



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

24
2EJ
BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
MEXICO, D.F. 1995

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
EDUARDO / MORA DONATO



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



MEXICO, D. F.

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVANZADA DE
MÉXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Eduardo Mora Donato

con número de cuenta 8309408-6 con el Título: _____

"El teorema de Poincaré-Bendixson"

Otorgamos nuestro Voto Aprobatorio y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMÁTICO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Dr.	Javier Pulido	Cajudo	
Director de Tesis			
Dr.	Arturo Olvera	Chavez	
Dr.	Federico Sánchez	Bringas	
M. en C.	Héctor Méndez	Lango	
Suplente			
M. en C.	Jefferson King	Davalos	
Suplente			

Agradecimientos.

En primer lugar agradezco a mis padres Jesús Mora y Judith Donatto y a mis hermanos Jesús y Cecilia por el apoyo que me han brindado en todo momento por el cariño, la comprensión que siempre me han prodigado y sobre todas las cosas porque sin ellos nada de esto sería posible. ¡Muchas gracias!

Gracias también a Isabel por darme todo lo que me da, por ayudarme a ser autocrítico y por contagiarme de su espíritu de superación.

En el desarrollo de esta tesis han intervenido muchas personas. En estas líneas deseo hacer un reconocimiento a todas aquellas que me han ayudado a alcanzar este objetivo y agradecerles su ayuda: A Javier Pulido quien en su papel de director de tesis siempre mostró confianza y paciencia, quiero darle las gracias por las largas horas invertidas en las revisiones de este trabajo por sus acertados comentarios por las críticas y muy en especial por la libertad, que siempre tuve, de realizar un trabajo con un estilo personal, todo esto gracias a la actitud abierta y amigable que siempre tuvo hacia mí; a los profesores Arturo Olivera Chaves, Federico Sánchez Bringas, Héctor Méndez Lango y Jefferson King Davalos quienes revisaron la tesis y que con sus comentarios me ayudaron a darle una forma definitiva.

Quiero agradecer particularmente a Javier Páez quien además de ser uno de los mejores profesores que he conocido, es también una persona que con su vocación de maestro y amigo ha contribuido de manera fundamental a mi formación como matemático y como persona. ¡Gracias Javier por soportarme todo este tiempo!

Por último deseo reconocer la ayuda de todas aquellas personas que no he mencionado por no contar con mayor espacio a mis maestros en la facultad de ciencias a mis compañeros y amigos, me disculpo por no poder dedicarles más espacio a todos.

A todas estas personas ¡GRACIAS!

Prefacio.

Resolver una ecuación diferencial no es algo fácil es un hecho que los métodos clásicos para resolver ecuaciones no siempre arrojan soluciones fáciles de manejar, es por ésto que muchas veces resulta de mayor provecho obtener una descripción cualitativa de las curvas integrales de una ecuación diferencial. El teorema de Poincaré-Bendixson (TPB) es, en este contexto, uno de los teoremas más importantes de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, ya que al caracterizar la naturaleza geométrica de los conjuntos límites está a su vez, poniendo a nuestra disposición una descripción del comportamiento global de las soluciones de una ecuación diferencial, es por esta razón que me pareció importante escribir una tesis que le resaltase su importancia.

El objetivo de este trabajo es presentar el teorema desde su forma en el plano, hasta su generalización a dos variedades compactas. En el camino para alcanzar tal objetivo se desarrollarán las bases de lo que es conocido como la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales; se enunciará una definición de variedad, de lo que significa tener definido un campo vectorial o un flujo en una variedad; se utilizarán los conceptos de la teoría cualitativa y el teorema de Poincaré-Bendixson para caracterizar los retratos fase de una ecuación diferencial en las cercanías de una singularidad aislada; se estudiarán los flujos en curvas cerradas para facilitar la comprensión de los flujos tanto en el toro como en la botella de Klein y se concluirá probando el teorema de Schwartz.

Contenido.

Capítulo 1.

Sección 1.2: Comienza haciendo ver que hay una relación biunívoca entre las ecuaciones diferenciales y los campos vectoriales en el plano. Uno de los teoremas de mayor importancia en las ecuaciones diferenciales es el de existencia y unicidad de soluciones, la demostración

ω -límite de órbitas y es un resultado íntimamente ligado al estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, la demostración que se presenta en este trabajo utiliza explícitamente resultados de la sección anterior como el teorema de flujo tubular, propiedades de los conjuntos α -límite y ω -límite, conexidad, cerradura, invariancia, etc. y el teorema de la curva de Jordan, sin embargo este teorema puede ser demostrado sin utilizar flujo tubular con la ayuda del teorema de Peano, es decir el resultado continua siendo válido, con algunas variantes, aún en el caso en que no se cuenta con unicidad de soluciones (ver Hartman [13]), donde se aprecia que la prueba del resultado considerando únicamente un campo vectorial continuo no dista mucho de la dada aquí, las variantes son esencialmente dos; la primera es que el corolario 1.28 y la conclusión (b) del TPB, que nos dicen que las órbitas alcanzan a los puntos singulares sólo en el límite cuando el tiempo tiende a infinito, pueden ser alcanzadas para tiempos finitos, ésto no significa que si una curva integral que tiene como conjuntos α -límite y ω -límite sendas singularidades para los tiempos finitos α_+ y ω_+ necesariamente su intervalo máximo de definición es (α_+, ω_+) y la segunda trata del hecho que entre dos singularidades puede haber una cantidad numerable de órbitas (con unicidad ésto sólo puede pasar cuando se trata de la misma singularidad, ver Melo y Pallas [19]). El teorema de la curva de Jordan (proposición 1.32) es fundamental en ambos casos y una demostración de él puede ser vista en Moise [22] y Do Carmo [8].

En la demostración del TPB que se presenta en este trabajo se puede observar que la propiedad que tienen las secciones transversales locales en el plano de ser difeomorfas a intervalos abiertos de R , es de particular importancia ya que gracias a tal propiedad (y a la continuidad del flujo) se puede hablar de sucesiones monótonas en las secciones transversales (proposición 1.31), ésto a su vez tiene como consecuencia el importante hecho de que una sección transversal interseca a un conjunto límite en un único punto (proposición 1.33), de donde se pueden deducir las características geométricas de los conjuntos límite en términos de si contienen o no puntos singulares.

Esta propiedad de las secciones transversales locales en el plano, se pierde en más dimensiones, pensemos en el ejemplo de un campo vectorial en tres dimensiones, en tal caso las secciones transversales son planos. En caso de que por ejemplo un plano de éstos sea invariante bajo el flujo entonces se podría pensar en la existencia de una órbita periódica. (ver cap. 13 de Hirsch y Smale [15])

Finalmente sólo resta decir que las principales fuentes bibliográficas en este capítulo son Sotomayor [29], Hartman [13] y Bendixson [5].

más conocida de este teorema es aquella que involucra el método de las iteradas de Picard. (ver Hirsch y Smale [15]). En esta tesis sin embargo no se ha demostrado de esta forma, la demostración que aquí se encontrará es una generalización no muy complicada del método de Picard, que utiliza un resultado conocido como teorema de contracción de fibras, la diferencia entre estos métodos consiste en que con las hipótesis de Picard, es decir, suponiendo que un cierto operador es continuo y contrae, si se agrega que el campo es de clase C^1 , se obtiene además de la existencia y unicidad de soluciones, la continuidad y diferenciabilidad de las mismas con respecto a las condiciones iniciales, esto se aprecia en los incisos (i) y (ii) del teorema 1.4., más aún en el teorema 1.7. se muestra que la diferenciabilidad de las soluciones aumenta tanto como la diferenciabilidad del campo vectorial. En el teorema de Picard la unicidad de soluciones es consecuencia de suponer que el campo vectorial contrae (es Lipschitz), esta hipótesis puede ser sustituida en el enunciado del teorema por la de un campo vectorial continuo y acotado y con la ayuda de los teoremas de Weierstrass y Arzela (ver Rudin [26] y Bartle [4]) se puede asegurar la existencia de al menos una solución para la ecuación diferencial, este teorema es conocido como el teorema de Peano (ver Sotomayor [29], Hartman [13] y apéndice de esta tesis). Por último Kneser probó en 1927 [17] un resultado más general (ver Hartman [13]), en donde asegura que el conjunto de puntos s_r , para los que en un tiempo r alguna solución de la ecuación diferencial 1.1 pasa por s_r , es continuo.

En esta sección también se exponen algunos conceptos básicos de lo que es la teoría cualitativa clásica, como son el concepto de flujo, retrato fase, equivalencia de retratos fase, sección transversal local y algunos resultados importantes como el teorema de extensión de soluciones y el teorema del flujo tubular.

Con respecto al concepto de flujo, éste se puede entender como una generalización del concepto clásico de solución, en este concepto toma forma la idea de la teoría cualitativa de resolver una ecuación diferencial globalmente, esto quiere decir, dar una descripción detallada del comportamiento global de las soluciones para hallar lo que se conoce como el retrato fase de una ecuación diferencial o de un campo vectorial.

Sección 1.3: Los conceptos de α -límite y ω -límite fueron utilizados tanto en las demostraciones de Poincaré como en las de Bendixson aunque ninguno de ellos les llamo de esta forma, estos conjuntos son muy especiales ya que al conocerlos podemos obtener una idea muy clara del comportamiento global de las curvas integrales de un campo vectorial. El teorema TPB, como ya se ha dicho, pone a nuestra disposición una caracterización para los conjuntos α -límite y

ω -límite de órbitas y es un resultado íntimamente ligado al estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, la demostración que se presenta en este trabajo utiliza explícitamente resultados de la sección anterior como el teorema de flujo tubular, propiedades de los conjuntos α -límite y ω -límite, conexidad, cerradura, invariancia, etc. y el teorema de la curva de Jordan, sin embargo este teorema puede ser demostrado sin utilizar flujo tubular con la ayuda del teorema de Peano, es decir el resultado continua siendo válido, con algunas variantes, aún en el caso en que no se cuenta con unicidad de soluciones (ver Hartman [13]), donde se aprecia que la prueba del resultado considerando únicamente un campo vectorial continuo no dista mucho de la dada aquí, las variantes son esencialmente dos; la primera es que el corolario 1.28 y la conclusión (b) del TPB, que nos dicen que los órbitas alcanzan a los puntos singulares sólo en el límite cuando el tiempo tiende a infinito, pueden ser alcanzadas para tiempos finitos, ésto no significa que si una curva integral que tiene como conjuntos α -límite y ω -límite sendas singularidades para los tiempos finitos α_+ y ω_+ necesariamente su intervalo máximo de definición es (α_-, ω_+) y la segunda trata del hecho que entre dos singularidades puede haber una cantidad numerable de órbitas (con unicidad esto sólo puede pasar cuando se trata de la misma singularidad, ver Melo y Palis [19]). El teorema de la curva de Jordan (proposición 1.32) es fundamental en ambos casos y una demostración de él puede ser vista en Moise [22] y Do Carmo [8].

En la demostración del TPB que se presenta en este trabajo se puede observar que la propiedad que tienen las secciones transversales locales en el plano de ser difeomorfas a intervalos abiertos de R , es de particular importancia ya que gracias a tal propiedad (y a la continuidad del flujo) se puede hablar de sucesiones monótonas en las secciones transversales (proposición 1.31), ésto a su vez tiene como consecuencia el importante hecho de que una sección transversal intersecta a un conjunto límite en un único punto (proposición 1.33), de donde se pueden deducir las características geométricas de los conjuntos límite en términos de si contienen o no puntos singulares.

Esta propiedad de las secciones transversales locales en el plano, se pierde en más dimensiones, pensemos en el ejemplo de un campo vectorial en tres dimensiones, en tal caso las secciones transversales son planos. En caso de que por ejemplo un plano de éstos sea invariante bajo el flujo entonces se podría pensar en la existencia de una órbita periódica. (ver cap. 13 de Hirsch y Smale [15])

Finalmente sólo resta decir que las principales fuentes bibliográficas en este capítulo son Sotomayor [29], Hartman [13] y Bendixson [5].

Capítulo 2.

Sección 2.1: En esta sección se mencionan resultados conocidos del cálculo diferencial en R^n , los cuales después se generalizan al caso de variedades, los resultados que aquí se encuentran pueden ser encontrados en cualquier libro de topología diferencial en particular en Guillemin y Pollack [30] y J. Milnor [21], éstos nos dan una idea de lo que es una variedad, funciones diferenciables entre variedades y sus características; con respecto a la definición de variedad se puede hacer un comentario, hay básicamente dos definiciones de variedad, una abstracta donde una variedad es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable, localmente difeomorfo a un abierto de R^n y otra nos dice cuando un subconjunto de R^n es una variedad, en esta sección se ha trabajado con la segunda definición, esto sin embargo no representa un problema ya que cualquier variedad abstracta de dimensión n puede ser encajada en algún R^k con una k suficientemente grande ($k \geq 2n + 1$), este resultado es conocido como el teorema de Whitney y una demostración del mismo también puede verse en [30] y [21]. Un concepto importante para comprender lo que es un campo vectorial en una variedad es el concepto de haz tangente, de este concepto no ha sido vista su versión abstracta por no ser necesaria para mis fines, también se da una argumentación del hecho de que el haz tangente es una variedad de dimensión $2n$.

Sección 2.2: Teniendo bien definido lo que es el haz tangente de una variedad se puede hablar de conceptos como campos vectoriales, ecuaciones diferenciales, flujo local y global (proposiciones 2.15 y 2.16). El ejemplo 2.2 es de particular importancia ya que constituye un avance de lo que será tratado en el capítulo 4, además de que los campos racional e irracional constituyen ejemplos importantes en otras áreas, por ejemplo la órbita de un punto bajo un flujo irracional es una subvariedad isomorfa en el toro pero no encajada y una órbita racional induce un homeomorfismo del círculo en el círculo con al menos una órbita periódica.

Sección 2.3: Gracias al hecho de que en S^2 el teorema de la curva de Jordan también es válido la demostración del TPB no representa trabajo extra a partir de la demostración dada en el caso del plano, así que lo único que se hizo en esta sección fue dar un ejemplo para hacer ver que la hipótesis de finitud de singularidades es necesaria.

Las principales fuentes en esta parte fueron Do Carmo [8], Melo y Falls [19], J. Milnor [21] y Guillemin y Pollack [30].

Capítulo 3.

Sección 3.1: El teorema de las tangentes rotantes es un resultado que data de la época de Riemann, la prueba que aquí aparece se puede ver en los libros Do Carmo [8] y Hartman

[13], esta prueba es debida a H.Hopf. El concepto de índice fue utilizado por vez primera por Poincaré y mide la rotación del campo vectorial a lo largo de una curva. El teorema 3.2 nos da una expresión para calcular el índice de una curva en términos de una integral y como ésta no es siempre fácil de calcular queda la inquietud de hallar una forma más geométrica para calcular el índice de un campo vectorial a lo largo de una curva, la respuesta a esta inquietud viene dada por la fórmula de Bendixson (ver Andronov [2], Bendixson [5], Do Carmo [8], Hartman [13] y sección 3.4.1 de esta tesis). En este capítulo también se pueden ver algunas propiedades del índice, entre ellas una muy importante es que siempre es un número entero. En el capítulo 5 de Andronov [2] se pueden encontrar algunos ejemplos de como se determina el índice de una curva a través de una integral de línea. En el capítulo 10 de Rudin [26] se trata al índice como una 1-forma diferencial y se ve que es una forma cerrada pero no exacta, asimismo se puede mostrar que es el mismo índice que se conoce de variable compleja (ver Ahlfors [1]), con lo que se hace más evidente que el índice puede ser tratado como un *cuenta vueltas*. El teorema 3.5 es particularmente importante por que establece una relación entre campos vectoriales a través del índice, en los ejemplos de la siguiente sección se observan los alcances de este resultado.

Sección 3.2: El teorema 3.8 asegura que si α es una curva cerrada que no contiene singularidades en su interior entonces su índice es cero, este resultado es un caso interesante por lo siguiente: la demostración que aparece en el texto se incluyo porque es aquella que relaciona el concepto de índice con una propiedad cualitativa de las ecuaciones diferenciales, hay sin embargo otras demostraciones de este resultado, una de ellas aparece en Sotomayor [29] y otra en Bendixson [5], la primera de ellas utiliza fuertemente el Lema de Zorn y es por ello que no se incluyo en esta tesis, la prueba de Bendixson es más sencilla pues utiliza únicamente el concepto de ínfimo de un conjunto de números reales, ésta es al parecer la más sencilla de las tres demostraciones. La observación 3.9 (la esfera no se puede peinar) es consecuencia del teorema 3.8 y es un resultado clásico de la topología diferencial que hace evidente la utilidad del concepto de índice. En el caso de campos vectoriales lineales, se puede ver que el índice de una singularidad aislada sólo puede ser $+1$ o -1 , según si el determinante del campo vectorial en la singularidad es positivo o negativo, este resultado puede ser llevado un poco más lejos como se hace en el ejemplo 3.2. En el caso de un campo vectorial no lineal un resultado parecido a éste continua siendo válido, sólo que en este caso hay que aumentar la hipótesis de que el determinante de la matriz Jacobiana sea distinto de cero en las singularidades, comúnmente a una singularidad donde la matriz Jacobiana se anula se le llama punto singular degenerado

y este ejemplo nos hace ver que es en el caso de singularidades degeneradas en donde es más interesante calcular el índice. Para una comprensión cabal de este ejemplo hay que hacer uso del teorema de Hartman, (ver Hartman[13], Perko [25], Sotomayor [29]) así como del concepto, que no se trata en este texto, de hiperbolicidad y del concepto de equivalencia topológica. Los ejemplos 3.4 y 3.5 (en donde se calculan directamente a través de una integral los índices de los campos F^1 y F^2) pueden ser generalizados a todos los campos cuyas componentes son las partes real e imaginaria de las funciones complejas s^k y \bar{s}^k , estos campos tienen la curiosa propiedad de que las curvas de nivel de alguna de las componentes de F^k son una reparametrización de las curvas integrales de la ecuación $t = F^{k-1}$ ($k > 1$), más aún estos campos pueden ser utilizados para construir campos vectoriales con índices arbitrarios, una pregunta que resulta natural después de estos ejemplos es la siguiente ¿es posible hallar una relación entre el índice de un campo vectorial en una singularidad y alguna cantidad relacionada con el campo, como en el caso de los ejemplos 3.4 y 3.5 el grado de las componentes del campo?.

Es importante señalar que el concepto de índice también se generaliza a variedades (ver J. Milnor [21] y Gullemin y Pollack [30].) y por lo tanto la pregunta anteriormente planteada sigue en pie en el caso de variedades.

Sección 3.3: Uno de los objetivos de esta parte es dar una clasificación sencilla de las singularidades, basándose en el retrato fase del campo vectorial cerca de éstas, una primera clasificación se obtiene como consecuencia de TPB, según ésta hay dos tipos de singularidades: los puntos de rotación, aquellos en los que toda vecindad contiene puntos de rotación, y los atractores. En el ejemplo 3.7 se exhibe un punto de rotación que no es centro, en los ejemplos 3.8 y 3.9 se aprecian los tipos de singularidades que tienen los campos lineales, centro, nodo, foco y silla; estos ejemplos son sencillos y pueden ser vistos en cualquier libro de ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular en Hirsch [15] y Perko [25]. De donde se obtienen las siguientes consecuencias: el índice de un foco o de un centro es 1 y el índice de una silla es -1 . (ver ejemplo 3.2).

Sección 3.4: En esta sección el objetivo es desarrollar una teoría que permita describir como es el retrato fase de una ecuación diferencial cerca de una singularidad. Esta teoría permitirá hallar una forma puramente geométrica para calcular el índice de cualquier singularidad (a estas alturas las que tienen un interés particular son aquellas en donde el determinante de la matriz Jacobiana se anula, es decir, las singularidades degeneradas). La proposición 3.12 asegura que en una vecindad convenientemente escogida de una singularidad, que no es punto de rotación,

hay al menos una solución nula, (esto quiere decir una solución que se acerca a la singularidad cuando el tiempo crece o decrece infinitamente) en [5] Bendixson muestra que el número de tales soluciones es mayor o igual a dos y que en caso de que haya solamente una cantidad finita de ellas hay tanto soluciones nulas positivas como soluciones nulas negativas, en algunos textos a un tipo especial de estas soluciones se las llama separatrices (cuando éstas se acercan en una dirección fija). Un caso interesante que también trata Bendixson es cuando en la vecindad un punto singular hay solamente dos soluciones nulas, una positiva y otra negativa, lo interesante de este caso es que tal singularidad puede ser asimilada con un punto regular. Las soluciones nulas son de gran utilidad ya que es a través de ellas que podemos dividir el interior de una curva de Jordán, que rodea a una singularidad, en un número finito de sectores (lemas 3.15 y 3.18), es decir, regiones en las que el comportamiento cualitativo de las curvas integrales es el mismo (ver nota 3.5 o Andronov [2]). Estos sectores tienen otras características que los hacen importantes, por ejemplo si el interior de una curva de Jordán J puede ser dividido en una cantidad finita de tales regiones, J puede ser sustituida por una curva regular por trozos Γ , formada por arcos solución de la ecuación diferencial original y arcos solución del campo ortogonal (ver lemas 3.20, 3.21 y 3.22), esta curva tiene la particularidad que a lo largo de ella el índice del campo vectorial puede ser calculado fácilmente, este resultado es conocido como la fórmula de Bendixson (ver sección 3.4.1). En particular se puede ver que en Γ , la variación total del ángulo que forman el campo vectorial inicial y el campo vectorial tangente a la curva Γ , es la misma en la parte de Γ que está en un sector parabólico, la diferencia entre ambas es π en la parte de Γ que está en un sector elíptico y $-\pi$ en la parte que cae en un sector hiperbólico. Estas características se pueden resumir en la fórmula de Bendixson, con la cual termina este capítulo.

Por último resta decir que este análisis puede ser llevado más lejos hasta lograr una descripción bastante detallada de los retratos fase de campos vectoriales cerca de puntos singulares, para más información a este respecto ver Arnold [3], Bendixson [5], Hartman [13], Perko [25], estas son también las principales fuentes bibliográficas de este capítulo.

Capítulo 4.

Sección 4.1: En esta sección se maneja un concepto que es importante en el desarrollo posterior de la tesis, el concepto de conjunto minimal y se dan algunos ejemplos de conjuntos minimales, el resultado de mayor importancia en esta sección es el inciso (c) de la proposición 4.3 que dice que si un conjunto es minimal entonces es el total o es denso en ninguna parte,

un comentario que también vale la pena hacer es el siguiente, en el plano los únicos conjuntos minimales, con respecto al flujo de un campo vectorial, son las singularidades y las órbitas cerradas. Estos resultados son bastante conocidos y se pueden ver en Hartman [13], Melo y Palis [19], Schwartz [27] y Sotomayor [29].

Sección 4.2: Uno de los objetivos fundamentales de esta tesis es entender los flujos en el toro, para lo cual en la primera parte de esta sección se estudia a los flujos en curvas cerradas. Estos pueden ser pensados como las iteraciones sucesivas de un homeomorfismo del círculo en el círculo que preserva la orientación de la curva, éstos se levantan en funciones reales de variable real estrictamente crecientes y de período uno (ver Denjoy [7], Hartman [13]). Una cantidad, asociada a un flujo en una curva cerrada, que resulta de importancia fundamental en la teoría subsecuente es el número de rotación. Este número puede ser definido de distintas formas (ver Arnold [3], Denjoy [7], página 296 de Guckenheimer [11] y Hartman [13]), sin embargo todas ellas son equivalentes. Un homeomorfismo del círculo en sí mismo está relacionado con una rotación del círculo y en este contexto el número de rotación puede ser interpretado como la rotación promedio del homeomorfismo, es por ello que los flujos con número de rotación racional tienen siempre órbitas periódicas, éstas resultan ser muy importantes ya que determinan casi por completo la dinámica del flujo (esto quiere decir que si un flujo tiene una órbita periódica de período k entonces todas sus órbitas periódicas son de período k y el ω -límite de cualquier órbita es una órbita periódica (ver Nitecki [23])). En el caso de un flujo con número de rotación irracional la dinámica es más interesante (el conjunto ω -límite de cualquier órbita es toda la curva o es denso en ninguna parte). En el ejemplo 4.1 se construye un flujo con ω -límite denso en ninguna parte, este ejemplo es debido a Denjoy así como el teorema 4.11, que dice si suponemos que un homeomorfismo con número de rotación irracional es de clase C^2 entonces es topológicamente equivalente a una rotación, ambos resultados se pueden ver nuevamente en [3], [7],[11] y también en Schwartz [27]. En [3] se puede ver una lista de resultados que relacionan el número de rotación con la estabilidad de las órbitas.

Según el teorema de Denjoy todo homeomorfismo del círculo, suficientemente suave y con número de rotación irracional, es topológicamente equivalente a una rotación irracional, queda entonces la pregunta ¿cuales de estos homeomorfismos siguen siendo suavemente equivalentes a una rotación irracional?, la respuesta a esta pregunta se puede ver en [3] y tiene que ver con la forma en que el irracional puede ser aproximado por racionales.

En 1976 M. Herman [14] demostró que la medida del conjunto de difeomorfismos de clase

C^k ($k \geq 3$), con número de rotación irracional que no son conjugados a una rotación irracional, es cero.

Una vez que se conocen las propiedades de los flujos sobre curvas cerradas se puede entender como son las curvas integrales de un flujo en el toro, esto se logra gracias a la propiedad que tiene el plano de ser un espacio cubriente (ver Croom [6], Greenberg [10] y apéndice de esta tesis) del toro, de donde se obtienen condiciones bajo las cuales un campo vectorial en el plano induce un flujo en el toro. (ver definición 4.13). El teorema 4.14 (ver Siegel [28]) asegura que para todo flujo en el toro, sin singularidades, se puede encontrar una curva no homotópica a cero tal que toda órbita la intersecciona y es transversal al flujo, este teorema es de gran ayuda ya que permite, como se había anunciado, asimilar un flujo sin singularidades en el toro con un flujo en el círculo, a tal flujo le podemos asociar entonces un número de rotación y así obtener una descripción detallada de la dinámica generada por el flujo. Esto quiere decir que podemos obtener información de los conjuntos ω -límite y α -límite de las curvas integrales del campo con tan sólo conocer el número de rotación de la función de Poincaré asociada al flujo. El procedimiento inverso es también posible: si tenemos un flujo en el círculo, éste puede ser definido en todo el toro mediante un proceso que se conoce como la suspensión del flujo y obtener un flujo en el toro con una dinámica conocida. La siguiente propiedad de las curvas en el toro, lema 4.14, es también de gran importancia: si sus levantamientos a C no se interseccionan entonces tienen asociado el mismo número de rotación.

Sección 4.3: Esta sección es de crucial importancia y está basada principalmente en el trabajo de N. Markley [18] en donde se establece que en la botella de Klein, todo punto recurrente es periódico. Este es un resultado más fuerte que el demostrado por Kneser en 1924: todo flujo continuo en la botella de Klein, sin singularidades, tiene una órbita periódica. Así como el plano es un espacio cubriente del toro (gracias a que se puede ver como un espacio cociente del plano complejo C , modulo la relación de equivalencia definida por el grupo de transformaciones T), éste es a su vez un espacio cubriente de dos hojas de la botella de Klein, (esto se logra agregando la transformación $Kz = \bar{z} + 1/2$ al grupo de transformaciones T que definen la relación de equivalencia que se utiliza para hacer ver que el plano complejo es un espacio cubriente del toro), lo cual quiere decir que hay un homeomorfismo local h tal que la imagen inversa de un punto en el toro son dos puntos en la botella. La demostración dada por Markley sigue las siguientes ideas. En el toro toda órbita recurrente y no periódica tiene número de rotación irracional (teorema 4.20) y si dos órbitas son recurrentes y no periódicas entonces tienen el mismo

número de rotación (corolario 4.21). La imagen inversa de una órbita positivamente recurrente y no periódica en la botella de Klein son dos órbitas, en el toro, no periódicas y positivamente recurrentes, que de donde se obtiene que en la botella es periódica (teorema 4.22). Finalmente se prueba el teorema de Kneser del que ya se habló antes.

Sección 4.4: En esta sección tratamos básicamente con dos resultados; el primero (teorema 4.28) es conocido como el teorema de Poincaré (ver Croom [6], y para una forma más sencilla Do Carmo [8]) y tiene el siguiente corolario: las 1-álicas 2-variedades compactas, en las que se puede definir un campo vectorial sin singularidades con las que tienen género uno, esto quiere decir a la luz de la sección anterior que, un campo sin puntos singulares sólo puede ser definido en una 2-variedad homeomorfa al toro; el segundo es el teorema de Schwartz (1963), éste caracteriza los conjuntos minimales de un flujo de clase C^2 en una 2-variedad compacta, dentro de los cuales hay las siguientes posibilidades, órbitas periódicas, puntos singulares o la variedad completa (que en tal caso tendría que ser homeomorfa al toro). La demostración de este importante resultado se puede ver en Schwartz [27] y la prueba está basada en el teorema de Denjoy (teorema 4.11), de la siguiente forma. Si existiese un conjunto minimal en la variedad distinto de estos tres casos entonces es posible construir una función de Poincaré, que es de clase C^2 , con derivada positiva y que tiene como conjunto ω -límite un conjunto denso en alguna parte, lo cual constituye una contradicción con el teorema 4.11. Schwartz, sin embargo, demuestra directamente que una función con tales características no puede existir.

La hipótesis $\Phi \in C^2$ del teorema 4.30 es suficiente, ya que con ayuda del ejemplo 4.1. podemos construir un flujo sobre el toro con un conjunto minimal distinto de los casos anteriores. Con el teorema de Schwartz se alcanza la versión (publicada) más general de un teorema del tipo Poincaré-Bendixon. En el año 1954 F. Haas en [12] intentó demostrar un teorema equivalente al teorema 4.30 pero la prueba que dio era errónea (ver Peixoto [24]). La idea errónea era, según Peixoto, afirmar que un homeomorfismo del círculo en el círculo definido solamente alrededor de ciertos puntos puede ser extendido a todo el círculo. Peixoto también construye una familia de flujos densos en cualquier 2-variedad compacta.

La mayor parte de los resultados aquí expuestos forman parte de la teoría de Poincaré-Bendixon clásica, la idea es reunir todos éstos en un solo trabajo que muestre el camino que han seguido las ideas inicialmente enunciadas por Poincaré en el plano y de como éstas pueden ser llevadas a superficies compactas sin tener que andar saltando entre la bibliografía original, sin embargo todos los resultados pueden ser consultados directamente en las referencias que se

indican antes de cada resultado.

Esta tesis cuenta con un apéndice con algunos de los resultados que se usan a lo largo de la tesis y que no fueron probados en ese momento, esto con la idea de tener un trabajo autocontenido y de fácil lectura, estos resultados se sacaron de distintos libros y puedan ser consultados directamente en ellos.

Eduardo Mora Donato.

Ciudad Universitaria.

México D.F.

Enero de 1995.

Indice

1	TEORÍA CUALITATIVA.	35
1.1	Elementos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.	5
1.2	Campos vectoriales y flujos.	6
1.3	El teorema de Poincaré-Bendixson.	23
1.3.1	Conjuntos α -límite y ω -límite de órbitas.	23
1.3.2	El teorema de Poincaré-Bendixson.	28
2	CAMPOS VECTORIALES EN VARIETADES DIFERENCIABLES.	35
2.1	Cálculo en variedades diferenciables.	35
2.2	Campos vectoriales en variedades.	41
2.2.1	Ejemplos de campos y flujos en variedades.	42
2.3	El teorema de Poincaré-Bendixson en S^2 .	45
3	TEORÍA DE POINCARÉ-BENDIXSON.	48
3.1	Teorema de las tangentes rotantes.	48
3.2	Índices y singularidades.	52
3.2.1	Ejemplos.	55
3.3	Clasificación de singularidades.	58
3.3.1	Puntos de rotación.	58
3.3.2	Atractores.	60
3.4	Sectores.	64
3.4.1	La fórmula de Bendixson.	71
4	TEORÍA DE POINCARÉ-BENDIXSON EN 2-VARIETADES.	77
4.1	Conjuntos invariantes.	78

4.1.1	Ejemplos.	78
4.2	Flujos en el toro.	80
4.2.1	Flujos en curvas cerradas.	80
4.2.2	Flujos en el toro.	88
4.3	De toros y botellas.	93
4.4	Generalización del teorema de Poincaré-Bendixson.	97
4.4.1	La fórmula de Euler-Poincaré.	98
4.4.2	El teorema de Schwartz.	100
5	Apéndice.	107
5.1	Aproximación de números irracionales por racionales.	107
5.2	Cambios de coordenadas.	108
5.3	La transformación de Poincaré.	110
5.4	El teorema de Peano.	115
5.5	Espacios cubrientes.	117

Lista de Figuras

1-1	7
1-2	22
1-3	22
1-4	23
1-5 ejemplo de un flujo con conjuntos límite vacíos	24
1-6	26
1-7	26
1-8	28
1-9	28
1-10	30
1-11	31
1-12	32
1-13	32
1-14	33
1-15	34
1-16	34
2-1	38
2-2	39
2-3	39
2-4	43
2-5	44
2-6	45
2-7	47

3-1	50
3-2	50
3-3	52
3-4	54
3-5	55
3-6	58
3-7	63
3-8	63
3-9	66
3-10	66
3-11	70
3-12	71
3-13	71
3-14	73
3-15	74
3-16	75
3-17	76
4-1	89
4-2	91
4-3	94
5-1	109

Capítulo 1

TEORÍA CUALITATIVA.

1.1 Elementos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

Iniciaremos el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\dot{z}_1 = X_1(z_1, \dots, z_n)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_n = X_n(z_1, \dots, z_n)$$

llamados *autónomos* (es decir independientes del tiempo). Donde X_i es una función de R^n en R . Para estos sistemas algunas veces tendremos soluciones explícitas, pero la mayor parte del tiempo trabajaremos solamente con soluciones aproximadas. Estas últimas las obtendremos a través del estudio de las funciones X_i , que nos proporcionarán lo que llamaremos el *retrato fase*; trataremos de rescatar las propiedades cualitativas de las soluciones de estos sistemas. Una propiedad que estudiaremos con detenimiento será el comportamiento de las soluciones, $\phi(t)$ con $t \in R$, en el caso particular en que $t \rightarrow \pm\infty$. Los puntos z en los que todas las funciones X_i se anulan, tendrán un especial interés para nosotros y haremos una clasificación de estos puntos cuando $n = 2$. Otros objetos importantes en nuestro estudio serán las *órbitas periódicas*, es decir soluciones que regresan al punto de partida y los *conjuntos límites*, a los que podemos definir de una manera intuitiva como los conjuntos donde las *órbitas nacen y mueren*.

El cuerpo fundamental de este capítulo lo formarán resultados que en su mayoría son debidos a Poincaré: el teorema más importante es el de Poincaré-Bendixon. De este teorema haremos,

más tarde, un estudio de su generalización debida a Schwartz [27] y estudiaremos también el caso particular de ecuaciones de este tipo en una variedad no orientable como la botella de Klein.[18].

En este capítulo esbozaremos algunos de los fundamentos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, los resultados de la siguiente sección pueden ser consultados principalmente en [29], sin embargo en algunos de ellos aparecen citas alternativas.

1.2 Campos vectoriales y flujos.

Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto, un campo vectorial X de clase C^k , $1 \leq k \leq \infty$ es una función $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^k . A este campo le asociaremos la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= X(z) \\ z(0) &= z_0\end{aligned}\tag{1.1}$$

diremos que $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ es una solución de 1.1 si:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(t)}{dt} &= X(\varphi(t)) \\ \varphi(0) &= z_0\end{aligned}\tag{1.2}$$

a φ se le conoce también curva integral de X o de la ecuación diferencial 1.1. Una solución $\varphi : I \rightarrow \Delta$ es una solución máxima de 1.1, si dada otra solución $\psi : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ y $\psi|_I = \varphi$, entonces $\psi = \varphi$, en este caso I recibe el nombre de intervalo máximo.

Un punto $s \in \Delta$ tal que $X(s) = 0$ se llama punto singular de X y si $s \in \Delta$ no es punto singular entonces se llama punto regular de X . En un punto singular la curva $\varphi(t) = s$ es solución de 1.1 y además $I = \mathbb{R}$ ya que :

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(s) ; \forall t \in \mathbb{R}$$

A la curva integral de X tal que $s(0) = \zeta$ la denotaremos $\varphi(\tau, \zeta)$. Una interpretación simple para el concepto de solución es la siguiente: supongamos que en una cierta región del plano, tenemos definida una función que a cada punto de tal región le asocia una flecha, el valor del campo vectorial en ese punto (ver figura 1.1). Sea φ una curva parametrizada en \mathbb{R}^2 , diremos que φ es una curva integral del campo vectorial si el valor de $\varphi'(t)$ coincide con la flecha en

$\varphi(t)$. Una ecuación como 1.1, que no depende del tiempo, se llama autónoma.

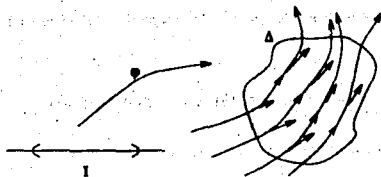


Figura 1-1:

Enunciaremos a continuación un par de lemas que van a ser útiles para la demostración de un importante teorema:

Lema 1.1 : Sea $\{C_n\}$ una sucesión de números reales no negativos, tales que $\{C_n\} \rightarrow 0$ y sea $0 < \lambda < 1$. Si

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} C_i$$

entonces $\sigma_n \rightarrow 0$.

Demostración. Sea $M_k = \sup \{C_i \mid i \geq k\}$ tenemos que $M_k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$, ya que $C_i \rightarrow 0$. Nos fijamos ahora en el número $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces si $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} C_i = \sum_{i=1}^k \lambda^{n-i} C_i + \sum_{i=k+1}^n \lambda^{n-i} C_i \\ &\leq M_0 \sum_{i=1}^k \lambda^{n-i} + M_k \sum_{i=k+1}^n \lambda^{n-i} \\ &\leq M_0 \left(\frac{1-\lambda^{n-k}}{1-\lambda} \right) + M_k \left(\frac{1-\lambda^{n-k}}{1-\lambda} \right). \end{aligned}$$

y es claro que cuando $n \rightarrow \infty$ ambos términos tienden a cero. \square

Recordemos que F es una λ -contracción si

$$d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

con $0 < \lambda < 1$.

Lema 1.3 : Sea F_n una sucesión de λ -contracciones en un espacio métrico (Y, d) . Si para toda $y \in Y$ la sucesión $F_n(y)$ converge a $F_\omega(y)$. Entonces F_ω es también una λ -contracción, denotaremos por y_ω a su único punto fijo, si y_0 es un punto cualquiera en Y tendremos que la sucesión definida por :

$$y_1 = F_1(y_0), y_2 = F_2(y_1), \dots, y_n = F_n(y_{n-1})$$

converge a y_ω si $n \rightarrow \infty$. A un punto fijo como y_ω se le llama atractor.

Demostración: Observemos que la unicidad de y_ω es también inmediata ya que si y' es otro punto fijo distinto, entonces:

$$d(y_\omega, y') = d(F_\omega(y_\omega), F_\omega(y')) \leq \lambda d(y_\omega, y') < d(y_\omega, y')$$

Demostrar la convergencia es una tarea un poco más laboriosa. Como sabemos:

$$y_n = (F_n F_{n-1} \dots F_1)(y_0)$$

y mediante una adecuada aplicación de la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$\begin{aligned} d(y_n, y_\omega) &\leq d(y_n, F_n \dots F_1(y_\omega)) + d(F_n \dots F_1(y_\omega), y_\omega) \\ &= d(F_n \dots F_1(y_0), F_n \dots F_1(y_\omega)) + d(F_n \dots F_1(y_\omega), y_\omega) \\ &\leq \lambda d(F_{n-1} \dots F_1(y_0), F_{n-1} \dots F_1(y_\omega)) + d(F_n \dots F_1(y_\omega), F_n(y_\omega)) \\ &\quad + d(F_n(y_\omega), y_\omega) \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_\omega) + d(F_n \dots F_1(y_\omega), F_n(y_\omega)) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_\omega) + \lambda d(F_{n-1} \dots F_1(y_\omega), y_\omega) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_\omega) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) + \lambda d(F_{n-1}(y_\omega), y_\omega) \\ &\quad + \lambda^2 d(F_{n-2}(y_\omega), y_\omega) + \dots + \lambda^{n-1} d(F_1(y_\omega), y_\omega) \end{aligned}$$

por último obtenemos la desigualdad:

$$d(y_n, y_\omega) \leq \lambda^n d(y_0, y_\omega) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d(F_{n-i}(y_\omega), y_\omega)$$

y aplicando el Lema anterior podemos hacer la suma tan pequeña como queramos; por otra

parte es claro que el otro término tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Y por consiguiente

$$d(y_n, y_\omega) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

□

Estamos ahora en condiciones de enunciar y probar una serie de resultados que serán la base de nuestro primer análisis:

TEOREMA 1.3 (de contracción de fibras) : Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos completos y $\hat{F} : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ una función de la forma:

$$\hat{F}(x_1, x_2) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2))$$

supongamos que:

- $F_1 : X_1 \rightarrow X_1$ tiene un punto fijo atractor p_1 .
- La función $x \rightarrow F_2(x, x_2)$ es continua en X_1 , para todo $x_2 \in X_2$.
- para todo $x_1 \in X_1$, la función $F_{2, x_1} : X_2 \rightarrow X_2$ definida de la siguiente forma $F_{2, x_1}(x_2) = F_2(x_1, x_2)$ es una λ -contracción.

Entonces si p_2 denota al único punto fijo de F_{2, p_1} , el punto $\hat{p} = (p_1, p_2)$ es un punto fijo atractor de \hat{F} .

Demostración: Sea $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ y $x_{1n} = F_1^n(x_1^0)$ tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \hat{F}^n(x^0) &= (x_{1n}, F_2^n(x^0)) = (x_{1n}, F_{2, x_1^0}^n(x_2^0)) \\ &= (x_{1n}, (F_{2, x_{1n-1}} \cdots F_{2, x_1^0})(x_2^0)) \end{aligned}$$

para $x_1 \in X_1$ y como para toda $x \in X_1$; F_2 es una λ -contracción en X_2 , si hacemos $F_n = F_{2, x_{1n-1}}$ resulta por el lema 1.2. que cuando $n \rightarrow \infty$, $\hat{F}^n(x^0) = (p_1, p_2)$. □

Con la ayuda de este lema probaremos el siguiente:

TEOREMA 1.4 (de diferenciabilidad local) : Sea X una función de clase C^1 definida en un abierto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, para toda $x_0 \in \Delta$ existen números positivos α, β y una única función φ de clase C^1 en:

$$J_\alpha \times B_\beta = \{ (t, z) \mid |t| < \alpha, |z - z_0| < \beta \}$$

con valores en Δ tal que:

$$i) D_1\varphi(t, z) = \frac{\partial X}{\partial z}(t, z) = X(\varphi(t, z)); \varphi(0, z) = z$$

$$ii) D_1 D_2 \varphi(t, z) = DX(\varphi(t, z)) D_2 \varphi(t, z); \forall (t, z) \in I_\alpha \times B_\beta.$$

Demostración: Sea $b > 0$ tal que $B_b \subset \{z \mid |z - z_0| < b\} \subseteq \Delta$, sean $m = \sup\{f(z)\}; \ell = \sup\|DX(\varphi(t, z))\|; z \in B_b$. tomemos además α y β tales que cumplan las condiciones $\alpha m + \beta < 1$ y $\lambda = \alpha \ell < 1$.

Sea \mathcal{C} el espacio de las funciones continuas de $I_\alpha \times B_\beta$ en B_b , dotado de la métrica:

$$d(\varphi, \psi) = \sup |\varphi(t, z) - \psi(t, z)|, \forall (t, z) \in I_\alpha \times B_\beta$$

denotemos por \mathcal{L} al espacio de funciones lineales de R^2 en R^2 con la norma $\|L\| = \sup\{\|Ls\| \mid \|s\| = 1\}$.

Sea \mathcal{C}_0 el espacio de funciones acotadas y continuas de $I_\alpha \times B_\beta$ en \mathcal{L} dotado de la métrica:

$$d(\varphi, \psi) = \sup \|\dot{\varphi}(t, z) - \dot{\psi}(t, z)\|, \forall (t, z) \in I_\alpha \times B_\beta$$

Definamos $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ como:

$$F(\varphi)(t, z) = z + \int_0^t X(\varphi(s, z)) ds \quad (1.3)$$

y definimos también $\hat{F}: \mathcal{C} \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ de la siguiente forma:

$$\hat{F}(\varphi, \dot{\varphi}) = I + \int_0^t DX(\varphi(s, z)) \dot{\varphi}(s, z) ds$$

donde I denota la identidad de R^2 en R^2 , la función $\hat{F} = (F, \hat{F})$ tiene las siguientes propiedades:

a) F es una λ -contracción.

$$\begin{aligned} d(F(\varphi), F(\psi)) &= \sup \left| \int_0^t X(\varphi(s, z)) - X(\psi(s, z)) ds \right| \\ &= \sup \left| \int_0^t DX(\varphi(s, z)) (\varphi(s, z) - \psi(s, z)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t \ell ds \sup |\varphi(s, z) - \psi(s, z)| \leq \lambda d(\varphi, \psi) \end{aligned}$$

donde φ es una función que está definida en el segmento que une a φ con ψ .

De los lemas anteriores se deduce que F tiene un único punto fijo $\varphi \in \mathcal{C}$.

b) $\hat{F}(\varphi, \psi)$ es una función continua en C para toda $\varphi \in C_\alpha$, ya que B_δ es compacto y como DX es continua, entonces es uniformemente continua en B_δ y por consiguiente:

$$d(F(\varphi), F(\psi)) = \sup \left\| \int_0^t [DX(\varphi(s, z)) - DX(\psi(s, z))] \varphi(s, z) ds \right\| \leq \epsilon M \alpha$$

siempre que $d(\varphi, \psi) \leq \delta$ y donde $M = \sup \|\dot{\varphi}\|$.

c) $\hat{F}_\nu(\dot{\varphi}) = \hat{F}(\varphi, \dot{\varphi})$ es también una λ -contracción debido a que:

$$\begin{aligned} d(\hat{F}_\nu(\dot{\varphi}), \hat{F}_\nu(\dot{\psi})) &= \sup \left\{ \left\| \hat{F}_\nu(\dot{\varphi}) - \hat{F}_\nu(\dot{\psi}) \right\| \right\} \\ &= \sup \left\| \int_0^t [DX(\varphi) \dot{\varphi} - DX(\psi) \dot{\psi}] ds \right\| \\ &= \sup \left\| \int_0^t DX(\varphi) (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) ds \right\| \\ &\leq \ell \alpha \sup \|\dot{\varphi} - \dot{\psi}\| \leq \ell \sup \left\| \int_0^t (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) ds \right\| \\ &= \ell \alpha d(\dot{\varphi}, \dot{\psi}) \end{aligned}$$

es decir, la aplicación $\hat{F} = (F, \hat{F})$ satisface las hipótesis del teorema de contracción de fibras. Por lo tanto \hat{F} tiene un único punto fijo $\hat{\varphi} = (\varphi, \dot{\varphi})$, de donde obtenemos que:

$$\hat{\varphi} = (\varphi, \dot{\varphi}) = \hat{F}(\hat{\varphi}) = (F(\varphi), \hat{F}(\varphi, \dot{\varphi}))$$

lo cual quiere decir, según la ecuación 1.3 que:

$$\varphi = F(\varphi) = x + \int_0^t X(\varphi(s, z)) ds$$

y por último derivando φ con respecto de t llegamos al resultado deseado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, z) &= X(\varphi(t, z)) \\ \varphi(0, z) &= x \end{aligned}$$

y así la primera parte del teorema ha sido probada. Para demostrar la otra parte construiremos la sucesión $\hat{F}^n(\hat{\varphi}_0(x))$ como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{F}^n(\hat{\varphi}_0(x)) &= (\varphi_n(t, z), \dot{\varphi}_n(t, z)) \\ \hat{\varphi}_0(x) &= (x, I) \end{aligned}$$

ahora bien como $\hat{F}^n(\hat{\varphi}_0(x)) = \hat{\varphi}_n(x) = (\varphi_n, \dot{\varphi}_n)$, es claro que $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $\dot{\varphi}_n \rightarrow \dot{\varphi}$ uniformemente

en $I_a \times B_\beta$. Si derivamos con respecto a x la función φ_n , como:

$$\varphi_1 = x + \int_0^t X(\varphi_0(s, x)) ds$$

entonces:

$$D_2 \varphi_1 = I + \int_0^t DX(\varphi_0(s, x)) \dot{\varphi}_0(s, x) ds = \dot{\varphi}_1$$

ya que $\dot{\varphi}_0(s, x) = I = \dot{\varphi}_0(s, x)$, si suponemos la fórmula:

$$D_2 \varphi_{k-1} = I + \int_0^t DX(\varphi_{k-2}(s, x)) D_2 \varphi_{k-2}(s, x) ds = \dot{\varphi}_{k-1}$$

y calculamos la derivada de φ_k tenemos que:

$$D_2 \varphi_k = I + \int_0^t DX(\varphi_{k-1}(s, x)) D_2 \varphi_{k-1}(s, x) ds$$

y aplicando ahora la fórmula anterior nos queda que:

$$D_2 \varphi_k = I + \int_0^t DX(\varphi_{k-1}(s, x)) \dot{\varphi}_{k-1} ds$$

por lo tanto:

$$D_2 \varphi_n = \dot{\varphi}_n, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$D_2 \varphi = D_2 \lim \varphi_n = \lim D_2 \varphi_n = \lim \dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}$$

es decir obtuvimos:

$$D_2 \varphi = I + \int_0^t DX(\varphi(s, x)) D_2 \varphi(s, x) ds$$

derivando con respecto a t el resultado es:

$$D_1 D_2 \varphi = DX(\varphi(s, x)) D_2 \varphi(s, x)$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

El teorema anterior tiene un carácter estrictamente local. El teorema 1.4 nos asegura la existencia de $\alpha = \alpha(\varphi, x_0)$ y $\beta = \beta(\varphi, x_0)$. Supongamos que tenemos un punto $x_0 \in \Delta$, por el teorema 1.4. existen α y β tales que en $I_\alpha \times B_\beta$ la ecuación 1.1 con $x(0) = x_0$ tiene una

única solución $\varphi : I_{\alpha}(\varphi) = I_{\varphi} \rightarrow \Delta$ que cumple con la condición inicial, pero, pensemos en el siguiente caso; sea $t \in I_{\alpha}$ tal que $\varphi(t, s_0) = s_1$, nuevamente por el teorema 1.4. la ecuación (1a) $\dot{z} = X(z)$ con condición inicial $z(0) = s_1$ tiene una única solución $\tilde{\varphi} : I_{\tilde{\varphi}} \rightarrow \Delta$ tal que $\tilde{\varphi}(0) = s_1$, y la pregunta es ahora, ¿cómo se relacionan las funciones φ con $\tilde{\varphi}$ y los intervalos I_{φ} con $I_{\tilde{\varphi}}$? Obviamente, para nosotros la respuesta más satisfactoria sería que $\varphi = \tilde{\varphi}$ en $I_{\varphi} \cap I_{\tilde{\varphi}}$; a través del siguiente razonamiento probaremos que esto es un hecho.

Para simplificar llamaremos (a, b) a la intersección $I_{\varphi} \cap I_{\tilde{\varphi}}$ y sea $A = \{t \in (a, b) \mid \varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)\}$ claramente A es cerrado por ser la imagen inversa del 0 bajo la función $h(t) = \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)$ que es continua por el teorema 1.4. Si ahora fijamos nuestra atención en algún $t_1 \in A$, nuevamente la ecuación (1b) $\dot{z} = X(z)$ con $z(0) = y = \varphi(t_1, s_0)$ tiene una única solución ψ en algún intervalo I_{ψ} , notemos que para s positiva suficientemente pequeña la función $\tilde{\psi}(s) = \varphi(t_1 + s)$ es tal que cumple con la relación:

$$\tilde{\psi}'(s) = \varphi'(t_1 + s) = X(\varphi(t_1 + s)) = X(\tilde{\psi}(s)) \quad (1.4)$$

es decir es una solución de la ecuación (1b) ya que también $\tilde{\psi}(0) = \varphi(t_1) = y$, de donde obtenemos por el teorema 1.4. que $\varphi = \psi$ en $(a, b) \cap I_{\psi}$, podemos repetir el mismo argumento para $\tilde{\varphi}$ y ψ y concluir que $\tilde{\varphi} = \psi$, por consiguiente $\tilde{\varphi} = \varphi$ en $(a, b) \cap I_{\psi}$ por lo tanto A es abierto en (a, b) y un argumento de conexidad nos conduce a que $A = (a, b)$ y finalmente $\tilde{\varphi} = \varphi$ en $I_{\varphi} \cap I_{\tilde{\varphi}}$.

La relación 1.4 es una ecuación muy importante ya que tiene las siguientes consecuencias: si definimos la función $z(s) = \varphi(t + s, s_0)$, esta nueva función así como φ son soluciones de (1a), pero como $t + s \in I_{\alpha}$, tenemos que $s \in I_{\alpha} - t \subseteq I_{\alpha}$, ya que $z(0) = \varphi(t, s_0) = s_1$, por otra parte como $z(-t) = s_0$ y $z(s - t) = \varphi(s, s_0)$ entonces $s \in I_{\alpha} + t \subseteq I_{\alpha}$ por lo tanto $I_{z_1} \subseteq I_{\alpha} - t$ y por último:

$$I_z = I_{\alpha} - t = \{r - t \mid r \in I_{\alpha}\}$$

Lo anterior muestra el siguiente:

Lema 1.5 : Si X es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Delta \subseteq R^2$, dado $x \in \Delta$ construimos el intervalo máximo I_x como sigue, sea $\varphi : I_{\varphi} \rightarrow \Delta$ la solución dada por el teorema 1.4 a la ecuación diferencial (1) $\dot{z} = X(z)$ con condición inicial $z(0) = x$, donde x recorre todos los puntos en Δ , sea pues $I_x = \cup I_{\varphi}$, entonces:

a) $\varphi_x : I_x \rightarrow \Delta$ definida como $\varphi_x(t) = \psi(t)$ para $t \in I_x$ es la única solución máxima de X tal que $x(0) = s$.

b) Si $t \in I_x$ y $y = \varphi(t, z)$ entonces $I_y = I_{z_0} - t = \{\tau - t \mid \tau \in I_{z_0}\}$ y para todo $s \in I_y$ se cumple la igualdad $\varphi(s, y) = \varphi(t + s, z)$. \square

Antes de pasar a nuestro último teorema de existencia, que será el más general de todos establcemos la validez de la siguiente proposición:

Proposición 1.6 : Sea X un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Delta \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces el conjunto:

$$D = \{(t, z) \mid t \in I_x \text{ y } z \in \Delta\}$$

es abierto en \mathbb{R}^3 , además $\varphi(t, z)$ es un función de clase C^1 en D y

$$D_1 D_2 \varphi(t, z) = DX(\varphi(t, z)) D_2 \varphi(t, z) \quad (1.5)$$

para todo $(t, z) \in D$ con I_x el intervalo máximo donde φ es solución de la ecuación 1.1.

Demostración: Sea C el conjunto de las $t \in I_x$ tales que existen vecindades A de t y B de s_0 con la propiedad de que $A \times B \subset D$; $\varphi(t, z)$ es de clase C^1 y satisface 1.5. Sean también $\alpha = \sup I_x$, $\beta = \inf I_x$, $s = \sup C$, $r = \inf C$, vamos a probar el par de igualdades siguientes; $\alpha = s$, $\beta = r$. Por el teorema 1.4. C es un conjunto no vacío. Vamos a fijar nuestra atención en el punto $\varphi(s, s_0) = s_1$, sabemos que existen vecindades I de s y B de s_1 tales que $\varphi(t, s_1)$ es de clase C^1 y satisface 1.5 en $I \times B$, también se cumple la siguiente relación.

$$\varphi(t, s_0) = \varphi(t - s, s_1) \quad (1.6)$$

Sea $\epsilon > 0$, por continuidad de φ existen $u < s$ tales que $s - u < \epsilon$ y $u + \epsilon \in I_x$ y \tilde{B} una vecindad de s_0 con la propiedad de que siempre que $y \in \tilde{B}$ se cumple $\varphi(u, y) \in B$, ahora bien sea $y \in \tilde{B}$ entonces $\varphi(t, y) \in \tilde{B}$, es de clase C^1 y satisface 1.5, ésto se puede verificar directamente, ya que por 1.6 para toda $z \in B$ se cumple:

$$\varphi(t, z) = \varphi(t - u, \varphi(u, z))$$

derivando obtenemos:

$$D_2\varphi(t, z) = D_2\varphi(t - u, \varphi(u, z)) D_2\varphi(u, z)$$

y como $t - u < s$ tenemos que $t - u \in C$ por lo tanto:

$$\begin{aligned} D_1 D_2\varphi(t, z) &= [D_1 D_2\varphi(t - u, \varphi(u, z))] D_2\varphi(u, z) \\ &= [DX(\varphi(t - u, \varphi(u, z)))] D_2\varphi(t - u, \varphi(u, z)) D_2\varphi(u, z) \\ &= DX(\varphi(t - u, \varphi(u, z))) D_2\varphi(t - u, \varphi(u, z)) \\ &= DX(\varphi(t, z)) D_2\varphi(t, z) \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $u + \varepsilon \in C$, pero $u + \varepsilon > s$ lo cual es una contradicción y la única forma de evitarlo es que $\alpha = s$, con un tratamiento análogo se puede probar que $\beta = r$ y por lo tanto D es abierto. \square

Ha llegado al fin el momento de presentar el más general de nuestros teoremas de existencia:

TEOREMA 1.7 (de diferenciabilidad global) : Sea X un campo vectorial de clase C^r , $r \geq 1$, Δ un abierto de \mathbb{R}^2 , entonces se cumplen:

- Para cada punto $z \in \Delta$ existe un abierto I_z , donde está definida una única solución $\varphi_z : I_z \rightarrow \Delta$ para la ecuación diferencial $\dot{z} = X(z)$ con $z(0) = z$.
- Si $t \in I_z$ y $y = \varphi(t, z)$ entonces $I_y = I_z - t = \{r - t \mid r \in I_z\}$ y $\varphi(s, y) = \varphi(t + s, z)$ para todo $s \in I_y$.
- El conjunto $D = \{(t, z) \mid t \in I_z \text{ y } z \in \Delta\}$ es abierto en \mathbb{R}^3 y la aplicación $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(t, z) = \varphi_z(t)$ es de clase C^r en \mathbb{R}^3 .

Demostración: La parte (c) del teorema la probaremos utilizando inducción, el caso $n = 1$ queda probado por la proposición anterior, suponemos válido el caso $n = k - 1$, es decir en el caso de un campo vectorial de clase C^{k-1} ; φ es de clase C^{k-1} , supongamos que X en un campo de clase C^k , vamos a probar que φ es de clase C^k , definamos el siguiente campo vectorial:

$$F(z, L) = (X(z), DX(z) \cdot L)$$

donde L es una matriz 2×2 , planteamos ahora la siguiente ecuación diferencial:

$$(s, L)' = F(s, L) = (X(z), DX(z) \cdot L) \quad (1.7)$$

F es un campo de clase C^{k-1} y aplicando la hipótesis de inducción tenemos que:

$$\Phi(t, y, Y) = (\varphi(t, y), D_2\varphi(t, y) \cdot Y)$$

es una solución de clase C^{k-1} de la ecuación 1.7 esto último debido a que $D_2\varphi(t, y) \cdot Y$ es solución de la ecuación:

$$L' = DX(z) \cdot L$$

gracias a la igualdad:

$$D_1 D_2 \varphi(t, y) = DX(\varphi(t, y)) D_2 \varphi(t, y)$$

y como φ es de clase C^{k-1} , $D_2\varphi$ es de clase C^{k-1} en D , además como X es de clase C^k y φ es de clase C^{k-1} , $D_1\varphi = X \cdot \varphi$ es de clase C^{k-1} , por lo tanto φ es de clase C^k con lo cual queda probado el inciso (c) del teorema, los incisos (a) y (b) son consecuencia del lema y proposición anteriores por lo cual no daremos una prueba explícita de tales incisos. \square

Corolario 1.8 : Sea X un campo vectorial C^r en $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, si $z \in \Delta$ y $I_z = (a, b)$ es tal que $b < \infty$ (respectivamente $a > -\infty$) entonces $\varphi_x(t)$ tiende a $\partial\Delta$ cuando $t \rightarrow b$, esto es, para todo compacto $K \subseteq \Delta$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $t \in [b - \varepsilon, b)$ entonces $\varphi_x(t) \notin K$.

Demostración: Supongamos, contrariamente a lo que queremos probar, que si $t_n \rightarrow b$ entonces $\varphi_x(t_n) \subseteq K$ con K compacto por consiguiente hay una subsecuencia convergente a un punto en K , es decir $\varphi_x(t_n) \rightarrow x_0 \in K$, sabemos por el teorema anterior que en el rectángulo, $B_y \times I_\alpha \subseteq D$ donde $B_y = \{|y - x_0| < b\}$ y $I_\alpha = \{|t| < \alpha\}$ hay una solución para la ecuación $\dot{z} = X(z)$ con $z(0) = y \in B_y$ tal que los flujos se relacionan de la forma:

$$\varphi_x(t_n + s) = \varphi_y(s)$$

y como $0 < |s| < \alpha$ tenemos que gracias a $t_n \rightarrow b$ entonces $t_n + s \geq b$, lo cual resulta ser la contradicción que establece el teorema. \square

Antes de continuar se hace necesaria una definición que simplifique el lenguaje que hasta ahora hemos usado:

Definición 1.9 : La aplicación $\varphi : D \rightarrow \Delta$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ se llama flujo generado por el campo vectorial X .

TEOREMA 1.10 : Sea X un campo vectorial de clase C^k , $k \geq 1$, entonces:

a) El flujo φ generado por X es de clase C^k .

b) Si $D = R \times \Delta$ entonces φ define un homomorfismo entre el grupo aditivo de los números reales y el grupo de los difeomorfismos C^r con la operación de composición.

Demostración: a) Es consecuencia directa del teorema 1.7.

b) Es consecuencia de las propiedades del flujo $\varphi(0, x) = x$ y $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$. \square

En la mayoría de los casos D no se puede escribir como $R \times \Delta$ por lo cual casi siempre tenemos que φ es el flujo local de X .

Podemos concluir que si tenemos un campo vectorial X , definido sobre alguna región Δ , de clase C^r , entonces el flujo φ asociado al campo vectorial es una aplicación no solo continua sino una aplicación de clase C^r .

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales utiliza el concepto de retrato fase de una ecuación diferencial, nos disponemos ahora a exponer algunos hechos acerca de tal concepto.

Definición 1.11 : Al conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p) \mid t \in I_p\}$ se le llama órbita de X por p , obsérvese que $q \in \gamma_p$, si y solo si $\gamma_p = \gamma_q$.

El teorema que enunciaremos y probaremos a continuación nos dice como son las órbitas de X , sin embargo antes daremos una definición:

Definición 1.12 : El conjunto Δ dado por la descomposición en órbitas de X se llama retrato fase de X .

Sabemos gracias a los teoremas de existencia que por cualquier punto pasa una órbita y que dos órbitas que se intersectan son iguales por lo que tiene sentido hablar del retrato fase de X . El teorema que a continuación enunciaremos es necesario para tener una idea precisa de lo que el retrato fase es. En la prueba del mismo utilizaremos un resultado de álgebra que no será demostrado ver demostración en [29].

Lema 1.13 : Todo grupo aditivo $G \neq \{0\}$ de R es de la forma τZ con $\tau > 0$ ó es denso en R .

TEOREMA 1.14 : Si φ es un solución máxima de X , definida en I , solo se cumple una de las siguientes alternativas:

- a) φ es inyectiva.
- b) $I = \mathbb{R}$ y φ es constante.
- c) $I = \mathbb{R}$ y φ es periódica, es decir existe $\tau > 0$ tal que $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y además si t_1 y t_2 son tales que $|t_1 - t_2| < \tau$ entonces $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Demostración: Supongamos que φ no es inyectiva, entonces existen t_1 y $t_2 \in I$ tales que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, sea $c = t_2 - t_1$, vamos a definir la siguiente función: $\varphi : [t_2, t_2 + c] \rightarrow \Delta$ como sigue: $\psi(t) = \varphi(t - c)$ es claro que ψ es también una curva integral de X , y además $\psi(t_2) = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ por unicidad de soluciones tenemos que $[t_2, t_2 + c] \subset I$ y como \mathbb{R} puede ser cubierto por intervalos de la forma $[t_2, t_2 + c], [t_2 + c, t_2 + 2c], \dots, [t_2 + (n-1)c, t_2 + nc], \dots$, podemos ver que $I = \mathbb{R}$ y que $\varphi(t) = \varphi(t + c)$ si $t \in [t_2, t_2 + c]$, por lo tanto $\varphi(t) = \varphi(t + c)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, fijémonos en el siguiente conjunto:

$$C = \{c \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) = \varphi(t + c) \forall t \in \mathbb{R}\}$$

C es un conjunto que tiene estructura de grupo aditivo ya que $\varphi(t) = \varphi(t + 0)$, de donde $0 \in C$; si $c, d \in C$ entonces $\varphi(t) = \varphi(t + c) = \varphi(t + c + d)$ por consiguiente $c + d \in C$ y si $c \in C$ tenemos que $-c \in C$ ya que $\varphi(t) = \varphi(t + c - c)$ por último C es cerrado ya que si $\{c_n\}$ es una sucesión en C tal que $\{c_n\} \rightarrow c'$, c' está en C ya que:

$$\varphi(t + c) = \varphi(t + \lim c_n) = \varphi(\lim(t + c_n)) = \lim \varphi(t + c_n) = \varphi(t)$$

de lo anterior obtenemos que $C = \tau\mathbb{Z}$, o que C es denso en \mathbb{R} pero por ser cerrado entonces $C = \mathbb{R}$, y por lo tanto concluimos que en el primer caso φ es periódica y en el segundo φ es constante. \square

Nota 1.1 : La relación $q \sim p$ si y solo si $q \in \gamma_p$ es una relación de equivalencia.

Ahora vamos a dar un par de definiciones que serán útiles cuando comparemos los retratos fase de campos vectoriales. Para más información al respecto ver [3].

Definición 1.15 : Sean X_1 y X_2 dos campos vectoriales definidos en los abiertos Δ_1, Δ_2 respectivamente, diremos que X_1 es topológicamente equivalente a X_2 cuando existe un homeomorfismo $h: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que h lleva órbitas de X_1 en órbitas de X_2 , es decir: si $p \in \Delta_1$ y γ_p es la órbita de X_1 que pasa por p entonces $h(\gamma_p)$ es la órbita de X_2 que pasa por $h(p)$, si además tenemos que h es una función de clase C^r entonces decimos que X_1 es C^r -equivalente a X_2 :

Definición 1.16 : Si $\varphi_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ son los flujos generados por los campos vectoriales X_1 y X_2 respectivamente, vamos a decir que X_1 es topológicamente conjugado a X_2 cuando existe un homeomorfismo $h: D_1 \rightarrow D_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$, cuando h es además un difeomorfismo de clase C^r entonces decimos que X_1 es C^r -conjugado a X_2 .

Lema 1.17 : Sean $X_1: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X_2: \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos de clase C^r y $h: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ un C^r difeomorfismo, entonces h es una C^r -conjugación entre X_1 y X_2 si y solamente si:

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)) \\ \forall p \in D_1$$

Demostración: Supongamos que h es tal que satisface la ecuación de arriba, esto quiere decir que $h(\varphi_1(t, p))$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{z} = X_2(z)$ con $z(0) = h(p)$, ya que si derivamos, obtenemos:

$$Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot D_1\varphi_1(t, p) = Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot X_1(\varphi_1(t, p)) \\ = X_2(h(\varphi_1(t, p)))$$

donde $\varphi_1(t, p)$ es el flujo generado por X_1 y además cumple que $h(\varphi_1(0, p)) = h(p)$. Si φ_2 es el flujo generado por X_2 tenemos que:

$$h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$$

debido a que $\varphi_2(0, h(p)) = h(p)$; esta igualdad es consecuencia del teorema 1.7.

Supongamos ahora que si φ_1 y φ_2 son los flujos generados por X_1 y X_2 respectivamente entonces:

$$h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$$

si derivamos la relación obtendremos que:

$$\begin{aligned} Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot D_1\varphi_1(t, p) &= D_1\varphi_2(t, h(p)) \\ Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot X_1(\varphi_1(t, p)) &= X_2(\varphi_2(t, h(p))) \end{aligned}$$

y para $t = 0$ obtenemos:

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p))$$

con lo cual se concluye la prueba del lema. \square

Estamos a punto de establecer a un teorema que será útil cuando llegue el momento de mostrar el teorema de Poincaré-Bendixson, pero antes daremos una definición necesaria para enunciar dicho teorema:

Definición 1.18 : Sea X un campo vectorial de clase C^r , $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, y $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ abiertos, una aplicación C^r , $f: A \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ se llama sección transversal local de X , cuando para cualquier $a \in A$ $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ y $X(f(a))$ generan a todo \mathbb{R}^n , si $f: A \rightarrow \Sigma$ es un homeomorfismo diremos que Σ es una sección transversal de X .¹

TEOREMA 1.19 (del flujo tubular) [19]. Sea p un punto no singular de X un campo vectorial de clase C^r y $f: A \rightarrow \Sigma$ una sección transversal local de X de clase C^r con $f(0) = p$. Entonces existe una vecindad V de $p \in \Delta$ y un difeomorfismo $h: V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de clase C^r , con $\varepsilon > 0$ y B una bola abierta en \mathbb{R}^{n-1} con centro en el origen $0 = f^{-1}(p)$ tales que:

a) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$.

b) h es una C^r conjugación entre $X|_V$ y el campo $Y: (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, \dots, 0)$.

Demostración : (en la demostración de este teorema utilizaremos el teorema de la función inversa, ver capítulo 2).

Como sabemos $\Sigma = f(A) \subset \Delta$. Tiene sentido definir la siguiente función:

$$F(t, a) = \varphi(t, f(a)) \text{ con } (t, a) \in I_{f(a)} \times A$$

notemos que $F(0, a) = \varphi(0, f(a)) = f(a) \in \Sigma \forall a \in A$. Vamos a probar que F es un difeomorfismo local en $\delta = (0, 0)$ entre $\{(t, a) \mid (t, f(a)) \in \Delta\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \Delta$, para lo cual vamos a

¹A $\Sigma = f(A)$ la dotamos con la topología inducida.

probar que $D_1 F(\bar{0})$ es no singular. Si calculamos:

$$D_1 F(t, a) = D_1 \varphi(t, f(a)) = X(\varphi(t, f(a)))$$

y evaluamos en $(t, a) = (0, 0)$ obtenemos que:

$$D_1 F(0, 0) = X(\varphi(0, f(0))) = X(p) \quad (1.8)$$

por otra parte, la forma en que definimos F implica que:

$$F(t, a) = \varphi(t, f(a)) = \varphi(t, f_1(a), \dots, f_{n-1}(a)) \\ D_j F(0, 0) = D_j \varphi(0, f_1(a), \dots, f_{n-1}(a)) = D_{j-1} f(0) \text{ con } j \geq 2$$

y como f es sección transversal en $0 \in A$ tenemos que $\{D_{j-1} f(0)\}_{j=2}^n$ y $X(p)$ forman una base de R^n entonces $D_1 F(0, 0)$ es no singular, y por el teorema de la función inversa existen vecindades V de p , $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de $0 \in R$ y B de $0 \in R^{n-1}$ tales que $F: (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow V$ es una biyección con inversa $h: V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ continua y C^1 . Notemos que si $x \in \Sigma \cap V$, entonces existe $a \in A$ tal que $x = f(a) = \varphi(0, f(a)) = F(0, a)$, por lo tanto $h(x) = h(F(0, a)) = F^{-1} F(0, a) = (0, a) \in \{0\} \times B$ de donde $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$. y como consecuencia de la fórmula 1.8 tenemos:

$$DF(t, a) \cdot Y = DF(t, a) \cdot (1, 0, \dots, 0) = D_1 F(t, a) = \\ = X(\varphi(t, f(a))) = X(F(t, a))$$

en estas ecuaciones observamos F conjugada a X e Y ($F = h^{-1}$), nótese que para los puntos en $R \times A$ de la forma $(t, f(a))$ con $a \in A$ fijo, F aplica estas líneas en curvas integrales de X en Δ ya que $F(t, f(a)) = \varphi(t, f(a))$. (ver figura 1.2).

Corolario 1.20 : Sea Σ una sección transversal local de X , para todo punto $p \in \Sigma$ existen $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, una vecindad V de p en R^n y una función $\tau: V \rightarrow R$ de clase C^k tales que $\tau(\Sigma \cap V) = 0$ y:

- a) Para todo $q \in V$, la curva integral $\varphi(t, q)$ de $X|_V$ está bien definida y es biyectiva en $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$
- b) $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ es el único punto donde $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ interseca a Σ , en particular

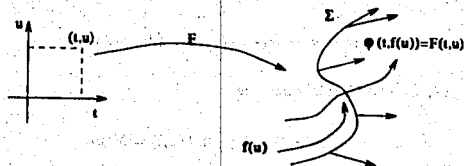


Figura 1-2:

$q \in \Sigma \cap V$ si y solo si $\tau(q) = 0$.

c) $\xi : V \rightarrow \Sigma$ es de clase C^h y $D\xi(q)$ es sobreyectiva para todo $q \in V$, más aún $D\xi(q) \cdot v = 0$ si y solo si $v = \alpha X(q)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

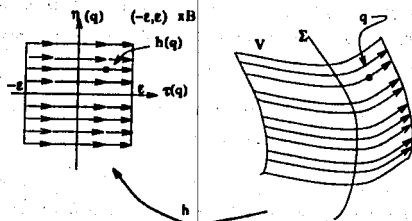


Figura 1-3:

Demostración: Con la h que viene dada por el teorema del flujo tubular, observemos que si $q \in V$ entonces $q = \varphi(t, u)$ con $u \in \Sigma$, pero $\varphi(t, u) = \varphi(t, f(a)) = F(t, a)$ con $a \in A$ y $u = f(a) \in \Sigma$ de donde obtenemos que:

$$h(q) = F^{-1}F(t, a) = (t, a)$$

con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $u \in B \subseteq A$ y como $h: V \subset \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ tenemos que $h = (h_1, \dots, h_n)$ con $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es decir podemos pensar a h como una función de la forma $h = (\alpha, \eta)$ con $\alpha = h_1$ y $\eta = (h_2, \dots, h_n)$ asimismo $\alpha(q) = t$ y $\eta(q) = u$. Definamos $\tilde{h} = (-\alpha, \eta) = (-\alpha, \eta)$, como $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, tenemos que $\tau(\Sigma \cap V) = 0$ y por el teorema 1.7, es claro que $\varphi(t, q)$ está definida en $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$ con lo cual hemos probado (a); el inciso (b) es consecuencia de la propiedad de grupo ya que como $q = \varphi(t, u)$ entonces $u = \varphi(-t, q) = \varphi(\tau(q), q) = \xi(q) \in \Sigma$ y es el único punto por unicidad de soluciones. (c) es consecuencia del teorema de flujo tubular. Ver figura 1.3

En la figura 1.4 se hace ver el carácter local del teorema.

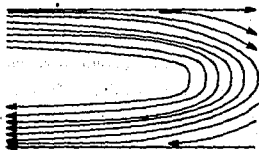


Figura 1-4:

1.3 El teorema de Poincaré-Bendixson.

1.3.1 Conjuntos α -límite y ω -límite de órbitas.

Sea Δ un conjunto abierto en un espacio euclidiano \mathbb{R}^n , y $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k , $k \geq 1$. Tenemos definida la ecuación diferencial:

$$\dot{z} = X(z) \quad (1.9)$$

sabemos por las discusiones anteriores que bajo ciertas hipótesis esta ecuación tiene una única solución $\varphi(t, x_0)$ para cada punto $x_0 \in \Delta$, es decir $\varphi(t, x_0)$ es tal que:

$$\frac{d\varphi}{dt} = X(\varphi(t)) \text{ y } \varphi(0, x_0) = x_0 \in \Delta$$

y tal solución está definida en un intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$.

Definición 1.21 : Por una órbita γ_p de X por p , entenderemos el conjunto, de puntos $q = \varphi(t, p)$ con $t \in I_p$, debemos tener en cuenta que solo nos interesan como conjunto de puntos y no como una curva parametrizada.

Definición 1.22 : Vamos ahora a definir un par de conjuntos ver [15] y [29]:

$$\omega(p) = \{q \in \Delta \mid \exists \{t_n\} \text{ tal que } t_n \rightarrow \infty, \varphi(t_n, p) \rightarrow q \text{ si } n \rightarrow \infty\}$$

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta \mid \exists \{t_n\} \text{ tal que } t_n \rightarrow -\infty, \varphi(t_n, p) \rightarrow q \text{ si } n \rightarrow -\infty\}$$

a los cuales llamaremos conjuntos ω -límite y α -límite de p .

Como podemos notar este par de conjuntos pueden ser vacíos, aunque más adelante veremos bajo que condiciones estos dos conjuntos son no vacíos. Vamos a decir que el conjunto límite de un punto $p \in \Delta$ es $\omega(p) \cup \alpha(p)$, e intuitivamente se puede decir que $\alpha(p)$ es donde la órbita que pasa por p nace y que $\omega(p)$ es donde la órbita muere. Nótese que si $p \in \Delta$ es un punto singular de X entonces tanto $\alpha(p)$ como $\omega(p)$ son iguales a $\{p\}$. También debemos notar que si $q = \varphi(t_0, p)$ entonces $\gamma_p = \gamma_q$, debido a la igualdad $\varphi(t + t_0, p) = \varphi(t_0, q)$ de donde $\alpha(p) = \alpha(q)$ y $\omega(p) = \omega(q)$. Ver figura 1.5.

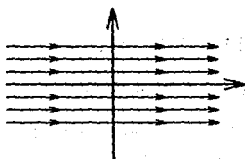


Figura 1-5: ejemplo de un flujo con conjuntos límite vacíos

Definición 1.23 : El conjunto α -límite para una órbita γ es el conjunto $\alpha(p)$ con $p \in \gamma$ y el conjunto ω -límite para una órbita γ es el conjunto $\omega(p)$ con $p \in \gamma$. Nótese que si γ es una

órbita de X entonces $\alpha(p) \subset Cl(\gamma_p^-)$ y análogamente $\omega(p) \subset Cl(\gamma_p^+)$.³

Los resultados siguientes pueden ser consultados en [13] y [29].

TEOREMA 1.24 : Sea $X : \Delta \rightarrow R^n$ un campo vectorial de clase C^k ($k \geq 1$) con $\Delta \subset R^n$ abierto, entonces:

- i) $\omega(\gamma_p^+)$ es cerrado y si γ_p^+ tiene cerradura compacta, entonces:
- ii) $\omega(\gamma_p^+) \neq \emptyset$.
- iii) $\omega(\gamma_p^+)$ es conexo.

Demostración:

- i) Sea $\{q_n\} \in \omega(\gamma_p^+)$ tal que $q_n \rightarrow q$ es decir que para n suficientemente grande $d(q_n, q) < \frac{\epsilon}{2}$, por otra parte como $q_n \in \omega(\gamma_p^+)$ entonces tenemos que existen sucesiones $\{t_m\}^n$ tales que $t_m^n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_m^n, p) \rightarrow q_n$ ($p \in \gamma_p^+$ y n fija) cuando $m \rightarrow \infty$; vamos ahora a construir una sucesión de la siguiente forma $t_{m_i} > N_i$ y $d(\varphi(t_{m_i}, p), q_i) < \frac{\epsilon}{2(i+1)}$ siempre que $m_i > M_i$ con M_i una sucesión tal que $M_i \rightarrow \infty$ si $i \rightarrow \infty$, por último por la desigualdad del triángulo:

$$d(\varphi(t_{m_i}, p), q) \leq d(\varphi(t_{m_i}, p), q_i) + d(q_i, q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(i+1)}$$

de donde obtenemos que $q_n \in \omega(\gamma_p^+)$ y por lo tanto $\omega(\gamma_p^+)$ es cerrado. (ver figura 1.6)

- ii) Suponemos ahora que γ_p^+ tiene cerradura compacta y como $\gamma_p^+ \subset Cl(\gamma_p^+)$ entonces si tomamos una sucesión $q_n = \varphi(t_n, p)$ con $p \in \gamma_p^+$ y $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ sabemos que tiene una subsucesión convergente en $Cl(\gamma_p^+)$ es decir $t_{n_i} \rightarrow \infty$ y $q_{n_i} \rightarrow q \in Cl(\gamma_p^+)$ cuando $k \rightarrow \infty$ y por definición tenemos que $q \in \omega(\gamma_p^+)$ por lo tanto $\omega(\gamma_p^+) \neq \emptyset$.

Notación: $\gamma_p^- = \{q \in \Delta \mid q = \varphi(t, p), t \leq 0\}$ es la semi-órbita positiva.
 $\gamma_p^+ = \{q \in \Delta \mid q = \varphi(t, p), t \geq 0\}$ es la semi-órbita negativa.
 $Cl(\gamma_p^-)$ es la cerradura de γ_p^- .
 $Cl(\gamma_p^+)$ es la cerradura de γ_p^+ .

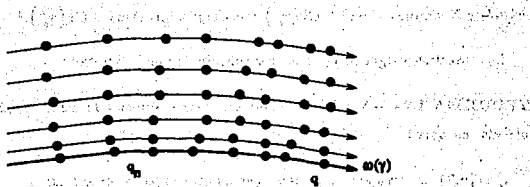


Figura 1-6:

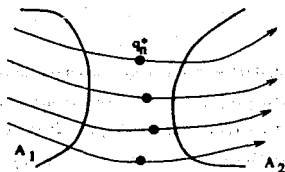


Figura 1-7:

- iii) Para probar que (γ_p^+) es conexo supongamos por el contrario que no lo es, si $\omega(\gamma_p^+)$ no es conexo entonces existen dos cerrados A_1 y A_2 tales que $\omega(\gamma_p^+) \subset A_1 \cup A_2$ y $d(A_1, A_2) = \delta > 0$ ahora bien como $\omega(\gamma_p^+) \cap A_i$ ($i = 1, 2$) es compacto se pueden construir sucesiones tales que $d(q_n, A_1) \rightarrow 0$, $d(q_n, A_2) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ con $q_n = \varphi(t_n, p)$, pero por ser $d(q_n, A_i)$ una función continua existe t_n^* con $t_n < t_n^* < t_{n+1}$ y tal que $d(q_n^*, A_i) \geq \frac{\delta}{4}$. La sucesión q_n^* tiene un punto de acumulación q , claramente $q \in \omega(\gamma_p^+)$ de donde $d(q, c_i) = \frac{\delta}{4} < \delta$, lo cual es una contradicción, con la que concluimos que $\omega(\gamma_p^+)$ es conexo (ver figura 1.7).

Hay que hacer notar que en este caso utilizamos fuertemente que $Cl(\gamma_p^+)$ es compacta ya que con esta suposición fue posible demostrar que $\omega(\gamma_p^+)$ es no vacío. \square

Una consecuencia importante de este teorema es el siguiente corolario:

Corolario 1.25 : $\omega(\gamma_p^+)$ es compacto.

Demostración: Por el teorema anterior $\omega(\gamma_p^+)$ es cerrado y está contenido en $Cl(\gamma_p^+)$ que es compacto, por lo tanto $\omega(\gamma_p^+)$ es compacto. \square

Corolario 1.26 : $\omega(\gamma_p^+)$ es invariante bajo el flujo de X es decir si $q \in \omega(\gamma_p^+)$ entonces $\gamma_q^+ \subset \omega(\gamma_p^+)$.

Demostración: Como $q \in \omega(\gamma_p^+)$ sabemos entonces que $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ siempre que $n \rightarrow \infty$, ahora bien si $r \in \gamma_q^+$ entonces $r = \varphi(t_0, q) = \lim \varphi(t_n + t_0, p)$ de donde $\varphi(t_n + t_0, p) \rightarrow r$ cuando $n \rightarrow \infty$ por consiguiente $r \in \omega(\gamma_p^+)$; y por último $\gamma_q^+ \subset \omega(\gamma_p^+)$. ver figuras 1.14, 1.15 y 1.16. \square

Corolario 1.27 : Si $\omega(\gamma_p^+)$ es una curva integral del campo vectorial X , entonces $I_p = R$.

Demostración: Como $\omega(\gamma_p^+)$ es compacto e invariante bajo el flujo de X entonces $\omega(\gamma_p^+)$ está contenida en un compacto, y por el corolario al teorema local de diferenciabilidad tenemos que $I_p = R$. \square

Corolario 1.28 : Si $\omega(\gamma_p^+)$ consta de un solo punto $p \in \Delta$ entonces p es un punto singular de X y $\gamma_q^+ \rightarrow p$ si $t \rightarrow \infty$. (ver figura 1.16).

Demostración: Como γ_p^+ está contenida en un compacto por el corolario 1.27 tenemos que $I_p = R$ de donde $\gamma_q^+ \rightarrow p$ si $t \rightarrow \infty$ y además si tomamos $r \in \omega(\gamma_p^+)$ sabemos que $\gamma_r^+ = \{p\}$ $\forall t \in R$ y por lo tanto:

$$X(p) = X\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(\varphi(t_n, p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}(\varphi(t_n, p)) = 0$$

y por consiguiente p es punto singular de X . \square

Definición 1.29 : Si una órbita está contenida en un conjunto límite entonces se llama órbita límite y si además es periódica entonces se le conoce como ciclo límite.

No cualquier órbita cerrada es ciclo límite por ejemplo una familia de órbitas cerradas (ver figura 1.8).

En la siguiente figura se muestra un ejemplo que hace evidente que la hipótesis de $Cl(\gamma_p^+)$ compacta no puede ser retirada del teorema.

Observación .1 : todo lo que hasta ahora hemos probado ha sido para conjuntos ω -límite, sin embargo todo es también válido para conjuntos α -límite, ya que si un conjunto es α -límite para el campo X entonces es ω -límite para el campo $-X$, y es debido a ésto que las pruebas posteriores las haremos solo para el caso de conjuntos ω -límite.

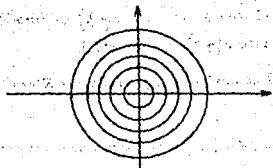


Figura 1-8:

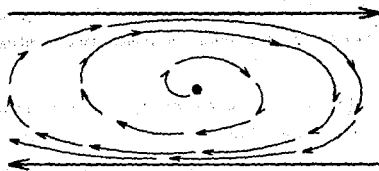


Figura 1-9:

1.3.2 El teorema de Poincaré-Bendixson.

El teorema de Poincaré-Bendixson caracteriza la naturaleza geométrica de los conjuntos α -límite y ω -límite, la primera discusión acerca de este teorema la haremos para el caso particular de \mathbb{R}^2 , más adelante lo haremos para el caso de 2-variedades compactas (S^2 y T^2), una herramienta fundamental tanto en el caso de \mathbb{R}^2 como en el de S^2 será el teorema de la curva de Jordan, que se enunciará sin probar. Otro concepto que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo es el sección transversal local el cual ya ha sido expuesto con detalle en la sección anterior. En la demostración del teorema de Poincaré-Bendixson que presentaremos a continuación contaremos con el importante apoyo del teorema del flujo tubular, lo cual nos permitirá acortar la demostración y tendrá la ventaja de hacerla considerablemente más clara la demostración, sin embargo este teorema puede ser mostrado utilizando teoremas más elementales como el teorema de Peano (ver Hartman [13], esto en particular implica que el teorema de Poincaré-Bendixson

sigue siendo cierto aún en el caso de que las soluciones no son únicas) por último recordemos que en nuestro caso las ecuaciones diferenciales tienen soluciones únicas. El orden en la exposición del teorema 1.30 es semejante a [29].

TEOREMA 1.30 (de Poincaré-Bendixson) : Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ un curva integral de X definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ tiene cerradura compacta $Cl(\gamma_p^+) \subset \Delta$. Supongamos que X posee una cantidad finita de singularidades en $\omega(\gamma_p^+)$, entonces:

- Si $\omega(\gamma_p^+)$ no contiene puntos singulares, entonces $\omega(\gamma_p^+)$ es una órbita periódica.
- Si $\omega(\gamma_p^+)$ contiene puntos regulares y singulares, entonces $\omega(\gamma_p^+)$ consiste de un conjunto de órbitas cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos singulares cuando $t \rightarrow \pm\infty$.
- Si $\omega(\gamma_p^+)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(\gamma_p^+)$ es un único punto singular.

Demostración:

1. La demostración será consecuencia de las siguientes proposiciones.

Proposición 1.31 Sea Σ una sección transversal local a X por el punto $q \in \Delta$ y sea γ_p^+ la semi-órbita positiva por p . Si $q \in \omega(\gamma_p^+) \cap \Sigma$ entonces existe una sucesión monótona de puntos $p_n = \varphi(t_n) \in \Sigma$ y tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = q$.

Demostración: Como $q \in \omega(\gamma_p^+)$ entonces existe una sucesión de $t_n \rightarrow \infty$ tales que $\varphi_n = \varphi(t_n) \rightarrow q$ cuando $n \rightarrow \infty$, sea V una vecindad de q , por el corolario 1.20 existe $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de que $\varphi(\tau(r), r) \in \Sigma$, para cualquier $r \in V$, como la sucesión $\varphi(t_n) \subset V$ para n suficientemente grande, entonces que $\varphi(\tau(\varphi(t_n)), \varphi(t_n)) \in \Sigma$. Para tales índices vamos a construir la siguiente sucesión:

$$p_n = \varphi(\tau(\varphi(t_n)), \varphi(t_n))$$

es claro que $p_n \in \Sigma \cap V$ y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tau(\varphi(t_n)), \varphi(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tau(\varphi_n), \varphi_n) = \varphi(0, q) = q$$

ya que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\varphi_n) = 0 \text{ por que } \varphi_n \rightarrow q \in \Sigma$$

ya tenemos una sucesión de puntos $p_n \in \Sigma$ tales que $p_n \rightarrow q$ si $n \rightarrow \infty$, ahora hay que hacer ver que tal sucesión es monótona, antes de hacerlo comentario; en el caso que estamos tratando, es decir el de los campos vectoriales en R^2 , las secciones transversales son imágenes difeomorfas de intervalos de R ; así que tienen definido un orden ver figura 1.10.

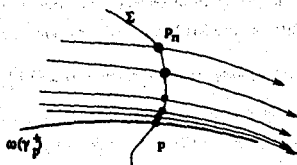


Figura 1-10:

Ahora vamos a mostrar que si la sucesión $\{p_n\}$ está sobre la semi-órbita positiva γ_0^+ de un punto $q_0 \in \Sigma$ entonces es monótona, si esto es cierto entonces fijemos nuestra atención en el conjunto:

$$D = \{s_n \in R^+ \cup \{0\} \mid p_n = \varphi(s_n) \in \Sigma\}$$

El conjunto D consta de una infinidad de puntos aislados y puede ser escrito de la forma:

$$D = \{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \dots\}$$

hay ahora básicamente tres casos que analizar, sabemos que $p_n = \varphi(s_n)$ asimismo podemos suponer que $q_0 = \varphi(0)$. Vamos a examinar los casos:

i) $p_1 = \varphi(s_1) = \varphi(0) = q_0$, en este caso lo que obtenemos es que γ_0^+ es una órbita cerrada con periodo s_1 .

ii) $p_1 = \varphi(s_1) < \varphi(0) = q_0$

iii) $p_1 = \varphi(s_1) > \varphi(0) = q_0$

(En éstos últimos dos casos estoy usando el orden que la sección transversal Σ hereda de R).

los casos (ii) y (iii) son equivalentes así que solo me limitaré a estudiar el caso (iii). Vamos a probar que si $\varphi(s_1) > \varphi(0)$ entonces $\varphi(s_2) > \varphi(s_1)$; como sabemos Σ es la imagen difeomorfa

de un intervalo de R y es por lo tanto conexa y además el campo X es continuo de donde sabemos que en una vecindad V_{p_0} de q_0 las líneas de flujo cruzan a la sección E siempre en un mismo sentido (ver figuras 1.10 y 1.12). Ahora vamos a hacer uso por vez primera del teorema de la curva de Jordan lo voy a enunciar. Una demostración topológica de este teorema se puede ver en Moise [22] y una demostración utilizando geometría diferencial en Do Carmo [8].

TEOREMA 1.32 (de la curva de Jordan) *Si J es una curva plana (J es la imagen homeomorfa de un círculo) entonces su complemento en el plano es la unión de dos conjuntos ajenos y conexos E_1 y E_2 cada uno de los cuales tiene a J como frontera, es decir $\partial E_1 = \partial E_2 = J$ una de ellas es acotada y otra no lo es. (ver figura 1.11.) A la componente acotada del complemento de J la llamaremos interior de J y la denotaremos por $\text{Int}(J)$.*

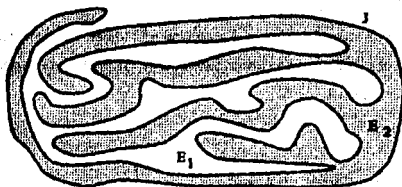


Figura 1-11:

Consideremos el segmento en Σ que une a p_1 con q_0 , y la parte de la órbita γ_t^+ entre q_0 y p_1 , es decir $\varphi(t)$ con $t \in [0, s_1]$ como se puede observar en la figura 1.12 la parte de γ_t^+ después de p_2 está contenida ya sea en E_1 ó E_2 (en el dibujo lo está en E_1), pero ¿que pasa con $\varphi(t)$ para $t > s_1$? lo primero que podemos decir es que $\varphi(t) \cap J = \emptyset \forall t > s_1$ debido a la unicidad de soluciones, tampoco puede intersectar a Σ por el segmento que une a p_1 con q_0 , por que en ese caso lo haría en el sentido opuesto al que habíamos supuesto lo que constituiría contradicción a la continuidad de X por lo tanto la única opción que le queda es cruzar Σ en un punto mayor (según el orden previamente establecido) así que $p_2 > p_1 > q_0$, de manera análoga podemos continuar el razonamiento y obtener que $q_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ de donde obtenemos el resultado deseado. $\{p_n\}$ es monótona. \square

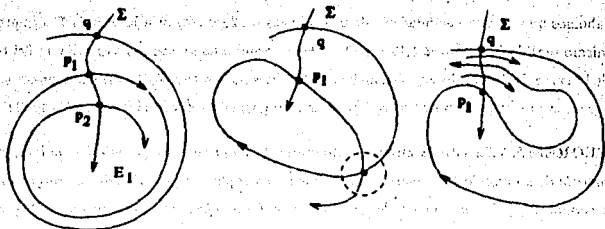


Figura 1-12:

Proposición 1.33 : Si Σ es una sección transversal al campo X y $p \in \Delta$ entonces Σ intersecta a $\omega(p)$ en un único punto.

Demostración: Por el lema anterior el conjunto $\gamma_p^+ \cap \Sigma$ es un conjunto infinito acotado inferiormente, ya que el mismo es una sucesión monótona creciente y convergente, por lo tanto $\omega(p) \cap \Sigma$ es único. (ver figura 1.13) \square

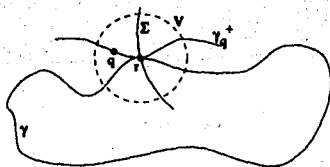


Figura 1-13:

Proposición 1.34 [13]: Sea $p \in \Delta$ si γ_p^+ tiene cerradura compacta, γ es una órbita de X tal que $\gamma \subset \omega(p)$, y $\omega(p)$ sólo contiene puntos regulares entonces γ es una órbita cerrada y además $\gamma = \omega(p)$.

Demostración: Vamos a fijarnos en $q \in \omega(p)$ y en la sección transversal Σ_q a X por q , como sabemos γ_q^+ intersecta a $\omega(p)$ en un único punto y como $\gamma_q^+ \subset \omega(p)$ entonces γ debe de

ser una órbita cerrada. Vamos ahora a probar que $\gamma = \omega(p)$ para lo cual nos fijaremos en el conjunto $\omega(p) - \gamma$ y supondremos que $\omega(p) - \gamma \neq \emptyset$, ahora bien γ debe contener un punto de acumulación del conjunto $\omega(p) - \gamma$ ya que si no lo contuviese γ y $Cl(\omega(p) - \gamma)$ serían una desconexión de $\omega(p)$ que sabemos es conexo, sea r tal punto de acumulación de $\omega(p) - \gamma$, sea V_r una vecindad alrededor de r y Σ_r una sección transversal a X por r , entonces existe $q \in (\omega(p) - \gamma) \cap V_r$, tal que si el radio de la vecindad es suficientemente pequeño entonces la solución a la ecuación diferencial :

$$\dot{x} = X(x) \text{ con } x(0) = q$$

tiene una única solución γ_q con la propiedad de que $\gamma_q^+ \cap \Sigma_r \neq \emptyset$ pero por todo lo anterior tenemos que $\gamma_q^+ \cap \Sigma_r = r$ lo cual es imposible ya que $q \notin \gamma$, lo que contradice la unicidad de soluciones. \square (ver demostración alternativa en [29])

Demostración del teorema de Poincaré-Bendixon:

Supongamos ahora que se cumple la condición (a) del teorema, como $\omega(p)$ contiene únicamente puntos regulares, si $q \in \omega(p)$ entonces $\gamma_q^+ \subset \omega(p)$ y $\omega(p)$ es compacto de donde $\omega(\gamma_q^+) \neq \emptyset$. Por (iii) tenemos que γ_p es cerrada y $\gamma_p = \omega(p)$. (ver figura 1.14)

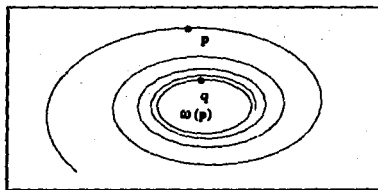


Figura 1-14:

Si por otra parte se cumple la condición (b), es decir, si en $\omega(p)$ hay puntos singulares y regulares, entonces si $q \in \omega(p)$ es un punto regular sabemos que $\gamma_q^+ \subset \omega(p)$ y si fijamos nuestra atención en $\omega(q)$ por ser $\omega(q)$ cerrado y conexo tenemos que $\omega(q)$ debe ser un punto singular y como pasa lo mismo para el caso de γ_q^- entonces tenemos que $(\omega_-, \omega_+) = (-\infty, \infty)$ ya que la órbita que pasa por q está contenida en un compacto. (ver figura 1.15)

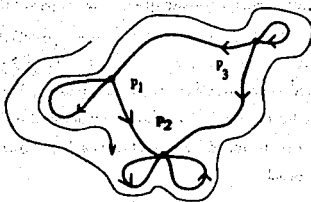


Figura 1-15:

Si se cumple la condición (c) del teorema entonces por el corolario 1.28 $r = \omega(p)$ es un punto singular y γ_t^+ tiende a r cuando $t \rightarrow \infty$ (ver figura 1.16)

Con ésto queda probado el teorema de Poincaré-Bendixon para el caso de R^2 , nótese que hemos hecho dos suposiciones importantes la primera es la unicidad de soluciones y la otra es que el campo X posee únicamente una cantidad finita de singularidades posteriormente explicaremos porque esta condición no es demasiado restrictiva.

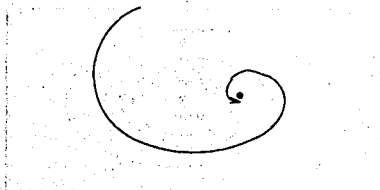


Figura 1-16:

Capítulo 2

CAMPOS VECTORIALES EN VARIETADES DIFERENCIABLES.

En este capítulo el objetivo es introducir los conceptos necesarios para comprender mejor el análisis de las distintas versiones del teorema de Poincaré-Bendixson que presentaremos más adelante, comensaremos haciendo un repaso de resultados de cálculo diferencial en \mathbb{R}^n , para después introducir el concepto de variedad diferenciable, daremos una definición precisa de lo que es un campo vectorial en una variedad diferenciable y luego presentaremos, sin demostrar, el teorema de Poincaré-Bendixson en S^2 .

2.1 Cálculo en variedades diferenciables.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función definida en un abierto U de \mathbb{R}^m . Diremos que f es diferenciable en el punto $p \in U$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que para v suficientemente pequeña:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|f(p+v) - f(p) - T(v)\|}{\|v\|} = 0$$

En tal caso llamaremos a T la derivada de f en p , y la denotaremos como $df(p)$ o algunas veces como $Df(p)$ o $d_f p$. Como sabemos bien, la existencia de la derivada implica, en particular, la continuidad de f en p . Si f es derivable en cualquier $p \in U$ tenemos definida una función

lineal L de R^m en R^k ($L \in L(R^m, R^k)$) que a cada $p \in U$ le asocia la derivada de f en p , donde $L(R^m, R^k)$ denota el conjunto de las funciones lineales de R^m en R^k con la norma $\|T\| = \sup\{\|Tv\| \mid \|v\| = 1\}$. Si df es continua diremos que f es de clase C^1 en U . Es un resultado bastante conocido que f es de clase C^1 si y solo si sus derivadas parciales existen y son continuas, normalmente las derivadas parciales se denotan $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ y son funciones de U en R , además de que df_p tiene asociada una matriz en la bases canónicas de R^m y R^k , a la que se suele denotar $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] (p)$. Asimismo podemos definir $d^2 f_p$ como la derivada de df_p en p , a la que llamaremos la segunda derivada de f en p , consecuentemente $d^2 f_p(v)$ es una función que vive en el espacio $L(R^m, L(R^m, R^k))$ que es isomorfo a $L^2(R^m, R^k)$, el espacio de las funciones bilineales con la norma $\|B(u, v)\| = \sup\{\|B(u, v)\| \mid \|u\| = \|v\| = 1\}$. Diremos que f es de clase C^2 si $d^2 f_p : U \rightarrow L(R^m, L(R^m, R^k))$ es continua. Por inducción definiremos a $d^r f_p$ como la derivada de $d^{r-1} f_p$ en p , tenemos además que $d^r f_p \in L^r(R^m, R^k)$; que es el espacio de las funciones r -lineales con la norma $\|C(u_1, \dots, u_r)\| = \sup\{\|C(u_1, \dots, u_r)\| \mid \|u_1\| = \dots = \|u_r\| = 1\}$; en tal caso diremos que f es de clase C^r si $d^r f_p : U \rightarrow L^r(R^m, R^k)$ es continua. Por último f es de clase C^∞ en U si es de clase C^r para toda $r \geq 0$. Debemos hacer notar que f es clase C^r si existen todas sus derivadas parciales hasta de orden r y todas son continuas. Sean U y V dos abiertos en R^m y $f : U \rightarrow V$ una función sobreyectiva de clase C^r , diremos que f es un difeomorfismo de clase C^r si existe una función $g : V \rightarrow U$ de clase C^r con la propiedad de que $f \circ g$ es la identidad en U .

Vamos a continuar con una lista de resultados sin pruebas, la mayor parte de éstos se pueden consultar principalmente en [22] y [4].

Proposición 2.1 : Sea $U \subset R^m$ un conjunto abierto y sea $f_n : U \rightarrow R^m$ una sucesión de funciones de clase C^1 . Suponga que f_n converge puntualmente a $f : U \rightarrow R^m$ y que la sucesión df_n converge a $g : U \rightarrow L(R^m, R^k)$. Entonces f es de clase C^1 y $df = g$. \square

Proposición 2.2 (regla de la cadena) : Sea $U \subset R^m$ y $V \subset R^m$ dos conjuntos abiertos. Si $f : U \rightarrow R^m$ es diferenciable en $p \in U$, $f(U) = V$ y $g : V \rightarrow R^k$ es diferenciable en $q = f(p)$, entonces $g \circ f : U \rightarrow R^k$ es diferenciable en p y $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \cdot df(p)$. \square

Proposición 2.3 : Si f y g son ambas de clase C^r , entonces $g \circ f$ es de clase C^r . \square

Corolario 2.4 : Si $f : U \rightarrow R^k$ es diferenciable en $p \in U$ y $\alpha(-1, 1) \rightarrow U$ es una curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\frac{d\alpha}{dt}(0) = v$, entonces $f \circ \alpha$ es una curva diferenciable en 0 y $\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) = df(p)v$. \square

TEOREMA 2.5 (de la función inversa) : Sea $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r , $r \geq 1$. Si $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, entonces f es un difeomorfismo local en $p \in U$ de clase C^r ; ésto es, hay vecindades $V \subset U$ de p y $W \subset \mathbb{R}^n$ de $f(p)$ y una función de clase C^r , $g : W \rightarrow V$ tal que $g \circ f = I_V$ y $f \circ g = I_W$, donde I_V denota la identidad en V e I_W denota la identidad en W . \square

TEOREMA 2.6 (de la función implícita) : Sea $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ una función de clase C^r , $r \geq 1$. Sea $x_0 = (x_0, y_0) \in U$ y $c = f(x_0)$. Supongamos que la derivada parcial con respecto a la segunda variable, $D_2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es un isomorfismo. Entonces existen conjuntos abiertos $V \subset \mathbb{R}^m$ que contiene a x_0 y $W \subset U$ que contiene a x_0 tales que, para cada $s \in V$, existe una única $\zeta(s) \in \mathbb{R}^n$ con $(s, \zeta(s)) \in W$ y $f(s, \zeta(s)) = c$. La función $\zeta : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida de esta forma, es de clase C^r y su derivada está dada por la fórmula:

$$d\zeta(s) = [D_2 f(s, \zeta(s))]^{-1} \circ D_1 f(s, \zeta(s))$$

TEOREMA 2.7 (de la inmersión local) : Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ una función de clase C^r , $r \geq 1$. Supongamos que, para alguna $x_0 \in U$, la derivada $df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ es inyectiva. Entonces existen vecindades $V \subset U$ de x_0 , $W \subset \mathbb{R}^n$ del origen y $Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$ de $f(x_0)$ y un difeomorfismo de clase C^r $h : Z \rightarrow V \times W$ tal que $h(f(s)) = (s, 0)$ para toda $s \in V$ y $w \in W$. \square

TEOREMA 2.8 (de la submersión local) : Sea $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^r , $r \geq 1$. Supongamos que, para algún $x_0 \in U$ la derivada $df(x_0)$ es sobreyectiva. Entonces existen vecindades $Z \subset U$ de x_0 , $W \subset \mathbb{R}^n$ de $c = f(x_0)$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ del origen y un difeomorfismo h de clase C^r tal que $f \circ h(x, w) = w$ para toda $x \in V$ y $w \in W$. \square

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r , $r \geq 1$. Un punto $s \in U$ es un punto regular para f si $df(s)$ es sobreyectiva; de otro forma le llamaremos punto crítico, (no confundir con puntos regulares de campos vectoriales). Un punto $c \in \mathbb{R}^n$ se llama valor regular si para toda $s \in f^{-1}(c)$ es un punto regular; de otra forma se le llama valor crítico. Es necesario recalcar que si $f^{-1}(c) = \emptyset$ entonces c es un valor regular.

Vamos ahora a introducir el concepto de variedad diferenciable (ver [19], [21], [30]). Sea M un subconjunto de \mathbb{R}^k , con la topología inducida por \mathbb{R}^k ; ésto es, $A \subset M$ es abierto si existe un abierto $\hat{A} \subset \mathbb{R}^k$, tal que $A = \hat{A} \cap M$. Diremos que M es una variedad diferenciable de

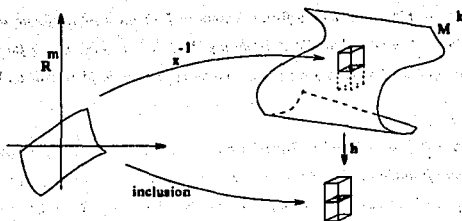


Figura 2-1:

dimensión m si, para cada punto $p \in M$, existe una vecindad $U \subset M$ de p y un homeomorfismo $x : U \rightarrow U_0$, donde U_0 es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m , tal que el homeomorfismo inverso $x^{-1} : U_0 \rightarrow U$ es una inmersión de clase C^∞ . Esto quiere decir, que para cada $u \in U_0$, la derivada $dx^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es inyectiva. En tal caso diremos que (x, U) es una carta local alrededor de p , y U es vecindad coordenada de p . Si el homeomorfismo x^{-1} , anterior es de clase C^r diremos que M es una variedad de clase C^r (lo que hemos llamado variedad diferenciable corresponde a una de clase C^∞). Se sigue del teorema de la forma local de inmersiones que; si (x, U) es una carta local alrededor de p entonces existen vecindades A de p en \mathbb{R}^k , V de $x(p)$ y W de el origen de \mathbb{R}^{k-m} y un homeomorfismo C^∞ , $h : A \rightarrow V \times W$ tal que, para toda $q \in A \cap M$ tenemos $h(q) = (x(p), 0)$. En particular, una carta local es la restricción de una función C^∞ de un abierto de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^m . De este hecho obtenemos la siguiente:

Proposición 2.9 : Sean $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ cartas locales para M . Si $U \cap V \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ es un difeomorfismo C^∞ . \square

El paso siguiente es definir funciones entre variedades. Sean M^m una variedad de dimensión m , N^n una variedad de dimensión n y $f : M^m \rightarrow N^n$. Diremos que f es de clase C^r si, para todo punto $p \in M$, existen cartas locales $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f(U) \subset V$ tales que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$ es de clase C^∞ , cabe recalcar que esta definición es independiente de la forma en que se escogen las cartas.

Consideremos una curva derivable $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ con $\alpha(0) = p$. Es fácil ver que α es derivable de acuerdo con la definición dada antes si y solamente si α es derivable como curva en

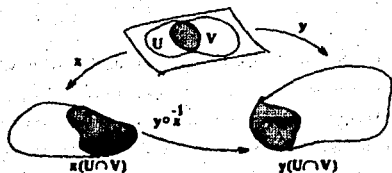


Figura 2-2:

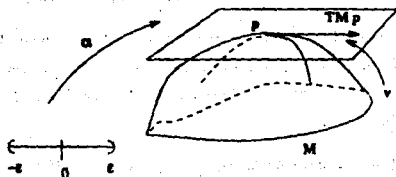


Figura 2-3:

\mathbb{R}^n , por consiguiente existe un vector tangente $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \alpha'(0)$. El conjunto de todos los vectores tangentes a tales curvas α le llamaremos el espacio tangente a M en p y lo denotaremos por TM_p . Consideremos una carta local $s: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s(0) = p$. Es fácil ver que la imagen de la derivada $ds^{-1}(0)$ coincide con TM_p . Esto quiere decir que TM_p es un espacio vectorial de dimensión m .

Sea $f: M \rightarrow N$ una función derivable y $v \in TM_p$, $p \in M$. Consideremos una curva derivable $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces $f \circ \alpha(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ es una curva diferenciable así que podemos definir $df(p)v = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0)$. Nuevamente esta definición es independiente de la forma en que se escogió a α .

La función $df(p): TM_p \rightarrow TN_{f(p)}$ es lineal y la llamaremos, la derivada de f en p . Como localmente una variedad no es otra cosa que un abierto de \mathbb{R}^n torcido entonces no es tan descabellado pensar que los teoremas de la lista anterior también sea validos en variedades.

Proposición 2.10 (regla de la cadena) : Sean $f: M \rightarrow N$ y $g: N \rightarrow P$ dos funciones de

clase C^r entre variedades diferenciables. Entonces $g \circ f: M \rightarrow P$ es de clase C^r y $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$. \square

Una función $f: M \rightarrow N$ es un C^r difeomorfismo, si es de clase C^r y tiene una inversa f^{-1} de la misma clase. En este caso, para cada $p \in M$, $df(p): TM_p \rightarrow TN_{f(p)}$ es un isomorfismo cuya derivada es $df^{-1}(f(p))$. En particular, M y N tienen la misma dimensión. Diremos que $f: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo local en $p \in M$ si existen vecindades $U(p) \subset M$ y $V(f(p)) \subset N$ tal que la restricción de f a U es un difeomorfismo sobre U .

Proposición 2.11 (de la función inversa): Si $f: M \rightarrow N$ es de clase C^r , $r \geq 1$, y $df(p)$ es un isomorfismo para alguna $p \in M$ entonces f es un difeomorfismo local de clase C^r en p . \square

Consideremos un subconjunto S de una variedad M . S es una subvariedad de M de clase C^r de dimensión s si, para cada $p \in S$, existen abiertos $U \subset M$ que contiene a p , $V \subset \mathbb{R}^s$ que contiene al origen y $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-s}$ y un difeomorfismo de clase C^r , $\varphi: U \rightarrow V \times W$ tal que $\varphi(S \cap U) = V \times \{0\}$.

TEOREMA 2.12 (de la inmersión local): Sea $f: M^m \rightarrow N^{m+n}$ de clase C^r , y $p \in M$ un punto tal que $df(p)$ es inyectiva. Entonces existen vecindades $U(p)$, $V(f(p))$, $U_0(0)$ en \mathbb{R}^m y $V_0(0)$ en \mathbb{R}^n y dos difeomorfismos $\varphi: U \rightarrow U_0$ y $\psi: V \rightarrow U_0 \times V_0$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0)$. \square

Una función C^r , $f: M \rightarrow N$ es una inmersión si $df(p)$ es inyectiva para todo $p \in M$. A una inmersión inyectiva $f: M \rightarrow N$ la llamaremos un encaje, si $f: M \rightarrow f(M) \subset N$ es un homeomorfismo, donde $f(M)$ tiene la topología inducida. En este caso $f(M)$ es una subvariedad de N . Si $f: M \rightarrow N$ es solamente una inmersión inyectiva diremos que $f(M)$ es una subvariedad inmersa en N .

TEOREMA 2.13 (de la submersión local): Sea $f: M^{m+n} \rightarrow N^n$ de clase C^r , y $p \in M$ un punto tal que $df(p)$ es sobreyectiva. Entonces existen vecindades $U(p)$, $V(f(p))$, $U_0(0)$ en \mathbb{R}^m y $V_0(0)$ en \mathbb{R}^n y dos difeomorfismos $\varphi: U \rightarrow U_0 \times V_0$ y $\psi: V \rightarrow V_0$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = y$. \square

Un punto $q \in N$ es un valor regular de $f: M^m \rightarrow N^n$, si para toda $p \in M$ con $f(p) = q$, $df(p)$ es sobreyectiva. Se sigue de la proposición anterior que $f^{-1}(q)$ es una subvariedad C^r de M de dimensión $m - n$.

Definiremos ahora el haz tangente TM de una variedad $M^n \subset \mathbb{R}^k$ como:

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k; p \in M, v \in TM_p\}$$

Dando a TM la topología inducida; entonces la proyección $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) = p$, es continua. Mostraremos que TM es una variedad diferenciable y que π es de clase C^∞ . Sea $s : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una carta local para M definimos la siguiente función $Ts : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dada por $Ts(p, v) = (s(p), ds(p)v)$. Es fácil ver que $(Ts, \pi^{-1}(U))$ es una carta local para TM y por lo tanto $TM \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ es una variedad, ahora bien de la definición de π se puede observar que, π no es otra cosa que la restricción a TM de la proyección de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sobre su primera coordenada, de donde se desprende que π es C^∞ .

2.2 Campos vectoriales en variedades.

Para estudiar la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales en variedades comensuraremos con el estudio de campos vectoriales en variedades diferenciables, la teoría cualitativa que hemos desarrollado anteriormente tiene una extensión natural al contexto de variedades diferenciables, hecho que facilitará la comprensión de los siguientes resultados, los cuales presentaremos sin demostración alguna. Terminaremos esta sección con una breve discusión del teorema de Poincaré-Bendixson en S^2 .

Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable. Un campo vectorial de clase C^r en M es una función de clase C^r $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ que a cada punto $p \in M$ le asocia un elemento de TM_p , (recuérdese que TM_p es un espacio vectorial), es decir $X(p) \in TM_p$, si definimos una función $\pi : TM \rightarrow M$, a la que llamaremos la proyección natural de TM en M , tal que $\pi(v) = p$ siempre y cuando $v \in TM_p$, esto corresponde a una función de clase C^r $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi X(p) = p$. Denotaremos por $X^r(M)$ al conjunto de campos vectoriales de clase C^r en M .

De la misma forma como lo hicimos antes, podemos definir en M la ecuación diferencial:

$$\dot{z} = X(z) \tag{2.1}$$

Una curva integral del campo vectorial $X \in X^r(M)$, ó de la ecuación diferencial 2.1 que pasa por el punto $p \in M$, es una aplicación $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para toda $t \in I$, donde I es un intervalo que contiene al origen.

Si $f: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo de clase C^{r+1} y $X \in \mathcal{X}^r(M)$, entonces $Y = f_*X$ definido como $Y(q) = df(p)(X(p))$ es un campo vectorial en N , ya que $df(p)$ actúa del espacio tangente a M en p al espacio tangente a N en $f(p) = q$, y de aquí es claro que si $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva integral de X , entonces $f \circ \alpha: I \rightarrow N$ es una curva integral de $Y \in \mathcal{X}^{r+1}(N)$. En particular se tiene que f envía curvas integrales de X en curvas integrales de N . Por otra parte si (x, U) es una carta local para M entonces (x_*X, M) es un campo vectorial en M . De acuerdo con los últimos comentarios y con lo expuesto anteriormente, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 2.14 [19]: Sea $F: R \times M \rightarrow TM$ una función de clase C^r tal que $\pi F(u, p) = p$, con π la proyección natural de TM en M . Entonces para toda $u \in R$, $y, p \in M$ existen vecindades W de u , V de p , un número real $\epsilon > 0$ y una aplicación C^r ; $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times V \times W \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, p, u) = p$ y $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, p, u) = F(u, \varphi(t, p, u))$ para toda $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $p \in V$ y $u \in W$. Mas aún si $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es una curva integral del campo vectorial $F_u(p) = F(u, p)$ con $\alpha(0) = p$ entonces $\alpha(t) = \varphi(t, p, u)$. A φ la llamaremos el flujo local de X en M . \square

La demostración de este teorema la omitiré debido a que es una consecuencia de los resultados análogos en \mathbb{R}^n y de las observaciones de arriba. Sucede lo mismo con las siguientes:

Proposición 2.15 [19]: Sean I, J intervalos abiertos y sean $\alpha: I \rightarrow M$, $\beta: J \rightarrow M$ dos curvas integrales de $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Si $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ para algún $t_0 \in I \cap J$, entonces $\alpha(t) = \beta(t)$ para toda $t \in I \cap J$ y además existe una curva integral $\gamma: I \cap J \rightarrow M$ que coincide con α en I y con β en J . \square

Proposición 2.16 [19]: Sea M una variedad compacta y $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Entonces existe en M un flujo global de X . Esto quiere decir que existe una aplicación C^r ; $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ y $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$, además para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ la aplicación $\varphi_{t_0}(p) = \varphi(t_0, p): M \rightarrow M$ cumple (i) $\varphi_0 =$ identidad y (ii) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. \square

Las demostraciones de los resultados anteriores se pueden consultar en [21] y [30].

2.2.1 Ejemplos de campos y flujos en variedades.

Ejemplo 2.1: Consideremos la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente forma:

$$S^2 = \{ \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \|\mathbf{x}\| = 1 \}$$

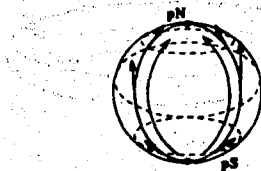


Figura 2-4:

y sean $p_N = (1, 0, 0)$ el polo norte y $p_S = (-1, 0, 0)$ el polo sur de la esfera. Definiremos un campo vectorial sobre S^2 , de la siguiente forma; $X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$ es claro que X es de clase C^∞ ya que cada una de sus componentes lo es, además X es tangente a la esfera ya que si calculamos: $(x, y, z) \cdot X(x, y, z) = (-x^2z - y^2z + z(x^2 + y^2)) = 0$; es también claro que $X(p_N) = X(p_S) = 0$ de donde p_N y p_S son singularidades de X , además como $x^2 + y^2 > 0$ en S^2 se tiene que la componente z del campo es siempre positiva y por lo tanto el campo apunta hacia arriba.

Ejemplo 2.3 (Flujos lineales en el toro) : Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_4 \\ \dot{x}_4 &= \beta x_3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

con $\alpha, \beta > 0$, si hacemos el siguiente cambio de coordenadas, $x_1 = z_1 + iz_2$; $x_2 = z_2 + iz_1$ entonces el sistema 2.2 se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= i\alpha z_1 \\ \dot{z}_2 &= i\beta z_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

y sabemos que las soluciones para este sistema son de la forma; $\varphi_1(t, z_1) = z_1 \exp(i\alpha t)$ y $\varphi_2(t, z_2) = z_2 \exp(i\beta t)$; de aquí obtenemos que si $|z_1| = r_1$ y $|z_2| = r_2$, entonces la aplicación

$$\varphi(t, z_1, z_2) = (\varphi_1(t, z_1), \varphi_2(t, z_2))$$



Figura 2-5:

esta contenido en $T^2 = C_1 \times C_2 \subset \mathbb{R}^4$, donde $C_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r_i\}$ $i = 1, 2$. Es decir $\varphi(t, x_1, x_2)$ es el flujo de la E.D. 2.3 sobre el toro $T^2 = C_1 \times C_2$. Como sabemos esta no es la única forma de obtener T^2 otra forma es identificar los lados opuestos del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Si definimos $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi(\theta_1, \theta_2) = ((2 + \cos 2\pi\theta_2) \cos 2\pi\theta_1, (2 + \cos 2\pi\theta_2) \sin 2\pi\theta_1, \cos 2\pi\theta_2)$$

lo que estamos haciendo es tomar el círculo de radio 1 y centro en $(0, 2)$ contenido en el plano $x-x$ y rotarlo alrededor del eje z un ángulo θ_2 , además se puede ver directamente en la fórmula que $\varphi(\theta_1, \theta_2) = \varphi(\theta_1, \hat{\theta}_2)$ si y solo si $\theta_2 - \hat{\theta}_2 = n$; $\theta_2 - \hat{\theta}_2 = m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, voy ahora a definir la siguiente E.D. en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\alpha}{2\pi} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\beta}{2\pi} \end{aligned} \tag{2.4}$$

y sea $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$; lo que estamos haciendo es definir un campo vectorial X_γ en \mathbb{R}^2 tal que sus curvas integrales son líneas rectas con pendiente γ , entonces por la discusión anterior sabemos que el campo $Y_\gamma = \varphi_* X_\gamma$ es un campo vectorial en T^2 , este campo tiene la particularidad que si γ es racional entonces todas las curvas integrales de 2.4 son periódicas y si γ es irracional entonces son densas en T^2 ; para hacer ver que cuando γ es racional, $\gamma = \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$, las curvas integrales son periódicas notemos que si el punto (u, v) está en una curva integral de X_γ entonces $v = u_0 + \gamma u = u_0 + \frac{p}{q}u$, y de esta expresión se puede ver que $\varphi(q, u_0 + p) = \varphi(0, u_0)$; ya que $p, q \in \mathbb{Z}$. Para hacer ver que cuando γ es irracional entonces las curvas integrales son densas en T^2 , si usamos el lema 1.13, hay que hacer ver que el grupo generado por $\{1, \gamma\}$ es denso, es decir hay que probar que el conjunto de números de la forma $T_\gamma = \{n + m\gamma \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en \mathbb{R} , para ello basta probar que T no es discreto. Ahora bien si utilizamos el siguiente resultado; si γ es irracional y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces para cada ϵ existe n tal que $n + m\gamma \in [0, \epsilon]$;

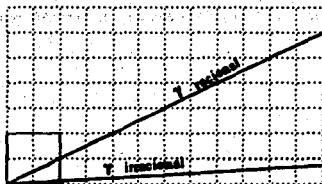


Figura 2-6:

(ver apéndice). Definamos el siguiente conjunto:

$$\hat{T}_\gamma = \{m', n' \in \mathbb{Z}; n + m\gamma \in [0, 1]\}$$

; entonces \hat{T}_γ debe tener un punto de acumulación en $[0, 1]$ y por lo tanto T_γ no puede ser discreto en \mathbb{R} . \square

En el caso cuando γ es racional al campo 2.4 lo llamaremos el campo racional sobre T^2 , en caso de que γ sea irracional lo llamaremos el campo irracional sobre T^2 (Ver apéndice).

2.3 El teorema de Poincaré-Bendixson en S^2 .

El teorema de Poincaré-Bendixson caracteriza los conjuntos límite de las órbitas de una E.D. o de un campo vectorial, estas alturas no es necesario definir detalladamente lo que son los conjuntos α -límite y ω -límite de una E.D. en una variedad ya que lo único que hay que hacer con respecto de las definiciones dadas en el capítulo anterior es sustituir $q \in \Delta$, por $q \in M$ con M una variedad.

En el caso de R^2 fue importante suponer que la semi-órbita positiva por p tenía cerradura compacta en este caso no será necesaria tal suposición ya que supondremos que la variedad M es compacta y por lo tanto los intervalos máximos de definición de las soluciones se convierten en todo \mathbb{R} , esto está de acuerdo con la proposición 2.15. El concepto de sección transversal puede ser también trasladado a este contexto, notemos también que en el caso de S^2 el teorema 1.31 sigue siendo cierto, de esta forma queda todo en orden para presentar los siguientes:

TEOREMA 2.17 [19]: Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ con M una variedad compacta, y sea $p \in M$, entonces:

- (i) $\omega(p) \neq \emptyset$
- (ii) $\omega(p)$ es cerrado
- (iii) $\omega(p)$ es conexo
- (iv) $\omega(p)$ es invariante bajo el flujo de la E.D. \square

Claramente estas proposiciones son válidas también para los conjuntos α -límite. La demostración es muy similar a la del teorema 1.24 del capítulo anterior.

Resulta en todo caso más provechoso hacer algunos comentarios acerca de los conjuntos α -límite y ω -límite de los campos vectoriales de los ejemplos anteriores. En el ejemplo 1, podemos pensar que las órbitas de cualquier punto distinto de p_N o p_S nacen en el polo sur de la esfera y mueren en el polo norte de la misma o sea que los conjuntos α -límite y ω -límite de esos puntos, son precisamente p_S y p_N .

En el caso del ejemplo 2 es mucho más interesante, ya que depende del valor que tenga γ , si por ejemplo γ es racional entonces tenemos que los conjuntos ω -límite y α -límite de un punto p en una órbita γ_p son iguales entre sí y son iguales a γ_p , ya que como dijimos antes γ_p es una órbita periódica; si por otra parte tenemos que γ es irracional entonces nuevamente los conjuntos ω -límite y α -límite son iguales entre sí, pero esta vez son iguales a todo el toro T^2 , esto es claramente una consecuencia del hecho de que las órbitas son densas en T^2 .

TEOREMA 2.18 [19]: Sea $X \in \mathcal{X}(S^2)$ un campo vectorial con un número finito de singularidades. Sea $p \in S^2$, y sea $\omega(p)$ el conjunto ω -límite de p . Entonces:

- a) $\omega(p)$ es una órbita periódica.
- b) $\omega(p)$ consiste de singularidades p_i y de órbitas γ_i tales que $\omega(\gamma_i) = p_i$ y $\alpha(\gamma_j) = p_j$ siempre que $\gamma_i \subset \omega(p)$.
- c) $\omega(p)$ es un único punto singular. \square

La demostración de este teorema no se presenta, nuevamente gracias a la similitud que guarda con la del teorema 1.30 (ver [19]). En su lugar presentamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3 .Sea X un campo vectorial con las siguientes características; el polo norte y el polo sur son tales que $X(p_N) = X(p_S) = 0$, el ecuador es una órbita cerrada y las órbitas de

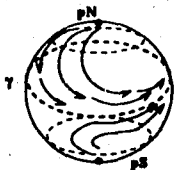


Figura 2-7:

puntos que no son ni el polo norte ni el polo sur tienen a uno de tales puntos como α -límite y al ecuador como ω -límite; sea también $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que se anula en todo el ecuador. Construimos entonces el siguiente campo vectorial en S^2 , $Y = \varphi \cdot X$ es claro que los puntos p_N y p_S siguen siendo singularidades del campo Y , y además todo punto sobre el ecuador es también un punto singular; si fijamos nuestra atención en el conjunto ω -límite de un punto que no sea ni el polo norte ni el polo sur podemos ver que sigue siendo todo el ecuador.

Este ejemplo hace ver que en el teorema de Poincaré-Bendixson la hipótesis de que el campo tenga solo un número finito de singularidades es necesaria.

Capítulo 3

TEORÍA DE POINCARÉ-BENDIXSON.

En el capítulo anterior mostramos que en toda vecindad, convenientemente elegida, de un punto regular, el flujo es topológicamente equivalente a un flujo constante. En este capítulo nos proponemos describir topológicamente los alrededores de una singularidad aislada, para lo cual nos auxiliaremos del concepto de índice primero de un campo vectorial a lo largo de una curva de Jordan. Se mostrará que si la curva no contiene singularidades, éste es cero, después con la ayuda del teorema de Poincaré-Bendixson dividiremos el interior de una curva de Jordan, que rodea a una singularidad aislada, en ciertos tipos de regiones, llamados sectores, topológicamente equivalentes, asimismo encontraremos una fórmula, conocida como la fórmula de Bendixson, que nos permitirá calcular el índice de una singularidad aislada en términos del número de tales sectores.

3.1 Teorema de las tangentes rotantes.

Supongamos que tenemos definido un campo vectorial X en un abierto Δ de R^2 , y $\alpha : I \subset R \rightarrow \Delta$ una curva cerrada simple que tiene definido un vector tangente para cada $t \in I$; salvo en una cantidad finita t_1, t_2, \dots, t_n ; es decir, estamos pensando en una curva compuesta por trozos de curvas o arcos diferenciables que se unen en vértices en donde no está bien definido un vector tangente, daremos a continuación una definición explícita:

Definición 3.1 : Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2$, diremos que α es una curva parametrizada cerrada, C^1 por trozos en $I = [a, b]$ si:

i) $\alpha(a) = \alpha(b)$.

ii) siempre que $t_i \neq t_j$ tenemos que $\alpha'(t_i) \neq \alpha'(t_j)$, a los puntos $\alpha(t_i)$ los llamaremos vértices.

iii) en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ la curva o arco α ; es diferenciable.

en los vértices $\alpha(t_i)$ definiremos θ_i de la siguiente manera; $\theta_i = \varphi_i - \pi$ donde φ_i es el ángulo exterior que forma $\alpha(t_i)$ con $\alpha(t_{i-1})$.

Como sabemos el ángulo φ que forma un vector $v \in \mathbb{R}^2$ con el generador $e_1 = (1, 0)$ viene dado salvo por un múltiplo entero de 2π por la siguiente fórmula:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\|v\| \|e_1\|} = \frac{v_1}{\|v\|}$$

de esta forma podemos definir el ángulo φ que forma el campo vectorial X a lo largo de la curva α con el generador e_1 de la siguiente manera:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \eta(t), e_1 \rangle}{\|\eta(t)\| \|e_1\|} = \frac{\eta_1(t)}{\|\eta(t)\|}$$

donde $\eta(t)$ es $X(\alpha(t))$, y $\|\eta(t)\|^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$; definiremos ahora $J_\eta(\alpha)$ como sigue:

$$2\pi J_\eta(\alpha) = \varphi(a) - \varphi(b) \tag{3.1}$$

y a partir de esto tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3.2 : Si $\eta(t)$ es continuo, diferenciable y no se anula en α entonces:

$$2\pi J_\eta(\alpha) = \int_a^b \frac{\eta_1 d\eta_2 - \eta_2 d\eta_1}{\|\eta\|^2} dt \tag{3.2}$$

Demostración: Del teorema fundamental del cálculo sabemos que:

$$\begin{aligned} \varphi(a) - \varphi(b) &= \int_a^b d\varphi = \int_a^b \frac{d}{dt} \left\{ \arccos \left(\frac{\eta_1(t)}{\|\eta(t)\|} \right) \right\} dt \\ &= \int_a^b \frac{\eta_1 d\eta_2 - \eta_2 d\eta_1}{\|\eta\|^2} dt = 2\pi \end{aligned}$$

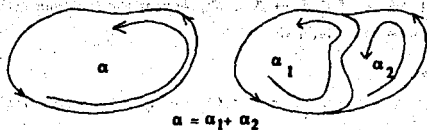


Figura 3-1:

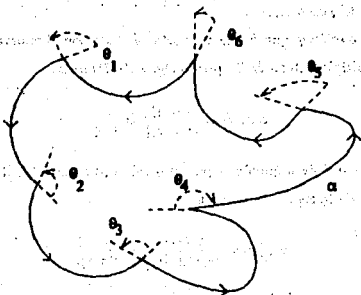


Figura 3-2:

de donde $I_\eta(\alpha) = k \in \mathbb{Z}$. \square

A $I_\eta(\alpha)$ le llamaremos el índice del campo vectorial $\eta = X(\alpha)$ con respecto al curva α .

Definición 3.3 : Sea $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan, definimos $\alpha_i(t) = \alpha(t)$ con $t \in [a_i, a_{i+1}]$ y escribimos $\alpha = \cup \alpha_i$; asimismo definiremos $I_X(\alpha_i) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \det \alpha_i' dt$. A $I_X(\alpha_i)$ le llamaremos la contribución del arco α_i al índice de α .

Con la notación anterior se cumple el siguiente resultado que presentaremos sin demostrar.

Corolario 3.4 : Si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ es decir si α se puede descomponer en dos curvas cerradas como se observa en la figura 3.1, entonces $I_\eta(\alpha) = I_\eta(\alpha_1) + I_\eta(\alpha_2)$. \square

TEOREMA 3.6 (de las tangentes rotantes) : Sea α una curva cerrada parametrizada, C^1 por trozos con vértices en los puntos t_1, \dots, t_h y sea $\eta \neq 0$ el campo vectorial tangente a lo largo de cada curva regular α_i entonces:

$$2\pi \sum_{i=1}^h I_{\eta}(\alpha_i) + \sum_{i=1}^h \theta_i = \pm 2\pi \quad (3.3)$$

donde el signo \pm depende de la orientación de la curva α . (donde los ángulos θ_i de la fórmula son los que se muestran en la figura 3.3).

De este teorema no daremos una demostración en el caso general de una curva C^1 por trozos, lo haremos solamente para el caso particular en que no hay vértices, notemos que esto no es una limitación para nuestros objetivos ya que siempre trabajaremos con curvas de Jordan, es decir curvas homeomorfas a círculos, la demostración que aquí aparece es debida a H. Hopf. La demostración se puede ver en [8] y [13] (ver figura 3.3).

Demostración: Comenzaremos por pensar en una recta T que es tangente a α en un punto $p \in \alpha$, de tal suerte que α cae toda solamente de un lado de T , como sabemos podemos reparametrizar a la curva α para que $\alpha(a) = p$. Sea ahora

$$R = \{(s, t) \in [a, b] \times [a, b] \mid a \leq s \leq t \leq b\}$$

Vamos a definir la siguiente función:

$$\eta(s, t) = \begin{cases} \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{\|\alpha(t) - \alpha(s)\|} & \text{si } (s, t) \neq (a, b), t \neq s \\ \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} & \text{si } t = s \\ -\frac{\alpha'(a)}{\|\alpha'(a)\|} & \text{si } (s, t) = (a, b) \end{cases}$$

nótese que $\eta(s, t)$ es continua y distinta de cero en $[a, b]$, nótese también que $\eta(s, t) = -\eta(t, s)$; es decir son vectores con orientaciones opuestas. Vamos a definir la función φ tal que $\varphi(s, t)$ es el ángulo que forma $\eta(s, t)$ con el vector director de la recta T , es claro que esta función es continua y que $\varphi(a, a) = 0$; entonces $2\pi I_{\eta}(\alpha) = \varphi(b, b) - \varphi(a, a)$ como se puede observar de la definición de φ , ya que $\varphi(t, t)$ es el campo vectorial tangente a α . Debido a la forma en que está colocada la curva α sabemos que $0 \leq \varphi(a, t) \leq \pi$ y que $\varphi(a, b)$ es un múltiplo impar de π de donde se puede deducir que $\varphi(a, b) = \pi$, un argumento similar y el uso de la igualdad $\eta(a, t) = -\eta(t, b)$ nos llevan a concluir que $\pi \leq \varphi(s, b) \leq 2\pi$ y como $\varphi(s, b) -$

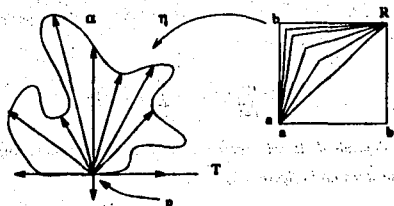


Figura 3-3:

$\varphi(a, b) = \varphi(a, b) - \pi$; obtenemos que $\varphi(b, b) - \pi = \pi$ de donde concluimos que $\varphi(b, b) = 2\pi$. Y por lo tanto $I_\eta(\alpha) = 1$ y se verifica la validez de la fórmula 3.3. \square

Lema 3.6 (8): Si dos campos vectoriales ρ_1 y ρ_2 pueden ser deformados el uno en el otro continuamente, sin invertir orientaciones y de tal forma que nunca apuntan en sentidos opuestos, entonces sus índices con respecto a cualquier curva de Jordan α son iguales. Si a dos campos les pasa esto diremos que son equivalentes.

Demostración: Si tenemos dos campos vectoriales continuos ρ_1 y ρ_2 que se pueden deformar el uno en el otro sin invertir orientaciones entonces existe una función $\Psi : [c, d] \rightarrow X$ (\mathbb{R}^2) con las siguientes características; (i) Ψ es continua, (ii) $\Psi(c) = \rho_1$; $\Psi(d) = \rho_2$ y (iii) $\det \Psi'(t) \neq 0$ para toda $t \in [c, d]$; es claro que para cada $t \in [c, d]$ lo que tenemos es un campo vectorial y que cada campo tiene definido un índice, es decir tenemos definida una función $I_{\Psi(t)}(\alpha) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, ahora bien en el caso que ρ_1 y ρ_2 son campos vectoriales continuos entonces por la forma en que se definió el índice tenemos que la función $I_{\Psi(t)}(\alpha)$ es continua y por lo tanto debe ser constante en todo $[c, d]$, de donde obtendremos el resultado deseado. \square

El hecho de que este teorema sólo lo pueda probar para campos vectoriales continuos no constituye una limitante, este último comentario se podrá apreciar en la siguiente sección.

3.2 Índices y singularidades.

Tenemos definido el índice de un campo vectorial con respecto de una curva de Jordan, lo que haremos en esta sección es extender este concepto al de índice con respecto a un punto singular,

ya que en este trabajo lo que nos interesará será precisamente calcular índices de campos vectoriales continuos con respecto a puntos singulares por lo cual a partir de este momento hablaremos únicamente de campos vectoriales continuos. Sabemos bien que si $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ es un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Δ de \mathbb{R}^2 entonces tenemos que:

$$2\pi I_\eta(\alpha) = \int_{\alpha} \frac{\eta_1 d\eta_2 - \eta_2 d\eta_1}{\|\eta\|^3}$$

donde α es una curva de Jordán. Definiremos entonces el índice de un campo vectorial con respecto a un punto singular p como la integral 3.2 evaluada sobre cualquier curva de Jordán α que contenga a p en su interior; esta última definición queda bien determinada gracias al siguiente:

Lema 3.7 [13]: Si α_1 y α_2 son dos curvas definidas en un abierto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ que se pueden deformar una en la otra sin pasar por un punto singular entonces $I_\eta(\alpha_1) = I_\eta(\alpha_2)$.

Demostración: La demostración de este lema es bastante parecida a la del anterior, (ver fig 3.4) comenzaremos por suponer que α_1 y α_2 son dos curvas ajenas que se pueden deformar la una en la otra, entonces podemos construir una función continua con inversa continua (homeomorfismo) entre la región delimitada por estas dos curvas y la región delimitada por un par de círculos C_1 y C_2 ; asimismo podemos encontrar una función Ψ con las propiedades (i) y (ii) del lema anterior y obtener una familia de círculos C_i con un parámetro $i \in [c, d]$; y nuevamente de la definición del índice la continuidad de esta función nos garantiza la igualdad deseada. Por otra parte si α_1 y α_2 se intersectan no importa por que podemos pensar que $\Psi(\alpha_2) = C_i$ para algún $i \in (c, d)$ y como de cualquier forma $I_\eta(C_i)$ permanece constante el resultado sigue siendo válido.

Por último mencionaré que si a dos curvas les pasa lo anterior diremos que son dos curvas homeomorfas. \square

Una vez que ha sido bien precisado este concepto tenemos una consecuencia de este resultado en el siguiente:

Corolario 3.8 : Si α es una curva de Jordán que no contiene puntos singulares en su interior entonces $I_\eta(\alpha) = 0$.

Demostración: Como el interior de una curva de Jordán es un conjunto simplemente conexo entonces podemos deformar α en sobre su propio interior hasta convertirlo en un círculo



Figura 3-4:

C de radio pequeño y centro en cualquier p , ahora bien es intuitivamente claro que la variación del ángulo que forman η y e_1 sobre este círculo es pequeña y que tiende al valor del ángulo que forman $\eta(p)$ y e_1 cuando hacemos que el círculo se parezca a p , de esta idea es claro entonces que por el lema anterior $I_\eta(\alpha) = 0$ (ver [13]). \square

Hasta este momento no hemos mencionado explícitamente nada acerca de la relación que tienen estos conceptos con las ecuaciones diferenciales, ha llegado el momento de establecer una conexión entre ellos a través del siguiente:

TEOREMA 3.9 [13]: Sea X un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un conjunto abierto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Si α es una órbita cerrada de X tal que su interior está contenido en Δ , entonces existe un punto singular contenido en el interior de α .

Demostración: Como una órbita cerrada es una curva de Jordan entonces su interior es simplemente conexo, supongamos que en el interior de α no hay puntos singulares entonces por el lema anterior tenemos que $I_\eta(\alpha) = 0$. Pero por otra parte sabemos que por ser α curva integral de X entonces X es tangente a α y por el teorema de las tangentes rotantes tenemos que $I_\eta(\alpha) = 1$ lo cual constituye la contradicción que establece al teorema. (ver una demostración alternativa en el Sotomayor pag 254). \square

Observación 3.10 : Sea X un campo vectorial continuo en S^2 , entonces existe al menos un punto $p \in S^2$ tal que $X(p) = 0$. Supongamos que $X(p) \neq 0$ para todo $p \in S^2$, si nos fijamos en un punto cualquiera $q \in S^2$ y observamos la órbita $\varphi(t)$ que pasa por q , entonces por ser S^2 compacto $\omega(\varphi(t))$ y $\alpha(\varphi(t))$ son no vacíos. Ahora bien por el teorema de Poincaré-Bendixon (ver capítulo anterior) estos conjuntos deben ser órbitas cerradas, pero en tal caso tenemos una contradicción. \square

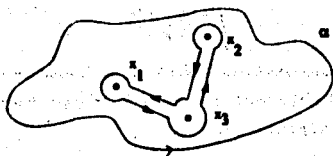


Figura 3-5:

La sencilla forma en que ha sido probado este teorema ejemplifica lo útil que son estos conceptos y nos provee de una importante herramienta para nuestro análisis posterior. Solo falta antes de pasar a calcular los índices de algunos campos vectoriales comentar que el uso del concepto del índice de un punto singular con respecto a una curva de Jordan puede ser llevado aún más lejos si se desarrolla para el caso de variedades compactas orientables para mayor información acerca de esto último ver Do Carmo [6] secciones 2.7, 4.4, 4.5, 5.7 y 5.10. donde se puede observar como se relaciona la suma de los índices con el llamado genero de la superficie y otras cantidades propias de las superficies como son la curvatura gaussiana y algunas más que allí se definen. Esto último a través del Teorema de Poincaré. (ver capítulo 4 de esta tesis)

Nota 3.1 : Sea α una curva de Jordan tal que en su interior tiene solamente una cantidad finita de singularidades z_1, \dots, z_k y $\eta \neq 0$ en α entonces: (ver fig 3.5)

$$I_{\eta}(\alpha) = \sum I_{\eta}(z_i)$$

Nota 3.2 : La notación $I_{\eta}(z_i)$ significa: el índice del campo vectorial $\eta = X(\alpha)$ con respecto a la singularidad z_i , ya que como sabemos este número es independiente de la forma en que se escoge α de hoy en adelante solo calcularemos índices con respecto a singularidades aisladas.

Nota 3.3 : En pocas palabras lo que estamos calculando con $I_{\eta}(\alpha)$ no es otra cosa que la rotación de η a lo largo de α .

3.2.1 Ejemplos.

Ejemplo 3.1 : Comenzaremos con un ejemplo sencillo. El campo $F(x, y) = (-x, y)$ y vamos a calcular el índice del punto singular $0 = (0, 0)$. De acuerdo con la definición debemos calcular

la integral:

$$\int_{\alpha} \frac{-x dy + y dx}{x^2 + y^2}$$

sobre la curva α (como sabemos podemos escoger la que mejor convenga a nuestros intereses de acuerdo con el lema 3.6) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ y esta integral como sabemos vale -2π . De donde el índice del punto es -1 .

Ejemplo 3.3 [13]: Dependiendo si $ad - bc > 0$ o $ad - bc < 0$ el índice del origen con respecto al campo $X_0(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ es $+1$ o -1 . Ya que si $ad - bc > 0$ entonces el campo X_0 puede ser deformado continuamente y sin invertir orientaciones en alguno de los campos $F_1 = (x, y)$ o $F_2 = (-y, x)$, la transformación que nos sirve en este caso es $\Psi(t) = (1-t)F_1 + tX_0$ con $t \in [0, 1]$ y de manera análoga podemos proceder en el caso $ad - bc < 0$ pero esta vez con el campo $G = (-x, y)$, ver ejemplos 3.8, 3.9 y figuras 3.8(a)-3.8(d) donde se muestran los retratos fase de tales campos. Este ejemplo puede ser extendido de la siguiente forma; si $Y = X_0 + Y_1$ donde Y_1 tiene la propiedad de que $\lim_{x \rightarrow 0} Y_1 / \|x\| = 0$ cuando $x \rightarrow 0$ entonces el índice del origen respecto a Y sigue siendo ± 1 ya que por un lado el campo X_0 sigue siendo equivalente al campo F y si además tomamos la familia de curvas homeomorfas $\alpha_r(t) = (r \cos t, r \sin t)$ con $r \rightarrow 0$ entonces tendremos que $I_{Y_1}(0) = 0$ y el resultado continua siendo válido.

Ejemplo 3.3 [13]: Sea X un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto abierto Δ tal que $\det(\partial X_i / \partial x_j) \neq 0$ en todos los puntos singulares. Si α es una curva de Jordan con su interior contenido en Δ y tal que $X \neq 0$ en α . Entonces hay una cantidad finita de puntos singulares y_1, \dots, y_k en el interior de α y además $I_X(\alpha) = n_+ - n_-$ donde n_+ (n_-) es el número de singularidades tales que $\det(\partial X_i / \partial x_j) > 0$ ($\det(\partial X_i / \partial x_j) < 0$).

Prueba: Nótese que la condición $\det(\partial X_i / \partial x_j) \neq 0$, solo nos deja dos opciones para el punto singular y_i :

1. y_i es un punto hiperbólico.¹
2. y_i es un centro para la ecuación diferencial $\dot{z} = DX(z)$.

En el primer caso sabemos que el retrato fase de X es topológicamente equivalente al $DX(y_i)$ y el ejemplo anterior nos muestra que para tales singularidades el índice es siempre

¹ Un punto singular es hiperbólico, si ninguno de los valores propios de la matriz $DX(p)$ tiene parte real nula.

±1. Si γ es un centro para $\dot{x} = DX$, entonces existe una constante no nula b , tal que esta ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = b$$

y en tal caso sabemos que el índice de γ es 1, es decir:

$$I = I_{DX}(\gamma) = \int_{\alpha} d\theta = \int_{\alpha} b dt$$

donde α es cualquier curva cerrada positivamente orientada que da una vuelta completa alrededor de γ . Ahora bien si pensamos en un campo vectorial X cuya parte lineal cerca de γ es un centro, entonces la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$ tiene la forma (en coordenadas polares):

$$\dot{r} = P \cos \theta + Q \sin \theta$$

$$r\dot{\theta} = b + P \sin \theta - Q \cos \theta$$

con $P(r, \theta)$ y $Q(r, \theta)$ dos funciones tales que $\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{P}{r} \right\| = \lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{Q}{r} \right\| = 0$. Al calcular el índice de γ con respecto a una curva α obtenemos:

$$I_X(\gamma) = \int_{\alpha} d\theta = \int_{\alpha} \left(b + \frac{P}{r} \cos \theta + \frac{Q}{r} \sin \theta \right) dt = 1$$

ya que como el índice es un número entero entonces existe una curva cerrada α tal que la contribución de los términos $\frac{P}{r} \cos \theta$ y $\frac{Q}{r} \sin \theta$ es despreciable, es decir en las singularidades en las que la parte lineal tiene un centro, el campo tiene una singularidad en la que el índice sigue siendo 1. Para concluir aplicamos el resultado de la nota 1 y obtenemos lo que queremos. Hay que notar lo siguiente: si γ es un punto singular del campo tal que $\det(DX_i/Dx_j) \neq 0$ en ese punto, entonces por ser X un difeomorfismo local de clase C^1 se tiene que γ es una singularidad aislada. Como $\alpha \cup \text{int}(\alpha)$ es compacto y no hay singularidades sobre α en su interior sólo hay una cantidad finita de singularidades.

Ejemplo 3.4 : Calculemos el índice del origen con respecto al campo vectorial $Z = (x^2 - y^2, -2xy)$, para ello escojamos la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ y calculemos la integral 3.3 para obtener $I_Z(0) = -2$

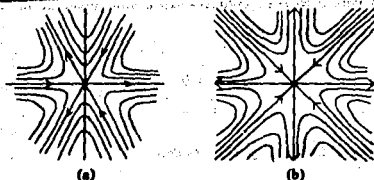


Figura 3-6:

Ejemplo 3.5 : Calcular el índice de el origen con respecto al campo vectorial $W = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$, para ello escogemos la curva $\alpha(t)$ del ejemplo anterior y calculamos la integral directamente. Obtendremos $I_W(0) = -3$.

Más adelante veremos un resultado que nos permitirá calcular con mayor facilidad estos resultados.

3.3 Clasificación de singularidades.

3.3.1 Puntos de rotación.

Comenzamos con la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

y consideraremos el comportamiento en las cercanías de un punto singular, para mayor facilidad vamos a suponer que tal punto es el origen y que además la ecuación no se anula en otro punto cercano al origen, es decir:

$$X(0) = 0 \text{ y si } p \neq 0 \text{ y } \|p\| < \varepsilon \text{ entonces } X(p) \neq 0$$

sabemos del teorema de existencia y unicidad que una solución $\varphi(t)$ al problema 3.4 está definida y es única en un intervalo máximo (ω_-, ω_+) y si únicamente fijamos nuestra atención en la semi-órbita positiva de una solución entonces la tendremos definida en un intervalo $[0, \omega_+)$ entonces por el teorema de Poincaré-Bendixson tenemos las siguientes posibilidades:

- i) Existe algún $t_0 \in [0, \omega_+)$ con la propiedad de que $\|\varphi(t_0)\| = \varepsilon$.
- ii) $\omega_+ = \infty$ y entonces $\varphi(t)$ es tal que $\varphi(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- iii) $\omega_+ = \infty$ y pasa lo mismo que en (ii) solo que $\varphi(t)$ es una espiral que rodea al origen.
- iv) $\omega_+ = \infty$ pero ahora $\varphi(t)$ es una colección de curvas cerradas que rodean al origen.
- v) $\omega_+ = \infty$ y $\varphi(t)$ es una curva de Jordan que contiene al origen en su interior.

Cabe mencionar que estos casos no son mutuamente excluyentes.

Definición 3.11 [13]: Si p es un punto singular tal que toda vecindad de él contiene órbitas cerradas entonces diremos que p es un punto de rotación.

Nótese que todas las órbitas en una vecindad de un punto singular p pueden ser caracterizadas de la siguiente forma. Si γ es una solución de 3.4 es o bien una órbita cerrada o una espiral tal que sus conjuntos ω -límite y α -límite son órbitas cerradas alrededor de p .

Definición 3.12 : Un punto de rotación tal que en cualquier vecindad de él todas las órbitas son cerradas se llama centro.

Ejemplos.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xu(r) - yv(r) \\ \dot{y} &= xv(r) + yu(r) \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $u(r), v(r)$ son funciones continuas de $r = \|x\|$ que satisfacen $u^2 + v^2 \neq 0$. Notemos que el origen es un punto singular aislado de esta ecuación; si hacemos un cambio de coordenadas cartesianas a polares (ver sección 5.3) la ecuación se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= ru(r) \\ \dot{\theta} &= v(r) \end{aligned} \tag{3.6}$$

para los ejemplos siguientes trabajaremos únicamente con la ecuación 3.6.

Ejemplo 3.6 : Supongamos que $u(r) = 0$ y $v(r) = \beta \neq 0$ entonces la ecuación 3.5 queda como

$$\dot{x} = -\beta y$$

$$\dot{y} = \beta x$$

y para esta ecuación las soluciones son círculos que rodean al origen y donde este último es un centro.

Ejemplo 3.7 : Supongamos ahora que $u(r) = r \operatorname{sen}(1/r)$ y $v(r) = 1$, la ecuación 3.6 queda como:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^2 \operatorname{sen}(1/r) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

sabemos que el origen es un punto singular y además las soluciones de 3.7 con condición inicial en los círculos de radio $1/k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ son órbitas cerradas que rodean al origen y por otra parte como;

$$r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right) = \begin{cases} > 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ < 0 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

entonces se observa que las soluciones con condición inicial en la región limitada por los círculos de radio $1/k\pi$ y $1/(k+1)\pi$ son espirales alrededor del origen tales que cuando n es impar tienen al círculo de radio $1/k\pi$ como α -límite y al de radio $1/(k+1)\pi$ como ω -límite; y cuando n es par los papeles se invierten.

3.3.2 Atractores.

De todas las singularidades, aquellas que no son puntos de rotación son las más difíciles de describir.

Una singularidad aislada p se llama *atractor* si en toda vecindad V , de p todas las soluciones de la ecuación 3.4 son tales que están definidas para toda $t \geq 0$ ($t \leq 0$) y tienden a p cuando t tiende a ∞ ($-\infty$). Más aún si todas las soluciones son espirales entonces el atractor se llama *foco* si todas las órbitas tienen bien definido un vector tangente en p entonces el atractor se llama *nodo*. Un nodo se llama *nodo propio* si para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$, hay una solución tal que su vector tangente en p forma un ángulo θ con el eje x , si este no es el caso entonces se llama *nodo impropio*.

Para ilustrar estos casos tenemos lo siguientes:

Ejemplos.

Ejemplo 3.8 : Consideremos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta y \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y \end{aligned} \quad (3.8)$$

con $\beta \neq 0$ y polinomio característico $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$ y que tiene las siguientes raíces $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, las soluciones son entonces de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\alpha t} (\cos \beta t \lambda_1 - \sin \beta t \lambda_2) \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t} (\cos \beta t \lambda_1 + \sin \beta t \lambda_2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

en este par de fórmulas se ve que sin dificultad que el origen es un atractor y que es un foco cuando $\alpha, \beta \neq 0$.

Ejemplo 3.9 : Consideremos ahora el caso más general de un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}$$

con $\rho = ad - bc \neq 0$. El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + \rho$ y sus raíces vienen dadas por $\lambda_{1,2} = 1/2 \left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4\rho} \right)$ y las soluciones del sistema quedarán en términos de las raíces, distinguimos tres casos (ver figura 3.8):

- Las raíces son reales, iguales y distintas de cero.
- Las raíces son reales y distintas.
- Las raíces son complejas.

Caso (a): Supongamos que P tiene dos raíces reales iguales, entonces pueden pasar dos subcasos, en ambos el origen es solución :

- La raíz tiene asociados dos vectores propios v_1, v_2 linealmente independientes, entonces las soluciones tienen la forma:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2$$

de donde se observa que si $x < 0$ entonces cuando $t \rightarrow \infty$ todas las soluciones no triviales son semirectas que se acercan al origen, y cuando $x > 0$ todas las soluciones no triviales vienen del origen; en este caso el origen es un nodo propio. (ver figura 3.8(a))

2.- Los vectores v_1 y v_2 son linealmente dependientes, y entonces las soluciones son de la forma:

$$\varphi(t) = (c_1 + tc_2)e^{at}v_1 + c_3e^{at}v_2$$

en este caso el origen sigue siendo un atractor pero ahora es nodo impropio, ya que si calculamos el límite cuando $t \rightarrow \pm\infty$ del cociente $(\varphi_2/\varphi_1) = 0$ ($c_2 \neq 0$), en el caso en que $c_2 = 0$, la solución es el eje x (ver figura 3.8(b)).

Caso (b): Cada una de las raíces tiene asociado un vector propio v_1, v_2 las soluciones son entonces de la forma:

$$\varphi(t) = c_1e^{x_1t}v_1 + c_2e^{x_2t}v_2$$

y tenemos aquí tres subcasos:

1.- Cuando $x_2 < x_1 < 0$, todas las soluciones distintas de cero tienden al origen si $t \rightarrow \infty$ por otra parte si suponemos que $c_1 \neq 0$ entonces el límite cuando $t \rightarrow \infty$ del cociente $(\varphi_2/\varphi_1) = 0$ y si $c_1 = 0$ la solución es el eje y , de donde se deduce que el origen es un nodo impropio.

2.- Cuando $0 < x_2 < x_1$, todas las soluciones distintas de cero tienden al origen si $t \rightarrow -\infty$, y pasa lo mismo que en el caso anterior.

3.- Cuando $x_2 > 0 > x_1$, en el caso en que $c_1 = 0$ la solución es el eje x y si $c_2 = 0$ el eje y es la solución, (cuando $c_1 = c_2 = 0$ la solución es el origen) en ambos casos las soluciones se acercan al origen cuando $t \rightarrow \infty$, y si $c_1, c_2 \neq 0$ entonces las soluciones tienden a ∞ si $t \rightarrow \infty$, este es un ejemplo de una singularidad que no es un atractor ya que solo una cantidad finita de soluciones se acercan al origen, a este tipo de singularidad le llamaremos silla.

Caso (c): Del ejemplo anterior se sabe que las soluciones de la ecuación tienen la forma:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t)\lambda_1 + c_2\varphi_2(t)\lambda_2$$

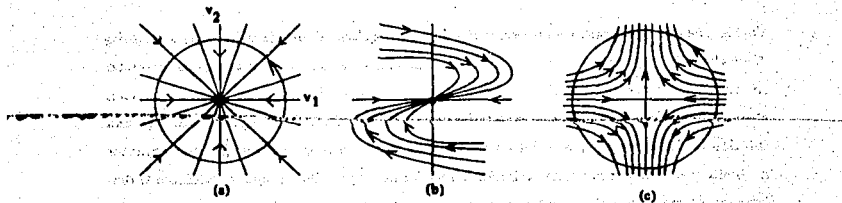


Figura 3-7:

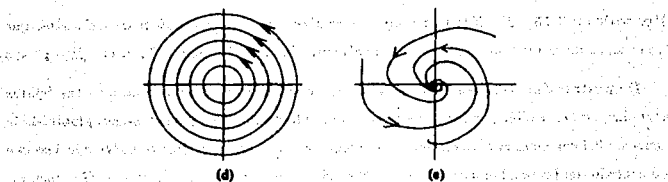


Figura 3-8:

con λ_1 y λ_2 los vectores propios asociados a las raíces, y donde φ_1 y φ_2 están dadas por las ecuaciones 3.9 también aquí tenemos tres casos:

- 1.- $\alpha = 0$ en este caso las soluciones son elipses alrededor del origen que es por lo tanto un centro.
- 2.- $\alpha < 0$ en este caso las soluciones son espirales que tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto el origen es un foco.
- 3.- $\alpha > 0$ en este caso las soluciones son espirales que tienden al origen cuando $t \rightarrow -\infty$ y por lo tanto el origen es un foco.

3.4 Sectores.

Vamos a pensar que estamos en las cercanías de una singularidad aislada p del campo vectorial X de clase C^1 , la pregunta que trataremos de responder en esta sección es la siguiente: ¿cómo se ven las soluciones de la ecuación diferencial 3.4 cerca de p ? Si p fuera un punto de rotación entonces sabemos que una buena caracterización de las soluciones es la siguiente: Si γ es una solución de 3.4 entonces γ es o bien una órbita cerrada o una espiral tal que sus conjuntos ω -límite y α -límite son órbitas cerradas alrededor de p , por ello de aquí en adelante trabajaremos solamente con singularidades que no son puntos de rotación, el camino para responder a esta pregunta nos llevará a definir algunos conceptos importantes, la mayoría de ellos se pueden consultar en [13], en el artículo de Bendixon [5] y en Andronov [2].

Proposición 3.13 : Sea $X(s)$ un campo vectorial continuo con p una singularidad aislada que no es un punto de rotación. Entonces existe al menos una solución nula en $V_p = \{s : \|s - p\| < \varepsilon\}$.

Demostración: Supongamos que V_p es una vecindad del punto p que no contiene órbitas cerradas, esto es posible gracias a que p no es un punto de rotación, y que tenemos planteada la ecuación 3.4 con condición inicial en V_p , el hecho de que no haya órbitas cerradas nos dice que de acuerdo con las posibilidades (i)-(v) de la sección anterior, que una solución γ sólo tenemos:

- i) γ permanece indefinidamente en $CI(V_p)$, es decir $\omega_+ = \infty$ ($\omega_- = -\infty$) y $\gamma(t) \rightarrow p$ cuando $t \rightarrow \omega_+$ (ω_-), a este tipo de soluciones las llamaremos soluciones nulas positivas (negativas).
- ii) γ sale de $CI(V_p)$ en algún momento, es decir existe algún t_0 tal que $\|\gamma(t_0) - p\| = \varepsilon$.

En este momento haremos una suposición que nos ayudará a fijar ideas, supongamos que en V_p no hay soluciones nulas de ningún tipo. Sea $\{x_n\} \subset V_p$ tal que $x_n \rightarrow p$ y γ_n la solución de 3.4 cuya condición inicial es x_n , para algún $t_n \in [0, \omega_+)$ se da la igualdad $\|\gamma_n(t_n) - p\| = \varepsilon$, reparametricemos estas soluciones como sigue: $\gamma_n(s) = \gamma_n(t_n + s)$ de tal suerte que $\|\gamma_n(0) - p\| = \varepsilon$ y $\gamma_n(t_n) = x_n$. Por la proposición 5.8 podemos escoger un subsecuencia que llamaremos nuevamente $\gamma_n(t)$ tal γ_n converge uniformemente en compactos a una solución de 3.4 definida en un intervalo $[0, \omega_+)$ con $\omega_+ = \lim \omega_{n,+}$, es claro que $\omega_+ > 0$ y como $\gamma_n(t_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces no hay más que $\omega_+ = \infty$ pero esto sólo puede ser cierto si hay soluciones nulas en V_p . \square

Antes de continuar vamos a dar una definición que será útil más adelante:

Definición 3.14 : Sea J una curva de Jordan recorrida en el sentido positivo que rodea a p una singularidad aislada del campo vectorial X , si γ es una solución de la ec. 3.4 con condición inicial en J y tal que $\gamma \subset \text{Int}(J)$ para toda $t > 0$ ($t < 0$) la llamaremos solución base nula positiva (negativa) de J . Diremos que $\gamma \in NB_J$.

Nótese que una vez establecida la última proposición tenemos una importante característica de las soluciones en una vecindad V_p del punto singular p , ya que si p es una singularidad aislada que no es un punto de rotación entonces para toda curva de Jordan J tendremos que $NB_J \neq \emptyset$.

Definición 3.15 : Si dada una curva de Jordan J que rodea una singularidad aislada p , existen $\gamma_1, \gamma_2 \in NB_J$ tales que $\gamma_1(0) = q_1 \in J$ entonces al interior de la curva formada por los arcos γ_1, γ_2 , el arco (J_{12}) sobre J que une q_1 con q_2 y la singularidad p , le llamaremos el sector S de J determinado por γ_1 y γ_2 .

Hay que hacer ver que en la definición anterior no se ha excluido el caso en que q_1 coincida con q_2 en tal caso $(J_{12}) = q_1$ y por unicidad de soluciones $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ forman parte de una misma solución γ con $\omega(\gamma) = \alpha(\gamma) = p$ y $\gamma(t_0) = q_1$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos ahora que tenemos una solución γ de 3.4 tal que $\gamma \subset \text{Int}(J) \cup J$ para toda $t \in \mathbb{R}$ entonces la curva γ y la singularidad p forman una curva de Jordan, si suponemos que $\gamma \cap J \neq \emptyset$ entonces por ser ésta intersección un cerrado existen $t_2 = \min \{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in J\} \leq t_1 = \max \{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in J\}$ y entonces las curvas $\gamma_1(t) = \gamma(t + t_1)$ para $t \geq 0$ y $\gamma_2(t) = \gamma(t + t_2)$ para $t \leq 0$ son soluciones nulas básicas para J , vamos a fijar nuestra atención en el interior I de la curva $\gamma(t)$, si el sector S de J determinado por $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ es tal que $I \subseteq S$ entonces diremos que S es un sector *elíptico*, es claro que cuando $t_1 = t_2$ entonces $I = S$ y además si $\phi(t)$ es una solución de 3.4 con condición inicial en $\text{int}(I)$ entonces $\phi(t)$ está definida para toda $t \in \mathbb{R}$ y $\alpha(\phi(t)) = \omega(\phi(t)) = p$. Dado un sector S que no es *elíptico* puede suceder que en $\text{Int}(S) \cup J_{12}$ no haya soluciones nulas básicas en cuyo caso diremos que S es un sector *hiperbólico*, por último si un sector S determinado por las soluciones $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ es tal que ambas son soluciones nulas base positivas o negativas y en $\text{int}(S)$ no hay soluciones nulas básicas del tipo opuesto entonces diremos que S es un sector *parabólico positivo o negativo* (ver fig. 3.9).

nótese que en el interior de estos tres tipos de sectores puede haber una o varias soluciones $\phi_n(t)$ definidas para toda $t \in \mathbb{R}$ y si este es el caso entonces toda solución con condición inicial en el interior de $\phi_n(t)$ está definida para toda $t \in \mathbb{R}$. Denotaremos como S_e a la *parte elíptica* del sector S , es decir al conjunto de puntos en S tales que están en alguna solución definida en

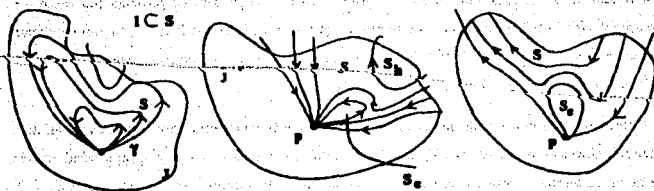


Figura 3-9:

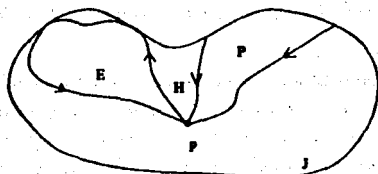


Figura 3-10:

todo E unió a p , el conjunto S_0 es cerrado ya que las curvas $\phi(t) \cup p$ son curvas de Jordán, y además si S es un sector parabólico o hiperbólico se cumple que $S_0 \cap J_{12} = \emptyset$, también puede suceder que haya una o varias soluciones con la propiedad de que ambos extremos están en J , denotaremos como S_h a la parte hiperbólica de S . (ver fig 3.9), es decir a la cerradura del conjunto de puntos en S tales que están en alguna de esas soluciones con ambos extremos en J_{12} .

Lema 3.10 : Sea X un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo Δ que contiene a la singularidad aislada p . Sea J una curva de Jordán contenida en Δ alrededor de p . Entonces existen una cantidad finita de sectores hiperbólicos y elípticos en J .

Demostración: Supongamos que tenemos una curva de Jordán tal que contiene una infinidad de sectores ya sean (a) elípticos o (b) hiperbólicos, entonces:

- (a) Si son elípticos, esto equivale a tener una infinidad de soluciones $\varphi_n(t)$ tales que están definidas para todo R y que además $\varphi_n(t) \cap J \neq \emptyset$, como consecuencia de esto podemos construir una infinidad de soluciones nulas básicas negativas o positivas, es decir soluciones definidas para toda $t > 0$ ($t < 0$) con condición inicial en J , por ser J un compacto entonces el conjunto $\varphi_n(0)$ tiene un punto de acumulación al que llamaremos $\varphi_0(0)$, es decir podemos construir una sucesión monótona de soluciones nulas básicas positivas y negativas tales que $\varphi_n(0) \rightarrow \varphi_0(0)$.
- (b) Si son hiperbólicos entonces hay una infinidad de soluciones nulas básicas negativas y positivas por lo tanto en éste caso también podemos construir una sucesión monótona de soluciones nulas básicas positivas y negativas tales que $\varphi_n(0) \rightarrow \varphi_0(0)$.

Como en ambos casos podemos construir tal sucesión monótona de soluciones nulas básicas positivas y negativas entonces, sin pérdida de generalidad podemos suponer que tiene la siguiente propiedad: $\varphi_{2n}(t)$ es una solución nula básica positiva y $\varphi_{2n+1}(t)$ es una solución nula básica negativa, pero $\varphi_{2n}(t) - \varphi_1(t)$ y $\varphi_{2n+1}(t) - \varphi_2(t)$ entonces por la proposición 5.8 $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son soluciones de la ecuación 3.4 y se tiene que $\varphi_1(t)$ es una solución nula básica positiva y $\varphi_2(t)$ es una solución nula básica negativa, pero $\varphi_{2n}(0) \rightarrow \varphi_0(0)$ y $\varphi_{2n+1}(0) \rightarrow \varphi_0(0)$ de donde por unicidad de soluciones $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ lo cual es imposible. \square

Supongamos que tenemos un sector S elíptico, entonces hay una solución ψ definida en todo R tal que $\text{Int}(\tilde{\psi}) = I \subseteq S$ (con $\tilde{\psi} = \psi \cup p$) y por consiguiente toda solución φ con condición inicial $x \in I$ es tal que $\varphi \rightarrow p$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, pero en un sector elíptico puede haber soluciones con ambos extremos en J_{12} : vamos a ver que tales soluciones no se acercan mucho a p (es decir $p \notin S_h$) para hacerlo supongamos que pasa lo contrario, es decir que hay una sucesión de puntos $p_n \rightarrow p$ y una familia de soluciones φ_n tales que $\varphi_n(0) = p_n$ y que $r_n = \varphi_n(t_n)$, $q_n = \varphi_n(s_n) \in J_{12}$, como J_{12} es un compacto entonces por el teorema de Arzela existen subsucesiones a las que volveremos a llamar r_n , q_n tales que $r_n \rightarrow r \in J_{12}$ y $q_n \rightarrow q \in J_{12}$, hay que darnos cuenta que por el mismo argumento que utilizamos en la demostración de la proposición 3.13 las soluciones φ_r y φ_q que pasan por los puntos r y q respectivamente son soluciones nulas básicas lo cual contradice el hecho que S es un sector elíptico. Por otra parte si suponemos que S es un sector parabólico entonces podemos suponer que las soluciones que lo determinan son ambas positivas, nuevamente puede haber soluciones con ambos extremos en J_{12} pero con el mismo argumento que en el caso anterior estas soluciones no pueden acercarse

mucho a p y por lo tanto $p \notin S_h$. De estos últimos comentarios se deduce la siguiente:

Proposición 3.17 [2]: Supongamos que en el sector S determinado por las soluciones nulas básicas φ_1, φ_2 , la singularidad p y el arco J_{12} , existe una sucesión de puntos $p_n \rightarrow p$ tal que para todas las soluciones φ_n de la ecuación 3.4 con condición inicial p_n existen $a_n < 0 < t_n$ tales que $\varphi_n(t_n), \varphi_n(a_n) \in J_{12}$ entonces S es un sector hiperbólico, más aún si φ_1 y φ_2 son las soluciones definidas arriba éstas son nulas básicas de diferentes tipos, es decir una es solución nula básica positiva y la otra es negativa. \square

Corolario 3.18 [2]: Con las hipótesis de la proposición anterior, si $d(r_n, r) < \epsilon$ entonces la solución ψ_n de la ecuación diferencial 3.4 con condición inicial r_n es tal que existe $t' > 0$ con la propiedad de que $\psi_n(t') \notin B_\epsilon(\varphi_r) = \{z \in \mathbb{R}^2 : d(z, \varphi_r) < \epsilon\}$.

Nota 3.4 [2]: Cabe mencionar que si tenemos una curva de Jordan J que rodea a una singularidad aislada p y dos soluciones nulas básicas φ_1, φ_2 de distintos tipos (es decir una positiva y otra negativa) en su interior, entonces la región S delimitada por $\varphi_1, \varphi_2, J_{12}$ y p tiene una de las siguientes propiedades:

- a) Existe un sector hiperbólico \hat{S} tal que $\hat{S} \subseteq S$.
- b) Existe un sector elíptico \hat{S} tal que $\hat{S} \subseteq S$.

Para dar una demostración de esta última nota basta probar que los sectores parabólicos no contienen sectores elípticos ni hiperbólicos. Esto se prueba en la demostración del siguiente:

Lema 3.19 : Con las hipótesis del lema anterior. Si del interior de la curva de Jordan J sustramos los interiores de todos los sectores elípticos e hiperbólicos entonces el conjunto que queda, al que llamaremos residuo es, o bien vacío, el interior de J o se puede ver como una unión finita de sectores parabólicos ajenos dos a dos. (ver fig 3.11)

Demostración: Supongamos que sustramos las cerraduras de todos los sectores elípticos e hiperbólicos (si es que los hay), del interior de J y que el residuo se puede ver como la unión de sectores S , vamos a mostrar que tales sectores deben ser parabólicos. Sea pues una región S contenida en el interior de J que en su interior no contiene sectores elípticos ni hiperbólicos,

²si una solución ψ tiene esta propiedad se dice que es orbitalmente inestable o que es una órbita singular.

supongamos primero que las soluciones nulas básicas φ_1, φ_2 que determinan a dicha región son de tipos distintos. (no olvidemos que ambas soluciones tienden a una singularidad aislada 0) podemos suponer sin pérdida de generalidad que φ_1 es una solución nula básica positiva y que φ_2 es una solución nula básica negativa; a continuación nos damos cuenta que si recorremos el arco J_{12} en el sentido que nos lleva del punto $\varphi_1(0)$ al punto $\varphi_2(0)$ hay una última solución base nula positiva ψ_1 (la cual en el peor de los casos es φ_1), tal solución interseca al arco J_{12} en un último punto $p_1 = \psi_1(t_1)$ (posiblemente $\varphi_1(0)$) con la propiedad de que si $t > t_1$ entonces $\psi_1(t)$ esta siempre en el interior de S ; gracias a que S no contiene en su interior sectores elípticos podemos asegurar que $p_1 \neq \varphi_2(0)$. El procedimiento que acabamos de llevar a cabo puede ser repetido ahora en el sentido que nos lleva de $\varphi_2(0)$ al punto $\varphi_1(0)$ para encontrar un punto $q_1 = \psi_2(t'_1)$ con la propiedad de que si $t < t'_1$ entonces $\psi_2(t)$ es un punto interior de S , como además S no contiene sectores elípticos entonces $q_1 \neq p_1$, sin embargo nada impide que este par de soluciones no se intersecten más de una vez con el arco J_{12} , sea pues p_2 el primer punto sobre la solución $\psi_1(t)$ tal que $\psi_1(t)$ interseca al arco J_{12} , y q_2 el último punto sobre la solución $\psi_2(t)$ tal que $\psi_2(t)$ interseca al arco J_{12} nuevamente $p_2 \neq q_2$. Sean C_{12} el arco sobre J que une a los puntos p_1 y p_2 , C^{12} el arco sobre J que une a q_1 con q_2 y C_{11} el arco que une los puntos p_1 con q_1 . fijemos ahora nuestra atención en el sector S determinado por las soluciones $\psi_1(t)$ (a partir de p_2), $\psi_2(t)$ (a partir de q_2) y la singularidad 0, supongamos que tenemos una solución con condición inicial en el interior la curva C_{12} es fácil ver que esta solución tiene sus dos extremos en C_{12} y nos podemos dar cuenta que pasa lo mismo para la curva C^{12} ; por otra parte si consideramos una solución con condición inicial en el interior de la curva C^{11} es claro que también tiene ambos extremos en tal curva y por consiguiente S es un sector hiperbólico, lo cual resulta ser una contradicción³ y por lo tanto las soluciones que determinan a S no pueden ser de tipos distintos. Supongamos que las soluciones que determinan a S son del mismo tipo, digamos positivas entonces en el interior de S no puede haber soluciones nulas básicas negativas ya que recaeríamos en el caso tratado anteriormente, por lo anterior S puede ser visto como un sector parabólico =

Este último resultado es importante para el desarrollo posterior de este capítulo ya que lo podemos parafrasear de la siguiente forma: si tenemos una curva de Jordan J que rodea a la

³El hecho de suponer que S no contiene sectores elípticos nos llevo a concluir que S contiene un sector hiperbólico, para probar la nota 3.5 en su totalidad se tendra que suponer que S no contiene sectores hiperbólicos para probar que contiene un sector elíptico.

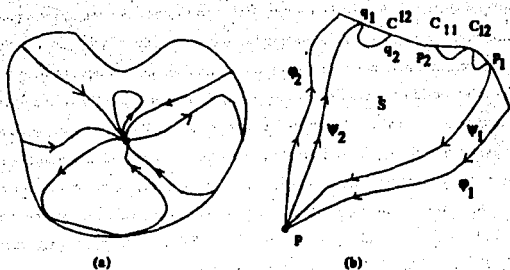


Figura 3-11:

singularidad aislada p entonces el interior de J puede ser descompuesto en una cantidad finita de sectores hiperbólicos, elípticos y parabólicos ajenos dos a dos, lo cual a la luz de la siguiente sección constituirá un resultado importante.

Nota 3.5 : Hay que mencionar que dos sectores son del mismo tipo si y solamente si son topológicamente equivalentes. (ver Andronov pag. 304 y fig. 11).

Finalizaremos esta sección con la siguiente:

Observación 3.20 [19]: Con las hipótesis del lema 3.15. Supongamos que la cerradura del interior de la curva de Jordan J no contiene soluciones periódicas y que hay un punto $x_0 \in J$ tal que $\omega(x_0) - p \neq \emptyset$. Entonces la solución φ de la ecuación diferencial 3.4 tal que $\varphi(x_0) = x_0 \in J$ existe y está contenida en el interior de J ya sea para $t > 0$ ó $t < 0$. Esto es φ es una solución nula básica positiva o negativa que rodea a p tal que $\alpha(x_0)$ ó $\omega(x_0)$ contiene una solución definida en todo \mathbb{R} , la cual es una solución nula positiva y negativa. (ver figura 3.14). Sabemos por la proposición 3.12 que si p no es un punto de rotación entonces existe al menos una solución φ nula básica ya sea positiva ó negativa, es decir $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi(t)$ está contenida en el interior de J para (a) $t > 0$ (positiva) ó para (b) $t < 0$ (negativa), es fácil ver que en el primer caso $\omega(x_0) \neq \emptyset$ y en el segundo $\alpha(x_0) \neq \emptyset$, de aquí en adelante vamos a suponer que estamos en el caso (a) sabemos además que $p \in \omega(x_0)$ es entonces consecuencia del teorema de Poincaré-Bendixon que si:

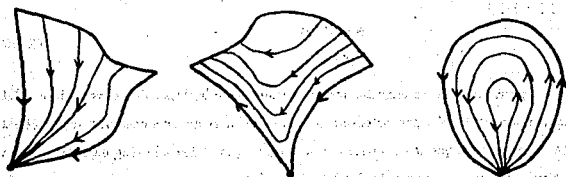


Figura 3-12:

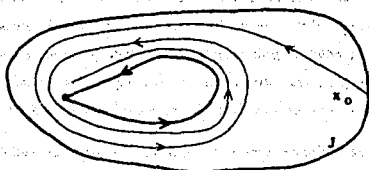


Figura 3-13:

1. $\omega(x_0) - p = \emptyset$ entonces φ es una solución nula básica positiva.
2. $\omega(x_0) - p \neq \emptyset$ entonces $\omega(x_0)$ es una órbita que conecta a p con sí mismo, es decir, una órbita cuyos conjunto α -límite y ω -límite consisten de la singularidad p^4 . \square

3.4.1 La fórmula de Bendixson.

Hasta aquí lo que hemos logrado es dar una descripción topológica del retrato fase de la ecuación diferencial 3.4 cerca de una singularidad aislada p (punto de rotación o no). Estamos claros que si la singularidad es un punto de rotación entonces $I_X(p) = 1$. Ahora bien si en la ecuación 3.4 tenemos que $X(x) = (X_1(x), X_2(x))$ y que p es un punto que no es de rotación entonces vamos a construir el campo vectorial $Y(x) = (-X_2(x), X_1(x))$ y fijemos nuestra atención

⁴Aunque no se haya mencionado en ambos casos se está utilizando fuertemente el hecho de que p es una singularidad aislada.

en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Y(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{3.10}$$

es claro que en un punto $x \in \Delta$ no singular las soluciones de las ecuaciones 3.4 y 3.10 son transversales, más aún son ortogonales. las soluciones de esta ecuación serán útiles por lo siguiente: supongamos que J es una curva de Jordan que rodea a la singularidad aislada p vamos a sustituir J por una curva de Jordan Γ regular por trozos formada por arcos de soluciones de las ecuaciones 3.4 y 3.10.

Lema 3.21 [13]: Sea J una curva de Jordan que rodea a la singularidad aislada p , si S es un sector parabólico contenido en el interior de J determinado por las soluciones nulas básicas positivas φ_1 y φ_2 , el arco J_{12} sobre J y la singularidad aislada p entonces cualesquiera dos puntos P y Q interiores a φ_1 y φ_2 respectivamente, pueden ser unidos por una trayectoria Γ , regular por trozos formada por arcos de soluciones de las ecuaciones 3.4 y 3.10.

Demostración: Comenzamos por observar que en S puede existir parte elíptica S_e y parte hiperbólica S_h pero que es consecuencia de la proposición 3.16. que $p \notin S_h$, $S_h \cap S_e = \emptyset$ y $S_e \cap J_{12} = \emptyset$. Si suponemos que S_h y S_e son no vacíos podemos sustraerlos de S para quedarnos con un sector \tilde{S} que tiene las siguientes características:

- Como $S_h \neq \emptyset$ entonces hay soluciones de 3.4 con ambos extremos en J y al sustraer S_h de S la frontera de \tilde{S} queda compuesta por subarcos de J y soluciones de 3.4 con ambos extremos en J . Así que cualquier solución de 3.4 con condición inicial en un de esos subarcos de J es solución nula básica.
- Cualesquiera dos puntos interiores P y Q de las soluciones nulas básicas φ_1 y φ_2 respectivamente pueden conectarse entre sí por medio de una poligonal $K(s)$ con $s \in [0, 1]$ tal que $K(0) = P$ y $K(1) = Q$ y que $K(0, 1)$ esta siempre contenido en el interior de \tilde{S} .

para cada punto $K(s) = k \in \text{int}(K)$ podemos encontrar una solución de 3.10, es decir podemos dibujar una curva $L_s(t)$ ortogonal al flujo de X y completamente contenida en \tilde{S} , en los puntos P y Q nos conformaremos solamente con que $L_s(t) \subset \tilde{S}$ para $t \in (0, \varepsilon]$ y $L_1(t) \subset \tilde{S}$ para $t \in [-\varepsilon, 0)$. El conjunto L de arcos ortogonales L_s tiene asociada una cubierta abierta de K , de la siguiente forma $K(s) = k$ esta contenido en algún arco $L_i \in L$ si la solución φ_k de 3.4 que pasa por k intersecta en algún momento a L_s y por ser K compacto entonces está

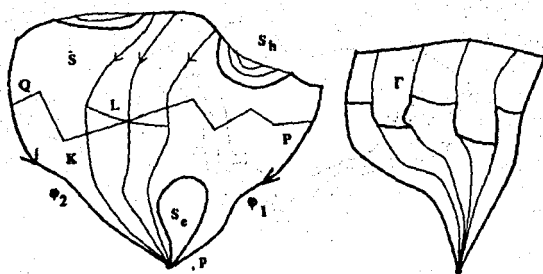


Figura 3-14:

totalmente contenido en una subcubierta finita, en otras palabras, K está contenido en una colección finita L_1, \dots, L_n , de tales arcos, si nos fijamos en los extremos r_1, \dots, r_{2n} de los arcos L_1, \dots, L_n , la solución φ_i de 3.4 que pasa por r_i , está contenida en S para $t \geq 0$ y para algún $t_0 < 0$, $x_i = \varphi_i(t_0) \in J$ de donde la solución $\psi_i = \varphi_i(t + t_0)$ es una solución nula base positiva, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los puntos x_1, \dots, x_{2n} están ordenados sobre J y que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. (ver figura 3.14). Cada pareja de soluciones ψ_i, ψ_{i+1} define un subsector S_i de S sea entonces s_0 el máximo valor de s tal que $K(s)$ intersecta a ψ_i y s_1 el mínimo tal que $K(s)$ intersecta a ψ_{i+1} es claro que si $s \in (s_0, s_1)$ entonces la solución que pasa por s está en S_i e intersecta a alguno de los arcos L_1, \dots, L_n , más aún existe un arco L_i tal que intersecta a todas las soluciones que pasan por s para toda $s \in (s_0, s_1)$, esto es, existe una cantidad finita de subarcs L_1, \dots, L_n tales que unen a las soluciones ψ_i, ψ_{i+1} para toda i , de donde entonces la curva $\Gamma_j = \cup_{i=1}^n (L_i \cup \psi_i)$. \square

Lema 3.23 [13]: Sea J una curva de Jordan que rodea a la singularidad aislada p , si S es un sector hiperbólico contenido en el interior de J determinado por la solución nula básica positiva φ_1 y la solución nula básica negativa φ_2 , el arco J_{12} sobre J y la singularidad aislada p entonces cualesquiera dos puntos P y Q interiores a φ_1 y φ_2 respectivamente, pueden ser unidos por una trayectoria Γ_j regular por trozos formada por arcos de soluciones de las ecuaciones 3.4 y 3.10.

Demostración: Comenzamos por darnos cuenta que análogamente que en el lema anterior $S_c \cap J_{12} = \emptyset$, si tenemos entonces los puntos P y Q interiores a φ_1 y φ_2 sabemos que en ellos

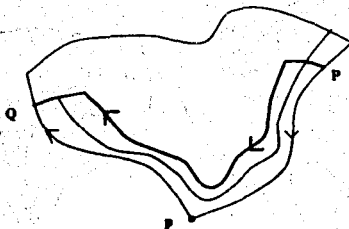


Figura 3-15:

podemos dibujar una par de curvas ortogonales $L_1(t)$ y $L_2(t)$ a las soluciones φ_1 y φ_2 contenidas completamente en $\bar{S} = S - S_p$, es decir podemos suponer que $L_1(t)$ esta en \bar{S} para $t \in (0, \epsilon)$ con $L_1(0) = P$ y $L_2(t)$ esta en \bar{S} para $t \in (-\epsilon, 0)$ con $L_2(0) = Q$ (ver figura 14), ahora bien si nos fijamos en la solución $\varphi_2(t)$ que pasa por $L_1(\epsilon)$ es consecuencia de la proposición 3.15 que para ϵ suficientemente pequeña tal solución intersecta al arco $L_2(t)$ y por lo tanto en este caso tenemos que $\Gamma_j = L_1 \cup \varphi_2 \cup L_2$. \square

Lema 3.23 [13]: Sea J una curva de Jordan que rodea a la singularidad aislada p , si S es un sector elíptico contenido en el interior de J determinado por la soluciones φ_1, φ_2 , que son parte de una solución Φ definida en todo \mathbb{R} , el arco J_{12} sobre J y la singularidad aislada p entonces cualesquiera dos puntos P y Q interiores a φ_1 y φ_2 respectivamente, pueden ser unidos por una trayectoria Γ_j regular por trozos formada por arcos de soluciones de las ecuaciones 3.4 y 3.10.

Demostración: Supongamos que tenemos un sector elíptico, como cualesquiera dos puntos P y Q interiores a φ_1 y φ_2 ya están unidos por un arco de la solución Φ entonces en este caso tendremos que $\Gamma_j = \Phi$, más aún como el sector S es adyacente a un par de sectores ya sean parabólicos o hiperbólicos y por los puntos P y Q pasan dos arcos L_1 y L_2 ortogonales al flujo de X e interiores a cada uno de los sectores adyacentes a S entonces la curva Γ_j puede ser unida con las respectivas curvas construidas en tales sectores adyacentes. \square

Al concluir este lema podemos tendremos que como el interior de una curva de Jordan J que rodea a una singularidad aislada puede ser dividido en un número finito de sectores elípticos, parabólicos e hiperbólicos, entonces la curva J puede ser sustituida por una curva $\Gamma = \cup \Gamma_j$

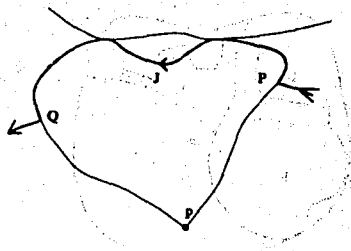


Figura 3-16:

compuesta por soluciones de las ecuaciones 3.4 y 3.10. (ver figura 16).

Concluimos esta sección con el siguiente:

Corolario 3.24 [19]: Sea X un campo vectorial continuo en un conjunto simplemente conexo Δ , que contiene a la singularidad aislada p y J una curva de Jordan que rodea a p ; si n_e es el número de sectores elípticos, n_p el número de sectores parabólicos y n_h es el número de sectores hiperbólicos contenidos en el interior de J entonces el índice $2I_X(p) = 2 + n_e - n_h$.

Demostración: Por los lemas 3.5 y 3.6 y como J puede ser sustituido por la curva Γ entonces basta calcular $I_X(\Gamma) = \sum_j I_X(\Gamma_j)$ donde j corre desde 1 hasta $n_e + n_h + n_p$, vamos a dividir la prueba en 3 partes.

Sabemos de los tres lemas anteriores que Γ se compone de arcos solución de 3.4 y 3.10, vamos a calcular la variación que existe entre el campo vectorial X y el campo T tangente a la curva Γ que por la forma en que fue construida está algunas veces en la misma dirección que X , es decir el ángulo que forman X y T es 0 ó π , y en otras ocasiones el ángulo que forman es $\pm\pi/2$, esto es cuando nos movemos a lo largo de una solución de la ecuación 3.10 de acuerdo con esto tenemos que:

- Si S es un sector parabólico, entonces

$$2\pi [I_X(\Gamma_j) - I_T(\Gamma_j)] = 0 \quad (3.11)$$

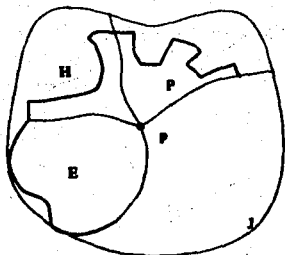


Figura 3-17:

esto último se verifica fácilmente al se hace ver que tanto a lo largo de L_1 como de L_2 el ángulo que forman X y T es $\pi/2$.

- Cuando estamos en un sector elíptico se cumple que:

$$2\pi [I_X(\Gamma_j) - I_T(\Gamma_j)] = \pi \quad (3.12)$$

ya que en ángulo que forman X y T a lo largo de L_1 es $\pi/2$ y el que forman a lo largo de L_2 es $-\pi/2$.

- Cuando nos encontramos en un sector hiperbólico se cumple que:

$$2\pi [I_X(\Gamma_j) - I_T(\Gamma_j)] = -\pi \quad (3.13)$$

ya que tanto a lo largo de L_1 como de L_2 el ángulo que forman X y T es $-\pi/2$.

Finalmente si sumamos las fórmulas 3.11, 3.12 y 3.13 obtenemos, por el teorema de las tangentes rotantes, la igualdad deseada, que es conocida como la fórmula de Bendixson. (ver figura 3.17).

En el caso de que p sea un punto de rotación $I_X(p) = 1, n_x = n_y = 0$ y por lo tanto el corolario sigue siendo válido \square

Capítulo 4

TEORÍA DE POINCARÉ-BENDIXSON EN 2-VARIEDADES.

En este capítulo el objetivo es probar una versión más general del teorema de Poincaré-Bendixson en 2-variedades compactas, conocido como el teorema de Schwartz para lo cual en un principio hablaremos de los conjuntos invariantes de un campo vectorial definido en una 2-variedad compacta, después acerca de algunas propiedades que tienen los flujos en el toro para continuar estableciendo una relación entre éstos y los de la botella de Klein, en esta sección nos proponemos demostrar un resultado debido a H. Kneser, por último probar el teorema de Schwartz.

Una pregunta que resulta importante es la siguiente: ¿porqué al principio solo estudiaremos los flujos en el toro T^2 y en la botella de Klein K^2 si se supone que lo que queremos es encontrar una generalización del teorema de Poincaré-Bendixson en cualquier 2-variedad compacta?. La respuesta a esta pregunta la contestaremos más adelante cuando hablemos de la fórmula de Euler-Poincaré que relaciona la suma de los índices en los puntos singulares con el género de la variedad.

4.1 Conjuntos invariantes.

Recordemos M^1 denota una 2-variedad contenida en R^3 (ver capítulo 2) si para cada punto $p \in M$ existen vecindades U_p de p en R^3 , a la que llamamos vecindad coordenada de p , U_p del origen en R^2 y un homeomorfismo $\beta_p: U_p \rightarrow U_p$, que recibe el nombre de sistema coordenado de M alrededor de p , tales que el homeomorfismo inverso $\beta_p^{-1}: U_p \rightarrow U$ es una inmersión de clase C^∞ . De aquí en adelante M será conexo y compacto y lo denotaremos por M^2 . Sabemos también que un campo vectorial de clase C^r en M^2 es una aplicación $X: M^2 \rightarrow TM^2$ de clase C^r tal que a cada punto $p \in M^2$ le asocia un elemento $X(p) \in TM^2$ y que $\alpha: I \subset R \rightarrow M^2$ es una curva integral o solución de la ecuación diferencial 2.1 si $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para toda $t \in I$. Asimismo tenemos definido según la proposición 2.14 un flujo local asociado al campo vectorial X , es decir una función de clase C^r , $\varphi: I \times M^2 \rightarrow M^2$ tal que $\varphi(0, p) = p$ y $\frac{d}{dt}\varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$ y que además para cada $q \in M$ la aplicación $\varphi_t(q): M^2 \rightarrow M^2$ cumple (I) $\varphi_0 = \text{identidad}$ y (II) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, en el caso de una variedad compacta $I = R$ y entonces hablaremos del flujo global asociado a la ecuación diferencial, podemos entonces pensar que el flujo de una ecuación diferencial es una generalización del concepto de solución u órbita.

Definición 4.1: Supongamos que en M^2 tenemos planteada la ecuación diferencial (2.1) entonces diremos que un subconjunto no vacío $\Omega \subseteq M^2$ es invariante bajo el flujo φ de la ecuación (2.1) si $\varphi_t(\Omega) \subseteq \Omega$ para toda $t \in R$ ó equivalentemente si para todo $p \in \Omega$, $\gamma_p(t) \subseteq \Omega$ para toda $t \in R$.

Definición 4.2: Un subconjunto $\Omega \subseteq M^2$ es minimal si es cerrado, invariante y no contiene subconjuntos propios invariantes.

4.1.1 Ejemplos.

- 1) El caso más sencillo de conjunto invariante es $\Omega = M^2$.
- 2) Un punto singular es un conjunto minimal.
- 3) Una órbita periódica $\gamma_p(t)$ es un conjunto minimal, ya que es cerrada y gracias a la propiedad (II) es invariante, por otra parte es claro que no contiene subconjuntos propios invariantes.

¹En el caso en que M no es un subconjunto de R^3 , sabemos gracias al teorema de Whitney que M puede ser encajado en algún R^3 , es por esto que no trabajaremos con la definición abstracta de variedad.

4) Una órbita que tiene como conjuntos ω -límite y α -límite sendas singularidades es un conjunto invariante pero no es minimal.

5) En el caso del capítulo anterior, la cerradura de un sector elíptico contiene un conjunto invariante, y un minimal.

En estos términos el teorema de Poincaré-Bendixson el plano tiene como corolario que los únicos conjuntos minimales son las singularidades y las órbitas periódicas.

Proposición 4.3 : Sea M^2 una variedad y φ un flujo en M^2 entonces:

(a) Si Ω_1 y Ω_2 son invariantes entonces $\Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2$, $\Omega_1 - \Omega_2$ son conjuntos invariantes.

(b) Si Ω_1 es invariante entonces $\partial\Omega_1$ e $\text{Int}(\Omega_1)$ son conjuntos invariantes.

(c) Si Ω es minimal entonces $\Omega \cong M^2$ ó Ω es denso en ninguna parte.²

Demostración:

a) Supongamos que Ω_1 y Ω_2 son invariantes, vamos a hacer ver que $\Omega_1 \cup \Omega_2$ es invariante, si tomamos $p \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ entonces $p \in \Omega_1$ o $p \in \Omega_2$ de donde $\gamma_p(t) \subset \Omega_1$ ó $\gamma_p(t) \subset \Omega_2$ para toda $t \in \mathbb{R}$ esto último por la invariancia de Ω_1 y Ω_2 por lo tanto $\Omega_1 \cup \Omega_2$ es invariante, de la misma forma se prueba que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es invariante. Por otra parte si $p \in \Omega_1 - \Omega_2$ y suponemos que $\gamma_p(t) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ para alguna $t \in \mathbb{R}$, entonces por ser Ω_2 invariante $\gamma_p(t) \subset \Omega_2$ para toda $t \in \mathbb{R}$ lo cual contradice el hecho de que $p \in \Omega_1 - \Omega_2$. (ya que $\gamma_p(0) = p$).

b) Supongamos que Ω_1 es invariante y nos fijamos en un punto $p \in \text{Int}(\Omega_1)$, vamos a ver que para toda $t_0 \in \mathbb{R}$ la órbita que pasa por p es tal que $\gamma_p(t_0) \subset \text{Int}(\Omega_1)$, supongamos que tal cosa no pasa, es decir existe una vecindad V de $\gamma_p(t_0)$ tal que $V \cap \Omega_1 \neq \emptyset$, sea $q \in V \cap \Omega_1$ entonces por continuidad del flujo existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_q(-t_1) \in U$, donde U es una vecindad de $\gamma_p(t_0)$, esto último es la contradicción que establece la validez de la afirmación. Esta misma demostración puede ser copiada para demostrar que $\partial\Omega_1$ es invariante bajo el flujo.

² Ω es denso en ninguna parte si Ω^c es denso ó equivalentemente $\text{Int}(\Omega) = \emptyset$.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- c) Supongamos que Ω es minimal, que Ω es subconjunto propio de M^2 y que $\text{Int}(\Omega) \neq \emptyset$ entonces por el inciso anterior $\text{Int}(\Omega)$ y $\partial\Omega$ son invariantes, pero dadas las hipótesis esto sólo puede suceder en el caso en que $\partial\Omega \not\subset \Omega$ de donde se deduce que Ω es abierto y por ser minimal es cerrado, por lo tanto gracias a la conexidad de M^2 tenemos que $\Omega = M^2$. Si por otra parte suponemos que $\text{Int}(\Omega) = \emptyset$ entonces por ser cerrado es denso en alguna parte. \square

4.2 Flujos en el toro.

En esta sección nos proponemos describir algunas de las propiedades que tienen los flujos en el toro, para lo cual será de gran utilidad un número al que llamaremos *el número de rotación*, sin embargo antes de entrar de lleno a estudiar los flujos en el toro y con el ánimo de obtener una mayor claridad en los conceptos estudiaremos primero los: (las ideas que aquí se exponen son en cierta medida clásicas y pueden ser consultadas en los libros [3], [19], [23] también en Denjoy [7]. El orden y las principales se pueden seguir en [13]):

4.2.1 Flujos en curvas cerradas.

Supongamos que tenemos una curva de Jordan $J \subset \mathbb{R}^2$, podemos pensar sin pérdida de generalidad que está parametrizada por $\beta(t) : [0, 1] \rightarrow J \subset \mathbb{R}^2$, con $\beta(0) = \beta(1)$ más aún podemos pensar en definir en \mathbb{R} una relación de equivalencia de la siguiente forma: dos números reales t_1, t_2 están relacionados ($t_1 \sim t_2$) si su diferencia es un entero. De donde tenemos que si $t_1 \sim t_2$ entonces $\beta(t_1) = \beta(t_2)$, es decir β es periódica y tiene periodo igual a uno.

Supongamos ahora que tenemos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene las siguientes características:

1. f es continua y estrictamente creciente.
2. f es tal que $f(x+1) = f(x) + 1$, es decir si $t_1 \sim t_2$ entonces $f(t_1) \sim f(t_2)$.

Vamos ahora a fijarnos en el siguiente proceso; supongamos que tenemos un punto $p \in J$ si tomamos $x = \beta^{-1}(p) \in [0, 1]$ y a tal punto le aplicamos la función f definida arriba, sabemos que $f(x) \in \mathbb{R}$ y para este número existe $y \in [0, 1]$ tal que $y \sim x$ definiremos entonces $S(p) = \beta(y)$, en otras palabras $S = \beta \circ f \circ \beta^{-1}$, esta función está bien definida y es un homeomorfismo que preserva la orientación de la curva J .

Asimismo si tenemos un homeomorfismo $S : J \rightarrow J$ tal que preserve la orientación de la curva J , éste induce una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ creciente que puede ser extendida a todo R a través de la propiedad (2). De esta forma tenemos definida una relación biunívoca entre los homeomorfismos de una curva cerrada y las funciones reales que cumplen las condiciones (1) y (2).

Supongamos que tenemos uno de tales homeomorfismos $S : J \rightarrow J$ que preserve orientaciones, como sabemos tal homeomorfismo con la operación de composición genera un grupo $p = \{S^n : J \rightarrow J \mid n \in N\}$ de homeomorfismos donde $S^2 = S \circ S$, $S^{-2} = S^{-1} \circ S^{-1}$ y $S^n = S \circ S^{n-1}$.

Definición 4.4 : Al grupo p generado por $S : J \rightarrow J$, un homeomorfismo que preserve orientaciones, le llamaremos un flujo sobre la curva de Jordan J .

No resulta difícil convencerse de que con esta nueva definición se pueden definir nuevamente los conceptos de órbita, semi-órbita, conjunto límite, conjunto invariante, conjunto minimal, etc.

Proposición 4.5 [7]: Para todo $y \in R$, existe un número ρ independiente de y tal que:

$$\rho = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n} \quad (4.1)$$

a ρ le llamaremos el número de rotación de f , (gracias a la relación $S^h = \beta \circ f^h \circ \beta^{-1}$), del flujo p sobre J .

Demostración: Como f es continua, creciente y $f(x+1) = f(x) + 1$, la función $g(x) = f(x) - x$ tiene periodo 1, ya que $g(x+1) = f(x+1) - x - 1 = f(x) - x = g(x)$ vamos entonces a definir la siguiente función:

$$F_h(x) = f^h(x) - x \quad (4.2)$$

Notemos que $f^h(x+1) = f^h(x) + 1$ y por lo tanto F^h tiene periodo 1 y además satisface $|F_h(x_1) - F_h(x_2)| < 1$ para todas $x_1, x_2 \in R$, para hacer ver esto último basta hacerlo cuando $|x_1 - x_2| < 1$ y es sencillo ya que si suponemos que $x_1 < x_2 < x_1 + 1$ entonces se cumple (a) $-1 < x_1 - x_2 < 0$ y por ser f creciente $f^h(x_1) < f^h(x_2) < f^h(x_1) + 1$ de donde (b) $0 < f^h(x_2) - f^h(x_1) < 1$ por lo tanto si sumamos las relaciones (a) y (b) obtenemos la relación:

$$-1 < f^h(x_2) - f^h(x_1) + x_1 - x_2 < 1 \quad (4.3)$$

o equivalentemente:

$$|F_h(x_1) - F_h(x_2)| < 1$$

Si por el contrario tenemos que $s_2 < s_1 < s_2 + 1$ procediendo análogamente obtenemos el mismo resultado. De la ecuación 4.3 se puede deducir la siguiente relación:

$$f^h(x_1) - s_1 - 1 < f^h(x_2) - s_2 < f^h(x_1) - s_1 + 1 \quad \forall h \in \mathbb{Z}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

en particular tenemos que se cumple la relación:

$$f^h(0) - 1 < f^h(x_2) - s_2 < f^h(0) + 1 \quad (4.4)$$

y si hacemos que s_2 tome sucesivamente los valores de $0, f^h(0), f^{2h}(0), \dots, f^{nh}(0)$ obtenemos la familia de desigualdades:

$$\begin{aligned} f^h(0) - 1 &< f^h(0) < f^h(0) + 1 \\ f^h(0) - 1 &< f^{2h}(0) - f^h(0) < f^h(0) + 1 \\ &\vdots \\ f^h(0) - 1 &< f^{(n-1)h}(0) - f^{nh}(0) < f^h(0) + 1 \end{aligned}$$

y sumando obtenemos:

$$nf^h(0) - n < f^{nh}(0) < nf^h(0) + n$$

dividiendo por nk tendremos:

$$\left| \frac{f^{nh}(0)}{nk} - \frac{f^h(0)}{k} \right| < \frac{1}{k} \quad (4.5)$$

repetiendo los mismos pasos pero con la función $F_n(x) = f^n(x) - x$ y haciendo que s_2 tome sucesivamente los valores de $0, f^n(0), f^{2n}(0), \dots, f^{kn}(0)$ obtenemos la desigualdad:

$$\left| \frac{f^{kn}(0)}{nk} - \frac{f^k(0)}{k} \right| < \frac{1}{n} \quad (4.6)$$

finalmente de las desigualdades 4.5 y 4.6 se obtiene que existe un número real ρ tal que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{f^n(0)}{n} = \rho$; para probar que el límite existe para toda $x \in \mathbb{R}$, nos remitimos nuevamente

a la ecuación 4.4 ya que si la dividimos por k obtenemos:

$$\frac{f^h(0)}{k} - \frac{1}{k} < \frac{f^h(x)}{k} - \frac{x}{k} < \frac{f^h(0)}{k} + \frac{1}{k} \quad (4.7)$$

es decir, cuando $k \rightarrow \infty$ tenemos que:

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} \frac{f^h(x)}{k} = \rho$$

lo cual prueba la proposición \square

Si observamos la ecuación 4.7 nos damos cuenta de que también nos dice que

$$|f^h(x) - x - f^h(0)| < 1$$

es decir

$$f^h(x) = x + kp + r_h \text{ con } |r_h| < 1. \quad (4.8)$$

Esta relación nos será de gran utilidad para demostrar la siguiente:

Proposición 4.6 : El número de rotación ρ no depende de la parametrización de la curva de Jordan J .

Demostración: Comenzamos suponiendo que $\rho = \lim_{|h| \rightarrow \infty} f^h/|h|$ y que $u = g(y)$ es un cambio de parámetros de la curva J^2 que preserva orientaciones, entonces en términos de la nueva parametrización tenemos que f toma la forma $T = g \circ f \circ g^{-1}$ de donde $T^h = g \circ f^h \circ g^{-1}$. Por otra parte sabemos que la función $F(z) = g(z) - z$ tiene periodo 1 y si utilizamos la ecuación 4.8 en el cálculo de:

$$\begin{aligned} \lim_{|h| \rightarrow \infty} \frac{T^h(u)}{|h|} &= \lim_{|h| \rightarrow \infty} \frac{g(g^{-1} + hp + r_h)(u)}{|h|} \\ &= \lim_{|h| \rightarrow \infty} \frac{F(g^{-1}(u) + hp + r_h) + g^{-1}(u) + hp + r_h}{|h|} = \rho \end{aligned}$$

\square

TEOREMA 4.7 : El número de rotación ρ asociado al flujo ρ sobre la curva de Jordan J es racional si y solo si S^h tiene un punto fijo, es decir existe $\gamma_0 \in J$ tal que $S^h \gamma_0 = \gamma_0$ para algún entero $h > 0$.

²Es decir g es una función $g: R \rightarrow R$ que cumple también las condiciones (I) y (II).

Demostración: Si suponemos que S^k tiene un punto fijo quiere decir que hay un $x_0 \in R$ tal que $f^k(x_0) \sim x_0$ o equivalentemente $f^k(x_0) = x_0 + m$ con $m \in Z$ de donde $f^{nk}(x_0) = x_0 + nm$, por último

$$\rho = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{f^{nk}(x_0)}{|nk|} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{x_0 + nm}{|nk|} = \frac{m}{k}$$

Si por otra parte suponemos que $\rho = \frac{m}{k}$ entonces de la ecuación 4.8 tenemos que: $r_h(x) = f^h(x) - x - m$ con $|r_h| < 1$. Para probar que hay un punto fijo basta probar que existe x_0 tal que $r_h(x_0) = 0$, supongamos que $r_h(x) > \epsilon$ para toda $x \in R$, con $\epsilon > 0$, pero si en la ecuación anterior hacemos que x tome los valores de $f^h(x), \dots, f^{mh}(x)$ sumando las desigualdades y dividiendo por mh obtenemos:

$$\rho > \frac{m + \epsilon}{k} \text{ con } \epsilon > 0$$

lo cual resulta ser la contradicción que establece el hecho de que existe x_0 con la propiedad que queremos. \square

Supongamos ahora que p tiene un número de rotación irracional, entonces si tomamos un punto cualquiera $\gamma_0 \in J$ y nos fijamos en los puntos $S^i \gamma_0 = \gamma_i$, $S^j \gamma_0 = \gamma_j$ con $i < j$ dos números enteros, y si al segmento a lo largo de J que une γ_i con γ_j de acuerdo a la orientación de J le llamamos J_0 . Entonces si $r = j - i$ el homeomorfismo S^r es tal que al aplicarlo a γ_i lo envía en γ_j ya que $S^r(\gamma_i) = S^{j-i}(S^i \gamma_0) = S^j \gamma_0 = \gamma_j$ es decir S^r es tal que envía el punto inicial del segmento J_0 en su punto final, ¿que pasa entonces si aplicamos al segmento J_0 los distintos homeomorfismos generados por S^r ? La respuesta a esta pregunta viene dada por el siguiente lema.

Lema 4.8 : Sea p un flujo sobre la curva de Jordan J con número de rotación irracional, si J_0 es el segmento definido arriba entonces existe $n \in N$ tal que:

$$J = S^r J_0 \cup \dots \cup S^{nr} J_0$$

Demostración: Como hemos visto S^r es tal que envía el punto inicial de J_0 en su punto final, más aún $S^{(k+1)r} \gamma_i = S^{kr} \gamma_j$, es decir el punto inicial del segmento $S_0^{(k+1)r} J$ coincide con el punto final del segmento $S_0^{kr} J$. Por lo tanto si suponemos que la igualdad no es cierta equivale a suponer que los puntos finales de las imágenes del segmento J_0 bajo las transformaciones S^{nr} se acumulan en algún sitio, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} S^{nr} = \bar{\gamma} \in J$, y el punto $\bar{\gamma}$ tiene la siguiente

propiedad

$$\begin{aligned} S^{-r}\bar{\gamma} &= S^{-r} \lim S^{nr}\gamma_j = \lim S^{-r} S^{nr}\gamma_j \\ &= \lim S^{-r} S^{(n+1)r}\gamma_i = \lim S^{nr}\gamma_i = \bar{\gamma} \end{aligned}$$

lo cual es imposible ya que el número de rotación es irracional. \square

La idea es ahora caracterizar de alguna manera los conjuntos ω -límite de órbitas en J . Supongamos que tenemos un flujo cualquiera p sobre una curva de Jordan J y un punto $\gamma \in J$, si observamos la semi-órbita positiva de γ es decir $\gamma_j^+ = \{S^j(\gamma) : j \in \mathbb{N}\}$ nos damos cuenta que si f posee un número de rotación racional entonces hay un punto γ_0 tal que su órbita consta de un número finito de puntos $\gamma_j^+ = \{S^1(\gamma), \dots, S^m(\gamma)\}$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$, en tal caso diremos que la órbita es de orden m , y por lo tanto tenemos que: $\omega(\gamma_0) = \gamma_j^+$ (donde $\omega(\gamma_0)$ es el conjunto ω -límite de γ_0) y sabemos que esto pasa para todo punto sobre la órbita de γ_0 , es decir, tenemos que $\omega(\gamma_j^+) = \gamma_j^+$ para todo punto en γ_j^+ . El hecho de que p tenga una órbita periódica de orden m determina en gran medida la dinámica del flujo ya que en caso de haber otras órbitas periódicas éstas deben tener orden m y si hay un punto $\bar{\gamma}$ cuya órbita no es periódica entonces su conjunto ω -límite, $\omega(\bar{\gamma})$, debe ser una órbita periódica (¿por qué?).

Por otra parte si el número de rotación es irracional entonces las órbitas y los conjuntos ω -límite están caracterizados por los siguientes teoremas.

TEOREMA 4.9 [13]: Sea p un flujo sobre la curva de Jordan J con número de rotación p irracional y γ un punto en J , entonces el conjunto $\Omega = \omega(\gamma)$ no depende de γ y además Ω es el único conjunto minimal de p .

Demostración: Sea γ_0 un punto cualquiera sobre J sabemos que si tomamos un punto $\gamma \in \omega(\gamma_0)$ podemos encontrar puntos de la forma $S^i\gamma_0 = \gamma_i$ y $S^j\gamma_0 = \gamma_j$ arbitrariamente cerca de γ , tenemos entonces que γ está en alguna de las imágenes del segmento J_0 el cual contiene puntos de la forma $S^h\gamma_1$ para algunas $\gamma_1 \in J$ de donde $\gamma \in \omega(\gamma_1)$ y por lo tanto $\omega(\gamma_0) \subset \omega(\gamma_1)$. Si ahora tomamos un punto $\bar{\gamma}_1 \in \omega(\gamma_1)$ repitiendo los mismos argumentos llegamos a que $\omega(\gamma_1) \subset \omega(\bar{\gamma}_1)$ y por lo tanto Ω no depende de γ . Ω es cerrado ya que si tomamos γ_0 un punto de acumulación de Ω entonces $\gamma_0 \in \omega(\gamma)$ para algún $\gamma \in \Omega$ y por lo tanto $\gamma_0 \in \Omega$ de donde Ω es cerrado, claramente es invariante y para probar que Ω es minimal hay que hacer ver que no tiene subconjuntos propios invariantes, lo cual es evidente del hecho de que Ω no depende de γ . Más aún Ω es perfecto⁴ ya que si $\gamma \in \Omega$ la órbita de γ está contenida

⁴Todos sus puntos son puntos de acumulación.

en Ω y por lo tanto γ es punto de acumulación de una sucesión de puntos de Ω . \square

Como una consecuencia del teorema anterior tenemos que $\Omega \subset J$ es un conjunto perfecto minimal y por el inciso (c) de la proposición 4.3 tenemos que o bien Ω coincide con J o es denso en ninguna parte. La pregunta que surge en este momento es: ¿bajo que condiciones se dan una u otra de las dos posibilidades anteriores?

Para comenzar a responder esta pregunta estableceremos la siguiente relación entre los puntos de la órbita de γ y aquellos de un círculo C de radio 1. Si γ y $\gamma_k \in J$ son tales que $\gamma_k = S^k \gamma$ y $\alpha = \gamma(t)$ con $t \in [0, 1]$ le asociamos un punto $s \in C$ dado por $s = \exp(2\pi it)$ entonces a γ_k le asociaremos $s_k = \exp(2\pi i(t + k\rho))$ con ρ irracional y $k \in \mathbb{Z}$, una vez hecho esto nos damos cuenta de que si tenemos dos puntos γ_n y γ_m en J y el arco sobre J que une a γ_n con γ_m , de acuerdo con el sentido en que recorremos J , contiene a γ_p entonces el arco que une a s_n con s_m contiene a s_p . Sean $\tilde{\gamma}$ un punto en J que no está en la órbita de γ y $J' = J - \tilde{\gamma}$ diremos que un punto $\gamma_n \in J'$ es anterior (posterior) a un punto $\gamma_m \in J'$ si el arco sobre J' que une a γ_n con γ_m conserva (invierte) el sentido en que recorremos J es decir tenemos definido sobre la órbita de $\gamma \in J$ un orden relativo a $\tilde{\gamma}$ en el cual utilizaremos la notación $\gamma_n \prec \gamma_m$ para decir que γ_n es anterior a γ_m . De esta forma dado el punto $\tilde{\gamma} \in J$ tenemos bien definido el conjunto $A = \{\gamma_n \text{ con } \gamma_n \prec \tilde{\gamma}\}$ de los puntos anteriores a $\tilde{\gamma}$ y el conjunto $P = \{\gamma_n \text{ con } \tilde{\gamma} \prec \gamma_n\}$ de los puntos posteriores a $\tilde{\gamma}$, hay que hacer notar que estos dos conjuntos son no vacíos, respectivamente acotados superior e inferiormente, que no hay ningún punto $s \in J$ tal que sea anterior a posterior a todos los puntos sobre la órbita de γ y que todo punto γ_n sobre la órbita de γ cae en alguno de los dos conjuntos anteriores. Dado entonces $\gamma \in J$ sea $a = \sup A$ y $p = \inf P$ es claro que a no es posterior a p , que $a, p \in \omega(\gamma)$ y que pueden pasar dos cosas, ya sea que (a) a y p coincidan en un punto y en tal caso $a = p = \tilde{\gamma}$ ó bien (b) a y p no coinciden y entonces tenemos que hay todo un arco abierto $i \subset J$ tal que no tiene puntos en común con la órbita de γ . En ambos casos al punto γ o al arco i (incluidos sus extremos) les asociaremos un punto $x \in C$ y diremos que el arco i_n es anterior (posterior) al arco i_m si el punto $x_n \in C$ asociado a i_n es anterior (posterior) al punto x_m asociado a i_m . Si es que los hay fijemos nuestra atención en uno de tales segmentos i_k , como sabemos los extremos a_k, p_k de tal arco son puntos límite de la órbita de γ los cuales tienen la particularidad de que solo nos podemos acercar a ellos por puntos γ_n^k ya sean anteriores ($\gamma_n^k \prec a_k$), en el caso de a_k , ó posteriores ($p_k \prec \gamma_n^k$), en el caso de p_k , a esta clase de puntos les llamaremos puntos de *primera especie*. Por otra parte si γ_0 es un punto límite de la órbita de γ que no es extremo de algún arco i_k entonces

nos podemos acercar a él por puntos tanto anteriores como posteriores, a este tipo de puntos los llamaremos puntos de *segunda especie*. Por último si γ_1 es un punto interior de algún arco i_k entonces γ_1 no es punto límite. Como sabemos el conjunto Ω de puntos ω -límite asociados al flujo ρ es invariante y por la proposición 4.3 sabemos que su interior y su frontera deben ser invariantes por lo tanto los extremos de un arco i_k deben ser mapeados por el flujo ρ en los extremos de otro arco i_j , más aún la totalidad del arco i_k debe ser mapeada en el arco i_j y si nos fijamos en dos arcos distintos i_k, i_j entre ellos debe haber una infinidad de arcos i_h además la longitud de éstos tiende a cero cuando h crece.

Es un hecho que atendiéndonos únicamente a f con las propiedades 1 y 2 podemos construir una función f tal que induzca en J un flujo ρ con Ω denso en ninguna parte.

Ejemplo 4.1 [7]: Sean $\Omega \subset J$ un conjunto perfecto denso en ninguna parte, ρ un número irracional y $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ un conjunto para el que una relación del tipo $\omega_i - \omega_j = n\rho + s$ con $n, s \in \mathbb{Z}$ no es válida para ninguna pareja de puntos $\omega_i, \omega_j \in A$. Vamos a construir un flujo ρ tal que Ω es minimal de la siguiente forma: si fijamos nuestra atención en el conjunto $A = J - \Omega$ nos damos cuenta que es denso en J y está compuesto por una cantidad numerable de arcos i_k como los descritos arriba, asimismo el conjunto $\bar{A}_i = \{t_k \in [0, 1] \mid t_k \sim \omega_i + k\rho\}$ es numerable y denso en $[0, 1]$ por consiguiente podemos establecer entre el conjunto $A = \cup \bar{A}_i$ y el conjunto Ξ de los arcos i_k una relación como la descrita arriba, es decir una relación que al arco i_k (incluidos sus extremos) le asocia el punto t_k , de donde es claro que si γ es un punto de segunda especie de Ω entonces tiene asociado un punto ajeno a A . Definamos ahora $f: J \rightarrow J$ de la siguiente forma:

1. Entre los arcos consecutivos i_k, i_{k+1} , es decir los asociados a los puntos t_k y t_{k+1} , estableceremos una función f continua y creciente.
2. Si γ es el punto de segunda especie de Ω asociado al punto $t \in [0, 1]$ ajeno a \bar{A} entonces f le asociará el punto $t_1 \sim t + k\rho$ con $k \in \mathbb{Z}$ que es también ajeno a \bar{A} .

Finalmente si γ es un punto en algún arco i_k es claro que cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $f(\gamma)$ tiende a un punto de primera especie de Ω y si γ es un punto de primera o segunda especie de Ω entonces $f(\gamma)$ sigue siendo un punto de primera o segunda especie de Ω , por lo tanto Ω resulta ser invariante bajo f y por lo tanto coincide con el conjunto ω -límite de γ . \square

Definición 4.10: Cuando $\Omega = J$ diremos que el flujo S^h es ergódico.

Antes de concluir esta sección presentamos un teorema que establece condiciones necesarias para que el flujo S^1 sea ergódico.

TEOREMA 4.11 (Denjoy) : Si f es un homeomorfismo del círculo de clase C^2 que preserva orientaciones con número de rotación p irracional, entonces es topológicamente equivalente a una rotación del círculo.

En el trabajo de Denjoy [7] (1932) la hipótesis $f \in C^2$ se sustituye por la condición más débil $\log(f^n)$ de variación acotada.

Demostración: Ver sección 4.4.2, Arnold [3] o Schwartz [27] \square

Tomemos ahora las herramientas necesarias para comenzar la siguiente sección.

4.2.2 Flujos en el toro.

En el capítulo 2 estudiamos las ecuaciones del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 \\ \dot{x}_2 &= i\beta x_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

para las cuales es válido el siguiente resultado:

Proposición 4.12 : Si el cociente α/β es racional entonces todas las curvas integrales de la E.D 4.9 son cerradas en el toro. Por el contrario si el cociente α/β es irracional entonces son densas en T^2 . \square

El propósito de esta sección es caracterizar las curvas integrales de las ecuaciones en T^2 para lo cual vamos a comenzar precisando la descripción de T^2 con la que trabajamos en el capítulo 2.

Suponiendo que tenemos la familia T de transformaciones; $T_{n,m} : C \rightarrow C$ dadas por $T_{n,m}(x) = x + n + im$ con $n, m \in Z$, tal familia de transformaciones junto con la operación de composición $T_{n,m} \circ T_{p,q} = T_{n+p, m+q}$ tiene estructura de grupo. Por otra parte si definimos la relación entre los elementos de C dada por $x \sim w$ si existe $T \in T$ tal que $T(x) = w$, esta relación es a todas luces una relación de equivalencia, definiremos entonces $T^2 = C/T$ dotado de la topología cociente, es decir de esta manera estamos pensando a T^2 como un espacio topológico. Otra forma de pensar esta relación es decir que dos números complejos x, w están relacionados si su diferencia es un número complejo con partes real e imaginaria enteras; esta

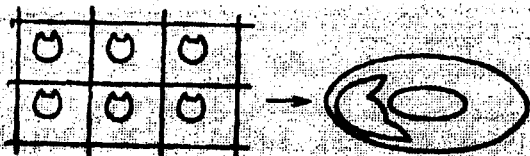


Figura 4-1:

forma de ver la relación nos da pie a pensar al plano dividido de la forma en que muestra la figura 4.1, y si tomamos un representante de cada clase de equivalencia entonces estamos asimilando al plano complejo con el cuadro unitario $I = [0, 1] \times [0, 1]$, al que llamaremos región fundamental, en la cual sus lados quedan relacionados como se ve en la figura 4.1, la ventaja de poder definir así a T^2 es que no resulta difícil convencerse de que C es un espacio cubriente (ver apéndice sección 5.5) de T^2 , a su vez pensar en C como espacio cubriente de T^2 nos abre la posibilidad de levantar, a través de una transformación cubriente, cualquier figura desde T^2 hasta C donde queda reproducida una infinidad de veces como se observa en la figura 4.1.

A cada curva cerrada en C le corresponde una curva cerrada en T^2 , sin embargo a curvas cerradas en T^2 no siempre les corresponden curvas cerradas en C algunas veces les corresponden curvas tales que sus extremos están relacionados (\sim), es decir existe $R_{n,m} \in \mathbb{Z}$ distinta de la identidad tal que lleva un extremo en el otro. Cuando a una curva cerrada α en T^2 no le corresponda una curva cerrada en C diremos α es una curva cerrada no homotópica a cero. A la curva $\tilde{\alpha}_n(t) = R^n(\tilde{\alpha}(t-s))$ con $s \in \mathbb{Z}$ y $\tilde{\alpha}$ un levantamiento de α le llamaremos levantamiento universal de la curva $\alpha \in T^2$, claramente $\tilde{\alpha}_n(t)$ no es único.

Nota 4.1 : Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow T^2$ es una curva cerrada no homotópica a cero y $\tilde{\alpha}_n : \mathbb{R} \rightarrow C$ es uno de sus levantamientos universales, entonces:

- La imagen de $\tilde{\alpha}_n$ está contenida en una franja Π limitada por dos rectas L_1 y L_2 paralelas con pendiente racional.
- Como $\tilde{\alpha}_n \subset \Pi$ entonces $\tilde{\alpha}_n \cap L \neq \emptyset$ para toda recta L que no es paralela a L_1 .

c) La curva α es simple si y solo si $\tilde{\alpha}_n$ lo es.

d) Si α es simple y $R_{n,m}$ es la transformación cubriente empleada para definir $\tilde{\alpha}_n$ entonces n y m son primos relativos.

Estas propiedades no son complicadas y por lo tanto no se demostrarán.

Definición 4.13 : Diremos que la función $X = (X_1, X_2) : C \rightarrow C$ es Υ -invariante si tiene las siguientes propiedades $XX = XU^n x = XV^m x = XT x$ para toda $x \in C$, $n, m \in \mathbb{Z}$ y con $V = T_{0,1}$, $U = T_{1,0}$ y $T = T_{n,m} \in \Upsilon$.

Consideremos una función $X : C \rightarrow C$, Υ -invariante y de clase C^k , con $k \geq 1$ entonces la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= X(z) \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

tiene solución única y define un flujo $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x))$ sobre el toro T^2 de clase C^k que satisface las identidades:

$$\begin{aligned} U^n \varphi_1(t, x) &= \varphi_1(t, U^n x) \text{ y } \varphi_2(t, x) = \varphi_2(t, U^n x) \\ \varphi_2(t, x) &= \varphi_2(t, V^m x) \text{ y } V^m \varphi_2(t, x) = \varphi_2(t, V^m x) \end{aligned} \tag{4.11}$$

ésto quiere decir que el levantamiento $\tilde{\varphi} \in C$ de la curva $\varphi \in T^2$ el punto $x + n + im$ no es otra cosa que una traslación del mismo levantamiento $\tilde{\varphi}$ en el punto x .

A continuación enunciaremos y probaremos un resultado debido a L. Siegel [28](1945).

Lema 4.14 : Sea $\varphi(t, x)$ el flujo en T^2 de clase C^k , con $k \geq 1$, asociado a la E.D 4.10. Supongamos que φ no tiene puntos singulares, entonces existe una curva de Jordan J de clase C^k en T^2 que es transversal al flujo φ en todo punto de T^2 . Más aún J es una curva no homotópica a cero y toda órbita intersecta a J .

Demostración: Consideremos la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Y(z) \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

con $Y = (-X_1, X_2)$ como sabemos las curvas integrales de la ecuación 4.12 son ortogonales a las de la ecuación 4.10. Sea ψ una solución de la E.D 4.12, si es cerrada entonces tendríamos

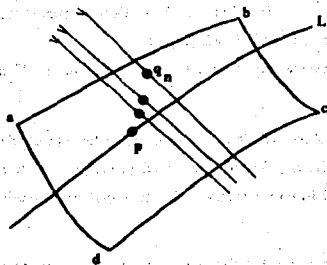


Figura 4-2:

$\psi = J$ y lo único que faltaría probar sería que es no homotópica a cero. Supongamos entonces que ψ no es cerrada y sea $p \in \omega(\psi^+)$, (sabemos que en $\omega(\psi^+)$ hay más puntos además de p ya que X no tiene puntos singulares) podemos entonces construir una vecindad N de p cuya frontera esté compuesta por arcos solución ab , cd de la ecuación 4.10 y bc , ad de la ecuación 4.12, como se observa en la figura 4.2.

Esta vecindad la podemos construir con las siguientes características: la variación de los ángulos de X en N es menor que $\pi/8$; podemos encontrar en ψ una sucesión de puntos $q_n \rightarrow p$ tal que los arcos $q_n q_{n+1}$ sobre ψ contengan puntos fuera y dentro de N . Consideremos ahora un segmento L que pase por p y que forma un ángulo $\pi/4$ con el valor del campo en p , para n suficientemente grande sea s_n el punto donde el arco $q_{n-1} q_n$ sobre ψ intersecta a L , tenemos entonces definida de esta forma una nueva sucesión $s_n \rightarrow p$, fijemos nuestra atención en el arco $s_k s_m$ sobre ψ que une a s_k con s_m si suponemos que s_k es anterior a s_m (es decir que si $\psi(t) = s_i$ entonces $t_k < t_m$) sea s_r el primer punto donde tal arco intersecta a L , entonces la curva J formada por los arcos $s_k s_r$ sobre ψ y $s_k s_m$ sobre L es cerrada y transversal al campo, sin embargo tiene la desventaja de que no es de clase C^k en los puntos s_k y s_r lo cual no es un gran problema por que como en tales puntos la variación del vector tangente a la curva acercándonos por ambos lados no es mayor a $3\pi/8$ y por consiguiente podemos suavizar la curva de tal modo que sea C^k . Por otra parte si suponemos que J es homotópica a cero entonces al levantarla a C sigue siendo homotópica a cero (ver capítulo 5 sección 5) y por el

teorema 3.2 del capítulo 3, el índice con respecto a J del campo X es ± 1 lo cual resulta ser una contradicción con el corolario 3.7 ya que X no tiene puntos singulares. (para ver que J intersecta a toda órbita consultar L. Siegel [28]) \square

En lo futuro supondremos que X es un campo vectorial en T^2 que tiene las siguientes características:

- A) Cumple con las hipótesis del lema 4.14, es decir no tiene puntos singulares, en particular supondremos que $X_1(x) > 0$, esto quiere decir que siempre podremos asegurar la existencia de una curva de Jordan J transversal al flujo $\varphi(t, x)$ generado por la ecuación 4.12 y que:
- B) Si tomamos las cartas coordenadas adecuadas la curva J del teorema anterior puede ser el meridiano de T^2 que se levanta en el eje $y = Re(x) = 0$.
- C) Toda órbita intersecta a J y la función π que a cada $\gamma \in J$ le asocia la primera intersección de la solución $\varphi(t, \gamma)$ con J , está definida para toda $\gamma \in J$.⁵

Nótese que siempre que se tenga definido un flujo ρ en una curva cerrada J , éste puede ser extendido a un flujo $\varphi(t, x)$ en T^2 que satisface las condiciones A, B y C en tal caso diremos que $\varphi(t, x)$ es la suspensión del flujo ρ .

La función π define una función $\hat{\pi} : R \rightarrow R$ que tiene las siguientes propiedades: (i) $\hat{\pi}$ es continua y estrictamente creciente; (ii) $\hat{\pi}(x+1) = \hat{\pi}(x) + 1$; (iii) $\hat{\pi}$ es de clase C^1 . Por lo tanto podemos entonces calcular el número de rotación $\rho(\hat{\pi})$ de la función $\hat{\pi}$ y establecer algunos teoremas que no demostraremos.

TEOREMA 4.15 : Si φ es un flujo en T^2 de clase C^1 con las propiedades A, B, C. Entonces tiene una órbita cerrada si y solo si $\rho(\hat{\pi})$ es racional. \square

TEOREMA 4.16 : Si φ es un flujo en T^2 de clase C^2 con las propiedades A, B, C y con número de rotación irracional. Entonces T^2 es un conjunto minimal. \square

En este último teorema así como en el teorema 4.11 es suficiente la hipótesis $\varphi \in C^2$.

La función $\hat{\pi} : R \rightarrow R$ tiene la forma:

$$\hat{\pi}(x) = x + a(x) \text{ con } a(x) > 0 \text{ y } a'(x) > 1 \quad (4.13)$$

⁵Es decir tal función $\pi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ es la función de Poincaré.

de donde obtenemos que si $\hat{\varphi}$ es el levantamiento de φ , una curva integral de la E.D 4.10 con X un campo del tipo ABC⁶, entonces:

$$\rho(\hat{\varphi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varphi}^n / n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\varphi}(\hat{\varphi}^k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\varphi}(t) / |\hat{\varphi}(t)| = \rho(\hat{\varphi}) \quad (4.14)$$

la importancia de estas igualdades radica en el hecho de que nos facilitaría la interpretación geométrica del número de rotación, con resultados como el siguiente: (la ecuación 4.14 también muestra una equivalencia entre las definiciones de número de rotación dadas en [13] y [3] con la que utiliza Markley en [18]).

Lema 4.17 : Sean $\alpha, \beta : (0, \infty) \rightarrow T^2$ curvas simples que no se intersectan. Si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son sus respectivos levantamientos entonces $\rho(\hat{\alpha}) = \rho(\hat{\beta})$.

Demostración: Si pensamos en las funciones de Poincaré \tilde{x}_α y \tilde{x}_β asociadas a los levantamientos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, entonces tenemos que este resultado es consecuencia de la ecuación 4.8 \square .

4.3 De toros y botellas.

El objetivo de esta sección es llegar a probar que cierto tipos de campos en la botella de Klein K^2 tienen siempre órbitas periódicas. Para comenzar vamos a hacer ver que el toro es un espacio cubriente de dos hojas de la botella de Klein K^2 .

De la familia de transformaciones cubrientes T vamos a tomar la transformación $S = T_{0,1}$ y nos vamos a fijar en el grupo T_0 generado por S y K y la operación de composición entre funciones complejas, donde K es la transformación $K(z) = z + 1/2$, podemos definir entonces, como lo hicimos en el caso del toro, la relación -que también será de equivalencia- \sim , x, w están relacionados ($x \sim w$) si existe $T \in T_0$ tal que $T(x) = w$, definiremos entonces $K^2 = C/T_0$, dotado de la topología cociente, esta nueva relación induce una forma de dividir el plano complejo como se puede observar en la figura 4.3, hay que notar que en este caso la región fundamental I es el rectángulo $[0, 1/2] \times [0, 1]$ y que la forma en que están relacionados los lados del rectángulo es distinta de la anterior como también se aprecia en la figura 4.3, estamos pensando entonces en K^2 como un espacio topológico. Nuestro siguiente paso será relacionar de alguna manera los

⁶Es decir un campo que satisface las condiciones A, B, C.

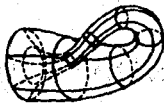


Figura 4-3:

puntos de T^2 y los de K^2 para lo cual fijaremos nuestra atención en las formas en que tenemos definidos ambos espacios.

Observación 4.18 : Notemos que $T \subset T_0$, ya que $K^2 x = K(x+1/2) = x+1 = T_{1,0}$, es decir, K^2 es también un generador del grupo T \square

De esta observación nos damos cuenta de que si dos números complejos son tales $x \sim w$ (\sim es la relación que se usa para definir a T^2) entonces $x \approx w$, más aún si nos fijamos en I (la región fundamental con respecto a la relación \sim) y tomamos $x \in I$ sabemos que representa un punto en T^2 , pero por otra parte sabemos que existe $x_0 \in I$ tal que $x \approx x_0$, es decir x y x_0 representan al mismo punto en K^2 , de aquí podemos establecer una relación $h: T^2 \rightarrow K^2$ de la siguiente forma: si v es un número complejo entonces v está en alguna clase de equivalencia inducida por T , esto quiere decir que existe $x \in I$ tal que $v \sim x$, entonces definiremos $h(v) = \{w \in I : x \approx w\}$ es claro de los comentarios anteriores que hay dos puntos p_1 y $p_2 \in T^2$ tales que h los relaciona con un solo punto $q \in K^2$, o equivalentemente $h^{-1}(q) = \{p_1, p_2\}$, esta asociación es claramente continua y para probar que T^2 es un espacio cubriente de K^2 necesitamos hacer ver que h es un homeomorfismo local, lo cual no es difícil ya que si tomamos $x \in I$ sabemos que existe una vecindad U de x completamente contenida en I que es mapeada homeomórficamente en alguna vecindad \tilde{U} de x_0 . Esta afirmación resulta más clara si pensamos en h como una función de C en C y después recurrimos a las identificaciones.

Sea Σ una sección transversal local al flujo φ generado por la ecuación diferencial 4.10 en el punto $p = \varphi(0, p) \in T^2$ fijemos nuestra atención en la semi-órbita positiva $\varphi^+(t)$ que pasa por p , supongamos que $q = \varphi(t_1) \in \Sigma$ y que el arco PQ sobre φ que une a p con q es ajeno al arco abierto \overline{PQ} sobre Σ que une a p con q , entonces si $\alpha = PQ \cup \overline{PQ}$ es una curva cerrada simple tenemos dos casos:

$$x_0 = T_{0,1}(Kx).$$

1) α es una curva cerrada homotópica a cero, en tal caso el levantamiento $\tilde{\alpha}$ de α en C es una curva de Jordan, y por lo tanto si tomamos un punto $x_0 \in C$ tal que (aquí P es la transformación cubriente) $r = P(x_0) \in \overline{PQ}$ y nos fijamos en el levantamiento de la semi-órbita positiva que pasa por r , ésta por continuidad del flujo permanece indefinidamente en el interior de la región acotada por α si aplicamos entonces el teorema de Poincaré-Bendixon en el plano tendremos que si φ no tiene puntos singulares entonces debe tener una órbita periódica.

2) α es una curva cerrada no homotópica a cero y en tal caso si $\tilde{\alpha}_n$ es un levantamiento universal lo llamaremos curva control. En tal caso procederemos como sigue:

Sea $x_0 \in \tilde{\alpha}_n$ tal que $r = P(x_0) \in \overline{PQ}$ de la nota 4.1 nos damos cuenta que $\tilde{\alpha}_n$ divide a C en dos partes, a la parte que contiene al punto $r^+ = \varphi(\epsilon, r)$ la llamaremos A^+ y a la parte que contiene a $r^- = \varphi(-\epsilon, r)$ la llamaremos A^- claramente esta definición no depende de x_0 y A^+ es positivamente invariante bajo la acción del flujo φ y A^- es negativamente invariante.

Definición 4.19 [24]: Diremos que una curva integral γ , distinta de una singularidad, es positivamente (negativamente) recurrente si $\gamma \subset \omega(\gamma)$ ($\gamma \subset \alpha(\gamma)$) ésto es, si γ es prolongada indefinidamente en sentido positivo (negativo) pasa tan cerca como se quiera de cualquiera de sus puntos.

TEOREMA 4.20 [18]: Sea $x_0 \in C$ si $\varphi = \varphi(t, P(x_0))$ es positivamente (negativamente) recurrente y no periódica entonces $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(t, x_0)$ no está contenida entre dos rectas con pendiente racional.

Demostración: Supongamos que $\varphi(t, P(x_0))$ es positivamente recurrente y que $\tilde{\varphi}(t, x_0)$ está contenido entre dos líneas con pendiente racional L y L' . Como T_0 es un grupo discontinuo de transformaciones existe un conjunto finito de líneas $\{L_1, \dots, L_q\}$ paralelas a L' tales que $x' \sim x_0$ y x' entre L y L' implica $x \in L_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, q\}$. Como $\varphi(t, P(x_0))$ es positivamente recurrente, existe al menos una i tal que dada cualquier $\epsilon > 0$ podemos hallar $x' \in L_i$ relacionada con x_0 y tal que $\tilde{\varphi}(t, x_0) \cap B(x', \epsilon) \neq \emptyset$. Consideremos dos casos:

1. Para el primer caso supondremos que existe una i que satisface lo mencionado arriba tal que $x_0 \notin L_i$; sin pérdida de generalidad supondremos que $x_0 \in L_1$ y $i = 2$. Sea $T \in T$ una transformación tal que envía L_1 en L_2 . Probaremos por inducción que dado

cualquier entero positivo m y cualquier $\epsilon > 0$, existe $x' \sim x_0$ tal que $x' \in T^m(L_1)$ y $\tilde{\varphi}(t, x_0) \cap B(x', \epsilon) \neq \emptyset$. Por construcción es cierto para $m = 1$, supongámoalo cierto para m . Existe $s_1 \in L_2$ y $\tau > 0$ tal que $s_1 \sim x_0$ y $|\tilde{\varphi}(\tau, x_0) - s_1| < \epsilon$. Podemos suponer que $T(x_0) = s_1$ escogamos $\delta > 0$ tal que la vecindad $B(x_0, \delta)$ es enviada por el flujo en $B(x_1, \epsilon)$. Usando las propiedades isométricas de las transformaciones cubrientes podemos ver que la imagen de $B(x', \delta)$ está contenida en $B(T(x'), \epsilon)$ para toda $x' \sim x_0$. Por hipótesis de inducción existe $s_2 \sim x_0$ y $\tau' > 0$ tal que $s_2 \in T(L_1)$ y $|\tilde{\varphi}(\tau', x_0) - s_2| < \delta$ por lo tanto $\tilde{\varphi}(\tau + \tau', x_0) \in B(T(s_2), \delta)$ y $T(s_2) \in T^{m+1}(L_1)$ y como $d(T^m(L_1), L_1) \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$, $\tilde{\varphi}(t, x_0)$ no puede caer entre L' y L'' .

2. Si suponemos que $x_0 \in L_1$ con $x \sim x_0$ y $\tilde{\varphi}^+(t, x_0) \cap B(x', \epsilon_1) \neq \emptyset$ implican que $x' \in L_1$. Entonces $\tilde{\varphi}^+(t, x_0)$ no puede ser recurrente, por lo tanto existe una sección transversal $\tilde{\Sigma}$ de $\tilde{\varphi}$ en el punto x_0 tal que $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{\varphi} = x_0$ y $\tilde{\Sigma} \subset B(x_0, \epsilon_1)$. Se sigue que $\Sigma = P(\tilde{\Sigma})$ es una sección transversal local a φ en el punto $w = P(x_0)$. Como $\varphi(t, w)$ es positivamente recurrente y no periódica podemos hallar $t_2 > t_1 > 0$ con las siguientes propiedades:

- i) $w_1 = \varphi(t_1, w) \in \Sigma$.
- ii) El arco sobre φ cerrado WW_1 que une w con w_1 es ajeno al arco sobre Σ abierto WW_1 que une w con w_1 .
- iii) $w_1 = \varphi(t_1, w) \in WW_1$.

Si $\alpha = WW_1 \cup WW_1$ de (ii) tenemos que α es simple. Si α es homotópica a cero entonces $\tilde{\varphi}(t_1, x_0) \in \tilde{\Sigma}$ lo cual contradice la forma en que escogimos $\tilde{\Sigma}$ en consecuencia α es no homotópica a cero y por consiguiente está contenida entre dos rectas racionales, claramente $\tilde{\varphi}(t_2, x_0) \in A^+$ y $\tilde{\varphi}(t_2, x_0) \in T(\tilde{\alpha}_w)$ para alguna $T \in \Upsilon_0$. De donde se concluye que $\tilde{\varphi}(t_2, x_0) \in A^+ \cap \tilde{\alpha}_w = \emptyset$ lo cual es imposible. \square

Como consecuencia del lema 4.17 y del teorema 4.20 tenemos el siguiente:

Corolario 4.21 : Si $x_0, x_1 \in C$ son tales que $\varphi(t, P(x_0))$ y $\varphi(t, P(x_1))$ son positivamente (negativamente) recurrentes y no periódicas. Entonces los límites:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t, x_0)}{|\tilde{\varphi}(t, x_0)|} \text{ y } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t, x_1)}{|\tilde{\varphi}(t, x_1)|}$$

existen y son iguales. \square

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema más importante de esta sección

TEOREMA 4.23 [18]: Sea Φ un flujo continuo en la botella de Klein K^2 . Entonces toda órbita positivamente (negativamente) recurrente es periódica:

Demostración: Sean ϕ y ψ levantamientos del flujo Φ a T^2 y C respectivamente. Sea $\phi \in K^2$ una curva positivamente recurrente y no periódica; sean ϕ_1 y ϕ_2 las curvas en T^2 tales que bajo f^2 van a dar a ϕ . Existe una transformación cubriente $T: T^2 \rightarrow T^2$ tal que permuta ϕ_1 con ϕ_2 como Φ es positivamente recurrente alguna ϕ_1 o ϕ_2 está en el conjunto ω -límite de ϕ_1 . Si $\phi_2 \in \omega(\phi_1)$ entonces aplicando T tenemos que $\phi_1 \in \omega(T\phi_1) = \omega(\phi_2)$ por lo tanto ϕ_1 y ϕ_2 son recurrentes y no periódicas.

Sea $\tilde{\phi}_1 \in P^{-1}(\phi_1)$ tenemos que $PT(\tilde{\phi}_1) = \tilde{\phi}_2$ usando el corolario 4.21 concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\tilde{\phi}_1}{|\tilde{\phi}_1|} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{T\tilde{\phi}_1}{|T\tilde{\phi}_1|} = \pm 1 \quad (4.15)$$

si suponemos que ambos límites son iguales a 1 entonces como $\tilde{\phi}_1$ no puede estar comprendida entre dos rectas con pendiente racional (por teorema 4.22) la ecuación 4.15 constituye la contradicción que demuestra la validez del teorema. \square

Por último tenemos un resultado debido a H. Kneer (1924)

Corolario 4.25: Si Φ es un flujo en la botella de Klein sin puntos singulares entonces tiene un órbita periódica.

Demostración: Sea N un conjunto minimal para Φ y tomemos $\phi \in N$ tenemos entonces que $\omega(\phi) = N$ y por lo tanto ϕ es recurrente, por el teorema anterior ϕ es periódica o es un punto singular pero por hipótesis Φ no tiene puntos singulares. \square

Este resultado tiene para nosotros una gran importancia ya que hace evidente que K^2 no puede ser minimal con respecto a un flujo sin singularidades, hecho que será de gran importancia en nuestro análisis posterior.

4.4 Generalización del teorema de Poincaré-Bendixson.

El objetivo de esta sección es llegar a probar el teorema más importante de este trabajo, el teorema de Schwartz, como hemos dicho antes es conveniente comenzar hablando un poco

¹La transformación cubriente $P: T^2 \rightarrow K^2$.

acerca de la fórmula de Euler-Poincaré, esto quiere decir que lo haremos desde un punto de vista totalmente informal y los resultados a este respecto serán expuestos sin demostración alguna.

En lo que respecta al teorema de Schwartz, éste sí será probado con todo rigor y la demostración que se presentará será esencialmente la misma que dio Schwartz [27](1963).

4.4.1 La fórmula de Euler-Poincaré.

Definición 4.24 [22]: Una colección de puntos $\sigma^n = \{a_0, \dots, a_n\}$ en R^n es geoméricamente independiente si no hay un hiperplano de dimensión $n-1$ que contiene a todos los puntos de σ^n .

Supongamos que tenemos una colección $\sigma^n = \{a_0, \dots, a_n\}$ de puntos geoméricamente independientes en R^n . A la cerradura convexa de σ^n la llamaremos un n -simplejo en R^n , en estos términos tenemos que por ejemplo un punto es un 0-simplejo, un segmento es un 1-simplejo, un triángulo es un 2-simplejo y así, ahora bien un n -simplejo en una variedad M^n es una pareja (h, σ^n) con $h: \sigma^n \rightarrow M$ un encaje. Sea $s^n = g(\sigma^n)$ un vértice es la imagen bajo h de un 1-simplejo $\{a_i\} \subset \sigma^n$, una arista de s^n es la imagen de un 1-simplejo $\{a_i, a_j\} \subset \sigma^n$, por último s^n es un triángulo Θ en M . Una triangulación en M es una colección \mathcal{J} de triángulos tales que:

1. $M = \cup_i \Theta_i$;
2. Si $\Theta_i \cap \Theta_j \neq \emptyset$ entonces Θ_i y Θ_j tienen un vértice, una arista en común o son el mismo triángulo.

Daremos ahora una lista de teoremas que presentaremos, como ya hemos dicho, sin demostrar.

TEOREMA 4.25 [2]: Toda variedad compacta M acepta una triangulación. \square

Si \mathcal{J} es una triangulación de la 2-variedad compacta M denotaremos por V al número de vértices, por A al de aristas y por T al de triángulos y al número

$$\chi = T - A + V$$

lo llamaremos la característica de Euler-Poincaré de M . El teorema que sigue muestra que la característica de Euler-Poincaré es un invariante topológico.

²No hace falta decir que M es siempre una 2-variedad.

TEOREMA 4.26 : Si M es una variedad compacta entonces la característica de Euler - Poincaré no depende de la triangulación \mathcal{J} por lo cual la denotaremos como $\chi(M)$. \square

TEOREMA 4.27 : Sea M una variedad compacta. La característica de Euler-Poincaré solo toma valores de la forma $2, 0, -2, \dots, -2n$ más aún si M y M' son tales que $\chi(M) = \chi(M')$ entonces M y M' son homeomorfas. \square

Definición 4.28 : Al número $g = (2 - \chi(M))/2$ le llamaremos el género de la variedad M .

Si calculamos directamente nos daremos cuenta de que el género de la esfera es 0 y el del toro (esfera con una asa) es 1, así en el caso de variedades orientables el teorema anterior puede ser parafraseado diciendo: cualquier variedad compacta M orientable con género n es homeomorfa a una esfera con n asas, esto quiere decir que podemos clasificar las 2-variedades compactas orientables de acuerdo con su género. El número $\chi(M)$ es un importante invariante topológico que puede ser utilizado para relacionar propiedades topológicas con propiedades puramente geométricas para llevar a interesantes resultados.

Para concluir definamos en M un campo vectorial $V \in C^1(M)$. En el capítulo anterior estudiamos el índice I_V de un punto singular aislado v con respecto al campo vectorial V . Supongamos ahora que tenemos una triangulación \mathcal{J} de M tal que :

1. Todo triángulo $\Theta \in \mathcal{J}$ está contenido en alguna vecindad coordenada de M .
2. Todo triángulo contiene a lo más un punto singular de V .
3. La frontera de cada Θ no contiene puntos singulares y es positivamente orientada.

Con estas condiciones tendremos que:

TEOREMA 4.29 (de Poincaré) : La suma de los índices del campo vectorial V en M con singularidades aisladas v_i es igual a la característica de Euler-Poincaré. Es decir:

$$\sum_i I_V(v_i) = \chi(M) \quad (4.16)$$

\square

La ecuación 4.16 es conocida como la fórmula de Euler-Poincaré, este interesante resultado indica que $\sum_i I_V(v_i)$ no depende de V si no más bien de la topología de M , lo cual nos

permite deducir interesantes resultados, por ejemplo que cualquier campo vectorial continuo en una variedad homeomorfa a la esfera tiene puntos singulares, nótese que gracias a que las propiedades enunciadas arriba son de carácter local la orientabilidad de la variedad M no es algo que importe mucho¹⁰, así que del teorema 4.28 y del corolario 4.23 podemos deducir el siguiente resultado.

Corolario 4.30 : *La única variedad compacta (salvo homeomorfismos) que admite un campo vectorial sin singularidades es el toro T^2 .* \square

Concluiremos este capítulo en la siguiente sección.

4.4.2 El teorema de Schwartz.

TEOREMA 4.31 [97]: *Sea M un variedad compacta. Sea Φ un flujo de clase C^2 en M y $\Omega \subset M$ un conjunto minimal con respecto a Φ . Entonces tenemos las siguientes posibilidades:*

- i) Ω es un punto singular.
- ii) Ω es una órbita periódica.
- iii) $\Omega = M$

Demostración: Antes de pasar a lo que es propiamente la prueba del teorema hay que darnos cuenta de que el caso (iii) merece un comentario aparte. Si M es una variedad en la que $\Omega = M$ entonces tal variedad no tiene puntos singulares y por lo tanto de los corolarios 4.23 y 4.29 obtenemos que $M = T^2$. La demostración la dividiremos en dos partes.

- 1) En la primera parte observamos que en vista de la proposición 4.3(c) sabemos que si Ω es minimal entonces $\Omega = M$ o denso en ninguna parte como nosotros queremos probar que $\Omega = M$ entonces supondremos que $\Omega \neq M$ es un conjunto minimal denso en ninguna parte, que no contiene ni puntos singulares ni órbitas periódicas y haremos ver que la existencia de tal conjunto es imposible. Sean p un punto en $\Omega \subset M$ y Γ una sección transversal local al flujo Φ en p tal que sus extremos no están en Ω . Sea $g : U \subset M \rightarrow R^2$ un sistema coordenado tal que $p = g^{-1}(0, 0)$ y $\Gamma = g^{-1}(I)$ con $I = \{s = (s, 0) : |s| < 1\}$. Si s_0 es un número fijo en el intervalo $(-1, 1)$ entonces $g^{-1}(s_0, t)$ coincide en U con la

¹⁰En los libros Croom y Perko se exhiben triangulaciones de T^2 y K^2 .

órbita $\varphi(t, p_0)$ que pasa por el punto $p_0 = g^{-1}(s_0, 0)$, ver figura 4.5. Tomemos un punto $q \in \Gamma$ y fijémosnos en la función $\pi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ que a cada punto en Γ le asocia la primera intersección de su semi-órbita positiva con Γ si suponemos que el conjunto de puntos $A \subset \Gamma$ para los cuales la función π está definida es no vacío entonces por continuidad del flujo A es abierto. La función π puede ser obtenida de la siguiente forma: la curva integral $\varphi(q, t)$ con $q \in \Gamma$ es tal que $g(\varphi(q, t)) = (\sigma(s, t), \tau(s, t))$ y cuando $s = (s, 0)$ tendremos $g^{-1}(q) = q$, si para $t_0 > 0$ tenemos que $\varphi(q, t_0) \in \Gamma$ entonces $g(\varphi(q, t_0)) = (\sigma(s, t_0), 0)$ es decir $\pi(q) = g^{-1}(\sigma(s, t_0), 0)$ de donde se observa que (i) $\pi \in C^2(\Gamma)$, más aún sabemos que $d\pi^{-1}$ es inyectiva de donde obtenemos que (ii) $d\pi(q) \neq 0$. Como Ω es minimal entonces $q_1 \in \Omega$ implica $\varphi(q_1, t) \in \Omega$ ésto quiere decir que si $q_1 \in K$ entonces $q_1 \in A$. Sea V un subconjunto abierto de A tal que $K \subset V \subset \hat{V} \subset A$ en particular de (i) y (ii) obtenemos (iii) $0 < F^{-1} \leq |d\pi(q)| \leq F$ y (iv) $|d^2\pi(q)| \leq M$ para toda $q \in V$, finalmente gracias a las propiedades (iii) y (iv) obtenemos que π es inyectiva y por lo tanto podemos pensar en π^h ($h \in \mathbb{Z}$) como un flujo en Γ tal que (v) K es minimal ya que Ω es invariante y como no contiene órbitas periódicas (vi) $\pi^h(q) = q$ si y solo si $h = 0$. Además como Ω es denso en ninguna parte, el conjunto $K = \Omega \cap \Gamma$ es cerrado, denso en ninguna parte y (vii) $W = I - K$ se puede ver como unión de intervalos abiertos (α_i, β_i) .

- 2) Nótese que una función con las propiedades (i)-(vii) no puede existir ya que constituye una violación al teorema de Denjoy, sin embargo supondremos que existe una función π con las propiedades (i)-(vii). Sea $\epsilon = d(K, I - V)$ con $0 < \epsilon < 1$. Notemos que si $(\alpha_i, \beta_i) \subset W$ es tal que $\beta_i - \alpha_i < \epsilon$ entonces $[\alpha_i, \beta_i] \subset V \subset A$. Por otra parte como π es un homeomorfismo y K es invariante entonces el conjunto de puntos $K_1 = \{\alpha_i, \beta_i\}$ es tal que $\pi(K_1) = K_1$. Sea Y el conjunto de puntos en K_1 tales que $\beta_i - \alpha_i \geq \epsilon$, nótese que tal conjunto es finito y por consiguiente existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi^n(\alpha_i) = \alpha_n \notin Y$ por lo tanto el intervalo (α_n, β_n) tiene la propiedad de que $|\pi^n(\alpha_i) - \pi^n(\beta_i)| < \epsilon$ de donde concluimos que $(a, b) = (\alpha_n, \beta_n) \subset V$. Si calculamos la derivada de $\pi^h(q)$ tenemos que como $\pi^h(q) = \pi(\pi^{h-1}(q))$ entonces $d\pi^h(q) = \Pi_{i=0}^{h-1} d\pi(\pi^i(q))$ en consecuencia si $q < r$ son tales que $\pi^h([q, r]) \subset V$ para toda $0 < h < n$ tendremos:

$$\log \left| \frac{d\pi^h(q)}{d\pi^h(r)} \right| \leq \sum_{i=0}^{h-1} \left| \log d\pi(\pi^i(q)) - \log d\pi(\pi^i(r)) \right|$$

y por el teorema del valor medio:

$$\log \left| \frac{d\pi^k(q)}{d\pi^k(r)} \right| \leq \sum_{i=0}^k |(d\pi(\theta_i))^{-1}| \cdot |d^2\pi(\theta_i)| \cdot |\pi^i(q) - \pi^i(r)|$$

para alguna θ_i entre q y r . Exponenciando obtenemos:

$$\left| \frac{d\pi^k(q)}{d\pi^k(r)} \right| \leq \exp FM \sum_{i=0}^k |\pi^i(q) - \pi^i(r)| \quad (4.17)$$

Sea $\delta = \sum_{i=0}^{\infty} |d\pi^i(a)|$ notemos que $d\pi^0(q) = 1$ por lo tanto $\delta \geq 1$. Existe $\theta_b \in (a, b)$ tal que $|\pi^i(a) - \pi^i(b)| = |d\pi(\theta_i)| |b - a|$ como los intervalos $(\pi^k(a), \pi^k(b))$ para k distintas son ajenos tenemos que:

$$|b - a| \sum_{i=0}^{\infty} |d\pi(\theta_i)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\pi^i(a) - \pi^i(b)| \leq 2$$

de 4.17 se desprende:

$$|d\pi^k(a)| \leq |d\pi^k(\theta_i)| e^{2FM} \quad (4.18)$$

en conclusión:

$$1 \leq \delta \leq 2(b-a)^{-1} e^{2FM} \quad (4.19)$$

Sea $d = \varepsilon / 6FM\delta$ probaremos por inducción que:

$$|\pi^k(q) - \pi^k(a)| < \varepsilon \quad (4.20)$$

$$|d\pi^k(q)| < 3 |d\pi^k(a)| \quad (4.21)$$

para toda $|q - a| < d$. Para $k = 0$ ambas ecuaciones son fáciles, supongámoelas validas para $k - 1$, entonces de 4.17 tenemos que:

$$|d\pi^k(q)| \leq |d\pi^k(a)| \exp FM \sum_{i=0}^k |\pi^i(a) - \pi^i(q)|$$

por teorema del valor medio e hipótesis de inducción para 4.21:

$$\sum_{i=0}^{k-1} |\pi^i(q) - \pi^i(a)| \leq |q - a| \sum_{i=0}^{k-1} |d\pi^i(\theta_i)| \leq 3|q - a| \sum_{i=0}^{k-1} |d\pi^i(a)|$$

de 4.19 obtenemos:

$$\left| d\pi^h(q) \right| \leq \left| d\pi^h(a) \right| \exp 3dFM\delta \leq 3 \left| d\pi^h(a) \right| \quad (4.22)$$

ya que $3dFM\delta < 1$. Calculemos ahora:

$$\left| \pi^h(q) - \pi^h(a) \right| \leq \left| d\pi^h(\theta_h) \right| |q - a| \leq 3d \left| d\pi^h(a) \right| \leq 3d\delta$$

y como podemos tomar $F > 1$ y $M > 1$ entonces $3d\delta < \epsilon$ lo cual prueba la ecuación 4.20. De las ecuaciones 4.19 y 4.21 obtenemos la igualdad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\pi^n(q) = 0 \quad \text{uniformemente para } |q - a| < d \quad (4.23)$$

lo mismo que la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\pi^{-n}(q) = 0 \quad \text{uniformemente para } |q - a| < d \quad (4.24)$$

finalmente de las ecuaciones 4.22 y 4.23 podemos concluir que para n suficientemente grande $d\pi^n(q) < 1/2$ y $d\pi^{-n}(\pi^n(q)) < 1/2$ lo cual es la contradicción que establece la validez del teorema de Schwartz. □

Hay que darnos cuenta que la parte (2) de esta demostración no es otra cosa que una prueba del teorema de Denjoy, es decir, después de lo anterior podemos llegar a la conclusión de que los teoremas de Schwartz y Denjoy son equivalentes

Capítulo 5

Apéndice.

En este capítulo se presentan una serie de resultados que se utilizan a lo largo de toda la tesis pero que sin embargo en su momento no fueron demostrados, todos ellos aparecen con la referencia donde pueden ser consultados.

5.1 Aproximación de números irracionales por racionales.

En esta sección nos proponemos a probar el siguiente resultado:

TEOREMA 5.1 [9]: *Para cualquier número irracional ρ existe un número racional $\frac{p}{q}$ tal que cumple con la desigualdad*

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Demostración: La idea de la demostración es muy sencilla y básicamente geométrica (ver figura). Si tenemos un número irracional $\rho > 0$ dibujamos en el plano R^2 la recta $L: y = \rho x$ y nos fijamos en las parejas (p, q) con p, q enteros distintos de cero, es claro que ninguno de estos puntos cae en L , vamos a construir una sucesión de parejas $r_k = (p_k, q_k)$ de la siguiente forma: si P_{-1} y P_0 son los semiplanos en que L divide a R^2 entonces los vectores $r_{-1} = (1, 0)$, $r_0 = (0, 1)$, están en distintos semiplanos, supongamos $r_i \in P_i$, el siguiente elemento lo vamos a construir de la siguiente manera $r_1 = r_{-1} + a_0 r_0$ con a_0 el máximo entero tal que $r_1 \in P_{-1}$ y así continuamos, es decir $r_{k+1} = r_{k-1} + a_k r_k$ con a_k el máximo entero tal que r_{k+1} esta en el mismo semiplano que r_{k-1} de esta forma tenemos una sucesión de puntos en R^2 tales que están

a ambos lados de la recta L . Los primero $K + 1$ elementos de esta sucesión son:

$$\begin{aligned}
 r_{-1} &= (1, 0) \\
 r_0 &= (0, 1) \\
 r_1 &= (1, a_0) \text{ con } \rho > a_0 \\
 r_2 &= (a_1, 1 + a_0 a_1) \text{ con } \rho < a_0 + \frac{1}{a_1} \\
 r_3 &= (1 + a_1 a_2, a_0 + a_2(1 + a_0 a_1)) \text{ con } \rho > a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \\
 r_4 &= (a_1 + a_2(1 + a_1 a_2), 1 + a_0 a_1 + a_3(a_0 + a_2(1 + a_0 a_1))) \\
 &\text{con } \rho > a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} \\
 &\vdots \\
 r_k &= (p_k, q_k) \text{ con } \rho < \frac{p_k}{q_k} \text{ si } k \text{ es par} \\
 r_k &= (p_{k+1}, q_{k+1}) \text{ con } \rho > \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}
 \end{aligned}$$

además sabemos que $p_{k+2} = p_{k-1} + a_k p_k$ y $q_{k+2} = q_{k-1} + a_k q_k$. Si calculamos el área $A(P_k)$ del paralelogramo $P_k = \{\alpha r_k + \beta r_{k+1} : 0 \leq \alpha + \beta \leq 1\}$ nos damos cuenta por cálculo directo de que para los primeros cuatro $A(P_k) = \pm 1$ si suponemos que $A(P_{k+1}) = \pm 1$ entonces al calcular

$$A(P_{k+2}) = p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k + a_{k+1} (p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k) = \pm 1$$

por construcción sabemos que r_k y r_{k+1} están en distintos semiplanos por lo tanto:

$$\left| \rho - \frac{p_k}{q_k} \right| < \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{(q_k)^2}$$

□

5.2 Cambios de coordenadas.

El propósito de esta parte es ejemplificar como se cambia una ecuación diferencial de las coordenadas cartesianas rectangulares a las coordenadas polares.

Comenzamos con la base canónica de R^2 , es decir con los vectores $\hat{e}_1 = (1, 0)$ y $\hat{e}_2 = (0, 1)$ tengo además una nueva base del mismo espacio R^2 dada por los vectores tangente y normal a la curva $\alpha(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t)$, voy a llamar \hat{e}_θ al primero de ellos, es decir a aquel que nos da la variación en la dirección en que el ángulo crece, es decir $\hat{e}_\theta = (-r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta)$ el cual

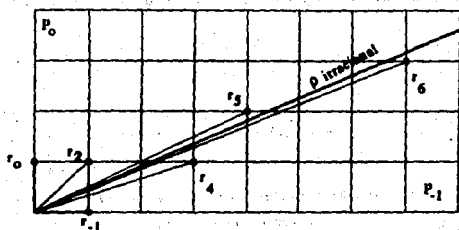


Figura 5-1:

después de normalizado queda como $\hat{e}_2 = (\text{sen}\theta, \text{cos}\theta)$ al segundo vector que es el que nos da la variación en la dirección radial lo llamo \hat{e}_r y después de normalizado queda $\hat{e}_r = (\text{cos}\theta, \text{sen}\theta)$ ahora expresaré los vectores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 en términos de \hat{e}_r y \hat{e}_θ para obtener que:

$$\hat{e}_1 = -\text{sen}\theta \hat{e}_\theta + \text{cos}\theta \hat{e}_r$$

$$\hat{e}_2 = \text{cos}\theta \hat{e}_\theta + \text{sen}\theta \hat{e}_r$$

de donde deduzco que la matriz de cambio de base es:

$$\begin{pmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \end{pmatrix}$$

ahora bien si tengo la ecuación diferencial (recordemos que la notación \dot{z} denota derivación con respecto al tiempo):

$$\dot{z} = x u(r) - y v(r)$$

$$\dot{y} = y u(r) + x v(r)$$

la puedo ver en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(r) & -v(r) \\ v(r) & u(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

y como lo que quiero hacer es cambiar la ecuación diferencial entonces tengo que pensar que x e y dependen de las variables (r, θ) es decir que son de la forma $x = x(r, \theta)$ e $y = y(r, \theta)$ de

donde obtengo las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial t} \dot{t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial t} \dot{t} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta}\end{aligned}$$

de donde obtengo la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

y utilizando el hecho que $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ tenemos entonces que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \operatorname{sen} \theta \\ -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

y si sustituimos la ecuación 5.1 en la ecuación 5.2 obtenemos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \operatorname{sen} \theta \\ -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(r) & -v(r) \\ v(r) & u(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix}$$

y por último:

$$\dot{t} = ru(r)$$

$$\dot{\theta} = v(r)$$

5.3 La transformación de Poincaré.

El propósito de esta sección es probar la validez de la fórmula:

$$\pi'(p) = \exp \left[\int_0^{\pi} \operatorname{Div} X(\gamma(t)) dt \right] \quad (5.3)$$

donde π es la función de retorno de Poincaré, para hacerlo me auxiliaré de la conocida fórmula de Liouville.

Proposición 5.2 (fórmula de Liouville) [29]: Sea $\Phi(t) = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ una matriz cuyas columnas son soluciones de la ecuación:

$$\dot{z} = A(t)z \quad (5.4)$$

entonces para todo $t \in I$ y $t_0 \in I$ fijos

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) \, ds \right]$$

donde $\text{tr } A(s) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ siempre que $A = (a_{ij})$.

Demostración: Voy a comenzar por probar que la función $\Psi(t) = \det \Phi$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{\Psi} = [\text{tr } A(s)] \Psi \quad (5.5)$$

si calculo $\Psi'(t)$ obtengo:

$$\Psi'(t) = \sum_{i=1}^n \det(\phi_1, \dots, \phi'_i, \dots, \phi_n) = \sum_{i=1}^n \det(\phi_1, \dots, A\phi_i, \dots, \phi_n)$$

ahora bien si suponemos que $\Phi(t)$ es solución fundamental de 5.4 entonces $\beta = \{\phi_i\}_{i=1}^n$ es una base del espacio de soluciones ahora bien A es una aplicación que envía cada ϕ_i en una nueva solución que se puede expresar en términos de β , y como ϕ_i es un elemento en la base entonces

$$A\phi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j \text{ con } \phi_j \in \beta$$

continuando el cálculo anterior:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \sum_{i=1}^n \det(\phi_1, \dots, \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j, \dots, \phi_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \det(\phi_1, \dots, \phi_j, \dots, \phi_n) = \\ &= (\text{tr } A) \Psi \end{aligned}$$

y por lo tanto Ψ es solución¹ de 5.5, por consiguiente:

$$\Psi(t) = k \exp \left[\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds \right]$$

y si hacemos $k = \det \Psi(t_0)$ obtenemos la fórmula de Liouville.

$$\det \Psi(t) = \det \Psi(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds \right] \quad (5.6)$$

una vez que hemos demostrado la fórmula de Liouville es fácil calcular la derivada del mapeo de Poincaré, vamos primero a definirlo bien, y luego mostraremos la fórmula.

Definición 5.3 [29]: Sea $X \in X^*(R^2)$ con una órbita cerrada $\gamma(t)$ con periodo τ_p , sea $p \in \gamma(t)$ y Σ una sección transversal en p . Entonces definimos el mapeo de Poincaré o la función de retorno de Poincaré, $\pi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ como sigue, si q es un punto en Σ entonces π le va a asociar a q el primer punto r tal que $\varphi(t, q)$ intersecta a Σ es decir si $\varphi(t, q) = r \in \Sigma$ entonces $\pi(q) = r$.

Nótese que como $X \in X^*(R^2)$ sabemos que φ es un difeomorfismo de R^2 de donde podemos intuir que π también debe de ser.

Para darnos una idea más clara de lo que es π daremos una expresión analítica de este mapeo. Como sabemos que γ es una órbita cerrada de periodo τ_p , entonces es natural pensar que (teorema de Peano) existe una vecindad V_p de p tal que si $q \in V_p \cap \Sigma$ entonces aplicando el flujo a q durante un tiempo τ_p tendremos que $\varphi(\tau_p, q)$ cae en una vecindad U_p de p . Ahora bien el teorema del flujo tubular local nos asegura que existe un tiempo τ_1 tal que

$$\varphi(\tau_1, \varphi(\tau_p, q)) \in \Sigma \quad (5.7)$$

¹Esta última igualdad se da porque cuando $i \neq j$ el determinante

$$\det(\phi_1, \dots, \phi_j, \dots, \phi_n) = 0$$

ya que ϕ_j es alguna entre $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} - \{\phi_i\}$ y cuando $i = j$ entonces

$$\det(\phi_1, \dots, \phi_j, \dots, \phi_n) \neq 0$$

es decir para una i fija los sumandos en (*) son

$$a_{ii} \det(\phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \dots, \phi_n)$$

y recorriendo los índices llegamos al resultado.

hay que tener en cuenta que τ_1 es una función que depende del flujo, de τ_0 y de q es decir tenemos la siguiente expresión

$$\tau_1 = \tau_1(\varphi(\tau_0, q))$$

y sabemos por las propiedades del flujo que 5.7 puede escribirse como:

$$\varphi(\tau_0 + \tau_1, q)$$

que es una expresión que utilizaremos como indistintamente como definición del mapeo de Poincaré, es decir

$$\pi(q) = \varphi(\tau_0 + \tau_1, q) \quad (5.8)$$

Estamos ahora sí, en condiciones de probar el siguiente:

TEOREMA 5.4 [29]: Sean $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, $X \in X^r(\mathbb{R}^2)$ y γ una órbita periódica de X con periodo τ_0 y $\pi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ el mapeo de Poincaré en Σ una sección transversal a $p \in \gamma$, entonces

$$\pi'(p) = \exp \left[\int_0^{\tau_0} \text{Div} X(\gamma(t)) dt \right]$$

donde $\text{Div} X(\gamma(t)) = D_1 X_1(\gamma(t)) + D_2 X_2(\gamma(t))$.

Demostración: Si Σ esta parametrizada por $g: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$ de tal forma que $g(0) = p$ por transversalidad ² sabemos que el conjunto $\{X(p), g'(0)\}$ es una base para \mathbb{R}^2 sea φ el flujo de X sabemos que se vale la siguiente relación

$$D_1 D_2 \varphi(t, p) = DX(\varphi(t, p)) \cdot D_2 \varphi(t, p)$$

es decir $D_2 \varphi$ es solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{z} = DX \cdot z \quad (5.9)$$

en Δ , en particular en γ . Vamos a calcular el siguiente número:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(\tau_0, \varphi(t, p))|_{t=0} &= D\varphi(\tau_0, p) \cdot (0, \varphi'(t, p)) \\ &= D\varphi(\tau_0, p) \cdot (0, X(p)) = D_2 \varphi(\tau_0, p) X(p) \end{aligned}$$

²Recuerde que por estar en \mathbb{R}^2 las secciones transversales son difeomorfas a intervalos de \mathbb{R} .

y por otra parte

$$\frac{d}{dt} \varphi(\tau_0, \varphi(t, \mathbf{p}))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi(\tau_0 + t, \mathbf{p})|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi(0, \mathbf{p}) = X(\mathbf{p})$$

de donde obtenemos:

$$D_2 \varphi(\tau_0, \mathbf{p}) X(\mathbf{p}) = X(\mathbf{p}) \quad (5.10)$$

también podemos calcular:

$$\begin{aligned} \pi'(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{g}'(0) &= \frac{d}{ds} \pi(\mathbf{g}(s))|_{s=0} = \frac{d}{ds} \varphi(\tau_0 + \tau_1, \mathbf{g}(s))|_{s=0} \\ &= D\varphi(\tau_0, \mathbf{p}) \cdot (\tau_1'(0), \mathbf{g}'(0)) = \\ &= D_1 \varphi(\tau_0, \mathbf{p}) \tau_1'(0) + D_2 \varphi(\tau_0, \mathbf{p}) \mathbf{g}'(0) = \\ &= X(\mathbf{p}) \tau_1'(0) + D_2 \varphi(\tau_0, \mathbf{p}) \mathbf{g}'(0) \end{aligned}$$

dejando

$$D_2 \varphi(\tau_0, \mathbf{p}) \mathbf{g}'(0) = X(\mathbf{p}) \tau_1'(0) - \pi'(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{g}'(0) \quad (5.11)$$

de 5.10 y 5.11 podemos concluir que la expresión matricial de $D_2 \varphi$ es

$$D_2 \varphi = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1'(0) \\ 0 & -\pi'(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que $\det(D_2 \varphi) = \pi'(\mathbf{p})$ y como sabemos que $D_2 \varphi$ satisface la ecuación 5.9 y por la fórmula de Liouville obtenemos:

$$\pi'(\mathbf{p}) = \exp \left[\int_0^{\tau_0} \operatorname{Div} X(\gamma(t)) dt \right]$$

ya que $\operatorname{tr}(DX) = \operatorname{Div} X$ y escogiendo que $\det(D_2 \varphi(0)) = I$ llegamos al resultado deseado. \square

5.4 El teorema de Peano.

En esta parte del apéndice nos proponemos a demostrar el teorema de Peano, pero no solo probaremos este importante teorema sino también una proposición, para lo cual será necesario contar con el teorema de Peano. Comenzamos con una definición:

Definición 5.5 [19]: Una aplicación $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es Lipschitz en Ω si para todo $(t, y), (t, z) \in \Omega$ si existe una constante h tal que :

$$|F(t, z) - F(t, y)| \leq h|z - y|$$

a continuación enunciamos el teorema:

TEOREMA 5.6 (de Peano) : Sea X continuo en $\Omega = I_a \times B_b$. Si $|X| < M$ en Ω entonces la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{s} &= X(s) \\ s(0) &= s_0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

tiene por lo menos una solución en I_a con $\alpha = \min\{a, b/M\}$, $I_a = \{t : |t - t_0| < \alpha\}$ y $B_b = \{s : |s - s_0| < b\}$.

Demostración: Como el conjunto Ω es un compacto entonces por el teorema de Weierstrass existe una sucesión de funciones P_n cuyas componentes son polinomios tal que $P_n \rightarrow X$ uniformemente en Ω , por ser sus componentes polinomios tenemos que las funciones P_n son Lipschitz ahora bien por teorema de existencia y unicidad tenemos que la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{s} &= P_n(t, s) \\ s(t_0) &= s_0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

tiene una única solución φ_n en I_a , la familia de funciones φ_n es equicontinua ya que:

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(t')| = \left| \int_{t'}^t P_n(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq M |t - t'|$$

y también es uniformemente acotada ya que para n suficientemente grande.

$$|\varphi_n - s_0| = \left| \int_{t_0}^t P_n(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq M\alpha < b$$

de donde obtenemos que $|\varphi_n| \leq b + s_0$ para toda $s \in I_a$ y por el teorema de Arzela existe una subsucesión convergente, es decir $\varphi_n \rightarrow \varphi$ probaremos que φ es solución de 5.12 ; en efecto ya que:

$$\begin{aligned} |\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}| &= |P_n(s, \varphi_n(s)) - X(s, \varphi(s))| \\ &\leq |P_n(s, \varphi_n(s)) - P_n(s, \varphi(s))| + |P_n(s, \varphi(s)) - X(s, \varphi(s))| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

lo cual nos dice que φ es solución de 5.12.

Enunciamos a continuación el teorema de Arzela que no demostraremos ya que su demostración se puede encontrar en cualquier libro de análisis.

TEOREMA 5.7 (de Arzela-Ascoli) [4]: Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n y sea F una colección de funciones continuas con valores en \mathbb{R}^m . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

- La familia F es acotada y uniformemente equicontinua en K .
- Toda sucesión de F tiene una subsucesión que es uniformemente convergente en K .

Continuamos con la siguiente:

Proposición 5.8: Sea $X_n : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una sucesión de campos continuos tal que $X_n \rightarrow X_0$ uniformemente en cada compacto contenido en Δ , sean (t_n, z_n) una sucesión de puntos que convergen a (t_0, z_0) ; supongamos que:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= X_n(t, z) \\ z(t_n) &= z_n \end{aligned} \tag{5.14}$$

tiene una única solución φ_n definida en un intervalo máximo $I_n = (\omega_-(n), \omega_+(n))$. Sea $[a, b] \subset I_0$ entonces existe $n_0 = n_0(a, b)$ tal que para $n > n_0$, $I_n \subset [a, b]$ y además $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ uniformemente en $[a, b]$.

Demostración: Sabemos que por ser φ_0 continua podemos encontrar un conjunto compacto C que contenga a la traza de φ_0 en su interior, sea D otro compacto que contenga a C en su interior. Debido a que $X_n \rightarrow X_0$ uniformemente en compactos, hay una n_1 suficientemente grande de tal suerte que si $n > n_1$ entonces $|X_n| < M$ en D . Aplicando entonces el teorema de Peano existe $\alpha > 0$ tal que para toda pareja (t', z') en C las ecuaciones 5.14 con $n > n_1$ tienen una solución única φ_n definida en $|t - t'| \leq \alpha$ y cuya traza está contenida en D . Si tomamos entonces $\varepsilon = \alpha/3$ existe n_2 tal que si $n > n_2$, $(t_n, z_n) \in C$ y $|t_n - t_0| \leq \varepsilon$ entonces φ_n está definida en $|t - t_0| \leq \varepsilon$ ya que $\alpha = 3\varepsilon$.

La familia $F = \{\varphi_n : |t - t_0| \leq \varepsilon \text{ con } n > n_2\}$ tiene las siguientes propiedades:

- Es uniformemente acotada, ya que $|\varphi_n'| \leq M$.

ii) Por el teorema de Peano tenemos que:

$$|\varphi_h - \varphi| \leq |s_n - s_0| + \left| \int_{t_n}^{t_0} F_h(s, \varphi_n(s)) ds - \int_{t_n}^{t_0} X(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq \varepsilon$$

para toda subsección φ_h de φ_n y por lo tanto $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ uniformemente en el intervalo $|t - t_0| \leq \varepsilon$.

de donde repitiendo este proceso en el punto $t'_0 = t_0 + \varepsilon$ obtendríamos que $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ uniformemente en el intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + 2\varepsilon)$ y esto lo podemos repetir hasta cubrir $[a, b]$ completamente. \square

5.5 Espacios cubrientes.

A continuación se expondrán algunos conceptos que nos serán de gran utilidad para la mejor comprensión de las técnicas empleadas en el capítulo 4 para demostrar que cualquier campo vectorial en la botella de Klein tiene al menos una órbita periódica.

Definición 5.9 [10]: Supongamos que tenemos dos espacios topológicos E, X diremos que E es un espacio cubriente de X si existe $f: E \rightarrow X$ tal que cada $x \in X$ tiene una vecindad U con la propiedad de que $f^{-1}(U)$ es una unión ajena de subconjuntos abiertos S_i de E cada uno de los cuales es homeomorfo a U bajo f . En tal caso diremos que U está suavemente cubierta y que cada S_i es una hoja sobre U .

Se puede ver que algunas consecuencias de esta definición son:

- 1.- La fibra $f^{-1}(x)$ es discreta.
- 2.- f es un homeomorfismo local.
- 3.- La aplicación f es sobreyectiva y X hereda la topología cociente de E .

Supongamos ahora que tenemos dos espacios topológicos (E, e_0) y (Y, y_0) , y dos funciones continuas $f: (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ y $g: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ entonces si hay una función \tilde{g} tal que se cumple la igualdad $f \circ \tilde{g} = g$ a tal función le llamaremos un levantamiento de g . La pregunta que queda por hacer es ¿bajo que condiciones podemos asegurar la existencia de levantamientos?

$f^{-1}(x) = \{y \in Y : f(y) = x\}$ es una vecindad de y en Y y $f|_{f^{-1}(x)}$ es un homeomorfismo de $f^{-1}(x)$ sobre $\{x\}$.
 Si $f^{-1}(x) = \{y\}$ entonces $f|_{f^{-1}(x)} = f^{-1} \circ \alpha$ donde $\alpha : \{y\} \rightarrow \{x\}$ es el homeomorfismo trivial.
 Si $f^{-1}(x) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ entonces $f|_{f^{-1}(x)} = f^{-1} \circ \alpha$ donde $\alpha : \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \rightarrow \{x\}$ es el homeomorfismo trivial.
 En cualquier caso, $f|_{f^{-1}(x)}$ es un homeomorfismo de $f^{-1}(x)$ sobre $\{x\}$.

Probaremos a continuación algunos teoremas que nos serán de gran utilidad.

TEOREMA 5.10 (unicidad de levantamientos) [10]: Sea $f : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ un espacio cubriente y $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ cualquier aplicación continua. Supongamos que Y es conexo. Si existe una aplicación continua $g' : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ tal que $fg' = g$ esta es única.

Demostración: Supóngase que existe $g'' : (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ con la propiedad de que $fg'' = g$ definimos entonces los siguientes conjuntos:

$$A = \{y \in Y : g'(y) = g''(y)\}$$

$$B = \{y \in Y : g'(y) \neq g''(y)\}$$

es claro que Y es la unión ajena de tales conjuntos, ahora bien supongamos que tenemos un punto $y \in Y \cap A$ si nos fijamos en una vecindad U de $fg'(y)$ suavemente cubierta por f entonces por estar $y \in A$ tenemos que $g'(y)$ y $g''(y)$ caen en la misma hoja S de f sobre U de donde obtenemos que $g'^{-1}(S) \cap g''^{-1}(S)$ es una vecindad de y totalmente contenida en Y . Si por el contrario tenemos que $y \in Y \cap B$ entonces $g'(y)$ y $g''(y)$ caen en distintas hojas S_1 y S_2 sin embargo $g'^{-1}(S) \cap g''^{-1}(S)$ sigue siendo una vecindad de y totalmente contenida en Y , por último de la conexidad de Y se obtiene el resultado deseado. \square

TEOREMA 5.11 (levantamiento de curvas) [10]: Si $f : E \rightarrow X$ es un espacio cubriente y α es una curva en X con punto inicial x_0 entonces hay una única curva $\tilde{\alpha}$ en E con punto inicial e_0 tal que $f\tilde{\alpha} = \alpha$.

Demostración: La unicidad es consecuencia directa del teorema anterior. Vamos a dividir la prueba en dos partes.

- 1.- Si el espacio total X esta suavemente cubierto (es decir la vecindad U de la definición coincide con X) y si e_0 esta en la hoja S , y como sabemos que en esta hoja f^{-1} es un homeomorfismo entonces podemos hablar de $f^{-1} : X \rightarrow S$ de donde la composición $\tilde{\alpha} = f^{-1}\alpha$ es el levantamiento deseado.

²Es decir $f|_S$ es un homeomorfismo

- 2.- Como $f : E \rightarrow X$ es un espacio cubriente de X entonces para cada punto $\alpha(t) \in X$ existe un intervalo cerrado $[t - \delta, t + \delta]$ contenido en una vecindad suavemente cubierta U de $\alpha(t)$ donde es posible construir un levantamiento $\tilde{\alpha}$ como el del caso anterior, de tal forma que si α esta definida en un intervalo de la forma $[0, T]$ podemos encontrar una partición $\{0, t_2, \dots, t_{n-1}, T\}$ de $[0, T]$ de tal forma que cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ tenga la propiedad de que puede construirse un levantamiento $\tilde{\alpha}_i$ como el que acabamos de mencionar arriba y que además por el inciso anterior en el intervalo $[0, t_1]$ sea tal que $\tilde{\alpha}_1(0) = e_0$, nuevamente por el inciso anterior podemos construir un levantamiento $\tilde{\alpha}_2$ de α en el intervalo $[0, t_2]$ de tal forma que $\tilde{\alpha}_2(t_1)$ sea un punto interior de $\tilde{\alpha}_1(t)$ con $t \in [t_1, t_2]$ y continuando de esta forma llegamos (en un número finito de pasos) a construir el levantamiento deseado. \square

El siguiente teorema no viene acompañado de una demostración.

TEOREMA 5.12 (de Monodromía) [6]: Sea E un espacio cubriente de X y supóngase que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son dos curvas en E con punto inicial e_0 . Entonces $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son homotópicas o equivalentes si y solo si $f\tilde{\alpha}$ y $f\tilde{\beta}$ son curvas homotópicas (equivalentes) en X . En particular si $f\tilde{\alpha}$ y $f\tilde{\beta}$ son homotópicas, entonces $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tienen el mismo punto final. \square

Sabemos que dos curvas $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow E$ son homotópicas si existe una función $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow E$ con las propiedades:

1. $F(t, 0) = \alpha(t)$ para toda $t \in [a, b]$.
2. $F(t, 1) = \beta(t)$ para toda $t \in [a, b]$.
3. $F(0, s) = \alpha(a) = \beta(a)$ para toda $s \in [0, 1]$.
4. $F(1, s) = \alpha(b) = \beta(b)$ para toda $s \in [0, 1]$.

Índice analítico

A

- ángulo, 49
- arco
 - anterior, 86
 - posterior, 86
- arista, 98
- atractor, 60
- autónoma, 6

B

- botella
 - de Klein, 93

C

- campo
 - irracional, 45
 - racional, 45
 - vectorial, 35
- campos
 - C^r -equivalentes, 19
 - equivalentes, 52
 - C^r -conjugados, 19
- característica de Euler-Poincaré, 98
- carta local, 38
- centro, 56, 59-60
- ciclo límite, 27
- conjunto
 - α -límite, 24, 45

ω -límite, 45

ω -límite, 24

ω -límite, 84

denso en ninguna parte, 79

invariante, 78

invariante, 27

minimal, 78

perfecto, 65

λ -contracción, 7

coordenadas

cartesianas, 105

polares, 105

curva

cerrada simple, 48

integral, 6

curva cerrada

no homotópica a cero, 89

curva parametrizada por trozos, 49

control, 95

negativamente recurrente, 95

positivamente recurrente, 95

curvas

homotópicas, 116

D

- Denjoy, 88
- difeomorfismo, 36

difeomorfismo local, 40

E

espacio tangente, 39
 cubriente, 88, 114

F

fórmula

 de Brouwer, 48
 de Euler-Poincaré, 77
 de Euler-Poincaré, 99
 de Liouville, 107

f

flojo
 de una E.D., 17
 global, 42, 78
 lineal en el toro, 43
 local, 42
 en el toro, 77
 en la botella de Klein, 77
 ergódico, 87
 local, 78
 sobre una curva cerrada, 81

foco, 60

función

 de clase C^∞ , 36
 de clase C^1 , 36
 T-invariante, 90
 de retorno de Poincaré, 109
 diferenciable, 35

G

género, 77, 99

H

H. Hopf, 51

haz tangente, 41

homeomorfismo, 53, 80

I

índice de un campo vectorial, 50

interior de J , 31

intervalo máximo, 6, 13

K

Klein, botella de, 6

Kaaser H., 97

L

levantamiento, 89, 114

levantamiento universal, 89

Lipschitz, 112

N

número de rotación, 80-81, 83

nodo, 60

 impropio, 60

 propio, 60

O

órbita de un campo vectorial X , 17

órbita límite, 27

P

parte

 elíptica del sector S , 65

 hiperbólica del sector S , 66

proyección, 41

punto

 crítico, 37

de rotación, 59
fijo atractor, 8
hiperbólico, 56
regular, 6
regular para f , 37
singular, 6
anterior, 86
de primera especie, 86
de segunda especie, 86
posterior, 86
puntos
geoméricamente independientes., 98

R

región
fundamental, 86
regla de la cadena, 36, 39
retrato fase de una E.D., 17

S

sección transversal, 20, 94
sector, 65
elíptico, 65
hiperbólico, 65
parabólico negativo, 65
parabólico positivo, 65
Siegel L., 90
silla, 62
 n -simplejo, 89
solución de la E.D., 6
máxima, 18
solución máxima, 6, 14
base nula negativa, 65

base nula positiva, 65
nula negativa, 64
nula positiva, 64
suspensión de un flujo., 92

T

teorema

de contracción de fibras, 9
de diferenciabilidad global, 15
de diferenciabilidad local, 9
de la curva de Jordan, 31
de Poincaré-Bendixson, 29
del flujo tubular, 20
de Arzela-Ascoli, 113
de Denjoy, 87
de la función implícita, 37
de la función inversa, 37, 40
de la inmersión local, 37, 40
de la submersión local, 37, 40
de las tangentes rotantes, 50
de monodromía, 116
de Peano, 112
de Poincaré, 99
de unicidad de levantamientos, 115
levantamiento de curvas, 115
topológicamente conjugado, 19
topológicamente equivalente, 19
topología cociente, 88
topología inducida, 37
toro T^2 , 44
transformación
cubriente, 88

triángulo, 98

triangulación, 98

V

vértice, 49, 98

valor crítico, 37

valor regular, 37

variedad diferenciable, 35, 37

vecindad coordenada, 38

vector tangente, 29

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

volumen, 100

Bibliografía

- [1] Ahlfors Lars V. *Complex Analysis. McGraw-Hill international Editions 1979.*
- [2] Andronov, Leontovic, Gordon, Maier. *Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems. N.Y., Wiley 1973.*
- [3] Arnold V. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag 250, 1963.*
- [4] Bartle R. G. *The Elements of Real Analysis. 1964. J. Wiley*
- [5] Bendixson I. Sur les Courbes Définies par les équations Différentielles. *Acta Mathematica, 34, 1901, p1-88.*
- [6] Croom F. H. *Basic Concepts of Algebraic Topology. Springer-Verlag U.T.M. 1978.*
- [7] Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal Math. Pure et Appl., 11, ser 9, 1932. p(333-375).*
- [8] De Carmo M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall International. New Jersey, 1976.*
- [9] García-Máynes A. y Tamaris A. *Topología General. Porrúa 1968.*
- [10] Greenberg M. J. *Lectures on Algebraic Topology. W.A. Benjamin, Inc N.Y., 1967.*
- [11] Guckenheimer J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag. Appl. Math. Sciences, 42, 1985.*
- [12] Haas F. Poincaré-Bendixson type theorems for two-dimensional manifolds different from the torus. *Annals of Math, 59-2, 1954.*

- [13] Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. J. Wiley, 1964.
- [14] Herman R. Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. *C.R. Acad. Sc. Paris. In geometry and topology* 1977.
- [15] Hirsch M. y Smale S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic press, 1974.
- [16] Hoffman K. y Kunze R. *Algebra Lineal Prentice Hall International*.
- [17] Kneser. Ueber die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen das der Lipchitschen Bedingung nicht genügt. *S.B: Preuss Akad. Wiss. Math. Kl.* 1923, 171-174, II4.
- [18] Markley N. The Poincaré-Bendixson theorem for the Klein bottle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 135, 1969.
- [19] Melo W. y Palis J. Introdução aos sistemas dinâmicos. *Projeto Euclides IMPA-CNPq*, 1977
- [20] Milnor J. *Topology from the differentiable Viewpoint*. Univ. press of Virginia, 1965.
- [21] Milnor J. *Differential Topology*. Princeton University Press Fall Term 1968.
- [22] Moise Edwin E. *Geometric Topology in dimensions 2 & 3*. Graduate Text in Math. N.Y. Springer Verlag.
- [23] Nitecki, Zbigniew. *Differentiable Dynamics. Introduction to the Orbit Structure of Dif-feromorphisms*. The M.I.T. press. 1971.
- [24] Peixoto M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* 1, 1962.
- [25] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems Springer-Verlag. Text in Appl. Math.* N.Y., 7, 1991.
- [26] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, ISE, 1976.
- [27] Schwartz A. J. A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds. *Amer. J. Math* 85, 1963.
- [28] Siegel C. L. Note on Differential Equations on the Torus. *Annals of Math*, 46-3, 1945.

[29] **Sotomayor J.** Lições de equações diferenciais ordinárias. *Projeto Euclides IMPA-CNPq*, 1979.

[30] **Guillemin V. y Pollack A.** *Diferencial Topology Prentice Hall* 1974.