



**Universidad Nacional Autónoma de
México**



Facultad de Ingeniería

**“Optimización Estructural Evolutiva: Desarrollo
de una Aplicación de Cómputo para el Diseño
Óptimo de Elementos Bajo Esfuerzo Plano”**

T E S I S

**Para obtener el título de:
Ingeniero Mecánico**

**Presenta:
Fernando López Osorio**

**Director de Tesis:
Dr. Fernando Velázquez Villegas**

Ciudad Universitaria

Febrero de 2011.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado Asignado:

Presidente:	Dr. HERIBERTO DE JESÚS AGUILAR JUAREZ
Vocal:	Dr. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS
Secretario:	Dr. LEOPOLDO ADRIÁN GONZÁLEZ GONZÁLEZ
1er. Suplente:	Dr. JESÚS MANUEL DORADOR GONZÁLEZ
2do. Suplente:	M.I. ANTONIO ZEPEDA SÁNCHEZ

Lugar donde se realizó la tesis:

Ciudad Universitaria, D.F. México.

TUTOR DE TESIS:

Dr. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS

Agradecimientos

Difícil es expresar el profundo agradecimiento que me embarga hacia todas aquellas personas sin cuya colaboración nunca hubiera sido posible realizar este trabajo, investigación y desarrollo, de un tema apasionante de la ingeniería.

A mis padres debo, entre tantas cosas, su permanente esfuerzo y contribución a mi educación y bienestar.

A nuestra querida Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo proporcionado para la realización de este trabajo a través del proyecto IN108909 “Herramientas Computacionales para el Diseño Óptimo en Proyectos de Ingeniería e Innovación Tecnológica” del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Dirección General de Asuntos de Personal Académico (DGAPA). Así mismo le agradezco a nuestra alma mater el proporcionarme un espacio en la Facultad de Ingeniería, donde aprendí sólidos conocimientos a lo largo de estos años.

Al Grupo de Diseño Mecánico Óptimo (GDMO), perteneciente al CDMIT de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, dirigido por Dr. Fernando Velázquez Villegas y M.I. Antonio Zepeda Sánchez, debo entre otras muchas cosas, la oportunidad que me brindaron de trabajar con ellos en optimización estructural, esta difícil disciplina cimentada por un lado en los métodos numéricos y por otro en el cálculo de estructuras, áreas de conocimiento en las que ambos son grandes especialistas, así mismo la supervisión y orientación del trabajo.

A mis amigos y compañeros del grupo de optimización quienes además de ofrecerme su confianza y amistad, me proporcionaron información diversa, algunas subrutinas de cálculo, ideas y grandes dosis de entusiasmo ante los resultados obtenidos.

Índice

Agradecimientos	iii
Índice	iv
Introducción y objetivos	vi
I.1 Justificación de la propuesta.....	vii
I.2 Objetivos de la tesis.....	ix
I.3 Objetivo personal.....	x
I.4 Organización de la tesis.....	x
Capítulo 1 Antecedentes	1
1.1 Optimización estructural.....	3
1.1.1 Variables de diseño.....	5
1.1.2 Función objetivo.....	6
1.1.3 Restricciones.....	6
1.2 Métodos de optimización estructural.....	7
1.2.1 Optimización Estructural Evolutiva (ESO).....	8
1.2.2 Optimización Estructural Evolutiva Aditiva (AESO).....	12
1.2.3 Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO).....	15
1.3 Método de los Elementos Finitos (FEM).....	18
1.3.1 Descripción General y pasos para el análisis de Elementos Finitos.....	19
1.3.2 Tipos de Elementos Finitos.....	20
1.3.3 Elementos Elásticos bidimensionales.....	22
1.4 Descripción del Estado de Esfuerzos Planos.....	22
Capítulo 2 Desarrollo del Algoritmo	27
2.1 Generador de Mallas.....	28
2.2 Análisis por Elementos Finitos para Esfuerzos Planos.....	30
2.3 Algoritmo de Reglas Evolutivas.....	32
Capítulo 3 Implementación del Algoritmo	37
3.1 Módulo de Mallado.....	37
3.2 Módulo de Análisis por Elementos Finitos (FEM).....	41

3.2.1 Elemento Finito Triangular.....	42
3.3 Módulo de Optimización.....	47
3.3.1 Criterio de Paro.....	49
Capítulo 4 Aplicación y Resultados.....	50
4.1 Caso de Estudio I	50
4.1.1 Dominio rectangular con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en su parte inferior.....	51
4.1.2 Dominio rectangular con apoyo móvil y fuerza vertical centrada en la parte inferior.....	56
4.2 Caso de estudio 2.....	61
4.3 Caso de estudio 3.....	64
4.4 Discusión de Resultados.....	68
Conclusiones.....	70
Trabajo a futuro.....	71
Referencias Bibliográficas.....	72

Introducción y objetivos

“Somos casi enanos, sentados sobre la espalda de gigantes. Vemos, pues, más cosas que los antiguos, y más alejadas, no por la agudeza de nuestra propia vista o por la elevación de nuestra talla, sino porque ellos nos sostienen y nos elevan con su estatura gigantesca”

Bernardo de Chartres

El diseño estructural debe ser visto como una aproximación creativa para la solución constructiva de un problema de ingeniería planteado por la sociedad a la que se pertenece. A través de la historia, las soluciones se han modificado y, por medio de la comunicación entrelazada o generacional, se mejoran.

Hasta hace poco tiempo en el diseño de estructuras mecánicas sólo se había hablado de las limitantes impuestas por los materiales. Sin embargo, una limitante importante en el desarrollo de las estructuras recientes es la dificultad para llevar a cabo los análisis estructurales. Un acontecimiento que marcó la ruptura de esta última limitante fue la aparición de las computadoras. Éstas se han convertido en los impulsores del análisis estructural, incrementando velocidad y certidumbre en la obtención de soluciones.

La optimización estructural pretende establecer una metodología para llevar a cabo de manera sistemática el proceso del diseño estructural, utilizando los materiales actuales, la tecnología de herramientas computacionales y la creatividad del ingeniero.

En los métodos de diseño llamados “Tradicionales” la experiencia del diseñador, que los emplea, es fundamental desde la parte de idealización hasta la fase de fabricación. El diseñador debe tomar esencialmente las siguientes decisiones [24]:

- Definir las especificaciones del problema.
- Elegir criterios de diseño adecuados.
- Modelar y evaluar.
- Realizar cálculos empleando técnicas como FEM.
- Interpretar y evaluar los resultados del FEM.
- Elegir la mejor de las soluciones e incluso proponer mejoras.

Este proceso de diseño requiere fundamentalmente una gran experiencia por parte del diseñador, el cual debe utilizarla en casi todas las etapas del proceso de diseño.

El concepto de optimización está en la base de la ingeniería, puesto que la función clásica del ingeniero es diseñar sistemas novedosos, mejores, más eficientes, y menos costosos. La capacidad de los métodos de optimización para determinar el mejor diseño sin indagar todos los posibles, se basa en la utilización de un nivel relativamente modesto de matemáticas y la tarea de realizar cálculos numéricos iterativos, utilizando procedimientos lógicos claramente definidos o algoritmos implementados computacionalmente.

Esencialmente, los métodos de optimización consisten en buscar ciertos valores para determinadas variables, de forma que, cumpliendo un conjunto de requisitos representados habitualmente por ecuaciones algebraicas, nos proporcionan el mejor valor posible para una función que es utilizada para evaluar el diseño.

I.1 Justificación de la propuesta.

La optimización de estructuras es actualmente un campo en constante evolución, en el cual se ha progresado de forma importante en estos últimos años, en parte, gracias al incremento de capacidad tecnológica en el campo computacional, siendo hoy en día reconocida como una herramienta de diseño práctica.

Uno de los principales objetivos en la industria es reducir los costos de fabricación sin afectar la respuesta a las solicitaciones de la estructura; es por ello que la búsqueda de diseños óptimos se hace necesaria con el fin de aprovechar al máximo las propiedades de los materiales. Para encontrar estos mejores diseños se emplean herramientas de simulación que permiten predecir, modificar y optimizar el comportamiento mecánico.

La aplicación de la optimización estructural en las diferentes áreas de la ingeniería proporciona una ventaja a la industria en general, mediante estas técnicas se logra reducir el número de análisis que se requiere tradicionalmente, a la vez que se obtiene un diseño óptimo para las condiciones impuestas. A continuación se muestran algunos casos de diseño de estructuras mediante la aplicación de métodos de optimización.

En estructuras navales se ha optimizado la forma del casco en una etapa preliminar para optimizar tanto la potencia requerida en aguas tranquilas como el comportamiento en el mar usando un algoritmo evolutivo que considera el cambio en el peso del buque, ocasionado por la variación en la forma del casco [5]. También se optimiza la distribución de bodegas y la sección maestra, estanques, clara de cuadernas y zona de navegación del buque a diseñar [20].

La aplicación de optimización en componentes aeronáuticos también es empleada en la actualidad [6], un ejemplo es el análisis estructural estático y vibratorio de un componente aeronáutico que forma parte de la estructura del timón vertical de cola de una aeronave comercial, como se observa en la Figura I.1.

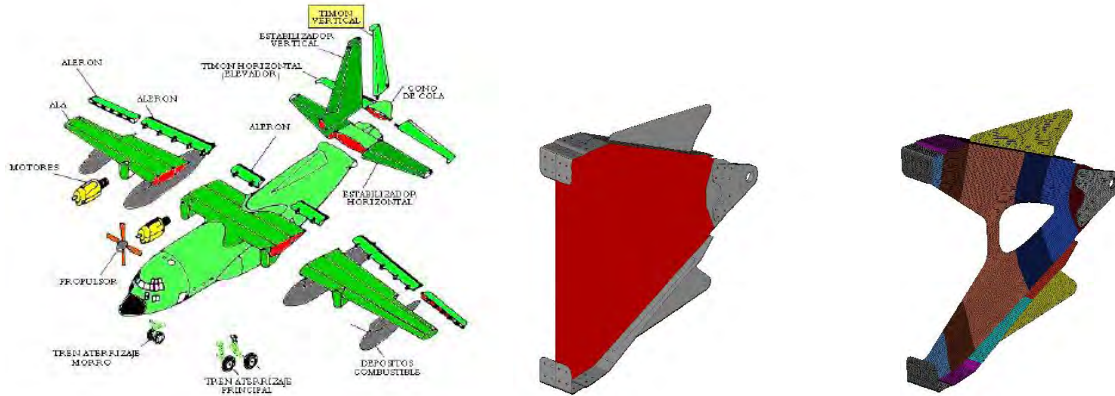


Fig. I.1. Despiece de una aeronave, modelo inicial de partida (la zona roja es la superficie a optimizar) y modelo optimizado [6].

En la Ingeniería aeroespacial se puede encontrar que en 1996 mediante algoritmos genéticos y computación evolutiva se produjo un nuevo diseño para un brazo o jirafa para transportar carga que pudiera montarse en órbita y utilizarse con satélites, estaciones espaciales y otros proyectos de construcción aeroespacial. El resultado, una estructura retorcida con aspecto orgánico que se ha comparado con un fémur humano (ver Figura I.2), no utiliza más material que el diseño de brazo estándar, es ligera, fuerte y muy superior a la hora de amortiguar las vibraciones [8].

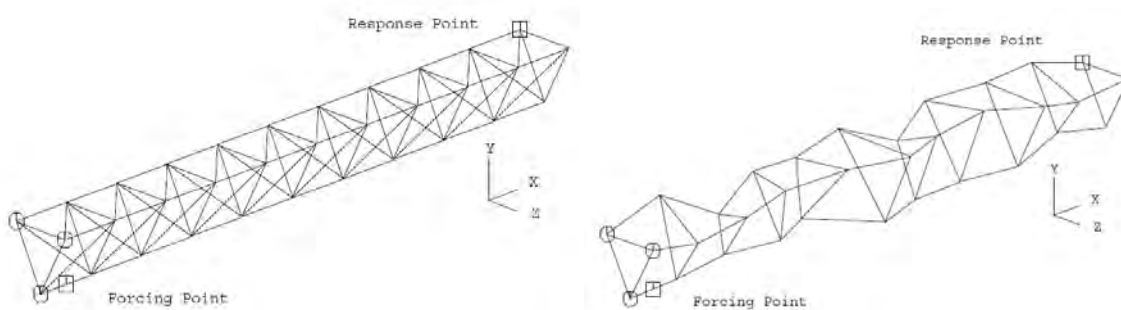


Fig. I.2 Geometría de información inicial, diseño optimizado genéticamente (elementos de la diagonal omitidos para mayor claridad) [8].

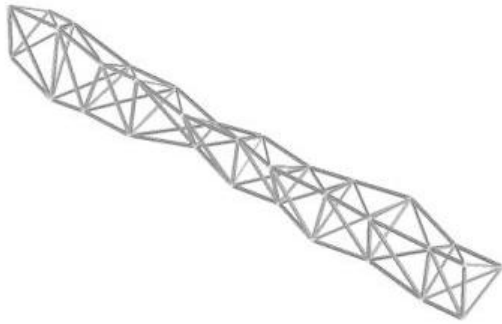


Fig. 1.3 *Diseño optimizado completo y pruebas del producto final [8].*

Debido a las ventajas que presenta la optimización estructural, en el Centro de Diseño Mecánico e Innovación Tecnológica de la UNAM se crean los cimientos y pilares de un nuevo proyecto que investigue e implemente técnicas de optimización. La creación del Grupo de Diseño Mecánico Óptimo (GDMO) permite el desarrollo de algoritmos y aplicaciones de cómputo con el fin de aportar a la Facultad de Ingeniería una nueva herramienta de apoyo en el proceso de diseño. Como parte de estas bases en esta tesis se aborda un método de optimización de estructuras planas.

A lo largo del presente trabajo, se expone una serie de conceptos preliminares de los métodos de optimización y su resolución mediante elementos finitos como herramienta de análisis escogida para el problema de diseño estructural óptimo.

1.2 Objetivos de la tesis.

El objetivo principal de esta tesis es el desarrollo de un programa de cómputo para el diseño estructural óptimo bajo condiciones de esfuerzos planos. El proceso de optimización es dirigido por el algoritmo *Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO, por sus siglas en inglés)*, mientras que el análisis de la estructura se realiza con una malla fija de elementos finitos.

El interés principal de esta tesis no se centra en el estudio de los algoritmos de optimización, ni en el empleo particular del método de los elementos finitos, si no profundizar en la integración, resultados, y perspectivas de un programa de cómputo para el diseño óptimo de estructuras continuas bajo condiciones de esfuerzos planos.

Las tareas asociadas que se contemplan en esta tesis son las siguientes:

- Realizar un algoritmo que genere una malla de elementos finitos triangulares sobre un dominio establecido.
- Implementar un algoritmo que permita el análisis de estructuras continuas bidimensionales mediante el método de elementos finitos.
- Implementar el algoritmo de *Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional* y relacionarlo con el mallado generado.
- Aplicar el algoritmo para la optimización de topología con *Optimización Estructural Evolucionaria Bidireccional*, y malla fija en 3 casos de estudio.

I.3 Objetivo personal.

Desarrollar conocimientos sólidos y generar capacidades para la aplicación de conceptos asociados con la optimización estructural y el análisis por elementos, así mismo actitudes reforzadas para interactuar profesionalmente.

I.4 Organización de la tesis.

A continuación se comenta brevemente el contenido del trabajo realizado en la tesis que se presenta:

En el primer capítulo se expone el desarrollo histórico de la optimización estructural desde los primeros planteamientos hasta el estado actual. Se introducen las ideas generales que conducen al concepto de diseño óptimo así como los distintos métodos existentes para la solución de dicho concepto. Así mismo se realiza la descripción del estado de esfuerzos planos.

En el capítulo dos se abarca los temas de tipos de mallado, el caso de elementos finitos para esfuerzo plano y se detalla la importancia y el funcionamiento del algoritmo planteado para la optimización estructural que se ocupa para esta tesis.

Posteriormente en el capítulo tres se describe en términos generales tres módulos esenciales en el algoritmo de programación matemática para optimización estructural basados en malla fija, análisis por elementos finitos y concepto de optimización.

En el cuarto capítulo se contrasta la validez de los planteamientos expuestos en los capítulos previos mediante la solución de ejemplos encontrados en la literatura básica de optimización de estructuras.

Finalmente se presentan las conclusiones de esta tesis y posibles futuras líneas de investigación en el campo de la optimización estructural.

Capítulo 1

Antecedentes

“Las obras no se construyen para que resistan. Se construyen para alguna finalidad o función que lleva, como consecuencia esencial, a que la construcción se mantenga en forma y condiciones a lo largo del tiempo. Su resistencia es una condición fundamental; pero no es la finalidad única, ni siquiera la finalidad primaria.”

[Torroja Miret Eduardo]

Desde épocas antiguas los constructores o diseñadores han optimizado, en cierto grado, basándose esencialmente en conocimientos empíricos, pero sus acciones han sido fuertemente limitadas por la carencia de una metodología bien consolidada de optimización estructural.

Históricamente podemos encontrar en la literatura a varios precursores del diseño estructural óptimo y a continuación se mencionaran algunos de ellos cronológicamente:

El análisis de distribución de tracción en vigas sometidas a flexión de Galileo en el siglo XVII, aunque incorrecto, permite abordar racionalmente la obtención de la forma óptima en vigas de espesor variable [14].

Medio siglo después Johan Bernoulli aplica la hipótesis de deformación plana de la sección y la ley de Hooke, postulando una distribución lineal para el estado de tracción en las secciones ortogonales de la directriz, su teoría le permite abordar el problema del diseño de vigas de resistencia uniforme [14].

Parent en la primera década del siglo XVIII, descubre el concepto de fibra neutra de la sección y resuelve el problema del diseño de vigas de resistencia uniforme sometidas a la acción de cargas móviles [14].

En el último tercio del siglo XVIII Lagrange analiza el diseño elástico de columnas axisimétricas de mínimo peso sometidas a cargas axiales [14]. Sus conclusiones aunque incorrectas, ya que no considera la acción del peso propio y, por tanto, obtiene una solución cilíndrica de sección constante, abrieron la vía que permitió a Clausen en 1851 resolver acertadamente el problema, obteniendo para la acción combinada de cargas centradas y peso propio, la distribución exponencial del área de la sección en función de la altura [14].

Maxwell realiza la primera gran aportación a la construcción de una teoría de diseño óptimo estructural. Demuestra un importante teorema relativo a estructuras articuladas bajo un solo estado de carga, relacionando las longitudes de las barras con las máximas tracciones y compresiones permitidas en cada una [14].

Posteriormente Levy lleva a término un profundo estudio sobre diseño de cerchas (estructuras reticuladas) y arcos de resistencia uniforme. Su demostración, que prueba el carácter forzosamente isostático de la configuración óptima de una celosía (tablero calado) sometida a un estado de carga constante, es de particular interés y genera con posterioridad numerosas polémicas analizando la posible extensión de este resultado a otros tipos de tipologías estructurales, estados de carga y criterios de optimización [14].

Michell presenta una contribución revolucionaria a las técnicas de diseño óptimo estructural. Su teoría, a partir de las realizaciones de Maxwell, desarrolla una poderosa metodología aplicable a estructuras articuladas bidimensionales sometidas a un único estado de carga, que permite hallar la configuración de mínimo peso con restricciones en los valores máximos admisibles de las tensiones en las barras y óptima, por tanto, en este sentido. La metodología de Michell envuelve una gran complejidad operativa y, excepto en casos muy sencillos, su aplicación es llevada a cabo hasta la aparición de las primeras computadoras [13].

Los principios del diseño óptimo fueron formulados en el periodo 1955-1960, y se deben fundamentalmente a Klein, Pearson y Schmit. Sus aportaciones fundamentales respectivas pueden ser resumidas en los siguientes términos:

- La formulación del problema generalizado de optimización estructural
- La integración del análisis estructural y la optimización en un esquema único y coherente de diseño.
- La utilización de métodos generales de análisis estructural (FEM) y la subsiguiente aplicación de la optimización estructural a problemas con dominios de definición continuos bidimensionales y tridimensionales.

Durante la década de 1970 Francavilla, Ramakrishnan, y Zienkiewicz propusieron caracterizar la forma óptima, con el objetivo de minimizar la concentración de tracciones, a través de parámetros geométricos predefinidos.

En 1977 Oda presentó un estudio donde se obtienen las formas óptimas correspondientes a dos problemas planos introduciendo cambios en algunos elementos finitos preseleccionados [15].

Rodríguez y Sereig en 1985 introducen un algoritmo basado en FEM donde la forma óptima se alcanza maximizando el empleo del material [19].

Para 1990 Mattheck y Burkhardt plantean un método de optimización basándose en la analogía entre la geometría de la estructura, y el mecanismo de crecimiento del árbol con el objetivo de minimizar las concentraciones de tensiones [12].

Xie y Steven presentan un método denominado ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) en 1993, el cual mediante un sencillo proceso iterativo va retirando el material menos eficiente del diseño [27].

Bendsoe y Kikuchi también en 1993 desarrollan el método de homogenización en el cual un modelo de material con pequeñas cavidades se introduce en el diseño, resolviendo el problema de diseño óptimo mediante la determinación de la porosidad ideal [2].

En la actualidad, los algoritmos basados en el proceso de la selección natural y evolución biológica (algoritmos evolutivos) se confirman como la metodología más potente y robusta para el diseño óptimo [26].

En este capítulo se describen los algoritmos de optimización para el problema de diseño óptimo en estructuras continuas, dichos algoritmos son fundamentales para la realización de esta tesis.

1.1 Optimización estructural.

Las técnicas de optimización evolutiva constituyen un conjunto de heurísticas emergentes, utilizadas exitosamente para la resolución de una variada gama de problemas en las áreas de optimización, diseño de artefactos, búsqueda de información, control de dispositivos y aprendizaje automático, entre otros. Estas técnicas basan su operativa en la emulación de los mecanismos de la evolución natural, identificados por Charles Darwin en 1859 en su célebre obra *El Origen de las Especies por medio de la Selección Natural*: la selección natural, la reproducción y la diversidad genética de individuos.

En la naturaleza, durante el proceso evolutivo los seres vivos tratan de resolver los problemas relacionados con la supervivencia para garantizar la perpetuación de la especie. Las técnicas de optimización evolutiva emulan el proceso biológico de adaptación de los organismos vivos al entorno y las condiciones del medio, aplicándolo a la resolución de problemas en variadas áreas.

La teoría de la optimización estructural está constituida por un conjunto de algoritmos de optimización y métodos numéricos enfocados a encontrar el mejor candidato entre una colección de alternativas, sin tener que evaluar explícitamente todas esas alternativas. Definiremos entonces la optimización como:

“La optimización es un proceso a través del cual se busca obtener o determinar la mejor solución posible, de entre un grupo de resultados, que a su vez satisface las restricciones que presenta el sistema al cual se aplica” [9].

Matemáticamente, la optimización significa:

“La búsqueda del máximo o mínimo de una función objetivo” [1].

En el problema general de optimización, expresado como problema de programación matemática, tanto la función objetivo como las restricciones se formulan en función de variables de comportamiento de la estructura, tales como desplazamientos o tracciones, que son función de las propiedades geométricas o mecánicas de la estructura y de las cargas, que a su vez son función de las variables de diseño. Dado que estas propiedades y cargas pueden conocerse en función de las variables de diseño, a través de un cierto método de análisis estructural podrá calcularse el valor de las variables de comportamiento y, por tanto, puede obtenerse el valor de la función objetivo y las restricciones en función de las variables de diseño. No obstante, las variables de comportamiento estructural son, en general, funciones altamente no lineales de las variables de diseño, y su expresión es desconocida habitualmente, si bien pueden calcularse punto a punto. Siempre que el cálculo estructural conlleve un elevado tiempo y, especialmente en sistemas estructurales con mayor número de variables de diseño, el costo operativo de los sucesivos análisis que es preciso realizar en el proceso de diseño puede ser inadmisibles.

En términos matemáticos, el problema de optimización se puede formular como: encontrar el vector de variables de diseño \mathbf{x} que;

minimice $f(\mathbf{x})$

sujeto a $h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, m_i$

$g_k(\mathbf{x}) \geq 0 \quad k = 1, \dots, m_d$

$x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad i = 1, \dots, n$

Donde

\mathbf{x}	vector n-dimensional de variables de diseño
$f(\mathbf{x})$	función objetivo, representa el criterio óptimo
$h_j(\mathbf{x})$	restricción de diseño de igualdad j
$g_k(\mathbf{x})$	restricción de diseño de desigualdad k
m_i	número de restricciones de igualdad
m_d	número de restricciones de desigualdad
x_i^I	límite inferior de las variables de diseño i
x_i^S	límite superior de las variables de diseño i
x_i	variable de diseño i
n	número de variables

Al espacio n-dimensional definido por el vector de variables \mathbf{x} se le denomina espacio de diseño. Las restricciones definen hipersuperficies que acotan un entorno en el espacio de diseño. Un conjunto de variables de diseño define un punto en el espacio de diseño. Si un punto es tal que se cumplen todas las restricciones, ese punto es un diseño válido o factible; si, por el contrario, viola alguna restricción, el punto del espacio de diseño corresponde a un diseño no válido o no factible [18].

Con objeto de obtener mejores diseños de estructuras se han propuesto diversos métodos de optimización y aproximación del comportamiento estructural, en este trabajo se mencionan algunos y se detallan los fundamentos necesarios para el desarrollo de esta tesis.

1.1.1 Variables de diseño.

Los diferentes tipos de optimización estructural dependen de las variables de diseño utilizadas. En el caso más general, pueden intervenir cuatro tipos de variables:

- Propiedades de la sección de la pieza: área, momentos de inercia, y de torsión, etc.
- Geometría de la estructura: altura, longitud, espesor, etc.
- Topología de la estructura: densidad del material, perímetro total, etc.
- Propiedades constitutivas: módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, etc.

De los cuatro tipos de variables, el material de la estructura suele plantearse como un parámetro, siendo fijado inicialmente por el diseñador. Actualmente no existen técnicas de optimización que puedan considerar, de forma eficiente, los cuatro tipos de variables de

diseño. De esta manera, las variables más habituales de diseño que se manejan son; las propiedades de la sección, la geometría, y la topología de la estructura.

Las variables se pueden clasificar en continuas y discretas. Para la optimización de forma de estructuras continuas, las variables de geometría suelen estar asociadas a la posición de puntos de control de curvas o superficies, que son las que definen los contornos de la estructura. En las estructuras discretas, las variables de geometría suelen ser las coordenadas de los nodos de la estructura [10].

1.1.2 Función objetivo.

La función objetivo es una parte de gran interés ya que es mediante la cual se pueden evaluar los diseños, de forma que podamos identificar cuál es el mejor diseño. La condición habitual que se le exige a dicha función es que, para la solución óptima, tome un valor mínimo (o máximo).

La función objetivo que se ha utilizado con mayor frecuencia es la masa de la estructura, debido a que las primeras optimizaciones estructurales se desarrollaron en el campo de la aeronáutica, en la cual el valor del peso resulta un condicionamiento esencial. La masa está directamente relacionada con el costo total de la misma. Sin embargo, en la evaluación del costo total entran en juego aspectos tales como: costos de fabricación, mano de obra, tiempo de producción mínimo, máxima tasa de producción, mínima energía utilizada, máxima carga, frecuencias naturales, tracción máxima, desplazamientos en puntos críticos, rigidez de la estructura, etc. Estos aspectos también pueden emplearse como función objetivo.

1.1.3 Restricciones.

Los casos prácticos se deben formular como problemas con restricciones. Esto es debido a que en la mayor parte de los problemas complejos, como es el diseño de una estructura, no pueden ser tratados libremente teniendo en cuenta todas las elecciones posibles, sino que debe descomponerse en subproblemas separados. En donde cada uno de estos subproblemas tiene restricciones que han sido impuestas para acotar el campo de estudio.

Las restricciones las podemos encontrar clasificadas en dos grupos, en el primero de ellos las restricciones se dividen en *explícitas* o *implícitas*. Las primeras actúan directamente imponiendo condiciones a una variable, mientras que las segundas imponen condiciones sobre magnitudes que dependen a su vez de las variables.

La segunda clasificación de las restricciones las agrupa en restricciones de *igualdad* o *desigualdad*. Las restricciones de igualdad suelen asociarse a las relaciones que fijan el comportamiento de la estructura, condiciones de equilibrio, compatibilidad, ley de comportamiento del material, condiciones de simetría, tangencia, curvatura, etc. Las restricciones de desigualdad se asocian con limitaciones impuestas a la respuesta del elemento estructural, tales como tensiones, desplazamientos máximos, frecuencias de vibración, etc. [25].

1.2 Métodos de optimización estructural.

Ya se mencionaron anteriormente las variables más habituales de diseño que se manejan para realizar casos de optimización, a partir de éstas se da origen a los tres tipos de optimización estructural que existen.

- Optimización de *propiedades o dimensional*. En los casos de optimización de *propiedades*, las variables de diseño están asociadas a propiedades geométricas de la sección transversal de los elementos que componen la estructura (áreas de las barras, momentos de inercia, etc.). En el caso de estructuras continuas, las variables de diseño suelen ser los espesores de los elementos.
- Optimización de *forma*, también denominada de *geometría*. En casos de optimización de forma, las variables de diseño controlan la geometría del diseño y requieren a menudo de un modelo de análisis que se readapte durante el proceso de optimización. Este proceso consiste en variar algunos contornos del modelo a ser diseñado a fin de mejorar su comportamiento mecánico.
- Optimización de *topología*. Para los casos de optimización topológica, no solamente se modifican dimensiones o posición de puntos característicos, sino también la existencia o no de elementos estructurales, es decir, la definición del número de elementos (o cavidades) que configuran la estructura. En muchos problemas es conveniente introducir cavidades interiores no existentes en el diseño de la topología inicial, a través de las cuales se puede por ejemplo, disminuir el peso de la estructura sin que por ello se viole obligatoriamente alguna de las restricciones impuestas.

Existen varios métodos de optimización que son empleados según sean los parámetros de diseño. Dichos métodos están clasificados en dos categorías: Métodos basados en gradientes y Métodos heurísticos

Métodos basados en Gradientes: son aquellos que hacen uso del cálculo diferencial para solucionar una función objetivo y proveer un valor mínimo o un máximo para una función específica. En este método se asume que la solución existe, es decir que en el problema y la función objetivo debe haber continuidad.

- Optimización sin restricción.
- Optimización restringida.
- Método de los Multiplicadores de Lagrange.
- Condiciones de Kuhn-Tucker.
- Programación Lineal (LP).
- Programación Lineal Integral (ILP).
- Programación Secuencial Lineal (SLP).
- Programación Secuencial No Lineal (NLP).
- Métodos de Homogeneización.
- Teoría de distribución Óptima.
- Optimización de Forma.

Métodos de optimización heurística: son métodos de búsqueda a través del campo del diseño, desarrollados de cualquier idea intuitiva dentro del problema, o de argumentos convincentes de metodologías de optimización basados en la observación de la naturaleza, es decir que estos métodos no implican derivadas de las funciones objetivos. Los algoritmos genéticos requieren de una mayor base teórica, gracias a esto son más aptos para implementarse en casos diversos. Hay que tener en cuenta que la formulación de un algoritmo genético es independiente del problema, lo cual lo hace un algoritmo robusto, por ser útil para cualquier problema, pero a la vez débil, por no estar especializado.

- Simulación de Recocido (SA).
- Algoritmos Genéticos (GA).
- Optimización de Forma Asistida por Computadora (CAO).

1.2.1 Optimización Estructural Evolutiva (ESO)

La optimización estructural evolutiva se basa en que, mediante una progresiva y lenta eliminación del material menos eficiente de la estructura, la forma (y/o topología) de la misma evoluciona hacia el óptimo.

Xie y Steven (1993) introdujeron el método ESO, el cual, mediante un criterio de rechazo, elimina una pequeña cantidad de material en cada iteración. En su forma original, el método ESO determina la eficiencia del material, a partir de la tensión en los elementos. Es decir, si un elemento presenta una tensión (generalmente de Von Mises) mínima, el

elemento es ineficiente. Desde el punto de vista ingenieril, el método presenta las siguientes ventajas: facilidad de programación, y un acoplamiento rápido con programas de elementos finitos.

El método de ESO se encuentra entre el método heurístico y el método basado en gradiente. Esto significa que el ESO puede realizar búsquedas de soluciones en el ámbito estructural, tanto a nivel local como global. Debido a sus características evolutivas, cuando un mínimo se ha localizado, el proceso continúa evolucionando la estructura en busca de la mejor solución.

El método de Optimización Estructural Evolutiva (ESO), sigue un concepto que es muy simple y robusto [18,27]. Los principios y procedimientos que definen el método ESO son los siguientes:

- 1) Establecer malla que cubra totalmente el dominio máximo que a la estructura se le permite ocupar.
- 2) Aplicar todas las condiciones del límite cinemática, cargas, materiales, propiedades de los elementos, etc.
- 3) Especificar los criterios utilizados para optimizar la estructura, por ejemplo, Von Mises.
- 4) Especificar el parámetro de ESO de conducción, por ejemplo, el máximo o la media del esfuerzo Von Mises.
- 5) Llevar a cabo un análisis de elementos finitos de la estructura.
- 6) Usar de la desigualdad de ESO,

$$\sigma_{vm}^{(e)} \leq RR \sigma_{vm,e}^{max}$$

$$RR = a_0 + a_1 SS + a_2 SS^2$$

donde

$\sigma_{vm}^{(e)}$ Esfuerzo de Von Mises para el elemento e .

$\sigma_{vm,e}^{max}$ Máximo esfuerzo de Von Mises en los elementos.

RR Tasa de rechazo.

a_0, a_1, a_2

Coeficientes determinados a partir de la experiencia con ESO.

 SS

Número de óptimos locales.

Determinar si hay elementos en la estructura que lo satisfacen. Si un elemento cumple esta ecuación, dicho elemento será retirado del dominio estructural.

7) Si en una iteración se no hay ningún elemento en el dominio de diseño que satisface la ecuación del paso (6), se ha llegado a un estado estable y óptimo local. Para que el proceso de optimización pueda seguir, el número de estado estacionario (SS) se debe incrementar en 1, y repetir el paso (6).

8) Repetir los pasos 5 al 7 hasta satisfacer el criterio de paro.

El criterio de paro utilizado en la explicación de este método es la esfuerzo de Von Mises; sin embargo, cualquier criterio puede utilizarse para impulsar la optimización de una estructura utilizando el método ESO. El aspecto importante es entender que no importa qué criterio se aplica, el método de ESO no cambia, sólo algunos parámetros.

El diagrama de flujo que representa este método ESO está conformado de la siguiente manera.

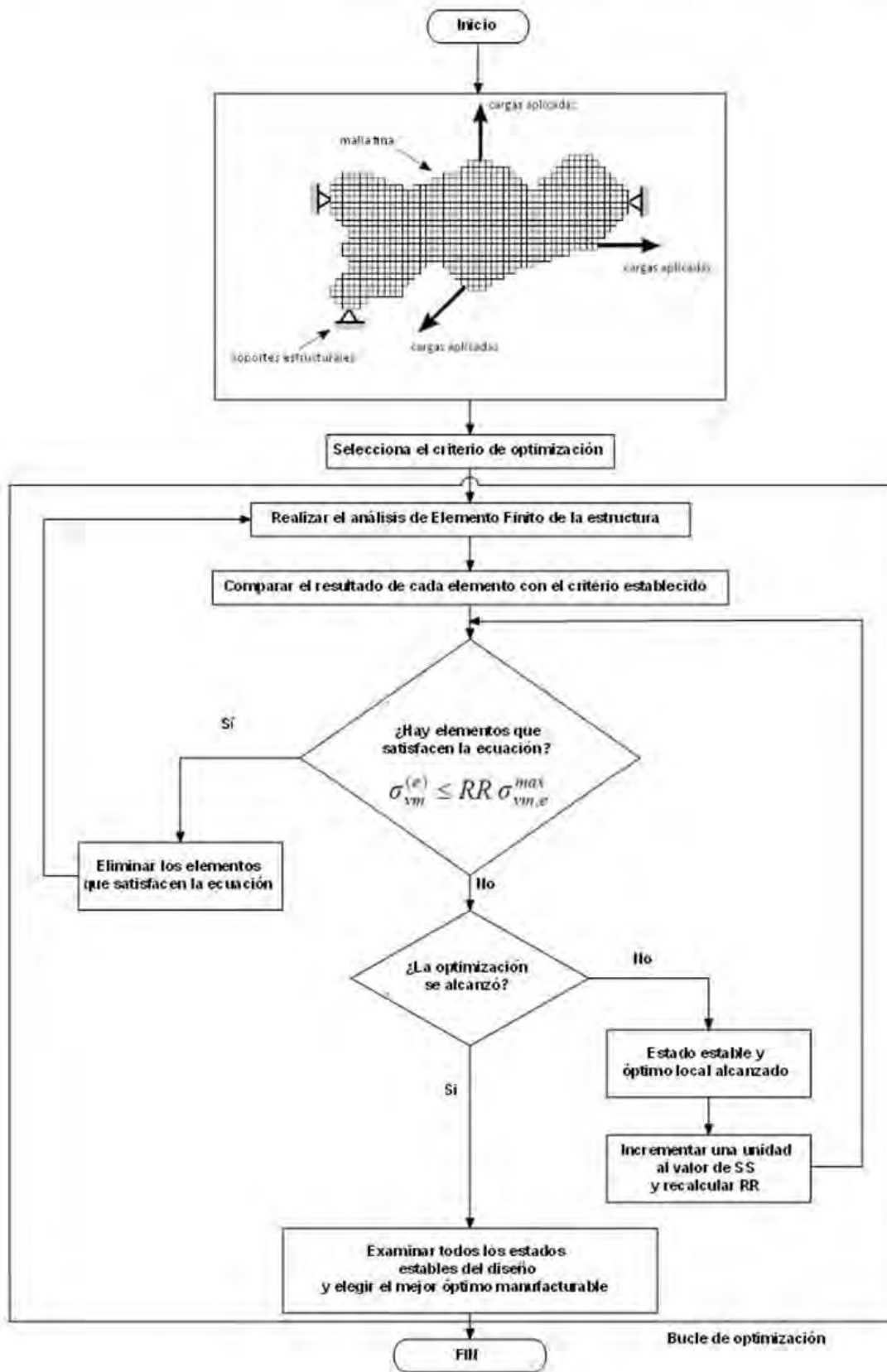


Fig. 1.1 Diagrama de flujo que representa el método ESO

1.2.2 Optimización Estructural Evolutiva Aditiva (AESO).

En la optimización estructural evolutiva aditiva (AESO) por sus siglas en inglés (Additive Evolutionary Structural Optimization), como su nombre indica introduce elementos a la estructura en las áreas donde resultan necesarios (Querin, Steven, Xie, 2000), de forma similar a la eliminación de los elementos en el método ESO.

Los pasos que definen el método AESO, son los siguientes:

- 1) Especificar el volumen máximo que la estructura puede ocupar.
- 2) Dividir el dominio mediante una malla de elementos finitos.
- 3) Aplicar las cargas y las condiciones de apoyo.
- 4) Establecer las propiedades del material.
- 5) Disponer un número de elementos mínimo capaz de conectar los soportes de la estructura con las cargas aplicadas.
- 6) Definir el criterio a optimizar. Generalmente, la tensión de Von Mises.
- 7) Analizar la respuesta de la estructura.
- 8) Añadir los elementos que satisfacen la inecuación AESO.

$$\sigma_{vm}^{(e)} \geq IR \sigma_{vm,e}^{max} \quad IR = a_0 - a_1 SS - a_2 SS^2$$

Donde:

$\sigma_{vm}^{(e)}$ Esfuerzo de Von Mises para el elemento e .

$\sigma_{vm,e}^{max}$ Máximo esfuerzo de Von Mises en los elementos.

IR Tasa de Rechazo.

a_0, a_1, a_2 Coeficientes determinados a partir de la experiencia con AESO.

SS Número de óptimos locales.

- 9) Si en una iteración no se añaden nuevos elementos, se aumenta en una unidad el valor del número SS .
- 10) Repetir los pasos 7 a 9, hasta satisfacer el criterio de paro.

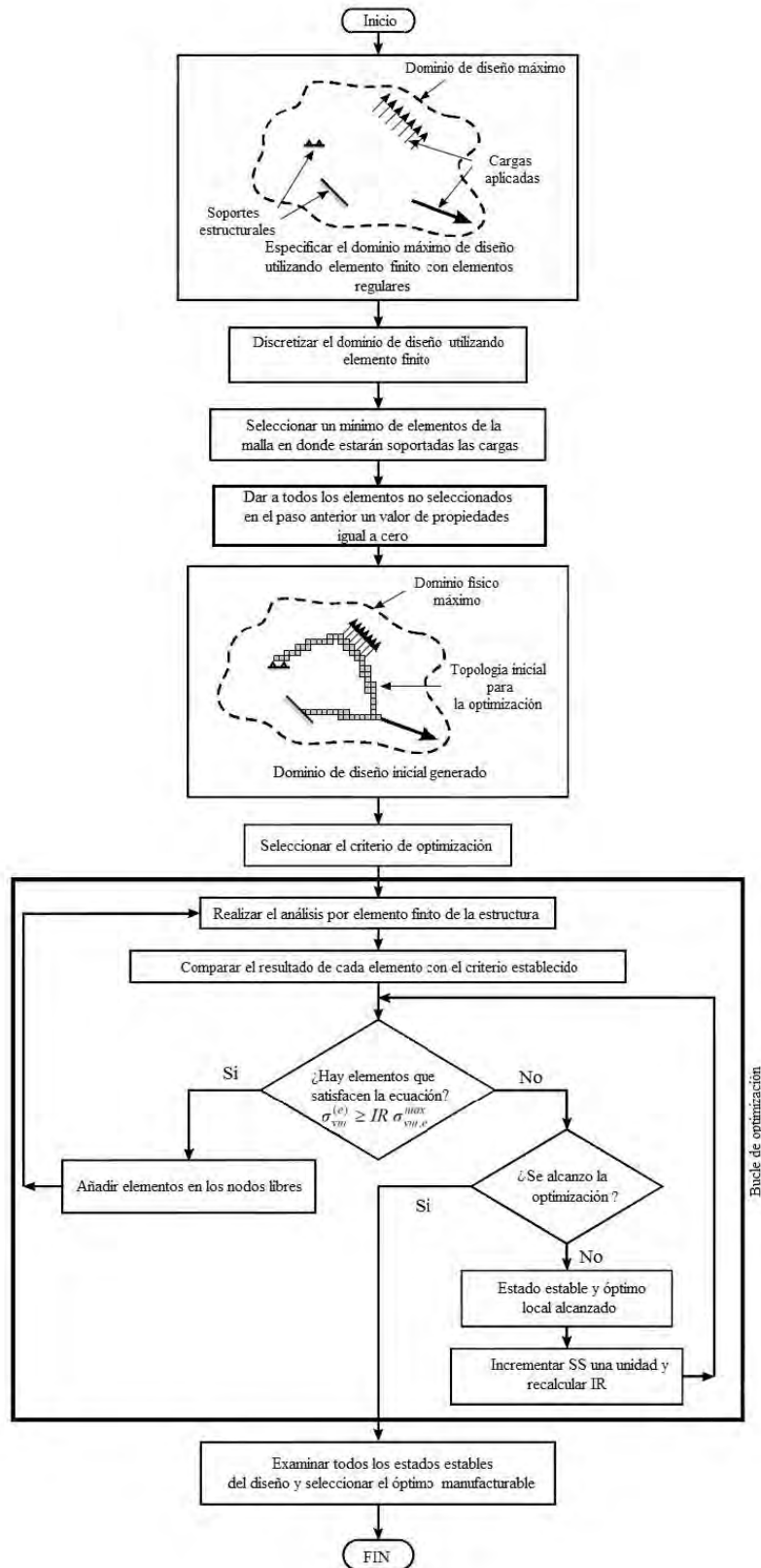


Fig. 1.2 Diagrama de flujo que representa el método AESO

1.2.3 Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO)

En el método de optimización estructural evolutiva bidireccional, los elementos de la estructura pueden ser agregado o quitados. Los procesos de adición y eliminación son llevados a cabo mediante los métodos ESO y AESO. Con el fin de que el método BESO funcione correctamente se deben modificar las ecuaciones que conducen a la optimización.

La optimización mediante BESO sigue los siguientes pasos:

- 1) Especificar el volumen máximo que la estructura puede ocupar.
- 2) Dividir el dominio mediante una malla de elementos finitos.
- 3) Aplicar las cargas y las condiciones de apoyo.
- 4) Establecer las propiedades del material.
- 5) Definir el criterio a optimizar. Generalmente, la tensión de Von Mises.
- 6) Llevar a cabo el análisis de elemento finito.
- 7) Eliminar los elementos que satisfacen la inecuación ESO, y añadir los elementos que cumplen la inecuación AESO.

$$\sigma_{vm}^{(e)} \leq RR \sigma_{vm,e}^{max}$$

$$\sigma_{vm}^{(e)} \geq IR \sigma_{vm,e}^{max}$$

Donde:

$\sigma_{vm}^{(e)}$ Esfuerzo de Von Mises para el elemento e .

$\sigma_{vm,e}^{max}$ Máximo esfuerzo de Von Mises en los elementos.

RR Tasa de rechazo

$$RR = r_0 + r_1 * SS + a_{RR} * ON \tag{1.1}$$

$$0 \leq RR \leq 1$$

SS Es el número de estados estables, un contador indica todos los estados estables en el proceso de evolución, así como los mínimos locales

ON Es el número de oscilación, un contador lo incrementa en una unidad cada vez que la optimización alcanza un estado de oscilatorio. Se define como un estado oscilatorio cuando un elemento es adherido y el mismo elemento es removido en la subsecuente iteración y sigue este patrón hasta el infinito. El incremento de esta variable cada que se llega a un estado oscilatorio permite que la estructura pueda continuar con su evolución.

$r_0 = 0$

r_1 Constante determinada con la experiencia de BESO, normalmente es igual a 0.001

a_{RR} Es una constante de número de oscilación determinada por la experiencia de BESO, normalmente 0.01

IR Tasa de adición

$$IR = i_0 - i_1 * SS - a_{IR} * ON \quad (1.2)$$

$$0 \leq IR \leq 1$$

$i_0 = 1$

i_1 Constante determinada con la experiencia de BESO, normalmente 0.01

a_{IR} Constante de número de oscilación, determinada por la experiencia de BESO

- 7) Si se llega a un estado en donde no hay ningún elemento en el dominio del diseño que satisfacen las ecuaciones (1.1) y (1.2), se habrá alcanzado un estado estable. Para continuar con el proceso de optimización incrementar el número de estado estable por uno (SS), y repetir el paso 7.
- 8) Si se llega a un estado oscilatorio antes de llegar al criterio de optimización elegido, incrementar el valor del estado oscilatorio (ON) en una unidad y repetir el paso 7.
- 10) Repetir los pasos del 6 al 9 hasta que el, o los criterios de optimización se alcancen.

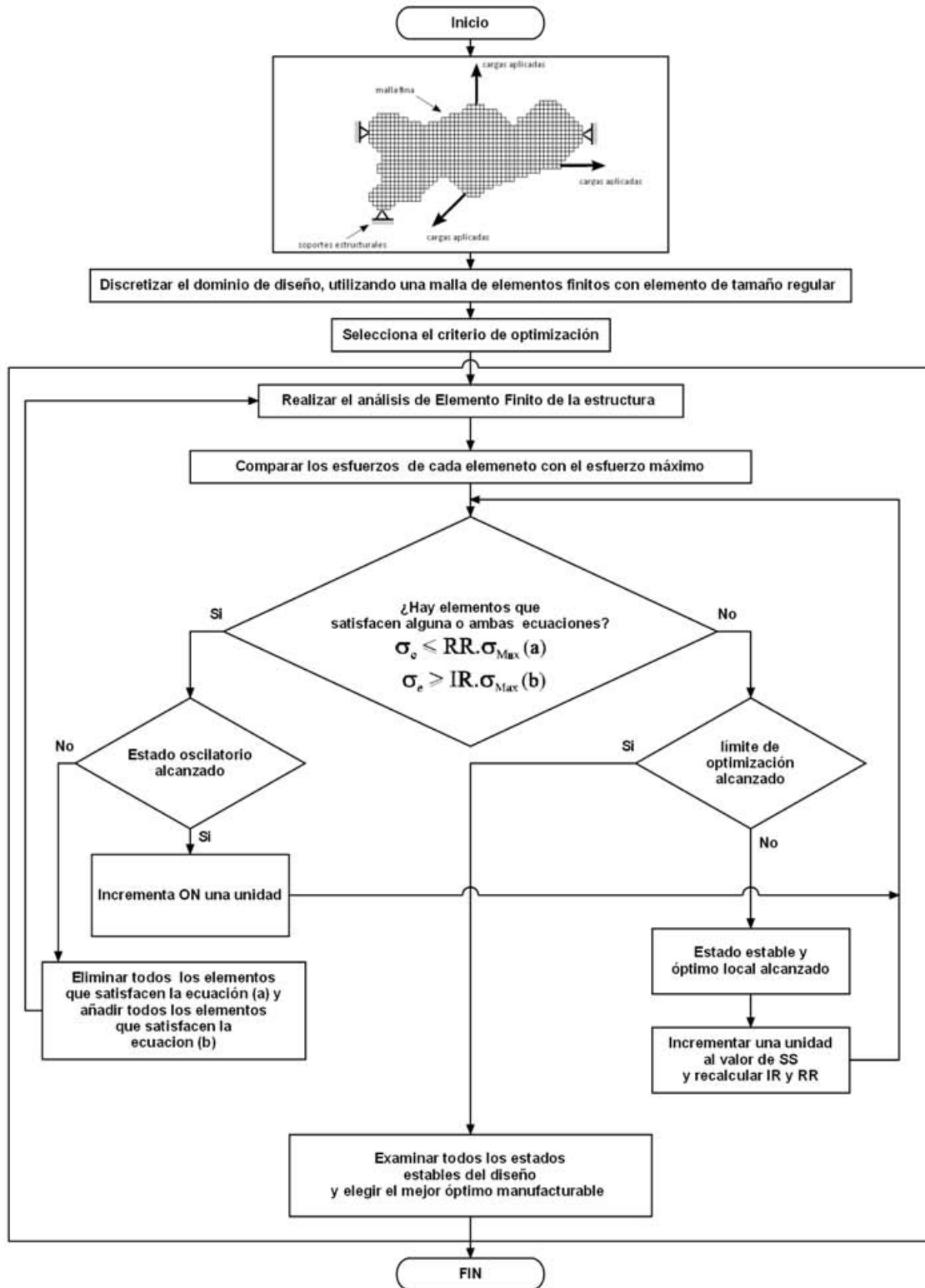


Fig. 1.3 Diagrama de flujo que representa el método BESO

1.3 Método de los Elementos Finitos (FEM).

El método de los elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés) es un método numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales. El método se fundamenta en dividir el cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones integrales que caracterizan su comportamiento físico, en una serie de subdominios no intersectantes entre sí denominados elementos finitos. Este conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también llamada discretización. Dentro de cada elemento se distingue una serie de puntos representativos llamados nodos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia (conectividad) se conoce como malla. Los cálculos se realizan sobre una malla o discretización creada a partir del dominio con programas generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con las relaciones de conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas), la matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema (matriz K). El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos [16].

El conocimiento de lo que sucede en el interior de este modelo del cuerpo aproximado, se obtiene mediante la interpolación de los valores conocidos en los nodos. Es por tanto una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de dichos nodos.

Típicamente el FEM se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas, las deformaciones y tracciones respectivamente, cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables o más generalmente un problema de mecánica del medio continuo. El método de los elementos finitos es muy usado debido a su generalidad y la facilidad de introducir dominios de cálculo complejos. En la tabla 1.1 se recogen algunas de aplicaciones de este método [25].

Tabla 1.1 Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería,

Campos de Estudio	Equilibrio	Autovalores	Propagación
Ingeniería estructural.	Análisis de vigas, placas, láminas.	Estabilidad de estructuras.	Propagación de ondas de esfuerzo.
Ingeniería mecánica.	Análisis bidimensionales y tridimensionales de esfuerzos.	Frecuencias naturales y modos de vibración de estructuras.	Respuesta dinámica de estructuras.
Ingeniería aeroespacial.			Problemas viscoelásticos.

<p>Mecánica de suelos. Ingeniería de cimentaciones.</p>	<p>Análisis bidimensionales y tridimensionales de esfuerzos. Problemas de excavaciones interacción suelo-estructura.</p>	<p>Frecuencias naturales y modos de vibración de combinaciones suelo-estructura.</p>	<p>Propagación de ondas de esfuerzo en medios porosos deformables. Interacción dinámica suelo-estructura.</p>
---	---	--	--

Finalmente una importante propiedad de método es la convergencia, si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas la solución numérica calculada converge hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

1.3.1 Descripción General y pasos para el análisis de Elementos Finitos

La primera diferencia entre los métodos clásicos y los elementos finitos son la forma de *ver* la estructura y el consiguiente procedimiento de solución. El método de elementos finitos considera la estructura como el ensamble de un número finito elementos.

Normalmente, el análisis de elementos finitos involucra siete pasos [4]. Pasos 1, 2, 4, 5 y 7 requieren que se proporcione información y se tomen decisiones, mientras el resto de los pasos son realizados automáticamente por el algoritmo.

1. **Discretización de la estructura:** Como parte del preproceso la estructura es dividida en una cantidad finita de elementos, dichos elementos generan un mallado que permitirá el manejo matemático de la estructura en cuestión. Este paso es uno de los más cruciales para obtener una solución exacta del problema; de esta forma, el diseñador debe estar muy consiente en determinar el tamaño o la cantidad de elementos en cierta área o volumen de la estructura para su análisis y no generar cálculos innecesarios o soluciones erróneas.

2. **Definir las propiedades del elemento:** En este paso el diseñador debe definir las propiedades del elemento.

3. **Ensamblar las matrices de rigidez de los elementos:** La matriz de rigidez de un elemento, consiste de coeficientes los cuales pueden ser derivados del equilibrio, residuos ponderados o métodos de energía. La matriz de rigidez del elemento se refiere a los desplazamientos nodales al ser aplicadas fuerzas en los nodos ($K \cdot F = U$). El ensamble de las matrices de rigidez, implica la aplicación de equilibrio para toda la estructura.

4. **Aplicación de las cargas:** Fuerzas externas concentradas o fuerzas uniformes y momentos son especificados en este paso.

5. **Definir las condiciones de frontera:** Las condiciones de apoyo deben ser dadas, por ejemplo, si el desplazamiento de ciertos nodos es conocido. Usando los elementos de la frontera se pueden determinar las reacciones en los mismos.

6. **Solucionar el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:** La secuencial aplicación de los pasos descritos, conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas, donde los desplazamientos nodales son desconocidos.

7. **Calcular los esfuerzos:** El diseñador puede entonces calcular los esfuerzos, reacciones, deformaciones u otra información relevante. El *post-procesador* ayuda a visualizar la salida en forma gráfica.

1.3.2 Tipos de Elementos Finitos.

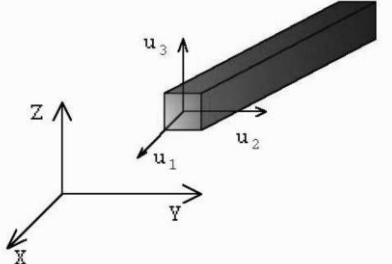
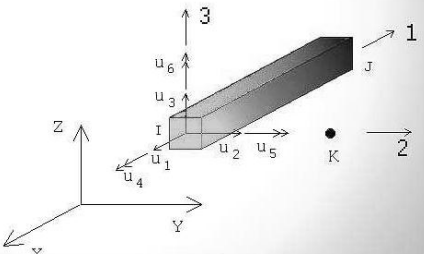
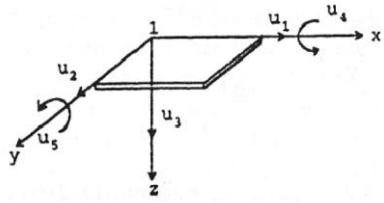
Una gran cantidad de tipos de elementos finitos pueden ser utilizados en la solución de estructuras y aplicaciones mecánicas. Ejemplo de lo anterior es que en programas comerciales de elementos finitos se pueden encontrar una gran cantidad de elementos en sus librerías. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones en el área de estructuras, ingeniería naval y mecánica pueden ser solucionadas con los elementos básicos y que a continuación se indican.

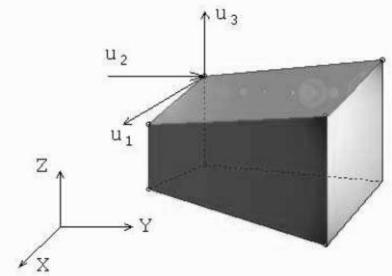
Tabla 1.2 Tipos de elementos finitos. [29].

<ul style="list-style-type: none"> • Truss (Armadura). • Beam (viga). • Boundary 	<p>Elementos Unidimensionales. (Línea)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Plane stress (Esfuerzo plano). • Plane strain (Deformación plana). • Axisymmetric (Elementos Axisimétricos). • Membrana • Plate • Shell (Tipo cascarón) 	<p>Elementos Bidimensionales. (Área)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Solid o brick (sólidos) • Tetraedro • Hexaedro 	<p>Elementos Tridimensionales. (Volumen)</p>

Como lo muestra la Tabla. 1.2 dependiendo la dimensión, los elementos básicos se pueden dividir en tres categorías: elemento de *línea*, *área* y *volumen*. En la Tabla 1.3 se muestra una clasificación de los elementos más comúnmente utilizados.

Tabla 1.3 Elementos finitos más comúnmente utilizados

Tipo de elemento	Principales usos	Condición para su uso	Ilustración
TRUSS	Estructura de techo (cercha). Torres de alta tensión. Estructura de Puentes. Etc.	Longitud mucho mayor que su ancho y profundidad (≥ 8 a 10 veces). No permite transferencias de momentos.	 <p>GdL: Seis grados de libertad por nodo. Traslaciones: u1, u2, u3. Rotaciones: u4, u5, u6.</p>
BREAM	Reforzado de planchas. Puntales. Marcos. Etc.	Longitud mucho mayor que su ancho y profundidad (≥ 10 veces). Permite transferencias de momentos y cizalle.	 <p>GdL: Seis grados de libertad por nodo. Traslaciones: u1, u2, u3. Rotaciones: u4, u5, u6.</p>
PLATE	Container. Casco de buques. Fuselaje de aviones. Etc.	$(h / L) \leq (1 / 10)$ h = Espesor de la placa. L = Dimensión de lado menor de la placa.	 <p>GdL: Cinco grados de libertad por nodo. Traslaciones: u1, u2, u3. Rotaciones: u4, u5.</p> <p>En la dirección normal a la placa debe especificarse una rigidez muy pequeña de rotación.</p>

<p>BRICK</p>	<p>Placas gruesas. Fundamentos de motor. Flanges. Engranajes. Etc.</p>	<p>$(h / L) > (1 / 10)$ h = Espesor de la pieza. L = Dimensión de lado menor de la pieza.</p>	 <p>GdL: Tres grados de libertad por nodo. Traslaciones: u1, u2, u3. Rotaciones: No presenta grados de libertad rotacionales.</p>
--------------	--	---	---

1.3.3 Elementos Elásticos bidimensionales

Hay tres tipos de elementos bidimensionales:

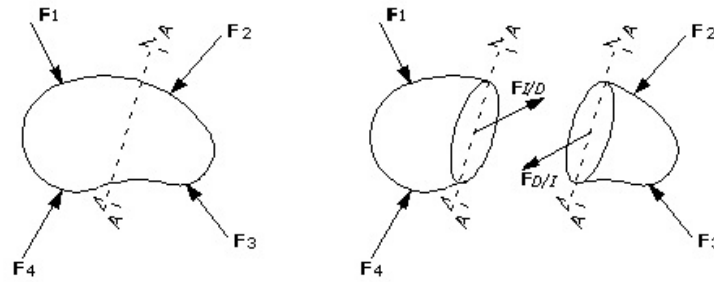
1. Plane Stress Elements (Esfuerzo plano).
2. Plane Strain Elements (Deformación plana).
3. Axisymmetric Elements (Elementos Axisimétricos).

A continuación se describe el estado de esfuerzos plano cuyas características son importantes para la solución del elemento finito empleado en el algoritmo de esta tesis.

1.4 Descripción del Estado de Esfuerzos Planos.

El estado de esfuerzos en dos dimensiones, es decir biaxial, también se conoce como esfuerzo plano. El esfuerzo plano requiere que se considere que un esfuerzo principal sea igual a cero. Éste es un estado de esfuerzos importante porque representa la situación física que ocurre en un punto libre de sollicitaciones en la superficie de un cuerpo.

Para entender esto, se toma en cuenta un cuerpo (medio continuo) sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio estático (con velocidad nula), en la figura 1.4 se puede observar que está sometido a tres condiciones de equilibrio, equilibrio externo, equilibrio interno y equilibrio entre fuerzas internas y externas.



F_1, F_2, F_3, F_4 fuerzas externas
 Equilibrio de fuerzas externas
 $\sum F_e = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0$

$F_{1/D}, F_{2/I}$, Resultantes de fuerzas internas
 Equilibrio de fuerzas internas
 $\sum F_i = F_{1/D} + F_{2/I} = 0$

Fig.1.4 Equilibrio entre fuerzas externas y fuerzas internas $\sum F_e + \sum F_i = 0$ [30].

Las fuerzas, sean de cuerpo o de contacto, representan sollicitaciones sobre el medio continuo; sus efectos dependerán evidentemente de su magnitud y dirección, pero también de las condiciones geométricas del cuerpo. Por tal motivo y para facilitar el análisis del efecto de éstas es necesario describir el área sobre la que se presentan a través de lo cual se llega a definir el concepto de esfuerzo. La fuerza resultante $F_{1/D}$ de la figura 1.4 se representa en principio en el centroide del área descrita sobre el plano de corte; sin embargo, resulta evidente que la carga se distribuye sobre la superficie A.

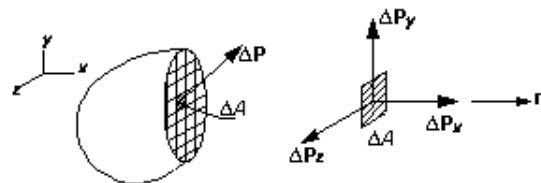


Fig.1.5 ΔP resultante de la fuerza interna aplicada sobre el área ΔA [30].

Por otra parte es evidente que ΔP se puede descomponer en su componente normal \mathbf{n} a la superficie y en su componente tangencial, de tal forma que se puede definir entonces los denominados esfuerzos normales y los tangenciales o de corte. Así mismo, el sistema coordenado (x, y, z) de referencia también se toma conforme a dicha normal.

La intensidad de las fuerzas por unidad de área, es decir, los esfuerzos promedios, están dados por: $\sigma_{xx} = \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$, $\tau_{xy} = \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$, $\tau_{xz} = \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$

Si $\Delta A \rightarrow 0$, los esfuerzos “instantáneos” están dados por:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} = \frac{dP_x}{dA}, \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} = \frac{dP_y}{dA}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A} = \frac{dP_z}{dA}$$

La intensidad de la fuerza normal a la superficie es el *esfuerzo normal* σ_{xx} y puede ser de *compresión* (cuando va hacia la superficie) o de *tensión* o tracción (cuando sale de la superficie). A la vez los esfuerzos τ_{xy} τ_{xz} son paralelos a la superficie en cuestión, por lo que se conocen como esfuerzos tangentes o *esfuerzos cortantes*.

Tomando un elemento diferencial interno en la materia se tiene las componentes de esfuerzo mostradas en la figura.

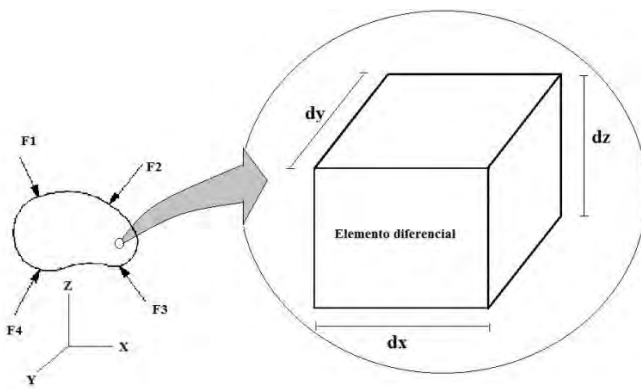


Fig.1.6 Elemento diferencial tomada del continuo

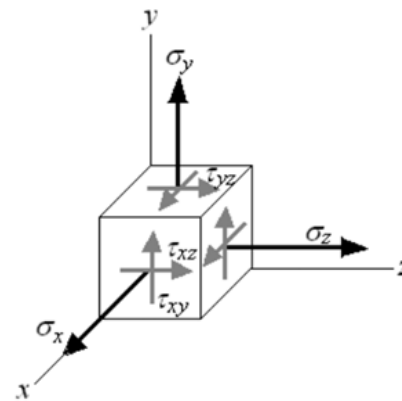


Fig.1.7 Componentes de esfuerzo

Las componentes de esfuerzo se agrupan en el tensor de esfuerzo de la siguiente manera

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Cuando en una dirección, los esfuerzos son nulos, se dice que se tiene un estado plano de esfuerzos, si la dirección del esfuerzo principal que es cero se elige arbitrariamente en el eje z se tiene lo siguiente:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

El tensor de esfuerzos se escribe de la forma, $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yz} & \sigma_y \end{bmatrix}$

Las resultantes de esfuerzos que actúan en el estado de esfuerzos plano, se supone que pasan por el centroide del cuerpo de modo que no se tienen pares o torques actuando directamente en él. Dado que se supone equilibrio de fuerzas en dicho cuerpo $\sum M_z = 0$, es

decir, $-(\tau_{yx}dx dz)dy + (\tau_{xy}dy dz)dx = 0$ y como $dV = dx dy dz \neq 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$, esto significa que el tensor esfuerzo es simétrico.

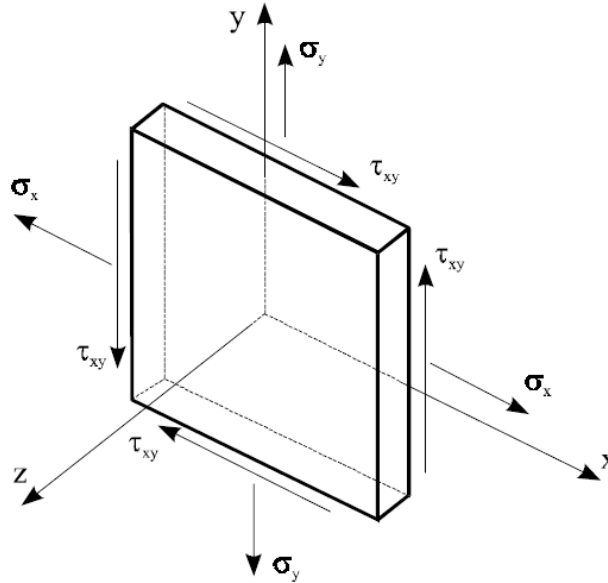


Fig.1.8 Estado de esfuerzos plano

La ecuación constitutiva, es decir la que relaciona esfuerzos y deformaciones, para esfuerzos planos es:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La cual se puede simplificar como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

A pesar de que el esfuerzo normal sobre el eje local Z es cero, la deformación inducida en el eje z no lo es. La ecuación anterior se puede utilizar para calcular el valor de deformación para un material elástico lineal [23].

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_y} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

Relocalizando la consideración para esfuerzo plano se obtiene:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E_y}$$

el cálculo de los esfuerzos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E_y}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

A la matriz de propiedades se le asigna la letra C.

$$C = \frac{E_y}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2(1+\nu)} \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Desarrollo del Algoritmo

“Most of the fundamental ideas of science are essentially simple, and may, as a rule, be expressed in a language comprehensible to everyone”

[Albert Einstein Koch]

La introducción de técnicas de optimización en el diseño de estructuras se hace necesaria, ya que proporciona ventajas con relación a la reducción del costo y disminución en tiempo para determinar la mejor solución en comparación con el diseño tradicional. Permitiendo considerar especificaciones, cada vez más numerosas que se exigen en las estructuras actuales.

En el proceso de diseño tradicional se formula como se puede observar en la figura 2.1, pero éste depende directamente de la experiencia del diseñador que al no poder comprobar todas las posibles soluciones, debido a los costos de tiempo que esto involucra, obtiene resultados buenos pero que no son óptimos.

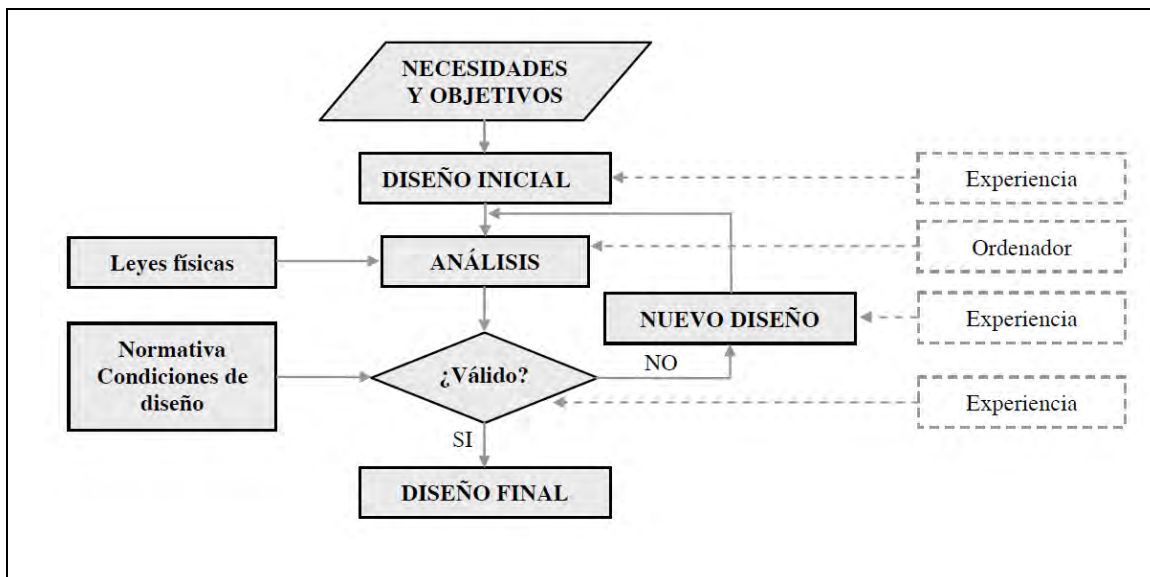


Fig.2.1 Proceso de diseño por prueba y error [11].

Las técnicas de optimización reforman el proceso de diseño con el objetivo de resolver automáticamente un mayor número de soluciones, de forma que el resultado se acerque al óptimo.

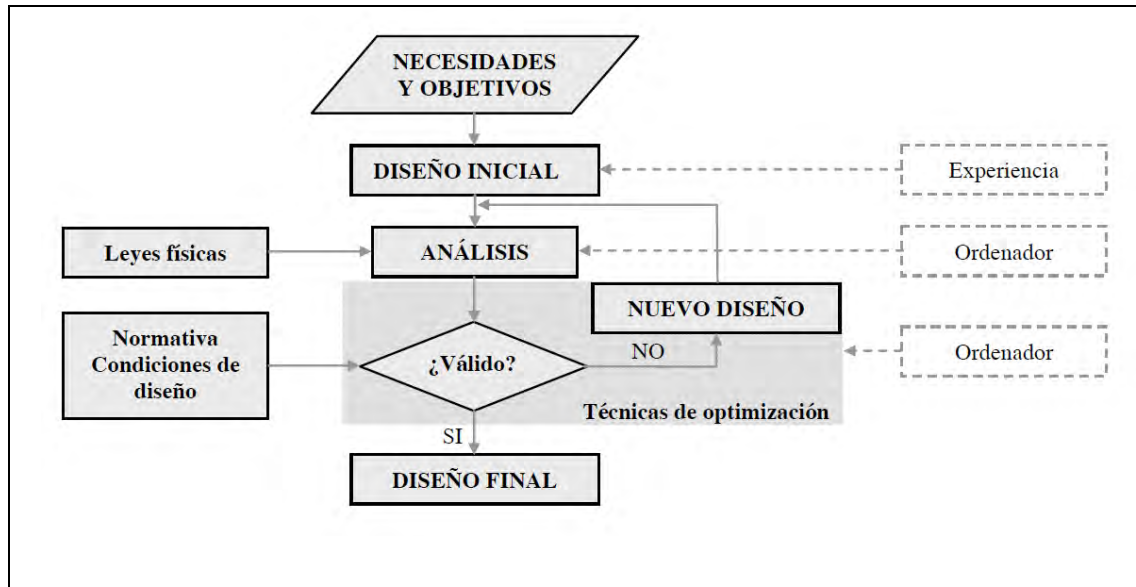


Fig.2.2 Proceso de diseño optimizado [11].

A continuación tres etapas fundamentales serán detalladas para entender mejor el algoritmo de optimización estructural evolutiva que se aborda en esta tesis; modelado geométrico, análisis por elementos finitos y criterio de optimización.

2.1 Generador de Mallas.

El modelado geométrico es la herramienta que nos permite trasladar determinado objeto físico (Estructuras mecánicas) a una representación simbólica, la cual es utilizada para manipular características geométricas de los objetos, lo que permite editarlos, visualizarlos, realizar cálculos y simulaciones.

En esencia, el modelo geométrico es simplemente un conjunto de datos referentes a la geometría, estructura y propiedades del objeto. Los datos que contenga dependerán de la naturaleza del objeto a diseñar. Esto es, será distinta la estructura de un modelo geométrico para representar un circuito eléctrico de la usada para representar el fuselaje de un avión. Además, en la etapa de diseño del modelo se debe de tener en cuenta que la estructura deberá servir para realizar determinadas operaciones antes mencionadas: edición, visualización, cálculo de propiedades, etc.

“El modelado geométrico se puede definir como: una representación matemática de una geometría real, en un dominio bidimensional o tridimensional, a través de curvas conocidas, tales como líneas, parábolas, hipérbolas, etc., mediante un algoritmo computacional.” [21].

Una malla es la discretización geométrica de una región, formada por nodos y elementos conectados entre sí. La conectividad de una malla es la descripción de los nodos que componen cada uno de los elementos que la forman. A la vez, la interacción entre elementos está dada por los nodos. La solución a estos nodos son las variables primarias en el proceder del elemento finito. Para cada análisis se requiere de un apropiado grupo de ecuaciones de elementos y la solución del elemento propuesta se escribe en términos de variables seleccionadas en los nodos. Las variables en los nodos son generalmente referidas como los Grados de Libertad GdL.

El análisis por elementos finitos depende del número de elementos y el arreglo de estos para definir el modelo. De la misma forma dependiendo del tipo de elemento y de la precisión que se requiere se tiene que definir una malla más o menos fina de elementos.

Existen numerosos métodos de generación de malla para elementos finitos [7]. Estos métodos se clasifican, según su grado de automatización, en manuales, semiautomáticos y automáticos [17]. En los métodos manuales, toda la información es provista manualmente, tanto la forma de los elementos como las coordenadas de los nodos, los atributos físicos, etc. Los métodos semiautomáticos aprovechan que el dominio a discretizar tiene formas geométricas sencillas para utilizar un modelo mixto, en el que se da información sobre algunos aspectos del mallado, y una rutina provee el resto. Por último, los métodos automáticos generan la malla sin requerir ninguna información adicional; únicamente necesitan conocer el contorno del dominio y las características físicas que debe tener en cuenta.

Las mallas pueden ser estructuradas o no estructuradas. En las primeras, la conectividad puede ser descrita por algún esquema de indexamiento (identificación mediante índices i , j , k); mientras que en las segundas, esa relación no existe y se hace necesario una estructura de datos especial para representar la información de dicha conectividad [22].

El tipo de elemento utilizado en la malla que discretiza la estructura por analizar es de vital importancia. La figura 2.3 muestra la configuración de tres elementos bidimensionales clasificados en „buenos”, „pobres” e ‘ilegales’. Los buenos elementos se caracterizan porque su proporción (relación largo/ancho) es cercana a la unidad; así, por ejemplo, en elementos formados por cuatro nodos los ángulos deben ser lo más cercano a 90 grados y el ángulo interno para elementos de configuración diferente depende del número de nodos que contenga dicho elemento. Los elementos pobres deben ser evitados, pues estos pueden generar resultados inexactos. Los elementos ilegales son inaceptables, y no deben ser usados para modelos de elementos finitos. Cuando elementos ilegales son dibujados inadvertidamente, estos generan modelos de elementos finitos inválidos [29].

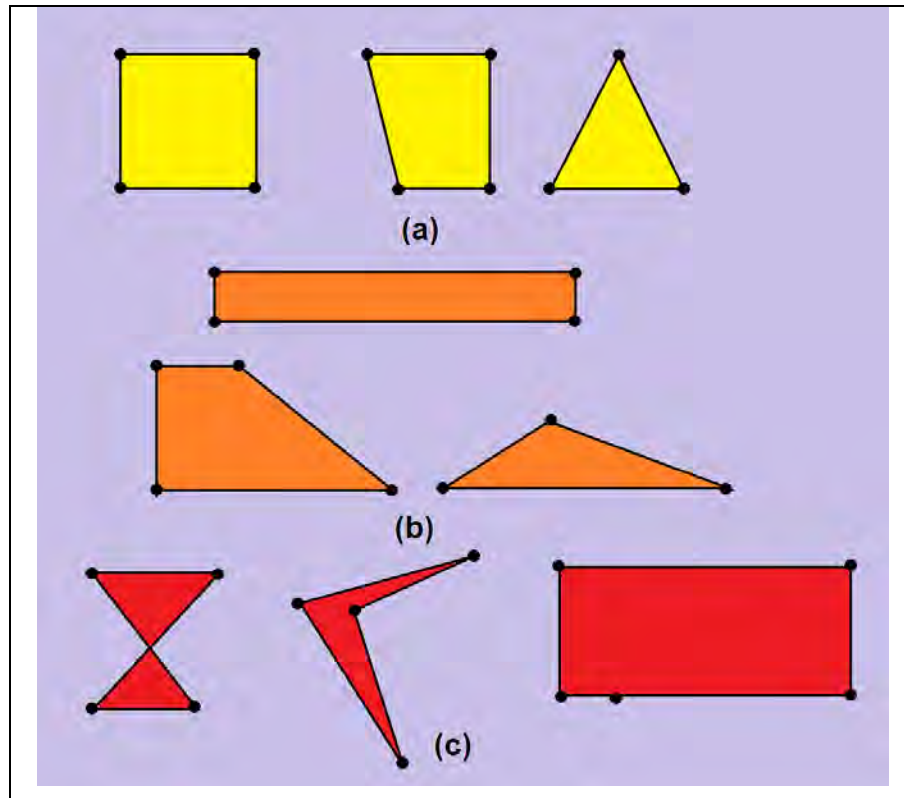


Fig.2.3 Elementos (a) Buenos; (b) Pobres; (c) inaceptables.

Asimetría es definida como la variación del ángulo del vértice del elemento, desde 60° para triángulos, y desde 90° para cuadriláteros. Dos de los elementos “pobres” en la figura 2.3(c), pueden ser caracterizados como asimétricos.

Para elementos triangulares, se recomienda evitar ángulos agudos menores a 30° , y para elementos cuadriláteros, ángulos obtusos mayores que 120° , ver Figura 2.3 (b). Como regla general, el uso de asimetría es aceptable cuando se está interesado principalmente en los desplazamientos. Sin embargo, si los esfuerzos deben ser calculados con precisión, entonces el modelo debe tener menor asimetría.

2.2 Análisis por Elementos Finitos para Esfuerzos Planos (Elemento Finito plano general)

Los problemas de deformación y esfuerzo plano son casos especiales de problemas de sólidos elásticos, en los cuales las variables de interés corresponden a desplazamientos, deformaciones y esfuerzos. Los desplazamientos pueden considerarse como las variables principales de la cuales, una vez conocidas, se desprenden las otras dos. En casos planos, con referencia cartesiana, las variables o grados de libertad a determinar son los

desplazamientos en las direcciones X y Y, es decir, los valores de las distribuciones de desplazamientos $u[x, y]$ y $v[x, y]$ en los nodos de una malla de elementos finitos (2 GdL por nodo).

Común a cualquier análisis por elementos finitos, las distribuciones de desplazamientos se calculan a partir de funciones de interpolación las cuales manejaremos con la letra (N) y valores nodales de estos. Si suponemos un FEM cualquiera de n número de nodos, se puede decir que:

$$\begin{pmatrix} u[x, y] \\ v[x, y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = N^T \cdot d$$

La deformación puede calcularse como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = B^T \cdot d$$

y de las ecuaciones constitutivas se calculan los esfuerzos [3].

La ecuación del elemento finito para situaciones planas es (sin considerar las cargas puntuales):

$$K \cdot d = r q + r b$$

donde la matriz de rigidez es: $K = h \int_A B \cdot C \cdot B^T dA$

donde h es el espesor del elemento finito; el vector de fuerzas de cuerpo es:

$$r b = h \int \int_A N \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} dA$$

donde b_x y b_y son las componentes de la fuerza de cuerpo por unidad de volumen aplicada en el centro de masas del elemento finito.

En cuanto al vector $r q$, que es el equivalente a las cargas distribuidas, es necesario considerar lo siguiente. Cada elemento finito para esfuerzo y deformación planos tiene una

geometría definida por n nodos. Estos n nodos, en el caso más simple, generan n aristas (un elemento triangular tiene tres nodos y tres aristas, por ejemplo). Por lo tanto, sobre un elemento finito plano pueden existir hasta n cargas distribuidas $q_c = \{q_{xc}, q_{yc}\}$; donde la $c=1,2,\dots,n$ se refiere a la arista en cuestión. Para cada carga distribuida se calcula un vector r_{qc} y se emplea la función de interpolación correspondiente N_c :

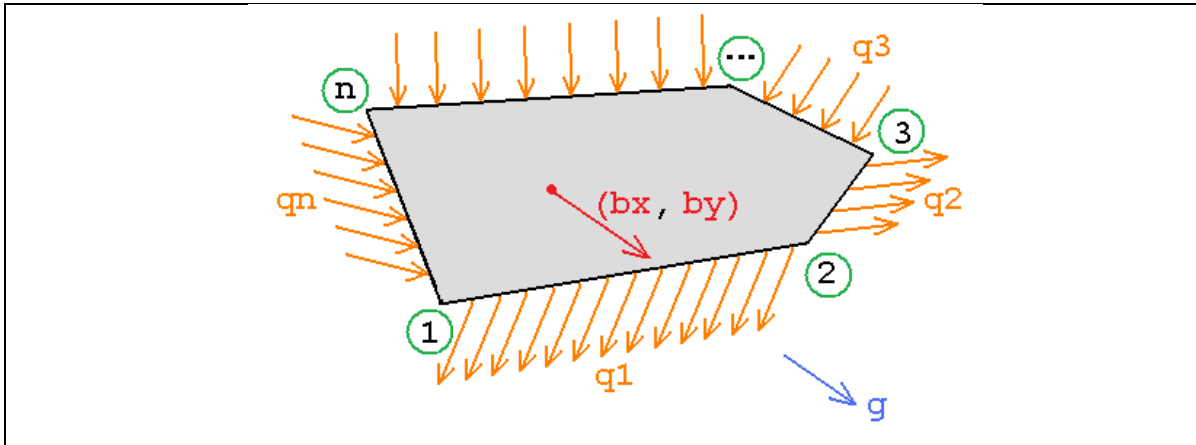


Fig.2.4 Elemento finito para esfuerzo plano, geometría definida por n nodos.

$$r_{qc} = \int_c N_c \cdot \begin{pmatrix} q_{xc} \\ q_{yc} \end{pmatrix} d c$$

por lo tanto, el vector r_q es:

$$r_q = \int_{c \rightarrow 1} N_{c \rightarrow 1} \cdot \begin{pmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \end{pmatrix} d(c \rightarrow 1) + \int_{c \rightarrow 2} N_{c \rightarrow 2} \cdot \begin{pmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \end{pmatrix} d(c \rightarrow 2) + \dots + \int_{c \rightarrow n} N_{c \rightarrow n} \cdot \begin{pmatrix} q_{xn} \\ q_{yn} \end{pmatrix} d(c \rightarrow n)$$

donde $N_{c \rightarrow i}$ serán las funciones de interpolación para cada arista que se tiene [23].

El elemento finito triangular que se emplea en el algoritmo de esta tesis se encuentra explicado en el subtema 3.2 del capítulo 3.

2.3 Algoritmo de Reglas Evolutivas

En general, con la optimización se llega a un resultado que podría haber obtenido un diseñador experimentado, siempre que hubiera podido disponer del tiempo y dinero necesarios para explorar directamente todas las alternativas del diseño. La introducción de técnicas de optimización en el diseño estructural se hace necesaria a la vista de las ventajas que ofrece, como son: la reducción de costos y el ahorro de tiempo a los diseñadores; permitiéndoles mayor dedicación a las fases más creativas del diseño y la posibilidad de

considerar las especificaciones de diseño cada vez más numerosas y difíciles de cumplir que se exige a las estructuras actuales.

En el diagrama que se plantea a continuación muestra de manera general, la metodología de optimización de este trabajo, bajo la metodología del diseño óptimo estructural en combinación con el análisis por elementos finitos.

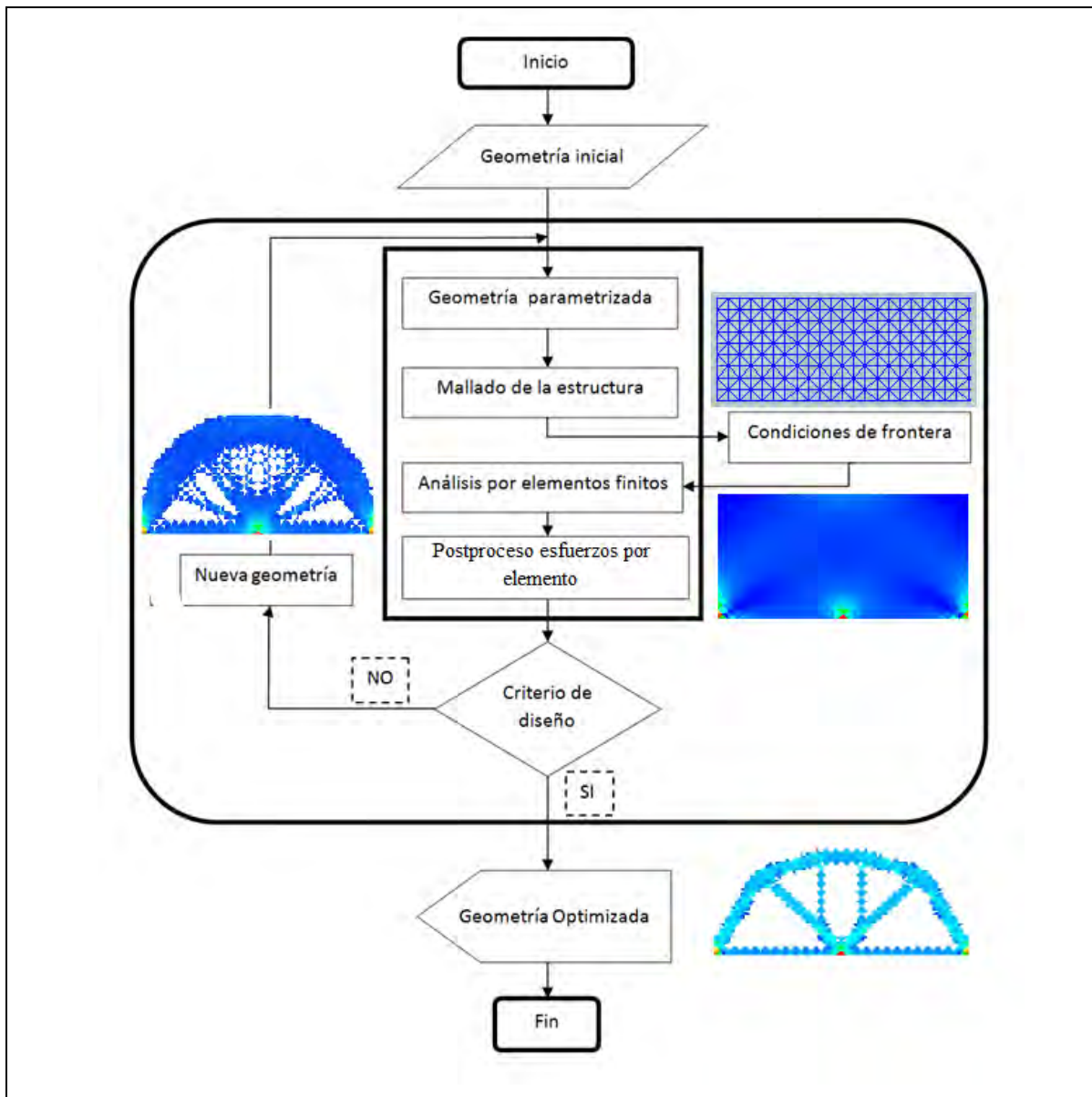


Fig.2.5 Diagrama de flujo, correspondiente a la metodología de optimización.

El concepto clásico de optimización estructural evolutiva desarrollado por Xie y Grant [27] parte de la idea fundamental que un objeto evoluciona hacia una estructura completamente esforzada a través de remover lentamente material que no presenta niveles

de esfuerzos altos y considera que la estructura óptima es aquella en la cual cada elemento está trabajando a la tensión máxima admisible.

El algoritmo de de Reglas Evolutivas es el siguiente:

- 1) Definir la geometría inicial del modelo mediante las dimensiones del dominio rectangular.
- 2) Dividir el dominio mediante una malla fija de elementos finitos.
- 3) Aplicar las cargas así como los casos de carga aplicados (CFN Y CFE) y zonas de no diseño.
- 4) Establecer las propiedades del material.
- 5) Definir la tensión de Von Mises como el criterio a optimizar.
- 6) Realizar el cálculo del esfuerzo de Von Mises en cada uno de los elementos mediante análisis de elementos finitos y se compara el esfuerzo de Von Mises del elemento $\sigma_{vm}^{(e)}$ contra el esfuerzo máximo permisible de la estructura $\sigma_{vm,e}^{max}$.

Donde

$\sigma_{vm}^{(e)}$ Tracción de Von Mises del elemento e.

$\sigma_{vm,e}^{max}$ Máxima tracción de Von Mises en los elementos.

- 7) Se modifica geometría con base en un proceso de remoción y/o adición de material, definido por el nivel de esfuerzo de cada uno de los elementos de la estructura. La remoción se lleva a cabo en los elementos que presentan un bajo nivel de esfuerzos $\sigma_{vm}^{(e)} \leq RR \sigma_{vm,e}^{max}$. Por otra parte, la adición de material se aplica a aquellos elementos cuyo nivel de esfuerzos es alto o cuyo esfuerzo de Von Mises es mayor al esfuerzo de cedencia del material $\sigma_{vm}^{(e)} \geq IR \sigma_{vm,e}^{max}$.

Donde

RR Tasa de rechazo $0 \leq RR \leq 1$

IR Tasa de adición $0 \leq IR \leq 1$

$$RR = r_0 + r_1 * SS + a_{RR} * ON$$

$$IR = i_0 - i_1 * SS - a_{IR} * ON$$

SS Es el número de estados estables, un contador indica todos los estados estables en el proceso de evolución.

ON Es el número de oscilación, un contador lo incrementa en una unidad cada vez que la optimización alcanza un estado de oscilatorio. Se define como un estado oscilatorio cuando un elemento es adherido y el mismo elemento es removido en la subsecuente iteración y sigue este patrón hasta el infinito. El incremento de esta variable cada que se llega a un estado oscilatorio permite que la estructura pueda continuar con su evolución.

$$r_0 = 0$$

r_1 Constante determinada con la experiencia de BESO, normalmente es igual a 0.001.

a_{RR} Es una constante de número de oscilación determinada por la experiencia de BESO, normalmente 0.01.

8) Si se llega a un estado en donde no hay ningún elemento en el dominio del diseño que satisfacen las ecuaciones del paso 7 se habrá alcanzado un estado estable. Para continuar con el proceso de optimización incrementar el número de estado estable por uno (SS), y repetir el paso 7.

9) Si se llega a un estado oscilatorio antes de llegar al criterio de optimización elegido, incrementar el valor del estado oscilatorio (ON) en una unidad y repetir el paso 7.

10) Repetir los pasos del 6 al 10 hasta que el, o los criterios de optimización se alcancen.

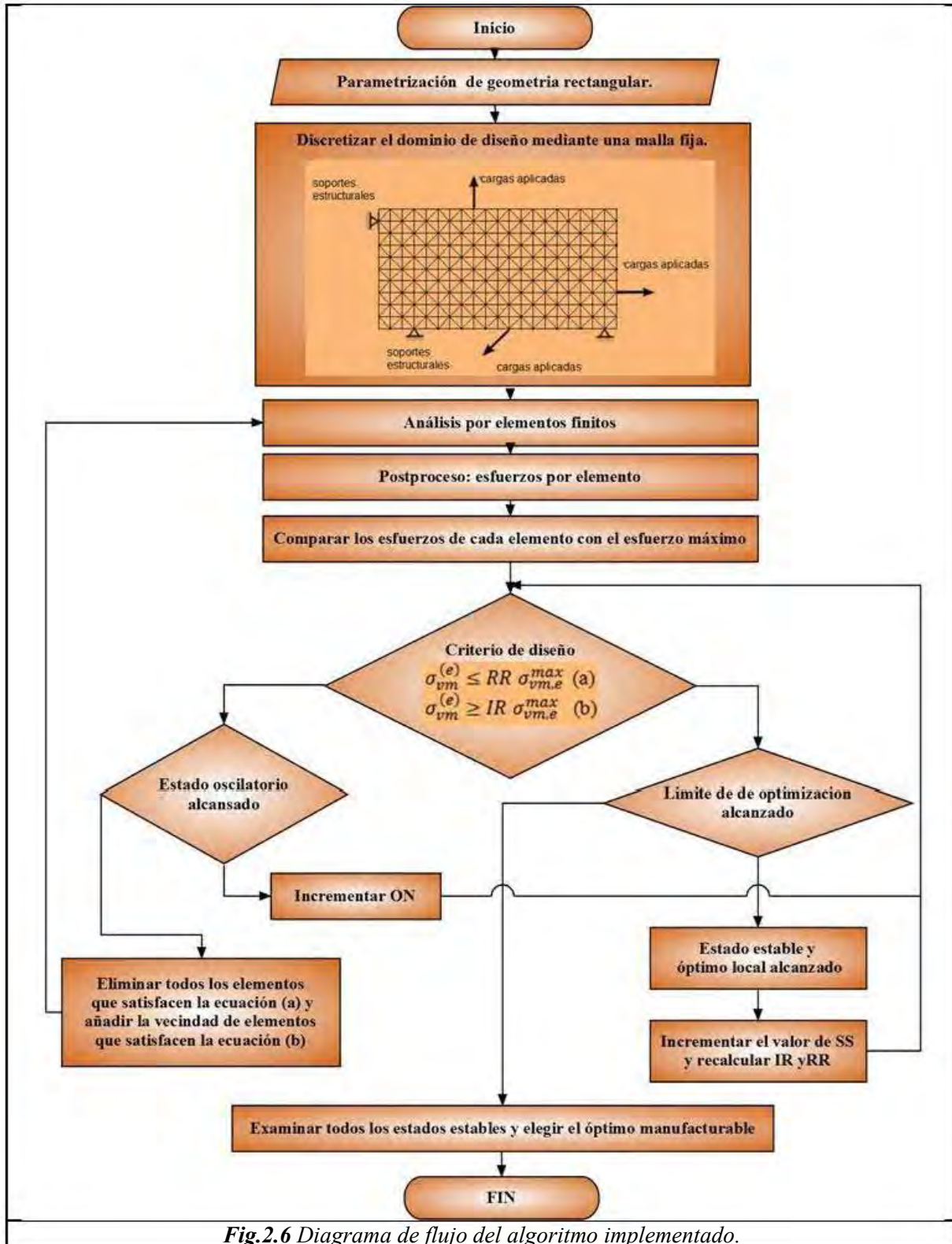


Fig.2.6 Diagrama de flujo del algoritmo implementado.

Capítulo 3

Implementación del Algoritmo

"Hay grandeza en esta concepción de la vida,... que mientras este planeta ha ido girando según la constante ley de la gravitación, se han desarrollado y se están desarrollando, a partir de un comienzo tan sencillo, infinidad de formas cada vez más bellas y maravillosas"

[Charles Robert Darwin]

Este capítulo detalla la implementación del algoritmo descrito en el capítulo 2. Para esta tesis se desarrollaron tres módulos (Módulo de mallado, Módulo de Análisis por Elementos Finitos y Módulo de Optimización) mediante los cuales se logra encontrar la solución óptima de la estructura deseada.

3.1 Módulo de Mallado

El modelado geométrico del dominio en el Análisis por Elementos Finitos es representado por una malla de elementos y por la determinación de matrices de rigidez que se realiza mediante integración numérica. Esta etapa resulta de vital importancia ya que para un proceso de optimización la geometría de diseño no es definitiva, se ve continuamente modificada, lo que requiere generar una nueva malla de elementos finitos para volver a analizar la nueva estructura, que computacionalmente resulta costoso debido al tiempo de generación de la misma.

En esta tesis se emplea el concepto de malla fija, cuyos principales objetivos de esta representación son:

1. Establecer un vínculo eficiente entre la estructura mallada y el modelo de análisis por elementos finitos.
2. Disminuir el tiempo de cómputo para obtener la matriz de rigidez de la estructura.

La primera fase consiste en definir el dominio de los elementos finitos. Si permitimos que Ω_{fg} sea el dominio (en forma de “rectángulo”) más pequeño que se ajusta y encierra

por completo a la región Ω , estando alineado con los ejes principales, entonces Ω_{fg} es definido como el dominio de la malla fija (Fig. 3.1).

Un nodo $x \in \Omega_{fg}$ es considerado interior si $x \in \Omega$. Un punto $x \in \Omega_{fg}$ es considerado exterior si $x \notin \Omega$.

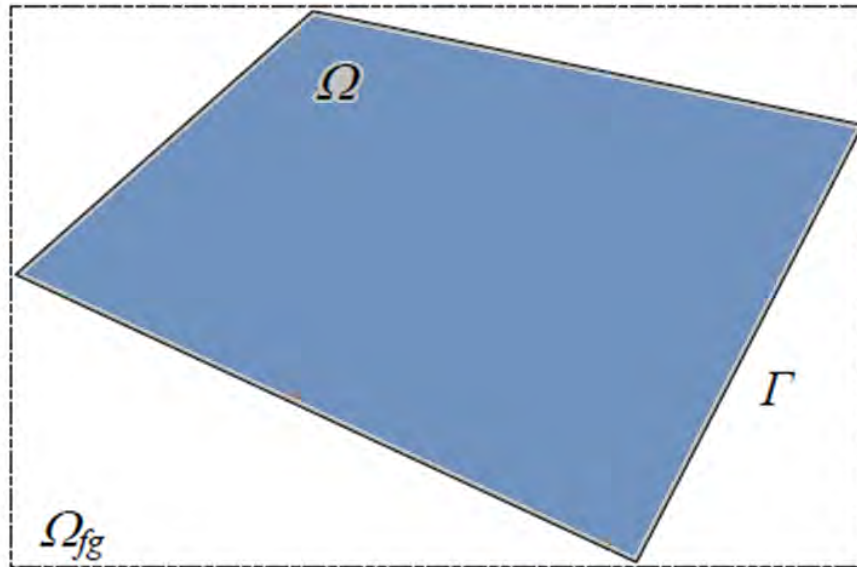


Fig. 3.1 Dominio de la malla fija Ω_{fg} , región de diseño Ω , y contorno de la estructura Γ (Zona donde se ha retirado material)

Cuando la malla fija es superpuesta sobre el dominio Ω_{fg} obtenemos una malla discreta de elementos finitos. Esta malla está dividida en elementos con una geometría fija (elementos triangulares en dos dimensiones). En función de la posición de los elementos con respecto a la estructura, se pueden clasificar como: elementos interiores I (*In*) si todos sus nodos están contenidos en Ω , exteriores O (*Out*) si todos sus nodos están fuera de Ω , y de borde B (*Boundary*) [18].

Los elementos I, O y B se diferencian exclusivamente en las propiedades constitutivas del material. Los elementos I tienen las propiedades del material de la estructura (material real), los elementos O las propiedades de un medio virtual, y los elementos B presentan una combinación entre las propiedades del material real y el material virtual.

Las características del método de optimización evolutivo permiten simplificar aun más la aplicación del concepto de malla fija para esta tesis, ya que en la búsqueda de la forma óptima, se parte de la discretización de un área rectangular (*nodos que pertenecen a Ω_{fg}*) a la cual se le retira o adiciona elementos según el criterio de Xie obteniendo una estructura diferente cada vez, pero sin que la regeneración de la malla sea necesaria. La nueva forma encontrada contiene únicamente nodos

interiores (*nodos que pertenecen a Ω*) debido a que sólo se modifican elementos enteros y no fracciones de ellos. En consecuencia no se presentan elementos de borde B que tengan combinación del material real y virtual en sus propiedades.

En la generación de mallas usualmente se prefieren los elementos cuadriláteros a los triangulares por razones de isotropía geométrica. Sin embargo, se sugiere el uso de elementos triangulares cuando se presentan irregularidades en la geometría del elemento a modelar [4]. Las formas óptimas que se pueden encontrar generalmente muestran estas irregularidades, a partir de lo anterior, para la generación de la malla en el desarrollo del algoritmo de esta tesis se emplean elementos triangulares los cuales se alternan de la manera en que se muestra en la Fig. 3.2.

Para el mallado requiere definirse el dominio de la malla fija, proporcionando las longitudes en el plano cartesiano de dos dimensiones X y Y. Es requisito a continuación, proporcionar el nivel de discretización tanto en el eje X como en Y (Fig. 3.2), de acuerdo con estas dimensiones se genera una nube de puntos en el dominio de diseño.

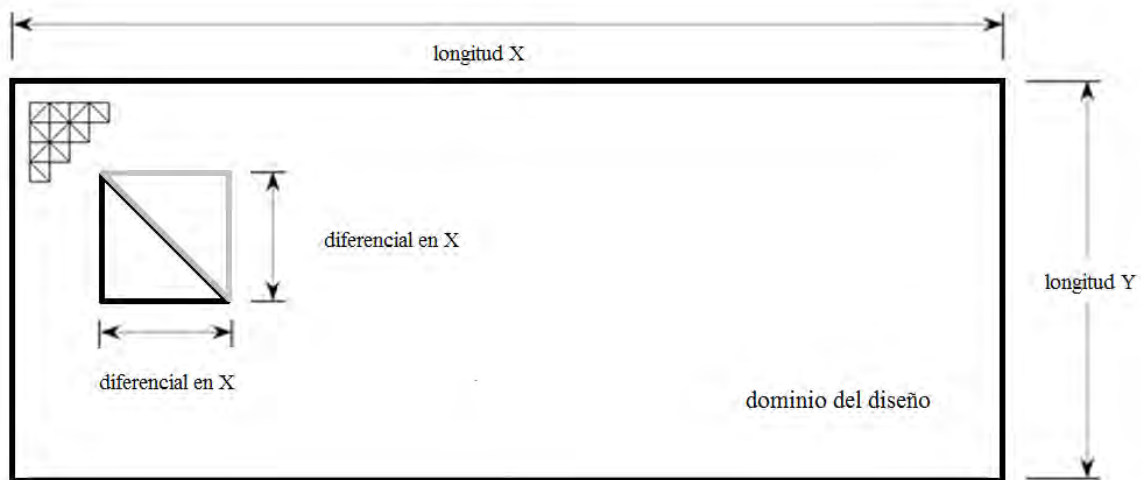
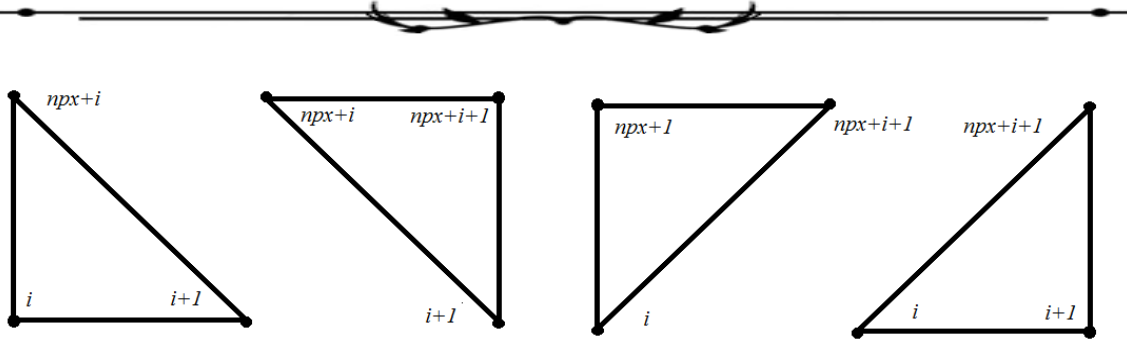


Fig. 3.2 Dominio rectangular de diseño y características de elementos de mallado.

A los nodos (nube puntos generados) se les asigna una conectividad la cual describe al elemento triangular, esta asignación se lleva a cabo mediante una regla de ordenamiento de nodos. El dominio de diseño contiene “i” número de nodos y mediante las siguientes reglas se generan los elementos que definen la malla:



Conectividades:

$$\{i, i+1, npx+i\}$$

$$\{i+1, npx+i+1, npx+i\}$$

$$\{i+1, npx+i+1, npx+i\}$$

$$\{i, i+1, npx+i\}$$

Donde:

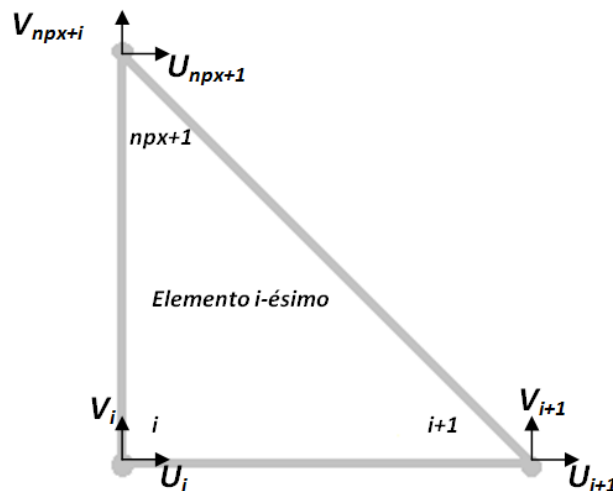
i el nodo i -ésimo.

npx numero de nodos a lo largo del eje X, $npx = \frac{\text{longitud en la direccion X del dominio de diseño}}{\text{diferencial de longitud en X } (\Delta X)}$

Fig. 3.3 Conectividad de elementos triangulares que forman la malla.

Al formar la malla se alternan el par de elementos triangulares según se requieren, sólo siendo necesario la información del nodo i -ésimo para la generación de los mismos. La conectividad de los elementos se agrupa en un vector el cual permite el manejo matemático de la malla.

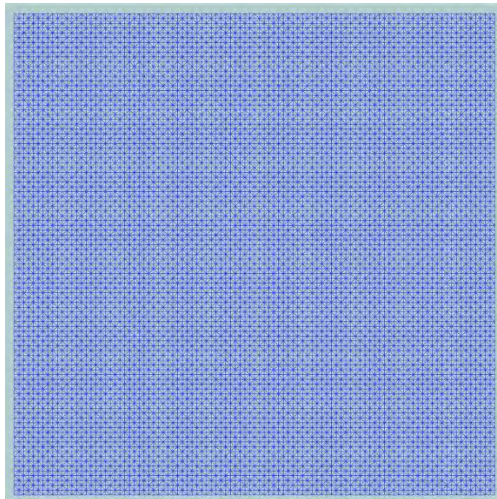
Este trabajo de tesis contempla dos grados de libertad (GdL) por nodo, lo cual se aplica en la conectividad de la malla y finalmente se obtiene la información de conectividades en función de los grados de libertad.



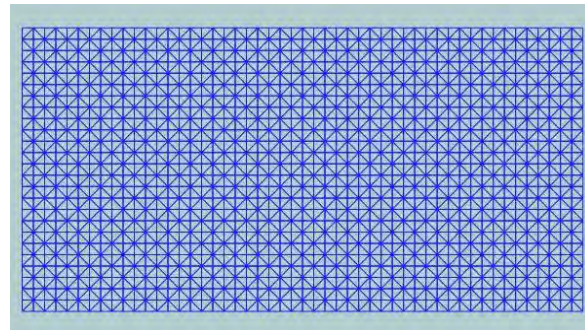
Conectividad del elemento por GdL $\{U_i, V_i, U_{i+1}, V_{i+1}, U_{npx+i}, V_{npx+i}\}$

Fig. 3.4 Elemento triangular con tres nodos y seis grados de libertad.

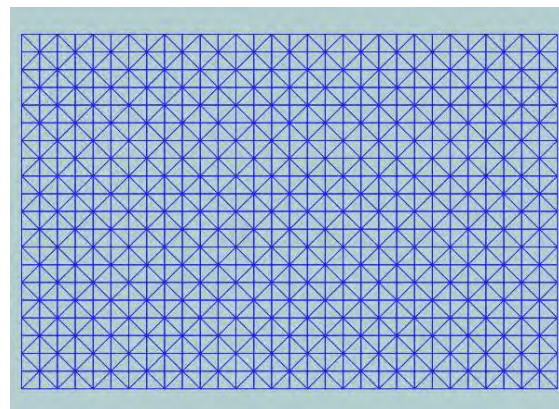
En la figura 3.5 se muestran tres mallas con diferente número de elementos y dimensiones que puede generar este módulo. Para cada una de las mallas se presentan los datos más significativos como son número de nodos, elementos y tiempo de ejecución.



Mallado 1: 20 000 elementos, 10 201 nodos.
Tiempo: 11.875 segundos.



Mallado 2: 2 500 elementos, 1 326 nodos.
Tiempo: 0.282 segundos.



Mallado 3: 1 200 elementos, 651 nodos.
Tiempo: 0.094 segundos.

Fig. 3.5 Mallado con diferente número de elementos.

3.1 Módulo de Análisis por Elementos Finitos (FEM)

El método numérico de elementos finitos es el módulo mediante el cual se obtiene la solución de los desplazamientos nodales, de cada uno de los elementos discretizados que forman parte de la estructura bajo análisis.

Para la implementación de este módulo se requiere información esencial para la resolución del diseño óptimo. Bajo la premisa del análisis de esfuerzo plano, se debe indicar el espesor (h) de la placa, así como las condiciones de frontera esenciales (CFE), condiciones de frontera naturales (CFN) y diferentes solicitaciones como: fuerzas de cuerpo, cargas distribuidas, cargas tangenciales y normales.

Así mismo el conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos de la malla generada se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales, la matriz de dicho sistema llamado matriz de rigidez y el elemento finito en general para elementos triangulares, se explica a continuación.

3.2.1 Elemento Finito Triangular

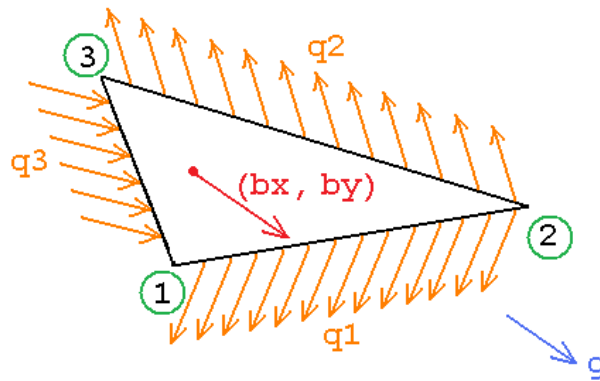


Fig. 3.6 Elemento finito triangular sujeto a diferentes solicitaciones

En la figura 3.5 se puede observar un elemento finito triangular simple formado por tres nodos de dos GdL cada uno, en total 6 GdL $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$. Para interpolar estos valores en el dominio del elemento completo, se definen las siguientes funciones de interpolación lineales, las cuales representan planos [3].

$$N_1 = \frac{1}{2A} (x b_1 + y c_1 + f_1);$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} (x b_2 + y c_2 + f_2);$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} (x b_3 + y c_3 + f_3);$$

donde A es el área del triángulo; b_i, c_i, f_i para $i=1, 2, 3$ son las siguientes constantes geométricas del triángulo

$$b_1 = y_2 - y_3; \quad b_2 = y_3 - y_1; \quad b_3 = y_1 - y_2;$$

$$c_1 = x_3 - x_2; \quad c_2 = x_1 - x_3; \quad c_3 = x_2 - x_1;$$

$$f_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2; \quad f_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3; \quad f_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$A = \frac{1}{2} (f_1 + f_2 + f_3)$$

Sustituyendo estas funciones de interpolación en el cálculo de la deformación, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = B^T \cdot d$$

A su vez, sustituyendo lo anterior al cálculo de la matriz de rigidez:

$$K = h \int_A B \cdot C \cdot B^T dA = h A (B \cdot C \cdot B^T)$$

El vector de fuerzas de cuerpo es:

$$r_b = h \int_A N \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} h \int_A N_1 b_x dA \\ h \int_A N_1 b_y dA \\ h \int_A N_2 b_x dA \\ h \int_A N_2 b_y dA \\ h \int_A N_3 b_x dA \\ h \int_A N_3 b_y dA \end{pmatrix} = \frac{hA}{3} (b_x \ b_y \ b_x \ b_y \ b_x \ b_y)$$

Cada una de las aristas del triángulo tiene una dirección normal;

$$n_1 = (n_{x1} \ n_{y1});$$

$$n_2 = (n_{x2} \ n_{y2});$$

$$n_3 = (n_{x3} \ n_{y3});$$

Las cargas distribuidas por cada arista, en general se definen en direcciones normal y transversal. Para transformarlas a coordenadas globales x, y se realiza el siguiente cálculo para cada una de ellas:

$$\begin{pmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{xi} & -n_{yi} \\ n_{yi} & n_{xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{ni} \\ q_{ti} \end{pmatrix};$$

donde $i=1, 2, 3$; q_{ni} y q_{ti} son las cargas distribuidas normal y tangencial de la i -ésima arista, respectivamente.

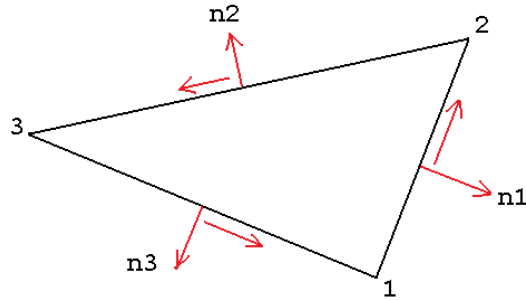


Fig. 3.7 Elemento finito triangular sujeto a cargas distribuidas normales y tangenciales.

Para las aristas del triángulo, las funciones de interpolación $N_{c \rightarrow i}$ se definen como:

$$N_{c \rightarrow 1}^T = \begin{pmatrix} \frac{L1-t}{L1} & 0 & \frac{t}{L1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L1-t}{L1} & 0 & \frac{t}{L1} & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$N_{c \rightarrow 2}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{L2-t}{L2} & 0 & \frac{t}{L2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L2-t}{L2} & 0 & \frac{t}{L2} \end{pmatrix};$$

$$N_{c \rightarrow 3}^T = \begin{pmatrix} \frac{t}{L3} & 0 & 0 & 0 & \frac{L3-t}{L3} & 0 \\ 0 & \frac{t}{L3} & 0 & 0 & 0 & \frac{L3-t}{L3} \end{pmatrix};$$

Donde L_i corresponde a la longitud de arista.

Con estas funciones se calculan los vectores de carga distribuida

$$rq1 = \int_c N_{c \rightarrow 1} \cdot \begin{pmatrix} qx1 \\ qy1 \end{pmatrix} dc \rightarrow 1 = \begin{pmatrix} \int_0^{L1} \frac{L1-t}{L1} qx1 dt \\ \int_0^{L1} \frac{L1-t}{L1} qy1 dt \\ \int_0^{L1} \frac{t}{L1} qx1 dt \\ \int_0^{L1} \frac{t}{L1} qy1 dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow rq1 = \frac{hL1}{2} \begin{pmatrix} qx1 \\ qy1 \\ qx1 \\ qy1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente

$$r_{q2} = \frac{hL_2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{x2} \\ q_{y2} \end{pmatrix}; \quad r_{q3} = \frac{hL_3}{2} \begin{pmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \\ 0 \\ 0 \\ q_{x3} \\ q_{y3} \end{pmatrix}$$

Mediante las ecuaciones obtenidas para un elemento triangular, junto a las funciones de interpolación dadas por N_1 , N_2 y N_3 se puede calcular entonces la matriz B , necesaria para obtener la matriz de Rigidez K para cada elemento, además de introducir la matriz de propiedades C (ver capítulo 1 sección 1.4) para análisis bajo esfuerzo plano [23].

En el ensamble de las ecuaciones de cada uno de los elementos generados, se necesita saber tanto el número de nodos así como el número de elementos generados durante el mallado. La conectividad permite localizar a cada nodo y elemento en una posición dentro de la matriz de ensamble global, así como en el vector de ensamble llamado vector de cargas global, estos inicializados en cero. Esta matriz de ensamble global es una matriz cuadrada de dimensiones $n \times n$, donde:

$$n = 2 * \text{Número total de Nodos, debido a que cada nodo tiene 2 GDL.}$$

Para introducir condiciones de frontera esenciales (CFE) en un nodo, se asigna un valor cero, ya sea al grado de libertad u_i ó v_i dependiendo de la dirección en que se desea la restricción. Se puede entonces reducir la matriz de ensamble global y el vector de cargas global.

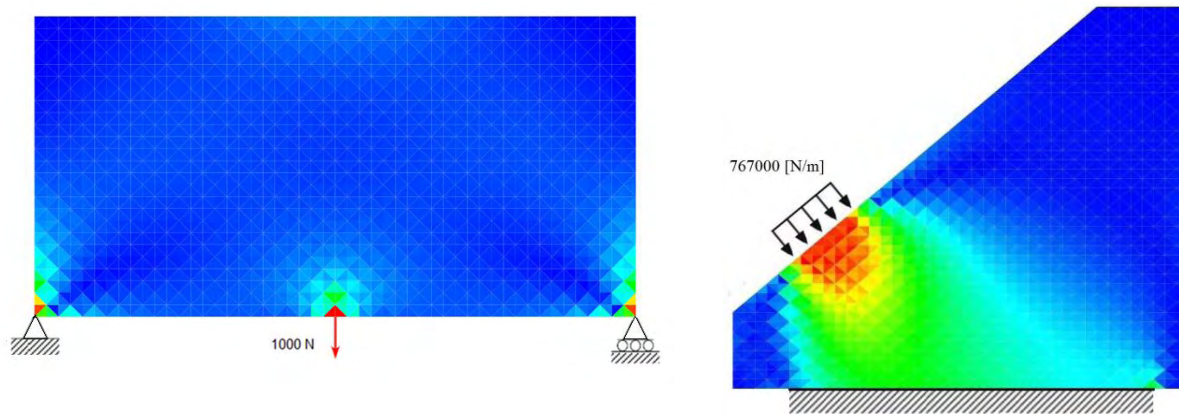
Para solucionar el sistema $kd = r_q + r_b$, se utiliza el método de solución lineal donde se despeja el vector de desplazamientos “d”. La reducción del sistema implica que al invertir la matriz de ensamble global tenga solución. De esta manera se obtiene el valor de los desplazamientos nodales o solución nodal, a este vector que se le tienen que añadir los valores de las condiciones de frontera que fueron retirados al reducir el sistema, en las posiciones que les corresponda.

A partir del vector de soluciones nodales “d”, se procede a realizar entonces el cálculo de cantidades necesarias para la aplicación del método de optimización como lo son: esfuerzo de Von Mises, deformaciones, etc.

El cálculo del esfuerzo por elemento se obtiene aplicando el producto punto a las deformaciones obtenidas y a la matriz de propiedades para esfuerzo plano C . El valor del esfuerzo de von Mises para cada elemento se calcula como:

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (-\sigma_1)^2 + 6(\tau_{XY}^2)}$$

De los valores de esfuerzo de von Mises para cada elemento de la malla se calcula una escala de colores la cual se comporta de la siguiente manera: de Azul a Cyan, de Cyan a Verde, Verde a Amarillo y Amarillo a Rojo, en esta escala el color azul corresponde al mínimo valor de esfuerzo, sucesivamente los siguientes colores tendrán valores mayores y finalmente al rojo le corresponde el valor máximo de esfuerzo. Esta información se hace el gráfico junto con la malla para tener una apreciación visual de la distribución de esfuerzos en la estructura analizada.



Análisis 1:
 2500 elementos, 1326 nodos.
 Tiempo de análisis: 19.281 segundos.
 Esfuerzos:
 Máximo 0.0581728 [N/mm²]
 Promedio 0.0037004 [N/mm²]
 Mínimo 0.0000209 [N/mm²]

Análisis 2:
 3200 elementos, 1681 nodos.
 Tiempo de análisis: 29.188 segundos.
 Esfuerzos:
 Máximo 0.999393 [N/mm²]
 Promedio 0.201017 [N/mm²]
 Mínimo 0.0000904 [N/mm²]

Fig. 3.8 Distribución de esfuerzo en dos diferentes casos generado por el módulo de FEM.

3.3 Módulo de Optimización

El módulo de optimización se encarga de realizar iteraciones en las que se calcula los esfuerzos de una estructura y se optimiza mediante la regla evolutiva. Integrando este módulo al de mallado y de FEM se tiene los elementos que se requiere para la aplicación del algoritmo propuesto para optimización de estructuras.

Este módulo es el que hace la diferencia entre el método tradicional de diseño y el diseño mediante optimización, ya que el algoritmo dirige una serie de rutinas que permiten la

interacción entre los módulos de mallado y de análisis por elementos finitos de manera controlada, sin la necesidad de realizar cambios manuales en cada serie de cálculos.

Es en esta parte del algoritmo donde la malla fija cumple su principal beneficio al método. El ensamble de la matriz de rigidez requiere de generar una serie de funciones, conectividades y características geométricas, así como del ensamble de dicha matriz. Si bien el módulo puede encargarse de esta tarea, esto representa una pérdida de recursos tanto de memoria computacional como en cuestión de tiempo. El concepto de malla fija permite superar las desventajas que ocurren ante la necesidad de generar una matriz de rigidez distinta para cada estructura modificada por iteración.

La matriz de rigidez inicial se toma entonces como base debido a que; si son retirados elementos de la estructura y en consecuencia nodos, se puede hacer un manejo relativamente simple en donde se toma encuentra la conectividad de los o él elemento retirado y mediante ésta se desensambla su información del lugar que le corresponde dentro de la matriz. En el caso en el que un nodo se retira de la malla se deben eliminar los renglones y columnas correspondientes a los grados de libertad contenidos en el nodo.

El manejo de desensamble de elementos y eliminación de nodos también se puede realizar en sentido inverso, añadiendo tanto elementos y por ende conectividades o adicionando grados de libertad contenidos en un nodo. Siguiendo estos pasos una considerable parte del proceso de análisis por elementos finitos es generado, sin la necesidad de recalculer valores para cada elemento. La obtención de los esfuerzos es similar a lo descrito en la sección 3.2.

En el método de optimización descrito (ver capítulo 2 sección 2.3), es regla general que en cada iteración sean removidos o adicionados elementos a la estructura. Esta modificación está relacionada directamente con el nivel de esfuerzos de dichos elementos a través de:

$$RR \quad \text{Tasa de rechazo} \quad 0 \leq RR \leq 1$$

$$RR = r_0 + r_1 * SS + a_{RR} * ON$$

$$\sigma_{vm}^{(e)} \leq RR \sigma_{vm,e}^{max}$$

$$IR \quad \text{Tasa de adición} \quad 0 \leq IR \leq 1$$

$$IR = i_0 - i_1 * SS - a_{IR} * ON$$

$$\sigma_{vm}^{(e)} \geq IR \sigma_{vm,e}^{max}$$

Donde inicialmente las tasas evolutivas tomaran los siguientes valores:

Tasa de rechazo	Tasa de adición
$r_0 = 0$	$i_0 = 1$
$r_1 = 0.001$	$i_1 = 0.01$
$aRR = 0.01$	$aIR = 0.1$
$ON = 0 \quad y \quad SS = 1$	
$\% RR = 0.1$	$\% IR = 99\%$

Iterativamente se obtiene valores de esfuerzos de cada uno de los elementos que conforman la malla fija, dichos valores se normalizan utilizando el valor máximo de esfuerzo obtenido para cada iteración, como paso siguiente se aplican las tasas de rechazo (RR) y adición (IR).

Es muy importante tomar en cuenta que el comportamiento de las tasas, tanto de adición como de rechazo, está dirigido por sus respectivas ecuaciones, las cuales se conforman; de términos constantes obtenidos mediante la experiencia al calibrar la programación del algoritmo, así como de dos términos variables SS y ON de los cual depende encontrar la estructura optima. Los estados estables a lo largo del proceso de optimización se identifican mediante el incremento de SS, siendo posible mediante esto la identificación de óptimos locales. El incremento de ON está definido como estado oscilatorio, lo que significa que, si un mismo elemento o grupo de elementos son adheridos y el o los mismos elementos son removidos en la subsecuente iteración y no se modifica las tasas este patrón se repite hasta el infinito. El aumento de esta variable cada vez que llega a un estado oscilatorio permite que la estructura pueda seguir con su evolución.

Posterior a la identificación de elementos a rechazar y de los elementos en los que se requiere adición, durante el proceso de eliminación es suficiente retirar el elemento indicado, sin embargo para la adición, se establece el añadir elementos en las tres aristas del elemento que presenta mayor esfuerzo según la tasa de adición. El algoritmo es capaz de identificar los elementos que previamente están contenidos en la malla, de tal forma que no se tengan elementos repetidos. En la figura 3.9 se puede observar este proceso.

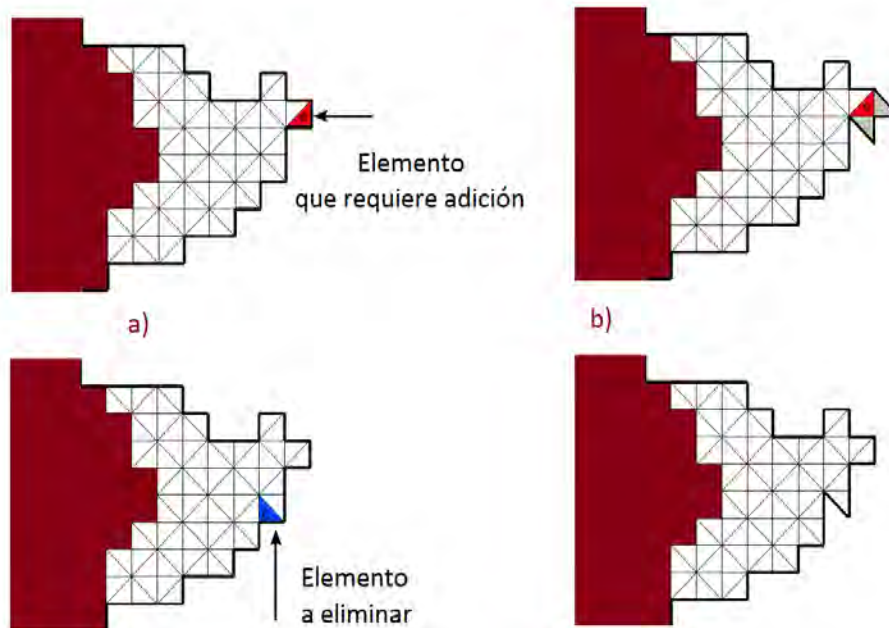


Fig.3.9 a) Elemento a rechazar (azul) y elementos en los que se requiere adición (rojo).
 b) Estructuras generada después de la aplicación del criterio de adición y rechazo.

La estructura generada en cada nueva iteración es analizada mediante elementos finitos, el procedimiento anterior se lleva a cabo iterativamente hasta que no se puede obtener mejoras, es decir, se alcanza el criterio de paro.

3.3.1 Criterio de Paro

Existen diferentes criterios de paro los cuales dependen de las variables de diseño y las características que se consideren. El criterio de paro del algoritmo puede ser un esfuerzo, un volumen, un desplazamiento etc. En este trabajo de tesis se emplea el volumen como dicho criterio, el cual detendrá el proceso de optimización en la iteración que cumpla con el volumen que se especifique.

En el capítulo siguiente se muestra una breve discusión sobre los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo descrito, así mismo se muestran casos de estudio de estructuras que involucran análisis de esfuerzo plano además, se revisan los gráficos obtenidos por dicho algoritmo.

Capítulo 4

Aplicación y Resultados

“La inteligencia consiste no sólo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica.”

[Aristóteles de Estagira]

En el ámbito del diseño estructural óptimo, el análisis depende: de la naturaleza del problema (cálculo estático, dinámico, etc), del tipo de estructura, del modelo matemático de cálculo y del modelo numérico empleado en última instancia. Se evidencia la imposibilidad de realizar un modelo de cálculo único para todos los problemas de análisis estructural. No obstante, una gran parte de los problemas que aparecen en la práctica profesional pueden resolverse eficazmente mediante métodos matriciales, en el caso de estructuras de tipo discreto, o bien mediante el Método de Elementos Finitos en el caso de estructuras de tipo continuo. De esta manera, tomando las consideraciones adecuadas con base en los módulos desarrollados en el capítulo 3, el algoritmo de optimización para estructuras bajo esfuerzo plano generado para esta tesis, se aplica para tres casos de estudio, de los cuales, se obtiene la solución de diseño óptimo con el volumen como criterio de optimización.

4.1 Caso de Estudio I

Estructuras tipo Michell

Los trabajos de Michell [13] plantean problemas estándar de optimización, las soluciones a estos problemas son empleados para probar el desempeño de los diferentes métodos de optimización estructural. Sin embargo, es evidente que si se comparan las soluciones obtenidas por los diferentes métodos, éstas son similares mas no iguales. Dicha desigualdad se deriva de las diferencias en la formulación de métodos de optimización. Lo anterior impide que se pueda hablar de una solución óptima general, pese a este inconveniente la solución de dos métodos diferentes aplicados a un mismo problema guardarán una gran similitud entre soluciones.

En las figuras 4.1 y 4.8 se muestran dos problemas estándar realizados por Michell (ejemplos comunes en la literatura de optimización), en donde se someten estructuras de área rectangular a una fuerza en la parte central y dos apoyos en sus extremos [27].

4.1.1 Dominio rectangular con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en su parte inferior

Para la primera estructura se plantean el dominio de diseño está dado por las dimensiones siguientes; la longitud del dominio es $L = 10 \text{ m}$, la altura $H = 5 \text{ m}$ así como un espesor de placa de 0.1 m . Se considera un modulo de elasticidad $E = 100 \text{ GPa}$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ [27].

La discretización de dicho dominio se realiza mediante divisiones de 0.2 m tanto en dirección X como en dirección Y de acuerdo con lo establecido en el capítulo 3 sección 3.1 de este trabajo. Se generan 1326 nodos y 2500 elementos triangulares.

Las restricciones para este caso se encuentran en las dos esquinas inferiores, por lo que, quedan restringidos en sus dos direcciones los grados de libertad correspondientes a estos nodos. La carga puntual aplicada verticalmente es de 1000 N como se muestra en la figura 4.1.

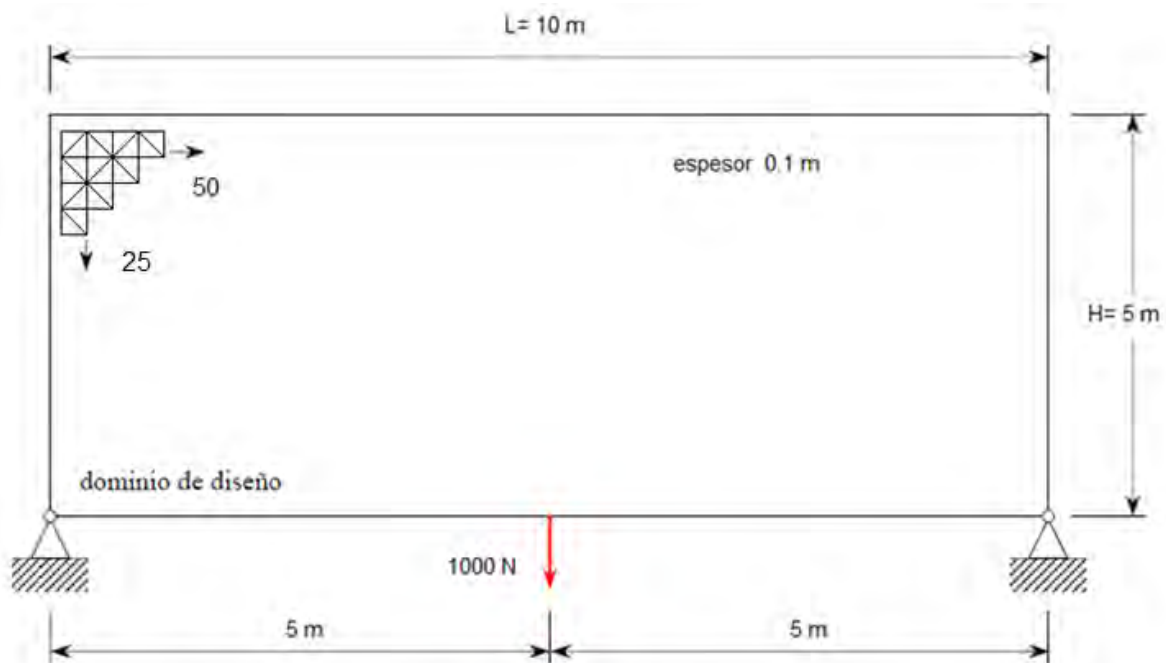


Fig.4.1 Dominio rectangular con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en su parte inferior.

Se presenta a continuación el resultado de los esfuerzos representativos del análisis por elementos finitos con el respectivo gráfico.

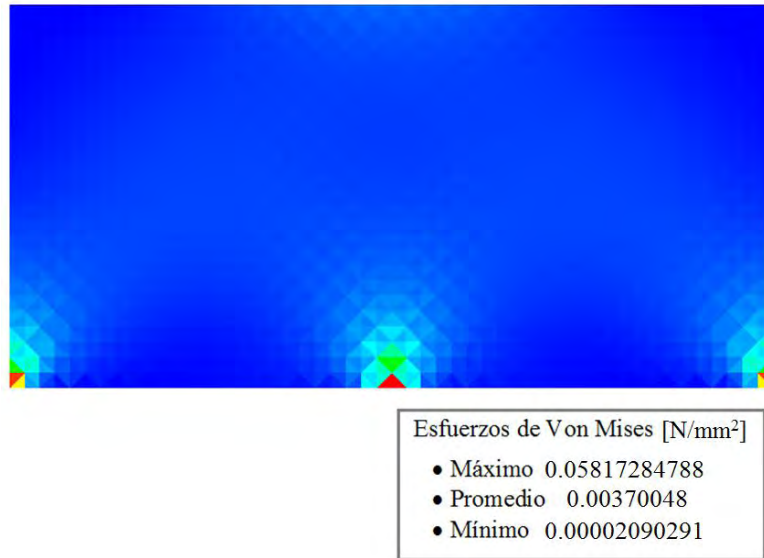
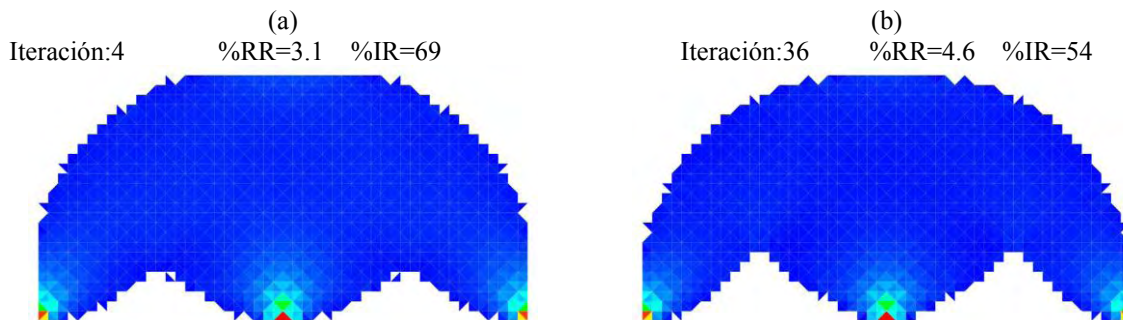


Fig. 4.2 Análisis por elementos finitos estructura tipo Michell con apoyos fijos.

Para esta optimización el proceso se inicia con una tasa de rechazo del 3.1% y una tasa de adición de 69%, el criterio de paro definido para este caso de estudio fue basado en el volumen (se requiere una estructura con el 30% del volumen inicial).

En la Figura 4.3 se muestra el historial evolutivo de los diferentes estados estables de la estructura (óptimos locales). En cada una de las figuras se muestra la correspondiente tasa de rechazo y adición, la estructura óptima para las condiciones impuestas se muestra en la Figura 4.3 (i).



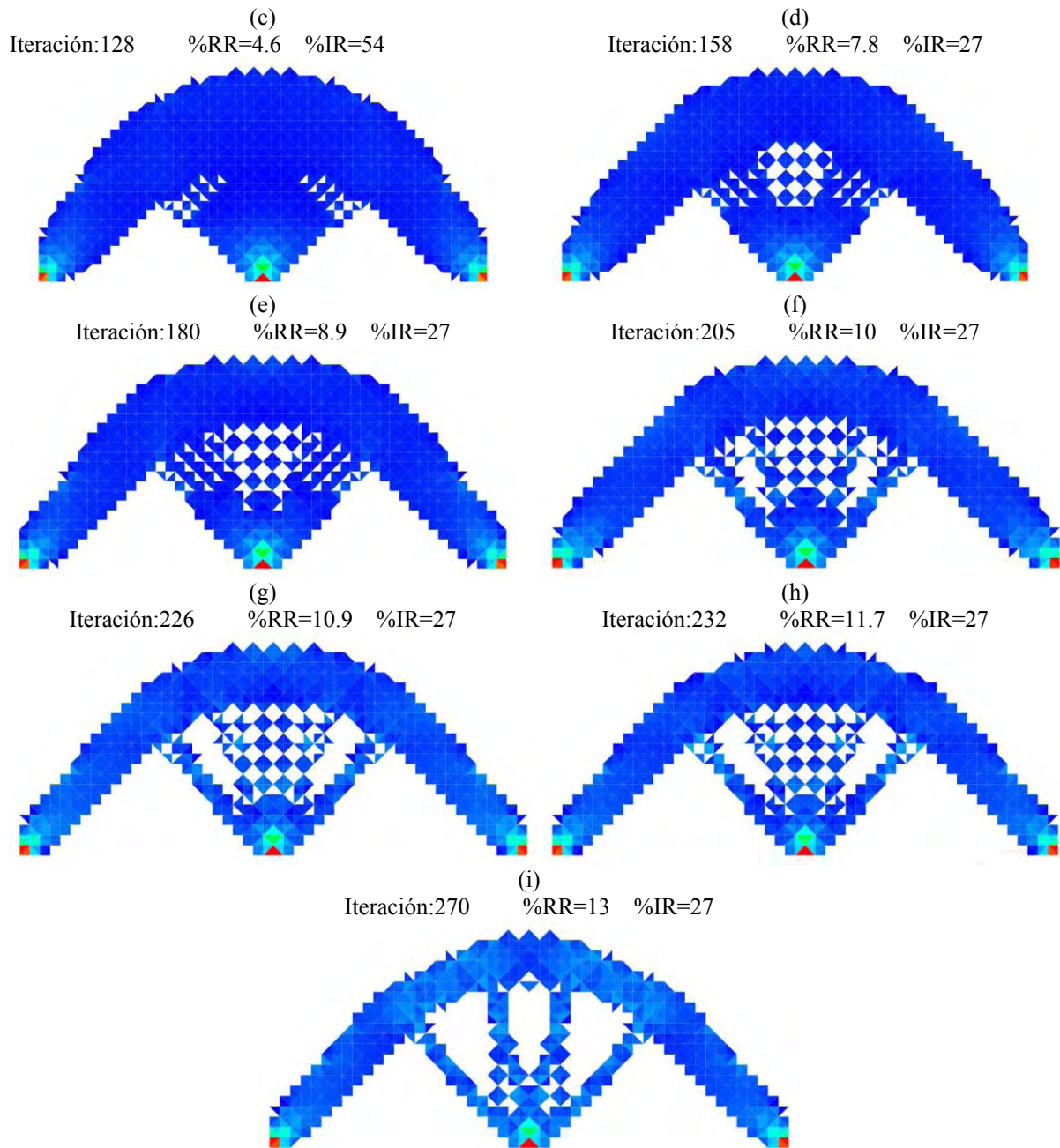


Fig. 4.3 Historial evolutivo de la estructura tipo Michell con apoyos fijos.

El historial evolutivo del esfuerzo máximo, promedio y mínimo correspondiente a las iteraciones a lo largo de la optimización se presenta en el gráfico de la Figura 4.4.

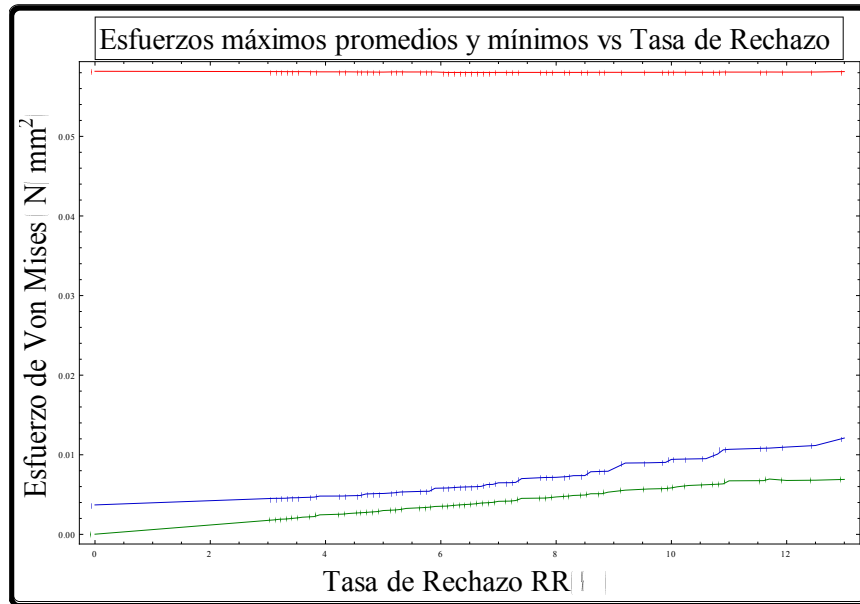


Fig.4.4 Gráfico del esfuerzo máximo, promedio y mínimo vs tasa de rechazo.

En la figura 4.5 se revisa él gráfico de los esfuerzos promedios, donde se visualiza los estados estables a lo largo de la optimización, dicho gráfico también representa la tendencia a homogeneizar los valores de esfuerzo a medida que se obtiene una estructura óptima.

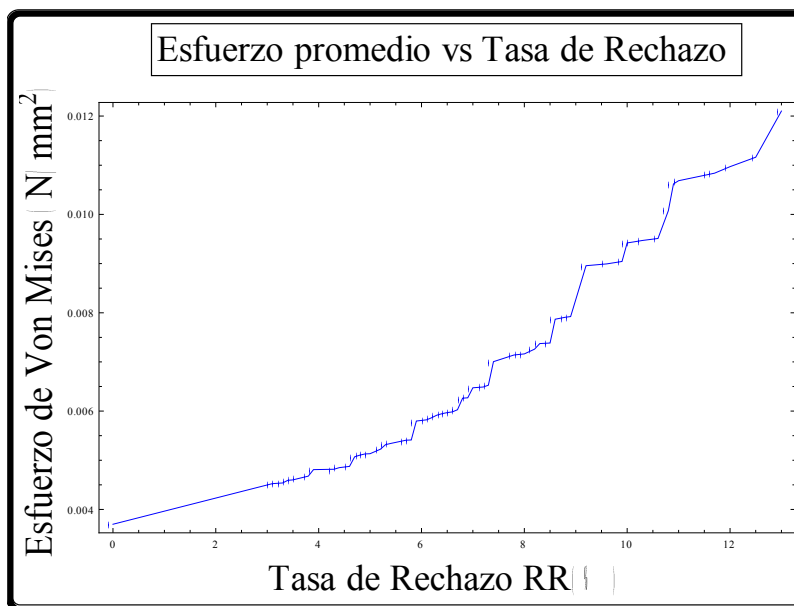


Fig.4.5 Gráfico del esfuerzo promedio vs tasa de rechazo.

El historial de la reducción del volumen se muestra en la Figura 4.6 de acuerdo con el cambio de tasa de rechazo o estado estable.

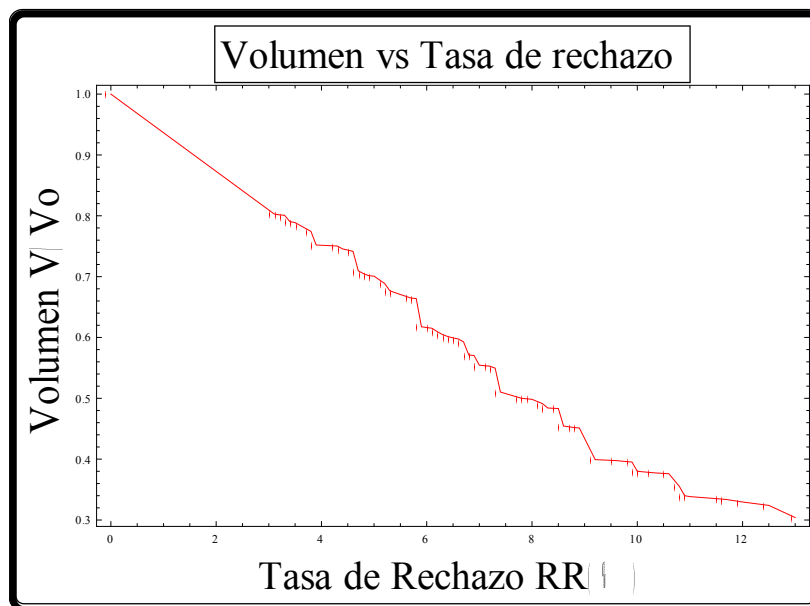


Fig.4.6 Gráfico que muestra el comportamiento del volumen vs tasa de rechazo.

En la Tabla 4.1 se comparan los niveles de esfuerzo, tanto máximo y promedio, entre el dominio inicial de la estructura correspondientes a la Figura 4.2 y la estructura optimizada mostrada en la Figura 4.3 (i).

Tabla 4.1 Comparación entre el diseño inicial y el diseño óptimo.

	$\sigma_{max}^{VM} [N/mm^2]$	$\sigma_{promedio}^{VM} [N/mm^2]$	Volumen [m ³]	V/V0
Modelo inicial	0.0581728	0.00370048	5.0	1
Diseño óptimo	0.0581347	0.0121003	1.5	0.3

La estructura mostrada en el comparativo de la Figura 4.7-a fue diseñada por medio de la metodología ESO. Las modificaciones que presenta esta estructura son similares a las obtenidas en este trabajo por medio del algoritmo de BESO.

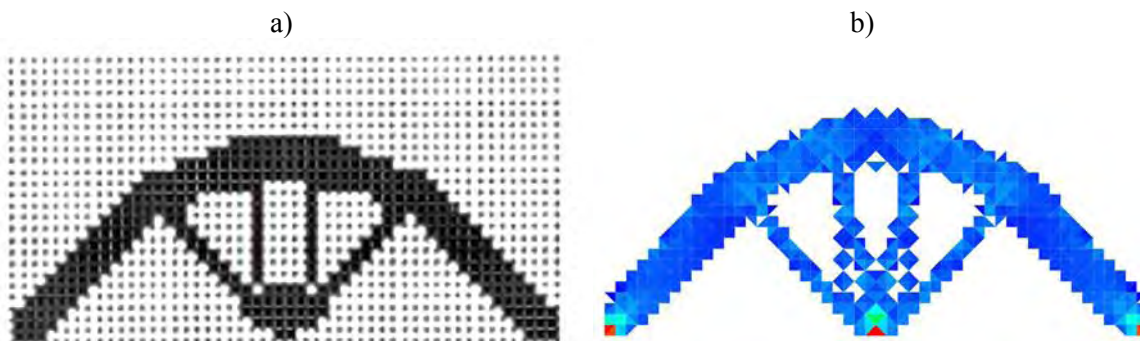


Fig.4.7 Comparativo de resultados, a) resultado generado por Xie, b) solución generada por el autor.

4.1.2 Dominio rectangular con apoyo móvil y fuerza vertical centrada en la parte inferior

Este dominio rectangular que se muestran en la Figura 4.8 presenta las mismas dimensiones que la estructura tipo Michell presentado en la sección anterior 4.1.1. Mismas características de material $E= 100 \text{ GPa}$ y $\nu=0.3$ [27]. Así mismo, se discretiza con 1326 nodos que generan 2500 elementos triangulares.

En este caso se restringe la estructura en las dos esquinas inferiores, en su esquina izquierda quedan restringidos en sus dos direcciones los grados de libertad correspondientes a este nodo y en la esquina derecha solamente se restringe el grado de libertad correspondiente al eje “Y”. La carga puntual aplicada verticalmente es de 1000 N como se muestra en la Figura 4.8.

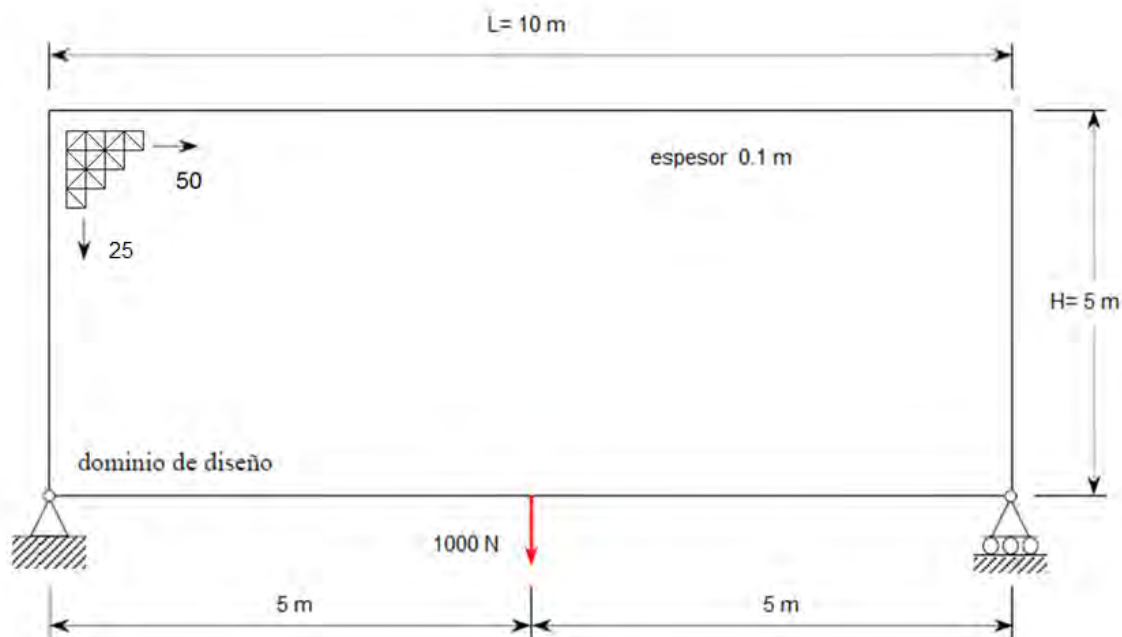


Fig. 4.8 Dominio rectangular con apoyo móvil y fuerza vertical centrada en su parte inferior.

En el gráfico 4.9 se muestra el resultado del análisis mediante elementos finitos y los esfuerzos más relevantes.

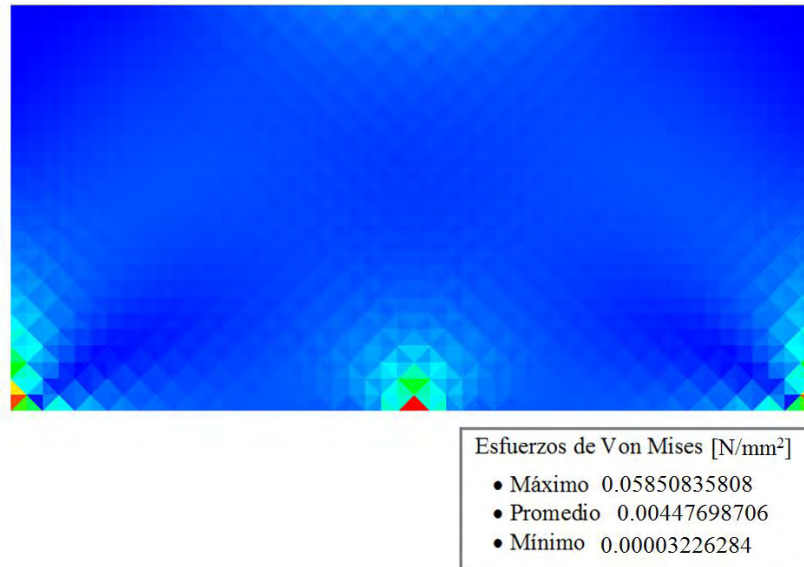
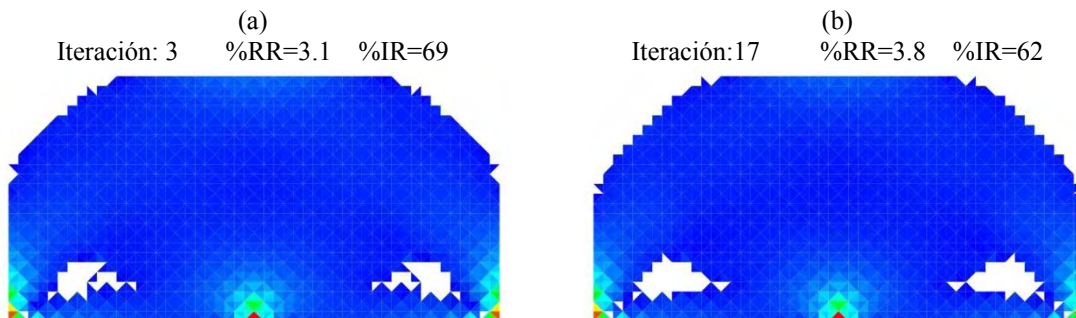


Fig. 4.9 Análisis por elementos finitos de estructura tipo Michell con apoyos deslizante.

El proceso de optimización se inicia con una tasa de rechazo del 3.1% y una tasa de adición de 69%, un criterio de paro volumen del 32%.

En la Figura 4.10 se muestra el historial evolutivo de los diferentes estados estables de la estructura. En cada una de las figuras se muestra la correspondiente tasa de rechazo y adición, la estructura óptima para las condiciones impuestas se muestra en la Figura 4.10 (i).



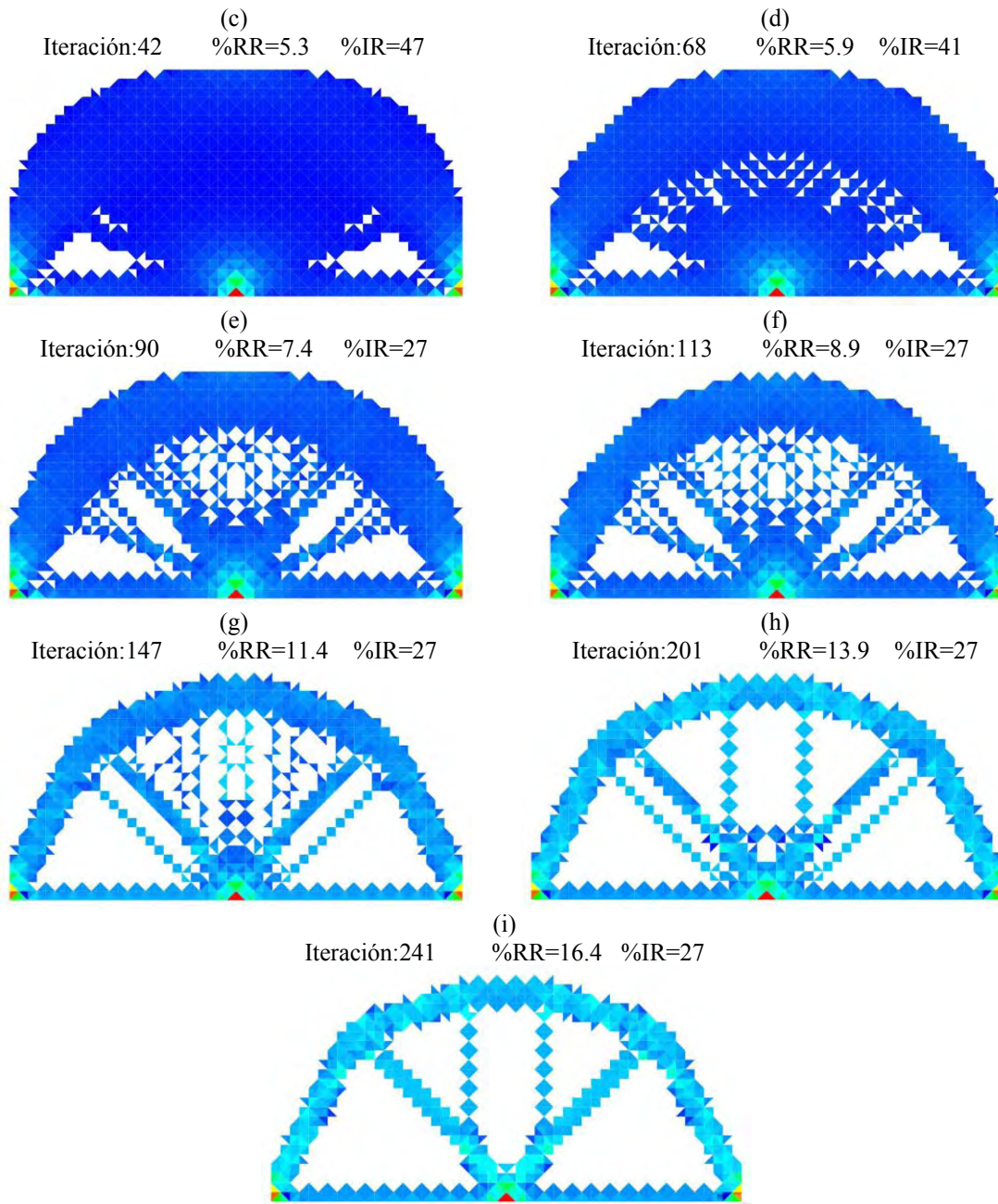


Fig. 4.10 Historial evolutivo de la estructura tipo Michell con apoyo deslizante.

La figura 4.11 presenta en un gráfico el historial evolutivo del esfuerzo máximo, promedio y mínimo contra la tasa de rechazo correspondiente a lo largo de la optimización. En el gráfico de la figura 4.12 se muestra únicamente el esfuerzo promedio para tener mejor apreciación de la tendencia.

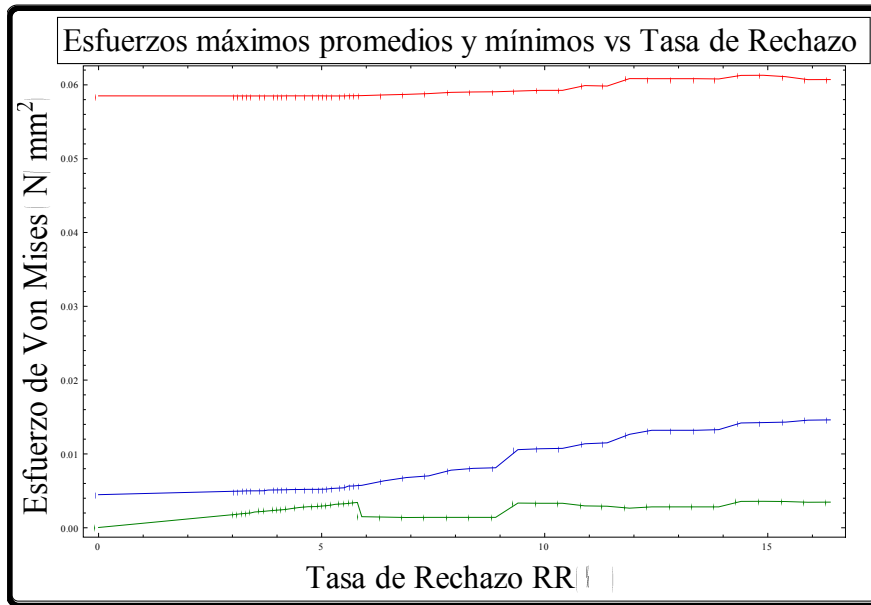


Fig.4.11 Gráfico del esfuerzo máximo, promedio y mínimo vs tasa de rechazo.

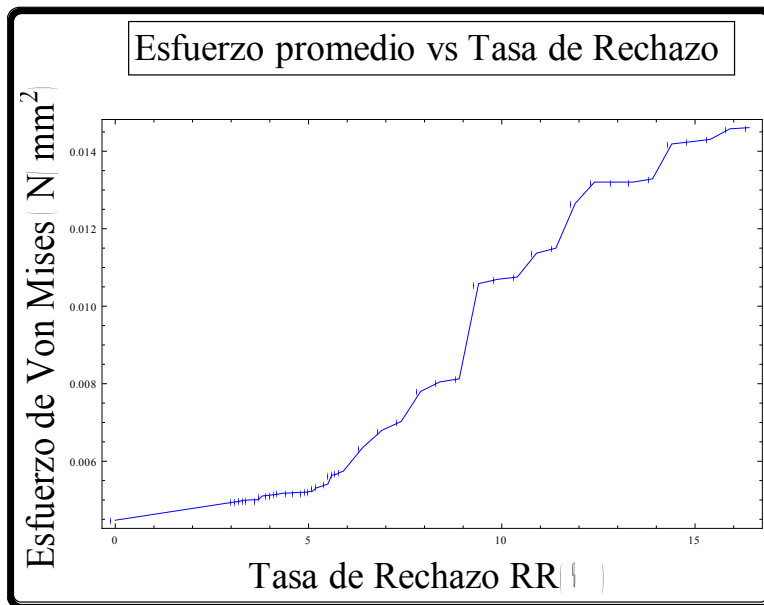


Fig.4.12 Gráfico del esfuerzo promedio vs tasa de rechazo.

El comportamiento del volumen en cada estado estable se presenta en la figura siguiente, donde se observa convergencia al acercarse al estado óptimo cuando la tasa de rechazo tiene un valor de 16.4%.

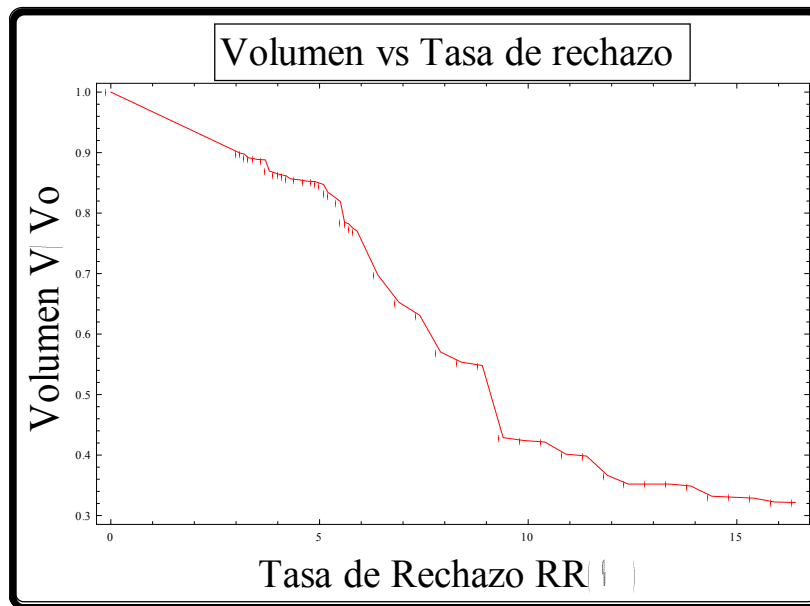


Fig.4.13 Gráfico que muestra el comportamiento del volumen vs tasa de rechazo.

La tabla siguiente muestra los datos de esfuerzo y volumen del modelo inicial contra los resultados de la estructura óptima.

Tabla 4.2 Comparación entre el diseño inicial y el diseño óptimo.

	$\sigma_{max}^{VM} [N/mm^2]$	$\sigma_{promedio}^{VM} [N/mm^2]$	Volumen $[m^3]$	V/V_0
Modelo inicial	0.0585084	0.00447699	5.0	1
Diseño óptimo	0.0607159	0.0146098	1.608	0.32

Xie resolvió este mismo problema obteniendo la geometría mostrada en la Figura 4.14- a). En esta comparación las diferencias entre las soluciones de ESO y las obtenidas aquí pueden apreciarse. Lo anterior no es extraño ya que Xie solo retira material, mientras que en este trabajo se cuenta con una regla evolutiva de adición.

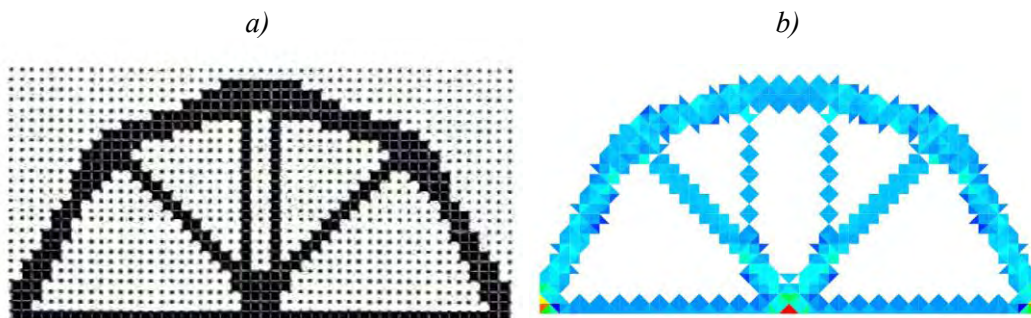


Fig.4.14 Comparativo de resultados, a) desarrollado por Xie, b) solución generada por el autor.

4.2 Caso de estudio 2

Estructura tipo puente con apoyos fijos en las esquinas

En este caso se optimiza un dominio con las dimensiones que se especifican en la Figura 4.15. En esta estructura se considera una zona no diseñable en la parte superior, así mismo se tiene una carga distribuida con una magnitud de 2500 [N/m]. Se encuentra restringida con apoyos fijos en las esquinas inferiores en 2 nodos.

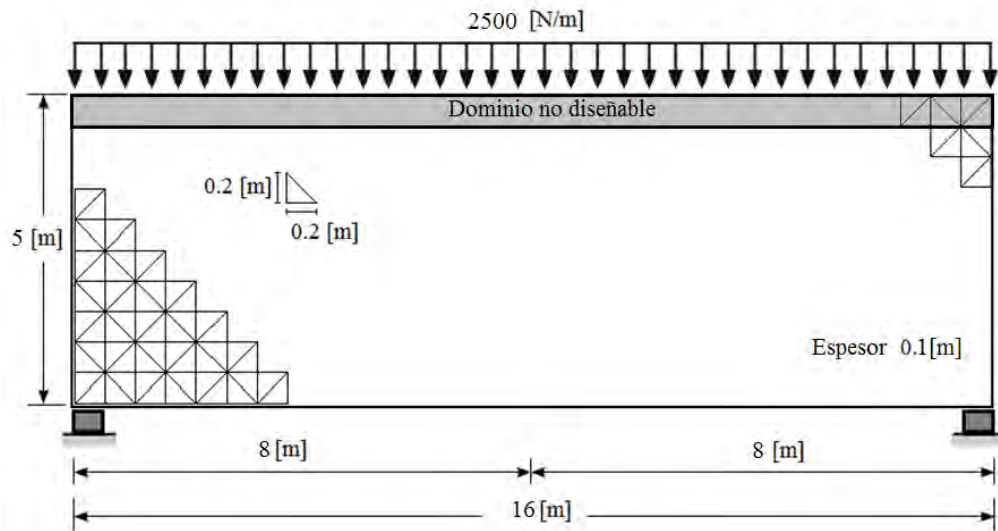


Fig.4.15 Dominio rectangular con tipo puente con apoyos fijos en las esquinas.

Las características que se toman en cuenta para el material son $E= 210 \text{ GPa}$ y $\nu=0.33$. En la Figura 4.16, se muestra el resultado del FEA, aplicado a la estructura del caso 2 de estudio para esta tesis.



Esfuerzos de Von Mises [N/mm²]

- Máximo 0.147648
- Promedio 0.00863493
- Mínimo 0.00063136

Fig.4.16 Análisis por elementos finitos de la estructura.

El proceso de optimización se inicia con una tasa de rechazo del 0.6% y una tasa de adición de 94%, se requiere una estructura con el 30% del volumen inicial. En la Figura 4.17 se presentan los estados estables y el óptimo que se alcanza en la iteración 315 (figura 4.17 (i)).

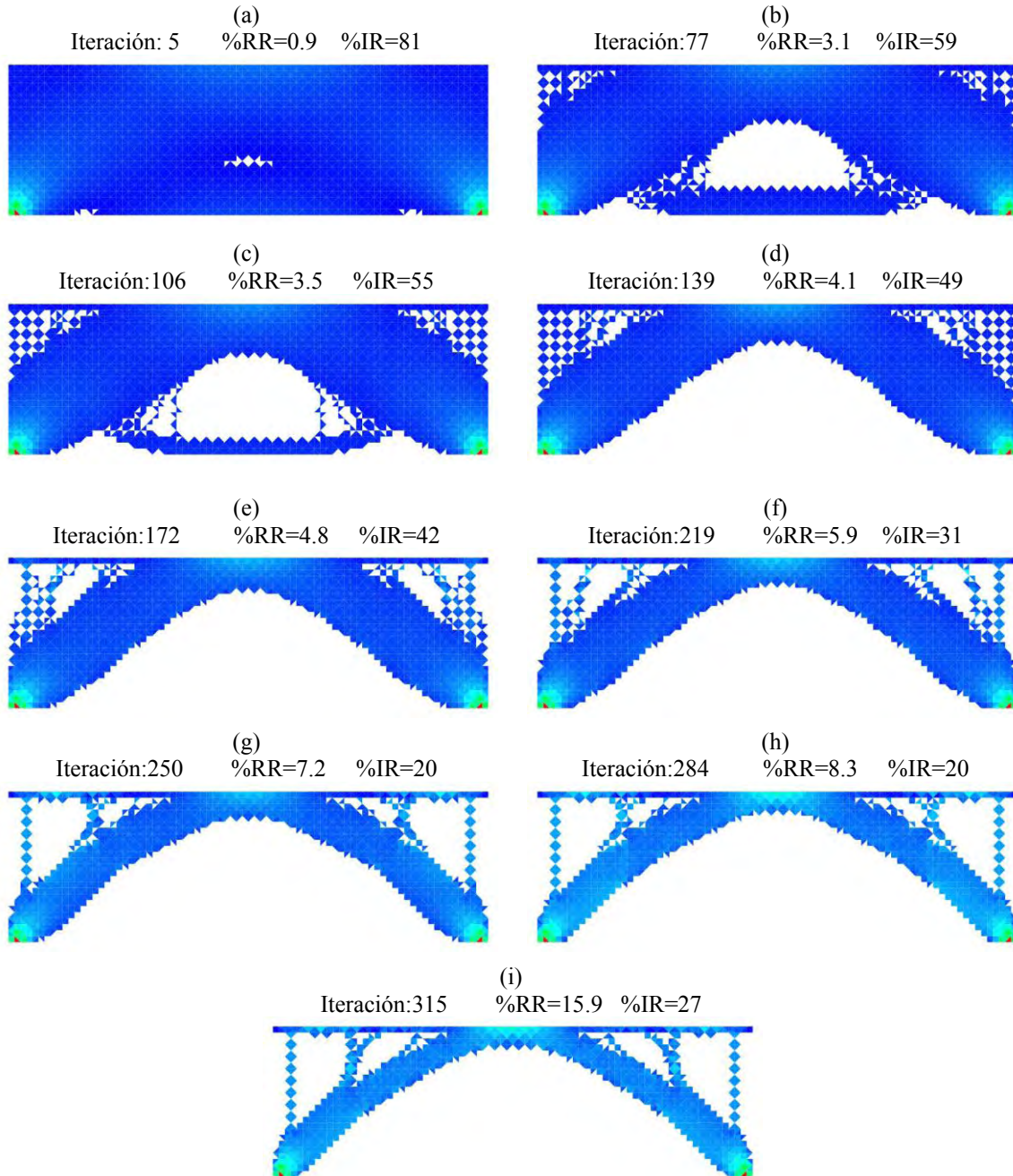


Fig. 4.17 Historial evolutivo de la estructura tipo

Los resultados de los valores de esfuerzo máximo, promedio y mínimo de la optimización se representan en el gráfico de la Figura 4.18.

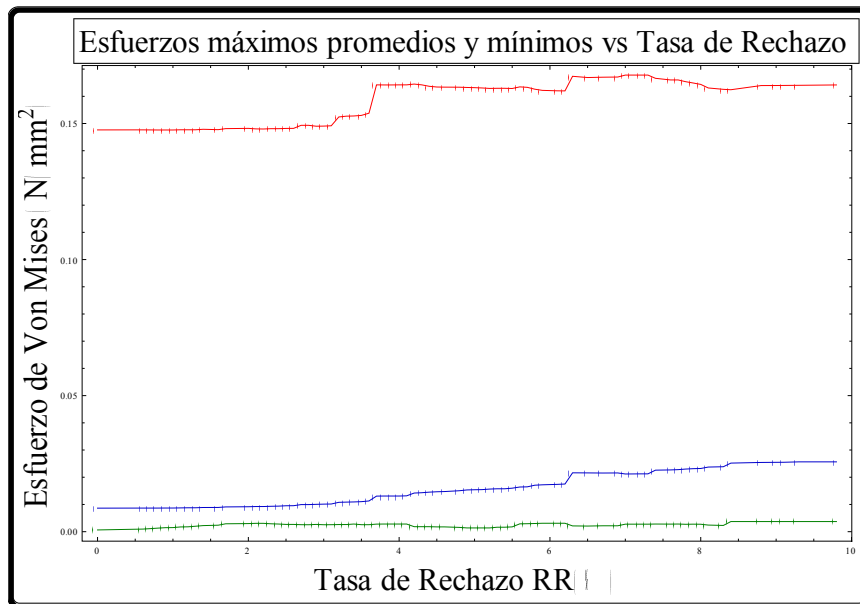


Fig.4.18 Gráfico del esfuerzo máximo, promedio y mínimo vs tasa de rechazo.

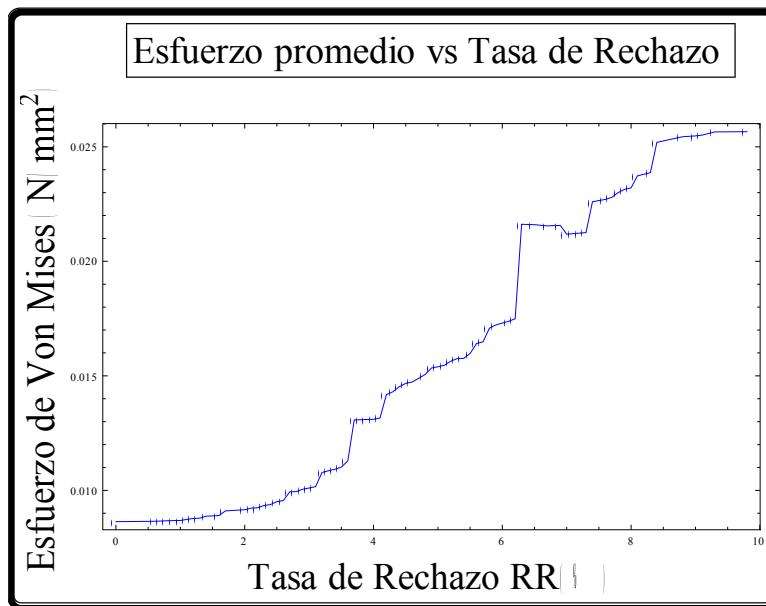


Fig.4.19 Gráfico del esfuerzo promedio vs tasa de rechazo.

El historial de la reducción del volumen para este caso de estudio se muestra en la Figura 4.20.

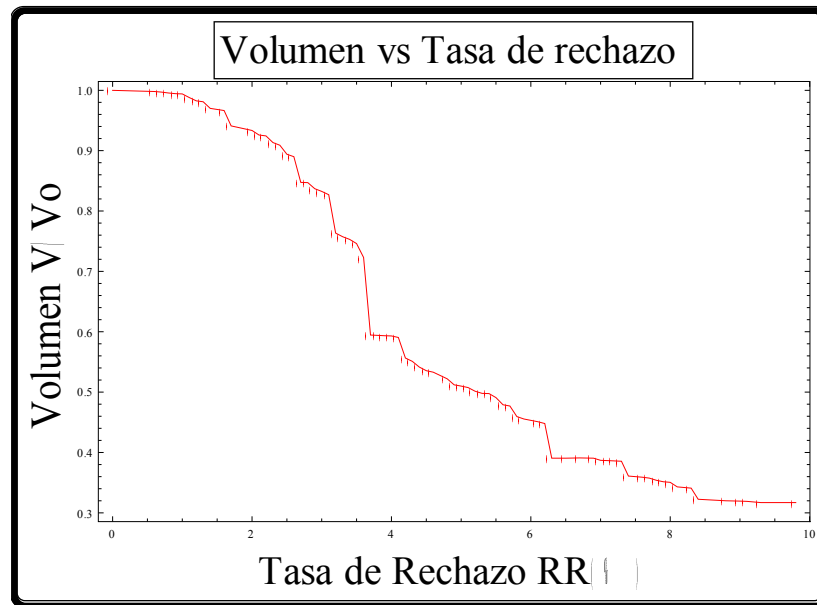


Fig.4.20 Gráfico que muestra el comportamiento del volumen vs tasa de rechazo.

Tabla 4.3 Comparación entre el diseño inicial y el diseño óptimo.

	$\sigma_{max}^{VM} [N/mm^2]$	$\sigma_{promedio}^{VM} [N/mm^2]$	Volumen $[m^3]$	V/V_0
Modelo inicial	0.147648	0.00863493	8	1
Diseño óptimo	0.16419	0.0256596	2.536	0.31

La estructura obtenida que se muestra en la Figura 4.21-b se comparara con la reportada por J. H. Zhu [28] en la Figura 4.21-a, a partir de las cueles se observa similitud topológica.

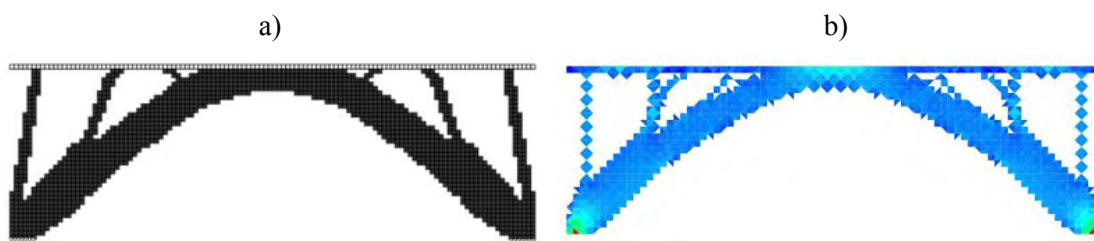


Fig.4.21 Comparativo de resultados, a) desarrollado por Zhu, b) solución generada por el autor.

4.3 Caso de estudio 3

Estructura tipo puente con soportes fijos laterales

Para el último de los casos la longitud del dominio de diseño es 12 [m], la altura 4 [m], y el espesor 0.1 [m]. El dominio de diseño se ha discretizado con 2400 elementos, 60 divisiones en dirección longitudinal y 20 en dirección transversal. La primera fila de elementos por debajo de la línea de carga es tratada como zona de no diseño, y representan el tablero del puente (no sujeto al proceso de optimización). La carga aplicada sobre la

estructura es una fuerza distribuida uniformemente de 2500 [N]. Dicha estructura se encuentra restringida por soportes fijos a ambos lados de la parte superior Figura 4.22.

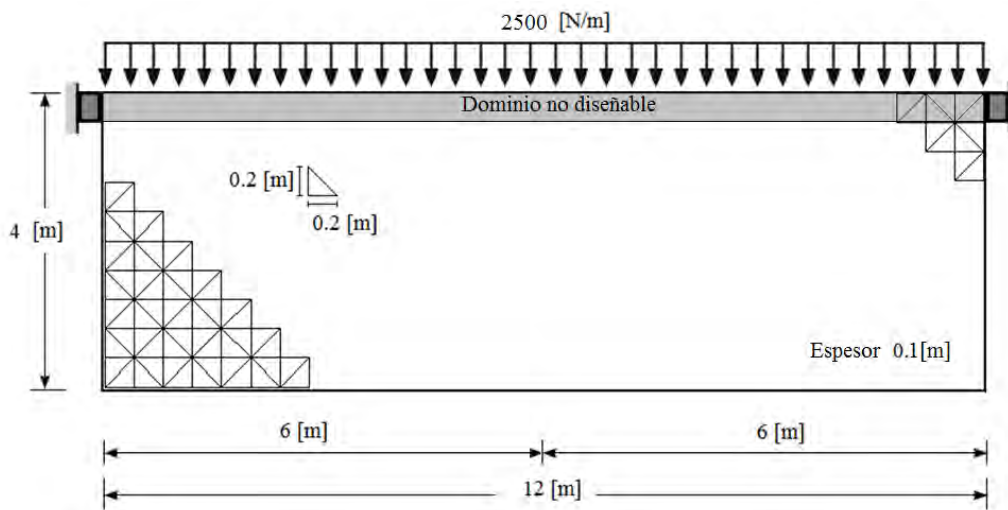


Fig.4.22 Dominio rectangular tipo puente con soportes fijos laterales

Se considera un modulo de elasticidad $E= 210 \text{ GPa}$ y un coeficiente de Poisson $\nu=0.33$. En caso de optimización el proceso se inicia con una tasa de rechazo del 1.1% y una tasa de adición de 89%, el criterio de paro definido para este caso de estudio fue con base en el volumen (se requiere una estructura con el 40% del volumen inicial). La distribución de esfuerzo de la estructura, generada por el análisis de elementos finitos de esta tesis se muestra en la Figura 4.23.



Esfuerzos de Von Mises [N/mm ²]	
• Máximo	0.107657
• Promedio	0.00842483
• Mínimo	0.000162723

Fig.4.23 Análisis por elementos finitos del dominio rectangular tipo puente.

En las figuras 4.24 se muestran las topologías óptimas más representativas que surgen durante la optimización, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 298.

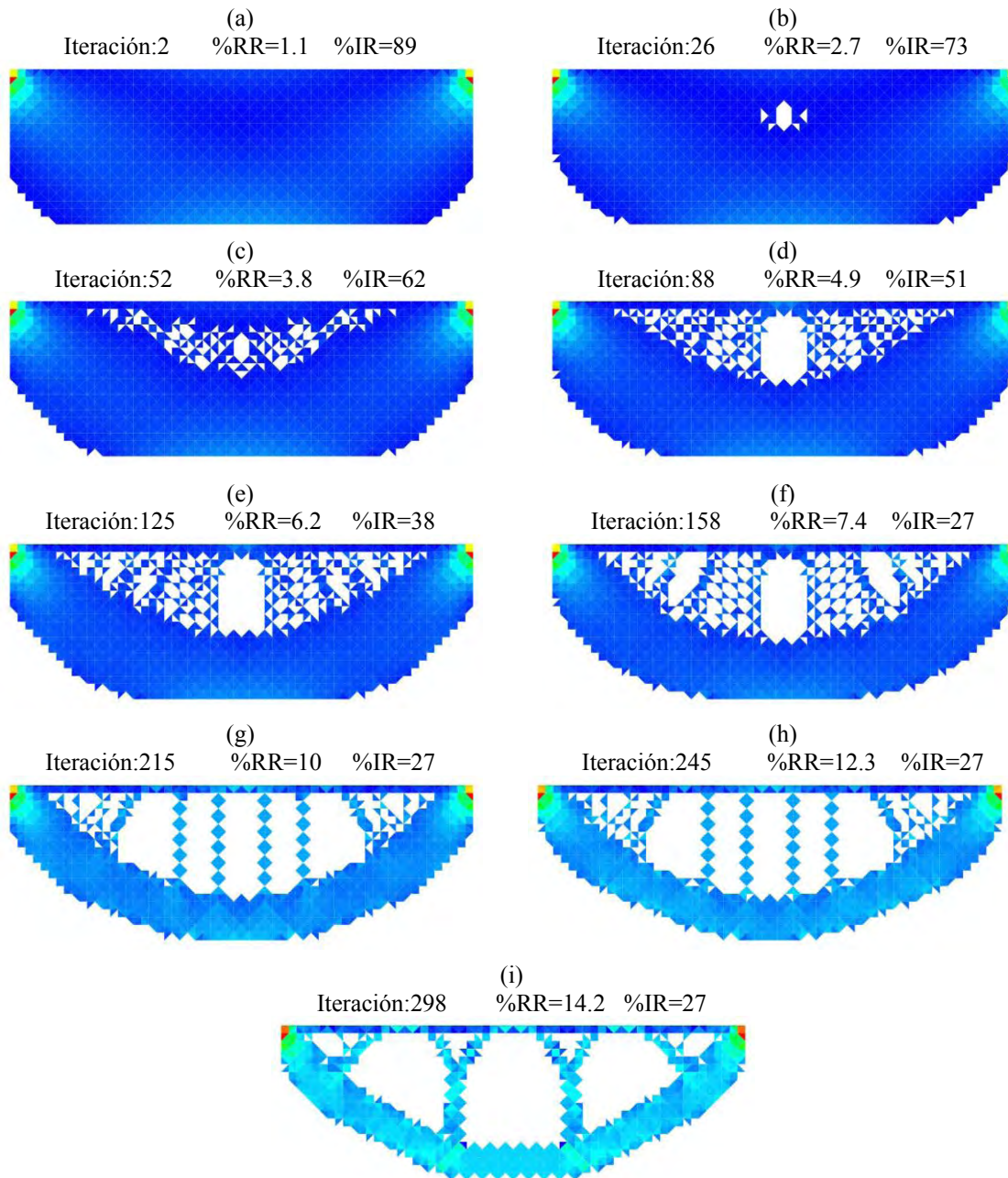


Fig. 4.24 Historial evolutivo de la estructura tipo

En la figura 4.25 se muestran la evolución de los esfuerzos de Von Mises máxima, media, y mínima contra la tasa de rechazo.

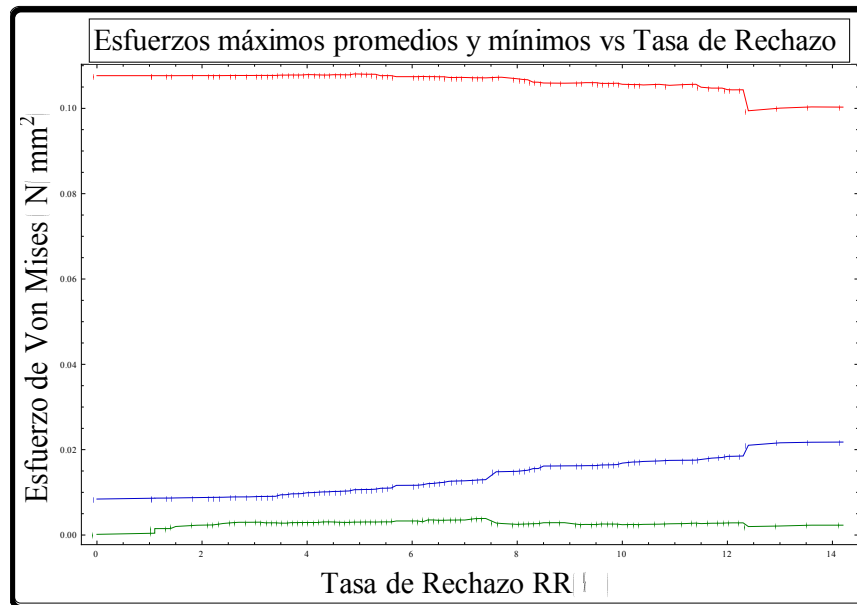


Fig.4.25 Gráfico del esfuerzo máximo, promedio y mínimo vs tasa de rechazo.

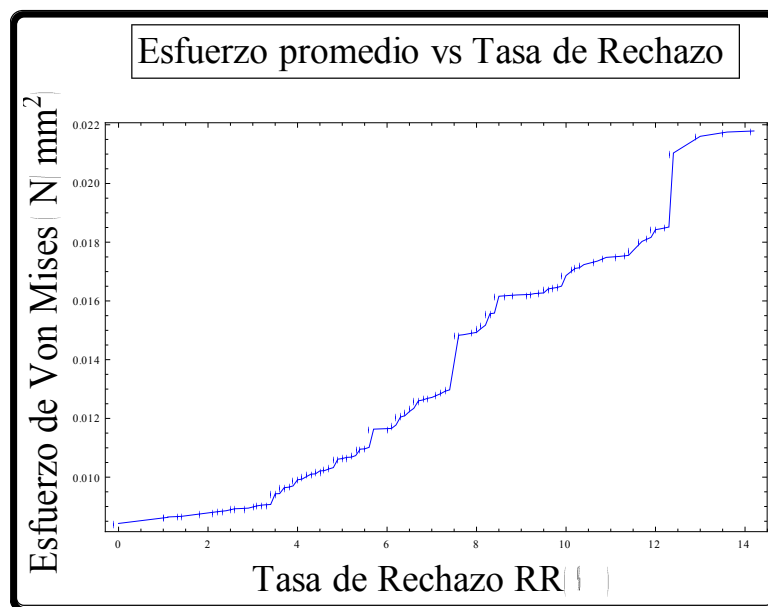


Fig.4.26 Gráfico del esfuerzo promedio vs tasa de rechazo.

En la figura 4.27 se observa que la fracción de volumen disminuye rápidamente hasta que alcanza valor de volumen objetivo.

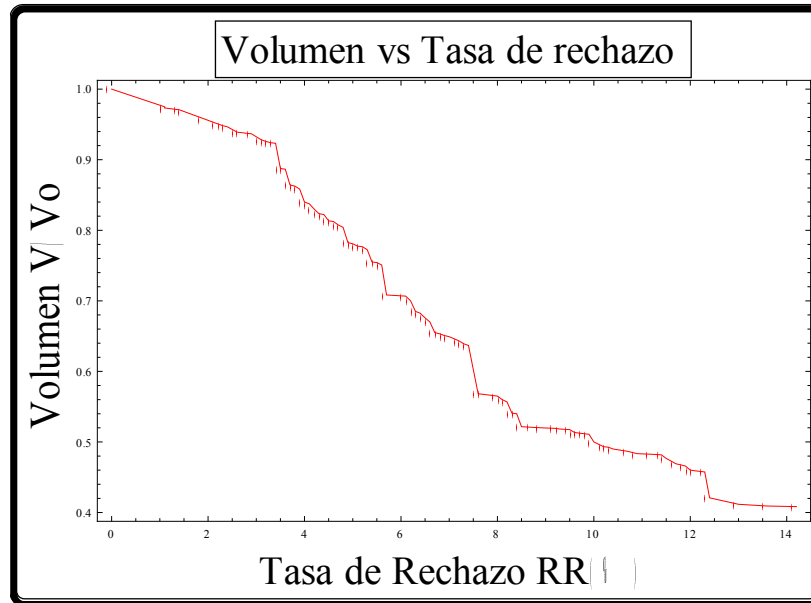


Fig.4.27 Gráfico que muestra el comportamiento del volumen vs tasa de rechazo.

La comparación del esfuerzo máximo, promedio y el volumen entre el diseño rectangular inicial y el diseño óptimo de la figura 4.24 (i) se muestra en la tabla 4.4.

Tabla 4.4 Comparación entre el diseño inicial y el diseño óptimo.

	$\sigma_{max}^{VM} [N/mm^2]$	$\sigma_{promedio}^{VM} [N/mm^2]$	Volumen [m ³]	V/V0
Modelo inicial	0.107657	0.00842483	4.8	1
Diseño óptimo	0.100295	0.0217882	1.96	0.408

De forma análoga al caso de estudio anterior, en la Figura 4.28, se presenta un comparativo entre el diseño obtenido por el algoritmo de Zhu [28] y el algoritmo desarrollado en esta tesis.

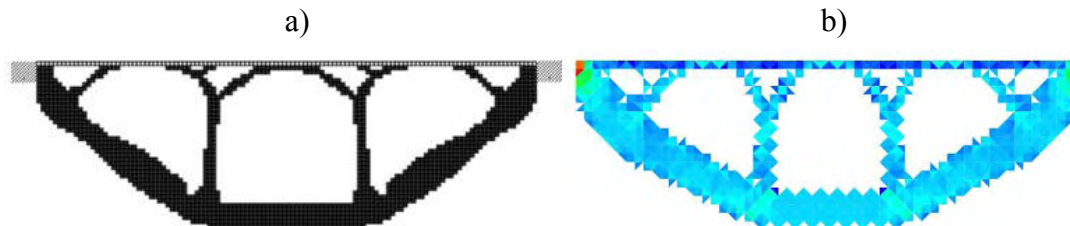


Fig.4.28 Comparativo de resultados, a) desarrollado por Zhu, b) solución generada por el autor.

4.4 Discusión de Resultados.

Se aplicó la metodología de Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO) a tres casos de estudio de dominio inicial rectangular, empleando como función objetivo el volumen.

Se logró reducir el volumen, y con ello el peso de la estructura, de manera considerable en todos los casos de estudio, por arriba del 59% de reducción del valor inicial cumpliendo con el criterio de diseño impuesto a cada uno de las estructuras analizadas. La tabla 4.5 muestra el porcentaje de volumen reducido para las diferentes estructuras.

Tabla 4.5 Reducción de volumen de estructuras óptimas.

Caso de estudio 1	Caso de estudio 2	Caso de estudio 3
69.6 % y 67.84 %	68.3 %	59.16 %

En los tres casos de estudio que se presentan en este trabajo, se observa mediante los gráficos de volumen contra tasas de rechazo que la distribución de esfuerzos tiende a elevarse. Lo cual se debe a la eliminación de zonas con elementos ineficientes de la estructura, llevando a la estructura aun estado de altos niveles esfuerzos bajo un sistema de cargas y restricciones particulares.

El buen desempeño del algoritmo se debe a la calibración de los valores de las tasas de adición y rechazo. De acuerdo con los análisis de los diferentes casos se presenta la siguiente tabla con los valores de tasas de rechazo, adición y el tiempo de análisis computacional.

Tabla 4.6 Valores iniciales de tasas evolutivas.

Caso de estudio 1	Caso de estudio 2	Caso de estudio 3
1326 nodos SS= 30 ON = 0 IR =69 % RR =3.1 % Tiempo de optimización en los dos casos presentados 1hr	2106 nodos SS=5 ON=0 IR=94 % RR=0.6 % Tiempo de optimización 3.4 hrs	1281 nodos SS=10 ON=0 IR=89 % RR=1.1 % Tiempo de optimización 1.6 hrs

Las pruebas fueron realizadas en una computadora con las siguientes características: Windows7, sistema operativo de 64 bits, procesador Intel Core Duo 3.16 GHz, 8 GB de memoria RAM, y el paquete comercial Mathematica 7.

El algoritmo de optimización es una herramienta para el diseño estructural, que permite obtener la solución óptima de un caso de estudio y cuyo desempeño no depende de la experiencia del diseñador como en una metodología tradicional; sin embargo, la interpretación de los resultados sí requiere de los conocimientos del ingeniero para lograr la implementación de una estructura final.

Conclusiones

En este estudio se ha desarrollado una aplicación computacional basada en la Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO), metodología de carácter general aplicable a un amplio rango de problemas de optimización de diseño conceptual y en particular para ésta tesis en esfuerzo plano. La optimización estructural evolutiva puede utilizarse como herramienta en el diseño, reemplazando el método tradicional y aportando como ventajas: simplicidad conceptual, análisis automatizado y amplia aplicabilidad.

Del trabajo realizado en esta tesis se extraen las siguientes conclusiones de acuerdo con los objetivos planteados:

- Se generó un módulo de mallado bidimensional de elementos finitos triangulares para discretizar áreas de dominio rectangular.
- Se aplicó la teoría del FEM para estructuras bajo condición de esfuerzo plano, obteniendo como resultado un módulo encargado de realizar el análisis de elementos finitos.
- Se obtuvo un módulo de optimización aplicando la metodología BESO e incorporando a la aplicación la ventaja principal del concepto de malla fija, que influye en la velocidad de resolución del método de los elementos finitos para cada iteración durante el proceso evolutivo.
- Dichos módulos se implementaron en el desarrollo de un software para el diseño óptimo de estructuras.
- Se implementó la herramienta computacional en tres casos de estudio, validando el método con base en reducción de volumen e incremento de esfuerzo promedio. Así mismo, se realizó la comparación topológica de cada una de las estructuras obtenidas en esta tesis con los resultados presentados por los autores más representativos de la literatura.

Además:

Las respectivas interdependencias existentes entre los diversos módulos implementados en esta tesis muestran que la calidad de la información suministrada por un módulo condiciona la eficacia de los restantes.

Se concluye, que para desarrollar sistemas eficientes de diseño estructural óptimo es necesario disponer de módulos de decisión y, por tanto, algoritmos de programación matemática, especialmente condicionados por la naturaleza y las posibilidades de los módulos de cálculo basados en el Método de Elementos Finitos, y a su vez estos métodos

deben ser complementados de forma que suministren la información adicional requerida por los módulos de decisión.

La metodología presentada y estructurada en forma de módulos da pie a la construcción de un sistema de diseño óptimo, donde coexisten diferentes módulos que aunque tengan concepciones distintas realicen una misma función. De esta forma se incrementa la eficiencia, la potencia y la versatilidad del sistema, ya que pueden emplearse los módulos que mejor se adapten a las peculiaridades de cada problema en particular, logrando un mayor aprovechamiento de los recursos, ya que el mismo módulo puede utilizarse en la solución de problemas de naturaleza muy diversa.

Trabajo a futuro

Como continuación del trabajo desarrollado en esta tesis, se proponen las siguientes líneas de trabajos futuros:

El desarrollo de técnicas de generación automática de malla especialmente adaptadas a este tipo de problemas, y la aplicación de técnicas de refinamiento automático, de forma que en las primeras iteraciones se generen mallas sencillas y a medida que avanza el proceso, se aumente el tamaño de discretización, obteniendo resultados más precisos al tiempo que se mejora el diseño.

El desarrollo de nuevos algoritmos de programación matemática más eficientes, especialmente concebidos para este tipo de problemas considerando otro tipo de restricciones y condiciones de carga.

Ampliar las metodologías desarrolladas al diseño óptimo de estructuras continuas tridimensionales.

Referencias

- [1] Annicchiarico, William, “*Un esquema general para la Optimización Estructural de Formas mediante Algoritmos Genéticos y Elementos de Diseño Geométrico*”, Resumen de Tesis, Universidad Central de Venezuela, Octubre 2000, pp. 226-234.
- [2] Bendsoe Mp, Kikuchi N. “*Topology and generalized layout optimization of elastic structures*”. Topology Design of Structures. 1993.
- [3] Bhatti, M. Asghar, “*Fundamental Finite Element Analysis and Applications*”, 2ª ed., Ed. John Wiley & Sons Inc., USA 2005, pp. 490-551.
- [4] Cubillos Alfonso “*Introducción al Método de los Elementos Finitos*” Universidad de Ibagué – Programa de Ingeniería Mecánica. Notas del curso 2004.
- [5] G.P arsons Michael “*Applications of Optimization in Early Stage Ship Design*” Cartagena (Colombia). 2009, pp. 7-29.
- [6] González Ganso J. A., Cesteros Morante B., Morcillo López M. A., Mayor Moreno L. A. “*Análisis y Optimización de Componentes Aeronáuticos Realizados en Materiales Compuestos Laminados CFRP Mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF)*”, Coimbra, Portugal. Universidad de Coimbra.2008.
- [7] Ho-Le K. “*Finite element mesh generation methods: a review and classification*” Computer-Aided Design, 20:27–38, 1988.
- [8] Keane, A.J. y Brown S.M. “*The design of a satellite boom with enhanced vibration performance using genetic algorithm techniques*” In, Proceedings of the Second International Conference, I.C. University of Plymouth, 1996, pp.107-113.
- [9] Lozano T., David, Velazquez V., Fernando, Zepeda S., Antonio, “*Propuesta de Mallador Adaptativo para el Modelado de Perfiles en Flujos Incompresibles*”, XIV Congreso Anual de SOMIM, Septiembre 2008, pp. 1-8.
- [10] Martí, Pascual. “*Aplicación de las técnicas de optimización en el diseño de estructuras ligeras para grandes luces*” II Encuentro Internacional de Estructuras Ligeras para Grandes Luces: Second International Meeting on Lightweight Structures: Murcia.1995.
- [11] Martínez, Pedro, “*Diseño Optimo Simultaneo de Topología y Geometría de Estructuras Articuladas mediante Técnicas Evolutivas*”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena, 2003, pp. 5-37.

-
- [12] Mattheck C, Burkhardt S. "*A new method of structural shape optimization based on biological growth*". Int. Journal of Fatigue 1990.
- [13] Michell Anthony George Maldon. "*The limit of economy of material in frames structures*". Philosophical Magazine .London .1904.
- [14] Navarrina Martinez Fermin "*Una Metodología General para Optimización Estructural en Diseño Asistido por Ordenador*" Tesis Doctoral. Barcelona, marzo de 1987, PP. (I-1)-(VII-46).
- [15] Oda, J. y Yamazaki, K. "*On a technique to obtain an optimum strength shape by the finite element method*". Bull. 1977.
- [16] Ortiz P. Armando. Ruiz C. Osvaldo. "*Conceptos Básicos del Método por Elemento Finito*". Unidad de Investigación y Apoyo Técnico en Materiales Facultad de Ingeniería, UNAM. 2007.
- [17] P.L. George. "*Automatic mesh generation. Application to finite element methods*" John Wiley and Sons; Masson, 1991.
- [18] Querin, Osvaldo M., "*Evolutionary Structural Optimization*", Thesis Doctoral, University of Sydney Australia, April 1997, pp. 9-40.
- [19] Rodriguez J, Seireg A. "*Optimizing the shapes of structures via a rule-based computer program*". ASME-Computers in Mechanical Engineering". 1985.
- [20] Salas M., Del Río C., Hesse M., Bertram V. and Castro. B. "*Introducción del Programa Poseidón en el Diseño y Cálculo de Estructuras Navales*". Instituto de Ciencias Navales y Marítimas, Universidad Austral de Chile.
- [21] Shackelford, James F., "*Introducción a la Ciencia de materiales para Ingenieros*", 5a ed., Ed. Prentice Hall, México, 1999, pp. 643 – 782.
- [22] Shewchuk, J. "*Lectures notes on delaunay mesh generation, Technical report*" Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley. 1999.
- [23] Velázquez Villegas Fernando., "*Apuntes de análisis por elementos finitos*". Facultad de Ingeniería, UNAM. 2009.
- [24] Velázquez Villegas Fernando y S.D. Santillán-Gutiérrez "*Diseño Óptimo Evolutivo*" Centro de Diseño y Manufactura, Facultad de Ingeniería, UNAM. 2005.

-
- [25] Victoria Nicolás, Mariano. “*Optimización de forma y topología con malla fija y algoritmos genéticos*”. Universidad Politécnica de Cartagena Departamento de Estructuras y Construcción. 2006. pp. 4-40.
- [26] Woon SY, Tong L, Querin OM, Steven GP. “*Optimising Topologies through a Multi-GA System*” The Fifth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-5). 2003.
- [27] Xie, Y. M., Steven, G. P., “*Evolutionary Structural Optimization*”, 1ª ed., Ed. Springer, Great Britain . 1993, pp. 1-40.
- [28] Zhu, J. H., Zhang, W.H, Qui, K.P., “Bi-directional evolutionary topology optimization using element replaceable method” Paper. 2006.
- [29] Zúñiga Marín Edgardo Antonio “*Determinación de Esfuerzos en la Zona de Azimutales de Popa de un Remolcador, por Medio de un Análisis Estático Lineal FEM*” Tesis de licenciatura. Universidad Austral de Chile Facultad de Ciencias de la Ingeniería Escuela de Ingeniería Naval. 2008, pp. 25-26.

Mesografía

- [30] Facultad de Ingeniería Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM). Apuntes de Mecánica de Materiales.
<http://fi.uaemex.mx/adgc/MM/ESFUERZO.htm>