18

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL METODO DEDUCTIVO A PARTIR DE ALGUNOS ELEMENTOS DE GEOMETRIA EUCLIDEANA. (PROPUESTA DIDACTICA).

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ELPIDIO ANTONIO INIESTA LARA

MEXICO, D. F. 1995

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVENMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente.

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron EL pasante(s) INIESTA LARA ELPIDIO ANTONIO

con número de cuenta 6300818-6 con el Título:
"EL METODO DEDUCTIVO A PARTIR DE ALGUNOS ELEMENTOS DE GEOMETRIA EUCLIDEANA. (PROPUESTA DIDACTICA)".

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO.

GRADO	NOMBRE(S) APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
ACT.	ISABEL PATRICIA CAFAGGI FELIX	CAFAGGI
Director de Tesis		
M. EN C.	AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA	
M. EN C.	ALEJANDRO BRAVO MOJICA	
ACT.	HUMBERTO SANTILLANA LOYO	
Suplente		
M. EN C.	MARCELA GRETHER GONZALEZ	
Suplente		

PRESENTACION

El Colegio de Ciencias y Humanidades fue creado como una opción de educación innovadora dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, que dotara al alumno de una formación que le permitiera afrontar los retos de la vida moderna, tanto en el area de la ciencia y tecnología como en la de humanidades.

Es así que, al aprobarse la creación del Colegio de Ciencias y Humanidades, se establecieron sus objetivos generales, y en especial los del Bachillerato:

1.-Propiciar el desarrollo integral del alumno, buscando su realización personal como miembro de la sociedad.
2.-Dotar al alumno del dominio de dos métodos de desarrollo del conocimiento: el histórico-social y el experimental,
y de 2 lenguajes: el español y el de las matemáticas.
3.-Formar un alumno capaz de recrear el conocimiento en el aula y los laboratorios, y en las comunidades para allegarse el conocimiento de manera directa.
4.-Ofrecer las dos opciones: terminal y propedéutico, buscando dotar a la sociedad de individuos que puedan acceder directamente a las diferentes esferas de la producción y de servicios, o continuar estudios en alguna licenciatura.
5.-Buscar la interdisciplina y colaboración al menos entre las facultades y escuelas formadoras de éste proyecto y con los diferentes centros de investigación de la Universidad.

Retomando los objetivos del Colegio y otras consideraciones, queremos formar a éste hombre bajo 2 aspectos fundamentales:

i) Que tenga formación interdisciplinaria y polivalente.

ii) Que tenga una educación básica.

En éste sentido, **los Lineamientos Generales del Area** contemplan:

1.-Propiciar en los alumnos el reconocimiento del papel que juega la Matemática dentro de la cultura general del individuo, mediante ciertas ramas de ella, que muestren su relación con otras ramas del conocimiento.

2.-Lograr por parte del educando la representación de fenómenos y situaciones del mundo físico, construyendo modelos que resuelvan los problemas donde se originaron.

3.-Desarrollar en los alumnos capacidades intelectuales que involucren la generalización de resultados particulares, la inferencia de resultados particulares a partir de principios generales, la analogía entre situaciones, casos, patrones o resultados, así como la obtención de soluciones de problemas a partir de aproximaciones sucesivas entre otros métodos.[1]

Así, la concepción de la Matemática en el Colegio obedece a un espíritu innovador e integrador de la realidad que vive el alumno, por

[1]Síntesis hecha a partir de los documentos sobre los acuerdos tomados por la Academia de Matemáticas del CCH-Sur durante el V Debate Académico de Matemáticas realizado por la misma durante los días 8, 9 y 10 de julio de 1992.

medio del manejo de dos métodos fundamentales del pensamiento científico: el método inductivo y el deductivo.

Lineamientos Generales de los Cursos de Matemáticas III y IV

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría se hará énfasis en :[2]

1.- Representar mediante modelos geométricos fenómenos y/o situaciones del mundo físico que permitan resolver problemas que propicien el desarrollo en el estudiante de la capacidad para:
visualizar, hacer construcciones geométricas, generalizar, deducir, algoritmizar y comprobar.

2.- Presentar a la Geometría como un medio para que el estudiante acceda a algunos niveles de demostración.

3.- Emplear diferentes métodos en la resolución de problemas como son el gráfico, las construcciones geométricas, la inducción, la deducción, la analogía,etc.

4.- La Geometría contribuirá a desarrollar las habilidades verbales, de dibujo, lógicas e imaginación espacial.

La presente tesis forma parte de la continua búsqueda que realizamos quienes nos sentimos comprometidos con el proyecto original del CCH. Es el producto de más de veinte años de experiencia

[2]Síntesis hecha a partir de los documentos sobre los acuerdos tomados durante el V Debate Académico de Matemáticas realizado por la Academia de Matemáticas del CCH-Sur los días 8, 9 y 10 de julio de 1992.

impartiendo los cursos de Matemáticas III y IV, conociendo las deficiencias y falta de motivación hacia el estudio de las matemáticas por parte de los alumnos, quienes además desconocen lo que significa el pensamiento científico.

Otro problema muy fuerte al que nos enfrentamos a menudo en el Colegio es la falta de profesores, lo que provoca que quienes llegan a cubrir los grupos libres, por lo general son personas que no conocen dicho proyecto, y presentan a los alumnos exclusivamente una serie de contenidos que suponen deben cubrir dentro del curso, sin tomar en cuenta los objetivos del mismo, aunado ésto a la falta de materiales didácticos que se apeguen a los programas acordados y revisados en el seno de las Academias.

En la presente tesis, que es una propuesta didáctica para los cursos de la materia de Matemáticas III, el libro objeto de ésta propuesta retoma el espíritu original de la materia enmarcada dentro de los objetivos generales del Area y a su vez dentro de los objetivos del CCH, con base en el desarrollo del método deductivo, tomando como ejemplo la Geometría.

En éste se toma en consideración el desarrollo intelectual de los alumnos, motivándolos hacia el estudio de las matemáticas a través de una fuerte interacción con el medio, construyendo el conocimiento, y sobre todo tratando de hacerles ver que los diferentes conceptos y fórmulas no son producto de acciones mágicas, sino de desarrollos continuados de razonamientos lógicos.

En éste contexto, el libro contempla un primer capítulo en el que se plantean las generalidades de la materia, indicando el esquema de construcción de una teoría deductiva y estableciendo la comparación con la Geometría Euclideana.

En el capítulo II se trabaja con construcciones geométricas con regla y compás, a la manera de los antiguos griegos. En éste capítulo, el propósito es que el alumno vaya reconociendo los elementos del método deductivo y aprenda a hacer deducciones a partir de la información disponible en cada momento.

El capítulo III contempla algunos de los teoremas de la Geometría Euclideana, y se pide a los alumnos construir diferentes demostraciones de éstos, sin exigir formalismo, pero avanzando gradualmente en el establecimiento de éste.

El capítulo IV trata sobre los postulados de congruencia y semejanza de triángulos con problemas de aplicación, como parte de ésta teoría deductiva.

El capítulo V está dedicado al Teorema de Pitágoras con algunas de sus demostraciones y problemas de aplicación a diversas situaciones prácticas.

En el Apéndice del libro se presentan una serie de definiciones y notas importantes sobre elementos de la Geometría Euclideana.

Al final, aparecen las respuestas de algunos de los ejercicios propuestos para los alumnos, además de las referencias bibliográficas.

La experiencia que he obtenido con ésta propuesta didáctica ha sido excelente, ya que los alumnos logran gradualmente aplicar el pensamiento deductivo hacia cada problema que se les va planteando y poco a poco llegan a justificar los diferentes pasos seguidos en el planteamiento y solución de algún problema en particular.

Considero que éste material será de gran utilidad para el Colegio, pues viene a llenar un hueco dentro de la enseñanza de la Matemática a nivel bachillerato.

Los profesores podrán utilizarlo como base para sus cursos, y los alumnos podrán acceder más fácilmente a los conocimientos y al dominio de las técnicas propias del método deductivo y no simplemente del conocimiento de una serie de teoremas y resultados planteados en forma llana.

EL METODO DEDUCTIVO

ELPIDIO ANTONIO INIESTA LARA.

PROLOGO

El presente texto va dirigido a alumnos del tercer semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades. Está diseñado de tal manera que a través de él se reflejan los postulados del Colegio, llevando al alumno paso a paso a través de los diferentes conceptos y problemas planteados a lo largo de los diferentes capítulos del libro procurando guiarlo a que vaya construyendo el conocimiento, más que simplemente proporcionarle una cierta información sobre la materia, atendiendo principalmente al aspecto formativo en cuanto al manejo del método deductivo y tomando a la Geometría Euclideana como ejemplo para el desarrollo de éste.

El presente libro se puede muy bien complementar con los diferentes libros anotados al final como referencias bibliográficas básicas. Es deseable que el alumno no sólo se ciña a seguir éste libro, sino que además consulte paralelamente algunos de los que aparecen en dichas referencias.

Se pretende el manejo de la Geometría a nivel intuitivo accediendo gradualmente a algunos niveles de formalismo en las demostraciones.

Se emplean diferentes métodos en la resolución de problemas como son el gráfico, las construcciones geométricas, la inducción y la deducción.

Es el producto de más de veinte años de experiencia impartiendo los cursos de Matemáticas III y IV en el Colegio, conociendo las deficiencias y falta de motivación hacia el estudio de las matemáticas por parte de los alumnos, quienes además desconocen lo que significa el pensamiento científico. Fue escrito considerando el desarrollo intelectual de los alumnos, motivándolos hacia el estudio de las matemáticas construyendo el conocimiento, y sobre todo tratando de hacerles ver que los diferentes conceptos y fórmulas no son producto de acciones mágicas, sino de desarrollos continuados de razonamientos lógicos.

En éste contexto, el libro contempla un primer capítulo en el que se plantean las generalidades de la materia, indicando el esquema de construcción de una teoria deductiva y estableciendo la comparación con la Geometría Euclideana.

En el capítulo II se trabaja con construcciones geométricas con regla y compás, a la manera de los antiguos griegos. En éste capítulo, el propósito es que el alumno vaya reconociendo los elementos del método deductivo y aprenda a hacer deducciones a partir de la información disponible en cada momento.

El capítulo III contempla algunos de los teoremas de la Geometría Euclideana, y se pide a los alumnos construir diferentes demostraciones de éstos, sin exigir formalismo, pero avanzando gradualmente en el establecimiento de éste.

El capítulo IV trata sobre los postulados de congruencia y semejanza de triángulos con problemas de aplicación, como parte de ésta teoría deductiva.

El capítulo V está dedicado al Teorema de Pitágoras con algunas de sus demostraciones y problemas de aplicación a diversas situaciones prácticas.

En el Apéndice del libro se presentan una serie de definiciones y notas importantes sobre elementos de la Geometría Euclideana.

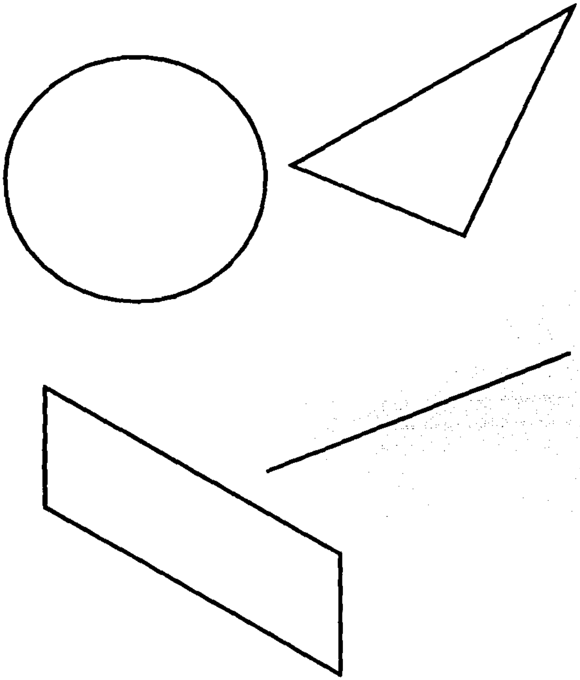
Al final, aparecen las respuestas de algunos de los ejercicios propuestos para los alumnos, además de las referencias bibliográficas.

Considero que éste material será de gran utilidad para el Colegio, ya que los profesores podrán utilizarlo como base para sus cursos, y los alumnos podrán acceder más fácilmente a los conocimientos y al dominio de las técnicas propias del método deductivo y no simplemente del conocimiento de una serie de teoremas y resultados planteados en forma llana.

El autor.

INDICE

CAPITULO I



CONCEPTOS GENERALES

El plan de estudios del Area de Matemáticas en el Colegio pretende como cuestión principal que el alumno conozca y maneje dos formas fundamentales del pensamiento científico:

-El pensamiento inductivo
-El pensamiento deductivo

La Geometría se ha tomado como modelo de una teoría deductiva. En éste sentido, se plantea que los cursos de Matemáticas III y IV contemplen un acercamiento hacia 2 teorías deductivas:la Geometría Euclideana y la Geometría Analítica. La primera, una teoría bastante antigua pero que no pierde actualidad; y la segunda, una teoría relativamente nueva y con gran cantidad de aplicaciones en la vida moderna.

Independientemente de la antigüedad que cada una tiene, las dos obedecen al mismo esquema de construcción, y es el que tiene toda teoría deductiva y consiste en establecer claramente con qué elementos se va a trabajar y una serie de reglas que se deben respetar en todo momento, es decir, una serie de principios o fundamentos, a los cuales se les llama postulados y axiomas, e irse desarrollando a partir de lo que se va teniendo en cada momento y utilizarlo para procedimientos posteriores.

En la siguiente página se muestra dicho esquema:

Teoría Deductiva		**Geometría Euclideana**
Elementos con los que se va a trabajar	→	Definiciones principales (punto, línea, línea recta, etc.)
Reglas del juego	→	Axiomas y Postulados
Resultados importantes	→	Teoremas, Lemas y Corolarios
Definiciones de elementos adicionales con los que se trabajará también	→	Definiciones adicionales
Resultados importantes adicionales	→	Teoremas, Lemas y Corolarios
⋮		⋮
etc.		etc.

Esta es la forma en la que se presenta en los libros cualquier teoría deductiva: como una teoría completamente acabada y cada elemento de ésta perfectamente fundamentado, aún cuando no necesariamente se haya dado este proceso históricamente.

Es decir, sabemos que los conocimientos no se fueron dando en orden, sino que fueron surgiendo empíricamente, en base a diferentes necesidades que se le presentaron al hombre en la antigüedad, y después surge un personaje que tiene el mérito de darles una adecuada sistematización y plantearlos como un todo coherente, como Euclides en la Geometría, Galileo en sus aportaciones hacia el planteamiento del método científico, Newton en la Física, Arquímedes en la Química, etc., y se presentan como aparecen en los libros, como un conocimiento acabado, y cada resultado completamente fundamentado.

Dado que el espíritu del Colegio contempla el aprender a aprender y el aprender haciendo, hemos considerado que una forma muy adecuada de adquirir esta práctica es a través de las construcciones con regla y compás, a la manera de los antiguos griegos (alrededor de 300 a.c.), y en éste sentido elegimos una serie de problemas que consideramos nos pueden llevar paso a paso a apropiarnos de este tipo de pensamiento. Después continuamos con algunos teoremas ilustrativos de la Geometría Euclideana sobre triángulos y polígonos en general, que nos van mostrando el desarrollo del pensamiento deductivo, para construir una teoría de éste tipo.

En primer lugar, la presentación de este material se da con las definiciones de los elementos con que se trabaja en esta Geometría, seguido de los Axiomas y Postulados de Euclides.

Nuestra primera tarea será que investigues en algún libro de Geometría o diccionario las siguientes definiciones:

-¿ Qué es un Punto ?
-¿ Qué es una Línea ?
-¿ Qué es una Línea recta ?
-¿ Qué es un Plano ?
-¿ Qué es una Superficie ?
-¿ Qué es una Figura geométrica ?
-¿ Qué es una Circunferencia ?
-¿ Qué es un Círculo ?
-¿ Qué es un Angulo ?
-¿ Cuáles son los diferentes tipos de ángulos rectilíneos que existen ?
-¿ Cuáles son los ángulos complementarios ?
-¿ Cuáles son los ángulos suplementarios ?
-¿ Cuáles son los ángulos conjugados ?

Después de consultar el diccionario, seguramente te habrás dado cuenta que no existe la definición formal de punto ni de ángulo, sino que son conceptos intuitivos que de todas formas se aceptan como base para el desarrollo de nuestra teoría deductiva.

Nota: Estas definiciones las podrás encontrar para su consulta, en el apéndice del libro.

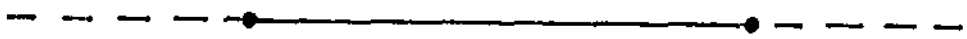
¡¡ Abrelo !!

Enseguida vamos a ver los 6 postulados de la Geometría que aparecen en el libro de Geometría Plana y del Espacio de Wentworth-Smith (consulta las referencias bibliográficas al final del libro), el cual considera que en nuestra época se deberían tomar los 6 que muestran, aún cuando los originales de Euclides fueron 5.
Acuérdate que los postulados no se demuestran y tan solo se ilustran para clarificarlos, y además los estaremos utilizando continuamente a lo largo de nuestro curso.

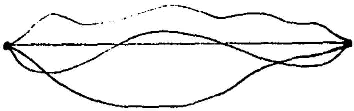
Postulados de la Geometría Euclideana.

1.-Dados dos puntos siempre es posible trazar la recta que los une.

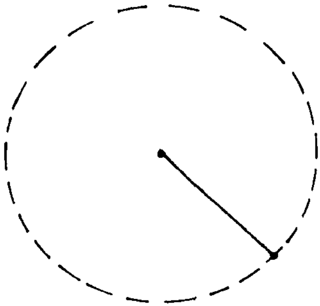
2.-Toda recta puede prolongarse indefinidamente en ambos sentidos.



3.-La trayectoria o camino más corto entre dos puntos es la recta que los une.

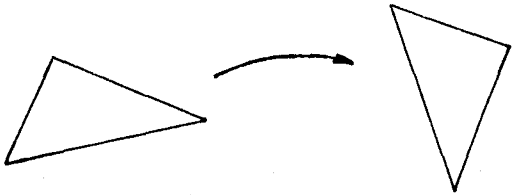


4.-Dados un punto y una recta delimitada siempre es posible trazar el círculo con centro en ese punto y radio esa recta.



5.-Todos los ángulos de lados colineales son iguales entre sí.

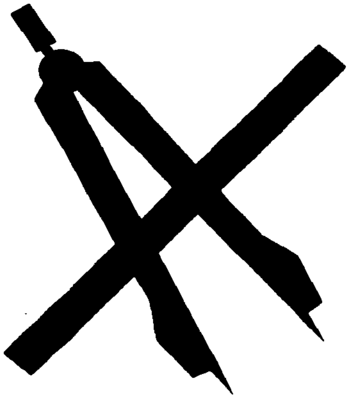
6.-Toda figura geométrica puede ser cambiada de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones.



Como ves, la figura se puede cambiar de un lado hacia otro y no por eso va a cambiar su forma ni tampoco sus dimensiones.

De acuerdo al esquema de construcción de nuestra teoría, lo que sigue son los primeros resultados importantes, que surgen de combinar nuestros elementos con las reglas del juego (postulados y axiomas):

CAPITULO II



CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

Problemas de Construcción Geométrica.

Presentación.-

Sabemos que los griegos, entre otras cosas, destacaron por sus conocimientos sobre la Geometría, pero con una limitante muy fuerte y que era el no manejar la noción de distancia, aún cuando conocían los números y sus propiedades. Se atribuye a Platón (alrededor del año 390 a.c.) el haber impuesto esta condicionante para la Geometría.

Así, ellos decían que dos figuras geométricas son iguales cuando al superponer una sobre la otra, coinciden en todos y cada uno de sus puntos...

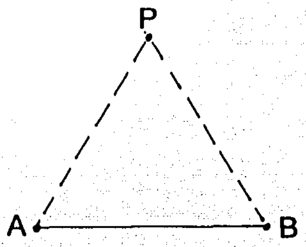
Igualmente, decían que de dos figuras geométricas, una es más pequeña que la otra cuando, al superponerlas, ésta queda completamente contenida dentro de la otra.

De esta manera, con tales limitaciones, los instrumentos geométricos que utilizaban eran la regla y el compás, pero no como los conocemos en la actualidad, sino que la regla era una tabla con un eje plano y sin graduaciones ni marcas de alguna clase, y el compás era un compás muy especial, que servía para trazar círculos en el momento que tuviéramos definido el centro y supiéramos hasta qué punto había que abrir el compás, es decir, tener conocido el radio; pero que al levantar el compás se perdía la medida.

Por lo tanto, no tenían manera de trasladar distancias de un lado a otro, directamente, sino a través de todo un largo procedimiento, lo que significaba hacer toda una serie de trazos para lograr llegar a la construcción deseada.

En este sentido, tratando de rehacer algunos de los pasos seguidos por ellos, vamos a resolver varios problemas de este tipo, llamados ***problemas de construcciones geométricas con regla y compás*** :

Primer Problema de Construcción:
Dada una recta delimitada (con sus extremos conocidos), trazar sobre ella un triángulo equilátero.

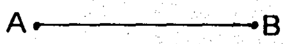


Nota: es sumamente importante que vayas siguiendo cada paso de las construcciones en tu cuaderno y así vayas integrando tus notas de clase

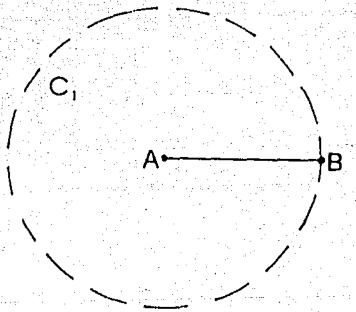
Solución.-

Este es un problema con el que hemos estado en contacto a menudo desde la Primaria, solo que ahora además trataremos de ir justificando los pasos que sigamos hasta llegar a la solución final:

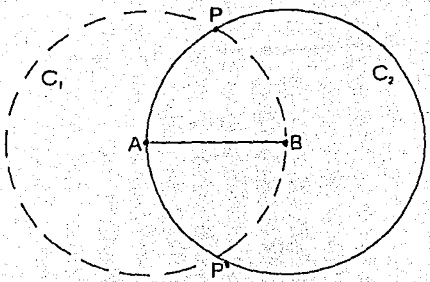
Sea $\overline{AB}$ la recta dada



Paso 1.-Tomando el compás y con centro en A y radio $\overline{AB}$ se traza el círculo C_1

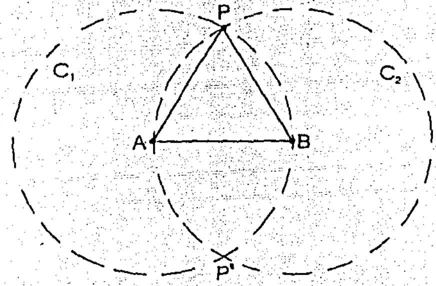


Paso 2.Con centro en B y radio $\overline{BA}$ trazamos el círculo C_2.



A las intersecciones de C_1 y C_2 les llamamos P y P'.

Paso 3. Trazamos las líneas $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$



Entonces $\overline{AP} = \overline{AB}$ (por ser radios de C_1)

y $\overline{BP} = \overline{BA}$ (por ser radios de C_2)

Así, las tres líneas son iguales:

$$\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{PB}$$

Y por tanto, el triángulo APB es el triángulo buscado.

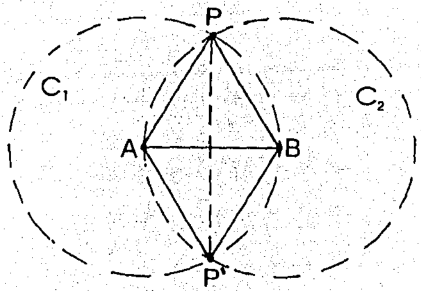
Fíjate que ésta figura se pudo haber obtenido usando el punto P' en lugar de P.

Además, de esta figura podemos sacar varias relaciones importantes:

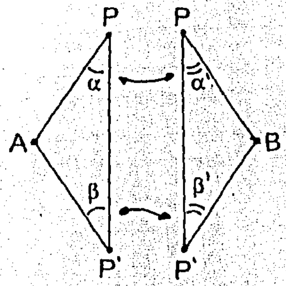
Si tomamos en cuenta la figura completa (el rombo APBP'), la línea $\overline{AB}$ divide a todo el rombo exactamente a la mitad.

Y, si trazáramos la línea que va de P a P'

(¡Hazlo !)



esta línea dividiría al rombo en 2 triángulos idénticos:



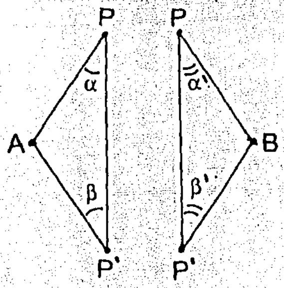
$$\Delta\ APP' = \Delta\ BPP'$$

ya que $\overline{AP} = \overline{AP'} = \overline{BP} = \overline{BP'}$ por lo demostrado anteriormente . (Ver los postulados de congruencia de triángulos en la página 115).

Además $\measuredangle\ APP' = \measuredangle\ BPP'$

y $\measuredangle\ AP'P = \measuredangle\ BP'P$

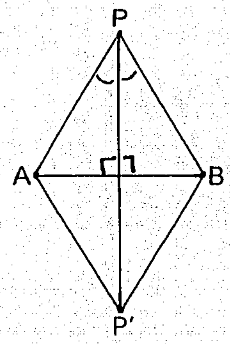
y como estos dos triángulos son isósceles:



entonces $\measuredangle APP' = \measuredangle AP'P$

y $\measuredangle BPP' = \measuredangle BP'P$

Es decir, la línea $\overline{PP'}$ es bisectriz del ángulo APB (lo divide exactamente a la mitad).



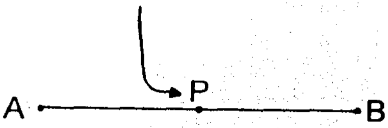
Como ves, de cada situación, al analizarla, podemos descubrir relaciones importantes que pueden ser útiles para llegar a la solución de un problema posterior.

Dejando hasta aquí la revisión de las propiedades de ésta figura, pasemos ahora al siguiente problema, el cual nos va a dar el método para dividir un segmento a la mitad:

Problema 2 de Construcción .-

Dada una recta delimitada,obtener su punto medio.

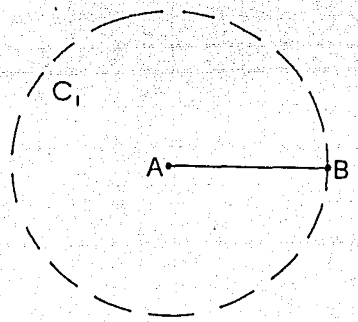
Obtener P tal que $\overline{AP} = \overline{PB}$



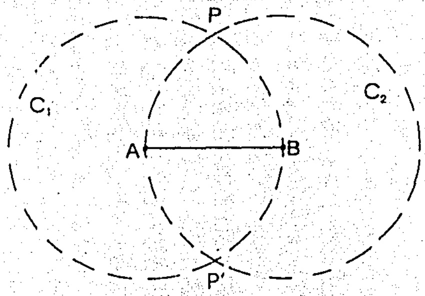
Solución.-

Como estamos dentro de una Teoría Deductiva, seguramente la solución se basa en lo hecho anteriormente:

Paso 1.-Con centro en A y radio $\overline{AB}$ trazo el círculo C_1

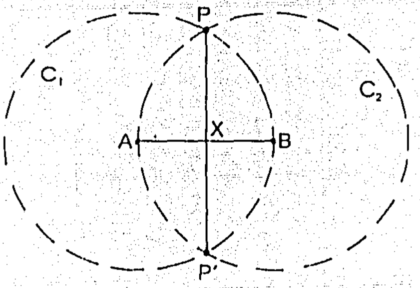


Paso 2.- Con centro en B y radio $\overline{BA}$ trazo el círculo C_2



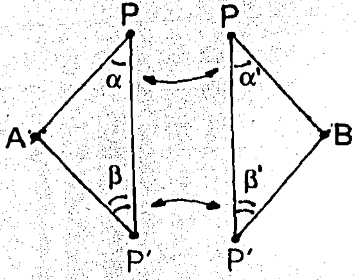
Sean P y P' las intersecciones de C_1 y C_2.

Paso 3.- Unimos los puntos P y P' y sea X la intersección de $\overline{PP'}$ con $\overline{AB}$.

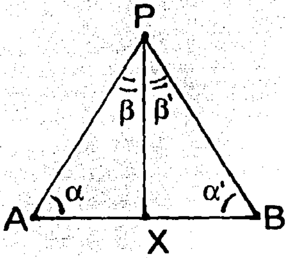


X es el punto buscado, ya que, por el problema (1)

$$\Delta\, APP' = \Delta\, BPP'$$



Además, si nos fijamos en la parte de arriba de la figura:



$$\Delta\, APX = \Delta\, BPX$$

ya que $\overline{AP} = \overline{PB}$,

$\measuredangle XAP = \measuredangle XBP$,

$\measuredangle APX = \measuredangle BPX$

y la línea $\overline{XP}$ es común a los 2 triángulos,

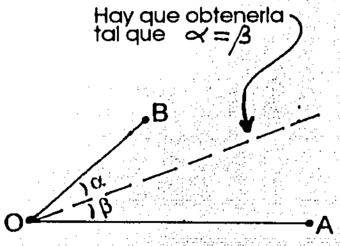
(Ver los postulados de congruencia de triángulos en la pág.115)

$$\therefore\ \overline{AX} = \overline{XB}$$

Ahora viene un problema en el que tendremos que obtener la mitad, pero de un ángulo dado:

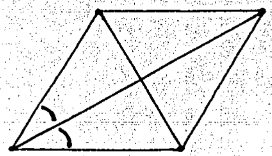
Problema 3 de Construcción.-

Dadas dos rectas que parten de un mismo punto, bisectar el ángulo que forman:



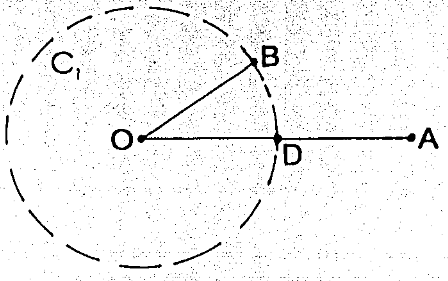
Solución.-

Como sabemos, vamos a utilizar lo obtenido anteriormente para obtener lo que nos piden, o sea, vamos a construir un rombo y que la bisectriz buscada sea una de sus diagonales (Prob. 1).



Paso 1. Primero vamos a obtener un punto equidistante de O en la misma medida que B para obtener un ángulo con sus dos lados del mismo tamaño (también podríamos haberlo hecho sobre A):

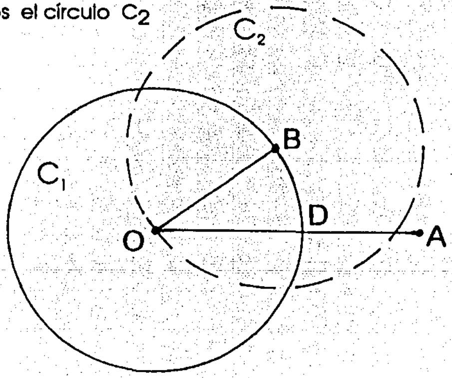
Con centro en O y radio $\overline{OB}$ trazamos el círculo C_1



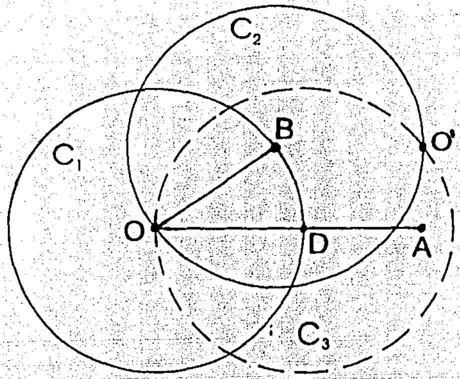
Sea D la intersección de C_1 con $\overline{OA}$

entonces $\overline{OB} = \overline{OD}$ (radios de C_1)

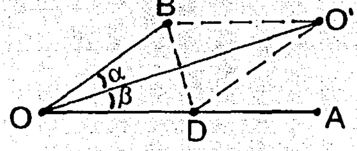
Paso 2.Ahora fijamos el compás en B y con radio $\overline{BO}$ trazamos el círculo C_2



Paso 3.Con centro en D y radio $\overline{DO}$ trazamos el círculo C_3 y llamamos O' a la intersección de C_2 y C_3



Paso 4.Trazamos la línea $\overline{OO'}$ y así llegamos a la bisectriz buscada, puesto que si trazamos el rombo completo, con los puntos O , B , O', D ; la línea $\overline{OO'}$ es una de las diagonales del rombo y por lo visto en el problema (1),



el Δ OBO' = Δ ODO'

y $\therefore \measuredangle$ DOO' = $\measuredangle$ O'OB

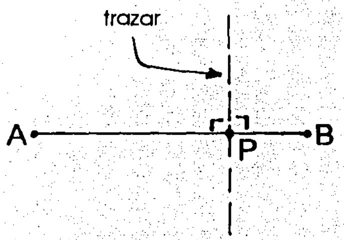
El siguiente paso dentro del desarrollo de nuestra Teoría Deductiva sería plantearnos el problema de dividir un ángulo en tres partes iguales, es decir, trisectarlo ...
Bueno, pues este es un problema que se plantearon los griegos hace aproximadamente 2,000 años y finalmente se demostró que no se podía resolver.

Este es un problema que junto con el de la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo se han hecho famosos por no tener solución.

Continuando con nuestra Teoría, los siguientes dos problemas consisten en obtener un método para trazar una perpendicular a una recta dada, bajo distintas condiciones.
Veamos :

Problema 4 de Construcción.-

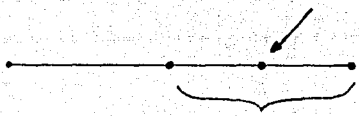
Dada una recta delimitada y un punto en ella, trazar una perpendicular a la recta, pero que pase por ése punto.



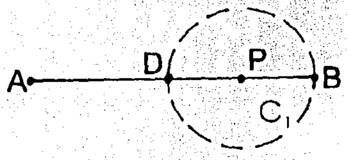
Solución.-

Si el punto estuviera a la mitad de la recta, caeríamos directamente en la situación del problema (1).

Por tanto, al estar el punto en cualquier lugar de la recta, trataremos de provocar que quede en el centro de algún segmento:

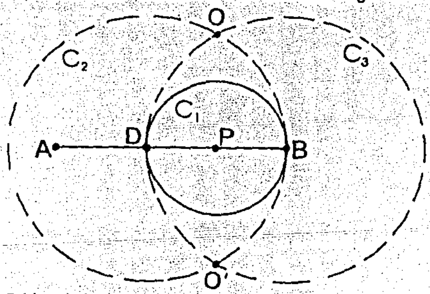


Paso 1.-Escogemos B por ser el punto más cercano a P y así manejar círculos pequeños, pero igualmente podríamos haberlo hecho sobre el punto A . Con centro en P y radio $\overline{PB}$ trazamos el círculo C_1 . Sea D la intersección de C_1 con $\overline{AB}$:



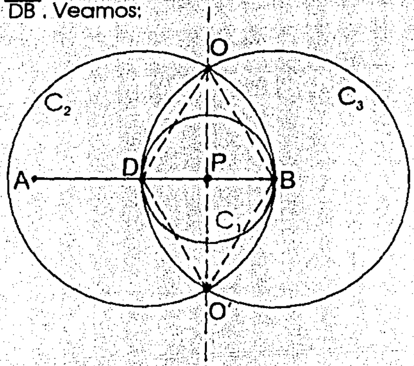
entonces $\overline{PB} = \overline{PD}$ (radios de C_1)

Paso 2.-Utilizando como base la línea $\overline{DB}$, hacemos lo siguiente:
Con centro en D y radio $\overline{DB}$ trazamos el círculo C_2 y con centro en B y radio $\overline{BD}$ trazamos el círculo C_3 :



Sean O y O' las intersecciones de C_2 y C_3

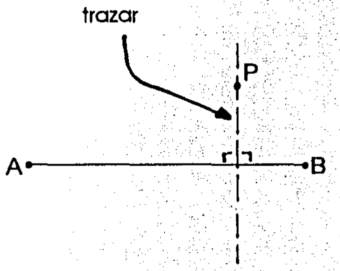
Paso 3.-En este momento estamos exactamente en el problema (1) ya resuelto, por lo tanto, trazamos $\overline{OO'}$ la cual estamos seguros que pasa por P y además, formando ángulos rectos con $\overline{DB}$. Veamos:



Como en el problema (1) se demostró que para el rombo con vértices D , O , B , O', las líneas $\overline{DB}$ y $\overline{OO'}$ son sus diagonales y éstas se intersectan formando ángulos rectos entre sí y, además, en el punto medio de ambas diagonales (ver resultados adicionales del problema (1)), por lo tanto efectivamente la recta $\overline{OO'}$ es la perpendicular buscada.

Problema 5 de Construcción.-

Dada una recta delimitada y un punto fuera de ella, trazar una perpendicular a la recta, pero que pase por ése punto.



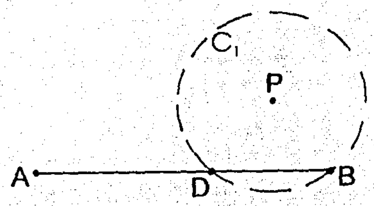
Solución.-

Aquí no es la excepción, vamos a basarnos en lo hecho anteriormente para llegar más fácilmente al trazo que nos piden.

Si el punto P estuviera en un lugar equidistante de A y B, prácticamente no habría ningún problema pues tendríamos como herramienta los resultados del problema (1).

Por tanto, como P no necesariamente está a la misma distancia de A y de B, trataremos de crear una situación semejante, es decir, que quede equidistante de B y de otro punto (D) - también se pudo haber hecho sobre A, solo que los círculos que se tendrían que trazar serían más grandes por estar más alejado A de P :

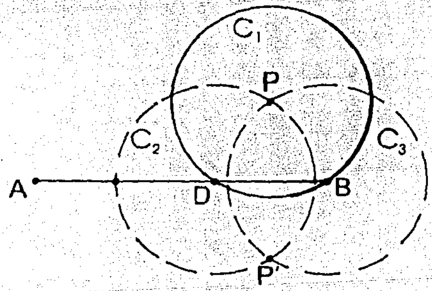
Paso 1.-Con centro en P y radio $\overline{PB}$ trazamos el círculo C_1.



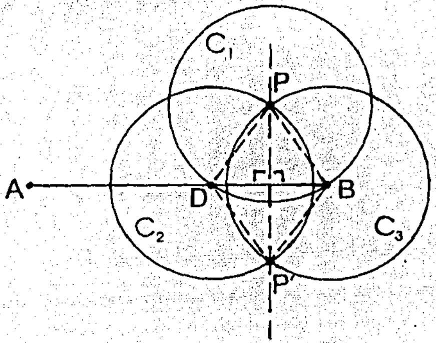
Así, obtenemos el punto D tal que

$$\overline{PB} = \overline{PD} \text{ (radios de } C_1 \text{).}$$

Paso 2.-Con centro en D y radio $\overline{DP}$ trazamos el círculo C_2 y con centro en B y radio $\overline{BP}$ trazamos el círculo C_3. Así, obtenemos P' que es simétrico de P respecto a $\overline{DB}$:



Paso 3.-Si trazamos las líneas $\overline{DP}$, $\overline{BP}$, $\overline{DP'}$, $\overline{BP'}$ vemos que se forman 2 triángulos idénticos que aunque no son equiláteros sino isósceles, de todas maneras se forma nuestro rombo surgido en el problema (1):



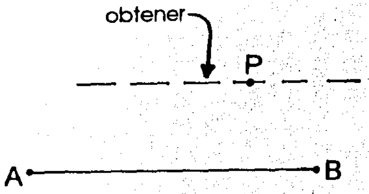
Por tanto, al trazar la línea $\overline{PP'}$ vemos, por el problema (1), que es la perpendicular a $\overline{AB}$ que estábamos buscando, ya que los triángulos interiores al rombo que formamos cumplen las mismas relaciones que sus equivalentes del problema (1).

Adivina cuál será nuestro siguiente problema...

Efectivamente:

Problema 6 de Construcción.-

Dada una recta delimitada y un punto fuera de ella, trazar una recta paralela a la recta dada, pero que pase por ése punto.

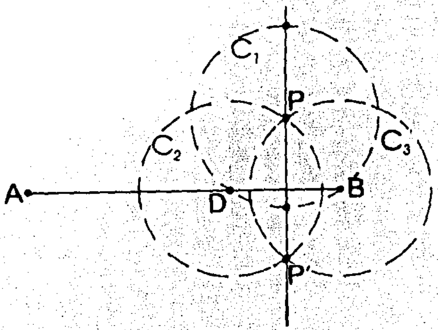


Solución.-

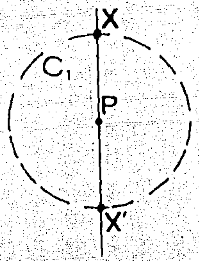
Hay varias soluciones para este problema, pero si utilizamos los problemas anteriores, se simplificará la obtención de la solución.

Antes de cualquier trazo debemos pensar qué significa trazar una paralela a una recta dada. De aquí podemos concluir que trazar una paralela equivale a hacer un doble giro de 90º con la recta original, entonces, si utilizamos el problema (5) y el problema (4) sucesivamente, logramos llegar a la paralela buscada:

Paso 1.-Por el procedimiento del problema (5), trazamos la recta $\overline{PP'}$ perpendicular a $\overline{AB}$ -------(*)

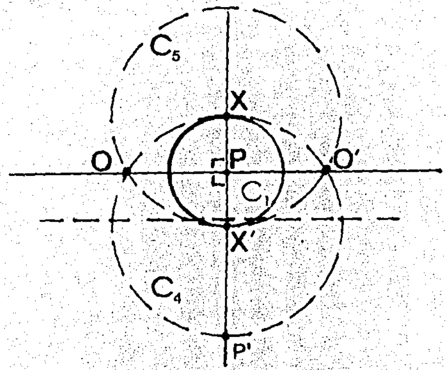


Paso 2.- Utilizando el círculo C_1 y llamando X y X' a las intersecciones de C_1 con $\overline{PP'}$

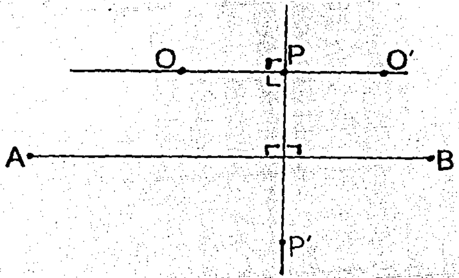


tenemos que P está en el centro de la línea $\overline{XX'}$

(*) **Nota:** Con este enunciado, ya no tenemos que repetir (reescribir) los pasos seguidos hasta llegar al trazo de $\overline{PP'}$, puesto que están contemplados en el desarrollo de la solución del problema (5) y por el problema (4) podemos trazar $\overline{OPO'}$ perpendicular a $\overline{PP'}$:



Paso 3.- Como $\overline{OPO'}$ es perpendicular a $\overline{PP'}$
y $\overline{PP'}$ es perpendicular a $\overline{AB}$,
entonces $\overline{OPO'}$ es paralela a $\overline{AB}$.
$\therefore$ $\overline{OO'}$ es la paralela a $\overline{AB}$ buscada.



Es decir, juntando los 2 diagramas anteriores, superponiendo uno sobre el otro, nos queda la construcción deseada.

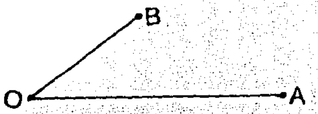
Dentro de nuestra Teoría Deductiva, además de poder trazar triángulos equiláteros, dividir segmentos a la mitad, bisectar ángulos, trazar perpendiculares y paralelas, la pregunta sería, qué mas podemos hacer ?

La respuesta sería: podríamos trasladar segmentos de recta de un lugar a otro y podríamos también sumarlos o restarlos. Será cierto ?...

Problema 7 de Construcción.-

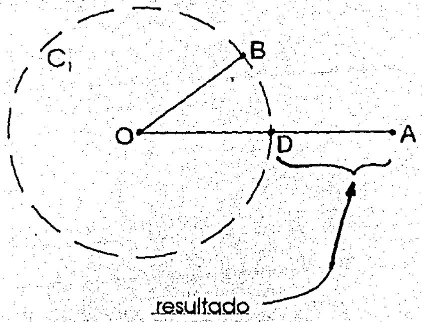
Dadas 2 rectas delimitadas que parten de un mismo punto, a la mayor restarle la menor.

$$\overline{OA} - \overline{OB} = ?$$



Solución.-

¿Cómo crees que se haría ?... Pues sí, vamos a escoger el segmento $\overline{OB}$ para moverlo: Con centro en O y radio $\overline{OB}$ trazamos el círculo C_1 y sea D la intersección de C_1 con $\overline{OA}$:



Entonces $\overline{OD} = \overline{OB}$ (radios de C_1)

Por tanto, $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OA} - \overline{OD} = \overline{DA}$

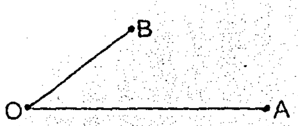
este es el resultado

Y si queremos sumar los segmentos ?...

Problema 8 de Construcción.-

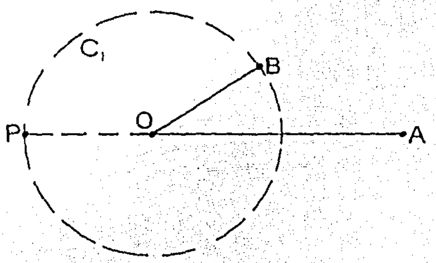
Dadas dos rectas delimitadas que parten de un mismo punto, sumarlas.

$$\overline{OA} + \overline{OB} = ?$$



Solución.-

Como sumar es equivalente a juntar, vamos a poner los 2 segmentos alineados, sin traslape: Escogemos mover a $\overline{OB}$.
Con centro en O y radio $\overline{OB}$ trazamos el círculo C_1 (**ve haciéndolo en tu cuaderno**) y prolongamos la recta $\overline{OA}$ hasta intersectar a C_1 en P:



Entonces $\overline{OB} = \overline{OP}$ (radios de C_1)

Así, $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OP} = \overline{PA}$

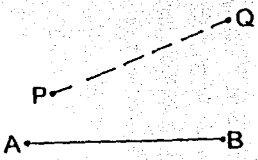
es el resultado.

Problema 9 de Construcción.-

Se trata de mover una recta de un lugar a otro:

Dada una recta delimitada y un punto fuera de ella, trazar una recta igual a la recta dada, pero que salga de ése punto, (No importa en qué dirección)

trazar $\overline{PQ} = \overline{AB}$



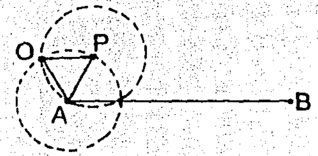
Solución.-

De las varias soluciones que hay para este problema, vamos a escoger una por su importancia histórica (es de Euclides) y que combina varios de los elementos vistos en los problemas anteriores.

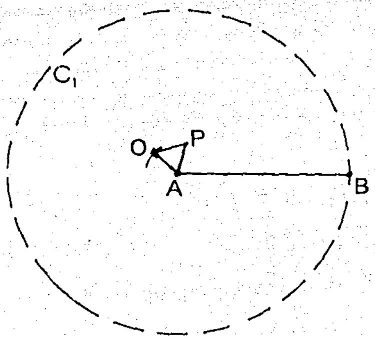
Tú, obtén otra solución en tu cuaderno usando las ideas de paralelismo de rectas .- - - - - - - - - - - - - - - - (*)

(*) - - - - - - ver sección de tareas.

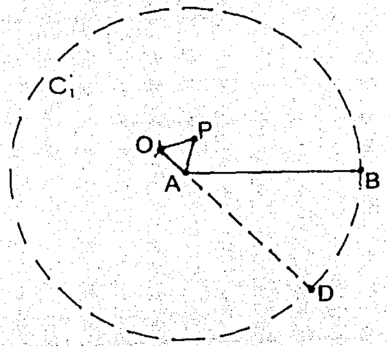
Paso 1.- Primero vamos a unir el extremo más cercano de la recta, es decir, A con el punto dado P, y sobre esa línea $\overline{AP}$, trazamos el triángulo equilátero AOP (ver problema de construcción 1)



Paso 2.- Con centro en A y radio $\overline{AB}$ trazamos C_1 (el círculo C_1)



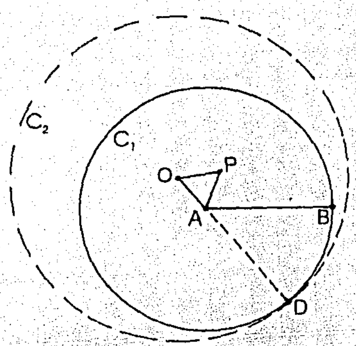
Paso 3.- Prolonguemos el lado $\overline{OA}$ del triángulo equilátero hasta intersectar el círculo C_1 en D.



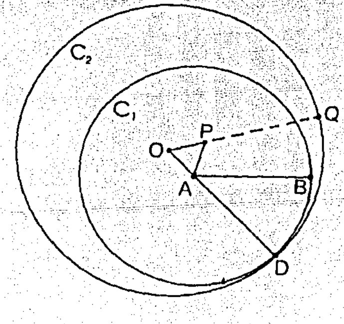
De aquí, vemos que $\overline{AB} = \overline{AD}$ (radios de C_1).

Por tanto, la recta $\overline{AB}$ la estamos girando a que quede alineada con el lado $\overline{OA}$ del triángulo equilátero, y así se convierte en la línea $\overline{AD}$.

Paso 4.- Con centro en O y radio $\overline{OD}$ trazamos el círculo C_2 (fíjate que el círculo lo podemos trazar cuando ya está trazado el radio).



Es importante notar que el círculo C_1 tiene centro en A y radio $\overline{AB}$, y el C_2 tiene centro en O y radio $\overline{OD}$.
Obviamente, el círculo C_2 es más grande que C_1, ya que el radio de C_2 va desde O hasta D, y en cambio, el radio de C_1 es $\overline{AD}$ cuya medida es igual a la de $\overline{AB}$.
Paso 5.-Prolongamos la línea $\overline{OP}$ hasta intersectar a C_2 en Q.



Entonces, $\overline{OD} = \overline{OQ}$ (radios de C_2)

Ahora, si a ambos radios les restamos respectivamente $\overline{OA}$ y $\overline{OP}$ (lados del triángulo equilátero AOP), tendremos :

$$\overline{OD} - \overline{OA} = \overline{OQ} - \overline{OP}$$

porque a cantidades iguales les estamos quitando cantidades iguales.

Así, $\overline{OD} = \overline{OQ}$

restando $\overline{OA}$ y $\overline{OP}$ respectivamente:

$$\overline{OD} - \overline{OA} = \overline{OQ} - \overline{OP}$$

$$\overline{AD} = \overline{PQ}$$

resultado de
las restas.

Pero como en el paso 3 vimos que

$$\overline{AD} = \overline{AB}$$

Por lo tanto, sustituyendo tendremos :

$$\overline{AB} = \overline{PQ}$$

Es decir, acabamos de trazar la recta $\overline{PQ}$ del mismo tamaño que la recta $\overline{AB}$, pero partiendo del punto P .

¿ Qué te pareció ?

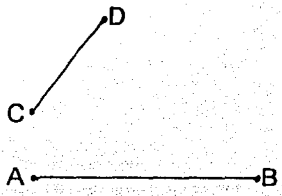
¿ Bonita ... verdad ?

Así, llegamos al ...

Problema 10 de Construcción.-

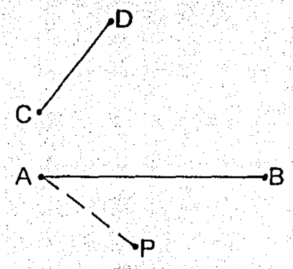
Dadas dos rectas delimitadas cualesquiera, a la mayor restarle la menor.

$$\overline{AB} - \overline{CD} = ?$$



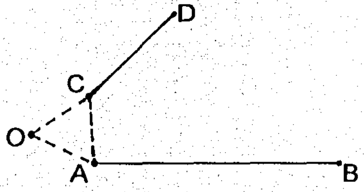
Solución.-

Tenemos que mover la recta $\overline{CD}$ (problema 9) a que salga de A y entonces aplicamos el problema 8 para restar los dos segmentos. (Siempre relacionamos todo con lo hecho anteriormente).

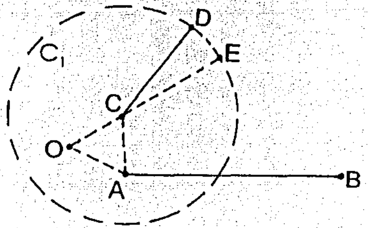


Hay que obtener $\overline{AP} = \overline{CD}$ para después restarla de $\overline{AB}$.

Paso 1.- Trazamos la línea que va de C a A y sobre ella construímos el triángulo equilátero AOC .

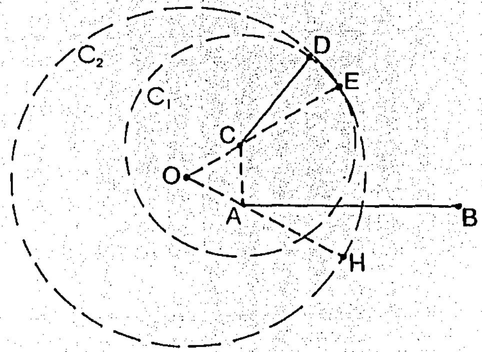


Paso 2.- Con centro en C y radio $\overline{CD}$ trazamos el círculo C_1 y prolongamos $\overline{OC}$ hasta intersectar a C_1 en E .



De aquí, $\overline{CD} = \overline{CE}$ (radios de C_1)

Paso 3.- Con centro en O y radio $\overline{OE}$ trazamos el círculo C_2 y prolongamos $\overline{OA}$ hasta intersectar a C_2 en H.



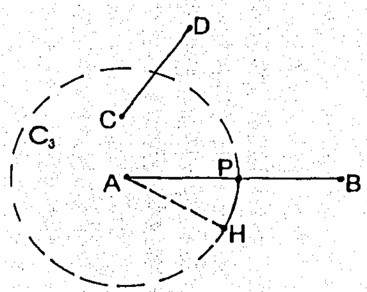
Entonces, por el problema anterior, tenemos

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AH}$$

Por lo tanto, ya logramos mover la recta $\overline{CD}$ a convertirla en la recta $\overline{AH}$.

Aquí podremos aplicar ya el problema 9 y llegar a la solución final :

Paso 4.- Con centro en A y radio $\overline{AH}$ trazamos el círculo C_3 para girar la recta $\overline{AH}$ y que quede sobre $\overline{AB}$, y así poder restarlas:



Entonces, $\overline{AP} = \overline{AH}$ (radios de C_3)

pero como $\overline{AH} = \overline{CD}$ (paso 3)

entonces, $\overline{AP} = \overline{CD}$

Por lo tanto, si queremos restar $\overline{AB} - \overline{CD}$

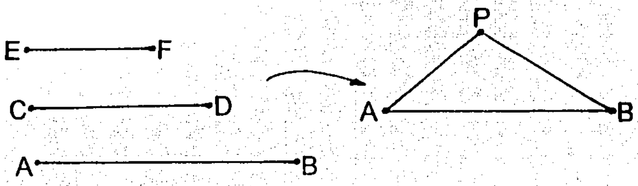
es lo mismo que restar $\overline{AB} - \overline{AP} = \overline{PB}$

este es el segmento resultante.

Ahora, llegamos a una situación todavía más general:

Problema 11 de Construcción.-

Dadas tres rectas delimitadas cualesquiera, trazar un triángulo cuyos lados sean respectivamente esas tres rectas

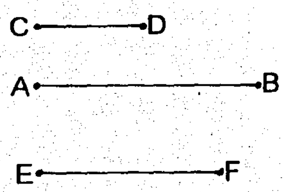


Solución.-

Para poder hacer el triángulo, es importante hacer notar que los 2 lados más pequeños deben sumar más que el otro lado, si no, no se formaría el triángulo.

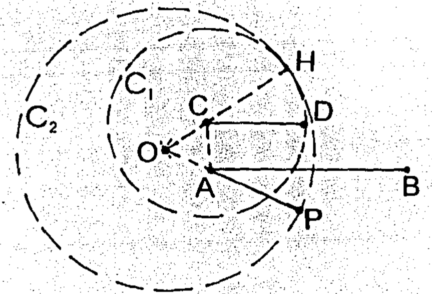
¡¡ Chécalo !!).

Supongamos que las rectas están colocadas de la siguiente manera y que $\overline{AB}$ será la base del triángulo.



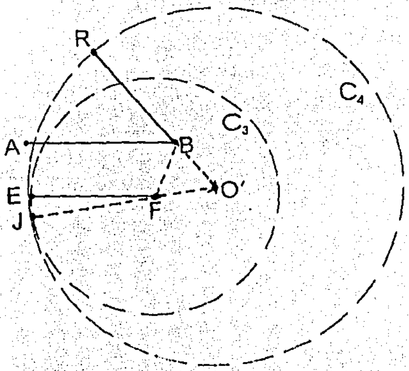
Moveremos $\overline{CD}$ a que salga de A y $\overline{EF}$ a que salga de B :

Paso 1.- Aplicando el problema 9, trasladamos la recta $\overline{CD}$ a que salga del punto A .



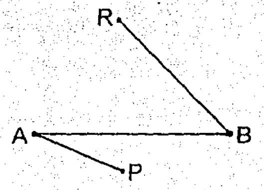
Así, obtenemos $\overline{AP} = \overline{CD}$ (por el problema 9)

Paso 2.-Aplicando el problema 9, trasladamos la recta $\overline{EF}$ a que salga del punto B .

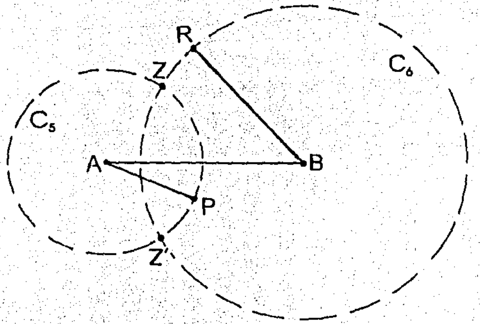


Así, obtenemos $\overline{BR} = \overline{EF}$ (por el problema 9)

Paso 3,- Como nuestras rectas $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ ya se movieron a donde queríamos, y quedaron convertidas en $\overline{AP}$ y $\overline{BR}$ respectivamente, ahora giraremos éstas hasta encontrar el tercer vértice del triángulo :

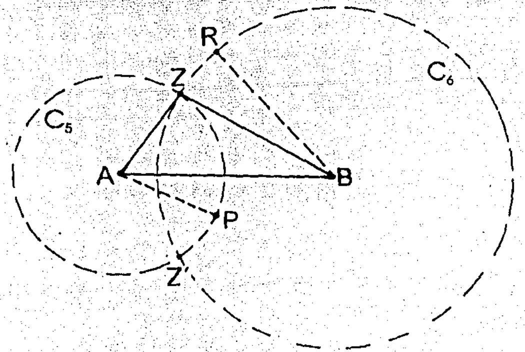


Con centro en A y radio $\overline{AP}$ trazamos el círculo C_5 y con centro en B y radio $\overline{BR}$ trazamos el círculo C_6



Llamemos Z y Z' a las intersecciones de los círculos C_5 y C_6.

Paso 4.- Trazamos $\overline{AZ}$ y $\overline{BZ}$



Entonces, el triángulo AZB es el triángulo buscado,

ya que como $\overline{AZ} = \overline{AP}$

y $\overline{AP} = \overline{CD}$ (por problema 9)

entonces, $\overline{AZ} = \overline{CD}$

También, $\overline{BZ} = \overline{BR}$

y como $\overline{BR} = \overline{EF}$ (por problema 9)

por lo tanto, $\overline{BZ} = \overline{EF}$.

Si te das cuenta, el triángulo podíamos haberlo trazado utilizando el punto Z' como tercer vértice y el triángulo quedaría hacia abajo de la línea $\overline{AB}$.

Como trabajo complementario, resuelve todos éstos mismos problemas, pero ahora utilizando nuestra regla y compás modernos.

Seguramente te darás cuenta que los trazos necesarios para obtener cada construcción pedida se simplifican enormemente utilizando éstos instrumentos. El planteamiento y solución de ellos los encontrarás en tu cuaderno de tareas.

Con este problema, terminamos nuestro primer acercamiento hacia lo que es una teoría deductiva y su método de trabajo.

Pues, así es como se dió históricamente el desarrollo de esta Teoría Deductiva, que con el transcurso del tiempo dio origen entre otras, a la Geometría Analítica, además de otras geometrías llamadas no euclideanas.

Hasta aquí vamos a dejar nuestra revisión de ésta Teoría Deductiva, utilizando sólo la regla y compás, a la manera de los antiguos griegos .

En adelante, ya usaremos la regla con graduaciones, escuadras y nuestro compás moderno, que se quede abierto después de hacer un trazo y podamos así trasladar distancias de un lugar a otro. También podremos utilizar un transportador para poder medir ángulos como acostrumbramos desde la Primaria.

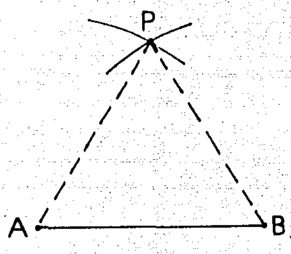
Después de la práctica adquirida con estos problemas tan bonitos (¿ no lo crees así ?), en el siguiente capítulo vamos a ver algunos resultados importantes de la Geometría Euclideana y demostraremos las propiedades que se nos piden.

Problemas Propuestos.

Utilizando nuestros instrumentos modernos de geometría (regla graduada, escuadras, compás y transportador), realizar las siguientes construcciones geométricas.

Problema 1.- (*)

Dada una recta delimitada, construir sobre ella un triángulo equilátero.

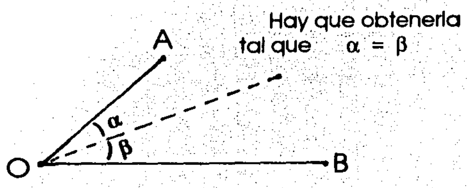


Problema 2.- (*)

Dada una recta delimitada, obtener su punto medio.

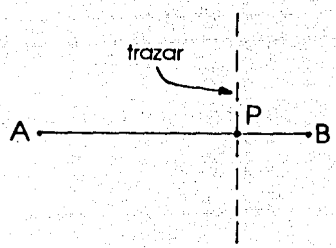
Problema 3.-(*)

Dadas dos rectas que parten de un mismo punto, bisectar el ángulo que forman.



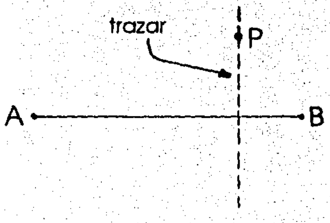
Problema 4.- (*)

Dada una recta delimitada y un punto en ella, trazar una perpendicular a la recta, pero que pase por ése punto.



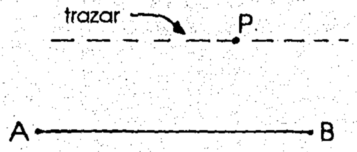
Problema 5.-(*)

Dada una recta delimitada y un punto fuera de ella, trazar una perpendicular a la recta, pero que pase por ése punto:



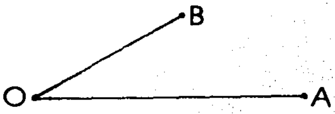
Problema 6.-(*)

Dada una recta delimitada y un punto fuera de ella, trazar una paralela a la recta dada, pero que pase por ése punto.



Problema 7.-(*)

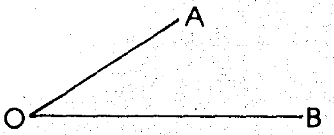
Dadas dos rectas delimitadas que parten de un mismo punto, a la mayor restarle la menor.



$$\overline{AB} - \overline{CD} = ?$$

Problema 8.-(*)

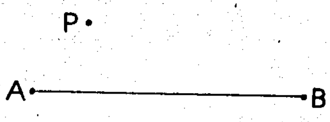
Dadas dos rectas delimitadas que parten de mismo punto, sumarlas.



$$\overline{AB} + \overline{CD} = ?$$

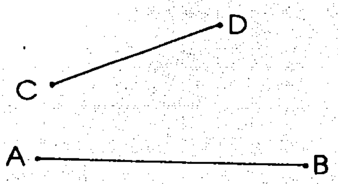
Problema 9.- (*)

Dada una recta delimitada y un punto fuera de ella, trazar una recta igual a la recta dada, pero que salga de ése punto.(No importa la dirección).



Problema 10.- (*)

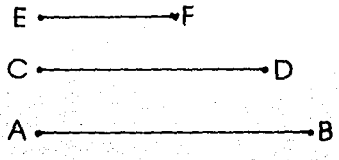
Dadas dos rectas delimitadas cualesquiera, a la mayor restarle la menor.



$\overline{AB} - \overline{CD} = ?$

Problema 11.- (•)

Dadas tres rectas delimitadas cualesquiera, trazar un triángulo cuyos lados sean respectivamente ésas tres rectas.



Como ves, en el momento que a la geometría original de los griegos le añadimos el concepto de distancia, los trazos se simplificaron enormemente puesto que las distancias ya las pudimos conservar.

Nota: Las soluciones de éstos problemas las podrás ver al final del libro, en el apéndice.

Problema 12.-

Usando solo regla y compás, Respecto del problema 3, si de un ángulo nos dan como datos el lado inicial y la bisectriz correspondiente, obtener el lado terminal del ángulo.

Problema 13.-

Solo con regla y compás, trazar la paralela pedida en el problema 6 trazando varios triángulos equiláteros o isósceles sobre la recta dada, para que al unir los vértices dicha recta pase por el punto dado.

Para los siguientes problemas vamos a usar nuestros instrumentos modernos de geometría para facilitar los trazos correspondientes. Se sugiere tomar en cada caso la medida del radio del círculo dado e irla marcando a través de la circunferencia y ajustando hasta lograr tener la figura que nos piden en cada caso:

Problema 14.-

Dado un círculo, trazar un pentágono inscrito (con sus vértices sobre la circunferencia) que tenga todos sus lados del mismo tamaño.

Problema 15.-

Dado un círculo, trazar un hexágono inscrito (con sus vértices sobre la circunferencia) que tenga todos sus lados iguales (hexágono regular).

Problema 16.-

Dado un círculo, trazar un heptágono regular inscrito (con todos sus lados del mismo tamaño y con sus vértices sobre la circunferencia).

Problema 17.-

Dado un círculo, trazar un octágono sobre la circunferencia y con la característica de que todos sus lados midan exactamente lo mismo.

Problema 18.-

Dado un círculo, trazar un nonágono sobre la circunferencia y tal que todos sus lados midan lo mismo.

Problema 19.-

Dado un círculo, trazar sobre la circunferencia un decágono en el que todos sus lados midan lo mismo.

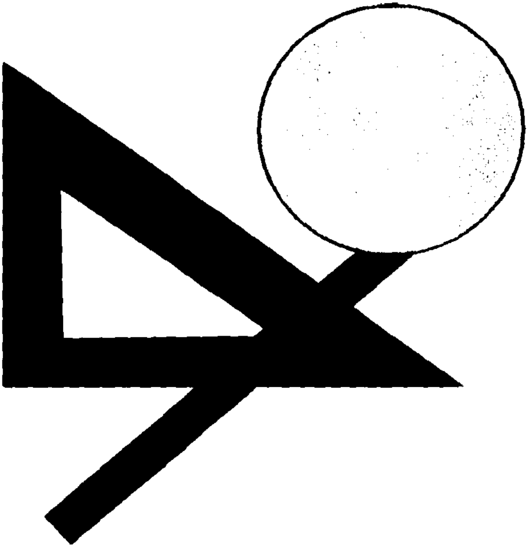
Problema 20.-

Dado un círculo, trazar, tomando como base la medida del radio y acortándola sucesivamente hasta lograr obtener la medida adecuada, un polígono de once lados con todos sus lados del mismo tamaño.

Problema 21.-

Dado un círculo, trazar sobre su circunferencia un polígono de doce lados con todos sus lados iguales.

CAPITULO III



PROBLEMAS DE DEMOSTRACION

Como vimos al principio, uno de los primeros pasos que se pueden seguir en el desarrollo de una teoría deductiva consiste en definir algunos elementos adicionales, y continuar combinando éstos con todo lo anterior para obtener nuevos resultados, y así sucesivamente...

Lo primero que haremos en éste momento será cambiar nuestra regla sin graduaciones ni marcas por una que sí tenga su escala marcada, y el compás que no se quedaba abierto, por uno que sí va a servir para conservar y trasladar distancias; además, usaremos un transportador, para medir ángulos.

Es decir, añadiremos la noción de distancia (la medida dentro de nuestra regla, asociada a la longitud de un segmento) a nuestra teoría, y también la noción de amplitud de un ángulo, las cuales manejamos desde la Primaria.

Todo esto nos conduce a plantearnos una serie de cuestiones sobre propiedades de figuras geométricas y que constituyen los siguientes teoremas que vamos a enunciar y demostrar.

Para empezar, haremos una revisión sobre ángulos rectilíneos y las relaciones que se forman con 2 paralelas cortadas por una transversal:

Angulos rectilíneos.

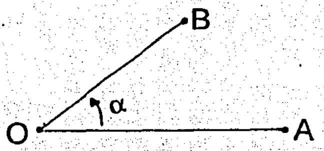
En un ángulo rectilíneo, podemos distinguir los siguientes elementos:

lado inicial: $\overline{OA}$

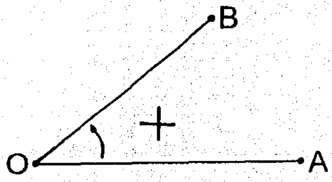
vértice: O

lado terminal: $\overline{OB}$

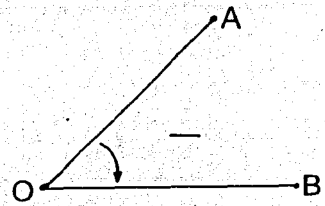
α = ángulo



Además, todo ángulo que se recorre en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj es un ángulo positivo; y si se recorre en el sentido de las manecillas del reloj, es un ángulo negativo.



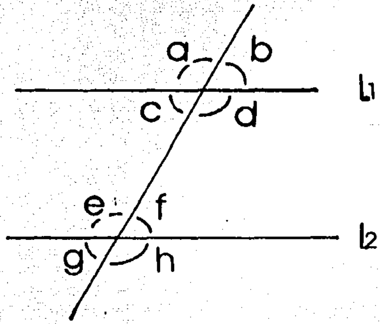
positivo



negativo

Ahora, si tenemos dos rectas paralelas cortadas por una transversal, se forman ocho ángulos que están relacionados entre sí de la siguiente manera:

L_1 paralela a L_2



Si nos fijamos en éstos ángulos, la relación más inmediata que encontramos es la de ser ángulos suplementarios:

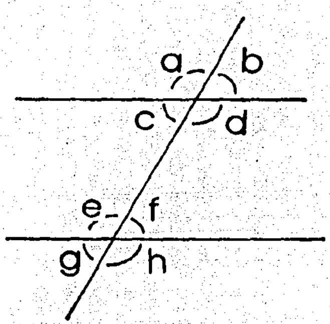
$a + b = 180°$ (por ser ángulos suplementarios)
$c + d = 180°$ (por ser ángulos suplementarios)
$a + c = 180°$ (por ser ángulos suplementarios)
$b + d = 180°$ (por ser ángulos suplementarios)
$e + f = 180°$ (por ser ángulos suplementarios)
$g + h = 180°$ (por ser ángulos suplementarios)
$e + g = 180°$ (por ser ángulos suplementarios)
$f + h = 180°$ (por ser ángulos suplementarios)

Además,

$a + b + c + d = 360°$ (por ser ángulos conjugados)

$e + f + g + h = 360°$ (por ser ángulos conjugados)

Por otro lado,



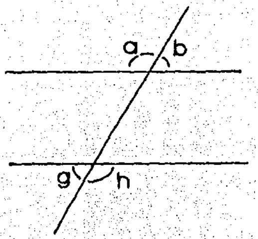
$a = d$ (se llaman ángulos opuestos por el vértice),

$b = c$ (son opuestos por el vértice),

$e = h$ (son opuestos por el vértice),

$f = g$ (son opuestos por el vértice) .

Si nos fijamos en los siguientes ángulos:

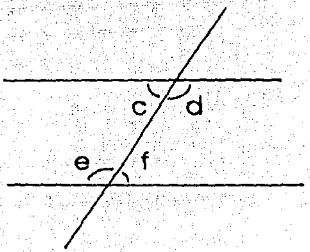


vemos que a y h están los dos por fuera de las paralelas (son exteriores) y uno a cada lado de la transversal. Se llaman alternos externos y son iguales e igual pasa con b y g :

a = h (por ser alternos externos)

b = g (por ser alternos externos)

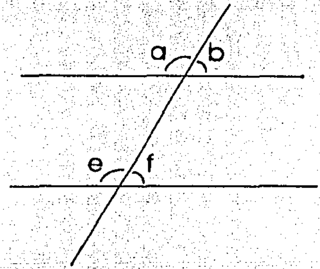
Con los internos pasa igual:



c = f (por ser alternos internos)

d = e (por ser alternos internos)

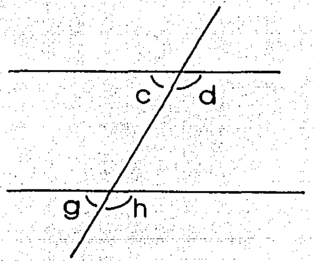
El ángulo a y el ángulo e están del mismo lado de la transversal y los dos por encima de cada paralela. Son iguales y se llaman correspondientes. También b y f .



a = e (por ser correspondientes)

b = f (por ser correspondientes)

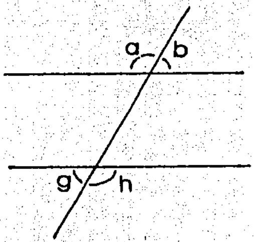
Igualmente con c y g , d y h, aunque éstos están por abajo de cada paralela.



c = g (por ser correspondientes)

d = h (por ser correspondientes)

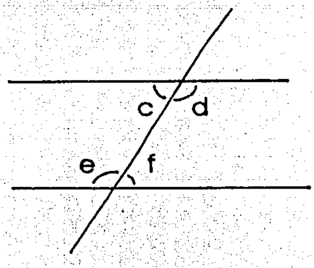
Si nos fijamos en a , g , b , h vemos que a y g están del mismo lado de la transversal y los 2 por fuera de las paralelas. Se llaman colaterales externos, y si los pudiéramos unir, sumarían 180°. Igual pasa con b y h .



a + g = 180° (por ser colaterales externos)

b + h = 180° (por ser colaterales externos)

Lo mismo ocurre con los internos:

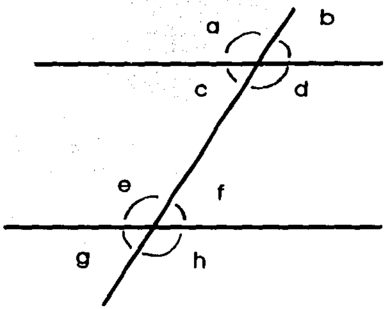


c + e = 180° (por ser colaterales internos)

b + f = 180° (por ser colaterales internos)

Vamos a ver el siguiente ejemplo, en el que buscaremos todas las relaciones posibles entre los ángulos:

Ejemplo 1 .Si el ángulo d mide 120° , ¿ cuánto mide cada uno de los otros ángulos ?



Respuesta:

b = 60° por ser suplementario de d , es decir, b + d = 180°

c = 60° por ser suplementario de d , o también podría verse
que es opuesto por el vértice con b .

a = 120° por ser opuesto por el vértice con d ,
o por ser suplementario de b ,
o por ser suplementario de c
o también por ser conjugado de b , c y d .

e = 120° por ser alterno interno con d ,
igual, por ser correspondiente con a
o por ser colateral interno con c .

$f = 60°$ por ser suplementario de e ,

o alterno interno con c ,

o también por ser correspondiente con b

o colateral interno con d .

$g = 60°$ por ser suplementario de e ,

o por ser opuesto por el vértice con f ,

o correspondiente con c ,

o alterno externo con b

o aún por ser colateral externo con a .

$h = 120°$ por ser suplementario con g ,

o suplementario con f ,

o conjugado de e , f y g ,

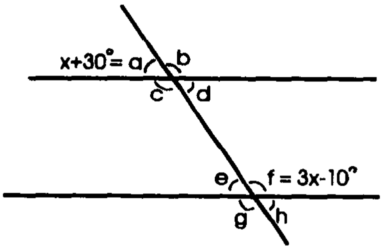
o opuesto por el vértice con e ,

o correspondiente con d ,

o alterno externo con a

o colateral externo con b .

Ejemplo 2 . ¿ Cuánto mide cada ángulo, de acuerdo con la siguiente figura ?



Respuesta.

Como f es correspondiente con b , sabemos que b mide lo mismo que f , o sea, b = 3x - 10
y como a y b son suplementarios :

$$a + b = 180°$$
$$x + 30° + 3x - 10° = 180°$$
$$4x + 20° = 180°$$
$$4x = 180° - 20°$$
$$4x = 160°$$
$$x = 160° / 4$$
$$x = 40°$$

por lo tanto, sustituyendo:

$a = x + 30°$	$b = 3x - 10°$
$a = 40° + 30°$	$b = 3\,(40°) - 10°$
$a = 70°$	$b = 120° - 10°$
	$b = 110°$

Por lo tanto, a = 70° ____

b = 110° ____

c = 110° ____

d = 70° ____

e = 70° ____

f = 110° ____

g = 110° ____

h = 70° ____

¿ Por qué ? . Dá las justificaciones en cada caso (escríbelas en las líneas punteadas de arriba).

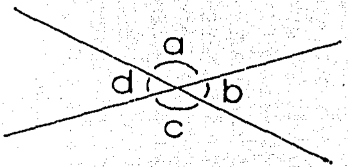
Recuerda que estamos en una teoría deductiva y por tanto, lo que vamos a hacer, seguramente está basado en lo que hemos visto anteriormente.

Al empezar este tema, con la revisión de los ángulos que se forman con dos paralelas cortadas por la transversal, apuntamos una serie de relaciones entre los ángulos ahí formados, y cada relación planteada, deberíamos haberla demostrado antes de usarla.

Así es como pasamos a nuestra serie de Teoremas de la Geometría Euclideana.

En éstos teoremas, lo importante va a ser la demostración correspondiente y posiblemente tendremos que hacer algun trazo auxiliar, pero ya no lo tendremos que hacer a la manera de los antiguos griegos, ni tampoco tendremos que justificar dichos trazos.

Teorema 1. Si tenemos dos ángulos que son opuestos por el vértice, éstos son iguales entre sí.



$$a = c \quad y \quad b = d$$

Demostración.

Sólo una de estas dos relaciones debemos demostrar, pero además, en una demostración no se pueden poner valores a los ángulos, sino que debe ser ésta en general.

Usando lo anterior, sabemos que

$$a + b = 180° \text{ (por ser suplementarios)}$$
$$y \quad b + c = 180° \text{ (por ser suplementarios)}$$

Igualando las 2 ecuaciones:

$$a + b = b + c$$

Si eliminamos b en ambos lados de la ecuación:

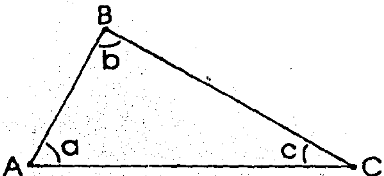
$$a + \cancel{b} = \cancel{b} + c$$

queda $a = c$

que es lo que queríamos demostrar ! .

Tú, demuestra en tu cuaderno que $b = d$

Teorema 2. Demostrar que los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°.

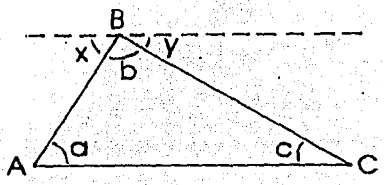


$a + b + c = 180°$

Nota. Debemos apoyarnos en lo que vimos sobre las paralelas para obtener nuestro resultado.

Demostración.

Por B trazamos una paralela a $\overline{AC}$.

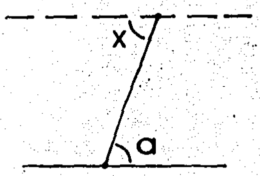


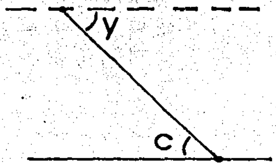
Al trazarla se nos forman los ángulos x, y que al juntarlos con b dan:

$$x + b + y = 180^\circ \text{ (por ser suplementarios)}$$

$$\text{pero} \quad x = a \text{ (por ser alternos internos)}$$

$$\text{y} \quad y = c \text{ (por ser alternos internos)}$$





Por lo tanto, sustituyendo:

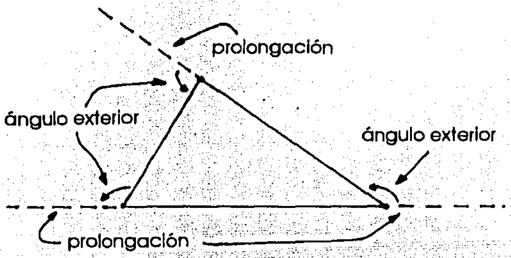
$$a + b + c = 180^\circ$$

Haz tú otra demostración de este teorema suponiendo que la paralela la trazamos por C y paralela a $\overline{AB}$:

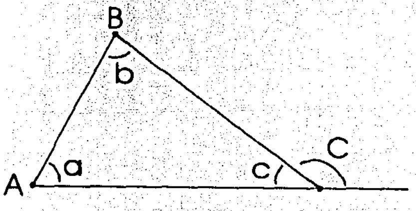
Demostración.(Hazla)

Teorema 3. Demostrar que un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los 2 ángulos interiores opuestos a él.

Nota: Un ángulo exterior se forma prolongando un lado del triángulo. El ángulo exterior será la abertura entre esa prolongación y el lado del triángulo adyacente a ella :



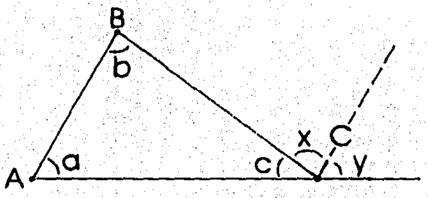
Demostración. Apoyándonos en el Teorema 2, prácticamente ya tenemos la demostración:
Hay que demostrar lo siguiente :



$$\measuredangle C = a + b$$

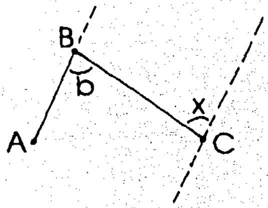
Si por el vértice C trazamos una paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, vemos que se forman 2 ángulos, x e y tales que

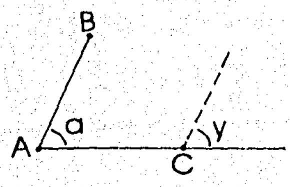
$$\measuredangle C = x + y .$$



pero $\quad x = b$ (por ser alternos internos)

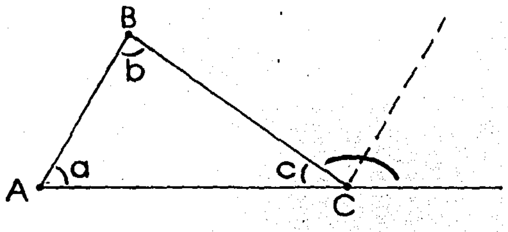
y $\quad y = a$ (por ser correspondientes)



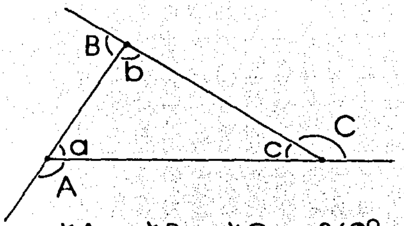


Por tanto, sustituyendo: $\measuredangle C = a + b$.

Ahora, sin hacer ningún trazo auxiliar, y utilizando el hecho de que $c + \measuredangle C = 180°$, y el Teorema 2, obtén tú otra demostración del Teorema 3 :



Teorema 4. Demostrar que los ángulos exteriores de cualquier triángulo suman 360°.



$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 360^{\circ}$$

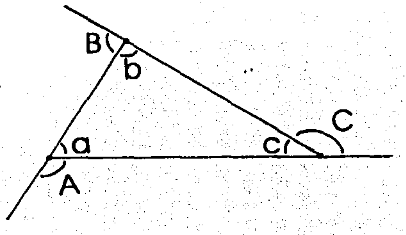
Solución.

Para ésta demostración, primero sumaremos todos los pares de ángulos suplementarios y después les restaremos todos los interiores. Eso nos dará el resultado buscado:

$$\begin{pmatrix}\text{Suma de Angulos}\\ \text{Interiores}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Suma de Angulos}\\ \text{Exteriores}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Suma Total}\\ \text{de Angulos}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Suma de Angulos}\\ \text{Exteriores}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Suma Total}\\ \text{de Angulos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Suma de Angulos}\\ \text{Interiores}\end{pmatrix}$$

Demostración.



$\measuredangle A + a = 180°$ (por ser suplementarios)

$\measuredangle B + b = 180°$ (por ser suplementarios)

$\measuredangle C + c = 180°$ (por ser suplementarios)

Sumando las tres ecuaciones:

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + a + b + c = 540°$

Despejando:

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 540° - (a + b + c)$

pero $a + b + c = 180°$ (por teorema 2)

Por lo tanto, sustituyendo:

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 540° - 180°$

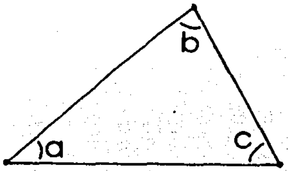
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 360°.$

Ahora, tú haz otra demostración de éste teorema utilizando el Teorema 3 , es decir, que

$$\measuredangle A = b + c$$
$$\measuredangle B = a + c$$
$$\measuredangle C = a + b$$

Bueno, pues aunque estamos dentro de una Teoría Deductiva, también podemos utilizar el método inductivo, es decir, vamos a tratar de generalizar nuestros resultados:

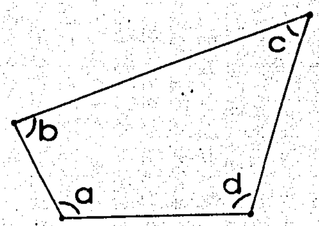
Sabemos que los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°



$$a + b + c = 180°$$

La pregunta natural sería:

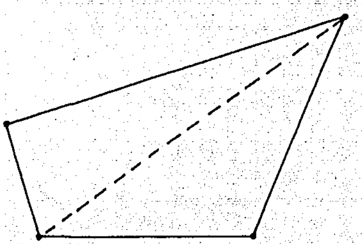
- ¿ Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero?



$$a + b + c + d = ?$$

Solución.

Si nos apoyamos en el Teorema 2, subdividimos el cuadrilátero en 2 triángulos

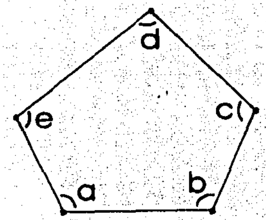


Por lo tanto el resultado se obtendrá haciendo la siguiente multiplicación: $180° * 2 = 360°$

y así, $a + b + c + d = 360°$

Enseguida nos preguntamos:

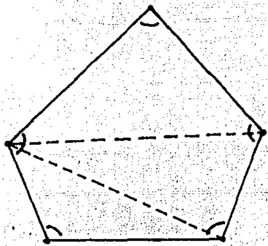
-¿Cuánto suman los ángulos interiores de un pentágono?



$$a + b + c + d + e = ?$$

Solución.

Escogemos un vértice cualesquiera, digamos E y de ahí trazamos las diagonales hacia C y B



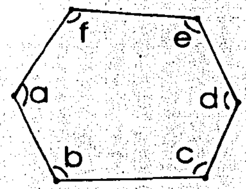
Vemos que se forman en total 3 triángulos.

Así, resulta el producto siguiente $180° * 3 = 540°$

$$\therefore a + b + c + d + e = 540°$$

Después sigue:

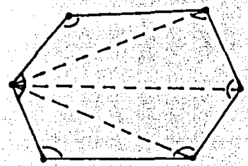
-¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono de 6 lados (un hexágono) ?



$$a + b + c + d + e + f = ?$$

Solución.

Escogemos cualquier vértice, digamos A y trazamos nuestras diagonales para formar triángulos, y se nos forman en total 4 triángulos:



Por lo tanto, tendremos que hacer la multiplicación siguiente:

$$180° * 4 = 720°$$

es decir, $a + b + c + d + e + f = 720°$

En un polígono de 7 lados se formarían 5 triángulos, por lo tanto, haciendo la operación correspondiente quedará

$$180° * 5 = 900°$$

En un octágono (8 lados) se formarían 6 triángulos, por lo tanto el resultado saldría con ésta multiplicación:

$$180° * 6 = 1080°$$

Y así, sucesivamente ...

Por ejemplo, ¿en un polígono de 10 lados?. . Se formarían en total 8 triángulos, y por lo tanto, con la siguiente operación obtenemos el resultado:

$$180° * 8 = 1440°$$

Y, en uno de 20 lados, tendríamos 18 triángulos, es decir, 2 triángulos menos que el número de lados del polígono, y por ésto, la operación se realizará así:

$$180° * 18 = 3240°$$

Por lo tanto, si para cada polígono tenemos que restar 2 para obtener el número de triángulos que se forman, en un polígono con **n** lados tendríamos **n - 2** triángulos y por lo tanto, la suma total la obtendríamos haciendo:

$$\left(\begin{array}{c}\text{número de}\\ \text{triángulos}\end{array}\right) * 180^{0}$$

es decir, $(n - 2) * 180^{0}$

y ésta es precisamente la fórmula para obtener la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Suma de}\\ \text{ángulos interiores}\end{array}\right) = (n - 2) * 180^{o}$$

Vamos a ver un concepto nuevo:

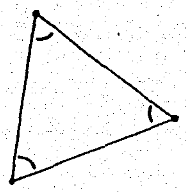
Polígono regular.- Un polígono regular es aquel en que todos sus lados miden exactamente lo mismo, y también todos sus ángulos son iguales.

Si combinamos este concepto con lo anterior, nos preguntaríamos: ¿ Cuál es el polígono regular más simple que existe ? .

¿ Cuál crees que sea ?

-Obviamente, un triángulo equilátero.

¿Verdad ? . Pues sus 3 lados miden exactamente lo mismo y sus tres ángulos también .

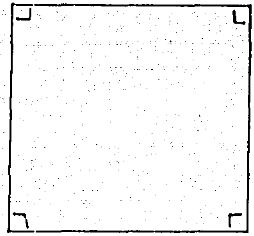


Enseguida nos preguntamos : ¿ Cuánto mide cada ángulo interior de un triángulo equilátero ? .

Pues, como los tres ángulos son iguales y además, la suma debe dar 180° (por teorema 2) , concluímos que cada ángulo mide 60° :

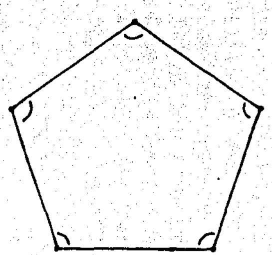
$$\frac{180°}{3} = 60°$$

El siguiente polígono regular es el cuadrado, y cada ángulo interior mide



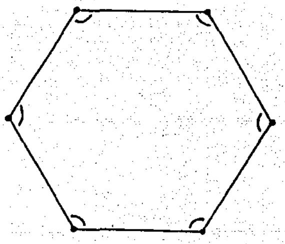
$$\frac{360°}{4} = 90°$$

Para el pentágono regular (polígono regular con 5 lados) cada ángulo interior mide



$$\frac{540°}{5} = 108°$$

Con el hexágono regular (seis lados), tendremos



$$\frac{720°}{6} = 120°$$

Así, al llegar al caso general, es decir, para un polígono regular con " n " lados :

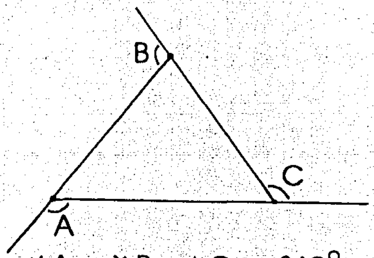
$$\boxed{\frac{\text{Suma de ángulos interiores}}{\text{número de lados}} = \frac{(n - 2) * 180°}{n}}$$

fórmula

la cual nos va a permitir calcular cuánto mide cada ángulo interior de cualquier polígono regular, simplemente sustituyendo " n " con el número de lados o de ángulos del polígono.

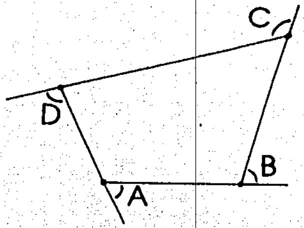
Por otro lado, ¿ qué pasará respecto de la suma de los ángulos exteriores ?

Ya demostramos (teorema 4) que los ángulos exteriores de cualquier triángulo suman 360°.



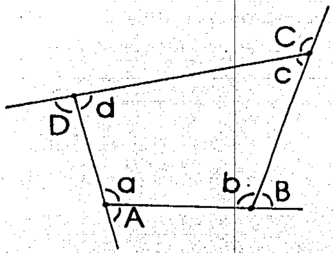
$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 360°$$

¿ Cuánto suman los ángulos exteriores de un cuadrilátero ?



$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = ?$$

Sabemos que cada ángulo exterior con su correspondiente interior suman 180° (son suplementarios)



$\measuredangle A + a = 180°$

$\measuredangle B + b = 180°$

$\measuredangle C + c = 180°$

$\measuredangle D + d = 180°$

Sumando todo, queda:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D + a + b + c + d = 720°$$

pero $a + b + c + d = 360°$ (ángulos interiores del cuadrilátero)

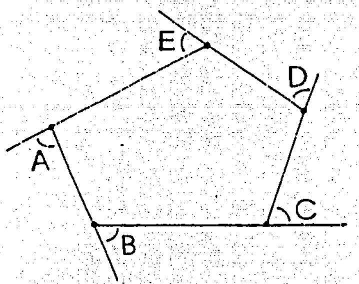
Por lo tanto, despejando :

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 720° - (a + b + c + d)$$

$$= 720° - 360°$$

$$\therefore \quad \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360°$$

Y, ¿ cuánto suman los ángulos exteriores de un pentágono ?



Haciendo lo mismo que en el cuadrilátero, tendremos que la suma de todos los ángulos da

$$180° * 5 = 900°$$

pero como los ángulos interiores suman 540°, entonces, restando:

$$900° - 540° = 360°$$

En un hexágono tendremos:

$$\begin{pmatrix}\text{suma}\\ \text{total de}\\ \text{ángulos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{ángulos}\\ \text{interiores}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{ángulos}\\ \text{exteriores}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(180° * 6) \;-\; (720°) &= 1080° - 720° \\ &= 360°\end{aligned}$$

De aquí, podemos pensar que probablemente la suma de ángulos exteriores de cualquier polígono debe dar 360°.

Veamos, para " n " lados quedará :

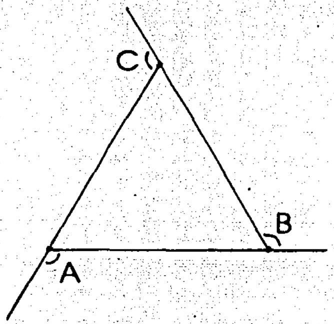
$$\begin{pmatrix}\text{Suma total}\\ \text{de ángulos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Suma de}\\ \text{ángulos}\\ \text{interiores}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Suma de}\\ \text{ángulos}\\ \text{exteriores}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&(180° * n) - ((n-2) * 180°) = \\ &= 180° n - (180° n - 360°) = \\ &= \cancel{180°} n - \cancel{180°} n + 360° = 360°\end{aligned}$$

Por lo tanto, acabamos de demostrar que los ángulos exteriores de cualquier polígono suman 360°.

Igual que en el caso de los ángulos interiores, vamos a ver qué ocurre con un ángulo exterior de un polígono regular:

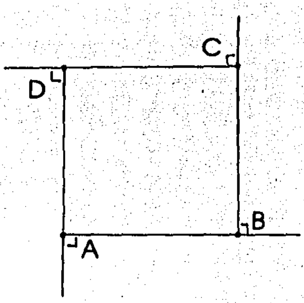
Para un triángulo equilátero, sabemos que cada ángulo exterior mide:



$$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

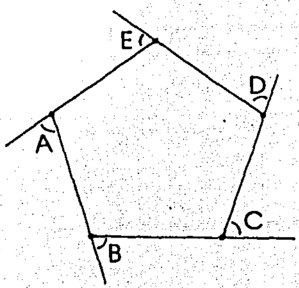
Ya que los ángulos exteriores suman 360° y los 3 ángulos son iguales.

Para el siguiente polígono, el cuadrado, cada ángulo exterior mide :



$$\frac{360°}{4} = 90°$$

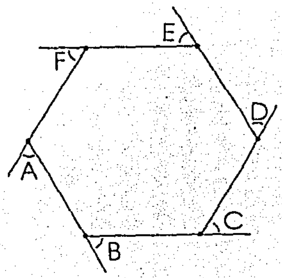
Para el pentágono regular, tendremos:



$$\frac{360°}{5} = 72°$$

que es lo que mide cada uno de sus ángulos exteriores.

En el hexágono, el resultado da :



$$\frac{360°}{6} = 60°$$

Para el de 10 lados (decágono) regular, cada ángulo exterior quedará :

$$\frac{360°}{10} = 36°$$

Siguiendo el proceso de inducción, nos preguntamos : ¿cuánto medirá cada ángulo exterior de un polígono regular con n lados ?

Respuesta :

$$\frac{360°}{n}$$

Por tanto, resumiendo nuestros resultados tendremos que para cualquier polígono :

Suma de ángulos interiores	=	$(n-2) \cdot 180°$
Medida de un ángulo interior	=	$\dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ (si el polígono es regular)
Suma de ángulos exteriores	=	$360°$ (Siempre)
Medida de un ángulo exterior	=	$\dfrac{360°}{n}$ (si el polígono es regular)

Problemas Propuestos.

Para los problemas del 1 al 9, consulta el apéndice, al final del libro.

Problema 1.-

Traza un triángulo equilátero, y checar con el transportador si es cierto que sus tres ángulos miden exactamente lo mismo.

Problema 2.-

Traza un triángulo isósceles y ver si es cierto que dos de sus ángulos miden exactamente lo mismo.

Problema 3.-

Traza un triángulo rectángulo que sea isósceles.

Problema 4.-

Traza un triángulo cualquiera, sus tres alturas y localiza su ortocentro.

Problema 5.-

Traza un triángulo, sus 3 bisectrices, localiza su incentro y traza el círculo inscrito al triángulo.

Problema 6.-

Traza un triángulo cualquiera,sus 3 mediatrices, localiza su circuncentro y traza el círculo circunscrito al triángulo.

Problema 7.-

Traza un triángulo cualquiera, sus tres medianas y localiza el punto de intersección de las 3 (su baricentro). Checa también que el baricentro está a la tercera parte de la longitud total de cada mediana.

Problema 8.-

Traza un triángulo equilátero,traza con un color sus alturas, con otro color sus bisectrices, con otro diferente sus medianas, y con otro sus mediatrices e identifica su ortocentro, su incentro, su circuncentro y su baricentro. Notarás que todos estos puntos coinciden en el mismo lugar. Esta propiedad es exclusiva de los triángulos equiláteros.

Problema 9.-

Construye un triángulo rectángulo y traza sus alturas. Verás que el ortocentro está en el vértice donde se forma el ángulo recto.

Problema 10.-

Demuestra que al trazar dos paralelas cortadas por una transversal, los ángulos colaterales internos suman 180°.

Problema 11.-

Demuestra que al trazar dos paralelas cortadas por una transversal, los ángulos colaterales externos suman 180°.

Problema 12.-

Demuestra que al trazar dos paralelas cortadas por una transversal, los ángulos correspondientes son iguales.

Problema 13.-

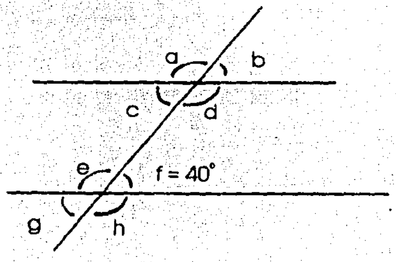
Demuestra que al trazar dos paralelas cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales.

Problema 14.-

Demuestra que al trazar dos paralelas cortadas por una transversal, los ángulos alternos externos son iguales.

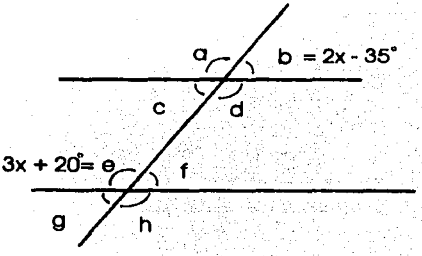
Problema 15.- (*)

Dadas dos rectas paralelas cortadas por una transversal (ver la figura adyacente), si el ángulo **f** mide 40° , ¿ cuánto mide cada uno de los otros ángulos ?



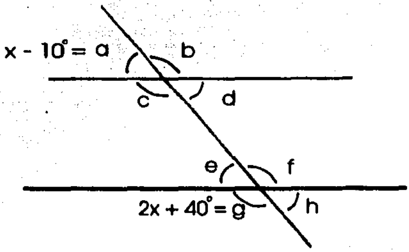
Problema 16.-(*)

Dadas dos rectas paralelas cortadas por una transversal (ver la figura adyacente con los datos anotados en ella), ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos ?



Problema 17.-(*)

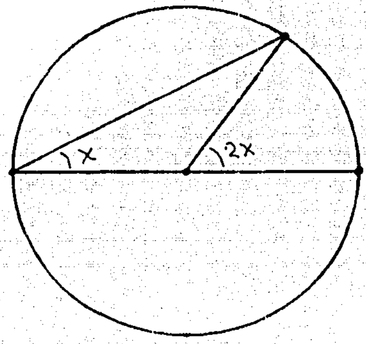
Igual que en el problema 16, pero ahora con ésta figura.



Problema 18.-(*)

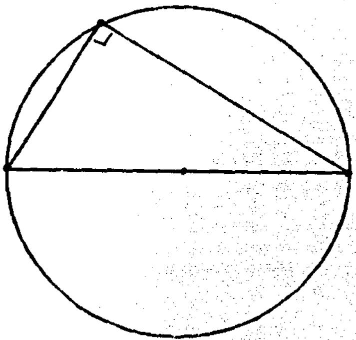
En un círculo, el ángulo formado por dos radios se llama ángulo central.

Demuestra que un ángulo central mide el doble que el ángulo que se forma tomando como lado inicial la prolongación de uno de los radios formando un diámetro, y trazando el otro lado abarcando exactamente el mismo sector circular (ver la figura adyacente)



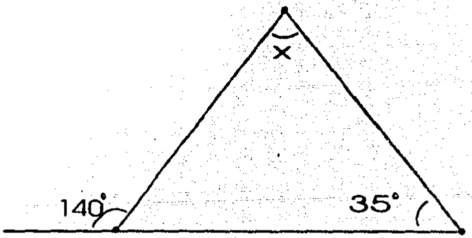
Problema 19.-(*)

Demuestra que si en un círculo trazamos un triángulo inscrito, de tal manera que uno de sus lados sea un diámetro del círculo, dicho triángulo será siempre un triángulo rectángulo (ver figura adyacente):



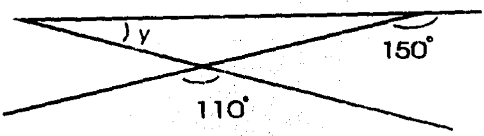
Problema 20.-(*)

Para la siguiente figura, hay que obtener el valor de **x**



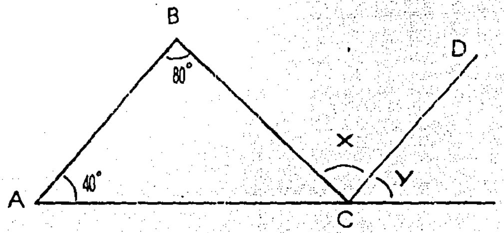
Problema 21.-(*)

Para la siguiente figura, calcula el valor de **y** .



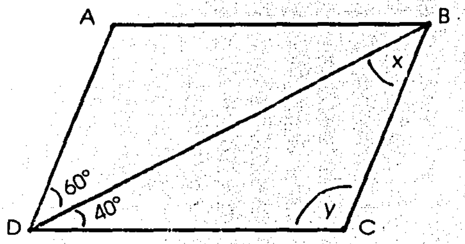
Problema 22.-(*)

Dada la siguiente figura, y sabiendo que la recta $\overline{CD}$ es paralela a $\overline{AB}$, debes obtener el valor de **x** y el de **y** .



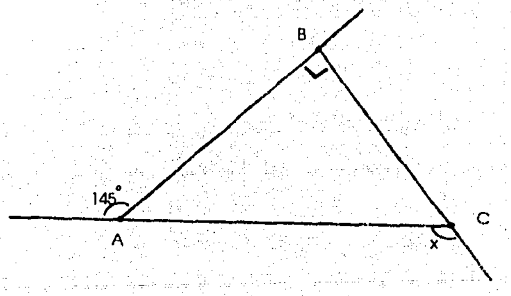
Problema 23.-(*)

Dado el paralelogramo que se muestra en la figura, ¿cuál es el valor de **x** , y el de **y** ? .



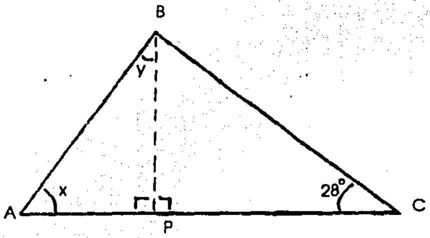
Problema 24.-(*)

En esta figura, obtén el valor de **x** .



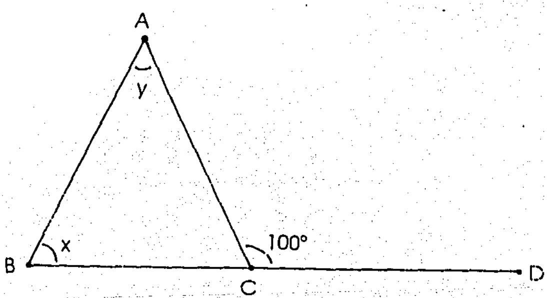
Problema 25.-(*)

Dado el triángulo rectángulo ABC, con altura $\overline{BP}$, determina los valores de **x** y de **y**.



Problema 26.-(*)

Si ABC es un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$, obtén el valor de **x** y de **y**.



Problema 27.-(*)

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un decágono?. ¿ De un polígono de 12 lados ?. ¿ De un polígono de 20 lados ?. ¿ De un polígono de 37 lados ?.

Problema 28.-(*)

¿Cuánto mide cada ángulo interior de un decágono regular ?. ¿De un polígono regular de 12 lados ?. ¿De un polígono regular de 15 lados?. ¿De un polígono regular de 25 lados ?.

Problema 29.-(*)

¿Cuanto suman los ángulos exteriores de un polígono de 12 lados ?. ¿De uno de 25 lados ?. ¿De uno de 30 lados ?. ¿De uno de 100 lados ?.

Problema 30.-(*)

¿Cuánto mide cada ángulo exterior de un polígono regular de 15 lados ?. ¿De uno de 18 lados ?. ¿De uno de 20 lados ?. ¿De uno de 30 lados ?.

CAPITULO IV

POSTULADOS DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Los Postulados de Congruencia y de Semejanza de Triángulos.

Como no podemos olvidar que estamos dentro de una teoría deductiva, seguimos respetando el esquema de construcción de esta teoría, es decir, vamos a añadir unos elementos adicionales (las definiciones de semejanza y de congruencia de figuras) y enseguida vendrán las reglas de como combinar estos elementos con todo lo anterior (los postulados de congruencia y de semejanza de triángulos, junto con los Axiomas y Postulados de Euclides) ; y empezaremos a obtener toda una serie de resultados importantes. En éste libro, sólo desembocaremos en el Teorema de Pitágoras.

También haremos problemas de aplicación de todo ésto.

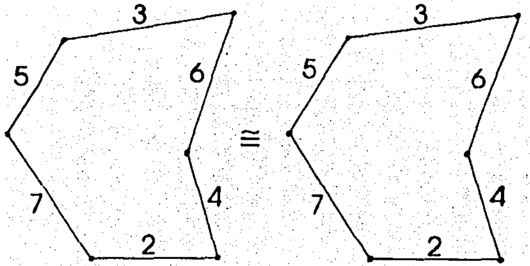
Así, empezamos con las definiciones de Semejanza y de Congruencia de figuras geométricas:

Congruencia.-
Dos figuras geométricas son congruentes entre sí, si coinciden en todos y cada uno de sus puntos. Es decir, si las figuras a comparar son iguales unas a otras.

Obviamente, todos los lados de una serán iguales a sus correspondientes de las otras figuras, y todos sus ángulos también.

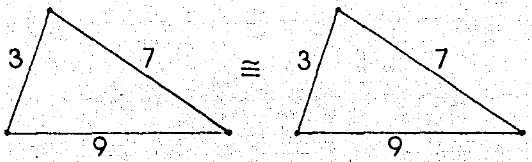
Ejemplos:

a)



Se simboliza así : ($\cong$)

b)

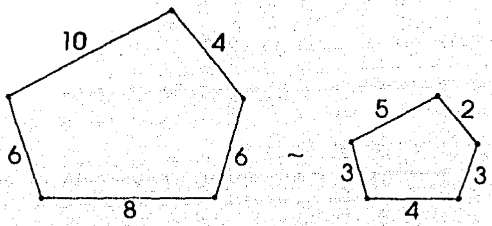


Semejanza .

Dos figuras geométricas son semejantes entre sí, si tienen la misma forma aunque diferente tamaño. Cuando dos figuras son semejantes entre sí, se dice que están a escala una respecto de la otra, y se puede encontrar la razón de proporcionalidad entre ellas (los lados de una figura son proporcionales a sus correspondientes de la otra) .

Ejemplos:

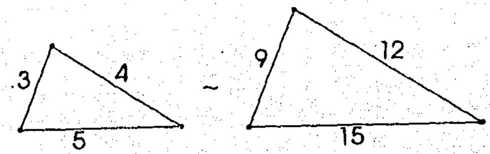
a)



Son semejantes, cada lado del polígono de la derecha mide la mitad que su correspondiente del de la izquierda.

Se simboliza así : (~)

b)

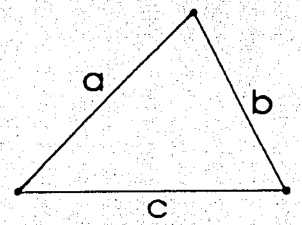


Son semejantes. Cada lado del polígono de la derecha es el triple que su correspondiente de la izquierda.

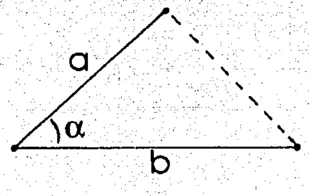
Ya que tenemos las definiciones, ahora sí vamos a ver los correspondientes postulados de Congruencia y de Semejanza para triángulos :

Estos postulados van de acuerdo a las diferentes formas en que se pueden dar los elementos para poder construir un triángulo y por ésta razón dichos postulados se enuncian tomando en cuenta cada una de éstas opciones:

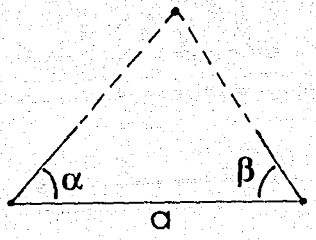
-Un triángulo está perfectamente determinado en el momento en que nos dicen cuanto mide cada uno de sus lados, puesto que basta con tomar éstas medidas con nuestra regla y formar de ésta manera el triángulo correspondiente:



-Un triángulo está bien definido en el momento en que nos dicen cuanto miden dos de sus lados y también la medida del ángulo comprendido entre ellos, ya que si trazamos dichas rectas y formando entre ellas el ángulo que se nos está dando como dato, con éso basta para poder trazar el tercer lado sin ningún problema:

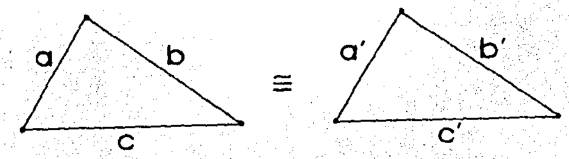


-Un triángulo se puede trazar perfectamente en el momento en que nos dicen cuanto miden dos de sus ángulos y también nos dan la medida del lado comprendido entre ésos ángulos, porque si trazamos con nuestra regla la recta que nos dieron como dato y que podemos suponer que sirviera de base para nuestro triángulo, y sobre ella medimos en cada uno de sus extremos los ángulos que tenemos también como datos, si prolongamos los lados de ésos ángulos, se encontrarán exactamente donde sería el tercer vértice del triángulo:



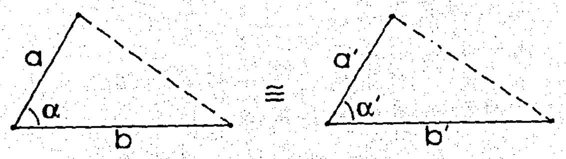
I.Postulados de Congruencia de Triángulos.-

a) Dos triángulos son congruentes ($\cong$) entre sí, si los tres lados de uno son respectivamente iguales a sus correspondientes del otro triángulo.



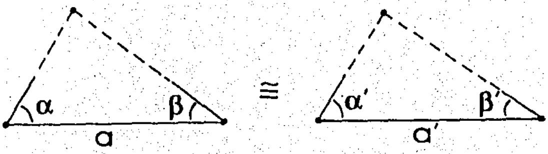
son congruentes si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$

b) Dos triángulos son congruentes entre sí, si dos lados de uno son respectivamente iguales a sus correspondientes del otro triángulo, y el ángulo comprendido entre ésos lados es el mismo en los 2 triángulos.



son congruentes si $a = a'$, $b = b'$ y si $\alpha = \alpha'$

c) Dos triángulos son congruentes entre sí, si tienen 2 ángulos de uno respectivamente iguales a sus correspondientes del otro triángulo y además, el lado comprendido entre ésos ángulos mide lo mismo en los 2 triángulos.



Son congruentes si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$
y si además $a = a'$.

Se acostumbra simbolizar estos postulados para acordarse mejor de ellos, según los elementos que relacionen. Así, quedan:

a) **L L L**

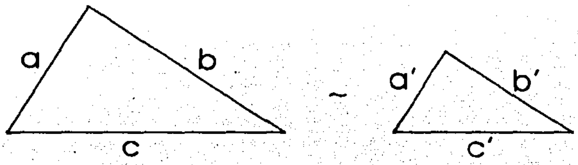
b) **L A L**

c) **A L A**

Acuérdate, congruencia significa lados correspondientes iguales y ángulos correspondientes también iguales.

II. Postulados de Semejanza de Tirángulos.

a) Dos triángulos son semejantes entre sí, si los lados de uno son respectivamente proporcionales a sus correspondientes del otro triángulo.

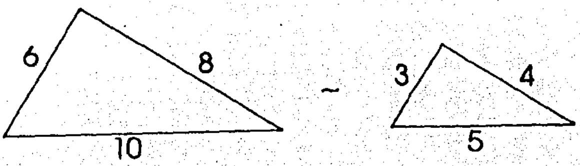


son semejantes entre sí, si

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

razón de proporcionalidad

Ejemplo:



son semejantes, ya que

$$\frac{6}{3} = 2 \; ; \; \frac{8}{4} = 2 \; ; \; \frac{10}{5} = 2$$

y su razón de proporcionalidad es

2 a 1 o 2 : 1

Si lo leyéramos de derecha a izquierda, quedaría así:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \; , \; \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \; , \; \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

y la razón de proporcionalidad sería 1/2 , es decir, el triángulo de la derecha es la mitad de tamaño que el de la izquierda, pero con la misma forma.

La razón quedaría escrita así :

$$\frac{1}{2}$$

$$ó \quad 1 \text{ a } 2$$

$$ó \quad 1 : 2$$

Volviendo a nuestro postulado, la relación de proporcionalidad se puede escribir de varias formas, según convenga para el problema que se vaya a resolver :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

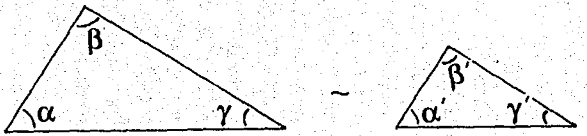
puede quedar $$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

o también $$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$$

o aún $$a * b' = a' * b$$

todas éstas relaciones son equivalentes, pero solamente la primera nos da el valor de la razón de proporcionalidad.

b) Dos triángulos son semejantes entre sí, si los tres ángulos de uno son respectivamente iguales a sus correspondientes del otro triángulo. (Esto basta para garantizar la proporcionalidad de los lados) .

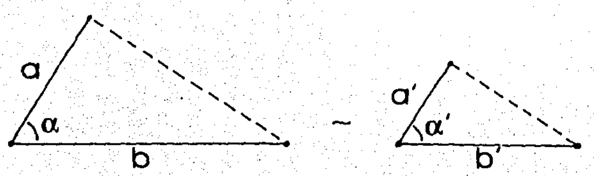


Son semejantes si $\alpha = \alpha'$,

$$\beta = \beta'$$

y $\gamma = \gamma'$

c) Dos triángulos son semejantes entre sí, si dos lados de uno son respectivamente proporcionales a sus correspondientes del otro triángulo, y el ángulo comprendido entre esos lados es el mismo en los dos triángulos.

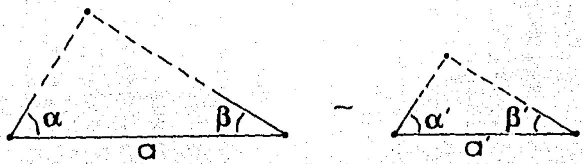


Son semejantes si $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = r$$

y además $$\alpha = \alpha'$$

Enseguida vamos a ver nuestro cuarto postulado de semejanza, que en realidad es un teorema, pero para los fines del curso lo manejaremos como postulado, es decir, no va a ser necesario demostrarlo;

d) Dos triángulos son semejantes entre sí, si dos ángulos de uno son respectivamente iguales a sus correspondientes del otro triángulo y se puede encontrar una razón de proporcionalidad entre el lado comprendido entre esos ángulos de un triángulo, con su correspondiente del otro triángulo.



Son semejantes si $\alpha = \alpha'$,

$\beta = \beta'$

y además $\dfrac{a}{a'} = r$

Igual que en el caso de congruencia, para recordar mejor los Postulados de Semejanza de Triángulos, acostumbramos simbolizarlos en función de los elementos que relacionan:

a) **L L L**

b) **A A A**

c) **L A L**

d) **A L A**

Resumiendo todas éstas ideas tendremos el siguiente cuadro:

Congruencia	**Semejanza**
lados iguales **ángulos iguales**	**lados proporcionales** **ángulos iguales**

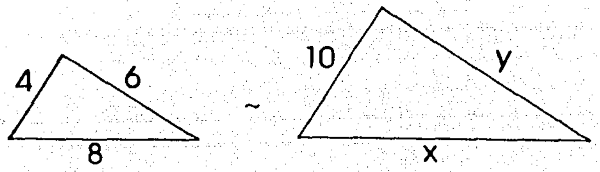
y también el siguiente cuadro:

Congruencia	**Semejanza**
LLL **LAL** **ALA**	**LLL** **AAA** **LAL** **ALA**

Siguiendo en éste orden de ideas, podríamos tratar de adecuar los postulados de semejanza y de congruencia para triángulos rectángulos, si así lo deseáramos, y de esta manera continuar en esta línea con el desarrollo de nuestra teoría deductiva.

Vamos a ver algunos ejemplos de aplicación de éstos postulados:

Ejemplo 1. Dados los siguientes triángulos, y sabiendo que son semejantes, obtener las medidas de los lados faltantes:



Solución.

El saber que los lados son proporcionales nos permite establecer lo que se llama una cuarta proporcional, o más comúnmente, una regla de tres (pero siempre cuidando de hacerlo con los lados correspondientes) :

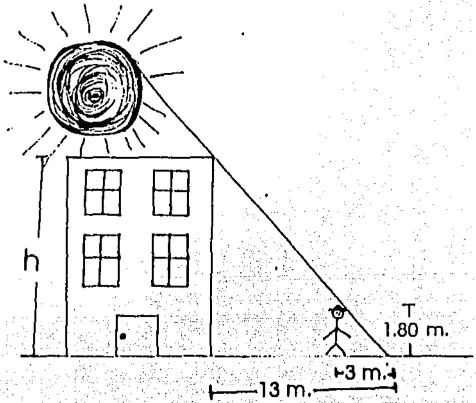
$$\begin{array}{l} 4 \text{ ———— } 10 \\ 8 \text{ ———— } x \end{array}$$

Por tanto, $x = \dfrac{8 * 10}{4} = \dfrac{80}{4} = 20$

De igual manera, $\begin{array}{l} 4 \text{ ———— } 10 \\ 6 \text{ ———— } y \end{array}$

es decir, $y = \dfrac{6 * 10}{4} = \dfrac{60}{4} = 15$

Ejemplo 2 . ¿Cuál será la altura de una casa que a las 10 de la mañana proyecta una sombra de 13 m., si una persona que mide 1.80 m. proyecta a la misma hora una sombra de 3 m. sobre el piso ?



Solución.

Como se forman dos triángulos semejantes (postulado L A L) aplicamos nuestra regla de tres:

3 m. ________ 1.80 m.
13 m. ________ h

por lo tanto, $h = \dfrac{13 * 1.80}{3} = \dfrac{23.4}{3} = 7.80$ m.

El siguiente ejemplo nos dá un método para medir distancias indirectamente al construir nuestros triángulos semejantes.

Ejemplo 3. Una persona debía medir la anchura de un río infestado de pirañas, y como no tenía ninguna barca a la mano, ni tampoco había puentes, ideó el siguiente método :

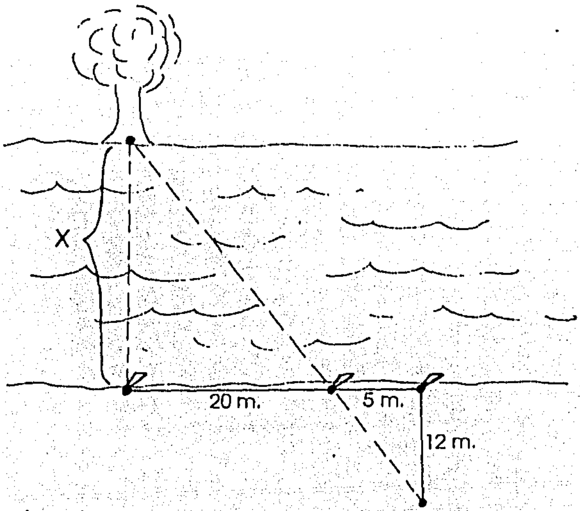
Primero se paró enfrente de un árbol que se encontraba en la orilla contraria del río.

Enseguida clavó una estaca donde él estaba y se puso a caminar por la orilla del río una distancia x , digamos 20 m. Al pararse clavó ahí una segunda estaca y continuó en esa misma dirección otros 5 m., y en ése punto clavó una tercera estaca.

Entonces giró 90° a quedar de espaldas al río, y echó a caminar alejándose de éste hasta quedar alineado con la segunda estaca y también con el árbol anterior.

Al llegar a ese punto, se paró y midió entonces la distancia que se alejó del río (en el caso de éste ejemplo, fue de 12 m.) :

Nota : en la siguiente hoja aparece la figura ilustrativa de éste problema.



Solución.

La regla de tres correspondiente nos permite obtener la distancia x.

$$\begin{array}{ccc} 20 & \text{———} & 5 \\ x & \text{———} & 12 \end{array}$$

Por tanto $x = \dfrac{20 * 12}{5} = \dfrac{240}{5} = 48$ m.

En la sección de problemas propuestos encontrarás algunos problemas donde podrás practicar la aplicación de los postulados, tanto de congruencia como de semejanza de triángulos.

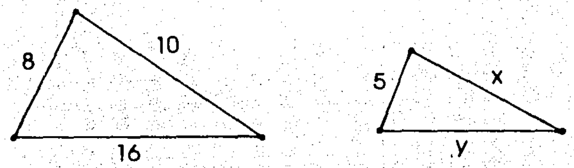
PROBLEMAS PROPUESTOS.

Problema 1.-(*)

Si los triángulos son semejantes, obtener las medidas que faltan:

I)

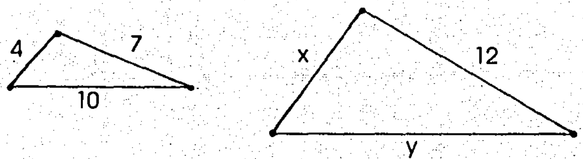
a)



b) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre los dos triángulos?

II)

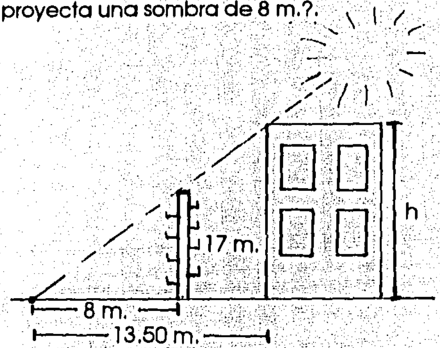
a)



b) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre los dos triángulos?

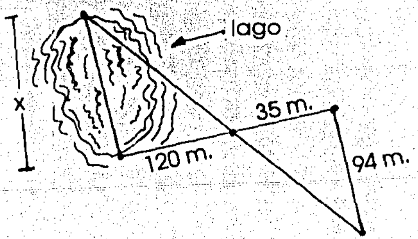
Problema 2.-(*)

¿Cuál será la altura de una casa si a las 11 a.m. proyecta una sombra de 13.50 m., si a la misma hora un poste de teléfonos de 17 m. proyecta una sombra de 8 m.?.



Problema 3.-(*)

¿Cuál será el diámetro de un lago, si para medirlo seguimos el procedimiento de construír 2 triángulos semejantes de acuerdo al siguiente diagrama?:

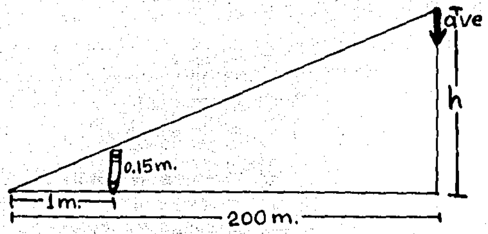


Problema 4.-

Medir la anchura de tu calle utilizando el procedimiento ilustrado en el ejemplo (3) de éste capítulo.

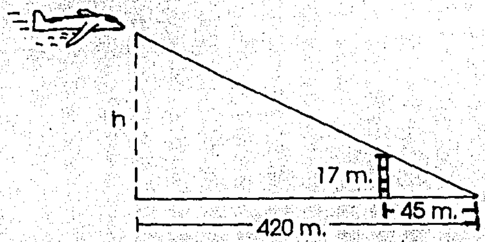
Problema 5.-(*)

Una persona estaba viendo zambullirse a las aves en el mar. De repente vió que un ave se zambulló a 200 m. aproximadamente desde el punto donde él estaba, y con su lápiz de 0.15 m. de longitud logró cubrir la trayectoria completa del ave cuando mantenía el lápiz a 1 m. de su ojo. ¿ Desde qué altura se zambulló el ave?.



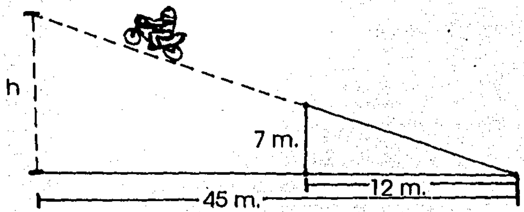
Problema 6.-(*)

¿A qué altura se encontraba un avión cuando se quedó sin gasolina a 420 m. de la pista, si planeando apenas logró rebasar una barda de 17 m. de altura que se encuentra a 45 m. del principio de la pista ?.

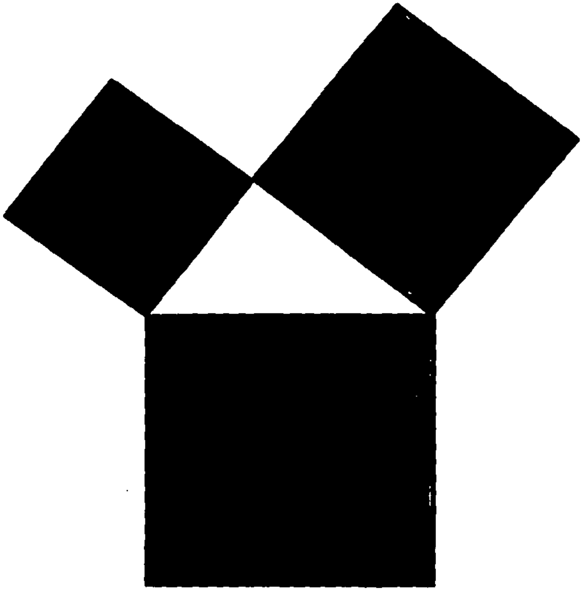


Problema 7.-(*)

¿Hasta qué altura llegó un motociclista acróbata que deseaba brincar por encima de unos autos, si utilizó una rampa de 7 m. de altura y 12 m. de longitud, si desde el punto de despegue hasta donde alcanzó su altura máxima se desplazó 45 m. ?



CAPITULO V



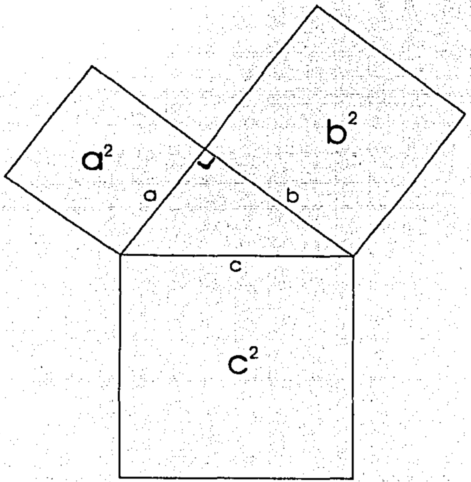
TEOREMA DE PITAGORAS

Teorema de Pitágoras.-

El último tema a tratar dentro de nuestro libro es el **Teorema de Pitágoras,** el cual dice lo siguiente:

Para todo **triángulo rectángulo**, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Ya sabemos que éste teorema sólo se aplica en triángulos rectángulos, que son los únicos que tienen hipotenusa (el lado mayor) , y también catetos (los lados adyacentes al ángulo recto) .

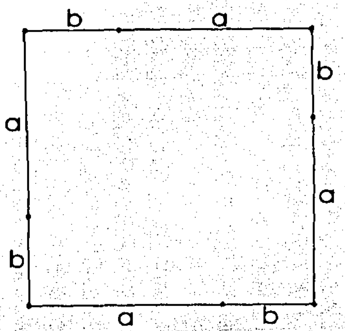


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Este teorema tiene muchas demostraciones, y vamos a ver algunas de ellas:

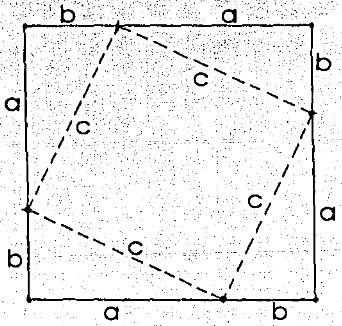
Demostración 1.

Sea un cuadrado al cual le marcamos una distancia " a " en cada lado.



Entonces cada lado queda subdividido en un segmento " a " y uno " b " (cada lado mide a + b).

Unimos los puntos marcados, de manera que se forme un cuadrado interior de lado " c ".

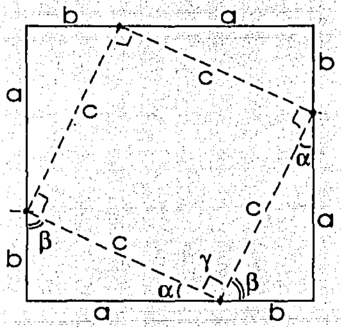


Así, el cuadrado grande quedó subdividido en 4 triángulos rectángulos idénticos y un cuadrado interior.

Vamos a comprobar que los cuatro triángulos son idénticos y que el cuadrado interior efectivamente es un cuadrado:

Los cuatro triángulos son triángulos rectángulos, ya que el ángulo que se forma en cada vértice del cuadrado original es de 90°, y son idénticos, ya que como tienen dos lados correspondientemente iguales, y el ángulo comprendido entre ellos es el mismo en los 4 triángulos, se está cumpliendo el postulado L A L de congruencia de triángulos.

Ahora, el cuadrilátero interior de lado " c " efectivamente es un cuadrado, ya que en la figura :



en el triángulo de abajo a la izquierda,

$$\alpha + \beta = 90°$$

porque son los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

En el caso del triángulo de abajo a la derecha, pasa exactamente lo mismo.

Sobre la línea de abajo,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

porque son ángulos suplementarios, por lo tanto sustituyendo, tendremos que

$$\gamma = 90°$$

Y así, en cada vértice del cuadrilátero pequeño, por lo tanto, en realidad se trata de un cuadrado interior.

De todo esto, tenemos que si calculamos el area del cuadrado grande, y las de las figuras interiores, tendremos:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Area del cuadrado}\\ \text{grande}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Suma de las areas}\\ \text{de las figuras}\\ \text{interiores}\end{array}\right)$$

$$(a + b)^2 = \underbrace{\frac{4(a\,b)}{2}}_{\text{areas de los 4 triángulos}} + \underbrace{c^2}_{\text{area del cuadrado interior}}$$

Desarrollando queda :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2(ab) + c^2$$

Si de cada lado de la igualdad eliminamos $2ab$ obtendremos lo que buscamos :

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2$$

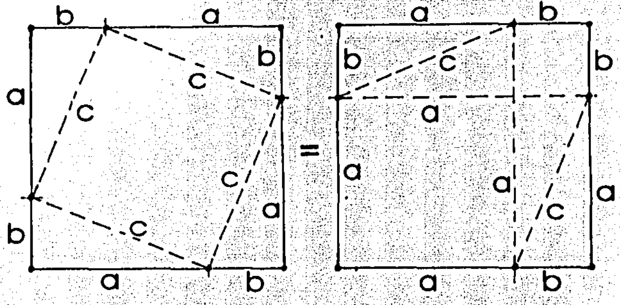
por lo tanto $\quad a^2 + b^2 = c^2$

que es lo que dice el Teorema de Pitágoras, ya que " a^2 " es el cuadrado del cateto " a ", " b^2 " es el cuadrado del cateto " b " y " c^2 " es el cuadrado de la hipotenusa " c ".

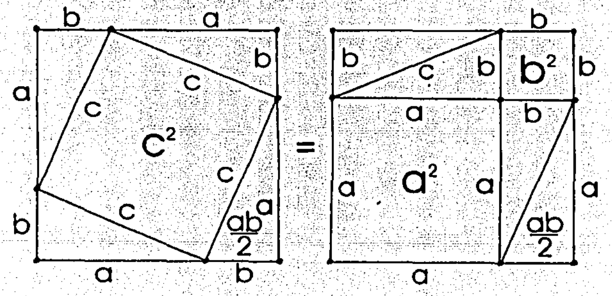
He aquí otra demostración del mismo teorema :

Demostración 2.-

Construimos 2 cuadrados idénticos, subdividiéndolos como en la demostración anterior, pero de diferente forma:



En el cuadrado de la izquierda, ya vimos en la demostración anterior que se forman 4 triángulos rectángulos idénticos y un cuadrado de lado " c "; y en el de la derecha, los cuatro triángulos rectángulos idénticos y dos cuadrados pequeños: uno de lado " a " y otro de lado " b ":



Como las figuras son idénticas, sus áreas componentes suman lo mismo:

$$\frac{4(ab)}{2} + c^2 = \frac{4(ab)}{2} + a^2 + b^2$$

Si eliminamos los 4 triángulos de las 2 figuras, nos queda :

$$\cancel{\frac{4(ab)}{2}} + c^2 = \cancel{\frac{4(ab)}{2}} + a^2 + b^2$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2$$

que es lo que dice el Teorema de Pitágoras.

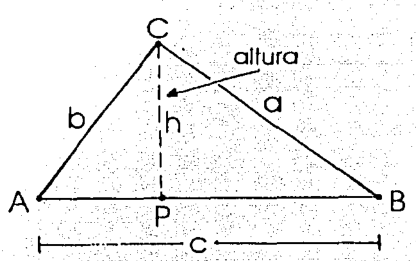
Vamos a ver una tercera demostración :

Demostración 3.

Esta demostración está basada en un teorema que estableceremos como teorema previo al teorema de Pitágoras:

Teorema previo.

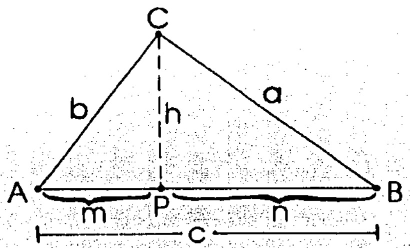
Si en un triángulo rectángulo, trazamos la altura que falta (como en un triángulo rectángulo cada cateto es una altura, ya sólo falta trazar la que va de la hipotenusa hacia el vértice del ángulo recto) , ésta subdivide al triángulo dado en 2 triángulos semejantes cada uno al triángulo grande y , por lo tanto semejantes entre sí.



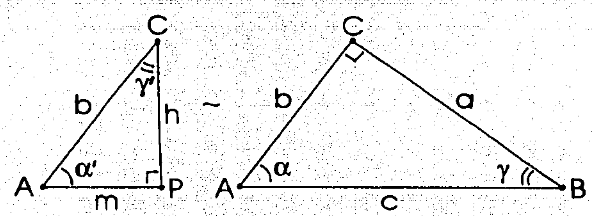
El triángulo A C P es semejante al A B C y,
el triángulo B C P es semejante al A B C
y por lo tanto, el Δ A C P es semejante al Δ B C P .

Demostración del teorema previo.

Al trazar la altura **h**, la hipotenusa **c** queda subdividida por el punto P en dos segmentos **m** y **n** .

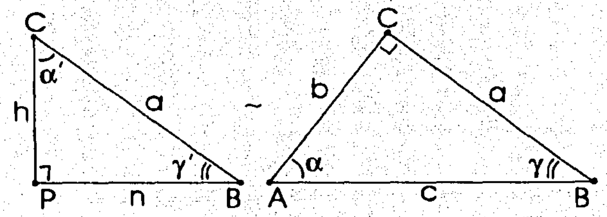


entonces el Δ A C P es semejante al Δ A B C



ya que los ángulos α y α' son el mismo, el ángulo en P es recto, al igual que el ángulo en C del triángulo de la derecha, por lo tanto, el ángulo γ es igual al ángulo γ' cumpliendo así con el postulado A A A de semejanza de triángulos.

De la misma manera demostramos que el triángulo B C P es semejante al Δ A B C :



el ángulo en P del triángulo de la izquierda es recto al igual que el ángulo en C del triángulo grande; el ángulo γ y el ángulo γ' son el mismo, y por lo tanto el ángulo α y el α' son iguales, y como se cumple el postulado A A A de semejanza de triángulos, entonces los dos triángulos son semejantes.

Entonces, Δ A C P es semejante al Δ A B C

y Δ B C P es semejante al Δ A B C

y como dos cosas semejantes a una tercera, son semejantes entre sí, entonces

el Δ A C P es semejante al Δ B C P

El hecho de saber ésto, nos permite establecer las relaciones de proporcionalidad entre los lados de los triángulos :

$$\boxed{\frac{b}{m} = \frac{c}{b}} \quad y \quad \boxed{\frac{a}{n} = \frac{c}{a}}$$

relacionando el Δ A C P y el Δ A B C

relacionando el Δ B C P y el Δ A B C

Estos resultados son los que vamos a usar en la Demostración 3 del Teorema de Pitágoras :

Como Δ A C P y el Δ A B C son semejantes, entonces

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{b}$$

Como Δ B C P y el Δ A B C son semejantes, entonces

$$\frac{a}{n} = \frac{c}{a}$$

Desarrollando estos dos resultados paralelamente,

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{b} \qquad \frac{a}{n} = \frac{c}{a}$$

Quitando denominadores :

$$b \bullet b = c \bullet m \quad y \quad a \bullet a = c \bullet n$$

es decir, $b^2 = c \bullet m$ y $a^2 = c \bullet n$

sumando ambas ecuaciones :

$$b^2 + a^2 = c \bullet m + c \bullet n$$

factorizando el miembro derecho de la igualdad:

$$b^2 + a^2 = c\,(m + n)$$

pero, si regresamos a la figura, vemos que

$$m + n = c$$

por lo tanto, sustituyendo :

$$b^2 + a^2 = c \bullet c$$

$$y \therefore b^2 + a^2 = c^2$$

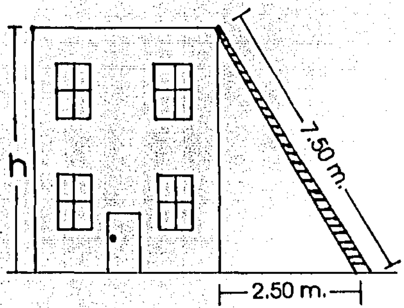
que es precisamente lo que dice el Teorema de Pitágoras.

Como puedes imaginarte, cualquiera de éstas 3 demostraciones es igualmente válida.

Así como éstas, hay muchas otras demostraciones de este Teorema.

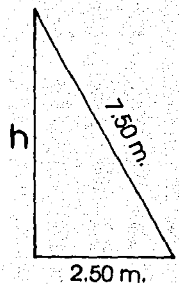
Para terminar el tema, vamos a ver algunos ejemplos de aplicación del Teorema de Pitágoras a problemas diversos:

Ejemplo 1. Calcular la altura de una casa, si una escalera de 7.50 m. debió fijarse en el piso a una distancia de 2,50 m. de la pared para que lograra llegar exactamente a la azotea de la casa.



Solución.

Como se forma un triángulo rectángulo, aplicaremos el Teorema de Pitágoras



$$h^2 + (2.50)^2 = (7.50)^2$$

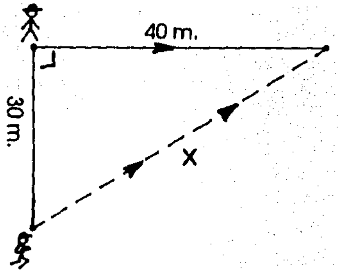
Despejando: $$h^2 = (7.50)^2 - (2.50)^2$$

$$h^2 = 56.25 - 6.25$$

$$h^2 = 50$$

$$\therefore \quad h = 7.07 \text{ m.}$$

Ejemplo 2. Si Juan está separado de Pedro 30 m. y camina en dirección perpendicular a la línea entre él y Pedro, hasta una distancia de 40 m., ¿cuánto deberá caminar Pedro en línea recta para llegar al punto donde quedó Juan ?



Solución.

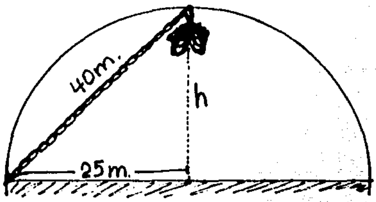
Como la figura es un triángulo rectángulo, aplicaremos el Teorema de Pitágoras:

$$30^2 + 40^2 = x^2$$

así, $$x^2 = 30^2 + 40^2$$
$$x^2 = 900 + 1600$$
$$x^2 = 2500$$
$$x = \sqrt{2500}$$
$$x = 50 \text{ m.}$$

Por lo tanto, Pedro tuvo que caminar 50 m. por la línea punteada, hasta encontrar a Juan.

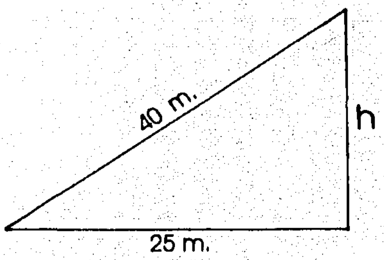
Ejemplo 3. ¿Cuál será la altura de una bóveda circular, si una cuerda que mide 40 m.está atada a un candil y pasa por un gancho sostenido exactamente en el centro de la bóveda, si el centro del salón donde se encuentra el candil está a una distancia de 25 m. del extremo del salón, punto donde se fijó la cuerda en el piso para sostener el candil ?



Solución.(en la página siguiente)

Solución.

Como se forma un triángulo rectángulo, aplicaremos el Teorema de Pitágoras:



$$h^2 + 25^2 = 40^2$$

despejando: $h^2 = 40^2 - 25^2$

$$h^2 = 1600 - 625$$

$$h^2 = 975$$

$$h = \sqrt{975}$$

$$h = 31.22 \text{ m.}$$

ésta será la altura

Breve resumen.

Como ves, la diferencia entre un problema de Semejanza de Triángulos y uno de aplicación del Teorema de Pitágoras, es que en la Semejanza de Triángulos siempre vamos a tener 2 o más triángulos para compararlos entre sí y poder así aplicar la correspondiente regla de tres (o proporción).

En cambio, si sólo tenemos un triángulo y éste es triángulo rectángulo, y tanto los datos como la incógnita son lados del triángulo, con certeza tendremos una aplicación del Teorema de Pitágoras.

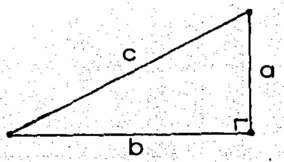
Esperamos que éstos tips te sean de utilidad cuando trates de resolver problemas sobre triángulos.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

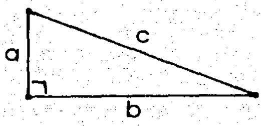
Problema 1.- (*)

Para el siguiente triángulo rectángulo, calcular la medida que falta:

a) $a = 7$, $c = 15$, $b = ?$

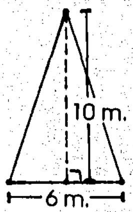


b) $a = 2$, $b = 5$, $c = ?$



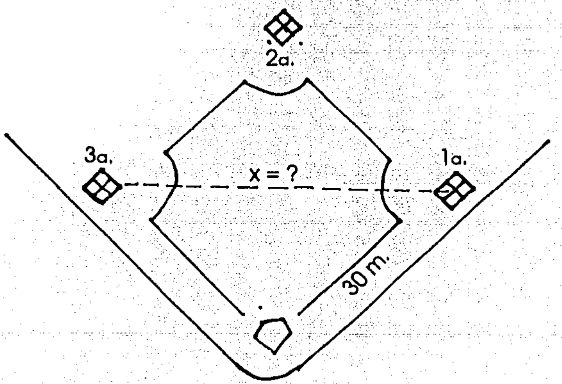
Problema 2.- (*)

¿Cuál será el perímetro de un triángulo isósceles, si el lado desigual mide 6 m. y su correspondiente altura mide 10 m. ?



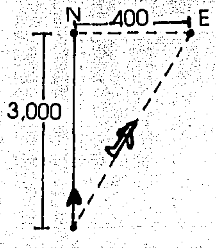
Problema 3.- (*)

Un diamante de béisbol es un cuadrado con 30 m. de lado. ¿Cuál es la distancia en línea recta de 1º a 3º base ?

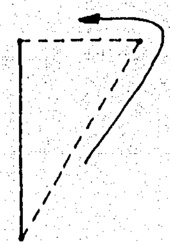


Problema 4.- (*)

Un avión debía volar a un punto situado a 3,000 millas al norte de su punto de partida, pero el viento lo desvió y fue a dar a 400 millas al este del supuesto destino. ¿Cuánto voló hasta llegar a ése lugar ?

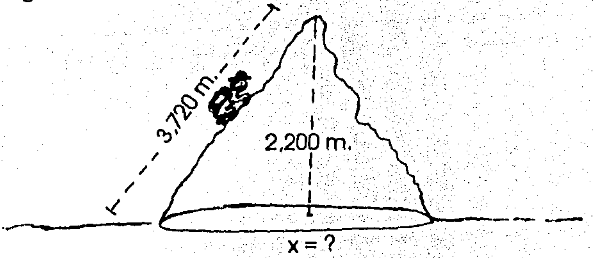


b) ¿Cuál es el recorrido total que tuvo que hacer el avión para llegar al punto final de destino ?



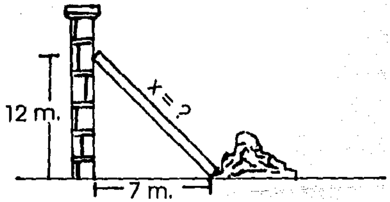
Problema 5.- (*)

¿Cuál será el diámetro de una montaña, si ésta tiene una altura de 2,200 m. y un alpinista tuvo que escalar un total de 3,720 m. para llegar a la cima ?



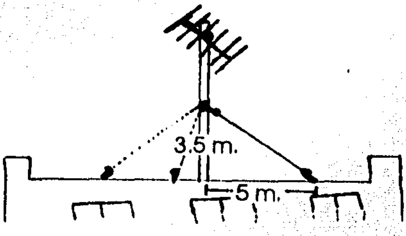
Problema 6.- (*)

¿Cuál será la longitud de una viga que se deba usar para sostener una barda que está a punto de caerse, si se quiere que la barda sea apuntalada a una altura de 12 m. , y la viga se piensa fijar contra una roca situada a 7 m. de la barda?



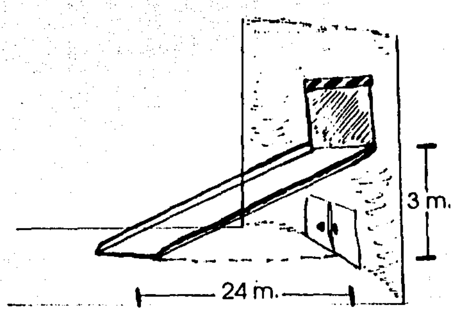
Problema 7.- (*)

¿Cuál será la cantidad de cable necesario para fijar una antena de televisión por un punto situado a 3.5 m. de altura, si el cable debe estar fijado en el piso hacia 3 puntos diferentes a 5 m. de distancia de la antena ?



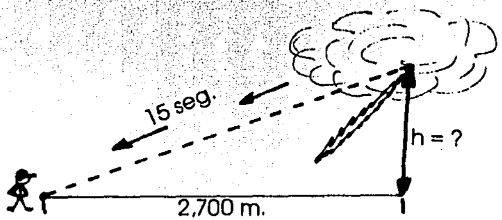
Problema 8.- (*)

¿Cuál deberá ser la longitud de una rampa que se va a construir para un estacionamiento si se quiere que la rampa llegue a 3 m. de altura y el punto donde se debe empezar ésta, se encuentra a 24 m. del acceso del estacionamiento ?



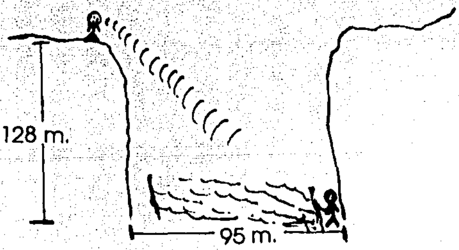
Problema 9.- (*)

¿Cuál será la altura de una nube si un observador que se encuentra a 2,700 m. de distancia de un punto situado exactamente bajo el centro de la nube, si un rayo que salió de ésa nube tardó 15 seg. en ser oído por el observador (el sonido viaja a 300 m/seg aproximadamente) ?.



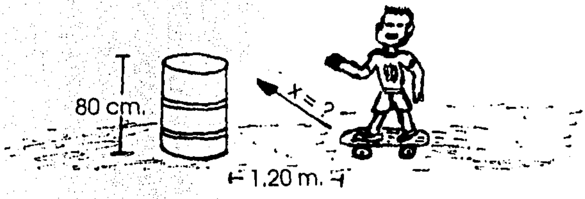
Problema 10.- (*)

¿Cuánto tardará en oírse el grito de una persona situada en la orilla de un peñasco al filo de un acantilado de 128 m. de altura, si al fondo del acantilado cruza un río de 95 m. de ancho y al otro lado del río se encuentra una persona que va a recibir la señal del que grita ? (El sonido viaja a 300 m/seg aproximadamente) ?.



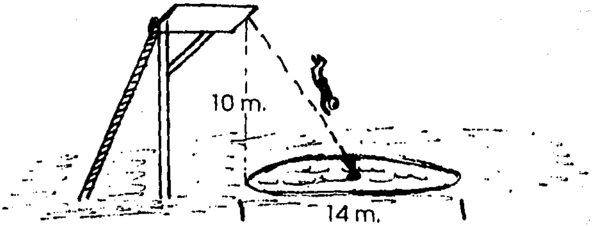
Problema 11.-

Bart Simpson quiere brincar con su patineta a un tambo de 80 cm. de alto. Si brinca desde una distancia de 1.20 m. ¿cuánto deberá viajar en el aire con su patineta para lograr caer en el tambo ?.



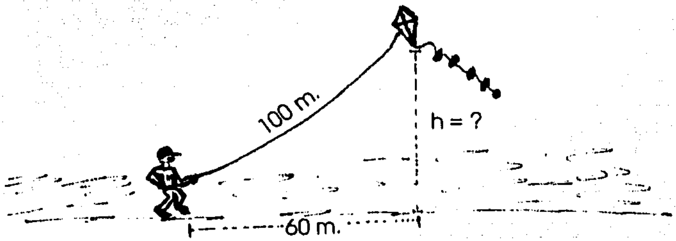
Problema 12.- (*)

¿Cuánto viajó en el aire un clavadista que se lanzó desde la plataforma de 10 m. y cayó en el centro de una alberca redonda de 14 m. de diámetro ?.



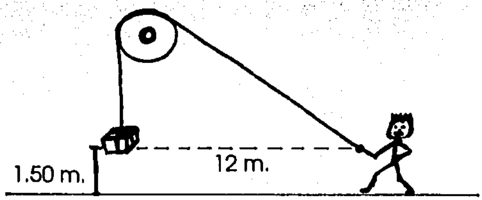
Problema 13.- (*)

Un muchacho está volando una cometa con una cuerda de 100 m., y el viento provoca que ésta se desplace a quedar volando sobre un punto situado a 60 m. del lugar donde está el muchacho. ¿A qué altura aproximadamente, desde el nivel de la mano del muchacho se encuentra en ése momento la cometa sabiendo que la cuerda casi forma una línea recta al estar soplando el viento ?.



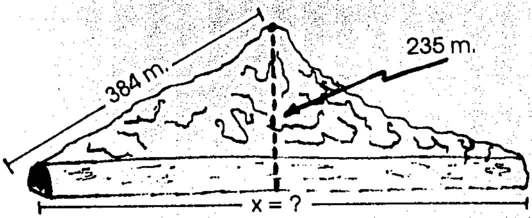
Problema 14.- (*)

Un niño toma una cuerda que está atada a un bulto y que pasa a través de una polea que cuelga de un techo a 10 m. de altura, y se aleja de ella hasta levantar el bulto a una altura de 1.50 m., que es la misma altura a la que tiene su mano. Al medir la distancia entre el niño y el bulto, se encuentra que es de 12 m. ¿Cuál es la longitud total de la cuerda ?.

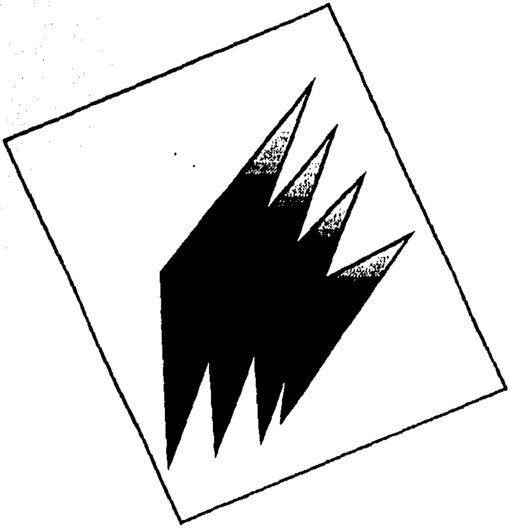


Problema 15.- (*)

Se desea abrir una carretera a través de una montaña. ¿Cuál será la longitud del túnel, si la montaña tiene una altura de 235 m. y la ladera mide 384 m. en total, de la base a la cima ?.



APENDICE



DEFINICIONES Y NOTAS IMPORTANTES

Apéndice.

Definiciones.

-**Definición.**-Es una explicación clara y breve de las características y cualidades de una cosa, material o inmaterial.

-**Axioma.**-Es una proposición cuya verdad es tan clara y evidente que no necesita demostración.

-**Postulado.**-Proposición no tan clara como el axioma, pero que se acepta sin demostración y sirve de base para posteriores razonamientos.

-**Teorema.**-Proposición cuya veracidad es necesario demostrar. Consta de tres partes: hipótesis, tesis o conclusión y una serie de razonamientos lógicos que nos llevan de la hipótesis hasta la consecusión de la tesis.

-**Lema.**-Proposición que es necesario demostrar y que es previa al establecimiento de un teorema posterior más importante.

-**Corolario.**-Proposición que es consecuencia inmediata de lo demostrado en un teorema anterior y que necesita poca o ninguna demostración.

-Punto.-(No existe definición formal, la que anotamos aquí es meramente una noción intuitiva de lo que es un punto). Es un ente imaginario y carece de dimensiones.Es la parte más pequeña que podemos imaginarnos.

-Línea.-Sucesión continua de puntos.

-Línea recta.-Es una línea en la que todos sus puntos siguen una misma dirección.

-Plano.-Es un conjunto infinito de puntos que definen un espacio de dos dimensiones, en el que si trazamos una recta por dos puntos de él,todos los demás puntos de ella están en él.

-Superficie.-Es el borde de un cuerpo geométrico. Si la superficie es plana, se considera como parte de un plano.

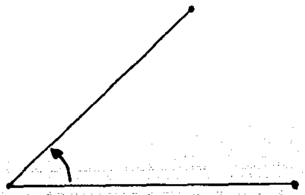
-Figura geométrica.-Es una combinación de puntos y líneas representando algún objeto.

-Circunferencia.-Es la trayectoria cerrada tal que todos los puntos de ella se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro de la circunferencia.

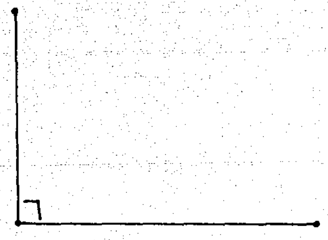
-Círculo.-Es la parte del plano encerrada por una circunferencia.

-Angulo.-(No existe la definición formal de lo que es un ángulo, sólo damos la concepción intuitiva de él). Angulo es la abertura que se forma entre dos rectas que parten de un mismo punto. Vamos a tomar como el ángulo la abertura más pequeña de las dos que se forman, a menos que expresamente se indique .

-Los diferentes tipos de ángulos rectilíneos que existen son:
Agudos: aquéllos que miden menos de 90°



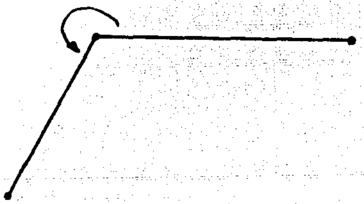
Rectos: aquéllos que miden exactamente 90° .



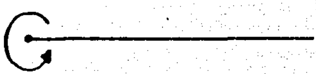
Obtusos: aquéllos que miden más de 90° pero menos de 180°.

Colineales o llanos: aquéllos que miden exactamente 180°.

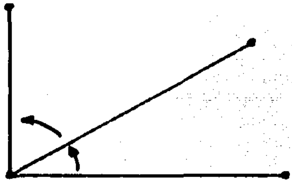
Entrantes: aquéllos que miden más de 180° pero menos de 360°.



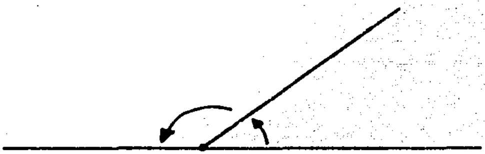
Perigonales: aquéllos que miden exactamente 360° .



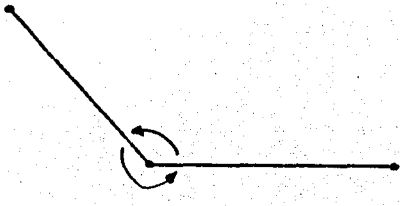
-Los ángulos **complementarios** son los que están adyacentes y que suman 90° .



-Los ángulos **suplementarios** son aquéllos que están adyacentes uno al otro y que suman 180°.



-Los ángulos **conjugados** son aquéllos que son adyacentes entre sí y que suman 360°.



Líneas importantes de un círculo.

Circunferencia.-Trayectoria cerrada que delimita al círculo en la que todos sus puntos están a la misma distancia del centro del círculo.

Radio.-Recta que va del centro del círculo hacia cualquier punto de la circunferencia.

Diámetro.-Recta que va de un lado al otro de la circunferencia, pasando por el centro del círculo.

Cuerda.-Recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.Cualquier cuerda mide menos que un diámetro.

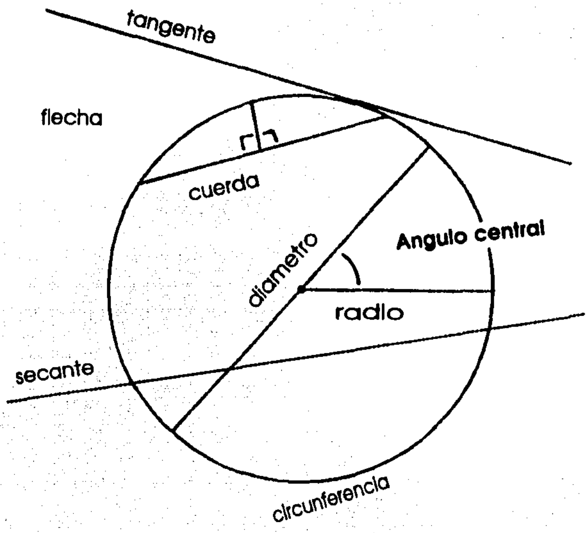
Arco.- Parte de la circunferencia subtendida por una cuerda.

Flecha.-Recta perpendicular a la cuerda y que va del punto medio de ésta hacia el punto medio del sector circular subtendido por la cuerda.

Secante.-Línea recta que corta al círculo en dos puntos.

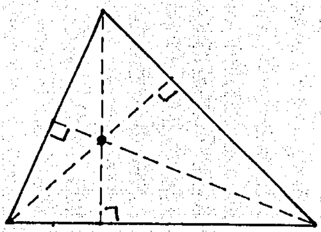
Tangente.- Recta exterior al círculo que lo toca exactamente en un punto.

Angulo central.-Es la abertura formada por dos radios de un mismo círculo.



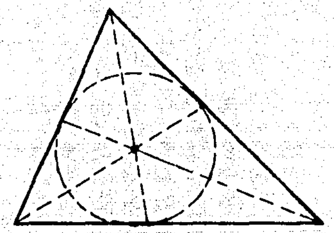
Líneas importantes en un triángulo.

Altura.-Recta que parte de cada vértice y que toca al lado opuesto a éste, en forma perpendicular. Hay tres alturas y se intersectan en un punto llamado el ortocentro del triángulo.

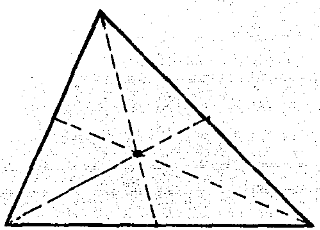


En un triángulo rectángulo solamente hace falta trazar la altura correspondiente a la hipotenusa, puesto que los dos catetos funcionan como alturas del triángulo, y por lo tanto el ortocentro estará en el vértice donde se forma el ángulo recto del triángulo.

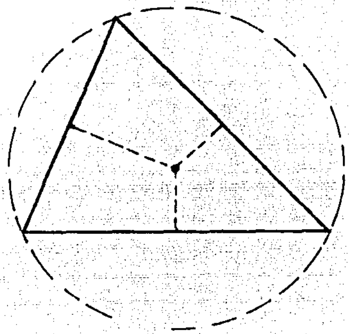
Bisectriz.-Recta que sale de cada vértice del triángulo hacia el lado opuesto a éste, partiendo al ángulo que se forma en cada vértice exactamente en dos ángulos iguales.El punto de intersección de las bisectrices es el incentro y es el centro de un círculo tangente a cada lado del triángulo y que se llama el círculo inscrito al triángulo.



Mediana.-Recta que va del punto medio de cada lado hacia el vértice opuesto a él. Las tres medianas se intersectan en un punto que es el centro de gravedad del triángulo y que se llama el baricentro del triángulo. Es decir, si nosotros dibujamos un triángulo y recortamos la figura y localizamos su baricentro, al colgar el triángulo de una cuerda que pase por dicho punto, en cualquier posición que pongamos el triángulo, se quedará estático.

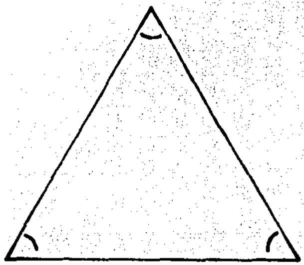


Mediatriz.-recta que parte del punto medio de cada lado del triángulo y en forma perpendicular a cada lado. Las tres mediatrices se intersectan en un punto llamado el circuncentro del triángulo, es decir, es el centro de un círculo que toca a los tres vértices del triángulo y que obviamente encierra a éste completamente.

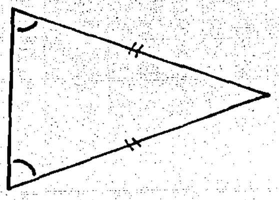


Tipos de triángulos rectilíneos.

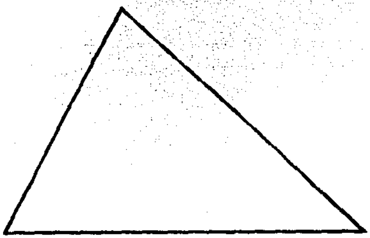
Triángulo equilátero.-Aquel en el que todos sus lados miden exactamente lo mismo, y por lo tanto sus tres ángulos son iguales.



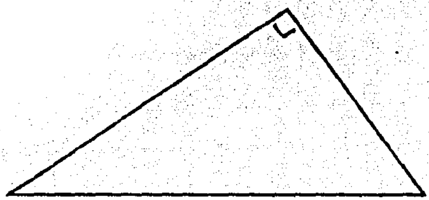
Triángulo isósceles.-Aquel en el que dos de sus lados miden exactamente lo mismo, y por lo tanto dos de sus ángulos son iguales. El triángulo equilátero es un caso especial de un triángulo isósceles.



Triángulo escaleno.-Aquel en el que todos sus lados son diferentes, y por lo tanto sus ángulos son también desiguales.



Triángulo rectángulo.-Aquel en el que uno de sus ángulos mide exactamente 90° , es decir, es ángulo recto. Un triángulo rectángulo es el único que tiene catetos e hipotenusa, y la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto.

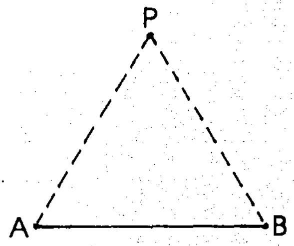


SOLUCIONES DE PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO II.

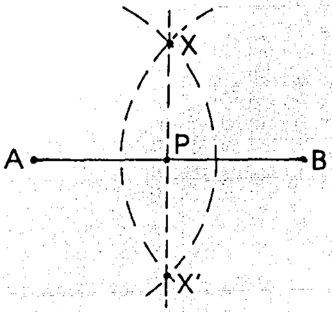
Problema 1.-

(Hint: La construcción es idéntica a la del problema de construcción 1):



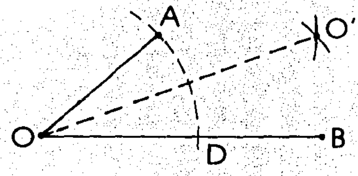
Problema 2.-

Aquí, una construcción posible es igual a la del problema 2 original, y una alternativa sería ésta:



Problema 3.-

Esta construcción tiene dos opciones. Una de ellas es idéntica a la correspondiente que ya hicimos:

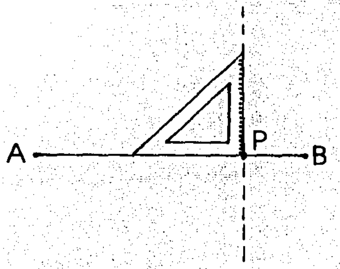


y la demostración es idéntica a la ya realizada.

Ahora, encuentra tú otra solución.

Problema 4.-

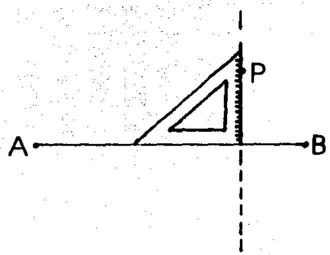
Tomamos nuestra escuadra y la alineamos sobre la recta y ya está :



Puesto que, si medimos con nuestro transportador, veremos que efectivamente nos da los 90°.

Problema 5.-

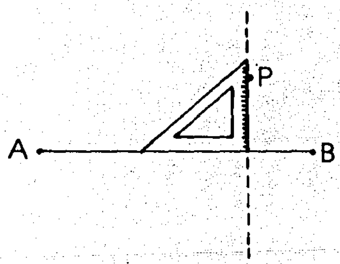
Igual que en el problema anterior, usando nuestra escuadra y alinéandola sobre la recta y también con el punto, logra quedar:



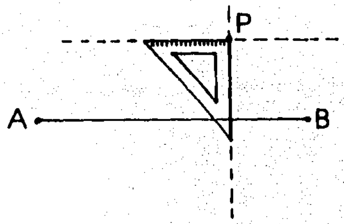
Problema 6.-

Si combinamos las dos construcciones anteriores y deslizando nuestra escuadra, lograremos trazar la paralela buscada:

Paso 1.-



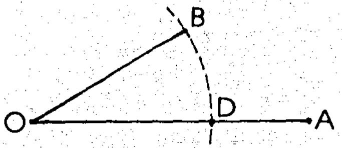
Paso 2.-



Problema 7.-

Idéntica que en la del capítulo II :

Con el compás tomamos la medida $\overline{OB}$ y la pasamos a intersectar a $\overline{OA}$:

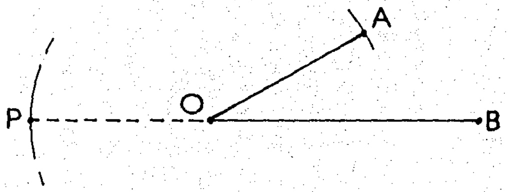


$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OA} - \overline{OP} = \overline{PA}$$

Problema 8.-

Idéntica que en la correspondiente del capítulo II :

Prolongamos $\overline{OB}$ hacia atrás; tomamos la medida $\overline{OA}$ y la marcamos en la prolongación de $\overline{OB}$, o sea P .

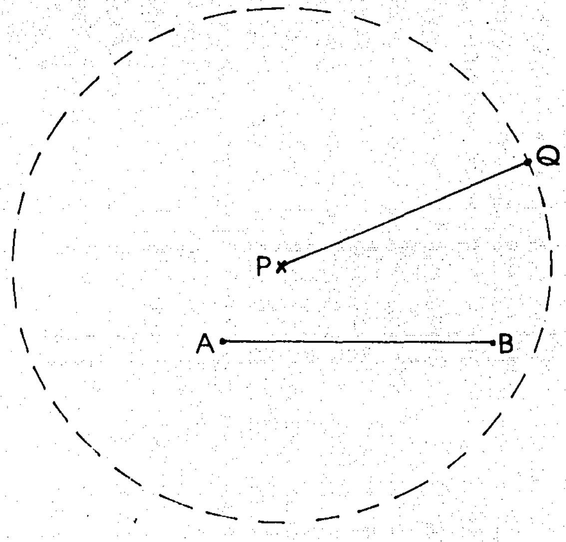


Entonces, $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{PB}$

Problema 9.-

Con el compás tomamos la distancia $\overline{AB}$ y como éste se queda abierto, lo levantamos, lo fijamos en P y trazamos un círculo alrededor de P.

Enseguida trazamos un radio de ese círculo en cualquier dirección:

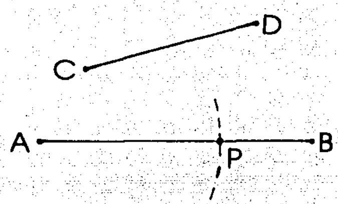


$\overline{PQ} = \overline{AB}$

Problema 10.-

Pudiendo dejar el compás abierto, la solución queda en dos pasos:

Con el compás, tomamos la medida $\overline{CD}$ y fijamos el compás en A y cruzamos la línea $\overline{AB}$ en P. Por tanto:



$$\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{AB} - \overline{AP} = \overline{PB}$$

Demasiado fácil, verdad ?

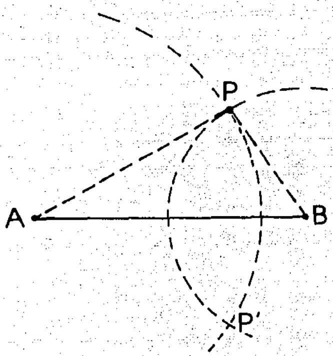
Problema 11.-

Casi igual que en el problema anterior:

Tomamos $\overline{AB}$ como la base del triángulo. Así, dejamos la recta $\overline{AB}$ fija.

Con el compás tomamos la distancia $\overline{CD}$ y fijándolo en A trazamos un círculo con ese radio ($\overline{CD}$).

Luego, con el compás tomamos la distancia $\overline{EF}$ y con centro en B trazamos el segundo círculo.



Donde se intersectan los dos círculos es el vértice buscado (puede ser por arriba de la recta $\overline{AB}$ o por abajo).

CAPITULO III.

Problema 15.-

a = 140°	e = 140°
b = 40°	f = 40°
c = 40°	g = 40°
d = 140°	h = 140°

Problema 16.-

a = 137°	e = 137°
b = 43°	f = 43°
c = 43°	g = 43°
d = 137°	h = 143°

Problema 17.-

a = 40°	e = 40°
b = 140°	f = 140°
c = 140°	g = 140°
d = 40°	h = 40°

Problema 20.-

x = 105°

Problema 21.-

y = 40°

Problema 22.-

x = 80°   y = 40°

Problema 23.-

$x = 60°$ $y = 80°$

Problema 24.-

$x = 125°$

Problema 25.-

$x = 62°$ $y = 28°$

Problema 26.-

$x = 80°$ $y = 20°$

Problema 27.-

decágono = 1440°

12 lados = 1800°

20 lados = 3240°

37 lados = 6300°

Problema 28.-

decágono regular = 144°

12 lados regular = 150°

15 lados regular = 156°

Problema 29.-

12 lados = 360°

25 lados = 360°

30 lados = 360°

100 lados = 360°

Problema 30.-

15 lados = 24°

18 lados = 20°

20 lados = 18°

30 lados = 12°

CAPITULO IV.

Problema 1.-

i)

a) $x = 6.25 \quad y = 10$

b) $r = 1.6$ ó 8 a 5 .

ii)

a) $x = 6.85$, $y = 17.14$

b) $r = 0.58$ ó 7 a 12

Problema 2.-

$h = 28.68$ m.

Problema 3.-

$x = 322.22$ m.

Problema 5.-

$h = 30$ m.

Problema 6.-

$x = 159.77$ m.

Problema 7.-

$h = 26.25$ m.

CAPITULO V.

Problema 1.-

a) $b = 13.26$

b) $c = 5.38$

Problema 2.-

$P = 23.86$ m.

Problema 3.-

$x = 42.42$ m.

Problema 4.-

$x = 3026.56$ millas

b) $R = x + 400 = 3426.56$ millas

Problema 5.-

$x = 5,999.56$ m.

Problema 6.-

$x = 13.89$ m.

Problema 7.-

$x = 6.10$ m.

$3x = 18.30$ m.

Problema 8.-

x = 24.18 m.

Problema 9.-

h = 3600 m.

Problema 10.-

x = 159.40 m.

t = 0.53 seg.

Problema 11.-

x = 1.44 m.

Problema 12.-

x = 12.20 m.

Problema 13.-

h = 80 m.

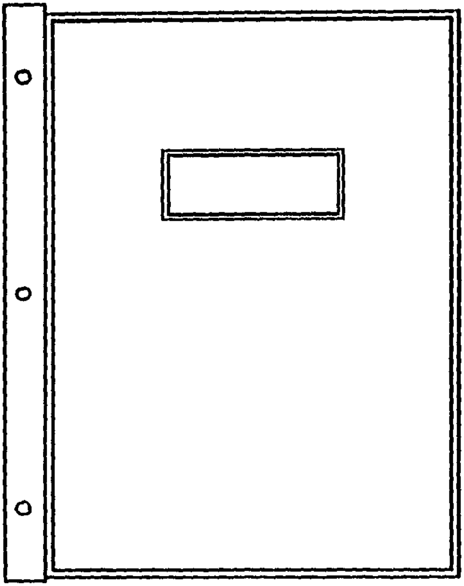
Problema 14.-

x = 14.70 m.

R total = 14.70 + 8.5 = 23.20 m.

Problema 15.-

x = 611.32 m.



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Euclides
Los elementos de la Geometría
Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana.
Obras completas. Texto griego y español.
Edición U.N.A.M. Mexico, 1956.

Wentworth, Jorge y Smith, David Eugenio
Geometría Plana y del Espacio
17ª Edición. Editorial Porrúa,S.A. México, 1990.

Baldor, J. A. Dr.
Geometría Plana y del Espacio con una Introducción a la Trigonometría.
Publicaciones Cultural, S. A. de C. V.
Octava reimpresión. México, 1992.

Barnett, Rich. Ph. D.
Teoría y Problemas de Geometría Plana con Geometría de Coordenadas.
Colección Schaum
Ed. McGraw-Hill , México, 1971.

Zubieta R., Francisco
Geometría Razonada y Trigonometría
Edición del autor
México, D.F., 1977

Shively, Levy S.
An Introduction to Modern Geometry
Ed. John Wiley & Sons, Inc.
9ª Edición, U.S.A., 1939.

Moise, Edwin E. y Downs, Floyd L. Jr.
Geometría Moderna
Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.
Wilmington, Delaware, E. U. A., 1986

Nichols, Eugene D., , Palmer, William F. , Schacht, John F.
Geometría Moderna
Ed. C. E. C. S. A.
4ª edición, 1978, México.