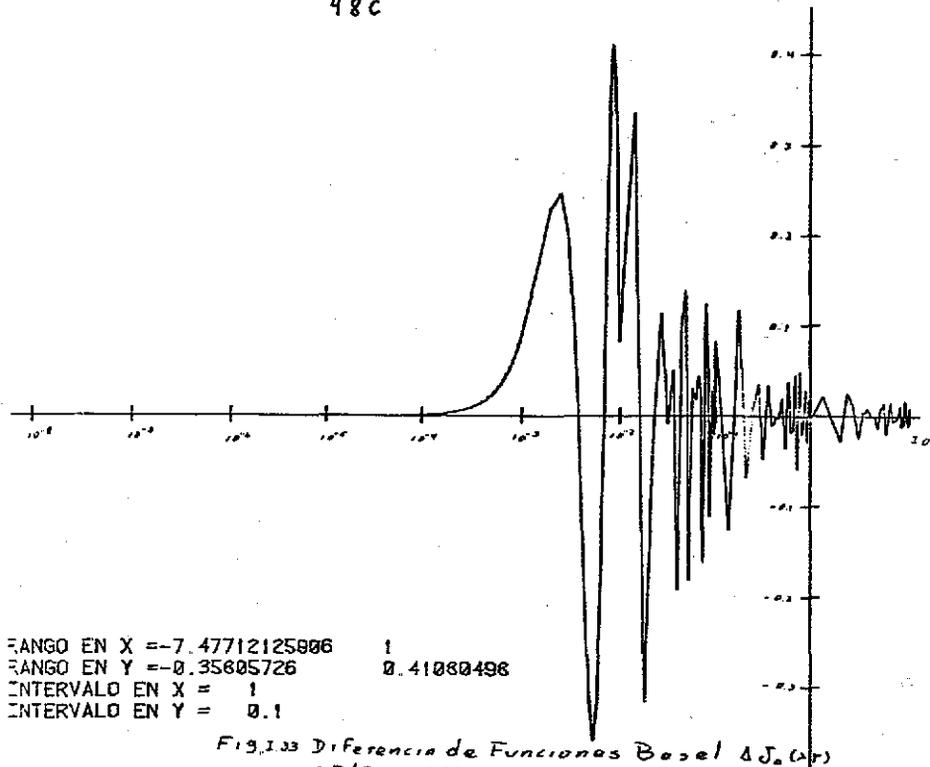


Fig. 3.33. Diferencia de Funciones Bessel $\Delta J_0(x)$
 $AB/2 = 10000$, $MN/2 = 50.0$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

48C



RANGO EN X = -7.47712125806 1
RANGO EN Y = -0.35805726 0.41080498
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 0.1

Fig. I.33 Diferencia de Funciones Bessel $\Delta J_0(x)$
AB/2 = 1000.0, MN/2 = 100

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Observese que para un $MN/2$ fijo cuando se van abriendo los electrodos AB , existe un amortiguamiento mayor del $J_0(\lambda r)$ y los ceros de la función se van corriendo hacia la izquierda. Lo cual coincide con la zona de mayor reflectancia dada por la generadora $L(\lambda)$.

I.4 Método de Integración de las Ecuaciones de Distribución de Potencial

La evaluación de la distribución de potencial a profundidad y en superficie, se hace através de las ecuaciones I.3, I.4 y I.15. Pero resulta que estas integrales no tienen solución analítica, por lo tanto se requiere de un método adecuado para encontrarles una solución numérica. De los métodos que se probaron para tal fin, se encontró que el más adecuado es el que utiliza Campos C., G. (1983).

A continuación se expone el método de integración numérica y en la sección I.4.2 se presenta el algoritmo para el cálculo de potenciales en cualquier punto a profundidad y en superficie.

I.4.1 Partición Logarítmica de la Transformada de Resistividad

de Resistividad

Las ecuaciones de distribución de potencial en términos de la transformada de resistividad están dadas por las ecuaciones I.44 y I.45.

a) Distribución de potencial en la primera capa:

$$V_1^N(r, z_1) = \frac{\rho_1 I}{2\pi(r^2 + z_1^2)^{3/2}} + \int_0^\infty T_1^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{I.44}$$

b) Distribución de potencial en resto de capas:

$$V_j^N(r, z_j) = \int_0^\infty T_j^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{I.45}$$

donde $T_j^N(\lambda)$ está dado por I.40 y $T_1^N(\lambda)$ por I.43

Como puede observarse en ambas ecuaciones el término integral es del mismo tipo, dado que $T_i^N(\lambda)$ y $T_j^N(\lambda)$ son funciones que dependen directamente del kernel. Por lo tanto el método de solución es el mismo. Para seguir el método se trabajará con la función $T_i^N(\lambda)$.

Definiendo por $I(r,z)$ la parte integral, se tiene:

$$I(r,z) = \int_{0^+}^{\infty} T_i^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{I.71}$$

donde $T_i^N(\lambda)$ y $J_0(\lambda r)$ son funciones convergentes a cero para valores grandes de λ , se tiene entonces que $I(r,z)$ existe.

Por lo tanto,

$$\int_{0^+}^{\infty} T_i^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \lim_{\lambda' \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\lambda'} T_i^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = Q$$

donde

$$|Q| < \infty$$

Utilizando una partición logarítmica se tiene:

$$\int_{0^+}^{\infty} T_i^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \approx \int_{0^+}^{\lambda_n} T_i^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \sum_{j=1}^n I_j$$

El método para resolver las integrales I_j se expone en el apéndice A [Campos C., G. (1983)].

Haciendo uso de los resultados obtenidos en el apéndice A, se tiene que la ecuación I.68 se transforma en:

$$I(r,z) \approx \sum_{j=0}^N (D_j T_i^N(\lambda_j) + E_j [T_i^N(\lambda_j)]') \quad \text{I.72}$$

Debe observarse que los coeficientes D_j , F_j , R_j , S_j y consecuentemente E_j y D_j dependen exclusivamente de los valores de λ_j y del valor de las integrales a_j , b_j , c_j , y d_j las que a su vez dependen de las lambdas y de las separaciones electrodoicas. La dependencia

de las integrales I_j del modelo, se realiza através de las $T_j^N(\lambda)$, $T_j^N(\alpha_j)$, $[T_j^N(\lambda)]'$ y $[T_j^N(\alpha_j)]'$.

Tal como se explica en el párrafo anterior, son los coeficientes E_j y D_j los que tienen la información del arreslo electrodoico en cambio $T_j^N(\lambda)$ y $[T_j^N(\lambda)]'$ son los que tienen la información de las características del modelo, lo cual permite calcular por separado los coeficientes para diferentes separaciones electrodoicas y posteriormente calcular los potenciales a profundidad para diferentes modelos.

1.4.2 Cálculo de Potenciales en Cualquier Capa

Con el método expuesto en la sección anterior, para la integración numérica de distribución de potencial, se está en capacidad de calcular potenciales a profundidad o en superficie.

De las ecuaciones 1.3, 1.4 y 1.72 se tiene:

a) La distribución de potencial en la primera capa:

$$V_1^N(r, z_1) \approx \frac{\rho_1 I}{2\pi (r^2 + z_1^2)^{3/2}} + \sum_{j=0}^N [D_j T_j^N(\lambda_j) + E_j [T_j^N(\lambda_j)]'] \quad \text{I.73}$$

donde

$$T_j^N(\lambda_j) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} K_j^N(\lambda) \quad \text{I.74}$$

Y para $z=0$, se tiene,

$$V_1^N(r) \approx \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + \sum_{j=0}^N [D_j T_j^N(\lambda_j) + E_j [T_j^N(\lambda_j)]'] \right] \quad \text{I.75}$$

b) La distribución de potencial en el resto de capas:

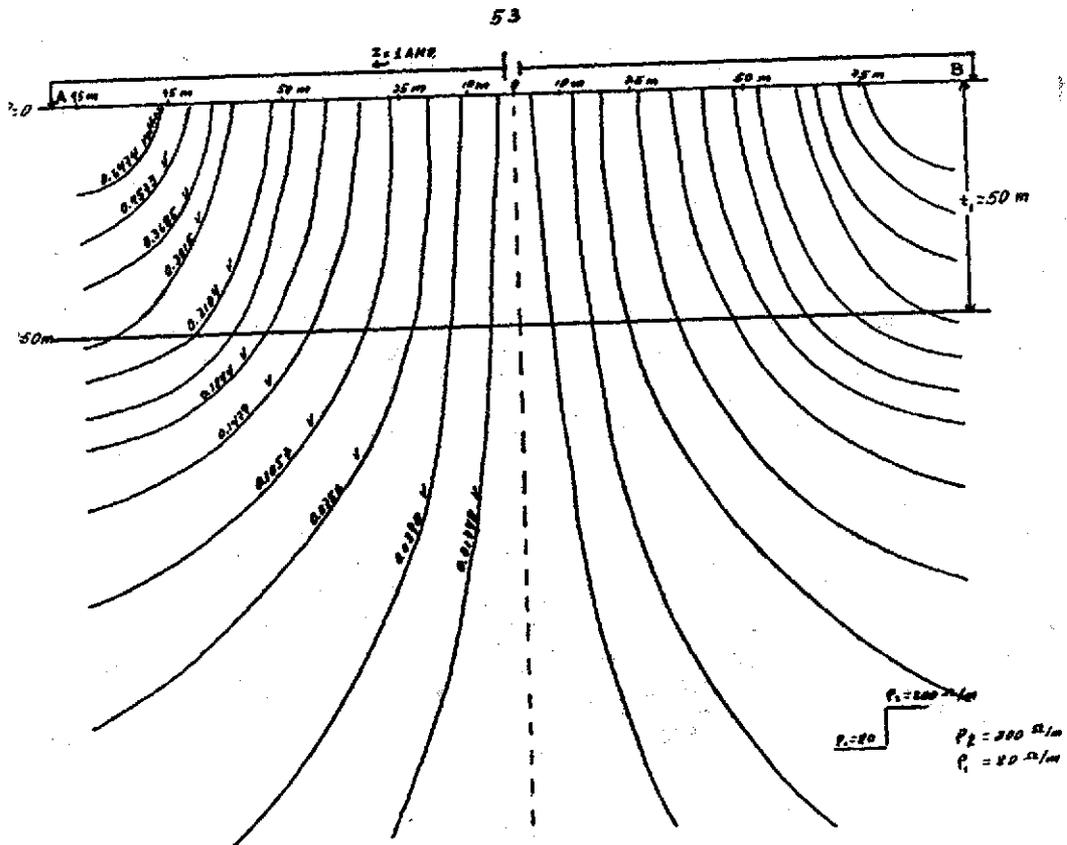
$$V_i^N(r, z_j) = \sum_{j=0}^N (D_j T_i^N(\lambda_j) + E_j [T_i^N(\lambda_j)]') \quad \text{I.76}$$

donde,

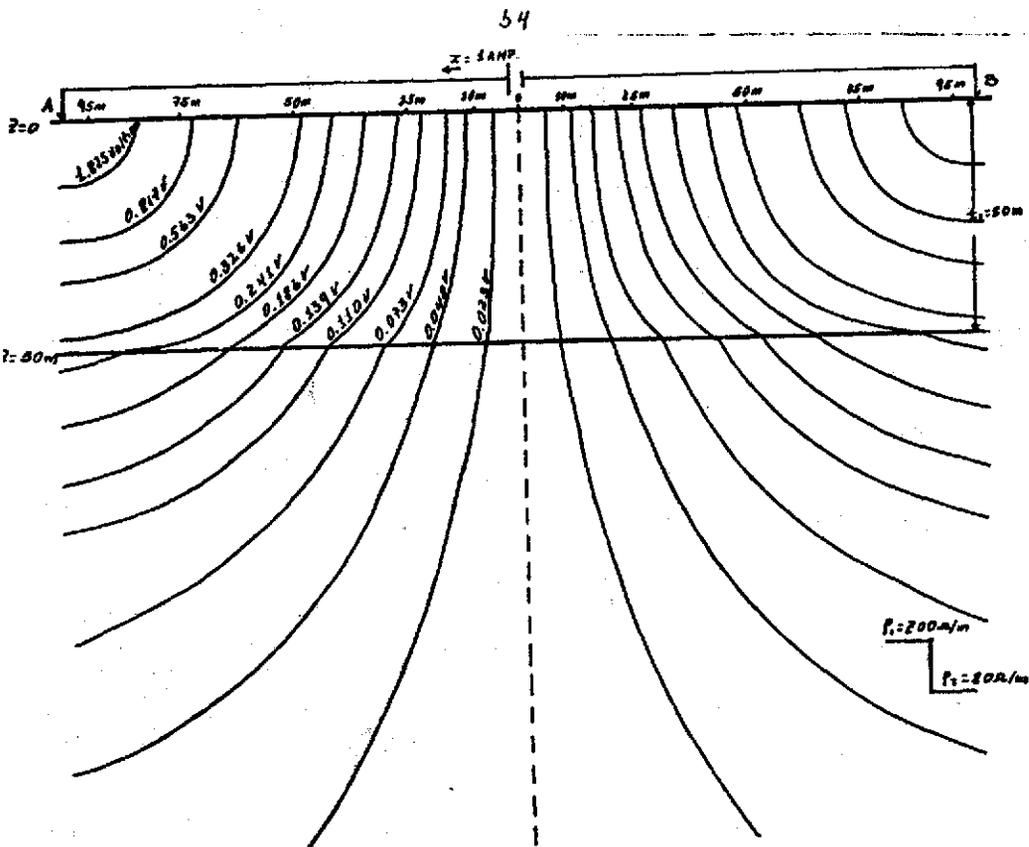
i : i -sima capa

A continuación se presentan las gráficas de distribución de potencial para un modelo de dos capas, obtenidas mediante este método.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



54



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo II

Profundidad de Investigación en Sondeos

Eléctricos Verticales

En este capítulo, primero se realiza un estudio de los coeficientes resultantes del método de interacción de las ecuaciones de Distribución de Potencial y que se obtienen en el apéndice A, lo que será de gran utilidad para el desarrollo de las secciones subsiguientes. Después se hace un estudio de las contribuciones individuales de las interfaces al potencial total medido en superficie, en función de las separaciones electrodo; posteriormente se da una definición de Profundidad de Investigación en base al análisis de la Profundidad de Detección de Interfaces. Finalmente se establece un procedimiento para la determinación de la Profundidad de Investigación para un arreglo Schlumberger y se establece la generalidad del método.

II.1 Estudio de Coeficientes

En la sección I.4.1 se expuso el método que se utiliza en el presente para el cálculo de la distribución de potencial y las expresiones para estas distribuciones en términos de los coeficientes calculados en el apéndice A, están dadas por las ecuaciones I.73, I.75 y I.76.

En vista que el mismo método será utilizado en el cálculo de las contribuciones individuales de cada interface al potencial total en superficie, es muy importante estudiar el comportamiento de los coeficientes en el dominio de las lambdas.

Para esto, primero se darán las gráficas de los coeficientes D_j y E_j para algunas separaciones electrodo y posteriormente se dará una interpretación del comportamiento de los coeficientes D_j y E_j , en un arreglo tipo Schlumberger.

56 a

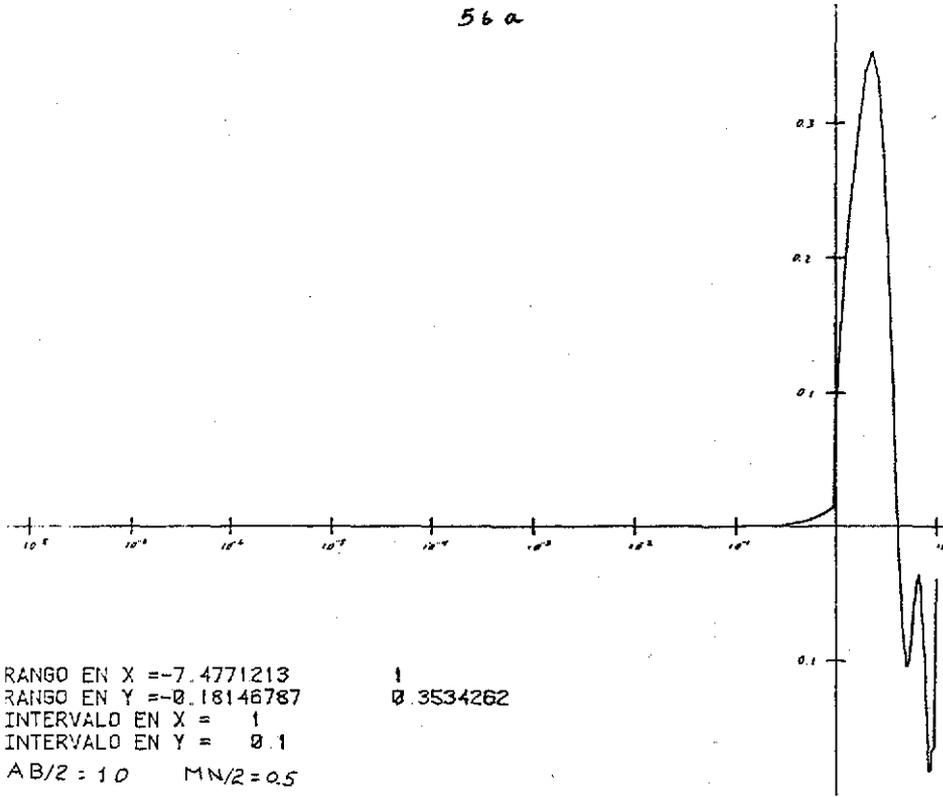


Fig 111 Gráfico de Coeficientes de Integración

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

56 b

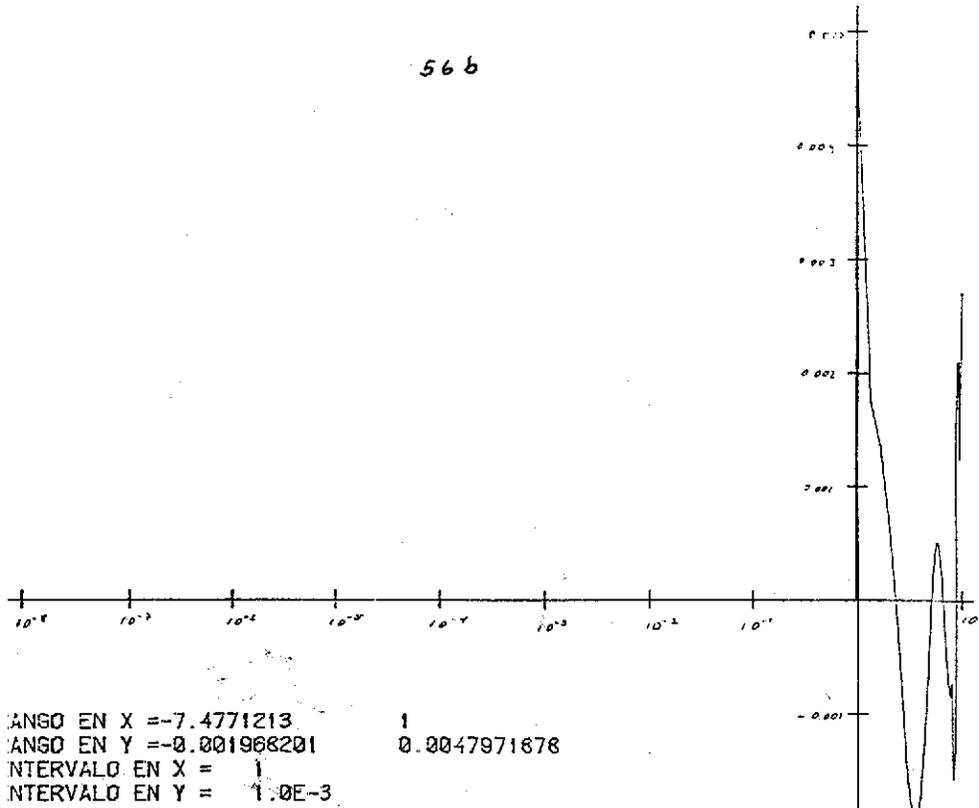


Fig 11.2 Gráfico de derivada de Coeficientes de Interacción
AB/2 = 2.0 MM/2 = 0.5

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

56C

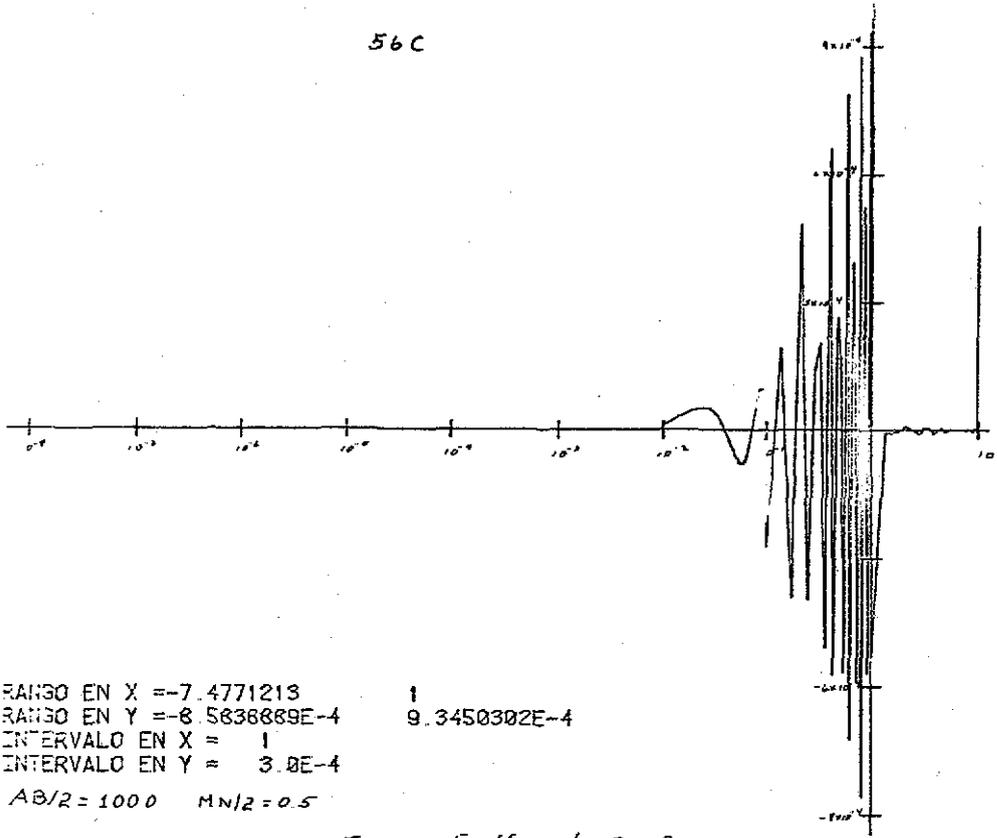
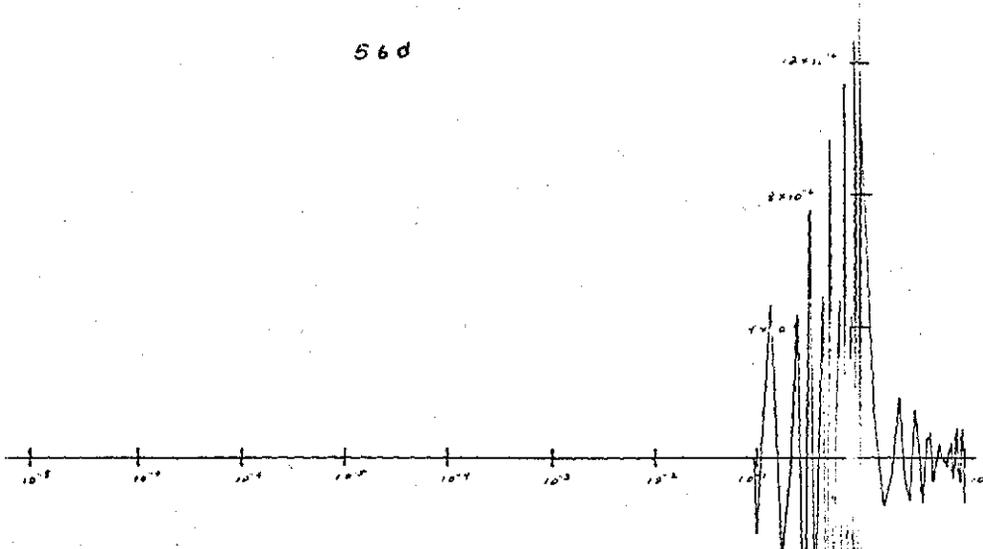


Fig. II.3 Gráfico de Coeficientes de Integración

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



RANGO EN X = -7.4771213 1
 RANGO EN Y = -1.0561994E-5 1.2695839E-5
 INTERVALO EN X = 1
 INTERVALO EN Y = 4.0E-6

Fig. II.4 Gráfico de derivada de Coeficientes de Integración
 AB/2=100.0 MN/2=0.5

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

56e

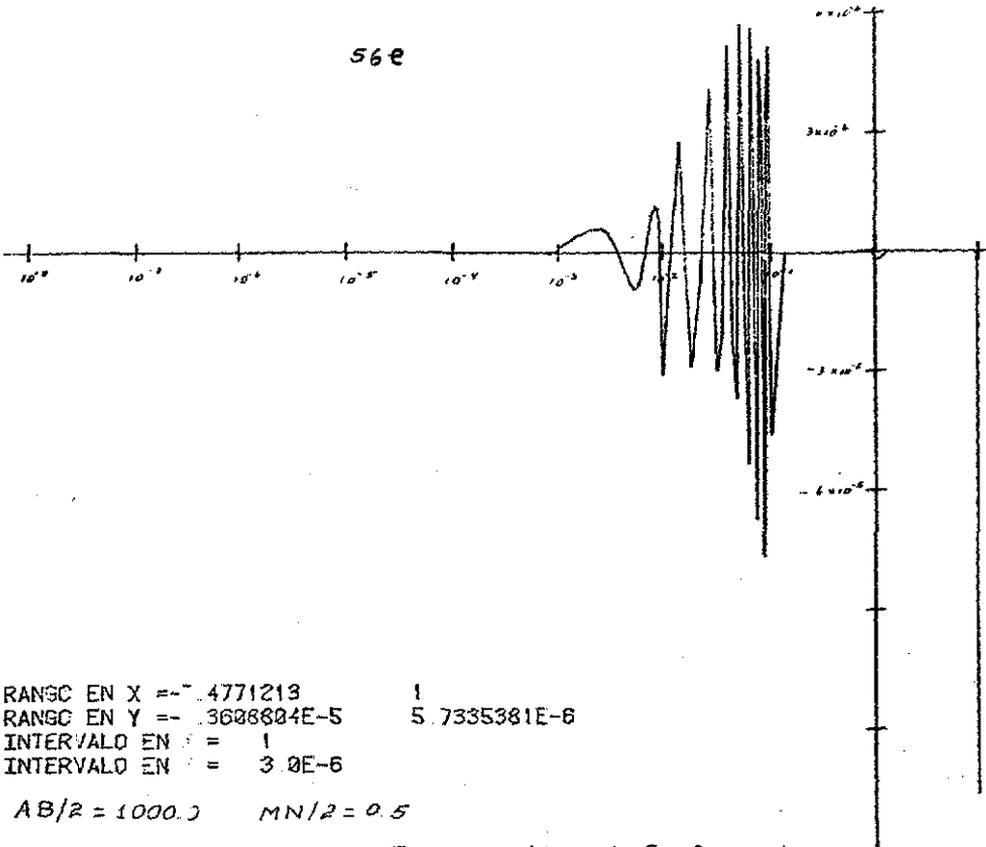
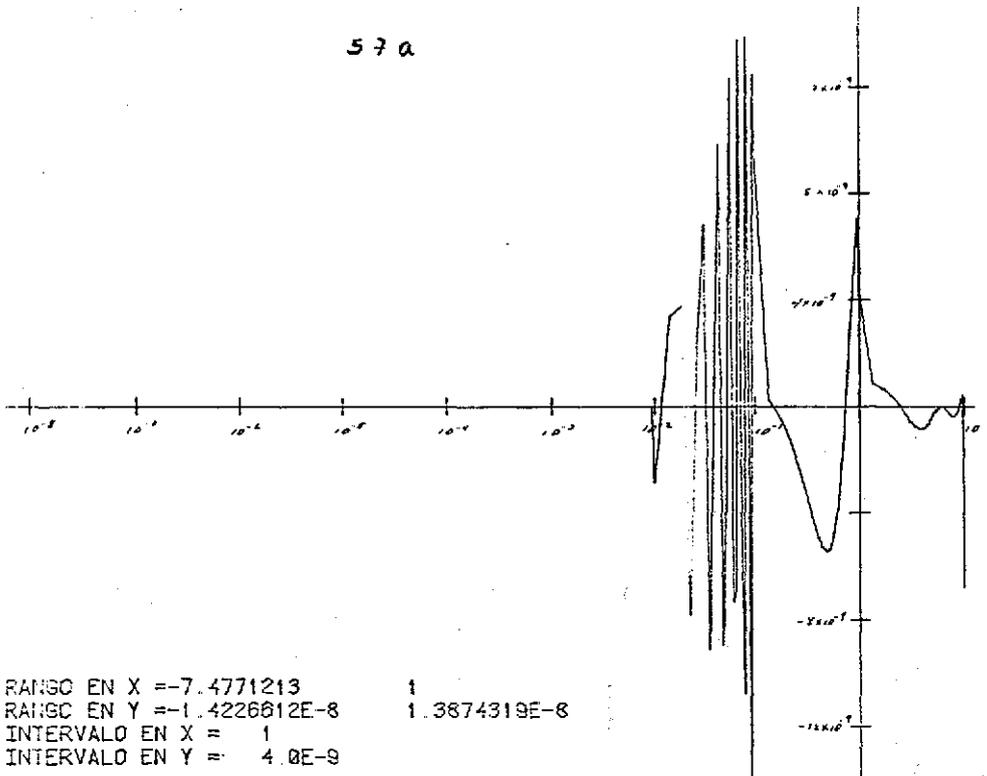


FIG.115 Gráfico de Coeficientes de Integración

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

57 a



RANGO EN X = -7.4771213 1
RANGO EN Y = -1.4226612E-8 1.3874319E-8
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 4.0E-9

FIG. II 6 Gráfico de derivada de Coeficientes de Integración
AB/2 = 1000.0 h1/2 = 0.5

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

576

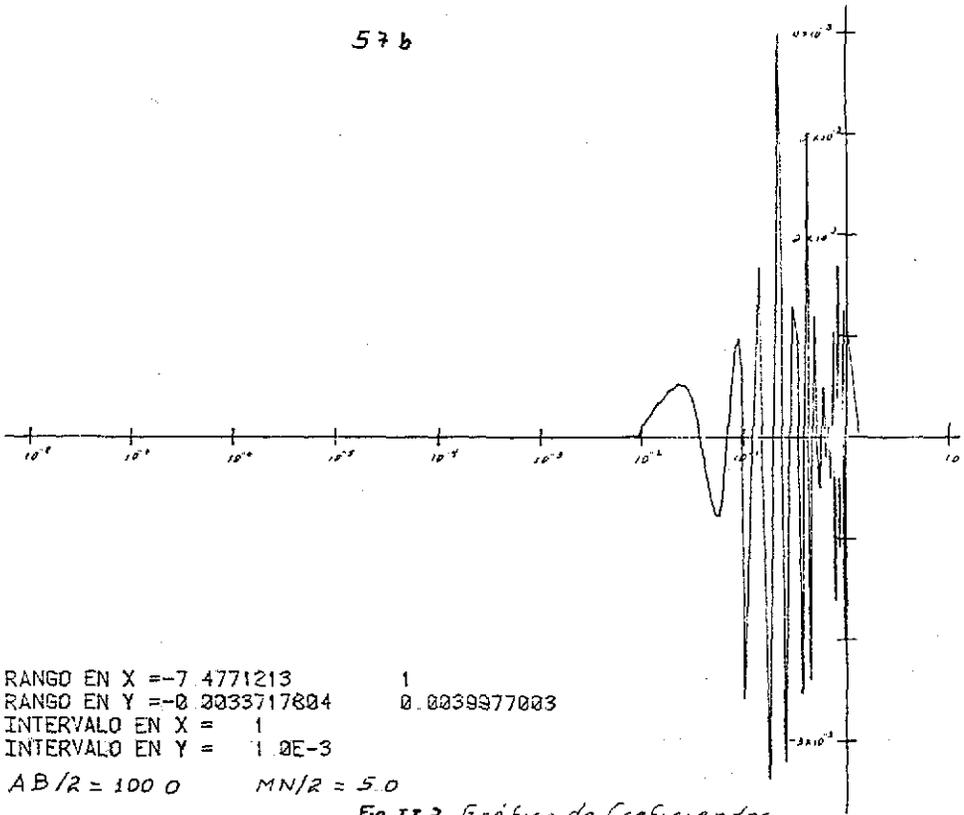


Fig. II.7 Gráfico de Coeficientes de Intesración

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

57c

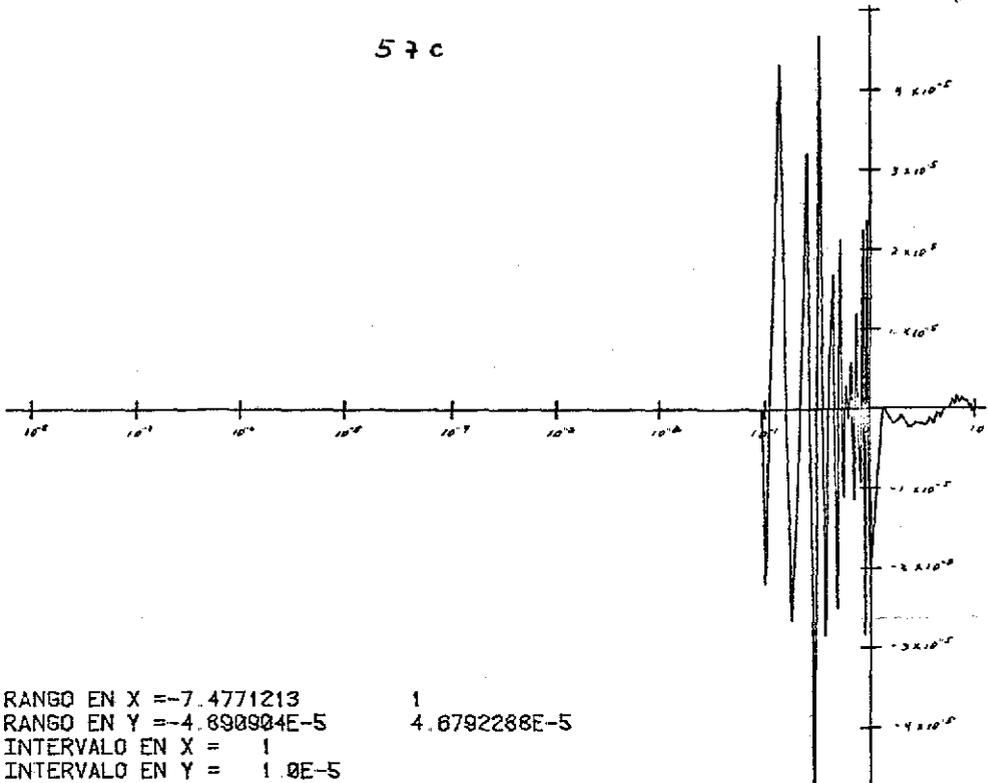
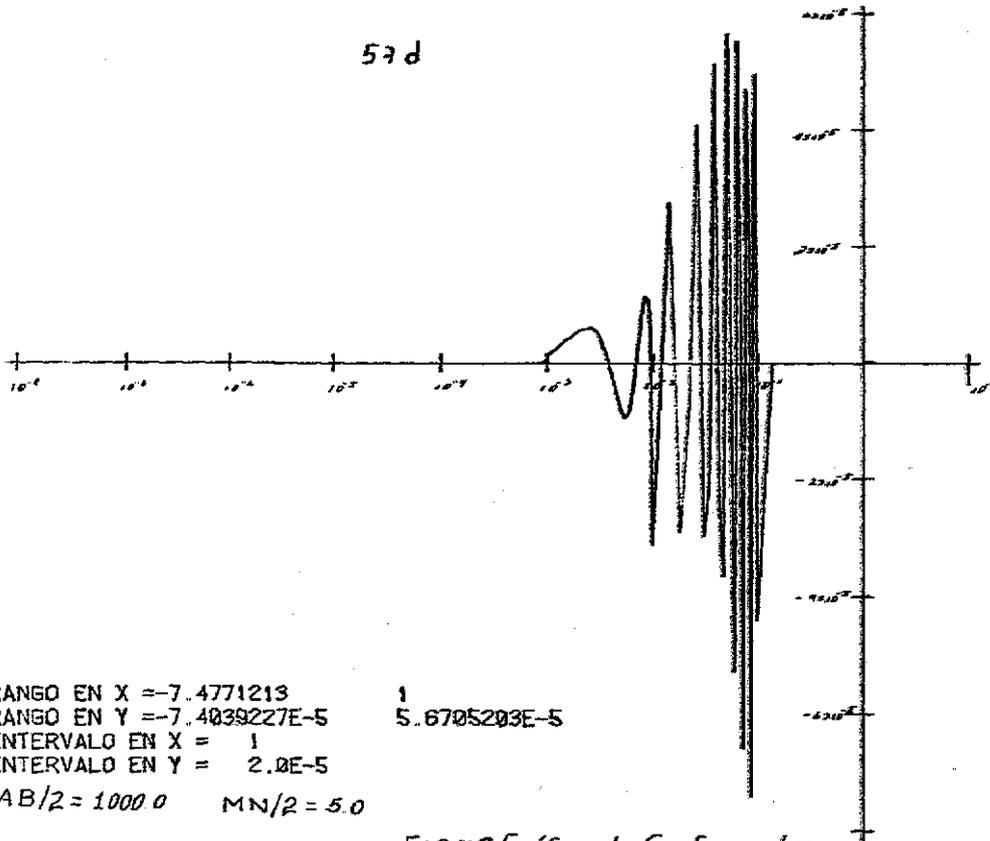


Fig 11.8 Gráfico de derivada de Coeficientes de Integración
AB/R=500.0 MN/R=5.0

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

57 d

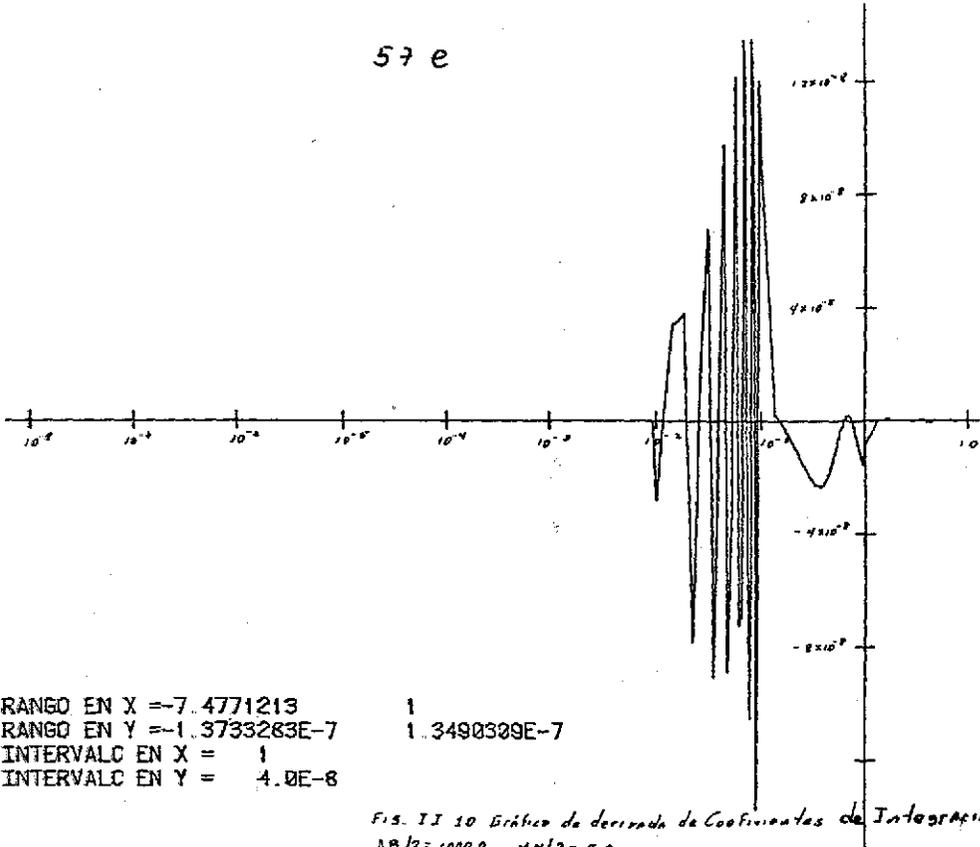


RANGO EN X = -7.4771213
RANGO EN Y = -7.4039227E-5
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 2.0E-5
AB/2 = 1000.0 MN/2 = 5.0

Fig. 119 Gráfico de Coeficientes de Integración

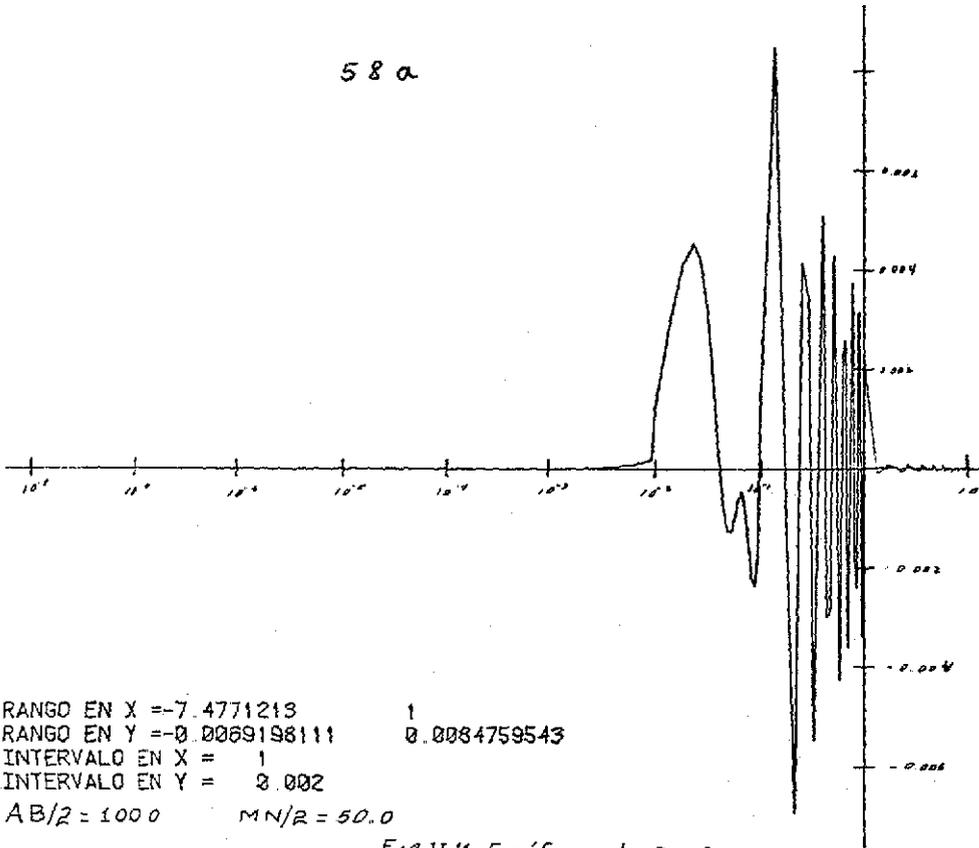
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

57 e



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

58a



RANGO EN X = -7.4771213 1
RANGO EN Y = -0.0069198111 0.0084759543
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 0.002
AB/2 = 1000 MN/2 = 50.0

Fig 11.11 Gráfico de Coeficientes de Integración.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

58 b

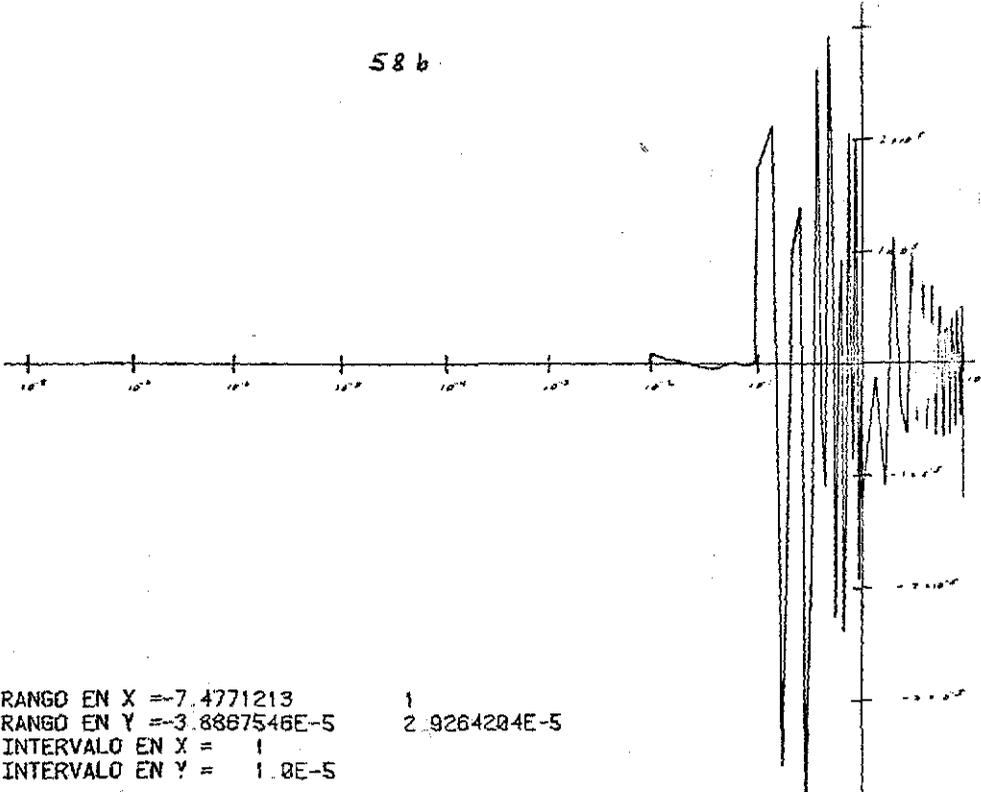
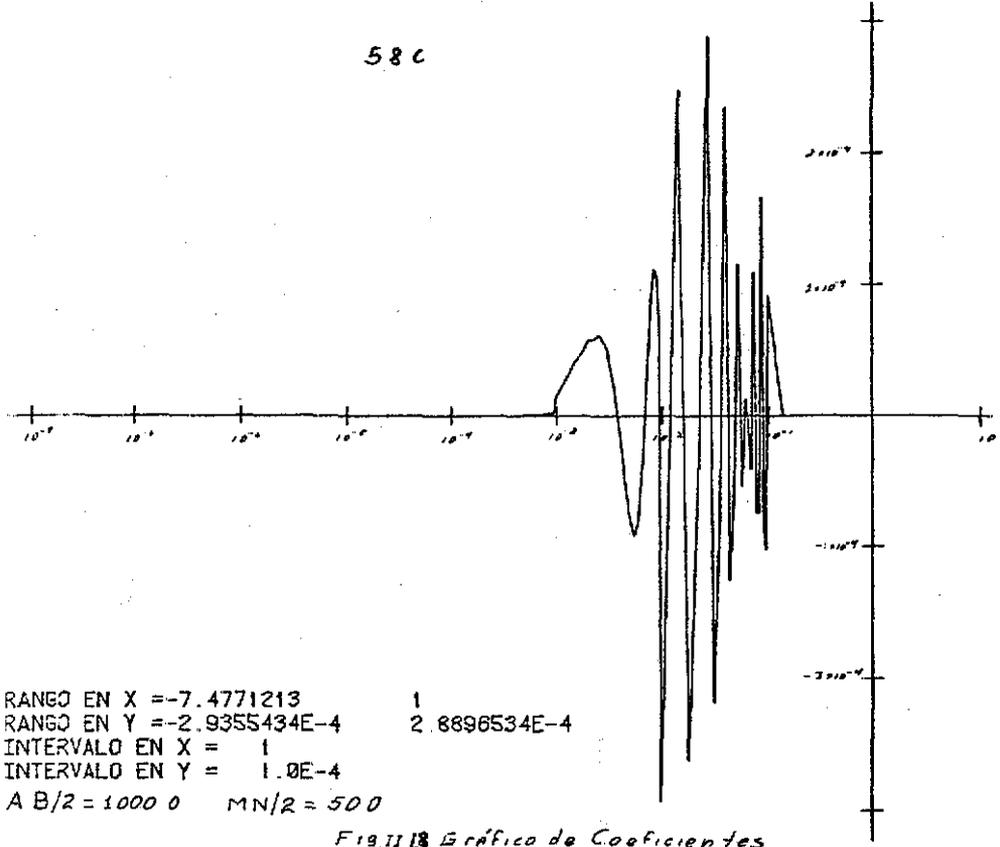


Fig 3112 Gráfico de derivada de Coeficientes de Integración
ABIR=1000 HMI=800

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

58c

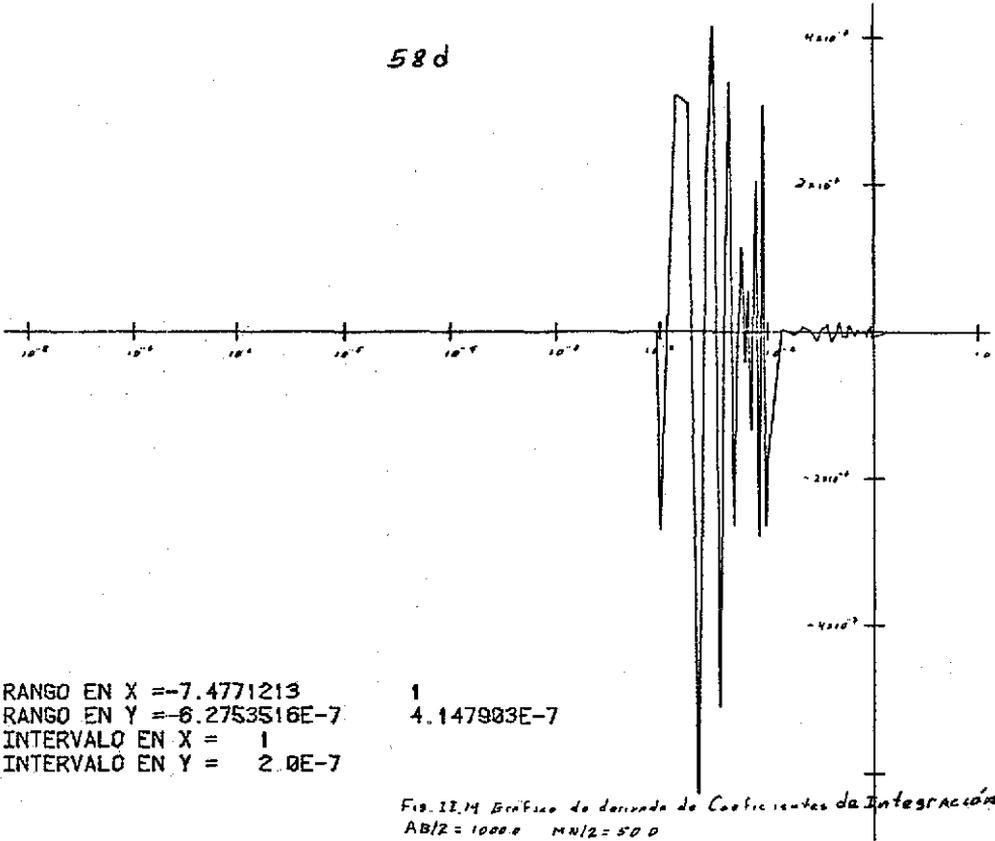


RANGO EN X = -7.4771213 1
RANGO EN Y = -2.9355434E-4 2.8896534E-4
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 1.0E-4
A B/2 = 1000 0 MN/2 = 500

Fig. II 13 Gráfico de Coeficientes de Integración

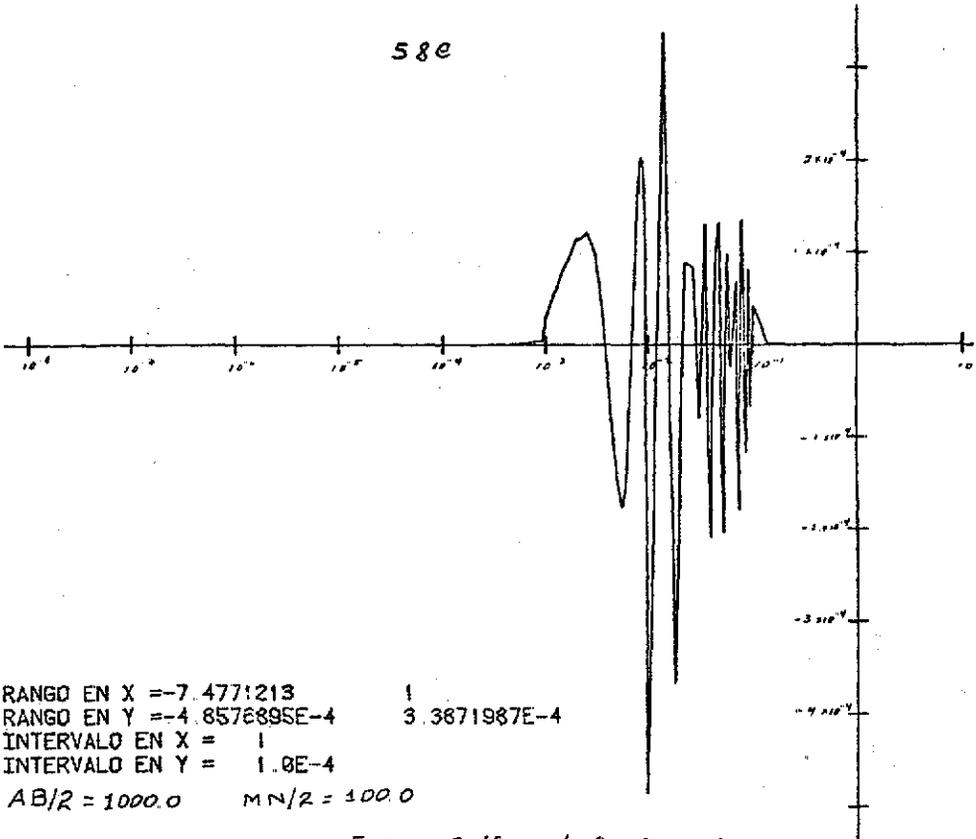
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

58d



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

58e



RANGO EN X = -7.4771213 1
RANGO EN Y = -4.8576895E-4 3.3871987E-4
INTERVALO EN X = 1
INTERVALO EN Y = 1.0E-4
AB/2 = 1000.0 MN/2 = 100.0

FIG. 31.15 Gráfico de Coeficientes de Integración

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

588

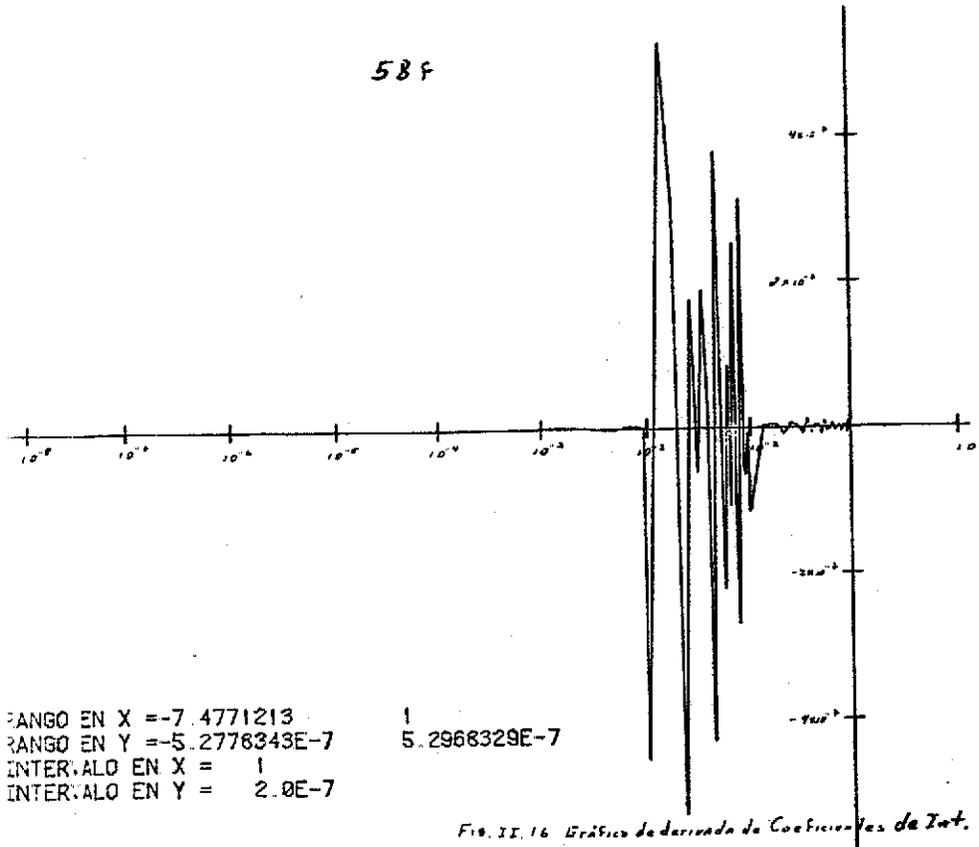


Fig. II. 16 Gráfico de derivada de Coeficientes de Int.
AB/2 = 5000.0 MN/2 = 500.0

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Observaciones:

a) Los coeficientes D_j y E_j dependen de los valores característicos y de las separaciones electrodi-cas.

b) Para un $MN/2$ fijo y pequeño, al aumentar $AB/2$, los máximos y mínimos de los coeficientes se desplazan hacia la izquierda a valores menores de λ y se hacen cada vez más oscilantes para valores grandes de λ . Además, los valores de los máximos y mínimos van decreciendo.

c) al aumentar el valor de $MN/2$ e iniciando con valores pequeños de $AB/2$ (siempre $AB/2 > MN/2$) y de igual forma que en el caso anterior se incrementan los valores $AB/2$, sucede que el comportamiento de los coeficientes es similar que para $MN/2$ pequeños. Sin embargo, los valores de los máximos y mínimos son menores que cuando $MN/2$ es pequeño y se incrementan las oscilaciones para valores grandes de λ .

d) Cuando la relación AB/MN es grande, se tiene que aumentan las oscilaciones que aparecen para λ , pero en valor son cada vez menores; en la medida que esta relación (AB/MN) aumenta.

e) Comparando el comportamiento de los coeficientes D_j y E_j con el comportamiento de la diferencia de Besels $J_0(\lambda r)$, se tiene que ambos son muy similares. Por lo tanto, la interpretación hecha para la función Bessel es válida para los coeficientes.

De acuerdo a la forma como se comportan los coeficientes en el dominio de λ y también la diferencia de ^{funciones} Bessel $J_0(\lambda r)$, esto es el corrimiento que sufren los máximos y mínimos hacia valores pequeños cuando se incrementa la separación AB , se tiene lo siguiente: a) que separaciones electrodi-cas grandes corresponden a valores pequeños de λ las que a su vez proporcionan mayor información de capas profundas. Es decir que los potenciales obtenidos a partir de separaciones electrodi-cas AB grandes, un alto porcentaje de este corresponde a las perturbaciones

al potencial, producidas por interfaces que se encuentran a mayor profundidad. b) Por otra parte, las separaciones pequeñas corresponden a valores muy grandes de λ , por lo tanto, se tiene que es inverso al caso anterior.

Lo anterior será de gran utilidad para la determinación de la Profundidad de Investigación que es el tema central de este trabajo.

II.2 Contribución Individual de cada Interface al Potencial Total

Para un modelo de N capas horizontales, homogéneas e isotrópicas, en la sección I.3.2 se ha estudiado la formación del potencial en superficie cuando es inyectada una corriente I , o sea el potencial de un medio homogéneo perturbado por la presencia de las $N-1$ capas restantes, está dado por:

$$V_T = V_H + \sum_{i=2}^N V_i \quad \text{I.70}$$

donde,

V_T : Potencial total medido en superficie

V_H : potencial correspondiente a un medio homogéneo,

cuya resistividad es la de la primera capa.

V_i : potencial perturbador de la i -sima interface.

Esta ecuación es perfectamente equivalente a:

$$V_i^N(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left(1/r + 2 \int_{0^+}^{\infty} K_0^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right) \quad \text{I.15}$$

o bien, a:

$$V_i^N(r) \approx \frac{\rho_i I}{2\pi} \left(1/r + \sum_{j=0}^N [D_j K_0^N(\lambda_j) + E_j [K_1^N(\lambda_j)]] \right)$$

La ecuación I.70 se obtuvo mediante la aplicación del principio de superposición. Pero esto a su vez, ofrece un método sencillo para calcular la contribución individual de cada interface al potencial total medido en superficie. Para comprender el método que posteriormente se propone, debe observarse lo siguiente:

a) En un medio semi-infinito, homogéneo e isotrópico de resistividad ρ en el cual se inyecta una corriente I Fig. II.17

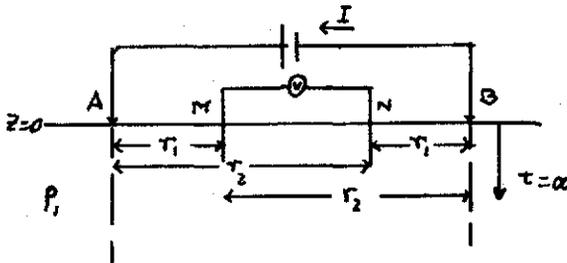


Fig. II.17 Arreglo electrodo Schlumberger.

Se tiene que el potencial para un arreglo Schlumberger(1) en un punto M, es:

$$V_M = -\frac{\rho I}{2\pi} \left(1/r_1 - 1/r_2 \right) \quad \text{II.1}$$

b) Si en este medio semi-infinito se coloca a una cierta profundidad una segunda capa semi-infinita y de resistividad ρ_2 se tiene entonces, que el potencial en M corresponderá al potencial inicial del medio semi-infinito, homogéneo y de resistividad ρ_1 más la suma algebraica del potencial debido a la interface de separación de estos dos medios, donde el segundo tiene una resistividad ρ_2 .

c) Ahora, si en el nuevo caso formado por dos capas, donde el espesor de la primera será la profundidad a la cual se colocó el segundo medio semi-infinito, si en el segundo medio se superpone una tercera capa semi-infinita y de resistividad ρ_3 . Se tendrá que el nuevo potencial en M será el potencial de dos capas analizado en b), más la suma algebraica del potencial debido a la interface que separa al segundo del tercer medio de resistividad .

Este proceso se sigue hasta formar el modelo de N capas.

d) La contribución de cada interface al potencial total en superficie, corresponderá al potencial de un medio semi-infinito, homogéneo e isotrópico, con una determinada resistividad .

De lo antes dicho, se tiene que en un modelo de N capas, las contribuciones individuales de cada interface al potencial en superficie se pueden calcular aplicando la Ec. I.70 de la siguiente manera:

a) Se inicia con un modelo de dos capas, para lo cual se calcula el potencial total en superficie aplicando la ecuación I.74. Entonces la contribución de la segunda interface V_2 , de acuerdo a la Ec. I.70, será:

$$V_2 = V_1^2(r) - V_M \quad \text{II.2}$$

donde,

V_2 : contribución de la primera interface.

b) Se continúa con un modelo de tres capas. De nuevo, mediante la Ec. I.74 se calcula el potencial total debido a las tres capas, luego para encontrar la contribución de la segunda interface, se aplica la Ec. I.70, de donde se obtiene:

$$V_3 = V_1^3(r) - V_M - V_2 \quad \text{II.3}$$

donde:

V_3 : contribución de la segunda interface al potencial

V_1^3 : potencial total en superficie,

V_2 : contribución de la primera interface al potencial.

V_H : potencial debido a un medio homogéneo de conductividad ρ_1 (primera capa).

c) Generalizando el procedimiento, se tiene que la contribución de la N-1 interface será:

$$V_N = V_1^N(r) - V_H - \sum_{i=2}^{N-1} V_i \quad \text{II.4}$$

donde:

V_N : contribución al potencial de la última interface

V_1^N : potencial total en superficie

V_i : contribución de la i-sima interface.

Otra forma de expresar la contribución al potencial de la última capa en un modelo de N capas será:

$$V_N = V_1^N(r) - V_1^{N-1}(r) \quad \text{II.5}$$

La Ec. II.5 es igual a la Ec. II.4.

Sustituyendo la Ec. I.15 en la Ec. II.5 se tiene:

$$V_N = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ 2 \int_0^{\infty} K_1^N(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - 2 \int_0^{\infty} K_1^{N-1}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad \text{II.6}$$

de donde

$$V_N = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ 2 \int_0^{\infty} [K_1^N(\lambda) - K_1^{N-1}(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad \text{II.7}$$

pero,

$$K_1^N(\lambda) = \frac{L_1^N(\lambda)}{1 - L_1^N(\lambda)}$$

*

ANÁLISIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$K_1^{N-1}(\lambda) = \frac{L_1^{N-1}(\lambda)}{1 - L_1^{N-1}(\lambda)}$$

La diferencia de funciones Kernel que aparece en la Ec. II.7, en términos de las generadoras $L(\lambda)$ queda:

$$\Delta K(\lambda) = K_1^N(\lambda) - K_1^{N-1}(\lambda)$$

$$\Delta K(\lambda) = \frac{(1-k_1^2)(1-k_2^2)(1-k_3^2) \dots (1-k_{N-2}^2) L_{N-1}^N e^{-2\lambda(t_1+t_2+\dots+t_{N-2})}}{[1+(k_1 e^{-2\lambda t_1}) L_1^N - L_1^2][1+(k_2 e^{-2\lambda t_2}) L_2^{N-1} - L_2^2]} \quad \text{II.8}$$

En función de los coeficientes D_j y E_j en la ecuación II.7, queda:

$$V_N = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \sum_{j=0}^N [D_j \Delta K(\lambda_j) + E_j \Delta K(\lambda_j)] \quad \text{II.9}$$

El método antes expuesto para la determinación de las contribuciones individuales de las interfaces al

potencial en superficie, será utilizado en la siguiente sección para determinar la profundidad de detección de una interface, en un modelo de N capas.

II.3 Profundidad de Detección de Interfaces

II.3.1 Análisis de Profundidad de Detección de Interfaces

Para iniciar el desarrollo de la presente sección que representa la parte central de este trabajo, será necesario recordar algunos de los resultados obtenidos en secciones anteriores.

En el estudio que se hizo de las funciones Bessel $J_0(\lambda r)$ en el capítulo I y del comportamiento de los coeficientes en la sección II.1, se estableció la siguiente relación entre las separaciones electrodoicas y los valores característicos: a grandes separaciones electrodoicas corresponden valores pequeños de lambdas y a pequeñas separaciones corresponden valores grandes de lambdas.

Por otra parte fue establecido mediante el estudio de la función Kernel que la información de capas profundas la proporcionan los valores pequeños de lambdas y que la información de capas superficiales la dan los valores grandes de lambdas.

Lo anterior conduce a establecer la relación ya bien conocida que grandes separaciones electrodoicas AB/MN corresponden a grandes profundidades. Pero es aquí donde se tiene que hacer un estudio más consciente de la realidad física en función de las contribuciones de cada interface al potencial medido en superficie. Para un modelo de N capas y un arreglo electrodoico dado, las contribuciones de cada interface al potencial, dependen de las separaciones electrodoicas utilizadas, de la corriente que es inyectada y de la resistividad de la primera capa. Esto puede verse fácilmente también bien en la Ec. II.9. Donde se pone de manifiesto la proporcionalidad de la contribución de cada interface V con la corriente y la resistividad del primer medio. Sin embargo, la

variación de estas contribuciones para diferentes separaciones no es tan fácil de verse.

Para estudiar las variaciones de las contribuciones para diferentes separaciones electroquímicas se propone: a) Primero fijar una separación MN pequeña de electrodos de potencial, luego ir aumentando la separación AB de electrodos de corriente. Después para otro MN repetir el proceso. b) Fijar una distancia AB, y comenzar a variar la distancia MN. Luego, se repite el proceso para otro valor de AB.

a) De las gráficas de los coeficientes en el dominio de las λ s se observa que al aumentar la separación AB, manteniendo un MN fijo, existe un corrimiento de los máximos y mínimos hacia valores pequeños de λ s, además los valores de estos disminuyen. Por otra parte las oscilaciones que aparecen para λ s grandes, aumentan su frecuencia pero sus amplitudes se hacen cada vez más pequeñas.

Consecuentemente se tiene que para una separación electroquímica MN pequeña e ir incrementando la separación AB, la información que dan los valores grandes de de las capas superficiales va disminuyendo y contrariamente se incrementa la información que dan los valores pequeños de de las capas que se encuentra a mayor profundidad. Es decir que del potencial medido en superficie, cuando la separación AB es grande y MN es pequeña, se tiene que un alto porcentaje de ese potencial corresponde a capas profundas. Pero el potencial en superficie va disminuyendo en valor, tal como se mostró en la Fig. 1.21.

Ahora bien, si la separación AB de electrodos de corriente no es muy grande comparada con la separación MN de electrodos de potencial, se tiene que el mayor porcentaje del potencial medido corresponde a capas superficiales.

b) Si se fija una distancia AB grande y se incrementa el valor de la separación MN, de las gráficas de los coeficientes se observa que ahora existe un desplazamiento de los máximos y mínimos hacia los valores grandes de λ y sus valores comienzan a crecer. En este caso se tiene que la magnitud del potencial medido en superficie aumenta y esto sucede porque las contribuciones de cada interface crecen en magnitud. Pero debido al corrimiento que se observa en los máximos y mínimos hacia valores grandes de λ , la contribución porcentual de las capas profundas disminuye y la de las superficiales aumenta.

El hecho que disminuya el potencial en superficie cuando se incrementa la separación AB y se mantienen fijas las separaciones MN y la corriente I, representa un serio problema. Aunque teóricamente siempre se tendrá una diferencia de potencial en MN para cualquier separación AB, esta diferencia de potencial es registrada por el receptor, el cual es capaz de registrar hasta un determinado valor de diferencia de potencial, dependiendo de su sensibilidad. Sucede entonces que para AB grandes y MN pequeñas, aunque la contribución porcentual de las interfaces que se encuentran a mayor profundidad crece, puede ser que su valor sea tan pequeño que no puede ser registrado por el aparato.

Este problema puede ser resuelto de cuatro maneras diferentes, que son: a) Utilizando receptores cuya sensibilidad sea muy alta, pero esto no resuelve siempre el problema, por otra parte tiene dos desventajas que son: un receptor de muy alta sensibilidad su costo es elevadísimo, además de ser muy sensible a ruidos. b) Inyectar mayor cantidad de corriente al subsuelo, esto también tiene sus desventajas, que son: requerimiento de generadores muy grandes y esto significa costos muy altos, además de poca versatilidad en el trabajo de campo y también no resuelve siempre el problema. c) Para una separación AB de electrodos de corriente, utilizar una separación MN de electrodos de potencial mayor, el hacer esto tiene el problema que aunque en magnitud se incrementa el potencial producto de cada interface, el valor porcentual debido a interfaces que se

encuentran a gran profundidad disminuye, sin embargo, si se hace de una manera racional puede dar muy buenos resultados. d) Finalmente, la mejor solución es una combinación de las tres soluciones anteriores. Esto quedará completamente aclarado en el capítulo III cuando se analicen los gráficos de profundidad de detección de interfaces contra separación electrodiica.

II.3.2 Definición de Profundidad de Investigación

En modelos de capas horizontales, homogéneas e isotrópicas, es de vital importancia conocer las contribuciones de cada interface al potencial total en superficie para un determinado arreslo electrodiico y una corriente dada, porque esto permite saber que interfaces pueden ser detectadas cuando se utiliza un receptor de determinada sensibilidad. Esto significa que cuando en un modelo de N capas, solamente las contribuciones de ciertas interfaces pueden ser registradas como cifras significativas en la lectura del aparato, se tendrá que la Profundidad de Investigación será hasta la profundidad que se encuentra la última interface detectada. En el presente trabajo se considera sin importancia el referirse a profundidades de Investigación para puntos intermedios de capas, porque cuando se detecta una interface se conocen de inmediato las características de los medios adyacentes a ella.

Lo anterior se tomará como base para la definición de lo que se entenderá como "Profundidad de Investigación" en el presente trabajo.

Se entenderá por "Profundidad de Investigación" en un Sondeo Eléctrico para un modelo de N capas, la profundidad a la cual se encuentra la última interface cuya contribución al potencial en superficie pueda ser detectado por el receptor utilizado.

II.3.3 Determinación de la Profundidad de Investigación para un Arreslo Electrodiico

Del análisis del comportamiento de los coeficientes D_1 y E_1 o bien de las diferencias de funciones Bessels $\Delta J_0(xr)$ se puede inferir la diferencia en las profundidades de Investigación para dispositivos Wenner y Schlumberger, de acuerdo a la definición propuesta en el presente trabajo.

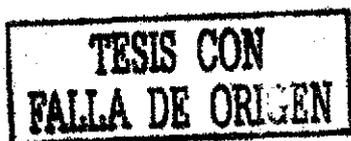
En un dispositivo Wenner la separación de electrodos de potencial es igual a un tercio de la separación de electrodos de corriente, esto de acuerdo al análisis que se ha hecho, se llega a las siguientes conclusiones: a) por el mismo hecho de fijar una relación de AB a MN es muy limitante. b) Las contribuciones individuales de cada interface al potencial en superficie son mayores pero, la contribución porcentual es menor, lo cual significa que aun cuando no da mejor resolución, la Profundidad de Investigación es un poco mayor que la de un dispositivo Schlumberger.

Si se hace una buena elección de separaciones electrodoicas en un dispositivo Schlumberger, además de tener una buena resolución se puede lograr una profundidad de Investigación muy próxima a la de un dispositivo Wenner, a esto hay que sumar la versatilidad que presenta este tipo de arreglo.

II.3.5 Generalidad del Método

Aún cuando en el desarrollo del presente trabajo, solo se ha considerado dispositivos Schlumberger, se tiene que si se aplica el mismo concepto de Profundidad de Investigación y dado que el Principio de superposición es general, se tiene que para otro tipo de arreglos electrodoicos, las ecuaciones aquí expuestas solo cambiarían en algunos aspectos de forma pero no de fondo, por lo tanto se concluye que el método se cumple para cualquier dispositivo electrodoico coplanar.

II.3.6 Ejemplos



ANALISIS DE MODELO DE 8 CAPAS

CAPAS	RESISTIVIDAD	ESPESORES	COEFICIENTE REFLEXION
*****	*****	*****	*****
1	10.38000	1.5000	.806023029229406554D-01
2	12.20000	INFINITO	

AME EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD(M):,0

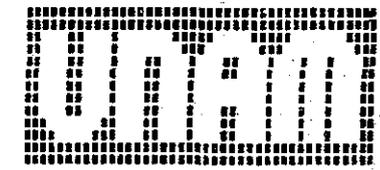
APA NO: , 2,

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

PROFUNDIDAD = 0.000

SEPARACIONES ELECTRODICAS	VALORES DE POTENCIAL		RESISTIVIDAD APARENTE	CONTRIBUCION DE INT.	Z		
*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	
AB/2	MN/2	V					
**	**	***					
1	1.00	0.50	2.210961242056618	10.418909393125251	.825682966477D-02	0.373450	0.0037
2	1.50	0.50	0.836502185598866	10.511796483956815	.104880309519D-01	1.253796	0.0127
3	2.50	0.50	0.286627682941238	10.805609076523894	.112896313923D-01	3.938779	0.0410
4	4.00	0.50	0.113658038636529	11.247618664861200	.876735233216D-02	7.713799	0.0836
5	6.00	0.50	0.051737489974664	11.621475466999956	.552690789650D-02	10.682598	0.1196
6	8.00	0.50	0.029517731883509	11.823417928572829	.360356232596D-02	12.208127	0.1391
7	10.00	0.50	0.019049671277292	11.939338313939172	.248798396607D-02	13.060509	0.1502
8	10.00	5.00	0.250024937531834	11.782147604463864	.297544962925D-01	11.900611	0.1351
9	15.00	0.50	0.008549466606755	12.073094197009807	.119895132625D-02	14.023697	0.1631
10	15.00	5.00	0.095806617554384	12.039414634965633	.132052020897D-01	13.783184	0.1599
11	22.50	2.50	0.019320078764923	12.139163502931345	.279979567199D-02	14.491637	0.1695
12	40.00	5.00	0.012307924499137	12.179942834038925	.181885586870D-02	14.777925	0.1734
13	60.00	5.00	0.005427383041304	12.191198083906007	.806324833492D-03	14.856605	0.1745
14	60.00	10.00	0.011086967766802	12.190757770369694	.164680599941D-02	14.853529	0.1744
15	80.00	5.00	0.003044558233626	12.195071269736270	.453141277849D-03	14.883646	0.1749

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



1	10.38000	1.5000	.806023029229406554D-01
2	12.20000	1.5000	.184219324640588432D+00
3	17.71000	INFINITO	

DAME EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD(M):,0

CAPA NO: , 3,

PROFUNDIDAD = 0.000

SEPARACIONES ELECTRODICAS *****	VALORES DE POTENCIAL *****		RESISTIVIDAD APARENTE *****	CONTRIBUCION DE INT. *****	Z *****		
AB/2 **	MN/2 **	V ***					
1	1.00	0.50	2.213847761463462	10.432511795369734	.288651940688D-02	0.130385	0.0013
2	1.50	0.50	0.840628606995253	10.563650624534832	.412642139640D-02	0.490873	0.0050
3	2.50	0.50	0.292585879831685	11.030227807479913	.595819689044D-02	2.036392	0.0216
4	4.00	0.50	0.120745093667808	11.948954825549587	.708705503126D-02	5.869435	0.0676
5	6.00	0.50	0.058464435074046	13.132507940330367	.672694509941D-02	11.506047	0.1456
6	8.00	0.50	0.035175329683563	14.089586058488876	.565759780005D-02	16.083994	0.2183
7	10.00	0.50	0.023628687015271	14.809226053459205	.457901573798D-02	19.379053	0.2765
8	10.00	5.00	0.297411173765963	14.015171378980023	.473862362344D-01	15.932904	0.2151
9	15.00	0.50	0.011288023287214	15.940335779181839	.273855668045D-02	24.260728	0.3726
10	15.00	5.00	0.124612878788533	15.659316181789261	.288062612342D-01	23.116600	0.3487
11	22.50	2.50	0.026597948047306	16.711983637195672	.727786928240D-02	27.362522	0.4405
12	40.00	5.00	0.017496114723485	17.314184626724304	.518819022433D-02	29.653385	0.4946
13	60.00	5.00	0.007798336627875	17.516925898152727	.237095358657D-02	30.403324	0.5131
14	60.00	10.00	0.015924277102750	17.509657185904789	.483730933595D-02	30.376948	0.5124
15	80.00	5.00	0.004407628977072	17.654892888000253	.136307074345D-02	30.925261	0.5260

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1	10.38000	1.5000	.804023029229406554D-01
2	12.20000	1.5000	.184219324640588432D+00
3	17.71000	13.0000	.512859304084720121D+00
4	55.00000	INFINITO	

DAME EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD(M):,0

CAPA NO: , 4,

PROFUNDIDAD = 0.000

SEPARACIONES ELECTRODICAS *****		VALORES DE POTENCIAL *****		RESISTIVIDAD APARENTE *****	CONTRIBUCION DE INT. *****	Z *****
AB/2 **	MN/2 **	V ***				
1	1.00	0.50	2.213926256589161	10.432881694935088	.784951256739D-04	0.003544
2	1.50	0.50	0.840746157379172	10.565127806225016	.117550383913D-03	0.013982
3	2.50	0.50	0.292780777627551	11.037575281284236	.194897795857D-03	0.066368
4	4.00	0.50	0.121053015497510	11.979426821728863	.307921829715D-03	0.254369
5	6.00	0.50	0.058914667429119	13.233640876456534	.450232355057D-03	0.782212
6	8.00	0.50	0.035755011025000	14.321779195557968	.579681341447D-03	1.628869
7	10.00	0.50	0.024322335733544	15.243968816099724	.693648718286D-03	2.851900
8	10.00	5.00	0.304174579662280	14.333889373136754	.676340589604D-02	2.223528
9	15.00	0.50	0.012191322545014	17.215926120559316	.903299257816D-03	7.409362
10	15.00	5.00	0.133475451089642	16.773019863112123	.886257230104D-02	6.639852
11	22.50	2.50	0.031747399478308	19.947479394326756	.514945143100D-02	16.220073
12	40.00	5.00	0.026505533928055	26.229921060373712	.900941920457D-02	33.990710
13	60.00	5.00	0.014416016893987	32.381815729246870	.661768026609D-02	45.905053
14	60.00	10.00	0.029203231268413	32.110629884875058	.132789541657D-01	45.470839
15	80.00	5.00	0.009257937683915	37.082952994355595	.485030870685D-02	52.390812



1	10.38000	1.5000	.806023029229406554D-01
2	12.20000	1.5000	.184219324640588432D+00
3	17.71000	13.0000	.512859304084720121D+00
4	55.00000	56.0000	-.520807410479745610D+00
5	17.33000	INFINITO	

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

DAME EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD(M):,0

CAPA NO: , 5,

PROFUNDIDAD = 0.000

SEPARACIONES ELECTRODICAS *****		VALORES DE POTENCIAL *****		RESISTIVIDAD APARENTE *****	CONTRIBUCION DE INT. *****	Z *****	
AB/2 **	MN/2 **	V ***					
1	1.00	0.50	2.213924933835705	10.432875461606279	-.132275344327D-05	-0.000060	-0.0000
2	1.50	0.50	0.840744173386836	10.565102874642026	-.198399233299D-05	-0.000236	-0.0000
3	2.50	0.50	0.292777471708370	11.037450651067288	-.330591916044D-05	-0.001129	-0.0000
4	4.00	0.50	0.121047728890233	11.978903658181512	-.528660728394D-05	-0.004367	-0.0001
5	6.00	0.50	0.058906746315432	13.231861605207809	-.792111367709D-05	-0.013447	-0.0002
6	8.00	0.50	0.035744465921914	14.317555322213988	-.105451031037D-04	-0.029501	-0.0004
7	10.00	0.50	0.024309180597643	15.235723864478322	-.131551358934D-04	-0.054116	-0.0008
8	10.00	5.00	0.304043206971451	14.327698580930867	-.131372690750D-03	-0.043209	-0.0006
9	15.00	0.50	0.012171725422808	17.188252124827695	-.195971222016D-04	-0.161005	-0.0027
10	15.00	5.00	0.133279742332139	16.748426375319510	-.195708757479D-03	-0.146841	-0.0024
11	22.50	2.50	0.031602708802304	19.856567561370900	-.144690676016D-03	-0.457843	-0.0088
12	40.00	5.00	0.026020492980928	25.749923721375530	-.485040947117D-03	-1.864073	-0.0462
13	60.00	5.00	0.013757364938871	30.902326186668405	-.658651955083D-03	-4.787632	-0.1425
14	60.00	10.00	0.027889694071220	30.666320301753660	-.131353719718D-02	-4.709758	-0.1391
15	80.00	5.00	0.008485002490090	33.986937397912562	-.772935193822D-03	-9.109428	-0.2983

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



1	10.38000	1.5000	.806023029229406554D-01
2	12.20000	1.5000	.184219324640588432D+00
3	17.71000	13.0000	.512859304084720121D+00
4	55.00000	56.0000	-.520807410479745610D+00
5	17.33000	75.0000	-.142762940982525552D+00
6	13.00000	INFINITO	

DAME EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD(M): 0

CAPA NO: 6

PROFUNDIDAD = 0.000

	SEPARACIONES ELECTRODICAS *****		VALORES DE POTENCIAL *****	RESISTIVIDAD APARENTE *****	CONTRIBUCION DE INT. *****	Z *****	
	AB/2 **	MN/2 **	V ***				
1	1.00	0.50	2.213924897929305	10.432875292401354	-.359063973509D-07	-0.000002	-0.0000
2	1.50	0.50	0.840744119528288	10.565102197835556	-.538585395733D-07	-0.000006	-0.0000
3	2.50	0.50	0.292777381950071	11.037447267259140	-.897583164852D-07	-0.000031	-0.0000
4	4.00	0.50	0.121047585299986	11.978889448466423	-.143590233442D-06	-0.000119	-0.0000
5	6.00	0.50	0.058906531000842	13.231813240410337	-.215314614763D-06	-0.000366	-0.0000
6	8.00	0.50	0.035744178967742	14.317440381841180	-.286954151166D-06	-0.000803	-0.0000
7	10.00	0.50	0.024308822116934	15.235499187506309	-.358480717524D-06	-0.001475	-0.0000
8	10.00	5.00	0.304039623618111	14.327529719382964	-.358335312023D-05	-0.001179	-0.0000
9	15.00	0.50	0.012171188803579	17.187494340185364	-.536619266192D-06	-0.004409	-0.0001
10	15.00	5.00	0.133274378308779	16.747752312264304	-.536402322386D-05	-0.004025	-0.0001
11	22.50	2.50	0.031598703044226	19.854050669341066	-.400575807410D-05	-0.012677	-0.0002
12	40.00	5.00	0.026006505670042	25.736081854941656	-.139873108575D-04	-0.053784	-0.0013
13	60.00	5.00	0.013737046292014	30.856685654804841	-.203186468564D-04	-0.147911	-0.0044
14	60.00	10.00	0.027849102316915	30.621687336761954	-.405917542949D-04	-0.145756	-0.0043
15	80.00	5.00	0.008459076122183	33.883088537047828	-.259263679259D-04	-0.306492	-0.0100

1	10.38000	1.5000	.806023029229406554B-01
2	12.20000	1.5000	.184219324640588432B+00
3	17.71000	13.0000	.512859304084720121B+00
4	55.00000	56.0000	-.520807410479745610B+00
5	17.33000	75.0000	-.142762940982525552B+00
6	13.00000	348.0000	-.268292682926829268B+00
7	7.50000	INFINITO	

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

DAME EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD(M):,0

CAPA NO: , 7,

PROFUNDIDAD = 0.000

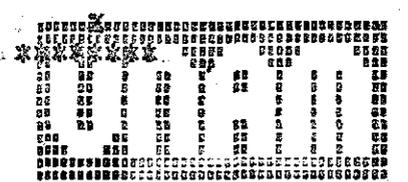
SEPARACIONES ELECTRODICAS

VALORES DE POTENCIAL

RESISTIVIDAD APARENTE

CONTRIBUCION DE INT.

	AB/2 **	MN/2 **	V ***				
1	1.00	0.50	2.213924896475957	10.432875285552617	-.145335071289D-08	-0.000000	-0.0000
2	1.50	0.50	0.840744117348292	10.565102170440918	-.218000259260D-08	-0.000000	-0.0000
3	2.50	0.50	0.292777378316728	11.037447130285362	-.363335330549D-08	-0.000001	-0.0000
4	4.00	0.50	0.121047579486741	11.978888873186707	-.581326199115D-08	-0.000005	-0.0000
5	6.00	0.50	0.058906522281326	13.231811281798995	-.971949388224D-08	-0.000015	-0.0000
6	8.00	0.50	0.035744167342285	14.317435725228663	-.116254910059D-07	-0.000033	-0.0000
7	10.00	0.50	0.024308807586051	15.235490080307931	-.145308777345D-07	-0.000060	-0.0000
8	10.00	5.00	0.304039478315940	14.327522872179477	-.145302203860D-06	-0.000048	-0.0000
9	15.00	0.50	0.012171167012111	17.187463567452553	-.217914334411D-07	-0.000179	-0.0000
10	15.00	5.00	0.133274160403574	16.747724929488577	-.217905413252D-06	-0.000164	-0.0000
11	22.50	2.50	0.031598539691668	19.853948031901793	-.163352572739D-06	-0.000517	-0.0000
12	40.00	5.00	0.026005926006399	25.735508218823480	-.579663670696D-06	-0.002229	-0.0001
13	60.00	5.00	0.013736179870421	30.854739465051029	-.866421603317D-06	-0.006308	-0.0002
14	60.00	10.00	0.027847369702070	30.619782227238212	-.173261487192D-05	-0.006222	-0.0002
15	80.00	5.00	0.008457926589061	33.878484046915643	-.114953312957D-05	-0.013591	-0.0004



CAPITULO III

Resultados y Conclusiones

En este último capítulo, como primera parte se expondrán en forma gráfica los resultados obtenidos de las contribuciones totales y porcentuales de las interfaces al potencial total calculado en superficie, para modelos de 2 y 3 capas horizontales, homogéneas e isótropas. Así también, las gráficas de las contribuciones normalizadas de las interfaces a la resistividad aparente.

Posteriormente, también en forma gráfica se expondrán las profundidades máximas de detección de interfaces para modelos de 2 y 3 capas, ésto es, las Profundidades de Investigación para arreglos electródicos tipo Schlumberger. Y como parte final se dan las conclusiones de todo el trabajo.

III.1 Curvas de Contribución de Interfaces al Potencial

Los resultados que se exponen en esta sección, fueron obtenidos de la manera siguiente:

- a) Para un modelo dado, se encontraron las contribuciones de las interfaces al potencial total calculado en superficie para un dispositivo tipo Schlumberger, utilizando diferentes separaciones electródicas de acuerdo a lo expuesto en la Sección II.2. Para calcular las contribuciones a la diferencia de potencial, los valores que se dan deben multiplicarse por 2, debido a la simetría de los arreglos Schlumberger.
- b) Para obtener las contribuciones porcentuales de las interfaces al potencial, se dividieron éstas por el potencial total calculado en superficie.
- c) Para encontrar las contribuciones normalizadas de las interfaces a la resistividad aparente se utiliza la fórmula para resistividad aparente (Koefoed, O., 1972).

$$P_a = P_i \left[1 + FG \int_{0^+}^{\infty} 2k_1''(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \right]$$

donde:

FG: factor geométrico

y

$$FG = \frac{\pi}{I} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{Ver figura II.17})$$

entonces:

$$\frac{P_a}{P_i} - 1 = FG \int_{0^+}^{\infty} 2k_1''(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda$$

Donde $P_a/P_i - 1$ es la contribución normalizada.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

73

$\rho_1 = 20$

$f = 0.5 \text{ m}$

$R = 0.4285$

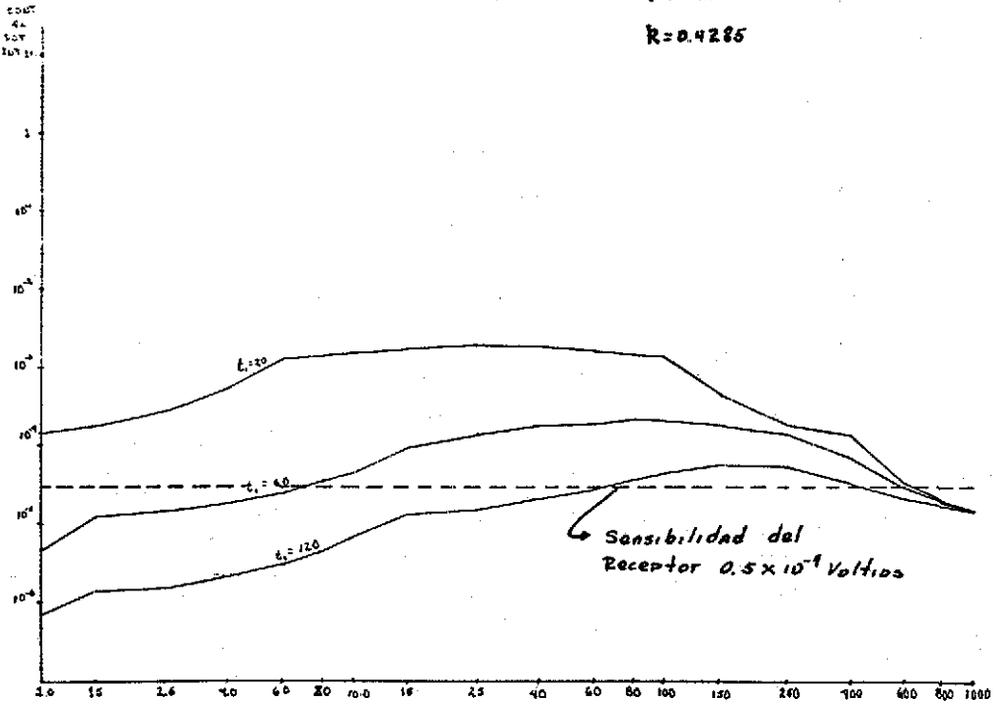


Fig. III. 1 Gráficas de Contribución al potencial de la interface entre 1ª y 2ª capa, de un modelo de dos capas.
 ρ_1 : Resistividad de 1ª capa en Ω/m
 ρ_2 : Resistividad de 2ª capa en Ω/m
 R : Coeficiente de reflexión
 AB : Separación de electrodos de Corriente
 t_1 : Espesor de la 1ª capa.
 Esta Notación se usará en las Figs. III. 1 a la III. 15
 z : Separación electrodos de potencial entre 2]

74

$R=200$

$P=80$

$l=0.5 \text{ m}$

$k=0.4285$

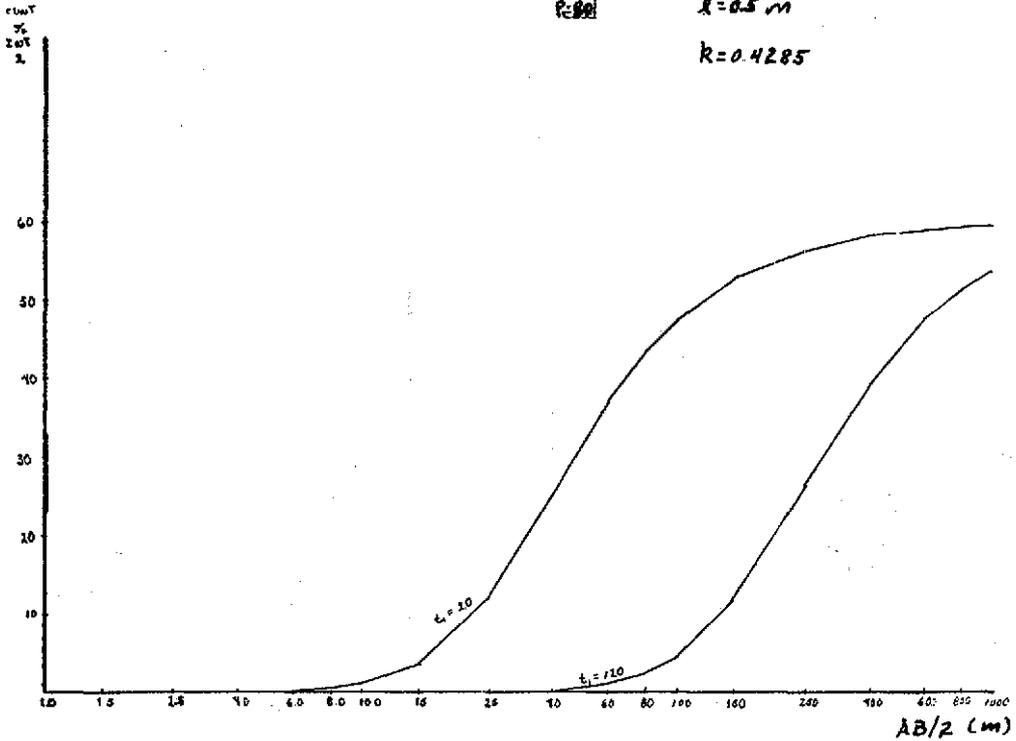


Fig. III.2. Gráficas de contribución porcentual al potencial de la Interface entre 1ª y 2ª capa de un modelo de dos capas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

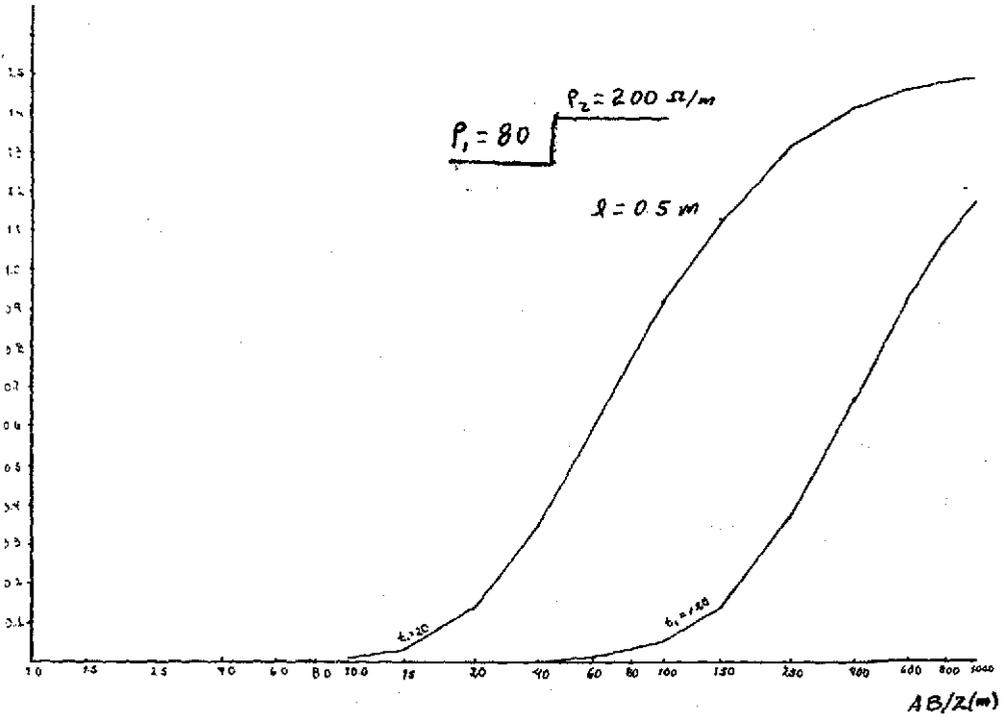


Fig. III.3 Gráficas de contribución normalizada a la resistividad. Debido a la interface entre 1^a y 2^a capa de un modelo de dos capas.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

77

$$E = 140 \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 200 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

1200 k-cm

$$\rho_1 = 120 \Omega/m$$

$$\rho_2 = 200 \Omega/m$$

$$a = 0.5 m$$

$$R = 0.25$$

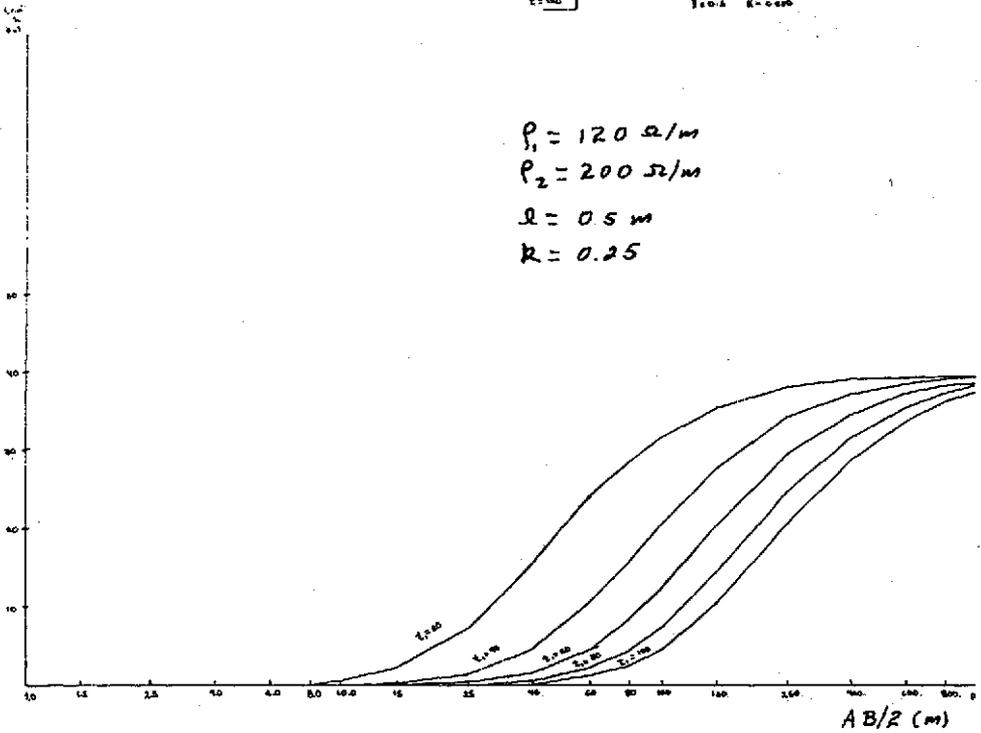


FIG. III.5. Gráficas de contribución porcentual al potencial de la interfaz entre 1ª y 2ª capa de un modelo de dos capas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

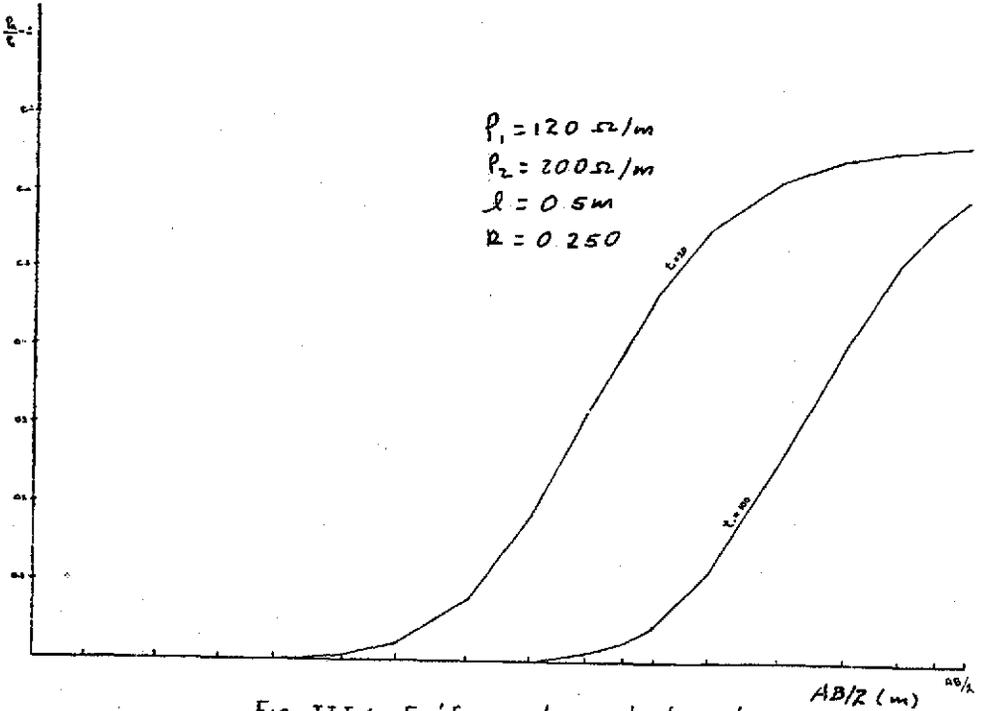


FIG. III.6. Gráficas de contribución
 normalizada a la resistividad.
 Debido a la interface entre
 1ª y 2ª CAPA de un modelo
 de dos CAPAS.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$\tau_1 = 100 \text{ kg/m}$
 $\tau_2 = 80 \text{ kg/m}$ $l = 0.5 \text{ m}$ $R = -0.4285714$

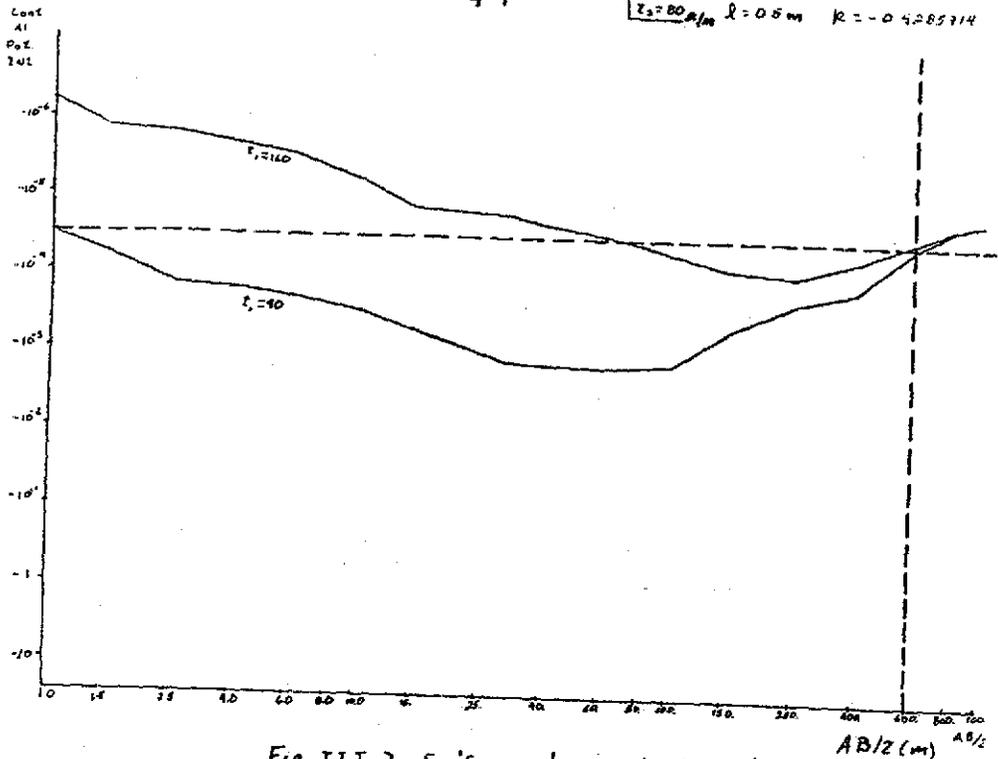


Fig. III.7. Gráficas de contribución al potencial debido a la interface entre 1s y 2s capa de un modelo de dos capas.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

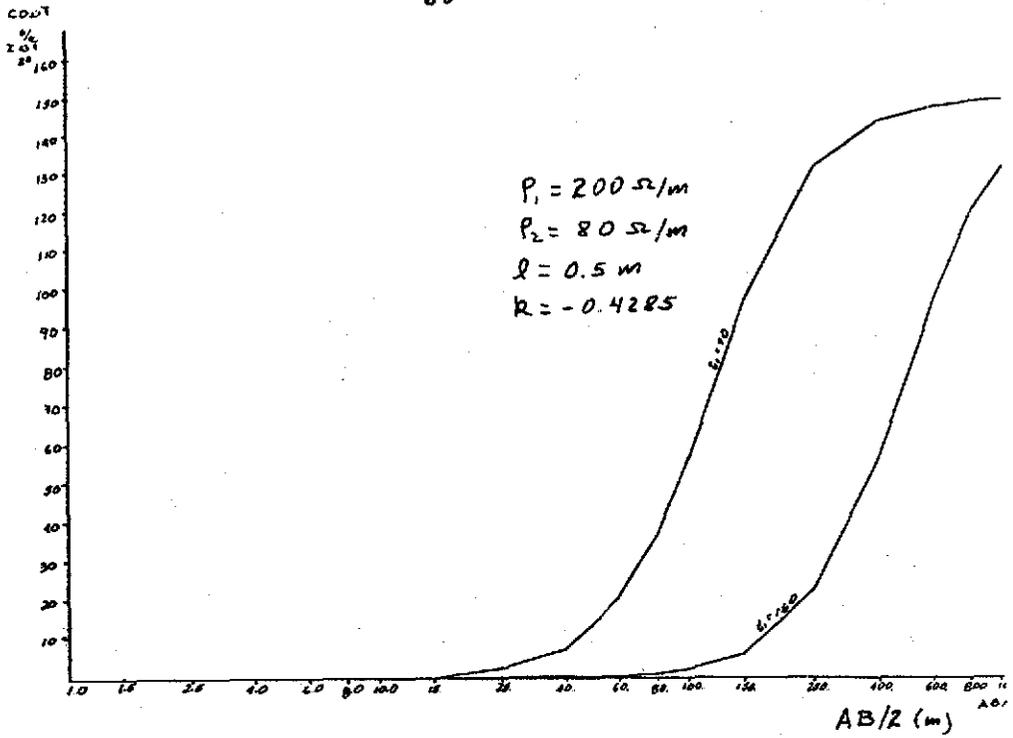


FIG. III. 8. Gráficas de contribución
 porcentual al potencial
 de la interface entre
 1^a y 2^a CAPA de un modelo
 de dos CAPAS.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

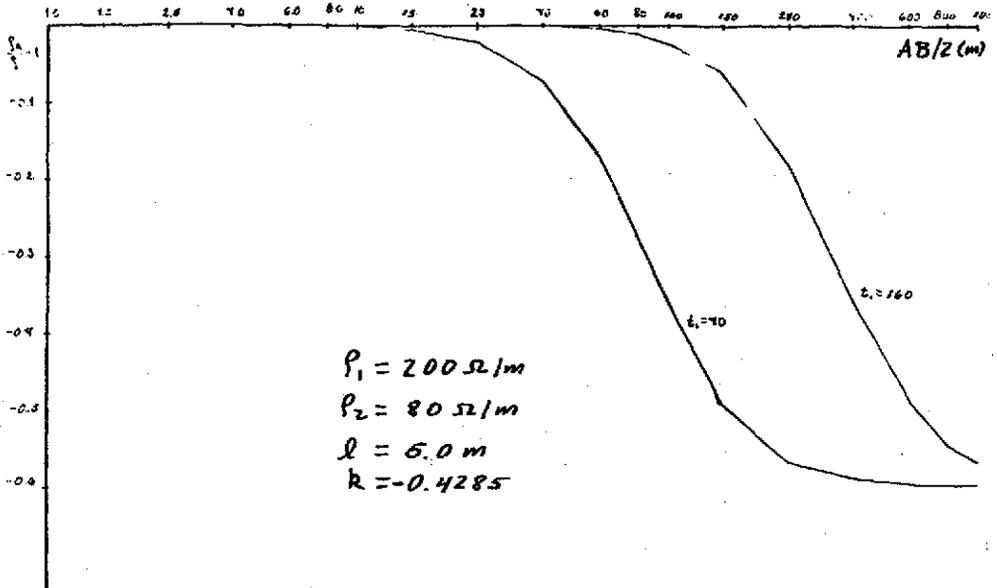


Fig. III.9. Gráficas de Contribución normalizada a la resistividad. Debido a la interface entre l_1 y l_2 CAPA de un modelo de dos CAPAS.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

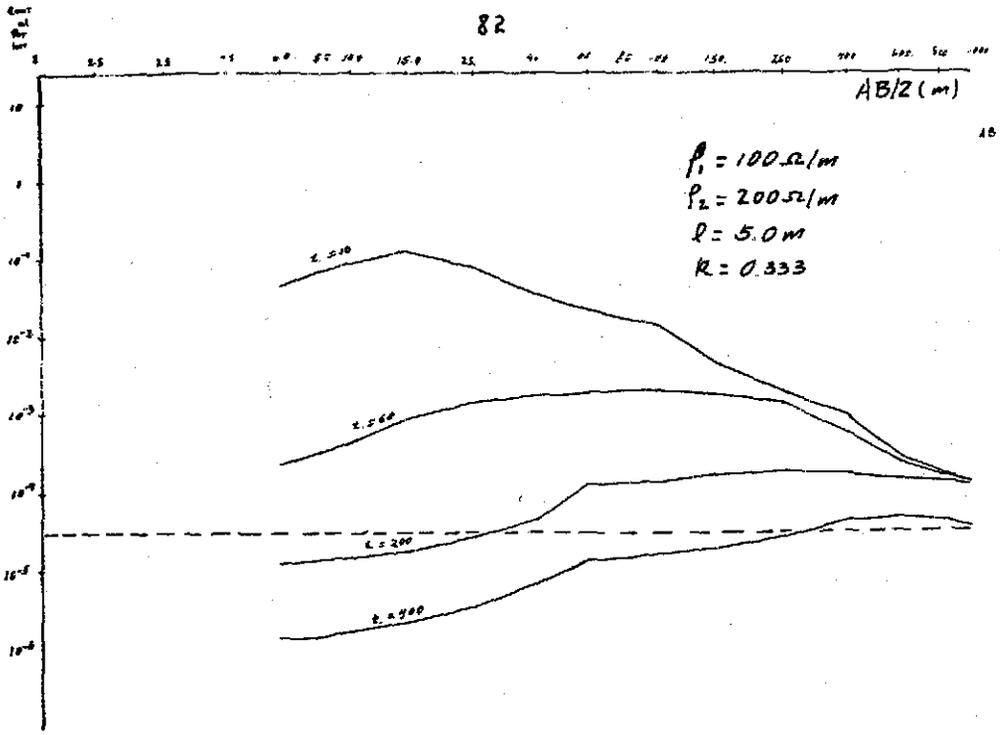


FIG. III. 10. Gráficas de contribución al potencial debido a la Interface entre la y 2a capa de un modelo de dos capas.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

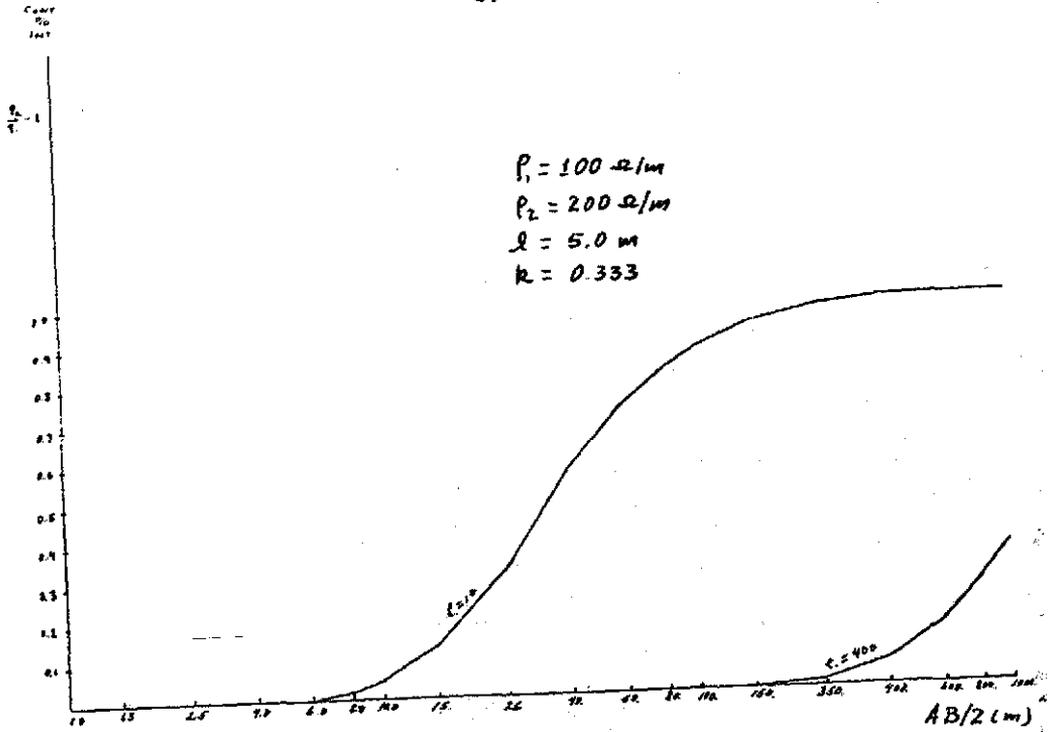


Fig. III.11. Gráficas de contribución
 porcentual al potencial
 de la interface entre
 1ª y 2ª CAPA de un modelo
 de dos CAPAS.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

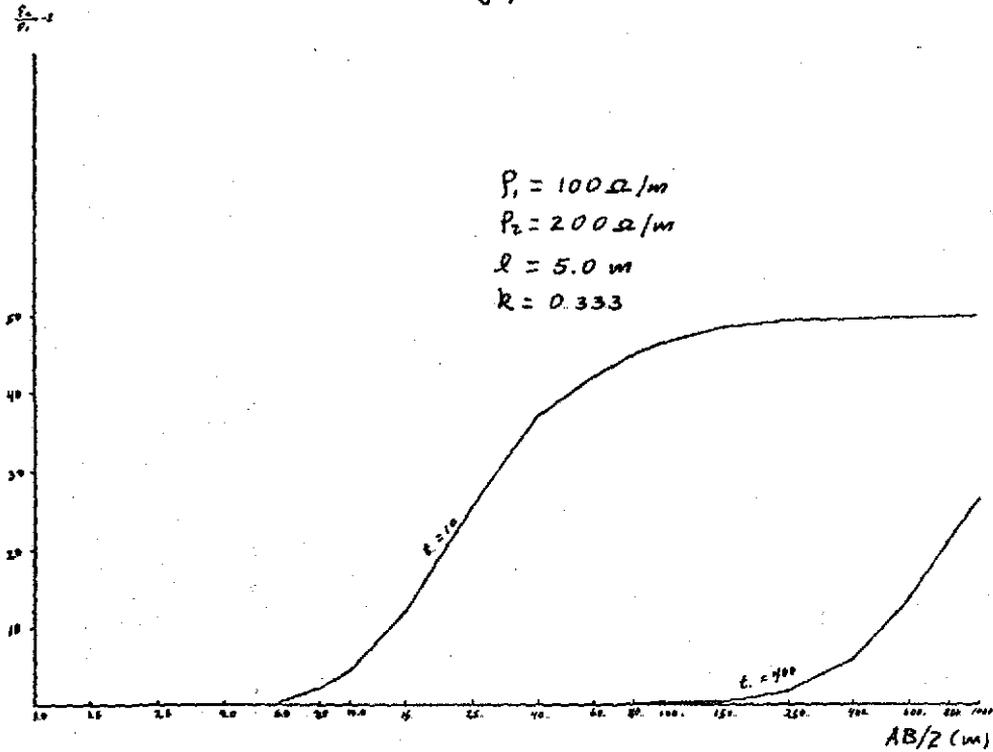


Fig. III. 12. Gráficas de contribución normalizada a la resistividad. Debido a la interface entre 1^a y 2^a capa de un modelo de dos capas.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

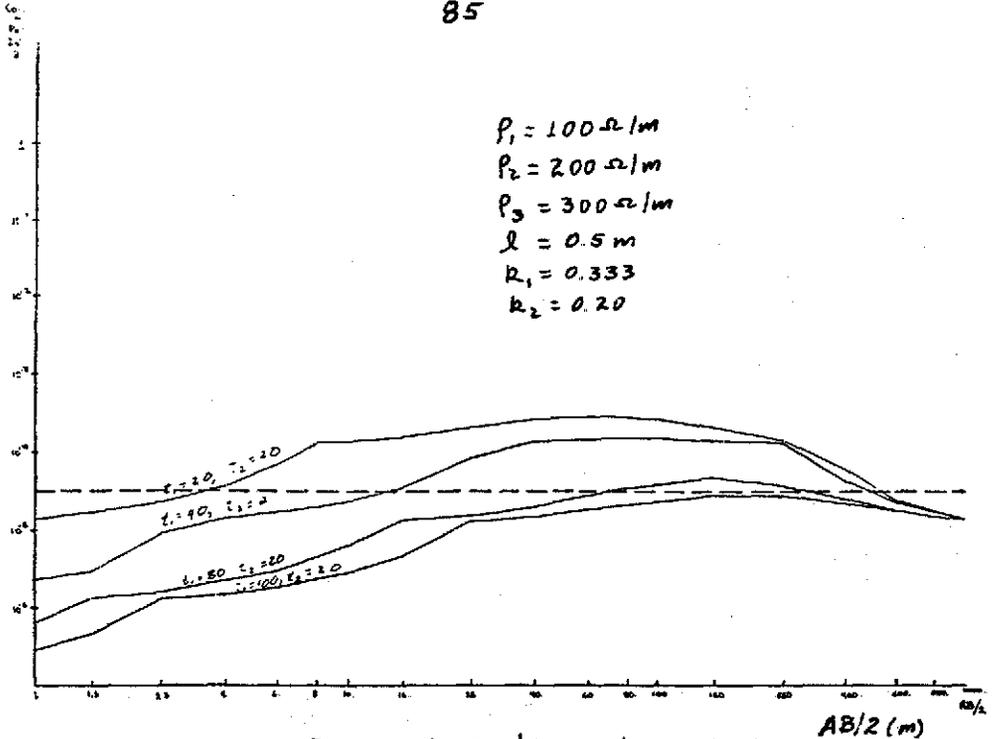


FIG. III. 13 Gráficas de contribución
 al potencial debido a la
 interface entre z_2 y z_3
 capa de un modelo de
 tres capas.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

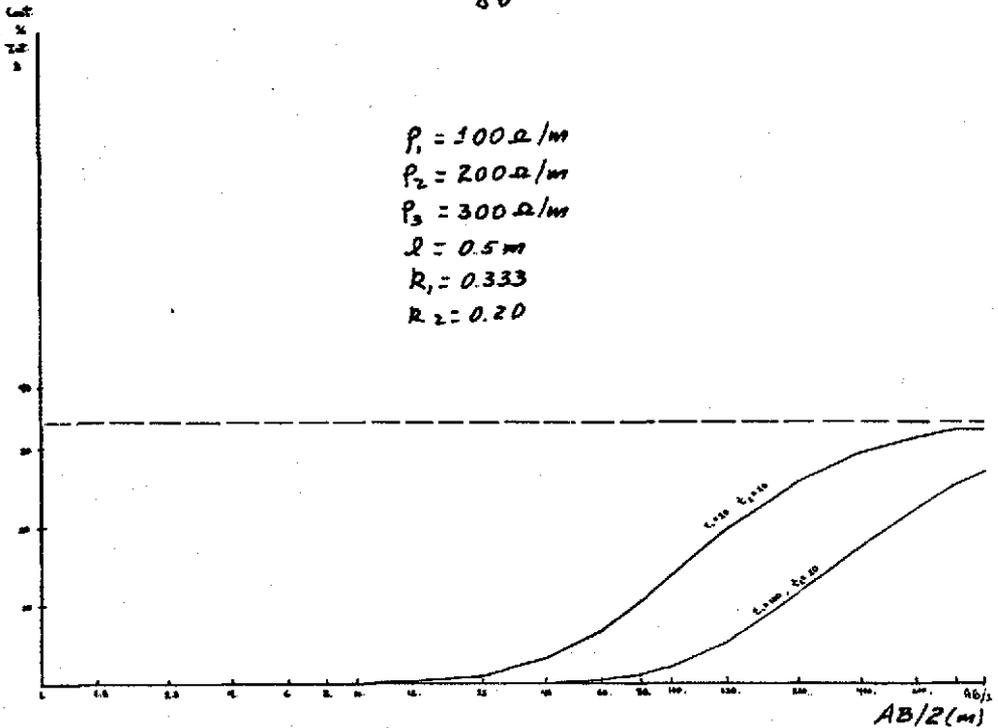


Fig. III.14 Gráficas de contribución porcentual al potencial de la interface entre 1^a y 2^a capa de un modelo de tres capas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

86a

$$\begin{aligned}P_1 &= 100 \text{ } \Omega/\text{m} \\P_2 &= 200 \text{ } \Omega/\text{m} \\P_3 &= 300 \text{ } \Omega/\text{m} \\l &= 0.5 \text{ m} \\R_1 &= 0.333 \\R_2 &= 0.20\end{aligned}$$

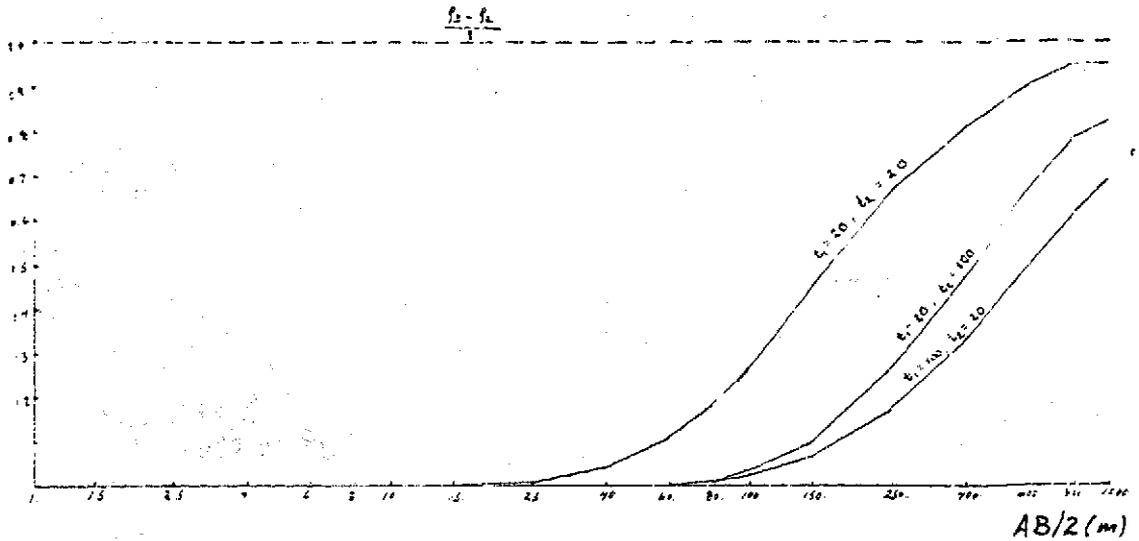


Fig. III.15 Gráficas de contribución normalizada a la resistividad. Debido a la interfase entre $2.373 \pm$ capa de un modelo de tres capas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Como puede observarse, tanto las curvas de contribución total, porcentual y las de contribución normalizada a la resistividad de las interfaces para modelos de dos y tres capas tienen el mismo comportamiento. Es decir que las curvas antes mencionadas, correspondientes a la interface entre la primera y segunda capa son similares a las de la interface de segunda y tercera capa. Por otra parte también debe observarse que en la curva de contribución de interfaces al potencial para una separación fija MN de electrodos de potencial contra separaciones AB/2 de electrodos de corriente, para un modelo dado, existe un AB/2 donde la curva alcanza un máximo. En cambio las curvas de contribución porcentual se hacen asintótica a $(1 - \rho_2/\rho_1) \times 100$ para caso de dos

capas y a $(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}) \times 100$ para la segunda interface en el caso de tres capas. Y las contribuciones normalizadas a la resistividad aparente a $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ para caso de dos capas y a $(\rho_3 - \rho_2)/\rho_1$, para la segunda interface en el caso de tres capas.

III.2 Curvas de Profundidad de Investigación

Para encontrar las profundidades de investigación y que a continuación se exponen en forma gráfica para los Modelos propuestos se siguió el método de la Sección II. 3.3. Esto es, para una separación electródica dada, se hizo lo siguiente:

- a) para modelos de dos capas, se varió el espesor de la primera, hasta un espesor tal que la contribución de la interface está en el límite del umbral de sensibilidad del detector. Para todos los casos se utilizó una sensibilidad de 10 V, correspondiente a la de un receptor Hunttec M4.
- b) Para modelos de tres capas, primero se mantuvo fijo el espesor de la segunda y se varió el espesor de la primera hasta un espesor tal que la contribución de la interface entre la segunda y tercera capa está en el umbral de sensibilidad del detector. Luego se repitió el proceso pero manteniendo fijo el espesor de la primera capa y variando el espesor de la segunda.
- c) Las Profundidades de Investigación calculadas para un modelo dado se grafican contra las separaciones AB/2 de electrodos de corriente.

$k = 270 \text{ m/a}$
 $k = 200 \text{ m/a}$
 $k_0 = 0.1489$
 $f = 0.5 \text{ m}$

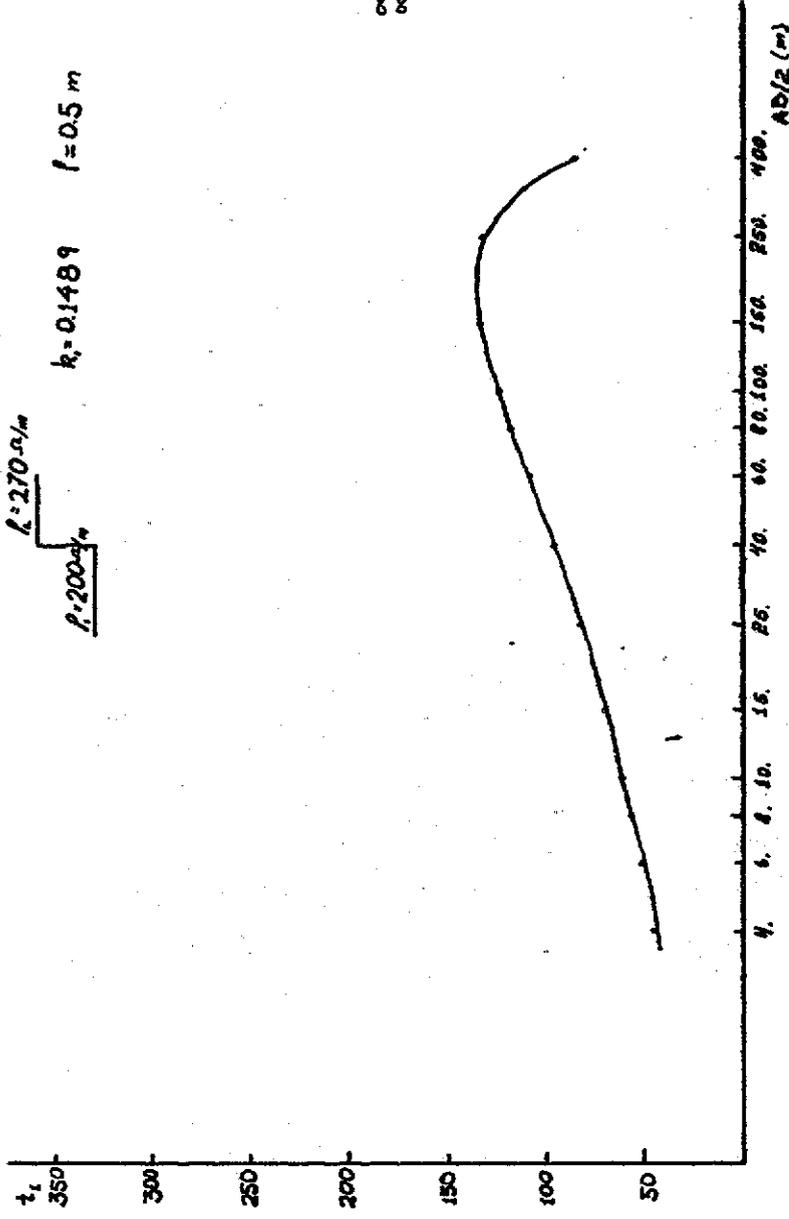
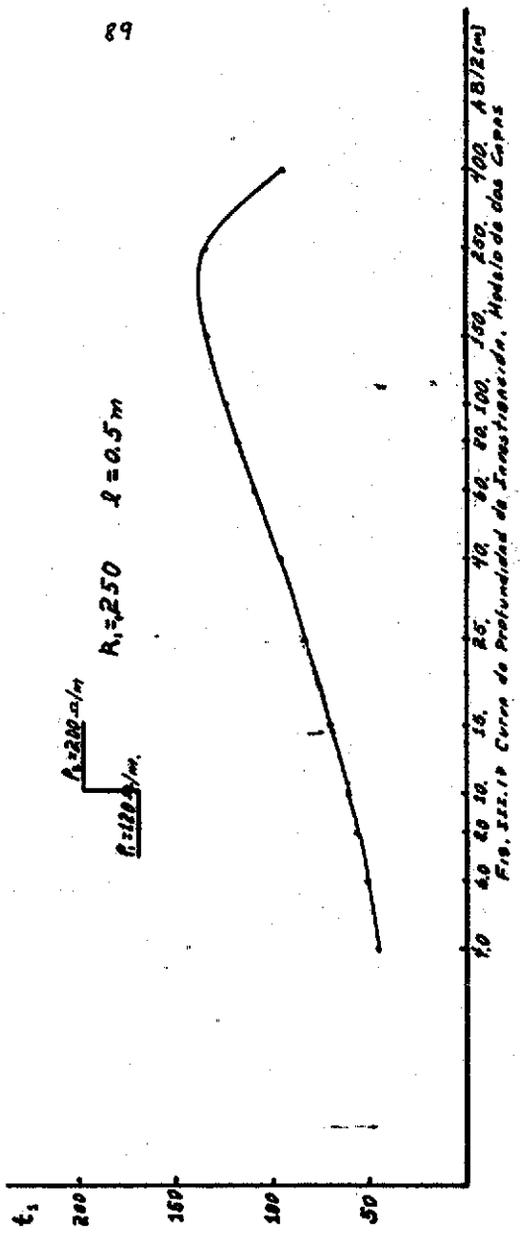


Fig. 211.10 Curva de profundidad de Inyección para un modelo de dos capas.



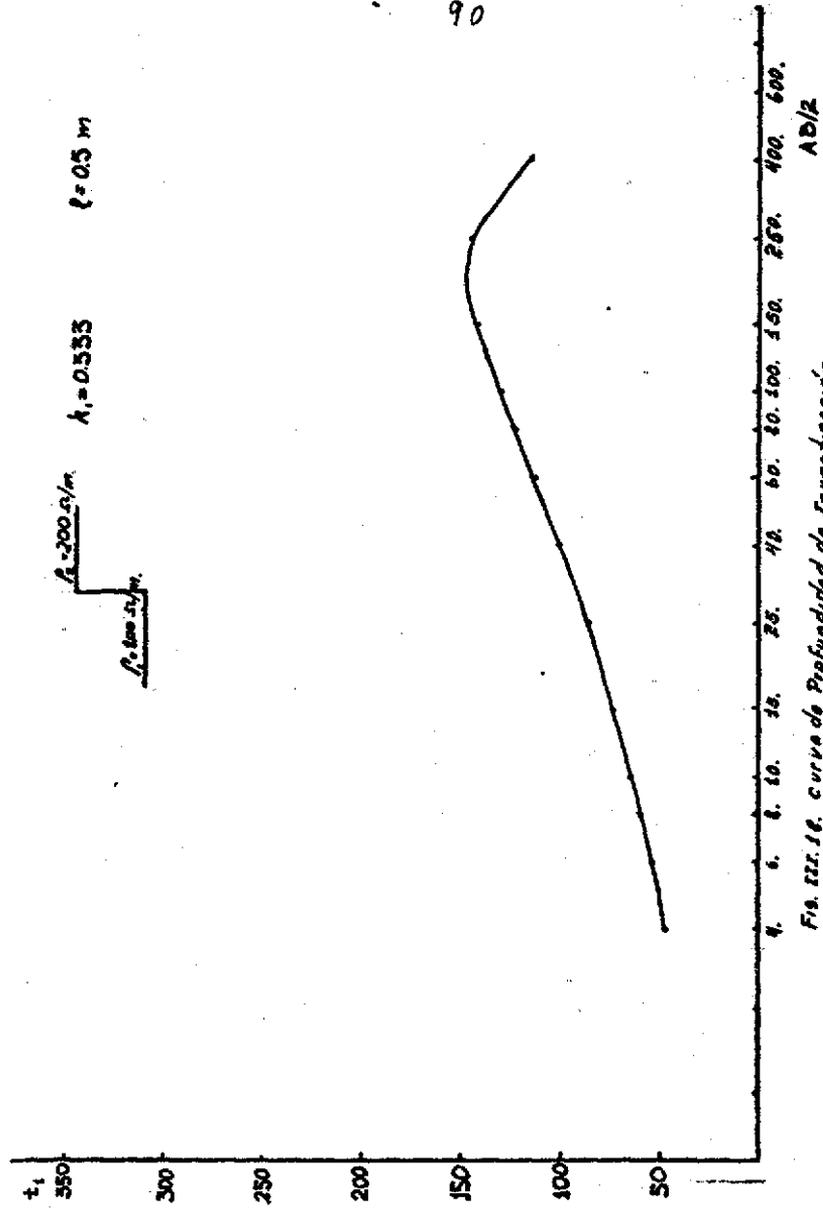


Fig. 122.16. Curva de Profundidad de Investigación en un modelo de dos capas.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

91

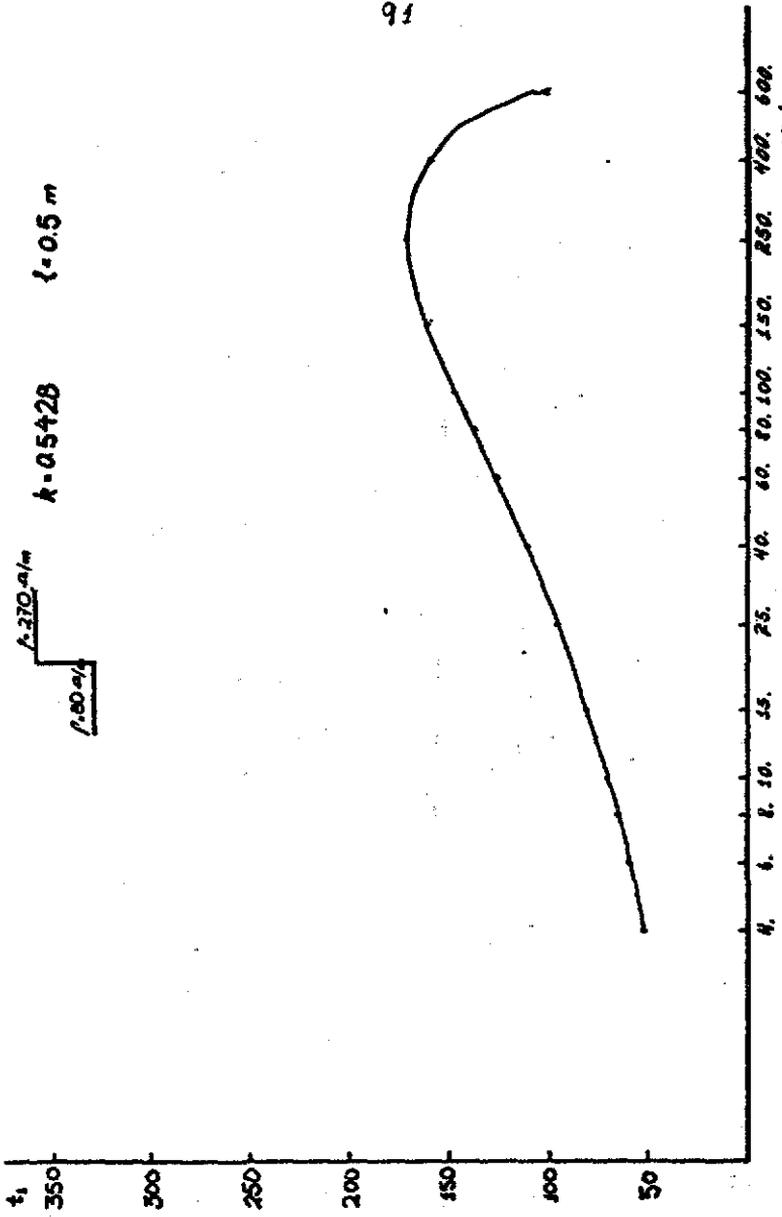


Fig. 222.19. Curva de Profundidad de Investigación en un modelo de dos capas.

92

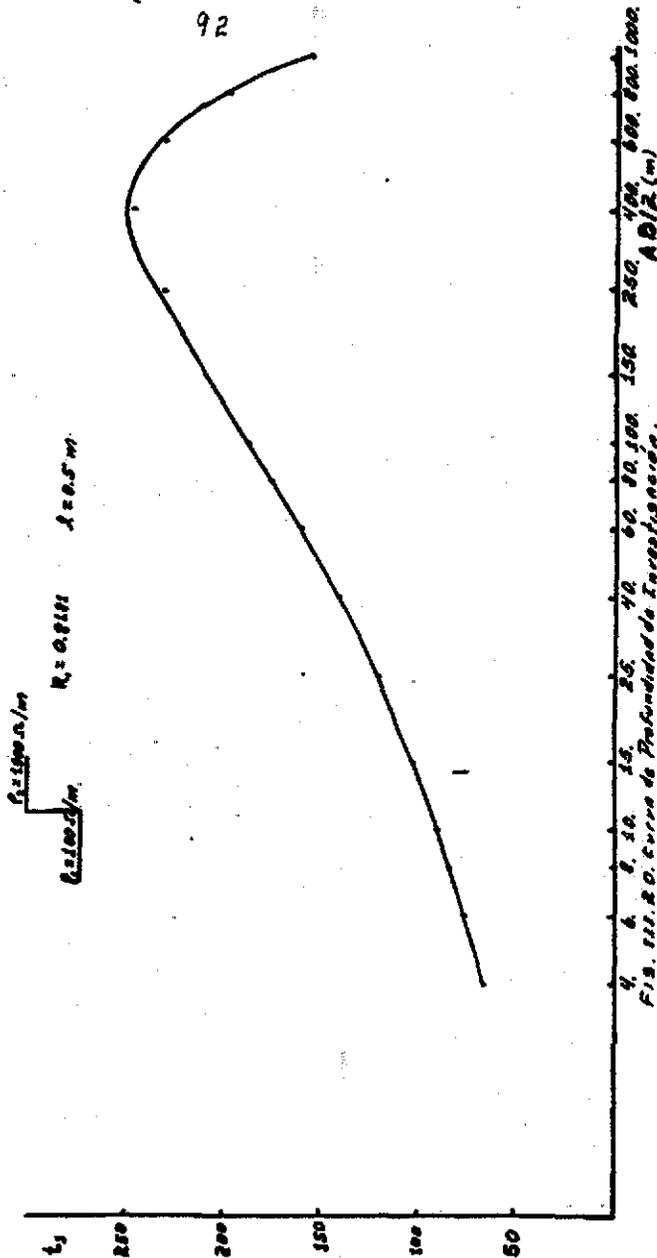
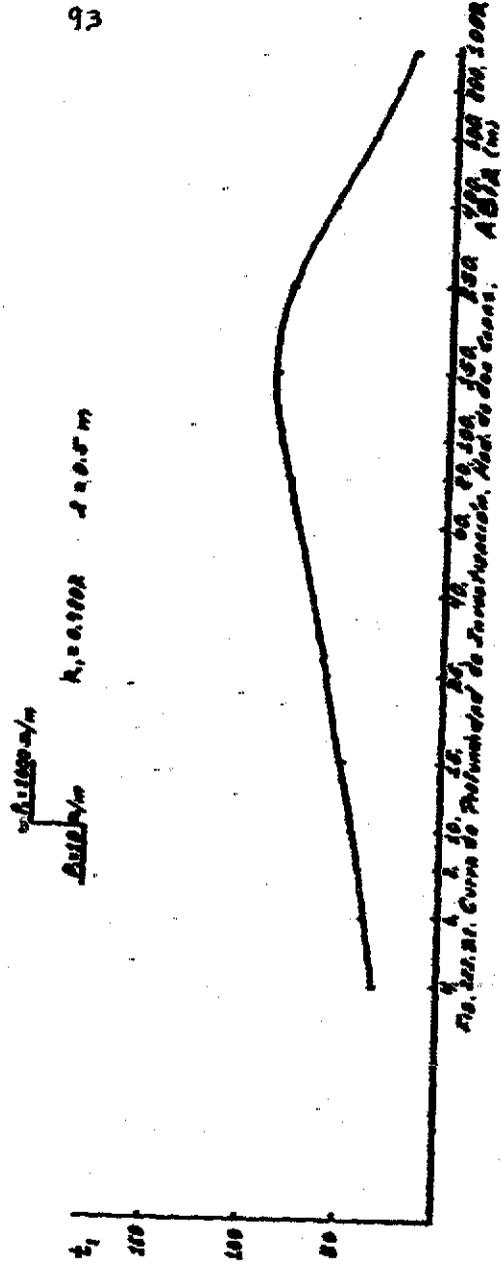


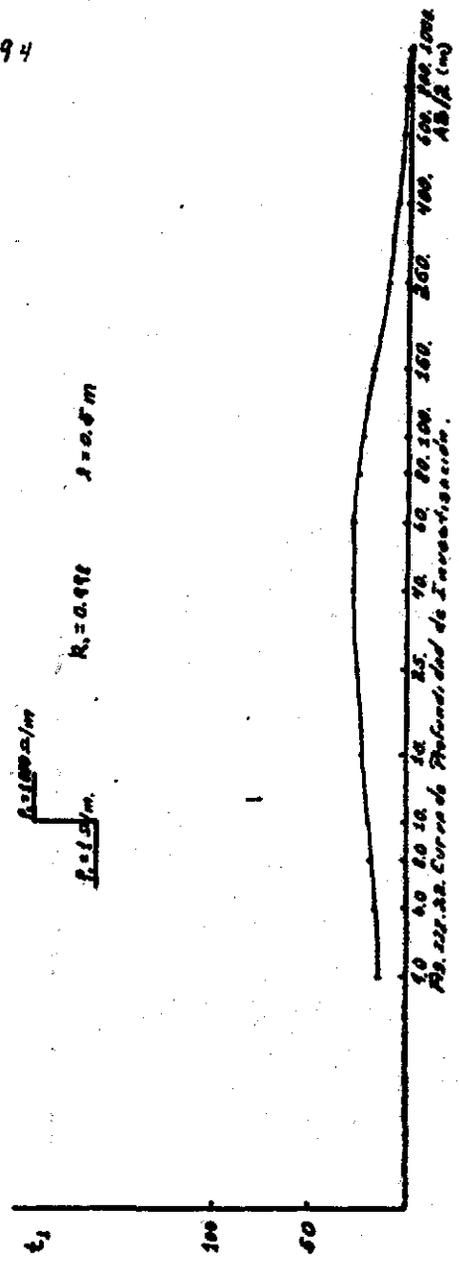
Fig. 111. A D. curva de Profundidad de Torsion.



4 4 4 10 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 380 400 420 440 460 480 500 520 540 560 580 600

110. Gen. Ar. Curso de Probabilidad de Ingeniería. Facultad de Ingeniería, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

94



TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

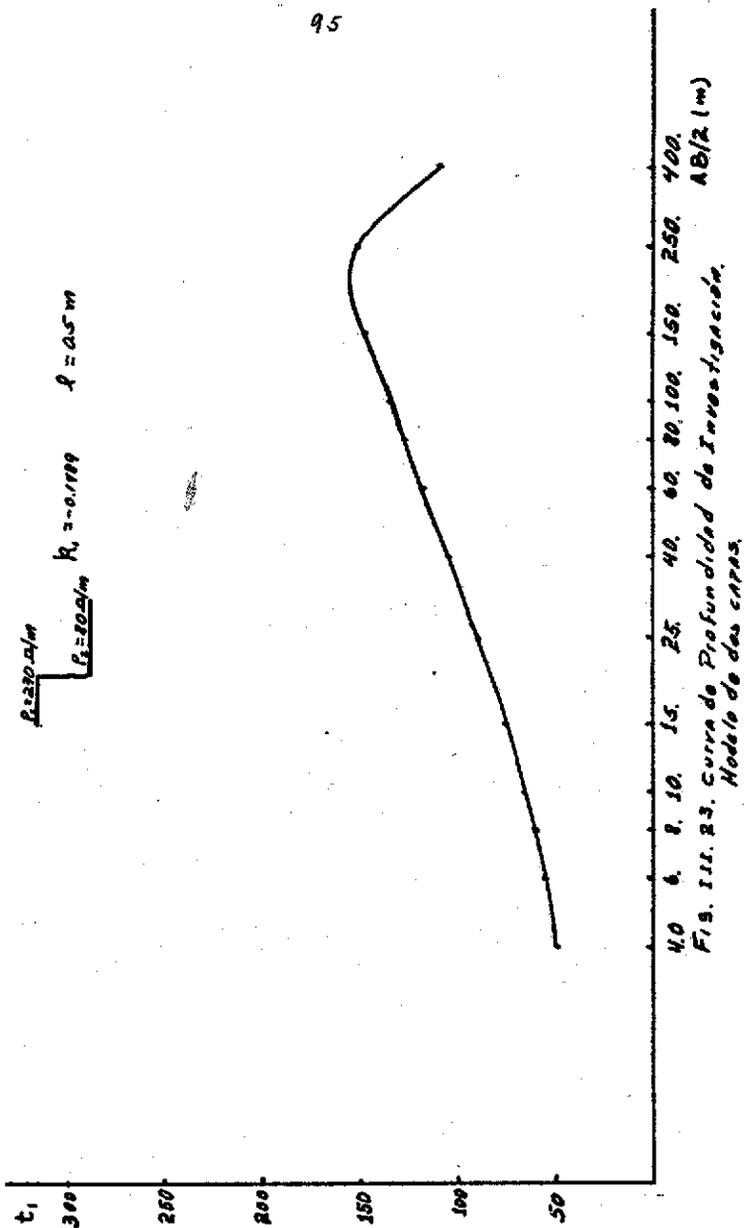
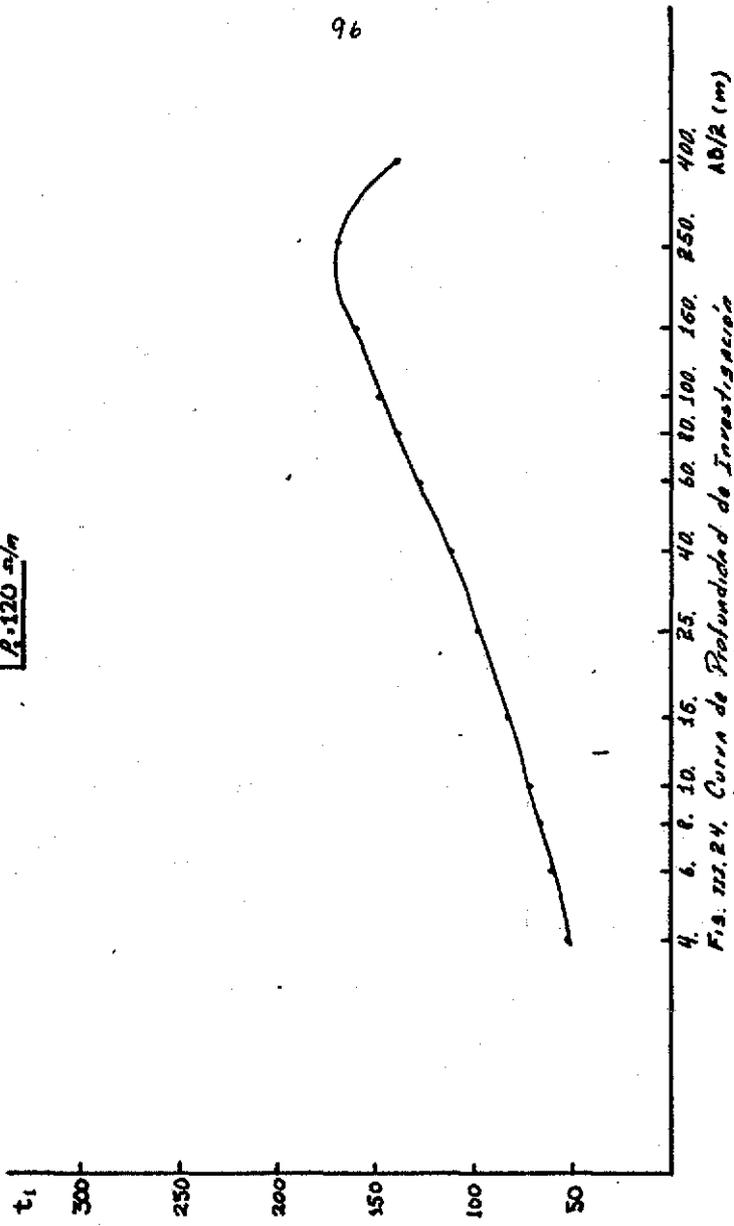


Fig. 111. 23. Curva de Profundidad de Investigación. Modelo de dos capas.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

$\rho = 200 \text{ kg/m}^3$ $k_r = 0.25$ $r = 0.5 \text{ m}$
 $\rho = 120 \text{ kg/m}^3$



4. 6. 8. 10. 15. 25. 40. 60. 80. 100. 150. 250. 400.
 AD/R (m)
 Fig. 11.24. Curva de Profundidad de Investigación en un modelo de dos capas.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

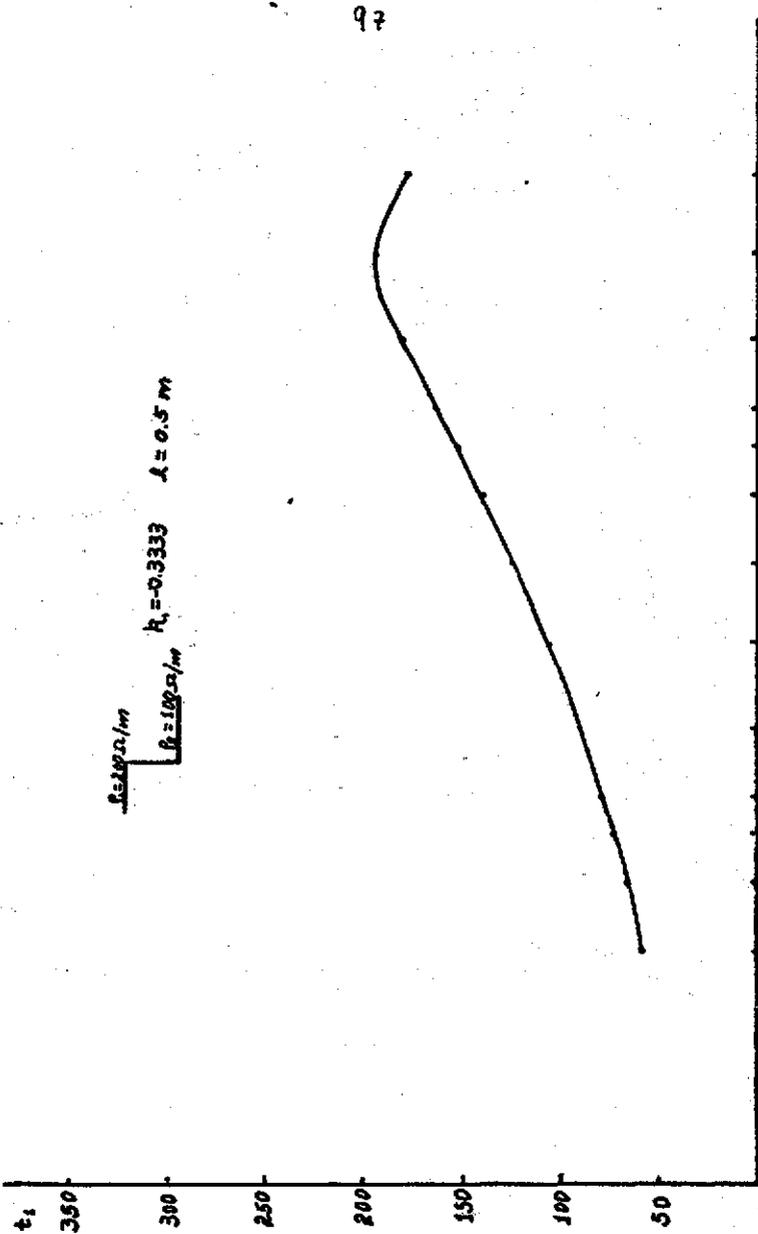


Fig. 212. 25. Curva de Profundidad de Inmersión.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
 $k_1 = 0.5428$
 $\rho = 0.5 \text{ m}$
 $k_2 = 80 \text{ g/m}$

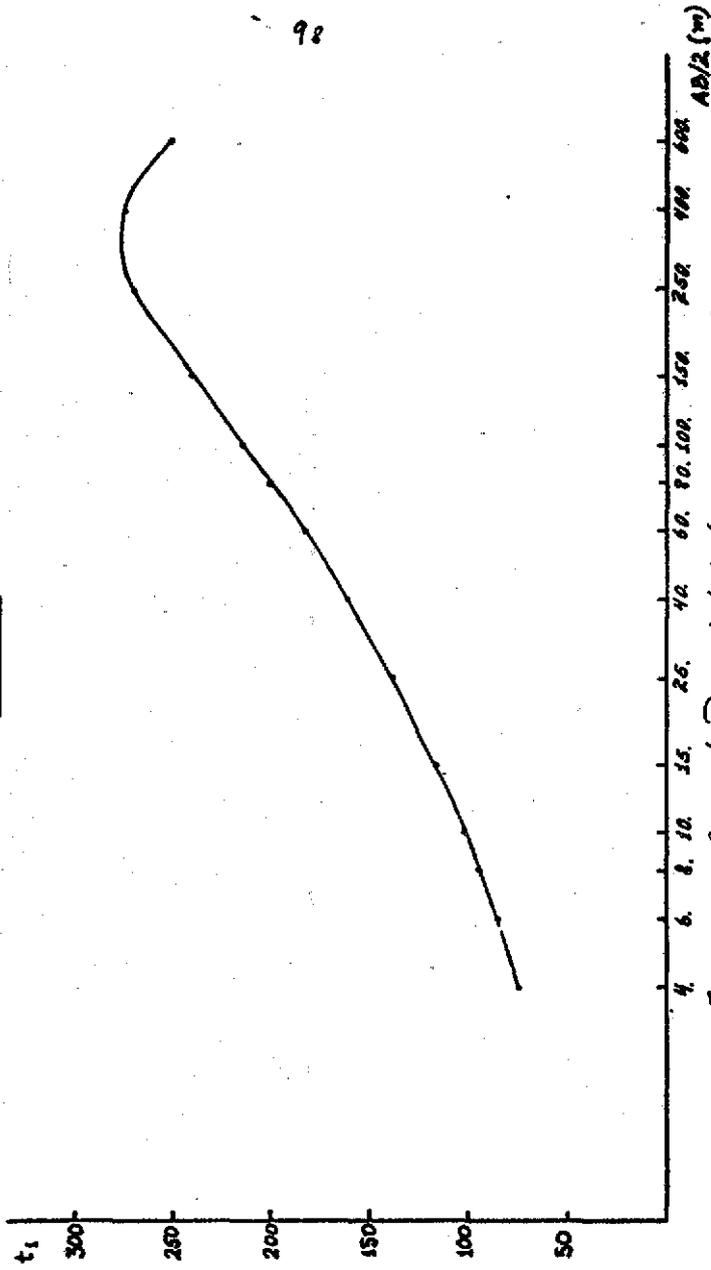


Fig. III.26. Curva de Profundidad de Investigacion en un modelo de dos capas.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

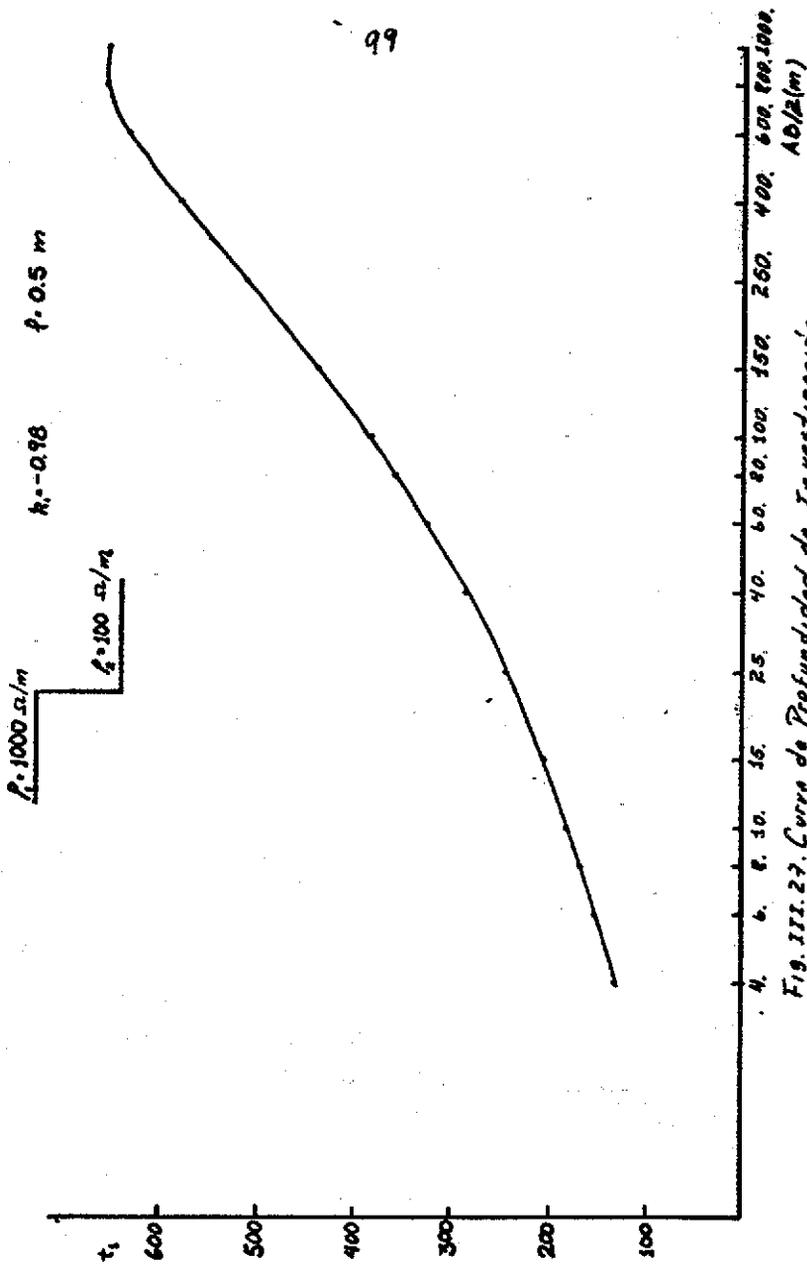


Fig. 33.27. Curva de Profundidad de Investigación en un modelo de dos capas.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Conclusiones

Mediante el estudio de la función Kernel $K(\lambda)$ y en base a las analogías matemáticas existentes entre: a) los valores característicos λ (caso eléctrico*) con la frecuencia (métodos electro magnéticos y sísmica de reflexión); b) la función generadora $L(\lambda)$ (caso eléctrico) con la razón de amplitudes de las ondas que viajan hacia arriba a las ondas que viajan hacia abajo, en una interface (caso sísmico de reflexión). Fue posible dar una interpretación de reflectancia a la función Generadora $L(\lambda)$ y a la función Kernel $K(\lambda)$ como la relación de reflectancia a transmitancia. Haciendo uso de lo anterior, se estableció una correspondencia entre los valores característicos λ con la profundidad y a su vez con las separaciones electródicas. Siendo éstas:

- a) relaciones AB/MN grandes corresponden valores pequeños de λ , donde AB es la separación de electrodos de corriente y MN es la separación de de electrodos de potencial.
- b) valores pequeños de λ proporcionan información de interface que se encuentran a mayor profundidad.

Haciendo uso del principio de superposición fue posible desarrollar un método para determinar las contribuciones individuales de interfaces al potencial total en superficie (Sección II.2). Lo cual, al tomar en consideración la sensibilidad del detector utilizado, dió lugar a definir "Profundidad de Investigación" de la forma siguiente:

En un Sondeo Eléctrico para un modelo de N capas horizontales homogéneas e isotrópicas, la Profundidad de Investigación será aquella a la cual se encuentra la última interface cuya contribución al potencial en superficie pueda ser detectado por el receptor utilizado.

A partir de la definición de Profundidad de Investigación se establece un método para su determinación, en modelos de N capas.

Del análisis que se hace de las contribuciones de las interfaces al potencial en superficie, se encuentra que un arreglo Schlumberger a medida que la separación AB de electrodos de corriente vaya siendo mayor que la separación MN de electrodos de potencial, la contribución porcentual de las interfaces que están más profundas se hace mayor. Pero, cuando la relación AB/MN

* Para referirse al caso de prospección geoelectrica mediante corriente continua se usará la frase "caso eléctrico".

crece, la lectura de potencial va disminuyendo, llegando a tal grado que el potencial es menor que la sensibilidad del aparato. Del estudio realizado, se concluye que es posible tener un incremento en el potencial cuando se utiliza un MN mayor pero ésto produce una disminución porcentual en las contribuciones de las interfaces que se encuentran a mayor profundidad.

Por otra parte, se encontró que un arreglo tipo Wenner aún cuando produce mayor lectura de potencial su resolución para interfaces que se encuentran a mayor profundidad es muy baja. Por lo que es recomendable utilizar arreglos Schulumberger.

El método expuesto en el presente trabajo para la detección de interfaces es aplicable para cualquier arreglo eléctrico coplanar. Así también, el método de integración numérico para las ecuaciones de distribución de potencial es aplicable para cualquier tipo de modelo de capas horizontales, homogéneas e isó tropas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

APENDICE A

Obtención de Coeficientes

La ecuación de diferencia de potencial en superficie contiene el término integral:

$$\int_{0^+}^{\infty} K_1(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \quad (A1)$$

donde,

$K_1(\lambda)$: Función Kernel

$J_0(\lambda r)$: Función Bessel de primera clase y de orden cero

r_1, r_2 : Separaciones electródicas

λ : Valor característico

Dado, que tanto la función Kernel como la diferencia de funciones Bessel tienden a cero para valores grandes de lambdas s tiene entonces que la integral 1 converge.

Por lo tanto:

$$\int_{0^+}^{\infty} K_1(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda = \lim_{\lambda' \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\lambda'} K_1(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda = Q$$

donde,

$$|Q| < \infty$$

Entonces, para toda $\epsilon > 0$, $\exists \lambda_m > 0$, tal que $\forall \lambda' > \lambda_m$ cumple

$$\left| \int_{0^+}^{\infty} K_1(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda - \int_{0^+}^{\lambda'} K_1(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \right| < \epsilon$$

para λ_m suficientemente grande $\exists \lambda_n > \lambda_m$, tal que

$$\int_{0^+}^{\infty} K_1(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \approx \int_{0^+}^{\lambda_n} K_1(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda$$

Efectuando una partición del intervalo $[0, \lambda_n]$

$$[0, \lambda_n] = [0, \lambda_1], [\lambda_1, \lambda_2], [\lambda_2, \lambda_3], \dots, [\lambda_{n-1}, \lambda_n]$$

Del estudio de la función Kernel se concluye que debe hacerse una partición muy fina en la región de lambdas pequeñas, no así en la región de lambdas grandes, para obtener una mejor resolución para capas profundas. Esto sugiere una partición de tipo logarítmico, de donde:

$$\int_{0^+}^{\infty} K_1^N(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda = \int_{0^+}^{\lambda_n} K_1^N(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda =$$

$$= \int_{0^+}^{\lambda_1} K_1^N(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda + \dots + \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} K_1^N(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda +$$

$$+ \dots + \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} K_1^N(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \quad (A2)$$

Haciendo

$$I_j = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} K_1^N(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda$$

Para evaluar cada una de las integrales I_j para $J = 1, 2, \dots, n$, se puede aproximar por tramos la función K_1^N Kernel por medio de polinomios. Efectuando una interpolación por splines cúbicos, se tiene:

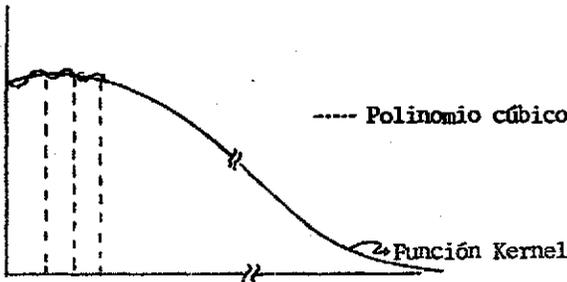


Fig. A 1 Aproximación de la Función Kernel por medio de splines cúbicos.

$$K_i^N(\lambda) \approx A_i \lambda^3 + B_i \lambda^2 + C_i \lambda + D_i = P_i(\lambda); \quad \lambda_{i-1} \leq \lambda < \lambda_i$$

Donde, el polinomio cúbico $P_i(\lambda)$ que ha de interpolar a la función Kernel en el J -simo intervalo queda determinado por los cuatro coeficientes A_i , B_i , C_i y D_i , los cuales a su vez están dados por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} 1.- P_i(\lambda_{i-1}) &= K_i(\lambda_{i-1}) \\ 2.- P_i(\lambda_i) &= K_i(\lambda_i) \\ 3.- P_i'(\lambda_{i-1}) &= K_i'(\lambda_{i-1}) \\ 4.- P_i'(\lambda_i) &= K_i'(\lambda_i) \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

donde,

$$P_i'(\lambda) = \frac{d P_i(\lambda)}{d \lambda}$$

y

$$K_i^{N'}(\lambda) = \frac{d K_i^N(\lambda)}{d \lambda}$$

En forma matricial, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i-1}^3 & \lambda_{i-1}^2 & \lambda_{i-1} & 1 \\ \lambda_i^3 & \lambda_i^2 & \lambda_i & 1 \\ 3\lambda_{i-1}^2 & 2\lambda_{i-1} & 1 & 0 \\ 3\lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_i^N(\lambda_{i-1}) \\ K_i^N(\lambda_i) \\ K_i^{N'}(\lambda_{i-1}) \\ K_i^{N'}(\lambda_i) \end{pmatrix} \quad (\text{A. 5})$$

Al resolver este sistema de ecuaciones lineales los coeficientes A_i , B_i , C_i y D_i quedan como combinaciones lineales del Kernel y su derivada en los puntos λ_{i-1} y λ_i . Esto es:

$$A_i = \alpha_i^i K_i^N(\lambda_{i-1}) + \beta_i^i K_i^N(\lambda_i) + \gamma_i^i K_i^N(\lambda_{i+1}) + \delta_i^i K_i^N(\lambda_i)$$

$$B_i = \alpha_i^i K_i^N(\lambda_{i-1}) + \beta_i^i K_i^N(\lambda_i) + \gamma_i^i K_i^N(\lambda_{i+1}) + \delta_i^i K_i^N(\lambda_i)$$

$$C_i = \alpha_i^i K_i^N(\lambda_{i-1}) + \beta_i^i K_i^N(\lambda_i) + \gamma_i^i K_i^N(\lambda_{i+1}) + \delta_i^i K_i^N(\lambda_i)$$

$$D_i = \alpha_i^i K_i^N(\lambda_{i-1}) + \beta_i^i K_i^N(\lambda_i) + \gamma_i^i K_i^N(\lambda_{i+1}) + \delta_i^i K_i^N(\lambda_i)$$

(A. 6)

donde,

$$\alpha_i^i, \beta_i^i, \gamma_i^i, \delta_i^i$$

para

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

son los coeficientes de λ_i y λ_{i-1}

Sustituyendo las Ec. A. 3 en A. 2, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_i} K_i^N(\lambda) \Delta J_0(\lambda r) d\lambda &= A_i \int_0^{\lambda_i} \lambda \Delta J_0(\lambda r) d\lambda + B_i \int_0^{\lambda_i} \lambda^2 \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \\ &+ C_i \int_0^{\lambda_i} \lambda \Delta J_0(\lambda r) d\lambda + D_i \int_0^{\lambda_i} \Delta J_0(\lambda r) d\lambda + \dots \\ &\dots + A_n \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \lambda^3 \Delta J_0(\lambda r) d\lambda + B_n \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \lambda^2 \Delta J_0(\lambda r) d\lambda + \\ &+ C_n \int_0^{\lambda_n} \lambda \Delta J_0(\lambda r) d\lambda + D_n \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

Si se hace:

(A. 7)

$$\begin{aligned} a_j &= \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} \lambda^3 \Delta J_0(\lambda r) d\lambda ; b_j = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} \lambda^2 \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \\ c_j &= \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} \lambda \Delta J_0(\lambda r) d\lambda ; d_j = \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} \Delta J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda_0^+ = 0^+$$

Sustituyendo A. 6 en A. 7 y reagrupando con respecto al Kernel

$K_1^N(\lambda)$ y su derivada $K_1^{N'}(\lambda)$ en los nodos se obtiene:

$$\int_{0^+}^{\infty} K_1^N(\lambda) \delta J_0(\lambda r) d\lambda = 0, K_1^N(0) + P_1 K_1^N(\lambda_1) + R_1 K_1^{N'}(0) + S_1 K_1^{N'}(\lambda_1) \\ + \dots + Q_j K_1^N(\lambda_{j-1}) + P_j K_1^N(\lambda_j) + R_j K_1^{N'}(\lambda_{j-1}) + S_j K_1^{N'}(\lambda_j) + \\ + \dots + Q_n K_1^N(\lambda_{n-1}) + P_n K_1^N(\lambda_n) + R_n K_1^{N'}(\lambda_{n-1}) + S_n K_1^{N'}(\lambda_n).$$

donde,

$$O_j = \frac{2a_j - 3(\lambda_j + \lambda_{j-1})b_j + 6(\lambda_j \lambda_{j-1})c_j + (\lambda_j^3 - 3\lambda_j^2 \lambda_{j-1}) d_j}{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^2}$$

$$P_j = \frac{-2a_j + 3(\lambda_j + \lambda_{j-1})b_j - 6(\lambda_j \lambda_{j-1})c_j - (\lambda_j^3 - 3\lambda_j^2 \lambda_{j-1}) d_j}{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^2}$$

$$R_j = \frac{a_j - (\lambda_{j-1} + 2\lambda_j)b_j + (2\lambda_j \lambda_{j-1} + \lambda_j^2)c_j - (\lambda_{j-1} \lambda_j^2) d_j}{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^2}$$

$$S_j = \frac{a_j - (2\lambda_{j-1} + \lambda_j)b_j + (2\lambda_j \lambda_{j-1} + \lambda_{j-1}^2)c_j - (\lambda_{j-1}^2 \lambda_j) d_j}{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^2}$$

Haciendo:

$$D_0 = O_1$$

$$E_0 = R_1$$

$$D_j = P_j + O_{j+1}$$

$$E_j = S_j + R_{j+1}$$

para

$$j = 2, 3, \dots, N-1$$

$$y \quad D_N = 0_N$$

$$E_N = S_N$$

Finalmente se tiene que la Ec. A1 se convierte en:

$$\int_{0^+}^{\infty} K_i^N(\lambda) \Delta J_i(\lambda r) d\lambda \approx \sum_{i=0}^N [D_i K_i^N(\lambda_i) + E_i K_i^N(\lambda_i)]$$

Como puede observarse los sistemas de Ecs. (A. 7) y (A. 8) no dependen del modelo sino que solamente de las lambdas y las separaciones electrónicas.

BIBLIOGRAFIA

1. Al'pin, L.M. Berdichesvskii, M.N., Vedrintsev, G.A., and Zagatmistr, A.M., 1966, Dipole methods for measuring earth conductivity: Transl. by G.V. Keller, New York, Consultants Bureau.
2. Apparao, A., and Gangadhara Rao T., 1974, Depth of investigation in resistivity methods using Linear electrodes: Geophysical Prospecting V.22, p. 211-223.
3. Battacharya, B.B., and Indrajit Dutta (1982). Depth of Investigation Studies for Gradient Arrays over Homogeneous Isotropic Half-Space: Geophysics. V. 47, No. 8, p. 1198-1203.
4. Bhattacharya, P.K., and Patra, H.P., 1968, Direct current geoelectric Sounding: Principles and interpretation: Amsterdam, Elsevier Publishing Co., IX + 135p.
5. Bhattacharya, B.B., and Sen, M.K. (1981). Depth of Investigation of Collinear Electrode Arrays over Homogeneous Anisotropic Half Space in Direct Current Methods: Geophysics, V. 46, No. 5, p. 768-780.
6. Campos, C.G., (1983). Interpretación y Cálculo de Curvas de Sondeos eléctricos Verticales. Tesis de Licenciatura en Física.
7. Ehrenburg and Watson, 1932, Geo. Prospecting, p.p. 423.
8. Evjen, H.M., 1938, Depth Factors and Resolving power of Electrical Measurements: Geophysics, V. 3, p. 78-95.
9. Keller, G.V., 1966, Dipole method for deep resistivity studies: Geophysics, V. 31, p. 1088-1104.
10. Keller, G.V., and Frischknecht, F.C., 1966, Electrical methods in Geophysical Prospecting: Oxford, Pergamon Press.
11. Koefoed, O., 1972, Discussion on Depth of Investigation in Direct Current Methods, Geophysics, V. 36, P. 943-959: Geophysics, V. 37, P. 703-704.
12. Koefoed, O. (1968). The Application of the Kernel Function in Interpreting Geoelectrical Resistivity Measurements. Geoplotation Monographs, Series 1 - No. 2, Gerbrüder Borntraeger, Berlin, Stuttgart.
13. Lima, E., 1979. Deriving Recurrence Formulas for the Eigen-functions for each Layer of Horizontally Multi-Layered Earth Models. Memoirs of the Faculty of Engineering Kyushu University. Vol. 39, No. 4, p. 183-192.

14. Lima, E. y Onodera, S. (1980). Matching Kernel Function Curves in order to Interpret Field Resistivity Data. Memoirs of the Faculty of Engineering Kyushu University, Vol. 40, No. 2, P. 133-148.
15. Muskat, M., and Evinger, H.H. 1941, Current penetration in direct current prospecting: Geophysics, V. 6, p. 397-427.
16. Roy, A., and Appatao A., 1971, Depth of investigation in Direct current methods: Geophysics, Vol. 36, No. 5, p. 943-959.
17. Roy, A., 1977, Depth of Investigation in Wenner, Three-Electrode and Dipole DC Resistivity methods: Geophysical Prospecting V 20, 329-340.
18. Roy, A., 1974, Resistivity Signal Partition in Layered Media.
19. Roy, A., 1978. A Theorem for Direct Current Regimes and some of its consequences: Geophysical Prospecting, V. 26, p. 442-463.
20. Stefanescu and Schlumberger, (1930). Sur la distribution électrique Potentielle autour D'une prise de terre punctuale dans un terrain a couches horizontales homogenes e isotropes". Jour. Phy. Radium. Vol. 7, pp. 132-141.
21. Van Nostrand, R.G., and Cook, K.L., 1966, Interpretation of resistivity data: USGS Prof. Paper 499, Washington, D.C., U.S. Gort Printing Office.
22. Waters, K.H. (1978). Reflection Seismology (A Tool for Energy Resource Exploration): P. III-130, John Wiley and Sons, N.Y.
23. Zsaraniec, E., 1976. Fundamental Functions for Horizontally Stratified Earth: Geophysical Prospecting V. 24, p. 528-548.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN