



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

"ACATLAN"

14
2ES

TEORIA Y PROBLEMAS DE APLICACION DE INGENIERIA SISMICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

LUIS ALFREDO DIAZ VAZQUEZ

Acatlán, Edo. de México

1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

UNAM



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"
DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
JEFATURA DEL PROGRAMA DE INGENIERIA CIVIL

SR. LUIS ALFREDO DIAZ VAZQUEZ
ALUMNO DE LA CARRERA DE INGENIERIA CIVIL.
P R E S E N T E :

DE ACUERDO A SU SOLICITUD PRESENTADA CON FECHA 8 DE OCTUBRE DE 1990, ME COMPLACE NOTIFICARLE QUE ESTA JEFATURA DEL PROGRAMA TUVO A BIEN ASIGNARLE EL SIGUIENTE TEMA DE TESIS: "TEORIA Y PROBLEMAS DE APLICACION DE INGENIERIA SISMICA". EL CUAL SE DESARROLLARA COMO SIGUE:

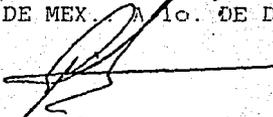
- I. - INTRODUCCION
- II. - SISMOLOGIA.
- III. - DINAMICA ESTRUCTURAL.
- IV. - INGENIERIA ANTISISMICA.
- V. - CONCLUSIONES.

ASI MISMO FUE DESIGNADO COMO ASESOR DE TESIS EL SR. ING. CARLOS ARCE LEON.

PIDO A USTED TOMAR NOTA QUE EN CUMPLIMIENTO DE LO ESPECIFICADO EN LA LEY DE PROFESIONES, DEBERA PRESTAR SERVICIO SOCIAL DURANTE UN TIEMPO MINIMO DE SEIS MESES COMO REQUISITO BASICO PARA SUSTENTAR EXAMEN PROFESIONAL. ASI COMO DE LA DISPOSICION DE LA DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS ESCOLARES EN EL SENTIDO DE QUE SE IMPRIMA EN LUGAR VISIBLE DE LOS EJEMPLARES DE LA TESIS. EL TITULO DE TRABAJO REALIZADO. ESTA COMUNICACION DEBERA IMPRIMIRSE EN EL INTERIOR DE LA TESIS.

SIN MAS POR EL MOMENTO, RECIBA UN CORDIAL SALUDO.

A T E N T A M E N T E .
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
ACATLAN, EDO. DE MEX. A 10. DE DICIEMBRE DE 1994


ING. CARLOS ROSALES AGUILAR
JEFE DEL PROGRAMA DE INGENIERIA CIVIL



ENEP-ACATLAN
JEFATURA DEL
PROGRAMA DE INGENIERIA

Con agradecimiento especial a:

Esain y Mónica

CONTENIDO

	pag.
TEMA I. INTRODUCCION	
1.1. OBJETIVO DE LA TESIS	1
1.2. DESCRIPCION DE LOS CAPITULOS	1
TEMA II. SISMOLOGIA	
2.1. INTRODUCCION	4
2.2. ORIGENES DE LOS SISMOS	4
2.2.1. TEORIA DE LAS CORRIENTES DE CONVECCION	4
2.2.2. TEORIA DE LA CONTRACCION TERMAL	5
2.2.3. TEORIA DE LA DERIVA CONTINENTAL O DE LAS PLACAS TECTONICAS	6
2.3. CARACTERISTICAS DE LOS TERREMOTOS	9
2.3.1. DEFINICIONES Y CLASIFICACION	10
2.3.2. MEDICION DE SISMOS	10
2.4. ONDAS SISMICAS	13
2.4.1. ONDAS DE CUERPO	15
2.4.2. ONDAS SUPERFICIALES	17
2.4.3. VELOCIDADES DE LAS ONDAS SISMICAS	17
2.4.4. LOCALIZACION DE TERREMOTOS Y SUS MAGNITUDES	18
2.5. ACTIVIDAD SISMICA	21
2.5.1. SISMICIDAD MUNDIAL	21
2.5.2. SISMICIDAD EN MEXICO	22
2.5.3. SISMICIDAD EN EL VALLE DE MEXICO	24
2.5.4. INSTRUMENTACION SISMICA	24
2.6. PROBLEMAS RESUELTOS	28
2.7. PROBLEMAS PROPUESTOS	36
BIBLIOGRAFIA	37

TEMA III. DINAMICA ESTRUCTURAL

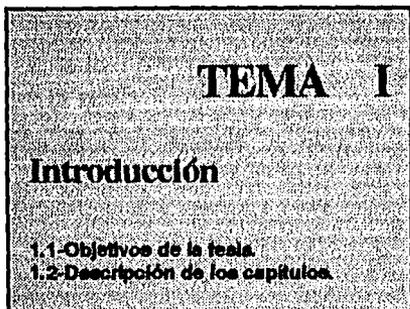
	pag.
3.1. DEFINICIONES	39
3.1.1. SISTEMAS DISCRETOS	40
3.1.2. SISTEMAS CONTINUOS	40
3.2. OSCILACIONES EN SISTEMAS DISCRETOS DE UN GRADO DE LIBERTAD	41
3.2.1. VIBRACION LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO	41
3.2.1.1. PROBLEMAS RESUELTOS	42
3.2.1.2. PROBLEMAS PROPUESTOS	62
3.2.2. VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA	64
3.2.2.1. AMORTIGUAMIENTO CRITICO	65
3.2.2.2. AMORTIGUAMIENTO SUBCRITICO	65
3.2.2.3. AMORTIGUAMIENTO HIPERCITICO	66
3.2.2.4. PROBLEMAS RESUELTOS	67
3.2.2.5. PROBLEMAS PROPUESTOS	99
3.2.3. VIBRACION FORZADA SIN AMORTIGUAMIENTO	107
3.2.3.1. PROBLEMAS RESUELTOS	112
3.2.3.2. PROBLEMAS PROPUESTOS	135
3.2.4. VIBRACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO	138
3.2.4.1. PROBLEMAS RESUELTOS	142
3.2.4.2. PROBLEMAS PROPUESTOS	177
3.3. OSCILACIONES EN SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD	180
3.3.1. VIBRACION LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO	181
3.3.1.1. METODO DIRECTO PASO A PASO DE SUPERPOSICION MODAL	183
3.3.1.2. ECUACION MATRICIAL DEL MOVIMIENTO	184
3.3.1.3. MATRIZ DE RIGIDEZ	185
3.3.1.4. MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL	190
3.3.1.5. MATRIZ DE RIGIDEZ DE ENTREPISO	190
3.3.1.6. MATRIZ DE MASAS	193
3.3.1.7. PROBLEMAS RESUELTOS	194
3.3.1.8. PROBLEMAS PROPUESTOS	238
3.3.2. METODOS NUMERICOS PARA OBTENER FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRAR	242
3.3.2.1. METODO DE NEWMARK	242
3.3.2.2. METODO DE HOLZER	244

	pag.
3.3.2.3. METODO DE ITERACION INVERSA	245
3.3.2.4. PROBLEMAS RESUELTOS	248
3.3.2.5. PROBLEMAS PROPUESTOS	257
3.3.3. VIBRACION FORZADA SIN AMORTIGUAMIENTO	259
3.3.3.1. METODO DIRECTO PASO A PASO DE SUPERPOSICION MODAL	259
3.3.3.2. VIBRACION FORZADA EN LA BASE SIN AMORTIGUAMIENTO	261
3.3.3.3. PROBLEMAS RESUELTOS	261
3.3.3.4. PROBLEMAS PROPUESTOS	285
3.3.4. EFECTOS DEL AMORTIGUAMIENTO	287
3.3.4.1. VIBRACION FORZADA EN LA BASE CON AMORTIGUAMIENTO	288
3.3.4.2. AMORTIGUAMIENTO EN ESTRUCTURAS COMPLETAS	288
3.3.4.3. PROBLEMAS RESUELTOS	290
3.3.4.4. PROBLEMAS PROPUESTOS	296
3.4. OSCILACIONES EN SISTEMAS CONTINUOS	297
3.4.1. VIBRACION EN SISTEMAS CONTINUOS	297
3.4.2. DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS	299
3.4.3. PROBLEMAS RESUELTOS	301
3.4.4. PROBLEMAS PROPUESTOS	320
3.5. SISTEMAS NO LINEALES	322
3.5.1. METODO DE INTEGRACION PASO A PASO DE ACELERACION LINEAL	326
3.5.2. PROBLEMAS RESUELTOS	328
3.5.3. PROBLEMAS PROPUESTOS	345
BIBLIOGRAFIA	346

TEMA IV. INGENIERIA ANTISISMICA

4.1. INTRODUCCION	348
4.2. RIGIDEZ LATERAL DE MARCOS, MUROS Y SISTEMAS MURO-MARCO	349
4.2.1. RIGIDEZ LATERAL DE MARCOS	349
4.2.1.1. FORMULAS DE WILBUR	350
4.2.2. RIGIDEZ LATERAL DE MUROS	351
4.2.3. RIGIDEZ LATERAL DE SISTEMAS MURO-MARCO	352
4.2.3.1. METODO DEL ELEMENTO A COMPRESION	355
4.2.3.2. METODO DE LA COLUMNA ANCHA	356

4.2.4. PROBLEMAS RESUELTOS	358
4.2.5. PROBLEMAS PROPUESTOS	372
4.3. METODOS DE ANALISIS SISMICO	375
4.3.1. ESPECTROS DE RESPUESTA	381
4.3.2. ESPECTROS DE DISEÑO	383
4.3.2.1. ESPECTRO DE DISEÑO DEL REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL	384
4.3.3. DUCTILIDAD	385
4.3.3.1. FACTOR DE DUCTILIDAD	385
4.3.3.2. RCDF-93: FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO (Q)	386
4.3.3.3. RCDF-93: FACTOR REDUCTIVO DE FUERZAS SISMICAS (Q')	386
4.3.4. RCDF-93: DISEÑO POR SISMO	386
4.3.5. ANALISIS DINAMICOS POR PASOS DE RESPUESTAS ANTE SISMOS ESPECIFICOS	389
4.3.6. ANALISIS MODAL ESPECTRAL	391
4.3.6.1. COEFICIENTES DE PARTICIPACION	392
4.3.6.2. PROBLEMAS RESUELTOS	393
4.3.6.3. PROBLEMAS PROPUESTOS	418
4.3.7. METODO ESTATICO DE ANALISIS SISMICO	421
4.3.7.1. VALUACION DE FUERZAS SISMICAS SIN ESTIMAR EL PERIODO FUNDAMENTAL DE LA ESTRUCTURA	421
4.3.7.2. VALUACION DE FUERZAS SISMICAS ESTIMANDO EL PERIODO FUNDAMENTAL DE LA ESTRUCTURA	422
4.3.7.3. ESTRUCTURAS CON APENDICES	423
4.3.7.4. PROBLEMAS RESUELTOS	424
4.3.7.5. PROBLEMAS PROPUESTOS	430
4.3.8. EFECTOS DE LA CONFIGURACION DE LA ESTRUCTURA	431
4.3.8.1. INFLUENCIA DE LA CONFIGURACION	431
4.3.8.2. EFECTOS DE TORSION EN LA ESTRUCTURA	432
4.3.9. DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS SISMICAS ENTRE LOS ELEMENTOS RESISTENTES DE LA ESTRUCTURA	435
4.3.9.1. PROBLEMAS RESUELTOS	438
4.3.9.2. PROBLEMAS PROPUESTOS	444
4.3.10. ANALISIS SISMICO SIMPLIFICADO	445
4.3.10.1. PROBLEMAS RESUELTOS	446
4.3.10.2. PROBLEMAS PROPUESTOS	448
BIBLIOGRAFIA	450



1.1.-OBJETIVOS DE LA TESIS.

Los objetivos perseguidos con el desarrollo del presente trabajo son: a) Proporcionar al alumno que cursa la asignatura de **Ingeniería Sísmica**, contemplada en el Plan de Estudios de la Carrera de Ingeniería Civil, un apoyo didáctico auxiliar tanto teórico como práctico, para el aprendizaje de dicha materia; b) Desarrollar unos Apuntes de los conceptos fundamentales, que sirvan de base para la enseñanza del curso de **Ingeniería Sísmica**, proponiendo para ello la división del contexto de la asignatura en tres partes: la primera que trata los conceptos de *sismología*, la segunda conteniendo los fundamentos de la *Dinámica Estructural* de mayor utilidad para la **Ingeniería Sísmica**, y la tercera los *métodos de análisis* más empleados para el diseño de estructuras sísmo-resistentes buscando así una optimización en el cumplimiento del Programa de Curso Oficial existente; c) Mostrar las aplicaciones de la Teoría de la **Ingeniería Sísmica** mediante la *Técnica de Problemas*, tanto resueltos como propuestos.

1.2- DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS.

En el capítulo de *sismología* se hace mención de las teorías de mayor aceptación en la actualidad, que pretenden explicar el origen de los sismos, se efectúa la clasificación de los terremotos en cuanto a la profundidad del foco, así como la descripción, definición y medición de sus características, como son foco, epifoco, magnitud, etc. Se explica el fenómeno de la disipación de la energía generada durante el sismo, mediante los diversos tipos de ondas sísmicas, y se hace mención sobre la actividad sísmica mundial, enfatizando el caso de la República Mexicana y en especial del D.F. mediante estadísticas de temblores históricos, delimitación de placas tectónicas, estratificación del suelo, etc. Se resuelven problemas relacionados con la localización de focos de sismos, determinación de velocidades de las diversas ondas sísmicas, etc.

El capítulo dedicado a la *Dinámica Estructural* clasifica los sistemas vibratorios u oscilatorios en dos grandes grupos: Sistemas discretos (masas y elasticidades concentradas en uno o diversos elementos) y Sistemas continuos (masas y elasticidades distribuidas en todo el cuerpo oscilante), a su vez los sistemas discretos se subdividen en sistemas sencillos (de un grado de libertad) y sistemas compuestos (de varios grados de libertad). Para todos los sistemas mencionados se estudian los casos de vibraciones

libres con y sin amortiguamiento y vibraciones forzadas con y sin amortiguamiento, cuyas soluciones a sus ecuaciones de movimiento son de fundamental importancia en la obtención de espectros de respuesta, formas de los modos de vibración, etc. También se definen diversos conceptos como grados de libertad, periodo, forma del modo, amortiguamiento, etc., y se presentan métodos numéricos de aproximaciones sucesivas para obtener las frecuencias y períodos de vibración de sistemas discretos de varios grados de libertad. Para el caso de sistemas no lineales, se presenta la solución iterativa del Método de integración por pasos de aceleración lineal; la teoría se complementa con ejercicios resueltos y propuestos para cada subtema.

El cálculo de la rigidez tanto lateral como de entrepiso de las estructuras es un requisito fundamental para poder resolver las ecuaciones del movimiento dinámico, por tal motivo dentro de este capítulo se presenta un resumen del método directo de las rigideces para la obtención de la matriz de rigidez de los sistemas oscilatorios; también durante el proceso de solución de los problemas resueltos se hace énfasis en el análisis para la obtención de este parámetro. Esto tiene como objetivo el que el alumno aprenda a conjuntar las herramientas de análisis con que ha sido dotado durante su trayectoria académica y asimismo comprenda claramente la manera en que las computadoras digitales resuelven los problemas dinámicos, pues es muy común que en

el inicio de la actividad profesional se empleen estas herramientas sin conocer a ciencia cierta si los datos alimentados y por tanto los resultados obtenidos son los correctos. Como ayuda para la solución de dichos problemas, se incluyen a lo largo del capítulo la codificación de diversos programas interactivos para cualquier calculadora de bolsillo programable en lenguaje basic, no obstante debe consultarse el manual del propietario de la calculadora en que se usen, ya que algunos caracteres como ;, y otros pueden cambiar su significado. La codificación es exacta para una calculadora CASIO FX-750P.

Por último el capítulo titulado *Ingeniería Antisísmica*, se divide en dos grandes partes; en la primera se describen diversos métodos para la obtención de la rigidez lateral y de entrepiso para sistemas estructurales constituidos por marcos rígidos, muros de mampostería o de concreto, o sistemas estructurales combinados (muro-marco). La segunda parte describe los métodos de análisis sísmico más utilizados en la práctica y que son: Análisis Dinámico Modal Espectral, Análisis Sísmico Estático, y Análisis Sísmico Simplificado; también se definen conceptos como espectro de respuesta, espectro de diseño, ductilidad, rigidez, etc. Se menciona la forma en que se obtienen los espectros de respuesta y de diseño y se presentan las principales recomendaciones del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal (1993), y sus Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo. Se estudian

los efectos producidos por la configuración de la estructura (asimetría en masa y rigidez, plantas irregulares, escalonamientos, etc.) y el incremento de la fuerza cortante sísmica por efectos de Torsión, y la distribución de las fuerzas cortantes sísmicas obtenidas del análisis, entre los elementos resistentes de la estructura. Para cada subtema se proponen ejercicios prácticos.

Al comenzar cada capítulo se ha tratado de enunciar claramente las correspondientes definiciones, principios y teorías, en orden progresivo y acumulativo de dificultad y acomodados de modo que presenten un desarrollo natural de cada tema. Todos los temas y subtemas están dados en pequeñas dosis para un aprendizaje gradual.

A esto siguen grupos ordenados de problemas resueltos que sirven para ejemplificar las aplicaciones prácticas de los conceptos teóricos, y que proporcionan la repetición de principios básicos vitales para lograr la fijación e integración del aprendizaje; así se trata de hacer

hincapié en aquellos puntos que con frecuencia nos preocupan tanto como estudiantes y también esclarecer aquellos sutiles detalles, sin cuya explicación los estudiantes nos sentimos continuamente sobre terreno movedizo. En los problemas resueltos se incluyen las derivaciones de las ecuaciones presentadas en la teoría. Los problemas propuestos sirven como repaso completo del material expuesto en cada subtema y como herramienta para la verificación de lo aprendido.

Se hace énfasis en aplicar la Técnica de problemas al finalizar los conceptos teóricos de cada subtema, y no dejándolos para el final de todo un capítulo, pues mi experiencia como alumno me indica que esta manera de impartir el curso resulta amena y estimulante para estudiantes de Ingeniería Civil, acostumbrados por la naturaleza de esta profesión, a buscar aplicaciones casi inmediatas de lo que vemos en clases. En resumen la Técnica de problemas es una eficaz forma de motivación para la enseñanza que se imparta a los alumnos de Ingeniería.

BIBLIOGRAFIA.

1.-APORTACIONES A LA DIDACTICA DE LA EDUCACION SUPERIOR.

Furián Alfredo J., et al., Escuela Superior de Estudios Profesionales Iztacala, UNAM, México 1989.

2.-COMPENDIO DE DIDACTICA GENERAL DINAMICA.

Mattos Luis A. de, Ed. Kapelus, Argentina 1973.

3.-DIDACTICA, FUNDAMENTACIÓN Y PRACTICA.

Moreno Bayardo Guadalupe, Ed. Progreso, S.A., México 1986.

4.-DIDACTICA GENERAL.

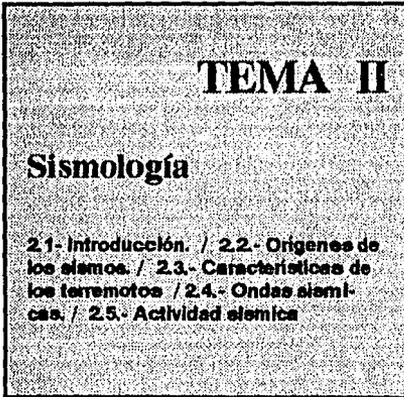
To Mascheusky K., Ed. Grijalbo, México 1974.

5.-HACIA UNA DIDACTICA GENERAL DINAMICA.

Nereci Imideo G., Ed. Kapelus, Argentina 1973.

6.-PROGRAMA DE CURSO OFICIAL DE LA MATERIA DE INGENIERIA SISMICA.

Plan de estudios de la Carrera de Ingeniería Civil, ENEP Acatlán, UNAM, México.



2.1.-INTRODUCCION.

SISMO, TERREMOTO O TEMBLOR.- Es un movimiento vibratorio de la corteza terrestre.

SISMOLOGIA.- Es la ciencia, rama de la Geofísica, que se dedica al estudio de las características de los sismos.

La sismología es una ciencia de larga historia, que ha llegado en la actualidad a cimentarse en sólidas teorías científicas y a la aplicación de sofisticados aparatos de medición y detección, así como también ha obtenido grandes avances en el conocimiento del origen de los sismos y de los fenómenos geológicos involucrados.

Dichos conocimientos y teorías, se han logrado establecer gracias a las investigaciones y recopilaciones de datos históricos, referentes a muchos de los fenómenos telúricos acaecidos en el mundo. En el presente tema se exponen los

conceptos fundamentales, de capital importancia para el Ingeniero Estructuralista.

2.2.- ORIGENES DE LOS SISMOS.

Los sismos se originan principalmente por movimientos tectónicos y en menor proporción por causas como: actividad volcánica, explosiones, colapso de cavernas, impacto de meteoritos, etc.

La generación de los terremotos es una de las grandes causas que originan la deformación de la corteza terrestre, que se pone de manifiesto a través de levantamientos y hundimientos de las rocas, propiciando la formación de montañas, barrancas, cañones, etc. Existen tres principales teorías para explicar el origen de los terremotos:

2.2.1.-TEORIA DE LAS CORRIENTES DE CONVECCION.

CONVECCION.-Es un mecanismo por medio del cual el calor es transferido de un lugar a otro a través del movimiento de partículas^[ref.1].

Las corrientes de convección forman una especie de sistema circulatorio en el interior de nuestro planeta, los materiales en estado líquido que constituyen su núcleo se encuentran a temperaturas mayores que los que se hallan más cerca de la superficie, por lo que tienden a subir debido a que son más ligeros (a mayor temperatura menor densidad) y su lugar es tomado por el material más frío suprayacente que

es por tanto más denso. Las corrientes que se originan en el núcleo circulan a través del manto de la tierra con velocidades que pueden alcanzar los 12[cm]poraño, esta velocidad es muy pequeña debido a la resistencia ejercida por las rocas sólidas del manto y a la relativamente alta densidad del magma que circula.

Los materiales del manto terrestre fluyen plásticamente bajo el efecto de las citadas corrientes, cuando alcanzan la base de la corteza terrestre se desvían horizontalmente moviéndose a lo largo de ella, lo cual causa levantamientos, hundimientos y pliegues en la superficie, originando terremotos y formación de montañas.

En apoyo de esta teoría, se ofrecen cálculos de que el calor en el núcleo del planeta es muy elevado para mantener el material en estado líquido bajo presiones ahí existentes de 1.75 a 3.5 millones de $[\text{kg}/\text{cm}^2]$ ^[ref.1], además de que existen rocas plegadas y deformadas que revelan una fluencia plástica de este tipo.

Sin embargo en la actualidad hay geólogos que consideran casi fracasada esta teoría como causa directa del origen de los terremotos, debido a que el estudio de la corteza y manto terrestre mediante el uso de ondas sísmicas define varias zonas o subdivisiones dentro del manto, zonificación que no podría existir si hubiese tales corrientes de convección mezclando constantemente los materiales existentes entre el núcleo y la parte superior del manto.

2.2.2.- TEORIA DE LA CONTRACCION TERMAL.

Existen evidencias geológicas de que nuestro planeta fue, en los tiempos primigenios de su formación (hace aproximadamente 5.5 miles de millones de años, o sea 5.5 eónes), una esfera en estado de fusión que durante diversas etapas de enfriamiento a lo largo de su existencia, fue sufriendo pérdidas de calor radiado al espacio.

Esta teoría se basa en el hecho de que dicha pérdida de calor causa una disminución en el volumen del planeta. De acuerdo a los datos actuales y desde este punto de vista, podemos delimitar el cuerpo del planeta Tierra en tres zonas: Una zona exterior sólida y fría (porque no experimenta ya pérdida de calor), una zona interior líquida y de alta temperatura pero de volumen fijo, gracias a que las zonas exteriores a ella actúan como aislantes térmicos impidiendo la pérdida de calor, y una zona intermedia que se está enfriando y encogiendo a medida que su temperatura decrece. La zona exterior sólida trata de ajustarse a la zona intermedia que se encoge, y por tanto se contrae durante el proceso.

Como consecuencia de la contracción, la corteza se dobla, levanta y hunde, originando los terremotos y formando montañas. Algunos geofísicos apoyan esta teoría con cálculos basados en pruebas geológicas y experimentos de laboratorio^[ref.1], pero algunos otros han llegado a la conclusión de que la Tierra no puede haber

perdido cantidades tan significativas de calor, por ejemplo en los últimos 2000 años, como para compensar el gran volumen de material que se encuentra en las montañas de esa edad.

2.2.3.- TEORÍA DE LA DERIVA CONTINENTAL O DE LAS PLACAS TECTÓNICAS.

La teoría fue propuesta originalmente por Antonio Snider hace aproximadamente un siglo^[ref.1], y revivida posteriormente por Alfred Wegener; como se observa en la figura 2.1 involucra la división desde hace aproximadamente unos 268 millones de años, de un único y enorme continente llamado Pangéa, en fragmentos más pequeños representados hoy por nuestros continentes, y que tales fragmentos derivaron lateralmente a sus posiciones actuales.

Esta teoría es la de mayor aceptación en los últimos tiempos; en ella se establece que la corteza terrestre (también llamada litosfera), no es una superficie de una sola pieza continua, sino que como lo indican las evidencias geológicas, está subdividida en "placas" que poseen movimientos propios unas respecto de otras, debido a que se hallan flotando sobre una capa de rocas más viscosas y fluidas; el origen de estos movimientos no está bien definido y puede tener entre otras causas las siguientes: corrientes de convección, contracciones por pérdida de calor radiado al espacio, dilataciones por incremento de

temperatura debida a la desintegración gradual de elementos radiactivos en las rocas, etc.^[ref.2]

Se han identificado por lo menos diez grandes placas que migran o derivan sobre el manto terrestre, chocan, se empujan y se mueven lateralmente entre sí con velocidades de 1 a 10 [cm] por año. En la figura 2.2 se muestra la geometría y extensión de las placas que no es permanente, sino que cambia gradualmente a través del tiempo.

Existen tres maneras por medio de las cuales una placa tectónica puede variar su forma^[ref.6].

a) *Extensión o crecimiento.*- Las placas tectónicas se separan empujadas por nuevo material que emerge en forma de lava en zonas llamadas dorsales centrooceanicas, ver figuras 2.2 y 2.3.

b) *Subducción o consumo.*- Las placas tectónicas se enciman una sobre otra. En la figura 2.3 puede observarse que debido a la constante creación de placa nueva en las zonas de extensión, la placa más antigua es forzada a sumergirse en las fosas oceánicas de subducción, en donde a mayores profundidades y temperaturas es fundida y absorbida por rocas más profundas.

c) *Transformación.*- Las placas tectónicas se mueven o deslizan una al lado de la otra a lo largo de sus bordes de contacto, en estos casos la frontera entre placas recibe el nombre de "falla de transformación".

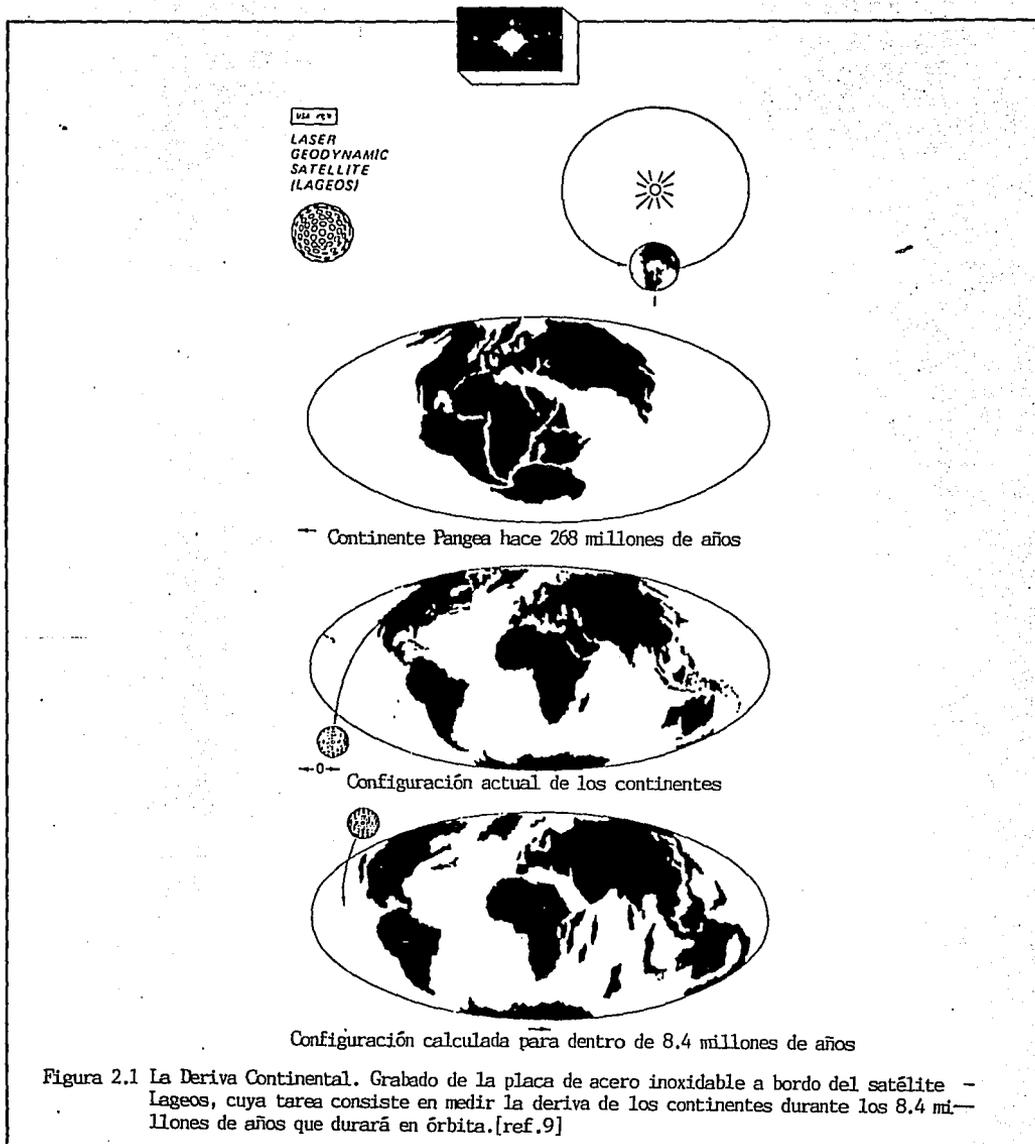
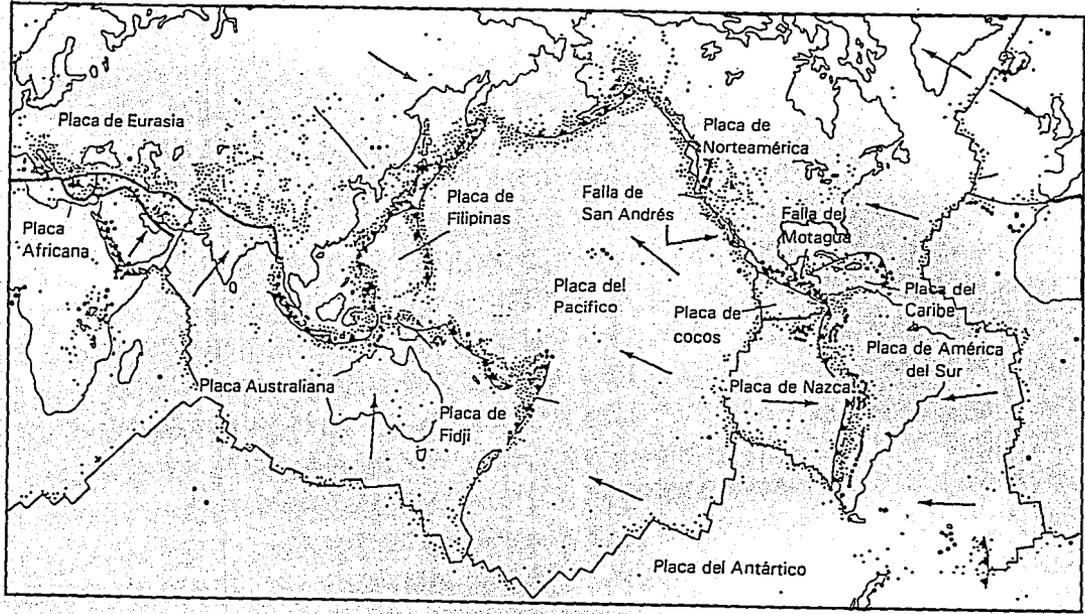


Figura 2.1 La Deriva Continental. Grabado de la placa de acero inoxidable a bordo del satélite LAGEOS, cuya tarea consiste en medir la deriva de los continentes durante los 8.4 millones de años que durará en órbita.[ref.9]



- Volcanes
- Epicentros
- ~ ~ ~ Zonas de Subducción
- Movimiento de placas
- ▬ Zonas de emisión de magma ó dorsales centrooceanicas desplazadas por falla transformante.
- Zonas de colisión

Figura 2.2 Mapa que muestra la relación entre las principales placas tectónicas y la localización de los epicentros de terremotos y de los volcanes .[ref.6].

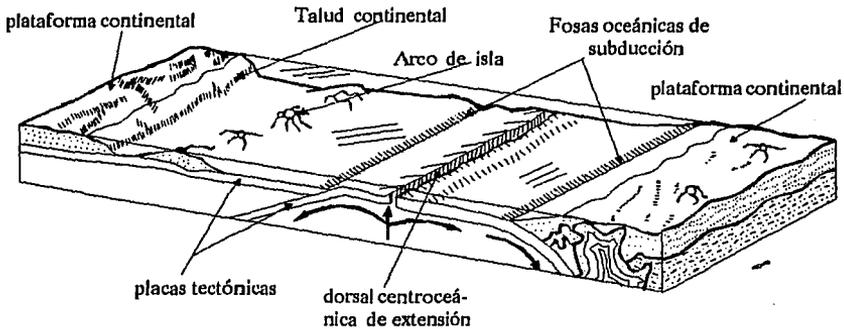


Figura 2.3. Corte esquemático de la corteza del Océano Atlántico. [Ref. 6]

En tiempos actuales la placa del Pacífico se está haciendo más pequeña y las placas africana, antártica, norteamericana y sudamericana están creciendo. Los movimientos en las zonas de extensión, subducción y transformación provocan concentraciones de grandes esfuerzos en las rocas en contacto en las fronteras de las placas, ésto a su vez causa levantamientos y hundimientos de la corteza llamados afallamientos.

FALLA.- Superficie de ruptura de una masa de rocas a lo largo de la cual ha habido un desplazamiento de las secciones separadas.

Cuando se presenta la generación de una falla o afallamiento de las rocas, es de manera abrupta y repentina, pues éstas han sido distorsionadas y deformadas plásticamente por causa de los esfuerzos inducidos por los empujes de las placas; por tanto se produce un deslizamiento o corri-

miento entre placas, liberándose gran cantidad de energía y provocándose un terremoto.

23.- CARACTERÍSTICAS DE LOS TERREMOTOS.

Al producirse un sismo, la ruptura de las rocas empieza en un punto dentro de la corteza terrestre y se propaga en todas direcciones a lo largo de un plano de falla. El borde de ruptura no se propaga uniformemente, sino que lo hace de manera irregular y espasmódica debido a la variación de las propiedades físicas de las rocas que rodean el punto de ruptura.

La ruptura puede alcanzar la superficie produciendo una traza de falla visible cuya longitud puede ir desde varios metros hasta kilómetros, sin embargo la mayoría de las veces la falla continúa solo hasta las zonas en que las rocas no están lo suficientemente deformadas para per-

mitir que se extienda más y entonces la fractura se detiene sin llegar a la superficie.

2.3.1.- DEFINICIONES Y CLASIFICACION.

FOCO O CENTRO DEL SISMO.-Es el punto dentro de la masa rocosa en donde se origina la fractura o afallamiento.

EPIFOCO O EPICENTRO.-Es el lugar de la superficie terrestre directamente encima del foco.

SISMOGRAFO.-Aparato para medir el desplazamiento del terreno, se usa para localizar el foco del sismo y produce gráficas llamadas sismogramas como la mostrada en la figura 2.4. Mide el desplazamiento en tres direcciones, dos para el horizontal (Norte-Sur y Este-Oeste) y una para el vertical.

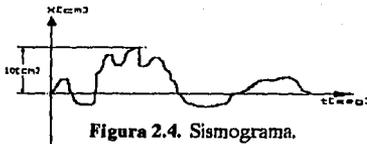


Figura 2.4. Sismograma.

ACELEROGRAFO.-Aparato para medir las aceleraciones del terreno, produce gráficas llamadas acelerogramas como la que aparece en

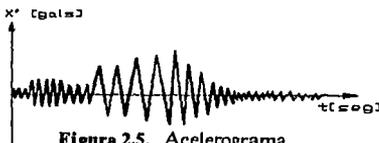


Figura 2.5. Acelerograma.

la figura 2.5. Mide la aceleración del suelo a lo largo de tres direcciones (N-S, E-W y vertical).

De acuerdo a la profundidad del foco, los sismos se clasifican como^[ref.1]:

a) *Superficiales.*- El foco se halla a menos de 70[km] de profundidad.

b) *Intermedios.*- El foco está localizado de 70 a 300[km] de profundidad.

c) *Profundos.*- La profundidad del foco es de más de 300[km].

Cuando una placa tectónica se hunde bajo otra placa en las fosas oceánicas, ocurren las fracturas que generan los terremotos intermedios. Durante este movimiento descendente, se producen esfuerzos adicionales que causan nuevas deformaciones y fracturas, dando lugar a los focos de terremotos profundos. Las zonas de transformación y extensión están más relacionadas con los terremotos superficiales e intermedios.

2.3.2.- MEDICION DE SISAMOS.

MAGNITUD DE UN SISMO.- Es la medida indirecta de la energía liberada por un terremoto.

Se expresa midiéndola con la escala de Richter. "En su definición original, magnitud (*M*) es el logaritmo común de la amplitud de la traza, en micras, de un sismógrafo estándar Wood-Ander-

son con amplificación de 2800, período natural de 0.8[seg] y coeficiente de amortiguamiento de 80%, instrumento que esté colocado en terreno firme a 100[km] del epicentro" [ref.4].

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5M \quad \dots(2.1)$$

M-magnitud (escala Richter) E-Energía liberada [ergios]

INTENSIDAD DE UN SISMO.- Es la medida "subjetiva" de la destructividad de un sismo en una zona determinada.

Existen diferentes escalas de intensidad (MSK-64 ó de Medvedev, Sponheuer y Karnik, la escala soviética, de Rossi-Forell, escala inglesa, etc.[ref.4]); pero la más usual en México es la de Mercalli Modificada (MM), que fue construida originalmente en 1902 por el sismólogo italiano Mercalli, consta de los 12 valores indicados en la figura 2.6 asociados a diferentes grados de destructividad y efectos sobre edificios, suelo y personas.

Por lo tanto a un sismo se asocia una sola magnitud, mientras que su intensidad varía de lugar en lugar.

ISOSISTAS.- Líneas que unen puntos de igual intensidad sísmica sobre el mapa geográfico de una región, después de la ocurrencia de un sismo.

Como se mencionó, la asignación de un determinado valor de intensidad sísmica para una región que ha sufrido un terremoto, es subjetiva

debido a que depende de la apreciación muy particular que haga cada persona de los daños observados a las obras civiles existentes y no de la medida del movimiento del suelo con instrumentos; no obstante la escala de intensidad es importante, pues en muchos lugares no se cuenta con sismógrafos y porque los catálogos históricos de sismos están basados en tales descripciones de daños.

Los mapas de líneas isosistas como el de la figura 2.7 proporcionan información valiosa sobre la distribución de la sacudida del suelo y sobre el efecto de influencia del tipo de estratificación de rocas y suelo en la región.

Teniendo como objetivo el deducir valores numéricos para diseño de obras civiles, aún partiendo de valores de intensidades de escalas subjetivas, se ha llegado a proponer correlaciones entre valores de intensidad de la escala MM y los valores de algunos parámetros del movimiento del terreno, una de las cuales es [ref.5]:

$$I = \log 14v / \log 2 \quad \dots(2.2) \text{ (Esteva y Rosenblueth)}$$

Otras relaciones empíricas propuestas son [ref.8]:

$$a = 1230e^{0.8M} (R + 25)^{-2} \quad \dots(2.3) \text{ (Esteva)}$$

$$v = 15e^{M} (R + 0.17e^{0.69M})^{-1.7} \quad \dots(2.4) \text{ (Esteva)}$$

I-Intensidad en la escala MM

v-velocidad máxima del terreno [cm/s]

a-aceleración del terreno [cm/s²]

M-magnitud del sismo

R-distancia entre el sitio de estudio y el foco del sismo [km]

ESCALA DE INTENSIDAD DE MERCALLI MODIFICADA (versión 1956)

- I. No sentido. Efectos marginales y de periodo largo de sismos grandes.
 - II. Sentido por personas que descansan, en pisos altos o situados favorablemente.
 - III. Sentido en interiores. Los objetos colgantes oscilan. La vibración es como la del paso de camiones ligeros. Duración estimada. Puede no reconocerse como sismo.
 - IV. Los objetos colgantes oscilan. La vibración es como la del paso de camiones pesados; o bien, sensación de una sacudida como la que produce una pelota pesada al golpear los muros. Los automóviles estacionados se mecen. Las ventanas, platos, puertas, hacen ruido. Los vidrios retintlinean. La losa entrecioca. En el nivel superior del IV, los muros y los marcos de madera rechinan.
 - V. Se siente en el exterior; dirección estimada. Despierta a quien duerme. Se afectan los líquidos, algunos se derraman. Algunos objetos inestables se desplazan o caen. Las puertas oscilan, se abren, se cierran. Las persianas, los cuadros, se mueven. Los relojes de péndulo se detienen, vuelven a moverse, cambian su ritmo.
 - VI. Todos lo sienten. Muchos se asustan y corren hacia el exterior. Las personas caminan tambaleándose. Las ventanas, platos, cristalería, se rompen. Los objetos, los libros y otros objetos, se caen de los estantes. Los cuadros se caen de las paredes. Los muebles se desplazan o se vuelcan. El aplanado débil y la mampostería D se agrietan. Las campanas pequeñas suenan (de iglesia, de escuelas). Los árboles y arbustos se mueven notablemente o se oyen crujir.
 - VII. Es difícil mantenerse en pie. Los conductores de automóviles lo sienten. Los objetos colgantes se estremecen. Los muebles se rompen. Daños en mampostería D, incluyendo agrietamiento. Las chimeneas débiles se rompen a nivel del techo. Caído de aplanados, así como de ladrillos flojos, piedras, tejas y cornisas, también los parapetos y ornamentos arquitectónicos no contraventeados. Algunas grietas en mampostería C. Se forman olas en los estanques, el agua se enturbia con lodo. Pequeños deslizamientos y cavitación en bancos de arena o grava. Las campanas grandes suenan. Los canales de concreto para irrigación se dañan.
 - VIII. Se afecta el control de los automóviles. Daño en mampostería C; colapso parcial. Ciertos daños en mampostería B, ninguno en mampostería A. Se cae el estuco y algunos muros de mampostería. Torcimiento, caída de chimeneas, torres de chimeneas de fábricas, monumentos, torres, tanques elevados. Las casas construidas a base de marcos se mueven sobre sus cimientos si no están atorillados; se desploman los muros de paneles sueltos. Los pilotes deteriorados se rompen. Se rompen las ramas de los árboles. Cambio del curso o de la temperatura de manantiales o pozos. Grietas en suelo húmedo y en pendientes pronunciadas.
 - IX. Pánico general. Se destruye la mampostería D; se daña gravemente la mampostería C, y a veces se colapsa totalmente; la mampostería B se daña gravemente. Daño general en cimentaciones. Las estructuras de marco, si no están atorilladas, se sueltan de la cimentación. Los marcos se deforman. Daños graves en cisternas. La tubería subterránea se rompe. Aprietamiento notable del suelo. En áreas de aluvión, la arena y el lodo son expulsados al exterior creando fuentes sísmicas y cráteres de arena.
 - X. La mayor parte de la mampostería y de las estructuras de marco se destruyen junto con sus cimientos. Se destruyen algunas estructuras y puentes de madera bien contruidos. Daños graves en presas, diques, represas. Grandes deslizamientos de tierra. El agua se desborda de canales, ríos y lagos. La arena y el lodo se desplazan en forma horizontal en las playas y en tierra plana. Los rieles se doblan ligeramente.
 - XI. Los rieles se doblan en gran medida. Los ductos subterráneos quedan completamente fuera de servicio.
 - XII. Daño casi total. Grandes masas rocosas se desplazan. Se distorsionan las líneas de mira y nivel. Los objetos son arrojados al aire.
- MAMPOSTERÍA A. Mano de obra, mortero y diseño de buena calidad; reforzada sobre todo lateralmente, y pegada usando acero, concreto, etc.; diseñada para resistir fuerzas laterales.
- MAMPOSTERÍA B. Mano de obra y mortero de buena calidad; reforzada, pero no diseñada en detalle para resistir fuerzas laterales.
- MAMPOSTERÍA C. Mano de obra y mortero ordinarios, sin debilidad extrema como falta de traslape en esquinas, pero no reforzada ni diseñada contra fuerzas horizontales.
- MAMPOSTERÍA D. Materiales débiles, como adobe; mortero pobre; baja calidad de la mano de obra; débil horizontalmente.

Figura 2.6 Escala de Intensidad de Mercalli Modificada (M). [ref.10].

Las ecuaciones 2.2 a 2.4 son llamadas *Leyes de Atenuación*.

Los sismógrafos son aparatos muy sensibles que captan y amplifican hasta cien mil veces o más vibraciones que son imperceptibles para el ser humano, pueden captar movimientos muy lejanos del lugar en donde están instalados indicándonos la magnitud del sismo. Su alta sensibilidad impide que registren completos movimientos fuertes, pues la señal amplificada no cabría en el espacio disponible en el aparato (saturación del sismograma). Los primeros sismógrafos fueron contruidos a fines del siglo XIX; aún los sismógrafos modernos están basados en el mismo principio básico: Con referencia a la figura 2.8 una masa está suspendida de un marco fijo dentro del instrumento, y es relativamente independiente del movimiento del marco. Al moverse el marco por efectos del sismo, la fuerza de inercia hace que la masa quede estacionaria, de tal manera que este movimiento relativo es registrado con una plumi-lla en papel enrollado a un tambor giratorio.

El acelerógrafo registra solo movimientos fuertes del suelo que no pueden registrar los sismógrafos, no operan las 24 horas, sino que tienen dispositivos de arranque que los activan cuando el movimiento sobrepasa cierta intensidad, fueron inventados en 1930 y producen acelerogramas que proporcionan una imagen del sacudimiento del suelo que representa la historia de las aceleraciones experimentadas durante el

temblor. El nivel de aceleración se mide en términos de "g" (aceleración de la gravedad = $980.665 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ aproximadamente), o en unidades llamadas *gals* ($1 \text{ [gal]} = 1 \text{ [cm/s}^2\text{]}$). La medida de aceleración se usa para indicar el posible poder destructivo de un sismo (o sea la posible intensidad).

El registro más importante para los Ingenieros Civiles es el acelerograma, pues conociendo las aceleraciones del terreno es posible estimar las fuerzas de inercia que se generan en las estructuras, permite una evaluación cuantitativa de la intensidad sísmica con un mayor grado de seguridad que la que se tendría usando la escala MM. Con la ayuda de una computadora programada con métodos numéricos apropiados, es posible realizar la integración con respecto al tiempo del registro del acelerograma, con lo cual se obtiene la historia de velocidades, e integrando nuevamente se obtiene la de desplazamientos del terreno con gráficas como las mostradas en la figura 2.9.

24.- ONDAS SISMICAS.

ONDAS SISMICAS.- Son ondas por medio de las cuales se produce la propagación y disipación de la energía generada por un terremoto. Las hay de cuatro tipos clasificadas en dos grupos: *Ondas de cuerpo y ondas de superficie* [ref.1].

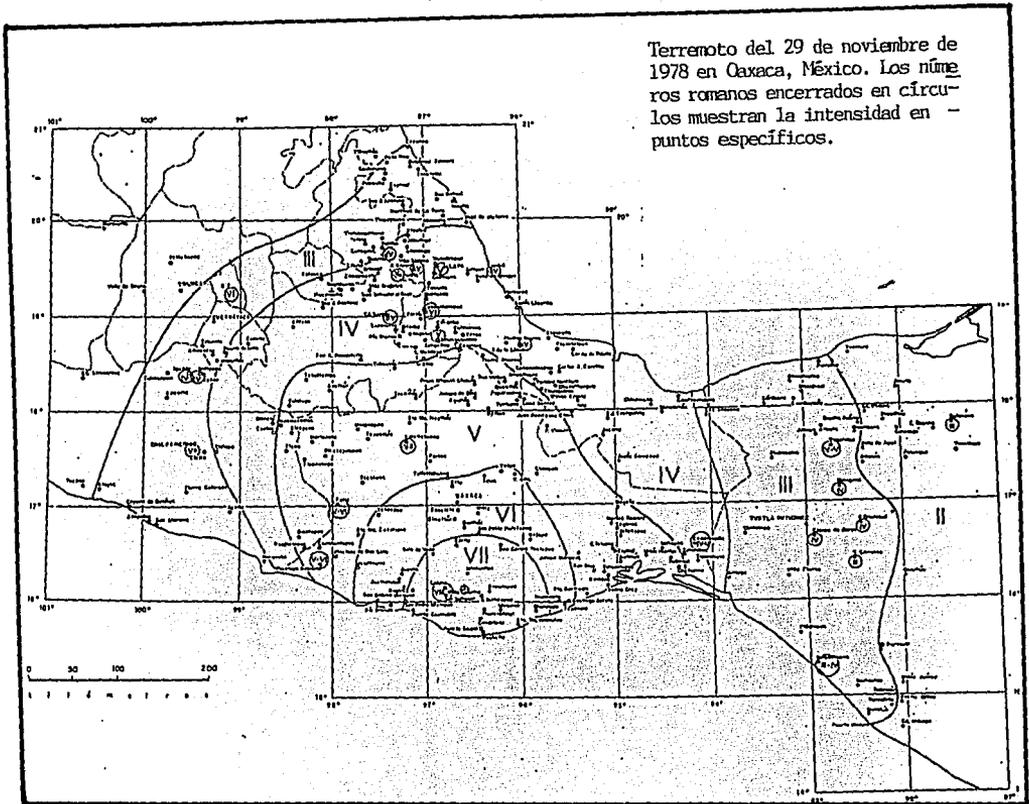


Figura 2.7 Mapa de Isosistas, líneas de igual intensidad (escala MM) [ref.14]

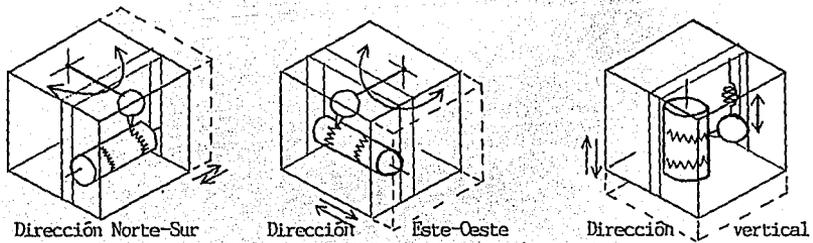


Figura 2.8 El principio básico del sismógrafo de péndulo. [ref.6]

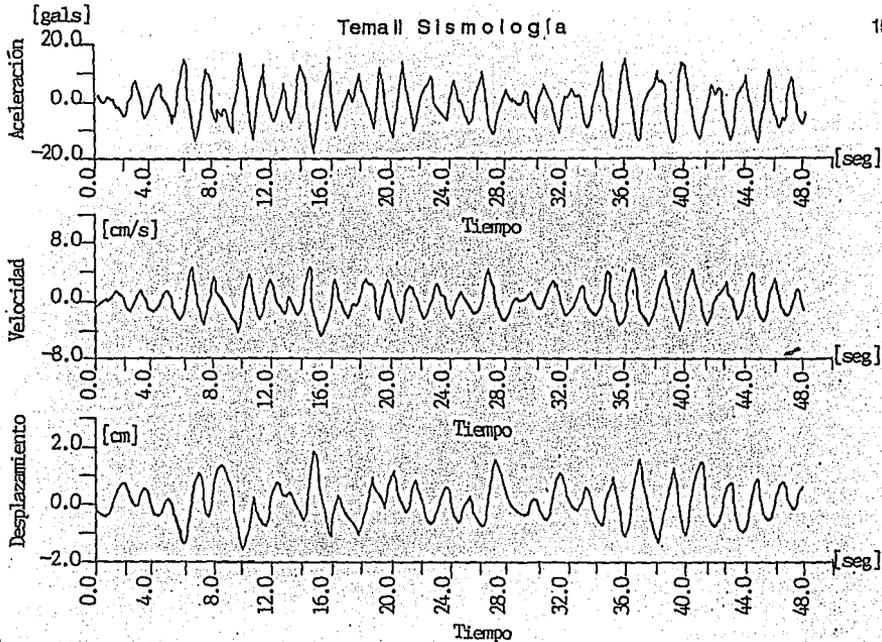


Figura 2.9. Historias de aceleraciones, velocidades y desplazamientos del terreno en un sismo registrado en la ciudad de México [ref. 8].

2.4.1.- ONDAS DE CUERPO.

ONDAS DE CUERPO.-Son aquellas que viajan en el interior de la masa rocosa en que se generan al ocurrir el afallamiento. Las hay de dos tipos:

a) *Ondas P (primarias o longitudinales).*- Son de compresión y expansión del material en la dirección de propagación, transmiten a través de cualquier material y son las ondas más rápidas, ver figura 2.10 (velocidad promedio de 7 a 8 [km/s] [ref.1]). No son tan destructivas.

b) *Ondas S (Secundarias o transversales).*- Sacuden las partículas en ángulos rectos a su dirección de propagación, es decir su movimiento es de arriba a abajo y de lado a lado, sacudiendo el suelo vertical y horizontalmente respectivamente, transmiten sólo en materiales sólidos, son las ondas más destructivas, también se les llama ondas de corte y su velocidad es menor que las ondas P (aproximadamente 3/5 de la velocidad de la onda P [ref.1]).

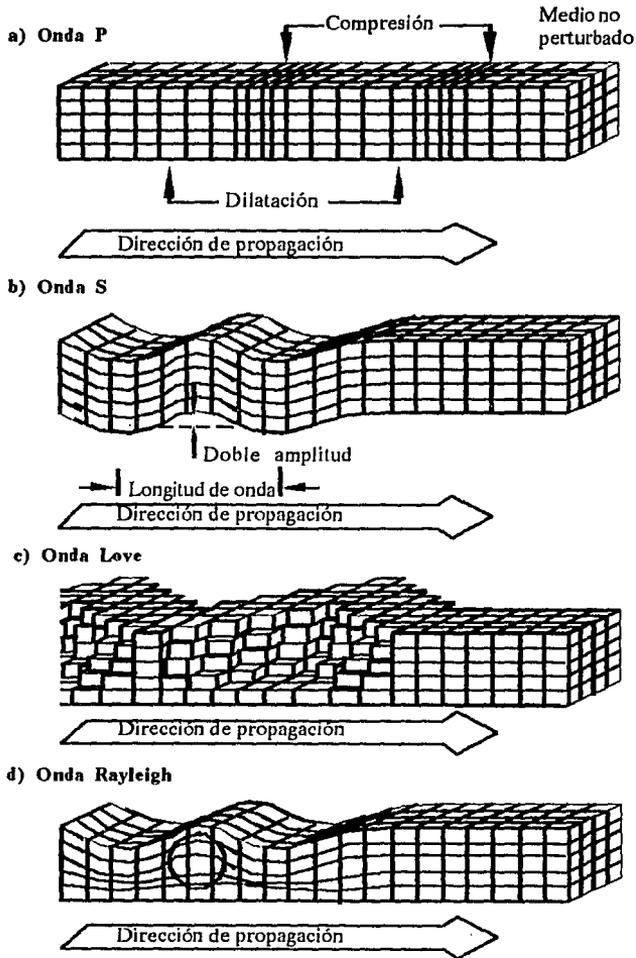


Figura 2.10. Forma del movimiento del suelo según los cuatro tipos de ondas sísmicas [ref. 6].

2.4.2.- ONDAS SUPERFICIALES.

ONDAS SUPERFICIALES.-Son aquellas que viajan a lo largo de la superficie terrestre, en donde son generadas por las ondas P y S que llegan a dicha superficie. Haciendo referencia a la figura 2.10 las hay de dos clases:

a) *Ondas L (Love o largas)*.-Mueven el suelo de lado a lado en un plano horizontal paralelo a la superficie terrestre sacudiendo las partículas en ángulos rectos a la dirección de propagación, se transmiten sólo en materiales sólidos, son muy destructivas, su velocidad es menor que las ondas S.

b) *Ondas R (Rayleigh)*.-Producen ondulación vertical en la superficie, de tal manera que una partícula se movería según una elipse al pasar la onda, transmiten a través de cualquier material, son muy destructivas y se desplazan más despacio que las ondas L.

2.4.3.- VELOCIDADES DE LAS ONDAS SISMICAS.

Las velocidades de propagación de las ondas sísmicas son, en orden decreciente: *ondas P > ondas S > ondas R*, y están dadas por las siguientes fórmulas [ref.4]:

ONDA P:

$$v_p = \sqrt{(1-\nu)E / [(1-\nu-2\nu^2)\rho]} = \sqrt{(\lambda + 2G) / \rho} \quad (2.5)$$

ONDAS:

$$v_s = [G/\rho]^{0.5} \quad \dots (2.6)$$

Debemos recordar las siguientes relaciones de la Teoría de la Elasticidad^[ref.11]:

$$\nu = \lambda / [2(\lambda + G)] \quad \dots (2.7)$$

$$G = E / [2(1 + \nu)] \quad \dots (2.8)$$

$$\lambda = E\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)] \quad \dots (2.9)$$

donde:

E-Módulo de Young [ton/m²]

ν -módulo de poisson[adimensional]

ρ -densidad de masa [ton-seg²/m⁴]

v_p -velocidad onda p [m/s]

G-módulo de cortante o de rigidez [ton/m²]

λ -constante de Lamé [ton/m²]

v_s -velocidad onda s [m/s]

H-espesor del estrato de suelo [m]

v_L -velocidad onda L [m/s]

v_s -velocidad onda s en el estrato superficial [m/s]

w-frecuencia de la onda [radianes/seg]

ONDA L:

Love demostró que estas ondas se presentan en la superficie de un sólido estratificado con velocidad dentro del intervalo: $v_s' < v_L < v_s$

Usando apóstrofos para indicar el estrato, v_L puede determinarse con:

$$G[1 - (\nu^2/\nu_s'^2)]^{0.5} - \{G'[(\nu^2/\nu_s'^2) - 1]\}^{0.5} \\ \tan(wH[(\nu^2/\nu_s'^2) - 1]^{0.5}/v_L) = 0 \quad \dots (2.10)$$

ONDA R: Rayleigh demostró que v_r puede determinarse con:

$$\left[2 - \frac{v_r^2}{v_s^2}\right]^2 = \left\{4\left[1 - \frac{v_r^2}{v_p^2}\right]^{0.5} \left[1 - \frac{v_r^2}{v_s^2}\right]^{0.5}\right\} \dots (2.11)$$

con $v_r < v_s$ v_r -velocidad onda R [m/s]

La solución de las ecuaciones (2.10) y (2.11) puede llegar a ser complicada, pero su tratamiento se simplifica si se adopta la llamada *Relación de Poisson* la cual arroja resultados con buena aproximación en la mayoría de las rocas de la corteza terrestre, dicha relación establece que:

$$\left. \begin{aligned} G &= \lambda \\ \nu &= 0.25 \\ v_p &= [3]^{0.5} v_s \\ v_r &= 0.92 v_s \end{aligned} \right\} \dots (2.12) \text{ Relación de Poisson}$$

Como ejemplo de los usos geológicos de las ondas sísmicas, se ha logrado conocer la estructura interna de nuestro planeta mostrada en la figura 2.11.

2.4.4.- LOCALIZACION DE TERREMOTOS Y SUS MAGNITUDES.

Las ondas P y S viajan a través del interior de la Tierra, hasta los sismógrafos ubicados en diferentes estaciones de registro, las ondas L y R llegan posteriormente desplazándose a lo largo de la superficie terrestre tal como se ilustra en la figura 2.12.

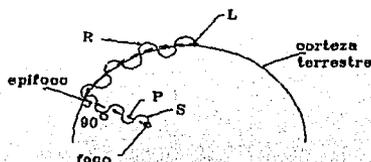


Figura 2.12. Tipos de ondas sísmicas.

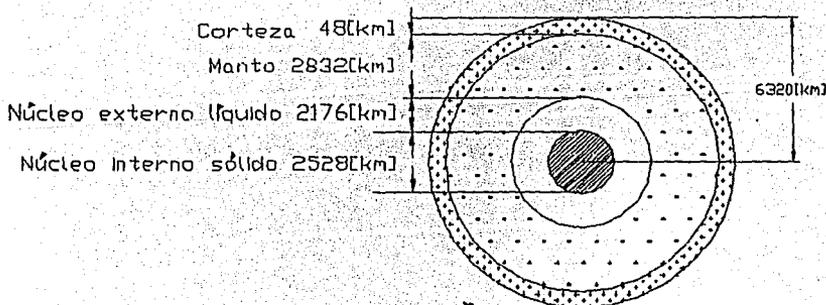


Figura 2.11. Estructura interna del Planeta Tierra [ref. 1].

Partiendo de miles de experiencias y observaciones de sismos en todo el mundo se han logrado establecer los tiempos promedio de recorrido de las ondas P y S y se han preparado Tablas de Tiempo como la mostrada en la figura 2.13.

La localización de focos y epicentros de terremotos, se efectúa a partir del tiempo que tardan las ondas P y S en llegar hasta una estación sismográfica, con relación a la figura 2.14 este tiempo de llegada es registrado en el sismograma obtenido en la estación. A partir de dicho sismograma se determina la diferencia o intervalo de tiempo entre el arribo de las ondas mencionadas, y consultando la Tabla de Tiempos de la figura 2.13 puede ser leída en ella la distancia entre la estación de registro y el foco del sismo.

Contando con tres o más sismogramas registrados en diferentes observatorios, se tendrán tres o más intervalos de tiempos de arribo de las ondas P y S, y por tanto tres o más distancias entre el foco y las estaciones de registro.

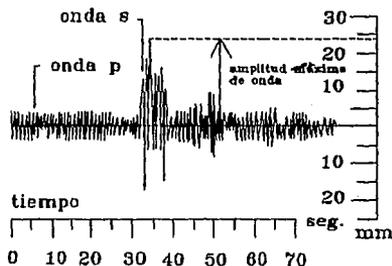
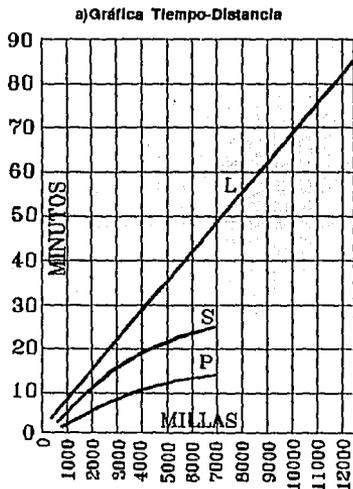


Figura 2.14. Sismograma mostrando los tiempos de llegada de las ondas P y S [ref. 6].

Empleando el procedimiento llamado Triangulación, que consiste en trazar arcos de



b) Tabla de Tiempos preparada a partir de la gráfica a)

Distancia al Foco	Tiempos de recorrido		Intervalo de tiempos de arribo S-P
	onda P	onda S	
[millas][km]	{min}	{min}	{min}
1000	1609	3.57 6.17	2.60
2000	3218	6.08 10.95	4.87
3000	4827	8.52 15.05	6.53
4000	6436	10.43 18.17	7.74
5000	8045	11.57 21.05	9.48
6000	9654	12.95 23.65	10.70
7000	11263	14.00 26.00	12.00

Figura 2.13. Tiempos promedio de recorrido de las ondas sísmicas P, S y L [ref. 1].

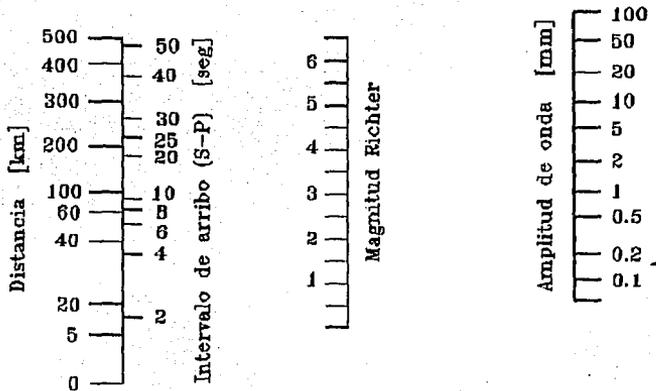


Figura 2.15. Nomograma para la determinación de la Magnitud Richter^[ref. 6].

círculo sobre un mapa geográfico, con centro en cada estación y radio igual a la distancia calculada correspondiente, se obtendrá un punto de intersección de los arcos. Al determinar la longitud y latitud del citado punto, habremos localizado el foco del terremoto y su tiempo de ocurrencia.

Como se mencionó en el inciso 2.3.2, la magnitud de un terremoto se mide de acuerdo a la escala de Richter y la medida es única independientemente del lugar de ubicación de la estación sismográfica. La escala de Richter es de tipo logarítmico y designa las magnitudes con números, pero sin tener especificado un límite inferior o superior (las mayores magnitudes registradas en el mundo no han sobrepasado de 8.9 y se han registrado microsismos de magnitud -2^[ref. 6]); esta escala se basa como ya se indicó en

los registros de sismógrafos ubicados a una distancia de 100[km] del epicentro. Existen diagramas como el de la figura 2.15 para corregir la magnitud de Richter a distancias variables desde el epicentro.

Para determinar la Magnitud de Richter para un sismo dado se requieren: a) La diferencia de tiempos de arribo de las ondas P y S y b) La amplitud máxima de las ondas registradas por el sismógrafo, ver figura 2.14. Con estos datos y usando el nomograma de la figura 2.15, se unen el punto correspondiente a la columna de "tiempos de arribo" con el de la columna de "amplitud"; la magnitud será leída en el punto de intersección con la columna de "Magnitud".

2.5.- ACTIVIDAD SISMICA.

SISMICIDAD.-Es la descripción de las características sísmicas de una región geográfica.

RIESGO SISMICO.-Es la probabilidad que se calcula para una región geográfica de la ocurrencia de sismos que excedan o igualen determinada intensidad.

BRECHA SISMICA.-Es la parte de una placa tectónica en subducción, que no ha sufrido desplazamientos ni rupturas recientes y en la que cabe esperar terremotos a futuro que cerrarán la brecha.

2.5.1.- SISMICIDAD MUNDIAL.

Continuamente se producen terremotos en todo el mundo, 10% de ellos se generan a lo largo del sistema de dorsales centroceánicas por extensión y transformación de las placas tectónicas, y aproximadamente el 90% restante se deben a la subducción ocurrida en fosas o trincheras [ref. 6].

Localizando los centros o focos de sismos históricos mundiales, se han encontrado regiones sísmicamente activas, de las cuales destacan:

CINTURON DE FUEGO CIRCUM-PACIFICO.-La actividad sísmica se localiza en los bordes de la Placa del Pacífico que aparece en la figura 2.2, donde por subducción, ésta y otras pequeñas placas se introducen bajo las platafor-

mas continentales de América y Asia. En esta zona se libera anualmente el 90% de la energía sísmica mundial [ref. 7].

CINTURON ALPINO.- Los epicentros de los sismos se localizan afectando a países como Turquía, Grecia, Yugoslavia, Italia, España, Portugal, norte de África, Irán, Irak, India y China. En esta región se libera aproximadamente el 10% de la energía sísmica mundial [ref. 7].

Las estaciones sismográficas distribuidas en todo el mundo reportan en promedio 600 terremotos anualmente, pero se estima que su número es del orden del millón anual distribuidas como se indica en la figura 2.16.

La idea de que un gran número de pequeños sismos en una región alivia los esfuerzos en las rocas del subsuelo, reduciendo el riesgo de un

Terremotos	Magnitud	Promedio anual	
Grande	7.7-8.6	2	Observado realmente
Importante	7.0-7.7	12	
Destructivo potencialmente	6.0-7.0	108	Estimaciones para toda la Tierra, basada en muestreo de regiones especiales
	5.0-6.0	800	
	4.0-5.0	6200	
	3.0-4.0	49000	
	2.5-3.0	100000	

Figura 2.16. Promedio Anual de terremotos de foco somero (1904-1946) [ref. 1].

gran terremoto, no concuerda con los datos observados; esto se explica por el hecho de que la energía disipada por una orda de temblores pequeños es mínima en comparación con la que disipa un gran terremoto, (por ejemplo se necesitan 1 millón de sismos de $M=4.3$ para liberar la misma energía de un terremoto de $M=8.3$). Una estadística de los terremotos históricos mundiales importantes ($M \geq 6$), puede observarse en la figura 2.17.

2.5.2.- SISMICIDAD EN MEXICO.

En México se sitúan dos regiones sísmicas:

La 1a. localizada en el extremo norte del Golfo de California cuyos sismos son debidos a la falla transformante Imperial (prolongación de la falla de San Andrés), que penetra en el golfo.

En la figura 2.2 se observa que la 2a. se localiza en las costas del Pacífico afectando los estados de Jalisco hasta Chiapas; los sismos se deben al mecanismo de subducción de las pequeñas placas de Cocos y de Ribera bajo la plataforma continental de la placa Norteamericana.

La sismicidad en dichas regiones coloca a nuestro país en el 2o. lugar mundial en cuanto a riesgo sísmico (Japón es el primero)^[ref.3].

Los sismos en la primera región afectan al valle de Mexicali y al mar de Cortés dañando ocasionalmente las poblaciones de sus costas. La

zona de subducción de la segunda región es la de mayor riesgo sísmico y ha producido los sismos

Fecha	Lugar	Magnitud
12-JUN-1897	Assam, India	8.7
03-SEP-1899	Yakatut, Alaska	7.8
10-SEP-1899	Yakatut, Alaska	8.6
31-ENE-1906	Colombia	8.6
18-ABR-1906	Sn. Francisco, Calif.	8.25
17-AGO-1906	Chile	8.4
28-DIC-1908	Messina, Italia	7.5
03-ENE-1911	Tie Shan, China	8.4
13-ENE-1915	Avezzaro, Italia	7.0
16-DIC-1920	Kansu, China	8.5
01-SEP-1923	Kanto, Japón	8.2
26-DIC-1932	Kansu, China	7.6
02-MAR-1933	Japón	8.5
31-MAY-1935	Quetta, India	7.5
24-ENE-1939	Chillan, Chile	7.75
27-DIC-1939	Erzincan, Turquía	8.0
28-JUN-1948	Fukui, Japón	8.0
30-MAY-1960	Sur de Chile	8.5
01-SEP-1962	Noroeste de Irán	7.3
26-JUL-1963	Skopje, Yugoslavia	8.0
28-MAR-1964	Alaska	8.6
31-AGO-1968	Irán	7.4
09-FEB-1971	Sn. Ferndo, Calif.	6.5
23-DIC-1972	Managua, Nic.	6.2
04-FEB-1975	Liaoning, China	7.4
04-FEB-1976	Guatemala	7.9
27-JUL-1976	Tangshan, China	7.6
19-SEP-1985	Guerrero, Mexico	8.1

Figura 2.17. Terremotos mundiales notables [rel. 1 y 6].

Fecha	Latitud °N	Longitud °W	M	Fecha	Latitud °N	Longitud °W	M
25-MAR-1806	18.9	103.8	7.1	02-JUN-1916	17.5	95.0	7.1
31-MAY-1818	19.1	103.6	7.7	21-NOV-1916	18.0	100.0	7.0
04-MAY-1820	17.2	99.6	7.6	29-DIC-1917	15.0	97.0	6.9
22-NOV-1837	20.0	105.0	7.7	22-MAR-1928	16.2	95.5	7.5
09-MAR-1845	16.6	97.0	7.5	17-JUN-1928	16.3	96.7	7.8
07-ABR-1845	16.6	99.2	7.9	04-AGO-1928	16.8	97.6	7.4
05-MAY-1854	16.3	97.6	7.7	09-OCT-1928	16.3	97.3	7.6
19-JUN-1858	19.8	101.6	7.5	15-ENE-1931	16.1	96.6	7.8
03-OCT-1864	18.7	97.4	7.3	03-JUN-1932	19.8	104.0	8.2
11-MAY-1870	15.8	96.7	7.9	18-JUN-1932	19.5	103.5	7.8
27-MAR-1872	15.7	96.6	7.4	30-NOV-1934	19.0	105.3	7.0
16-MAR-1874	17.7	99.1	7.3	26-JUL-1937	18.4	96.4	7.3
11-FEB-1875	21.0	103.8	7.5	23-DIC-1937	17.1	98.1	7.5
09-MAR-1875	19.4	104.6	7.4	15-ABR-1941	18.8	102.9	7.7
17-MAY-1879	18.6	98.0	7.0	22-FEB-1943	17.6	101.1	7.5
19-JUL-1882	17.7	98.2	7.5	06-ENE-1948	17.0	98.0	7.0
03-MAY-1887	31.0	109.2	7.3	06-ENE-1948	17.0	98.0	7.0
29-MAY-1887	17.2	99.8	7.2	14-DIC-1950	17.2	98.1	7.1
06-SEP-1889	17.0	99.7	7.0	28-JUL-1957	17.1	99.1	7.5
02-DIC-1890	16.7	98.6	7.2	11-MAY-1962	17.2	99.6	7.0
02-NOV-1894	16.5	98.0	7.4	19-MAY-1962	17.1	99.6	6.7
05-JUN-1897	18.3	95.4	7.4	06-JUL-1964	18.3	100.4	7.4
24-ENE-1899	17.1	100.5	7.5	23-AGO-1965	16.3	95.8	7.8
20-ENE-1900	20.0	105.0	7.4	02-AGO-1968	16.6	97.7	7.4
16-MAY-1900	20.0	105.0	6.9	30-ENE-1973	18.4	103.2	7.3
14-ENE-1903	15.0	98.0	7.7	28-AGO-1973	18.3	96.5	7.1
15-ABR-1907	16.7	99.2	7.7	29-NOV-1978	15.8	96.8	7.6
26-MAR-1908	16.7	99.2	7.7	14-MAR-1979	17.3	101.4	7.4
27-MAR-1908	17.0	101.0	7.0	25-OCT-1981	17.7	102.2	7.1
30-JUL-1909	16.8	99.9	7.3	07-JUN-1982	16.3	98.4	6.7
31-JUL-1909	16.6	99.5	6.9	07-JUN-1982	16.4	98.5	6.8
07-JUN-1911	17.5	102.5	7.7	19-SEP-1985	18.3	102.7	8.1
16-DIC-1911	16.9	100.7	7.6	21-SEP-1985	17.8	101.7	7.3
19-NOV-1912	19.9	99.8	7.0	30-ABR-1986	18.4	103.0	7.0

Figura 2.18. Catálogo de sismos mexicanos [ref. 3].

históricos más grandes que integran el catálogo mostrado en la figura 2.18.

El Ingeniero Civil y otros especialistas debemos prepararnos para afrontar de manera eficiente y segura los retos y riesgos planteados

por vivir en una zona sísmica. Las placas de Cocos y de Rivera al verse forzadas a sumergirse bajo la placa Norteamericana, generan durante el transcurso de los años una alta concentración de esfuerzos en las rocas que forman sus bordes de contacto.

Al producirse el afallamiento de las rocas, los corrimientos y rupturas se generan en la placa tectónica aunque no a todo lo largo de ésta, dando origen a las zonas no fracturadas llamadas brechas sísmicas que se indican en la figura 2.19.

En la figura 2.20 se aprecia como cada vez que se vence la resistencia al deslizamiento, se generan ondas sísmicas produciendo un terremoto.

2.5.3.- SISMICIDAD EN EL VALLE DE MEXICO.

Los efectos de propagación de las ondas sísmicas dependen en gran parte del tipo de suelo y rocas por el que viajan. El valle de México enfatiza esta característica ocasionando la amplificación de dichas ondas y provocando mayores aceleraciones del terreno, efecto que constituye un factor de riesgo sísmico que se debe tomar en cuenta.

El subsuelo del Valle de México constituye un vaso natural azolvado, formado por procesos volcánicos que cerraron el drenaje de la cuenca mediante la formación de las sierras de Pachuca, Tepotzotlán, Guadalupe, Patlachique y Tepozán (al norte); de las Cruces, Monte Alto, Monte Bajo y Tepotzotlán (al oeste); de Calpulalpan y Nevada (al este); y de Chichinautzin (al sur); dando origen a la serie de lagos mostrados en la figura 2.21, cuyas dimensiones variaron en función de las condiciones hidrológicas que se presentaron a lo largo de miles de años.

Actualmente para fines de ingeniería, el valle se delimita en las tres zonas que aparecen en la figura 2.22^[ref. 12] y que son:

a) *Zona del lago o de terreno compresible.*-Los depósitos de suelo se formaron a partir del Lago de Texcoco y de sedimentos provocados por erupciones de los volcanes circundantes. El tipo de suelo lo constituyen en su mayor parte arcillas de alta compresibilidad, con grados de saturación de agua del 80%, con baja resistencia y alta deformabilidad, en espesores promedio de 35[m]^[ref. 13].

b) *Zona de lomas o de terreno firme.*-Está fuera de la influencia del material lacustre, se caracteriza por suelos firmes, compactos y compuestos por arenas limosas con altos contenidos de gravas muy cementadas y en ocasiones por derrames de lava.

c) *Zona de transición.*-Contiene materiales lacustres de menor espesor que los de la zona del lago. Se tienen secuencias alternadas de estratos compactos de materiales limosos y arenosos y capas de arcilla blanda en espesores desde centímetros a pocos metros.

2.5.4.- INSTRUMENTACION SISMICA.

La instrumentación a base de acelerógrafos en las diversas zonas de un país es de gran importancia, ya que es la única forma de obtener datos precisos y científicos, que nos proporcionen las

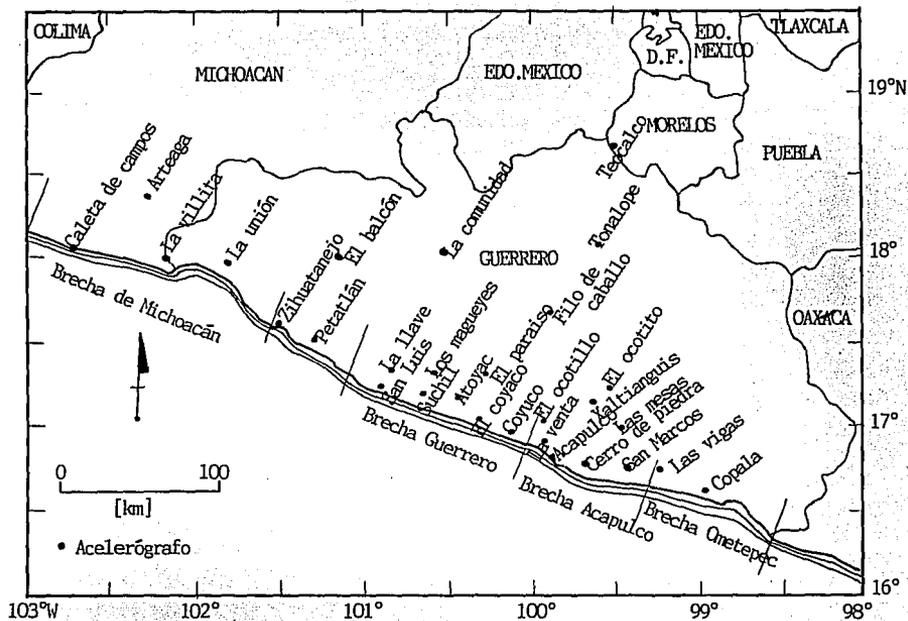


Figura 2.19 Brechas sísmicas y Red Acelerográfica de Guerrero. [ref.3].

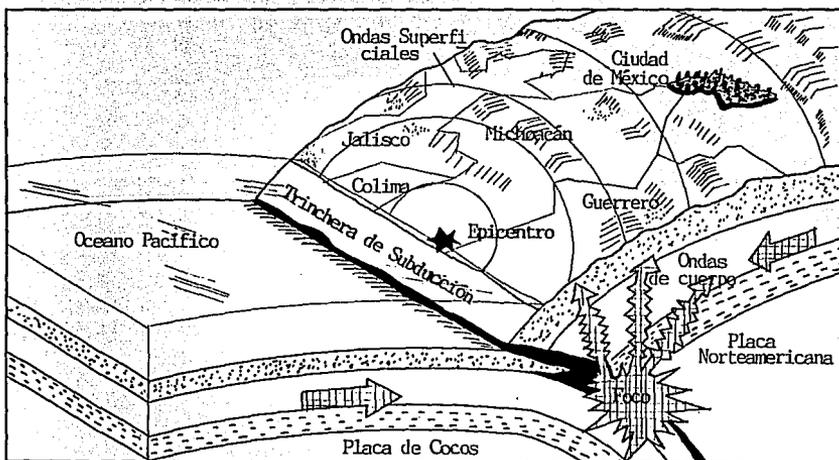


Figura 2.20 Penetración de la Placa de Cocos bajo la Placa Norteamericana [ref.7]

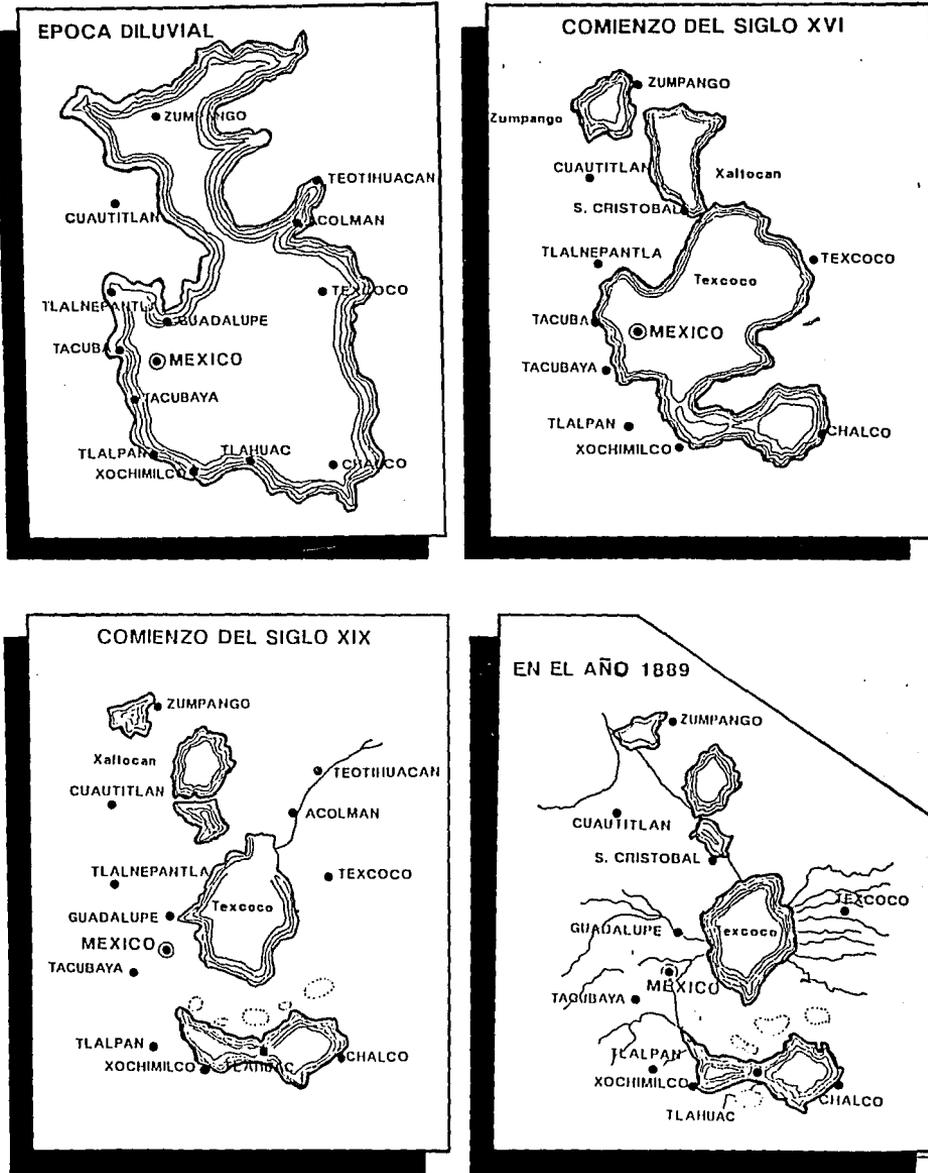


Figura 2.21 Evolución de los lagos durante la formación del subsuelo del Valle de México. [ref.7].

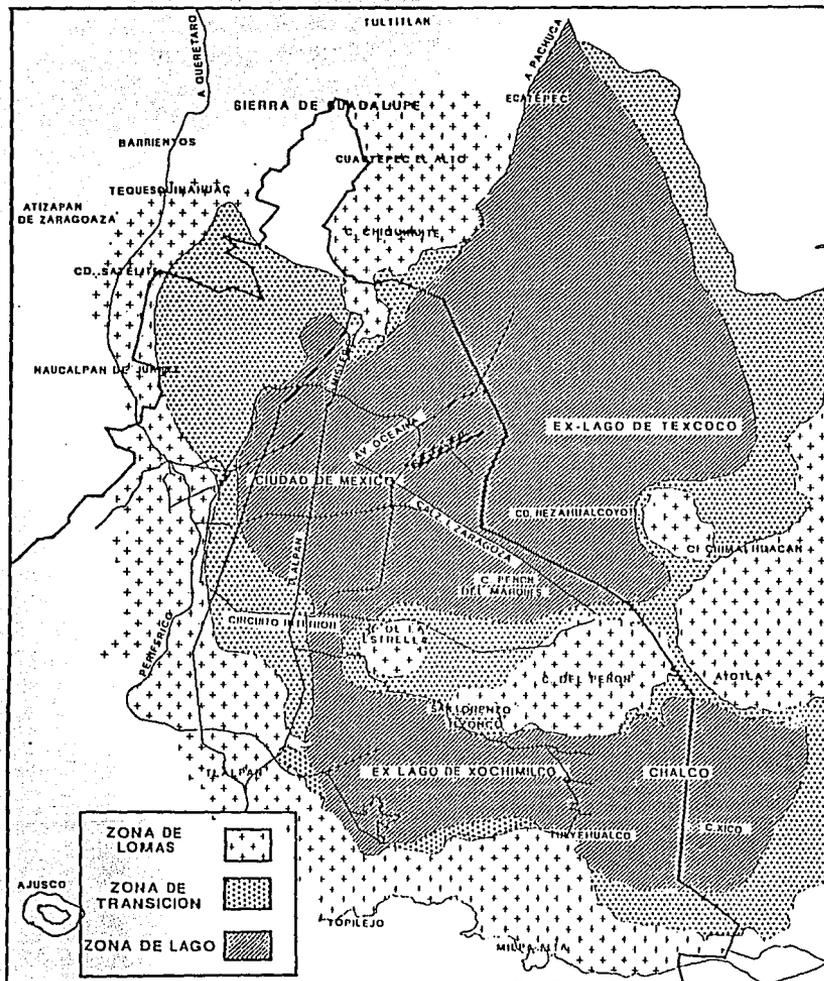


Figura 2.22 Zonas estratigráficas de la Ciudad de México. [ref.7].

características sísmicas fieles de dichas zonas, y de esta manera poder adoptar mejores criterios de diseño para obras civiles. Así por ejemplo en la Ciudad de México la red acelerográfica fue incrementada a partir de 1985, llegando a contar en la actualidad con 108 acelerógrafos^[ref. 7], también se cuenta con la Red Acelerográfica de Guerrero

que consta de 29 estaciones dotadas de acelerógrafos digitales, ver figura 2.19. Todos estos instrumentos son de diseño moderno, y es posible transmitir la información registrada por vía telefónica o por radio a centros de procesamiento.

2.6.- PROBLEMAS RESUELTOS.

1.-Deducir las expresiones para calcular la velocidad de las ondas sísmicas en una masa de rocas en la cual es aplicable la Relación de Poisson.

Según el inciso 2.4.3 la Relación de Poisson implica

$$G = \lambda \quad \dots(a)$$

sabemos que

$$v = \lambda / [2 (\lambda + G)] \quad \dots(2.7)$$

sustituyendo (a) en (2.7)

$$v = \lambda / [2 (\lambda + \lambda)] = \lambda / (4 \lambda) = 1/4$$

$$v = 0.25 \quad \dots(b)$$

La ecuación (2.5) establece que

$$v_p = [(\lambda + 2G)/\rho]^{0.5} \quad \dots(2.5)$$

sustituyendo (a) en (2.5)

$$v_p = [3G/\rho]^{0.5} \quad \dots(c)$$

pero según la ecuación (2.6)

$$v_s = [G/\rho]^{0.5} \quad \dots(2.6)$$

por lo tanto de (2.6) y (c)

$$v_p = [3]^{0.5} [G/\rho]^{0.5}$$

$$v_p = [3]^{0.5} v_s \quad \dots(d)$$

conocemos que

$$[2 - v_t^2/v_s^2]^2 = 4[1 - v_t^2/v_p^2]^{0.5} [1 - v_t^2/v_s^2]^{0.5} \quad \dots(2.11)$$

Desarrollando el cuadrado del miembro izquierdo y como de (d) $v_p^2 = 3v_s^2$:

$$4 - 4v_t^2/v_s^2 + v_t^4/v_s^4 = 4[1 - v_t^2/3v_s^2]^{0.5} [1 - v_t^2/v_s^2]^{0.5}$$

Factorizando

$$4[1 - v_t^2/v_s^2 + v_t^4/4v_s^4] = 4[1 - v_t^2/3v_s^2]^{0.5} [1 - v_t^2/v_s^2]^{0.5}$$

elevando al cuadrado

$$[1 - v_r^2/v_s^2 + v_r^4/4v_s^4]^2 = [1 - v_r^2/3v_s^2][1 - v_r^2/v_s^2]$$

desarrollando

$$1 - 2v_r^2/v_s^2 + 3v_r^4/(2v_s^4) - v_r^6/(2v_s^6) + v_r^8/(16v_s^8) = 1 - 4v_r^2/(3v_s^2) + v_r^4/(3v_s^4)$$

ordenando

$$v_r^8/(16v_s^8) - v_r^6/(2v_s^6) + 7v_r^4/(6v_s^4) - 2v_r^2/(3v_s^2) = 0 \quad \dots(e)$$

multiplicando ambos miembros de (e) por 16 y si hacemos $m = v_r/v_s$... (f)

$$m^8 - 8m^6 + 18.67m^4 - 10.67m^2 = 0$$

dividiendo entre m^2

$$m^6 - 8m^4 + 18.67m^2 - 10.67 = 0 \quad \dots(g)$$

la ecuación (g) tiene las siguientes seis raíces:

$m_1 = 0.9195$	$m_3 = 1.999$	$m_5 = -1.777$
$m_2 = 1.777$	$m_4 = -0.9194$	$m_6 = -1.999$

Físicamente nos interesa la menor raíz positiva, por lo tanto $m = 0.9195 \approx 0.92$... (h)

sustituyendo (h) en (f) $0.92 = v_r/v_s$ de donde $v_r = 0.92v_s$... (i)

Por lo tanto la Relación de Poisson implica que:

(a)... $G = \lambda$	}(2.12) Relación de Poisson
(b)... $\nu = 0.25$		
(d)... $v_p = [3]^{0.5} v_s$		
(i)... $v_r = 0.92v_s$		

II.- Calcúlense las velocidades de las ondas p, s y r, que se propagan en un suelo con peso específico de $2.0[\text{ton}/\text{m}^3]$ y módulo de elasticidad de $2 \times 10^5 [\text{ton}/\text{m}^2]$. Supóngase aplicable la Relación de Poisson.

El peso específico se puede definir como $\gamma = W/V$... (a)

y la densidad de masa está dada por $\rho = m/V$... (b)

el peso de un cuerpo se calcula como $W = mg$... (c) γ - Peso específico del suelo

sustituyendo (c) en (a) $\gamma = mg/V$ W - peso del suelo

y de (b) $\gamma = \rho g$ V - volumen del suelo

por lo tanto $\rho = \gamma/g = 2[\text{ton}/\text{m}^3]/9.80665[\text{m}/\text{s}^2] = 0.2039[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4]$... (d) ρ - densidad de masa

de la ecuación (2.5) del inciso 2.4.3., y por la Relación de Poisson (ec. 2.12) $\nu = 0.25$ g - aceleración de la gravedad

m - masa

$$v_p = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1-\nu-2\nu^2)\rho}} = \sqrt{\frac{(1-0.25)(2)(10^5)[\text{ton}/\text{m}^2]}{[(1-0.25-2)(0.25^2)(0.2039)[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4]}}$$

$$= \sqrt{1177047.572[\text{m}^2/\text{s}^2]}$$

$v_p = 1084.92 \approx 1085[\text{m}/\text{s}]$... (e) **velocidad onda p**

de la ecuación (2.12)

$$v_p = [3]^{0.5} v_s$$

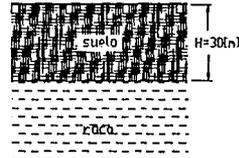
por tanto

$$v_s = v_p/[3]^{0.5} = 1085/[3]^{0.5} = 626.43 \approx 626[\text{m}/\text{s}]$$
 ... (f) **velocidad onda s**

$$v_r = 0.92v_s = 0.92(626) = 575.92 \approx 576[\text{m}/\text{s}]$$
 ... (g) **velocidad onda r**

III.-Una capa de suelo de 30[m] de espesor, cuyo peso volumétrico es de $2.3[\text{ton}/\text{m}^3]$ y con módulo de elasticidad de $2.1 \times 10^5[\text{ton}/\text{m}^2]$, descansa sobre una formación de roca idealizable como semi-infinita, cuyo peso específico es de $2.8[\text{ton}/\text{m}^3]$ y con módulo de elasticidad de $3 \times 10^6[\text{ton}/\text{m}^2]$. Aplicando la relación de Poisson, calcúlese la velocidad de las ondas Love en la capa superior de suelo y la velocidad de las ondas p y s en ambos estratos. Suponer una frecuencia angular de la onda L de $32.679[\text{rad}/\text{seg}]$.

Usando apóstrofes para indicar las propiedades en el estrato superficial de suelo, se tiene de la ecuación (d) del problema II



$$\rho' = \gamma'/g = 2.3[\text{ton}/\text{m}^3]/9.80665[\text{m}/\text{s}^2] = 0.2345[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4]$$

de la ecuación (2.5)

$$v'_p = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1-\nu-2\nu^2)\rho'}} = \sqrt{\frac{(1-0.25)(2.1)(10^5)[\text{ton}/\text{m}^2]}{[(1-0.25-2)(0.25^2)(0.2345)[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4]}}$$

$$= \sqrt{1074626.866[\text{m}^2/\text{s}^2]} = 1037[\text{m}/\text{s}]$$

empleando la ecuación (f) del problema II

$$v'_s = v'_p/[3]^{0.5} = 1037/[3]^{0.5} = 599[m/s]$$

usando la ecuación (2.8)

$$G' = E/[2(1 + \nu)] = (2.1)(10^5)/[2(1 + 0.25)] = 84000[ton/m^2]$$

Para el estrato de roca: $\rho = \gamma/g = 2.8[ton/m^3]/9.80665[m/s^2] = 0.2855[ton \cdot s^2/m^4]$

$$v_p = \sqrt{(1-\nu)E/[(1-\nu-2\nu^2)\rho]} = \sqrt{(1-0.25)(3)(10^6)[ton/m^2] / [(1-0.25-2)(0.25^2)(0.2855[ton \cdot s^2/m^4])]} \\ = \sqrt{12609457.09[m^2/s^2]} = 3550.98 \approx 3551 [m/s]$$

$$v_s = v_p/[3]^{0.5} = 3551/[3]^{0.5} = 2050[m/s]$$

$$G = E/[2(1 + \nu)] = (3)(10^5)/[2(1 + 0.25)] = (12)(10^5)[ton/m^2]$$

La velocidad de las ondas Love en la capa superficial es, empleando la ecuación (2.10)

$$G[1 - (v^2/v_s^2)]^{0.5} - G'[(v^2/v_s^2) - 1]^{0.5} \tan(wH[(v^2/v_s^2) - 1]^{0.5}/v_L)$$

donde H es el espesor del estrato de suelo, w es la frecuencia de la onda L y v_L la velocidad de dicha onda. Sustituyendo valores:

$$(12)(10^5)[ton/m^2][1 - v^2/2050^2]^{0.5} - (84)(10^3)[ton/m^2][v^2/599^2 - 1]^{0.5}$$

$$\text{tg}[32.679[\text{rad/s}](30)[m][v^2/599^2 - 1]^{0.5} / v_L[m/s]] = 0$$

$$(12)(10^5)[1 - v^2/4202500]^{0.5} - (84)(10^3)[v^2/358801 - 1]^{0.5}$$

$$\text{tg}[980.37[v^2/358801 - 1]^{0.5}/v_L] = 0 \dots (a)$$

iterando la ecuación (a)

v _L	1000	1300	1200	1250	1210	1205	1206.2324
ec.(a)	625814	-434475	24841	-187820	-15237	4948	-0.14

por lo tanto

$$v_L \approx 1206[m/s]$$

IV.-El 29 de noviembre de 1978 el territorio mexicano fue sacudido por un terremoto. En la tabla I se muestran los tiempos de arribo de las ondas P y ondas S, que se registraron en cuatro de las diversas estaciones sismográficas del país; las coordenadas geográficas para la localización de las estaciones de registro se muestran en la tabla II. Determinar: a) Las coordenadas geográficas de localización del epicentro; b) La magnitud en la escala de Richter del sismo si se sabe que la amplitud máxima de las ondas registradas por el sismógrafo de la estación COM(Comitán, Chiapas), es de 67[mm]; c) La energía liberada por el terremoto; d) El número de sismos de magnitud Richter igual a 2.0 que deben producirse para liberar igual cantidad de energía que la calculada en c).

Estación	Clave	Ondas P			Ondas S		
		Hr	min	seg	Hr	min	seg
Tonantzintla, Puebla Instituto de Ingeniería, UNAM, D.F. Observatorio Oaxaca, Oax Comitán, Chiapas	IIT	19	53	42.5	19	54	25
	IIM	19	53	55	19	54	44
	VHO	19	53	08	19	53	21
	COM	19	53	54	19	54	44

TABLA I. Tiempos de arribo de Ondas P y S (Adaptado) [ref. 14].

a) Los intervalos de arribo o diferencia de tiempos de llegada de las ondas son:

Clave	Ondas P		Ondas S		Intervalo(S-P)	
	Hr	min	Hr	min	min	seg
IIT	19	53.71	19	54.42	0.71	= 42.6
IIM	19	53.92	19	54.73	0.81	= 48.6
VHO	19	53.13	19	53.35	0.22	= 13.2
COM	19	53.90	19	54.73	0.83	= 49.8

TABLA III. Diferencia de tiempos de llegada de las ondas P y S

Clave	Coordenadas	
	Norte (N)	Oeste (W)
IIT	19.00°	98.31°
IIM	19.33°	99.18°
VHO	17.08°	96.73°
COM	16.15°	92.23°

TABLA II. Coordenadas geográficas de localización de estaciones sismográficas [ref. 15].

Utilizando la columna de la izquierda del nomograma de la figura 2.15 (inciso 2.4.4), se determinan las distancias epicentrales de las cuatro estaciones en base al intervalo S-P, resultando:

Clave	Distancia epicentral [km]	Clave	Distancia epicentral [km]
IIT	375	VHO	110
IIM	450	COM	450

La localización de las estaciones sismográficas sobre el mapa geográfico de la República Mexicana se muestran en la figura 2.23. Empleando un procedimiento de triangulación se trazan arcos de círculo con centro en la estación de registro y radio igual a la distancia epicentral correspondiente calculada. El epicentro del terremoto está dado por la intersección de los arcos, por tanto en base a la figura 2.23 el epicentro está localizado en el estado de Oaxaca y tiene las siguientes coordenadas:

(16.1°N, 96.6°W) Coordenadas del epicentro

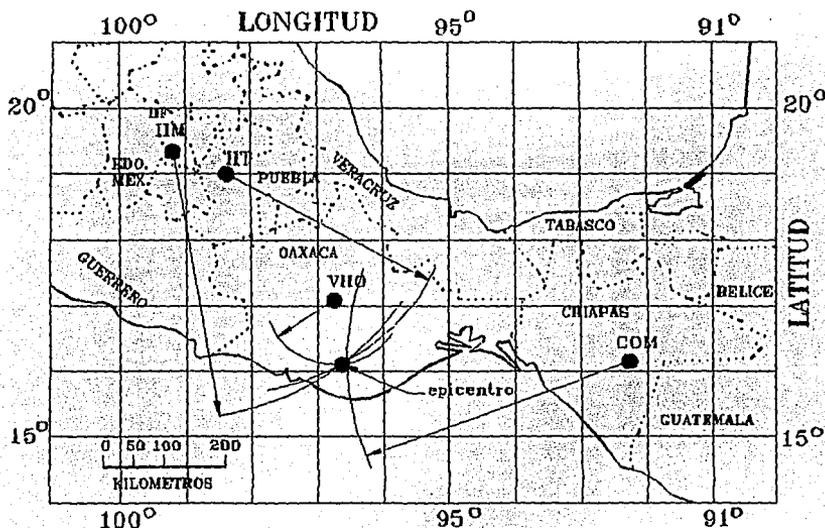


Figura 2.23. Epicentro del sismo del problema IV.

b) De acuerdo al citado nomograma de la figura 2.15, uniendo los puntos correspondientes a 450[km] ó 49.8[seg] (datos de la estación COM), de la columna "Distancia-Intervalo de arribo" con el punto correspondiente a 67[mm] (máxima amplitud de onda de la estación COM), de la columna "Amplitud", se obtiene:

$M = 6.4$ (Magnitud de Richter)

c) Empleando la ecuación (2.1) del inciso 2.3.2.

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5(6.4) = 21.4$$

por tanto

$$E = 1 \times 10^{21.4} [\text{ergs}] = 62.797 [\text{kilotones}]$$

NOTA: 1 [kilotón] = 1000 [ton] de dinamita = 4×10^{18} [ergs]

Compárese con la bomba atómica de 20 [kilotones] que destruyó Hiroshima.

d) La energía que libera un sismo de magnitud $M = 2.0$ es

$$\log_{10} E' = 11.8 + 1.5(2.0) = 14.8$$

$$\text{por tanto } E' = 1 \times 10^{14.8} [\text{ergs}]$$

el número (x) de sismos de $M = 2.0$ necesarios para liberar igual energía que uno de $M = 6.4$ es

$$xE' = E \quad \text{por tanto} \quad x = E/E' = 1 \times 10^{21.4} / (1 \times 10^{14.8}) = 1 \times 10^{6.6} = 3981072 \text{ sismos}$$

V.-Utilizando los datos obtenidos en el problema anterior: a) Calcular la distancia epicentral de las zonas, en las cuales los efectos del terremoto, serán apenas percibidos por todos los habitantes que ahí residen; b) Si el afallamiento de las rocas en el foco del sismo se produjo a las 10Hr 52min 47seg (Tiempo del Meridiano de Greenwich o TMG), determinar los tiempos de arribo de las ondas P y S a un sismógrafo distante 5000[km] del epicentro.

a) De la figura 2.6 (inciso 2.3.2.), el valor mínimo de percepción de los efectos del sismo por parte de los seres humanos, en la escala MM, es de

"III- Sentido en interiores. Los objetos colgantes oscilan. Duración estimada".

Usando la Ley de Atenuación de la ecuación (2.2) (inciso 2.3.2.)

$$I = \log_{14} v / \log 2 \quad \dots (2.2)$$

por tanto

$$\log_{14} v = I / (\log 2) = (3) / \log 2 = 0.9031$$

$$10^{\log_{14} v} = 10^{0.9031}$$

$$14v = 10^{0.9031}$$

de donde

$$v = 10^{0.0031} / 14 = 0.57 [\text{cm/s}] \text{ (velocidad del terreno)}$$

De acuerdo con la Ley de atenuación de la ecuación (2.4)

$$v = 15e^M (R + 0.17e^{0.59M})^{-1.7} = 15e^M / (R + 0.17e^{0.59M})^{1.7} \dots (2.4)$$

de donde

$$v(R + 0.17e^{0.59M})^{1.7} = 15e^M$$

elevando ambos miembros a la 1/1.7

$$v^{1/1.7} (R + 0.17e^{0.59M}) = 15^{1/1.7} e^{M/1.7}$$

por tanto $R = 4.9183e^{M/1.7} / v^{1/1.7} - 0.17e^{0.59M} \dots (a)$

sustituyendo valores en a)

$$R = (4.9183)(2.718281828)^{8.4/1.7} / 0.57^{1/1.7} - 0.17(2.718281828)^{0.59(8.4)}$$

$$R = 287.98 \approx 288 [\text{km}] \text{ (distancia epicentral para intensidad MM = III)}$$

b) Empleando la gráfica a) Tiempo-Distancia de la figura 2.13 (Inclso 2.4.4.) para una distancia

$$R = (5000[\text{km}])(1 \text{ milla} / 1.609 \text{ km}) = 3107.5 [\text{millas}]$$

se obtiene

Onda	Tiempo de recorrido [min]
P	9.091
S	16.364

por tanto las ondas llegarán al sismógrafo a las (TMG):

Onda	Hora de partida			Hora de llegada		
	Hr	min	seg	Hr	min	seg
P	10	52	47	11	01	52
S	10	52	47	11	09	09

2.7.- PROBLEMAS PROPUESTOS

I.- Mediante un estudio geológico se determinó la siguiente estratigrafía del subsuelo:

1) Una capa de arena limosa con peso volumétrico de $1.78 \text{ [ton/m}^3\text{]}$, módulo de elasticidad de $1.9 \times 10^5 \text{ [ton/m}^2\text{]}$, módulo de poisson de 0.35 y un espesor de 15 [m].

2) Un estrato de granito con peso volumétrico de $3.15 \text{ [ton/m}^3\text{]}$, módulo de elasticidad de $3.5 \times 10^6 \text{ [ton/m}^2\text{]}$, módulo de poisson de 0.12 y espesor prácticamente infinito.

Calcular la velocidad: a) de las ondas P y S en ambos estratos; b) de las ondas Love en la capa de arena suponiendo que poseen una frecuencia angular de 96.8 [rad/seg] ; c) de las ondas Rayleigh en la arena.

Solución: a) Capa de arena (usando apóstrofos para sus propiedades): $v_p = 1296 \text{ [m/s]}$, $v_s = 623 \text{ [m/s]}$. Estrato rocoso: $v_p = 3356 \text{ [m/s]}$, $v_s = 2206 \text{ [m/s]}$; b) $v_L = 825.31 \text{ [m/s]}$; c) $v_r = 582.489 \text{ [m/s]}$.

II.- Resolver el problema anterior suponiendo válida la Relación de Poisson. Compárese proceso de solución y resultados.

Solución: a) Capa de arena (usando apóstrofos para sus propiedades): $v_p = 1121 \text{ [m/s]}$, $v_s = 647 \text{ [m/s]}$. Estrato rocoso: $v_p = 3616 \text{ [m/s]}$, $v_s = 2088 \text{ [m/s]}$; b) $v_L = 877.49 \text{ [m/s]}$; c) $v_r = 595 \text{ [m/s]}$.

III.- Para el sismo de magnitud $M = 4.8$ acontecido el 14 de abril de 1989 a las 01 hr. 12 min. 59 seg., cuyas coordenadas geográficas epicentrales son [ref. 15], 14.00°N (latitud), 93.1°W (longitud), determinar:

a) Los tiempos de intervalos de arribo aproximados de las ondas P y S a las siguientes estaciones:

Estación	Clave	C o o r d e n a d a s	
		Norte (N)	Oeste (W)
Tapachula, Chiapas	TPX	14.90°	92.25°
Chicoasen, Chiapas	CSN	16.97°	93.11°
Comitán, Chiapas	COM	16.15°	92.23°
Presa Benito Juárez, Oaxaca.	PBJ	16.44°	95.41°

b) la máxima amplitud de onda registrada en las estaciones citadas en a), y

c) la energía liberada por el sismo.

Solución: a)

Clave	Intervalos de arribo (S-P) [seg]	Clave	Intervalos de arribo (S-P) [seg]
TPX	16	COM	30
CSN	38	P B J	42

b)

Clave	Amplitud de onda [mm]	Clave	Amplitud de onda [mm]
TPX	49.9	COM	4.7
CSN	10.7	P B J	3.3

c) $E = 0.25$ [kilotones]

IV.- Durante una prueba subterránea en el desierto de Nuevo México, Arisóna; se hizo detonar una bomba de Hidrógeno (bomba H), liberando una energía de 10 [megatonnes]*. Suponiendo que el 40% de dicha energía se convierte en ondas sísmicas, calcular: a) La magnitud aproximada del sismo provocado, y b) la intensidad teórica con la cual serán sentidos los efectos de las ondas sísmicas en las poblaciones distantes 400 [km] del lugar de la detonación.

Solución: a) $M = 6.9$; b) $I = 2.9 \approx III$.

*NOTA: 1 [Megatón] = 1×10^3 [kilotón]

BIBLIOGRAFIA.

1.- FUNDAMENTOS DE GEOLOGIA FISICA., Leet L.Don y Judson Sheldon., Ed.Umusa,S.A., México 1984.

2.- LA DERIVA DE LOS CONTINENTES., Engel Albert., Revista Información Científica y Tecnológica Vol. 4 No.02, ICYT, México 1982.

3.- ALGUNOS ASPECTOS GEOFISICOS DE LOS SISMIOS DE SEPTIEMBRE DE 1985

EN LAS COSTAS DE MICHOACAN Y GUERRERO., Prince Jorge.,Revista Información Científica y Tecnológica., México 1988.

4.- FUNDAMENTOS DE INGENIERIA SISMICA., Newmark N.M. y Rosenbluth E., Ed.Diana, México 1976.

5.- APUNTES DE DISEÑO ESTRUCTURAL., De Buen y López de Heredia O, et.al., Facultad de Ingeniería, UNAM, México 1985.

6.- *TERREMOTOS.*, Bolt Bruce A.,
Ed.Reverté, S.A., España 1981.

7.- *SISMOS.*, Boletín de difusión del Departamen-
to del Distrito Federal., Mendoza Carlos J., et.al., DDF,
México septiembre de 1990.

8.- *DISEÑO ESTRUCTURAL.*, Mell Piralla
Roberto., Ed.Limusa,S.A., México 1989.

9.-*MURMULLOS DE LA TIERRA.*, Sagan Carl.,
Ed.Planeta,S.A., México 1985.

10.-*CONFIGURACION Y DISEÑO SISMICO
DE EDIFICIOS.*, Arnold Christopher y Reitherman
Robert., Ed.Limusa, S.A., México 1987.

11.- *TEORIA DE ELASTICIDAD.*, Timoshenko
S. y Goodier J.N., Ed.Urmo S.A., España 1968.

12.- *REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL (RGDF-93).*, Diario Oficial de la Federación., 2 de agosto., México 1993.

13.- *MECANICA DE SUELOS, TOMO II
TEORIA Y APLICACIONES DE LA MECANICA
DE SUELOS.*, Juárez Badillo E. y Rico Rodríguez A.,
Ed.Limusa, S.A., México 1986.

14.- *MACROSISMO DE OAXACA, 29 DE
NOVIEMBRE DE 1978.*, Figueroa Jesús, Series del
Instituto de Ingeniería, No.445, UNAM, México 1981.

15.- *BOLETIN DE INFORMACION SISMICA
PRELIMINAR*, Año 14, No.2, Instituto de Ingeniería,
UNAM, México 1989.

TEMA III

Dinámica estructural

3.1-Definiciones. / 3.2-Oscilaciones en sistemas discretos de un grado de libertad. / 3.3-Oscilaciones en sistemas discretos de varios grados de libertad / 3.4-Oscilaciones en sistemas continuos. / 3.5-Sistemas no lineales.

3.1.- DEFINICIONES. ^[ref. 1]

SISTEMA VIBRATORIO.- Cuerpo o conjunto de cuerpos que poseen masa y elasticidad y que pueden vibrar u oscilar. Se clasifican en a) *Sistemas discretos* y b) *Sistemas continuos*.

CICLO.- Serie de movimientos que realiza el sistema vibratorio y que culmina al retornar o pasar por su posición original.

PERIODO.- Es el tiempo que tarda el sistema vibratorio en completar un ciclo de su movimiento oscilatorio.

FRECUENCIA NATURAL.- Es el número de ciclos del movimiento oscilatorio que efectúa el sistema en un segundo.

AMORTIGUAMIENTO.- Es la pérdida de energía por causa de fricciones internas o externas

y ocasiona que la amplitud de la vibración decrezca. Constituye una fuerza que se opone al movimiento. Tipos de amortiguamiento:

a) *Amortiguación viscosa.*- Se produce cuando el sistema vibra dentro de un fluido. La amplitud del movimiento oscilatorio decrece exponencialmente.

$$F_D = c x' \quad \dots (3.1)$$

F_D -fuerza amortiguadora

c -constante de proporcionalidad viscosa

x' -velocidad de la masa del cuerpo

b) *Amortiguación por fricción.*-Se produce cuando el cuerpo se mueve sobre una superficie seca. La amplitud decrece linealmente.

$$F_D = \mu N \quad \dots (3.2)$$

μ -coeficiente de fricción

N -fuerza normal a la superficie de deslizamiento

c) *Amortiguación Estructural.*-Se genera cuando la energía del sistema se pierde por fricciones internas en el material.

$$F_D = i \rho P E \quad \dots (3.3)$$

i -unidad imaginaria

$P E$ -fuerzas elásticas internas

ρ -constante de proporcionalidad estructural (generalmente = 0.05 ^[ref.1])

FUERZA EXCITATRIZ.- Es la fuerza que inyecta energía a un sistema oscilatorio y puede ser: a) *Armónica*, b) *en la base*, c) *por impulsos*, d) *arbitraria*.

GRADOS DE LIBERTAD (G.L.).- a) Dinámicamente es el número de coordenadas independientes necesarias para describir la posición de un cuerpo oscilante en un momento dado.

b) Estáticamente es el número de desplazamientos que se eligen para definir el perfil deformado de una estructura. Son las componentes de los desplazamientos nodales.

3.1.1.- SISTEMAS DISCRETOS.

SISTEMA DISCRETO.- Las masas y elasticidades de los cuerpos oscilatorios, están segregadas y concentradas en uno o diversos elementos. Se subdividen en:

I) **SISTEMA DISCRETO SIMPLE, SENCILLO O DE 1 G.L.**- Tiene sólo un grado de libertad y una masa que se puede concentrar en un sólo elemento como se indica en la figura 3.1.

II) **SISTEMA DISCRETO COMPUESTO O DE VARIOS G.L.**- Tiene masas concentradas en más de un punto y posee más de un grado de libertad, ver figura 3.2.

3.1.2.- SISTEMAS CONTINUOS.

SISTEMA CONTINUO.- Aquel sistema en el que las masas y elasticidades están distribuidas en todo el cuerpo oscilante, obsérvese la figura 3.3.

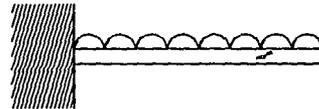
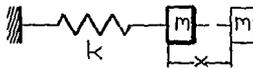


Figura 3.3. Sistema continuo

Para todo sistema oscilatorio los casos básicos de interés resultan de la combinación de:

- a) Una fuerza excitatriz que puede obrar de una forma continua y sostenida sobre la masa del sistema (denominada vibración forzada), o que puede actuar sólo una vez desplazando la masa fuera de su posición original de equilibrio estático, iniciando así la oscilación (llamada vibración libre), y b) La existencia o no de amortiguamiento que disipe la energía cinética extinguiendo el movimiento.



k-rigidez del sistema
m-masa del cuerpo oscilante
x-desplazamiento de la masa

Figura 3.1. Sistema discreto simple de 1 G.L.

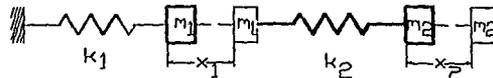


Figura 3.2. Sistema discreto compuesto de 2 G.L.

3.2- OSCILACIONES EN SISTEMAS DISCRETOS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

DISCRETIZACION DE MASAS EN ELEMENTOS DE SOPORTE

Los elementos de soporte (columnas, muros, etc), de una estructura que pueda modelarse como un sistema simple, físicamente son sistemas continuos; pero para facilidad en la solución de problemas, en la práctica se usa un "criterio de discretización de masas" que considera que la mitad de la masa del soporte (incluyendo elementos no estructurales que se apoyen en él), se concentra en la parte superior del mismo.

3.2.1.- VIBRACION LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO.

El modelo mostrado en la figura 3.1, representa un sistema discreto en el cual la masa del cuerpo oscilante está concentrada en un extremo, y la rigidez u oposición que ofrece el sistema a sufrir desplazamientos está representada por un resorte. Una fuerza excitatriz actúa sólo una vez desplazan-

do la masa de su posición original de equilibrio estático una distancia x , al dejar de obrar esta fuerza, la fuerza restauradora ejercida por el resorte tiende a regresar a la masa a su posición inicial; durante este movimiento de retorno se genera una fuerza de inercia que obliga a la masa a desplazarse más allá de dicho punto, estableciéndose así un ciclo que se repite indefinidamente debido a la ausencia de amortiguamiento en el sistema.

Se genera así el equilibrio dinámico, con el diagrama de cuerpo en libertad mostrado en la figura 3.4, de donde se deducen las expresiones:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{Ecución del movimiento libre no amortiguado} \quad \dots\dots(3.4)$$

cuya solución es [ref.1],

$$x = x_0 \cos \omega t + (x'_0 / \omega) \sin \omega t \quad \dots\dots(3.5)$$

- ω -frecuencia circular no amortiguada [rad/seg]
- x_0 -desplazamiento inicial de la masa [m]
- t -tiempo [seg]
- T -periodo del sistema [seg]
- f -frecuencia natural del sistema [ciclos/seg, Hertz]

con:

$$\omega = [k/m]^{0.5} \quad \dots\dots(3.6)$$

$$T = 2\pi/\omega \quad \dots\dots(3.7)$$

$$f = 1/T \quad \dots\dots(3.8)$$

P_r -fuerza restauradora del resorte [ton]

P_i -fuerza de inercia [ton]

x -desplazamiento de la masa [m]

\ddot{x} -aceleración de la masa [m/s²]

m -masa del cuerpo oscilante [ton-seg²/m]

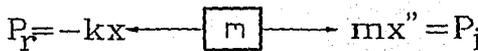


Figura 3.4. Diagrama de cuerpo libre del sistema discreto simple de la figura 3.1.

3.2.1.1.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Deducir las expresiones que describen el movimiento libre no amortiguado de un sistema vibratorio discreto de un grado de libertad (G.L.).

Refiriéndonos al sistema mostrado en la figura 3.1 (Inciso 3.1.1.); una fuerza excitatriz que actúa sólo una vez, perturba el equilibrio estático del estado de reposo, el resorte de rigidez "k" se opone al desplazamiento "x" mediante la generación de una Fuerza restauradora "P_r", que tiende a regresar la masa "m" del cuerpo oscilatorio a su posición inicial. Durante este retorno la aceleración que se imprime a la masa produce una Fuerza de Inercia "P_i", que la empuja más allá del punto inicial y en dirección opuesta.

Al no existir amortiguamiento en el sistema, se establece un ciclo oscilatorio de duración infinita cuyo equilibrio dinámico se muestra en el diagrama de cuerpo en libertad de la figura 3.4 (Inciso 3.2.1.).

La fuerza restauradora del resorte P_r es igual al producto de su rigidez k por el desplazamiento x de la masa m:

$$P_r = -kx \quad \dots(a)^*$$

La fuerza de Inercia P_i es igual al producto de la masa m por la aceleración x" (2a. Ley de Newton):

$$P_i = mx'' \quad \dots(b)$$

P_i y P_r son fuerzas que se oponen entre sí, por tanto del equilibrio dinámico de la figura 3.4

$$P_i = P_r \quad \dots(c)$$

sustituyendo (a) y (b) en (c)

$$-kx = mx''$$

de donde

$$mx'' + kx = 0 \quad \dots(3.4)$$

Ecuación del movimiento libre no amortiguado

de la ecuación (3.4)

$$x'' = -kx/m \quad \dots(d)$$

esta ecuación indica que la 2a. derivada de x con respecto al tiempo t, es igual a sí misma con signo opuesto, una posible solución puede estar dada por:

donde:

$$x = A \cos wt \quad \dots(e)$$

A, w = son constantes

A=amplitud de onda

w=frecuencia angular o circular

* El signo menos (-) se usa debido a que P_r y x de la figura 3.1 son de sentido contrario.

1a. derivada de (e) $x' = -Aw\text{sen}wt$... (f)

2a. derivada de (e) $x'' = -Aw^2\text{cos}wt$... (g)

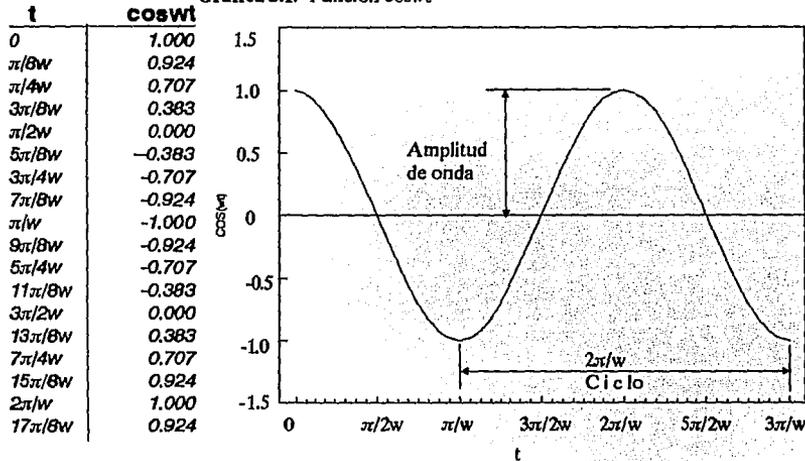
por tanto (e) cumple con el requisito mencionado en el párrafo anterior.

sustituyendo (g) y (e) en (d) $-Aw^2\text{cos}wt = -(k/m)A\text{cos}wt$... (h)

de donde $w^2 = k/m$... (i) y: $w = [k/m]^{0.5}$ (3.6)

Graficando la función $\text{cos}wt$ para valores de t en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi/w$:

Gráfica 3.1. Función $\text{cos}wt$



T: Se observa que dicha función repite su ciclo cada $2\pi/w$, por tanto de la definición de periodo $T = 2\pi/w$ (3.7)

De la definición de frecuencia natural f , y periodo T : $f = 1/T = w/(2\pi)$ (3.8)

De la ecuación (d) $x'' + kx/m = 0$

sustituyendo (i) $x'' + w^2x = 0$... (j)

La ecuación (j) es una ecuación diferencial lineal de 2o.orden cuya solución en función del tiempo asume la forma:

$$x = e^{rt} \quad \text{donde: } r = \text{una constante} \quad \dots (k)$$

1a. derivada de (k) $x' = re^{rt} \quad \dots (l)$

2a. derivada de (l) $x'' = r^2 e^{rt} \quad \dots (m)$

sustituyendo (k) y (m) en (j) $r^2 e^{rt} + w^2 e^{rt} = 0$

factorizando $(r^2 + w^2) e^{rt} = 0$

dividiendo ambos miembros entre e^{rt} $r^2 + w^2 = 0 \quad \dots (n)$

$$r^2 = -w^2$$

de donde $r_{1,2} = \pm[-w^2]^{0,5} = \pm wi \quad i = \text{unidad imaginaria} = [-1]^{0,5}$

por tanto $r_1 = wi$ y $r_2 = -wi$ son soluciones o raíces de (n)

se deduce que (k) si es solución de (j) y tiene dos partes, puesto que existen dos valores de r:

$$x = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t} = Ce^{wit} + De^{-wit} \quad \dots (o)$$

donde: C,D = son constantes

Solución general de la ecuación del movimiento libre no amortiguado

Recordando las fórmulas de Euler^[ref.5]:

$$e^{\pm wit} = \cos wt \pm i \sin wt$$

la ecuación (o) puede escribirse

$$x = C[\cos wt + i \sin wt] + D[\cos wt - i \sin wt]$$

$$x = C \cos wt + D \cos wt + C i \sin wt - D i \sin wt =$$

$$= (C + D) \cos wt + (C - D) i \sin wt$$

tomando $A_0 = C + D$ y $B_0 = (C - D) i$ (por ser todas constantes)

A_0, B_0 -constantes que dependen de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad

por tanto

$$x = A_0 \cos wt + B_0 \sin wt \quad \dots (p)$$

Determinación de A_0 y B_0 :

de (p) para $t = 0$

$$x_0 = A_0 \cos(0) + B_0 \sin(0)$$

x_0 -desplazamiento inicial de la masa

$$x'_0 = A_0 \dots (q)$$

x'_0 -velocidad inicial de la masa

derivando (p)

$$x' = -wA_0 \text{sen}wt + wB_0 \text{cos}wt$$

para $t=0$

$$x'_0 = -wA_0 \text{sen}(0) + wB_0 \text{cos}(0)$$

de donde

$$B_0 = x'_0/w \quad \dots(r)$$

Sustituyendo (q) y (r) en (p)

$$x = x_0 \text{cos}wt + (x'_0/w) \text{sen}wt \quad \dots(3.5)$$

Solución de la ecuación del movimiento libre no amortiguado

II.- La estructura de la cubierta de una estación expendedora de gasolina consiste del cascarón tipo paraguas invertido mostrado en la figura 3.5, constituido por 4 paraboloides hiperbólicos soportados por una columna central única. Se ha calculado que la carga soportada por la cubierta (carga muerta (incluido peso propio) más carga viva), es de $W=200[\text{kg}/\text{m}^2]$, siendo el área de cada paraboloide de $A=20.5[\text{m}^2]$. Toda la estructura fue colada con concreto de peso normal de $f'c=300[\text{kg}/\text{cm}^2]$. Suponiendo que no existe amortiguamiento y que el efecto de coseo o chicoteo de la cubierta es despreciable (lo cual reduce el problema a un modelo de 1 G.L.), determinar: a) La ecuación del movimiento libre no amortiguado, b) La frecuencia angular o circular; c) La frecuencia natural; d) El período de oscilación; e) Los desplazamientos de la cubierta para $t=0, T/8, T/4, 3T/8, T/2, 5T/8, 3T/4, 7T/8, T, 9T/8$ y $5T/4$; si ésta es desplazada de su posición de reposo (equilibrio estático), por una ráfaga de viento que produce una carga resultante horizontal de 4[ton], actuando sólo por un instante de tiempo; f) Comprobar gráficamente que siempre que el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración es máxima pero de sentido contrario a aquel.

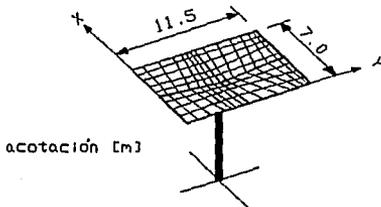


Figura 3.5. Cascarón tipo Paraguas Invertido

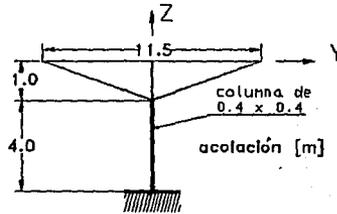


Figura 3.6. Elevación

a) Ecuación del movimiento de vibración libre sin amortiguamiento:

La estructura puede idealizarse para su análisis mediante el "péndulo invertido" de la figura 3.7, en donde se tiene un sistema discreto de 1 G.L., y el resorte restaurador de la figura 3.1 (inciso 3.1.1.), ha sido sustituido por la columna de rigidez transversal k

El peso Q de un parabolode en el cascarón es

$$Q = WA = 200[\text{kg/m}^2](20.5[\text{m}^2]) = 4100[\text{kg}]$$

El peso total P_1 de la cubierta es

$$P_1 = 4Q = 4(4100) = 16400[\text{kg}] = 16.4 [\text{ton}]$$

Aplicando el criterio mencionado en el inciso 3.2., el peso de la columna es

$$P_2 = (0.4)[\text{m}](0.4)[\text{m}](4)[\text{m}](2400)[\text{kg/m}^3]/2 = 768 [\text{kg}] \approx 0.8[\text{ton}]$$

$$P = P_1 + P_2 = 16.4 + 0.8 = 17.2 [\text{ton}]$$

sabemos que $P = mg$ $m = \text{masa}$; $g = 9.80665[\text{m/s}^2]$

por tanto (a)... $m = P/g = 17.2[\text{ton}]/9.80665[\text{m/s}^2] = 1.753912[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}]$

Para una viga en voladizo la rigidez k vale [ref.6]

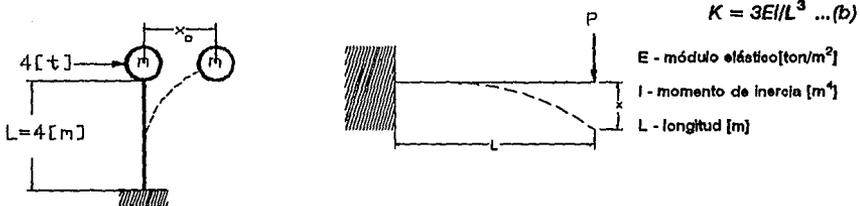


Figura 3.7. Péndulo invertido que representa a la figura 3.5.

Para concreto de peso normal ($2.4[\text{ton/m}^2]$), y $f'_c \geq 250 [\text{kg/cm}^2]$, el RCDF-93^[ref.4], indica estimar E como

$$E = 14000[f'_c]^{0.5} = 14000[300]^{0.5} = 242487[\text{kg/cm}^2]$$

$$E = (242487 \text{ kg/cm}^2)(1 \text{ ton}/1000 \text{ kg})(10^4 \text{ cm}^2/1 \text{ m}^2) =$$

$$E = 2424870 [\text{ton/m}^2] \quad \dots(c)$$

El momento de inercia de la columna vale

$$I = bh^3/12 = (0.4\text{m})(0.4\text{m})^3/12 = 21.3333(10^{-4})[\text{m}^4] \quad \dots(d)$$

sustituyendo (c) y (d) en (b)

$$k = (3)(2424870)[\text{ton/m}^2](21.3333)(10^{-4})[\text{m}^4]/(4\text{m})^3 =$$

$$k = 242.4866 [\text{ton/m}] \quad \dots(e)$$

por tanto de la ec. (3.4) (inciso 3.2.1)

$$mx'' + kx = 0$$

sustituyendo (a) y (e)

$$1.753912x'' + 242.4866x = 0 \quad \dots(f)$$

Ecuación del movimiento libre no amortiguado

b) Frecuencia angular o circular (w) :

de la ec.(3.6)

$$w = [k/m]^{0.5} = \{ [242.4866[\text{ton}/\text{m}] / 1.753912[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}]] \}^{0.5} = 11.758[\text{rad}/\text{seg}] \quad \dots(g)$$

c) Frecuencia natural (f) :

de las ecs.(3.7) y (3.8)

$$f = 1/T = 1/(2\pi/w) = w/(2\pi) = 11.758[\text{rad}/\text{seg}]/(2\pi) = 1.871[\text{ciclos}/\text{seg}] = 1.871[\text{hertz}] \quad \dots(h)$$

d) Período de oscilación (T) :

de la ec.(3.8)

$$T = 1/f = 1/1.871[\text{hertz}] = 0.535[\text{seg}] \quad \dots(i)$$

e) Desplazamientos (x) de la cubierta debidos a una carga horizontal de 4[ton] :

El desplazamiento inicial x_0 en el instante $t=0$, corresponde al desplazamiento estático producido por la carga resultante de viento de 4[ton], actuando horizontalmente en la masa m , ver figura 3.7

La deflexión del extremo libre de un cantilever es ^[ref.8] :

$$x_0 = PL^3/(3EI) = P/k = 4[\text{ton}]/242.4866[\text{ton}/\text{m}] = 0.0165[\text{m}] \quad \dots(j)$$

Cuando la carga de 4[ton] deja de obrar la masa m alcanza su desplazamiento máximo x_0 , y tiende a retornar a su posición inicial invirtiendo el sentido de su desplazamiento y para ese instante su velocidad x' vale

$$x'_0 = 0 \quad \dots(k)$$

Las expresiones para el desplazamiento (x), la velocidad (x') y la aceleración (x'') del sistema estructural son

de la ecuación $x = x_0 \cos wt + (x'_0/w) \text{sen} wt \quad \dots(3.5)$

1a.derivada de (3.5) $x' = -wx_0 \text{sen} wt + x'_0 \cos wt \quad \dots(m)$

2a.derivada de (3.5) $x'' = -w^2 x_0 \cos wt - wx'_0 \text{sen} wt \quad \dots(n)$

sustituyendo (j), (k) y (g) en las anteriores ecuaciones

$$x = 0.0165 \cos(11.758t) \quad \dots(o)$$

$$x' = -(11.758)(0.0165) \text{sen}(11.758t) = -0.194007 \text{sen}(11.758t) \quad \dots(p)$$

$$x'' = -(11.758)^2(0.0165)\cos(11.758t) = -2.281134306\cos(11.758t) \quad \dots(q)$$

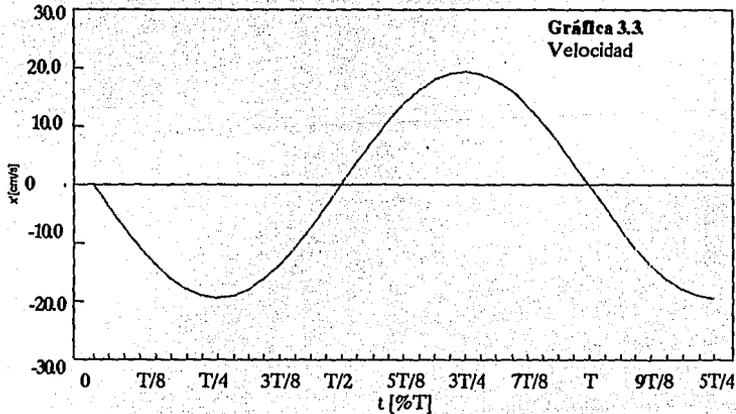
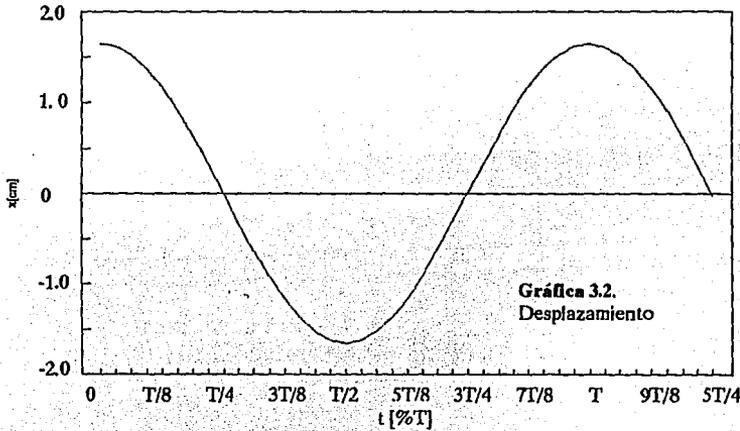
Tabulando las ecs. (o), (p) y (q) para los tiempos pedidos se obtiene:

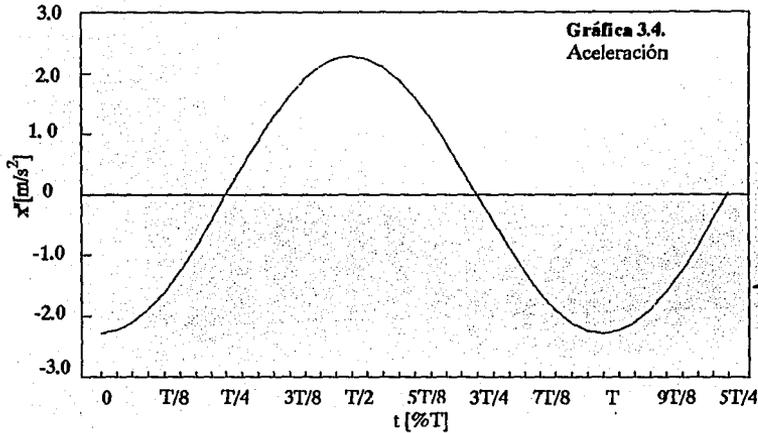
Tabla 3.1

t[seg]	0.00	0.0669	0.1338	0.2006	0.2675	0.3344	0.4013	0.4681	0.5350	0.6019	0.6688
t[%T]	0.0T	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T	9T/8	5T/4
x[m]	0.0165	0.0117	0.0000	-0.0117	-0.0165	-0.0117	0.0000	0.0117	0.0165	0.0117	0.0000
x'[m/s]	0.00	-0.1373	-0.1940	-0.1368	0.00	0.1378	0.1940	0.1383	0.00	-0.1383	-0.1940
x''[m/s ²]	-2.281	-1.612	0.00	1.617	2.281	1.606	0.00	-1.623	-2.281	-1.600	0.00

f) Gráficas de desplazamiento (x), velocidad (x') y aceleración (x'') del sistema oscilatorio:

Graficando los valores tabulados en el inciso anterior





Se observa que cuando el desplazamiento es máximo, la aceleración es máxima pero de sentido contrario a éste, y la velocidad es cero.

Sustituyendo los valores de desplazamiento y aceleración de la tabla en la ecuación (f), se comprueba que éstos la satisfacen para todo intervalo de tiempo t .

III.-Para el cruce de peatones sobre una carretera, se ha construido el puente con estructura de concreto de la figura 3.8, el cual está formado por una trabe presforzada de sección T tipo cajón, simplemente apoyada en dos columnas extremas de sección rectangular de concreto reforzado, rematadas con un capitel cuya función es impedir el movimiento lateral de la trabe. El patín superior de ésta, vuela a los lados con objeto de servir de piso terminado o andador del paso peatonal. El concreto es de peso normal con $\Gamma_c = 300[\text{kg}/\text{cm}^3]$. Suponiendo que no existe amortiguamiento, determinar: a) La ecuación del movimiento libre no amortiguado, b) La frecuencia angular o circular; c) La frecuencia natural; d) El período de oscilación; e) Las ecuaciones que describen las respuestas de aceleración, velocidad y desplazamiento del sistema, si la trabe sufre una aceleración máxima de $17[\text{m}/\text{s}^2]$. Obtener las gráficas de las citadas respuestas del sistema.

Realizar el análisis en dirección paralela al eje longitudinal de la trabe (eje Z).

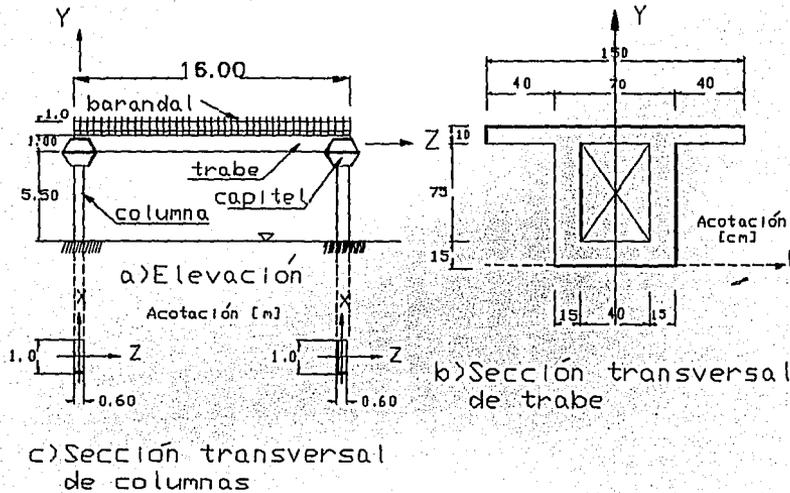


Figura 3.8. Puente peatonal

a) Ecuación del movimiento libre no amortiguado:

Area transversal de la trabe (figura 3.8b)

$$A = A_I + A_{II} - A_{III} = (1.5m)(0.1m) + (0.7m)(0.8m) - (0.4m)(0.75m) =$$

$$A = 0.15 + 0.63 - 0.3 = 0.48[m^2] \quad \dots(a)$$

carga muerta por peso propio $CM = \gamma_c A = 2.4[ton/m^3][(0.48)[m^2]] = 1.152[ton/m]$... (b)
 γ_c -peso volumétrico del concreto

carga viva instantánea (RCDF-93^[ref.4])

$$CV = 150[kg/m^2](1.5)[m] = 225[kg/m] =$$

$$CV = 0.225[ton/m] \quad \dots(c)$$

Peso total (W) de la trabe

$$W = CV + CM = 0.225 + 1.152 = 1.377[ton/m]$$

masa de la trabe $m = W/g = 1.377[ton/m]/9.80665[[m/s^2]] = 0.1404[ton \cdot s^2/m]$... (d)

Características de las columnas (la columna se flexionará alrededor del eje X)

momento de inercia $I = \bar{I}_x = bh^3/12 = (1)(0.6^3)/12 = 0.018[m^4]$... (e)

rigidez (la columna se comporta como viga en cantilever) [ref.6]

$$k = k_z = 3EI/L^3 \quad \dots(f)$$

para concreto de peso normal, el RCDF [ref.4], indica estimar E como

$$E = 14000[f'c]^{0.6} = 14000[300]^{0.6} = 242487[\text{kg/cm}^2] = 2424870[\text{ton/m}^2] \quad \dots(g)$$

sustituyendo (e) y (g) en (f)

$$k_z = 3(2424870)[\text{ton/m}^2](0.018)[\text{m}^4]/(5.5\text{m})^3 =$$

$$k_z = 787.04[\text{ton/m}] \quad \dots(h)$$

Peso de la mitad de las 2 columnas que se supone concentrado en la parte superior

$$W_{col} = (0.6)[\text{m}](1)[\text{m}](5.5)[\text{m}](2.4)[\text{ton/m}^3](2)/2 = 7.92[\text{ton}]$$

El diagrama de cuerpo libre del puente peatonal se muestra en la figura 3.9, con la trabe simplemente apoyada sobre las columnas. Debido a los capiteles que restringen los desplazamientos horizontales de la trabe, ésta para desplazarse debe vencer la rigidez k_z de ambas columnas, por lo que el sistema puede idealizarse como en la figura 3.10 por uno discreto simple con rigidez igual a $2k_z$ y con una masa m de:

$$\text{masa de las columnas } m_{col} = W_{col}/g = 7.92[\text{ton}]/9.80665[\text{m/s}^2] = 0.8076[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}] \quad \dots(i)$$

$$\text{de las ecuaciones (d) e (i)} \quad m_{trabe} = 0.1404[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}]/(16)[\text{m}] = 2.2464[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}]$$

$$m = m_{trabe} + m_{col} = 2.2464 + 0.80762 = 3.054[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}] \quad \dots(j)$$

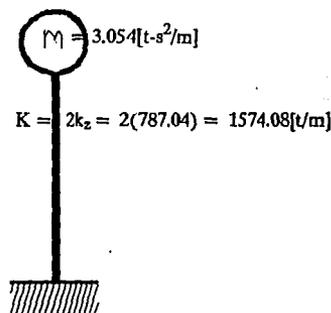
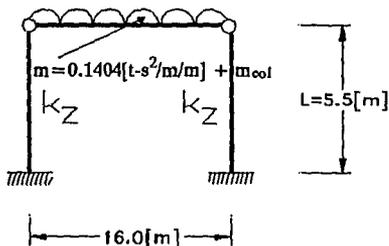


Figura 3.9. Diagrama de cuerpo libre del puente peatonal de la figura 3.8.

Figura 3.10. Sistema discreto simple que representa a la figura 3.9.

por lo tanto en la ecuación $mx'' + kx = 0$ (3.4)

sustituyendo m y k $3.054x'' + 1574.08x = 0$... (k)

b) Frecuencia angular o circular (w)

de la ec.(3.8)

$$w = [k/m]^{0.5} = \{ 1574.08[t/m]/3.054[t-s^2/m] \}^{0.5} = 22.7, \quad w = 22.7 \text{ [rad/seg] } \dots(m)$$

c) Frecuencia natural (f)

de la ec.(3.8) y (3.7)

$$f = 1/T = w/2\pi = 22.7 \text{ [rad/seg]} / (2\pi) = 3.613 ;$$

$$f = 3.613[\text{ciclos/seg}] = 3.613[\text{hertz}] \dots(n)$$

d) Período de oscilación (T)

$$\text{de la ec. (3.8)} \quad T = 1/f = 1/3.613[\text{hertz}] = 0.2768 ; \quad T = 0.2768[\text{seg}] \dots(o)$$

e) Respuestas del sistema oscilatorio

Tomando el sentido de la aceleración inicial como negativo, de la ec. (k) del movimiento, el desplazamiento máximo provocado es

$$x_0 = x_{\max} = -3.054x''_0/1574.08 = -3.054(-17)[t-s^2/m][m/s^2]/1574.08[t/m] =$$

$$x_0 = 0.033[m] \dots(p)$$

de la ec. (3.5) la respuesta de desplazamiento (x) es

$$x = x_0 \cos wt + (x'_0/w) \sin wt \quad \dots(3.5)$$

Derivando (3.5) la respuesta de velocidad (x') es

$$x' = -wx_0 \sin wt + x'_0 \cos wt \quad \dots(q)$$

derivando (q) la respuesta de aceleración (x'') es

$$x'' = -w^2 x_0 \cos wt - wx'_0 \sin wt \quad \dots(r)$$

En el problema II se mostró que cuando el desplazamiento es máximo la velocidad vale cero, por tanto

$$x'_0 = 0 \quad \dots(s)$$

Sustituyendo (m), (p) y (s) en (3.5), (q) y (r) se tiene

$$x = 0.033 \cos(22.7t) \quad \dots(f)$$

$$\dot{x} = -(22.7)(0.033) \sin(22.7t) = -0.7491 \sin(22.7t) \quad \dots(u)$$

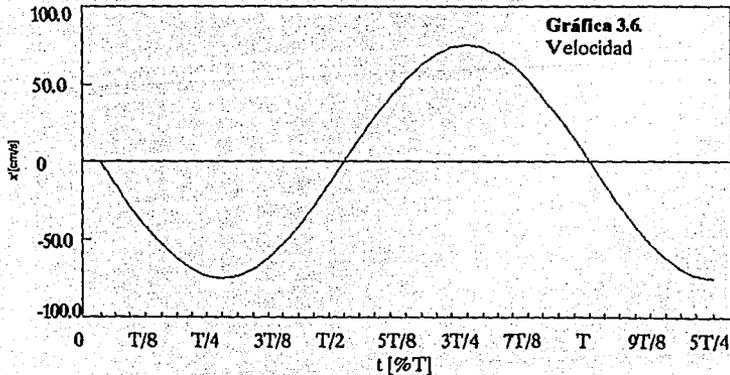
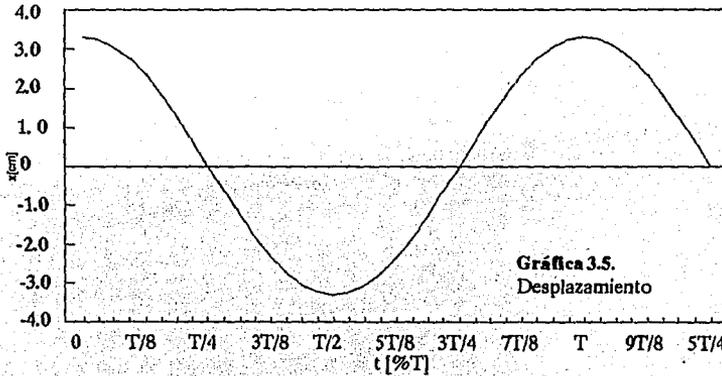
$$\ddot{x} = -(22.7)^2(0.033) \cos(22.7t) = -17 \cos(22.7t) \quad \dots(v)$$

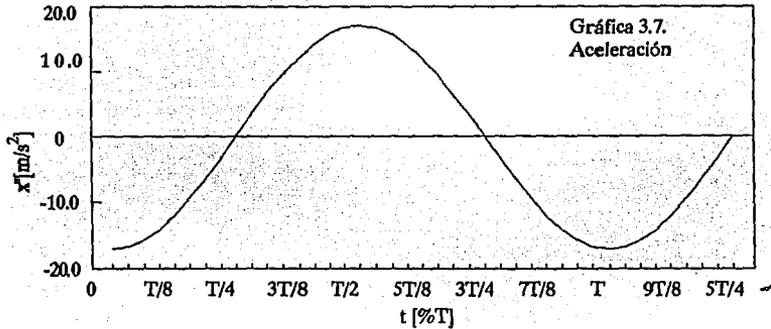
tabulando las ecuaciones anteriores

Tabla 3.2

t[seg]	0.00	0.0348	0.0692	0.1038	0.1384	0.1730	0.2076	0.2422	0.2768	0.3114	0.3460
t[%T]	0.0T	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T	9T/8	5T/4
x[m]	0.0330	0.0233	0.00	-0.0233	-0.0330	-0.0233	0.00	0.0233	0.0330	0.0233	0.00
\dot{x} [m/s]	0.00	-0.5297	-0.7491	-0.5297	0.00	0.5298	0.7491	0.5298	0.00	-0.5298	-0.7491
\ddot{x} [m/s ²]	-17.00	-12.02	0.000	-12.02	17.00	12.02	0.00	-12.02	-17.00	-12.02	0.00

Graficando estos valores se tiene:





IV.- Resuélvase el problema III para el caso en que las uniones entre trabe y capitel de las columnas, constituyan un nudo rígido (monolíticamente colado).

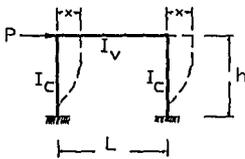


Figura 3.11. Marco rígido.

con

a) Ecuación del movimiento libre no amortiguado:

En este caso la estructura del puente peatonal constituye un marco rígido como el de la figura 3.11, en los cursos de Análisis Estructural se demuestra que para un marco de este tipo la rigidez k ante el desplazamiento horizontal vale

$$k = 6EI_c(\phi + 6)/[h^3(\phi + 1.5)] \dots (a)$$

donde: E - módulo elástico

I_v - momento inercia viga

I_c - momento inercia columna

ϕ - rigidez relativa

$$\phi = I_c L / (I_v h)$$

... (b)

Características de la trabe:

Centroide.- Dividiendo la sección transversal de la trabe (ver figura 3.8 de problema III y figura 3.12), en tres figuras rectangulares: I- El patín, II- El alma y III- El hueco del alma; se tiene

Figura	A[m²]	\bar{y} [m]	$\bar{y}A$ [m³]
I	0.15	0.95	0.1425
II	0.63	0.45	0.2835
III	-0.30	0.525	-0.1575
Suma	0.48		0.2685

TABLA I.

$\bar{Y}A = \sum \bar{y}A_i$, de la tabla I y despejando se tiene $\bar{Y} = \sum \bar{y}A_i / A = 0.2685[m^3] / 0.48[m^2] =$

$$\bar{Y} = 0.56[m] \quad Area = A = 0.48[m^2] \quad \dots (c)$$

donde: \bar{y} - distancia del centroide de la Figura al eje 1

A - área sección transversal

\bar{Y} - distancia del centroide de la trabe al eje 1

Momento de Inercia.- La viga se flexionará alrededor del eje X mostrado en la figura 3.12, por tanto de la Tabla II

$$I_x = \bar{I}_{XT} = 0.058657[m^4] \dots (d)$$

En el problema III se calculó

$$I_c = \bar{I}_x = 0.018[m^4] \dots (e)$$

$$E = 2424870[\text{ton}/m^2] \dots (f)$$

$$m = 3.054[\text{ton}\cdot s^2/m]$$

para este caso la longitud L de la viga medida centro a centro de las columnas es según las figuras 3.11 y 3.8

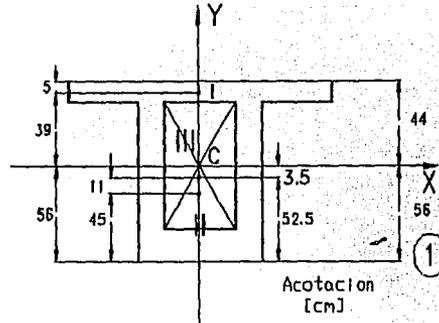


Figura 3.12. Centroide de la trabe (C)

$$L = 16[m] - 0.6[m] = 15.4[m] \dots (h)$$

la altura h de las columnas desde el nivel de arroyo hasta el centroide de la trabe vale

$$h = 5.5[m] + 0.56[m] = 6.06[m] \approx 6[m] \dots (i)$$

Figura	A[m ²]	$\bar{I}_x[m^4]$	d[m]	Ad ² [m ⁴]	$I_x[m^4]$
I	0.15	0.000125	0.39	0.022815	0.022940
II	0.83	0.042525	0.11	0.007823	0.050148
III	-0.30	0.014063	-0.035	-0.000368	-0.014431
Suma				$I_{XT} =$	0.058657

En la tabla II: $\bar{I}_x = bh^3/12$

d-distancia del centroide de la figura al eje X

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$

$$\bar{I}_{XT} = \sum I_x$$

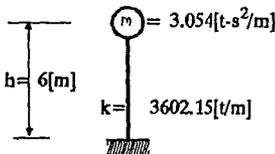
TABLA II.

Sustituyendo (d), (e), (h) e (i) en (b)

$$\phi = (0.018m^4)(15.4m) / [(0.059m^4)(6.0m)] = 0.7831 \dots (j)$$

sustituyendo (f), (e), (i) y (j) en (a)

$$k = (6)(2424870\text{ton}/m^2)(0.018m^4)(0.7831 + 6) / [(6m)^3(0.7831 + 1.5)] = 3602.15$$



$$k = 3602.15 [\text{ton}/m] \dots (k)$$

Por tanto tenemos el sistema discreto simple de la figura 3.13, cuya ecuación del movimiento libre no amortiguado es

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Figura 3.13. Sistema discreto simple que representa a la figura 3.11.

$$3.054\ddot{x} + 3602.15x = 0 \dots (m)$$

b) Frecuencia angular o circular (w)

de la ec. (3.6)

$$w = [k/m]^{0.5} = [3602.15[t/m]/3.054[t \cdot s^2/m]]^{0.5} =$$

$$w = 34.344 \text{ [rad/seg]} \quad \dots(n)$$

c) Frecuencia natural (f)

de la ec. (3.8) y (3.7) $f = 1/T = w/(2\pi) = 34.344[\text{rad/s}]/2\pi =$

$$f = 5.466 \text{ [ciclos/seg]} = 5.466 \text{ [hertz]} \quad \dots(o)$$

d) el período de oscilación (T)

de la ec. (3.8)

$$T = 1/f = 1/5.466 \text{ [hertz]} = 0.18295 \text{ [seg]} \quad \dots(p)$$

e) Respuestas del sistema oscilatorio

Tomando el sentido de la aceleración inicial como negativo, de la ec. (m) del movimiento, el desplazamiento máximo provocado es

$$x_0 = x_{\max} = -3.054x''_0/3602.15 = -3.054(-17)/3602.15 = 0.0144[m] = 1.44 \text{ [cm]}$$

$$x_0 = 0.0144 \text{ [m]} \quad \dots(q)$$

de la ec. (3.5) la respuesta de desplazamiento (x) es

$$x = x_0 \cos wt + (x'_0/w) \sin wt \quad \dots(3.5)$$

derivando (3.5) la respuesta de velocidad (x') es

$$x' = -wx_0 \sin wt + x'_0 \cos wt \quad \dots(r)$$

derivando (r) la respuesta de aceleración (x'') es

$$x'' = -w^2 x_0 \cos wt - wx'_0 \sin wt \quad \dots(s)$$

En el problema II se mostró que cuando el desplazamiento es máximo la velocidad vale cero, ya que la masa debe detenerse para poder invertir la dirección de su desplazamiento, por tanto

$$x'_0 = 0 \quad \dots(t)$$

Sustituyendo (n), (q) y (t) en (3.5), (r) y (s) se tiene

$$x = 0.0144 \cos(34.344t) \quad \dots(u)$$

$$x' = -34.344(0.0144)\text{sen}(34.344t) = -0.4946\text{sen}(34.344t) \quad \dots(v)$$

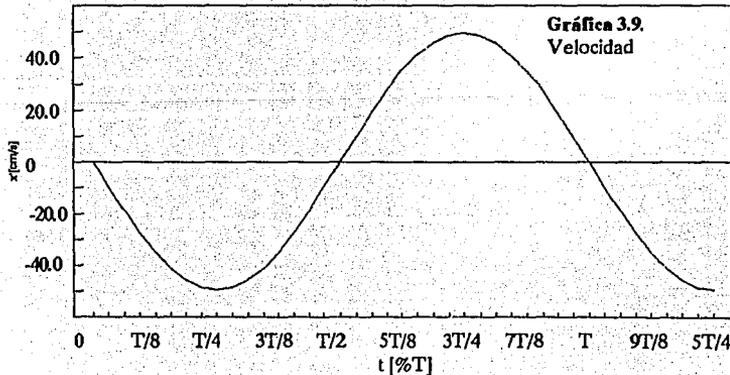
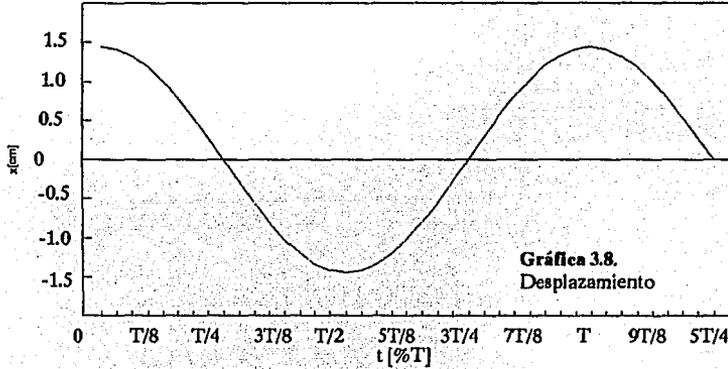
$$x'' = -(34.344)^2(0.0144)\text{cos}(34.344t) = -17\text{cos}(34.344t) \quad \dots(w)$$

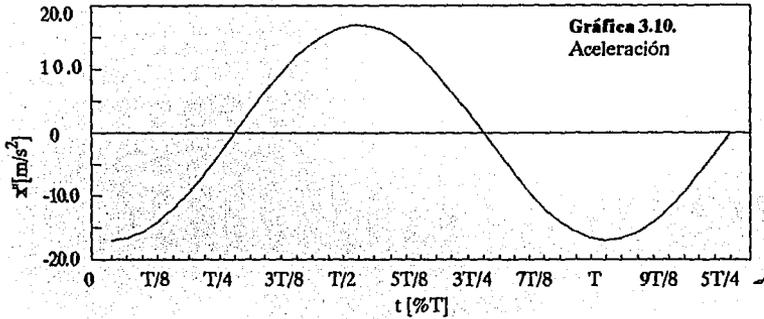
tabulando las ecuaciones anteriores

Tabla 3.3

t[seg]	0.00	0.0229	0.0457	0.0686	0.0915	0.1143	0.1372	0.1601	0.1830	0.2058	0.2287
t[%T]	0.0T	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T	9T/8	5T/4
x[m]	0.0144	0.0102	0.00	-0.0102	-0.0144	-0.0102	0.00	0.0102	0.0144	0.0102	0.00
x'[m/s]	0.00	-0.3497	-0.4946	-0.3497	0.00	0.3497	0.4946	0.3497	0.00	-0.3497	-0.4946
x''[m/s ²]	-17.00	-12.02	0.00	12.02	17.00	12.02	0.00	-12.02	-17.00	-12.02	0.00

Graficando estos valores se tiene:





V.-El andador de acceso a una escuela tiene una cubierta constituida por una losa de concreto que se apoya simplemente sobre marcos de concreto espaciados a cada 5[m] como se indica en la figura 3.14. Se requiere que el sistema estructural tenga un período de vibración T de 0.2[seg] en dirección Y . Suponiendo que no existe amortiguamiento determinar*: a) La longitud de las columnas del marco; b) La ecuación del movimiento libre no amortiguado; c) Si para el tiempo $t=0.025$ [seg] de iniciado el movimiento oscilatorio la aceleración vale $x'' = -15$ [m/s²], determinar la magnitud de la fuerza lateral que desplazó la masa del sistema e inició la vibración; d) Las respuestas de desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema para $t=0, T/8, T/4, 3T/8, T/2, 5T/8, 3T/4, 7T/8, T, 9T/8$ y $5T/4$.

a) Longitud de las columnas

de la figura 3.14a el área tributaria de un marco es $A = (5)(3.0) = 15$ [m²]

por tanto el peso de la losa para este marco es $W_{losa} = V\gamma_c \dots (a)$

$$V = At \dots (b)$$

sustituyendo en (b) $V = (15m^2)(0.09m) = 1.35$ [m³]

sustituyendo en (a)

$$W_{losa} = (1.35m^3)(2.4[ton/m^3]) = 3.24[ton] \dots (c)$$

V-volumen
 γ_c -peso volumétrico del concreto = 2.4[t/m³]
 t =espesor de losa

De la figura 3.14d el volumen de la trabe del marco es

$$V_t = (0.15m)(0.3m)(3.3m) = 0.148$$
[m³]

y el peso de la trabe $W_{trabe} = V_t\gamma_c = (0.148m^3)(2.4[ton/m^3]) = 0.355$ [ton] $\dots (d)$

* Despreciese la masa de las columnas, por ser demasiado pequeña (ver sección transversal en figura 3.14), en comparación con la masa del sistema de piso.

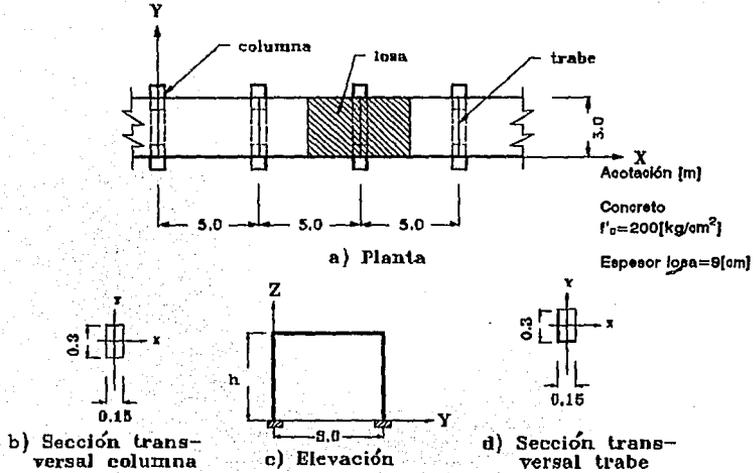


Figura 3.14. Cubierta del pasillo de acceso a las aulas escolares

De (c) y (d) la carga muerta vale

$$CM = 3.24 + 0.355 = 3.6[\text{ton}] \quad \dots(e)$$

Del RCDF-93^[ref.4], la carga viva instantánea en azotea es $70[\text{kg/m}^2]$, por lo tanto

$$CV = (70\text{kg/m}^2)(15\text{m}^2) = 1050[\text{kg}] = 1.05[\text{ton}] \quad \dots(f)$$

De (e) y (f) el peso total para el marco es

$$W_T = CM + CV = 3.6 + 1.05 = 4.65[\text{ton}] \quad \dots(g)$$

En el problema IV se indicó que la rigidez de un marco ante fuerzas laterales o rigidez de entrepiso vale

$$k = 6EI_c(\phi + 6) / [h^3(\phi + 1.5)] \quad \dots(h)$$

donde:

$$\phi = I_c L / (I_b h) \quad \dots(i)$$

- E-módulo de elasticidad
- I_b -momento inercia viga
- I_c -momento inercia columna
- ϕ -rigidez relativa
- L-longitud trabe
- h-altura columnas

Una carga lateral en el marco flexionará la trabe y las columnas alrededor del eje X, por tanto los momentos de inercia valen

$$I_c = bh^3/12 = (0.15m)(0.3m)^3/12 = 3.375(10^{-4})[m^4] \quad \dots(j)$$

$$I_v = bh^3/12 = (0.15m)(0.3m)^3/12 = 3.375(10^{-4})[m^4] \quad \dots(k)$$

El RCDF-93^[ref.4], indica estimar E para concreto de peso normal y $f'_c = 200[kg/cm^2]$ como

$$E = 8000[f'_c]^{0.6} = 113137[kg/cm^2] = 1113370[ton/m^2] \quad \dots(m)$$

De la figura 3.14c, y sustituyendo (j) y (k) en (l)

$$\phi = (3.375)(10^{-4})(3)/(3.375(10^{-4})h) = 3/h \quad \dots(n)$$

sustituyendo (j),(m) y (n) en (h)

$$k = (6)(1131370)(3.375)(10^{-4})\{[3/h]+6\}/[h^3\{(3/h)+1.5\}] =$$

$$k = 2291.0243\{(3+6h)/h\} / [h^3\{(3+1.5h)/h\}] =$$

$$k = [6873.0729 + 13746.146h] / [3h^3 + 1.5h^4] \quad \dots(o)$$

El marco puede entonces idealizarse con el sistema oscilatorio discreto de 1 G.L. de la figura 3.15, con masa

$$m = W/g \text{ y sustituyendo (g) } m = 4.65[ton]/9.80665[m/s^2] = 0.474 [ton \cdot s^2/m] \quad \dots(p)$$

De la ec. (3.7) $T = 2\pi/w$,de donde

$$w = 2\pi/T = 2\pi/0.2[seg] = 31.416[rad/seg] \quad \dots(q)$$

de la ec. (3.6) $w^2 = k/m$ y $k = mw^2$, sustituyendo (p) y (q)

$$k = 0.474[t \cdot s^2/m](31.416)^2[rad/seg]^2 = 467.82[t/m] \quad \dots(r)$$

Sustituyendo (r) en (o)

$$(6873.0729 + 13746.146h)/(3h^3 + 1.5h^4) = 467.82$$

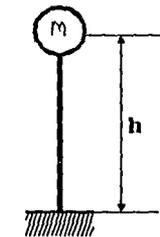


Figura 3.15.

de donde

$$6873.0729 + 13746.146h = 1403.46h^3 + 701.73h^4$$

$$701.73h^4 + 1403.46h^3 - 13746.146h - 6873.0729 = 0 \quad \dots(s)$$

Iterando la ec.(s) $h = 2.3404 \approx 2.34[m] \quad \dots(t)$

b) La ecuación del movimiento libre no amortiguado

De la ec. (3.4)

$$mx'' + kx = 0 \quad \dots(3.4)$$

sustituyendo (t) en (a)

$$k = (6873.0729 + 13746.146(2.34)) / [3(2.34)^3 + 1.5(2.34)^4] =$$

$$k = 468.03 \text{ [t/m]} \quad \dots(u)$$

sustituyendo (p) y (u) en (3.4)

$$0.474x'' + 468.03x = 0 \quad \dots(v)$$

c) Fuerza excitatriz que inició la oscilación

De (v) $x = -0.474x''/468.03$

para el tiempo $t = 0.025[\text{seg}]$

$$x = -0.474(-15)/468.03 = 0.0152[\text{m}] \quad \dots(w)$$

De la ec. (3.5) la respuesta de los desplazamientos del sistema es

$$x = x_0 \cos \omega t + (x'_0/\omega) \sin \omega t \quad \dots(3.5)$$

1a. derivada de (3.5)

$$x' = -\omega x_0 \sin \omega t + x'_0 \cos \omega t \quad \dots(x)$$

2a. derivada de (3.5)

$$x'' = -\omega^2 x_0 \cos \omega t - \omega x'_0 \sin \omega t \quad \dots(y)$$

Siempre que el desplazamiento es máximo la velocidad es cero, puesto que la masa debe detenerse para poder invertir el sentido de su desplazamiento, por tanto para $t=0$

$$x'_0 = 0 \quad \dots(z)$$

sustituyendo (q) y (z) en (y)

$$-15 = -(31.416)^2 x_0 \cos[31.416(0.025)] - 0$$

de donde $x_0 = 0.0215[\text{m}] \quad \dots(A)$

La fuerza es igual a la rigidez por el desplazamiento

$$P = kx_0 = (468.03[\text{t/m}])(0.0215[\text{m}]) = 10.06 \approx 10.1[\text{ton}] \quad \dots(B)$$

d) Las respuestas de desplazamiento (x), velocidad (x') y aceleración (x'') del sistema

Sustituyendo (A), (q) y (z) en (3.5), (x) y (y)

$$x = 0.0215 \cos(31.416t) \quad \dots (C)$$

$$x' = -(31.416)(0.0215) \sin(31.416t) = -0.6754 \sin(31.416t) \quad \dots (D)$$

$$x'' = -(31.416)^2(0.0215) \cos(31.416t) = -21.2198 \cos(31.416t) \quad \dots (E)$$

Tabulando (C), (D) y (E) para los tiempos pedidos

Tabla 3.4

t[seg]	0.000	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225	0.250
t[%T]	0.0T	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T	9T/8	5T/4
x[m]	0.0215	0.0152	0.0000	-0.0152	-0.0215	-0.0152	0.000	0.0152	0.0215	0.0152	0.000
x'[m/s]	0.000	-0.478	-0.675	-0.478	0.0000	0.478	0.675	0.478	0.000	-0.478	-0.675
x''[m/s ²]	-21.22	-15.00	0.000	15.00	21.22	15.00	0.000	-15.00	-21.22	-15.00	0.00

3.2.1.2.-PROBLEMAS PROPUESTOS.

I.-Comprobar que $x = x_0 \cos wt + (x'_0/w) \sin wt$ es la solución para la ecuación del movimiento libre no amortiguado.

II.-Se ha diseñado y construido una estructura metálica en acero, para colocar carteles publicitarios en diversas zonas de una ciudad. Con referencia a la figura 3.16 dicha estructura consiste, de un área para colocar el cartel de anuncios que estará expuesta al viento; las cargas que éste le induzca serán transmitidas por medio de una armadura de soporte tras el cartel a la columna tubular. Para ambos carteles y armaduras el peso de se ha calculado en $60[\text{kg/m}^2]$ de área vertical, y la máxima presión del viento en $162[\text{kg/m}^2]$. Suponiendo que no existe amortiguamiento determinar: a) La ecuación del movimiento libre no amortiguado, b) La frecuencia angular, c) El período de oscilación, d) La frecuencia natural, e) Las ecuaciones y gráficas de desplazamiento (x), velocidad (x') y aceleración (x''), suponiendo que actúa una ráfaga de viento horizontal instantánea con la máxima presión, produciendo una vibración libre.

Solución [enton, mts, seg]: a) $0.344x'' + 75.5x = 0$; b) $w = 14.815[\text{rad/seg}]$; c) $T = 0.42411[\text{seg}]$, d) $f = 2.36[\text{hertz}]$; e) $x = 0.0858 \cos(14.815t)$, $x' = -1.271127 \sin(14.815t)$, $x'' = -18.8317 \cos(14.815t)$.

III.- Usando los datos del sistema vibratorio del problema resuelto II, comprobar que las respuestas de desplazamiento x , velocidad x' y aceleración x'' para el movimiento libre no amortiguado, pueden obtenerse también con las siguientes expresiones^[reL1]:

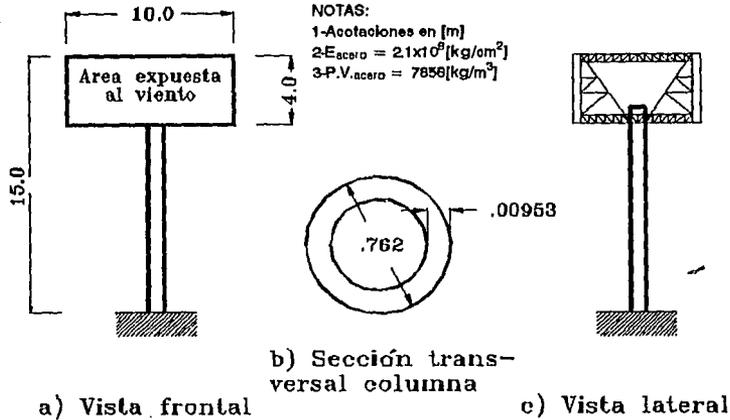


Figura 3.16. Cartel Publicitario

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \dots (3.9)$$

$$\phi = \arctan[-x'_0 / (\omega x_0)] \dots (3.10)$$

$$A = -x'_0 / (\omega \sin \phi) = [x_0^2 + (x'_0 / \omega)^2]^{0.5} \dots (3.11)$$

A-amplitud de onda

x-desplazamiento de la masa

ϕ -ángulo de fase del movimiento

x_0 -desplazamiento inicial de la masa

x' -velocidad de la masa

x'_0 -velocidad inicial de la masa

ω -frecuencia angular

t-tiempo

IV.- Resolver el problema resuelto III, en el sentido perpendicular al plano del marco.

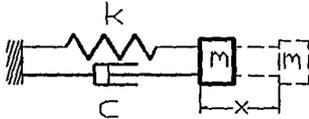
Solución [en ton, mts, seg]: a) $3.054x'' + 4372.42x = 0$; b) $\omega = 37.84$ [rad/seg]; c) $f = 6.021$ [hertz]; d) $T = 0.1661$ [seg]; e) $x = 0.011674 \cos(37.84t)$, $x' = -0.44931216 \sin(37.84t)$, $x'' = -17 \cos(37.84t)$

V.- Para la estructura del problema propuesto II y figura 3.16, determinar: a) La altura h de la columna tubular para que el sistema vibre con un período de 0.25 [seg], b) La ecuación del movimiento libre no amortiguado, c) las respuestas de desplazamiento x, velocidad x', y aceleración x''.

Solución: a) $h = 7.951$ [m]; b) $0.3165x'' + 199.91x = 0$; c) $x = 0.0324 \cos(25.133t)$, $x' = -0.81431 \sin(25.133t)$; $x'' = -20.466 \cos(25.133t)$.

3.2.2.- VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA.

En la figura 3.17 se muestra un sistema discreto sencillo, que a diferencia del estudiado en el inciso 3.2.1. anterior, pierde energía cinética paulatinamente debido a fricciones externas o internas, por lo que se dice que su movimiento vibratorio es amortiguado. El amortiguamiento está representado en dicho modelo por el pistón con constante de amortiguamiento c (Amortiguación viscosa).



- k -rigidez del sistema [ton/m]
- m -masa del cuerpo oscilante [ton-seg²/m]
- x -desplazamiento de la masa [m]
- c -constante de amortiguación del sistema [ton-seg/m]

Figura 3.17. Sistema discreto simple amortiguado de 1 G.L.

El movimiento oscilatorio es inducido en el sistema por una fuerza excitatriz, que actúa de forma similar a la descrita en el caso no amortiguado (inciso 3.2.1.); por lo que el diagrama de cuerpo en libertad de la figura 3.18, queda representado por la masa del cuerpo oscilante m , sobre la cual actúan: una fuerza de inercia P_i generada durante el movimiento, una fuerza restauradora

P_r producida por el resorte, y en este caso una fuerza amortiguadora P_D inducida por el pistón. La ecuación del movimiento se establece a partir del diagrama de cuerpo libre; por equilibrio dinámico [ref.1].

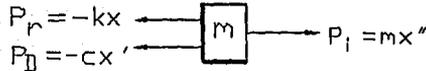
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \dots(3.12)$$

Ecuación del movimiento libre amortiguado

La solución de la ecuación del movimiento es:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \dots(3.13)$$

Solución general de la ecuación del movimiento libre amortiguado



- P_r -fuerza restauradora del resorte [ton]
- P_i -fuerza de inercia [ton]
- P_D -fuerza amortiguadora [ton]
- \dot{x} -velocidad de la masa [m/s]
- \ddot{x} -aceleración de la masa [m/s²]

Figura 3.18. Diagrama de cuerpo libre del sistema de la figura 3.17.

con:

$$r_{1,2} = w(-\xi \pm [\xi^2 - 1]^{0.5}) \quad \dots(3.14)$$

$$\xi = c/(2mw) \quad \dots(3.15)$$

$$C_c = 2mw \quad \dots(3.16)$$

- C, D -constantes arbitrarias a determinar e-base de los logaritmos naturales
- t -tiempo [seg] ξ -porcentaje de amortiguamiento crítico
- C_c -amortiguamiento crítico [ton-s/m]
- w -frecuencia angular o circular [rad/seg]

Según el resultado del radical $[\xi^2 - 1]^{0.5}$ de la ecuación (3.14), sea cero, real o imaginario, la solución general dada por (3.13), se transformará en una de las siguientes soluciones particulares:

3.2.2.1.- AMORTIGUAMIENTO CRITICO.

Existe cuando en la ecuación (3.14) el radical $[\xi^2 - 1]^{0.5} = 0$, convirtiéndose la ecuación (3.13) en la solución particular dada por:

$$x = e^{-\omega t}(x_0 + wx_0 t + x'_0 t) \quad \dots(3.17)$$

Solución de la ecuación del movimiento libre con amortiguación crítica

con:

$$\omega = c/(2m) \quad \dots(3.17a)$$

$$\xi = 1.0 \quad \dots(3.17b)$$

La gráfica de la ecuación (3.17) se muestra en la figura 3.19. En este caso el movimiento ya no es oscilatorio, sino que el sistema regresa a su posición de equilibrio original en el menor tiempo posible. Esta solución sólo es de uso práctico en mecanismos (como cañones, instrumentos eléctricos de medición, máquinas, etc.).

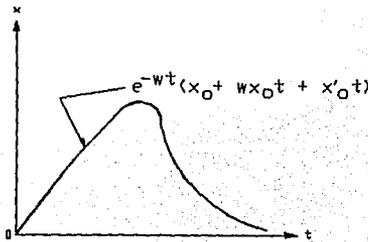


Figura 3.19. Amortiguamiento crítico.

3.2.2.2.- AMORTIGUAMIENTO SUBCRITICO.

Se tiene este tipo de amortiguamiento cuando el resultado del radical de la ecuación (3.14) es un número imaginario, es decir $[\xi^2 - 1]^{0.5} = i$

La solución particular es:

$$x = e^{-\xi \omega t} (x_0 \cos \omega_D t + \{[x'_0 + \omega \xi x_0] / \omega_D\} \sin \omega_D t)$$

Solución de la ecuación del movimiento libre con amortiguación subcrítica(3.18)

con:

$$\xi < 1.0 \quad \dots(3.18a)$$

$$\omega_D = \omega [1 - \xi^2]^{0.5} \quad \dots(3.19)$$

$$T_D = 2\pi / \omega_D \quad \dots(3.20)$$

ω -frecuencia angular amortiguada [rad/seg]
 T_D -período amortiguado [seg]

Esta solución particular es el caso más común que se presenta en el campo de las estructuras civiles. Su gráfica se muestra en la figura 3.20, donde la amplitud de los desplazamientos decrece exponencialmente hasta cero cuando $t = \infty$.

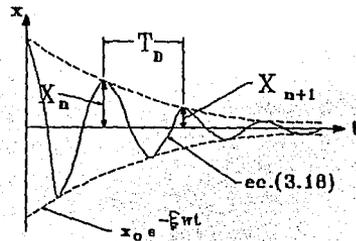


Figura 3.20. Amortiguamiento subcrítico.

Para esta solución se puede definir de la figura 3.20:

DECREMENTO LOGARITMICO.-Es el logaritmo natural de la relación de cualesquiera amplitudes consecutivas^[ref. 1].

$$S = \xi \omega T_D = 2\pi\xi / [1 - \xi^2]^{0.5} = \ln[X_n / X_{n+1}] \quad \dots(3.21)$$

para valores pequeños de ξ :

$$S \approx 2\pi\xi \quad \dots(3.22)$$

X_n, X_{n+1} -Amplitudes consecutivas

S-decremento logaritmico

La ecuación del decremento logaritmico es útil para hallar ξ cuando se desconoce su valor para una estructura, pues puede efectuarse una prueba de vibración libre, de la cual se obtiene una gráfica $x-t$, y pueden medirse dos amplitudes consecutivas.

Valores comunes de ξ [ref.1] :

Tuberías sin conexiones	0.5 a 1 %
Puentes de concreto	2 a 3 %
Edificios de concreto	10 a 20%

3.2.2.3-AMORTIGUAMIENTO HIPERCRI-TICO.

Existe cuando en la ecuación (3.14) el radical $[\xi^2 - 1]^{0.5} > 0$, lo que transforma la solución general (3.13), en la solución particular definida por:

$$x = Q [(x_0 - 1) \exp\{-\xi \omega t + \omega t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} + \exp\{-\xi \omega t - \omega t [\xi^2 - 1]^{0.5}\}] \quad \dots(3.23)^*$$

con:

$$Q = \{x_0 \omega [(\xi^2 - 1)^{0.5} - \xi] - x'_0\} / \{2\omega [\xi^2 - 1]^{0.5}\}$$

$y \quad \xi > 1.0 \quad \dots(3.23a)$

Solución de la ecuación del movimiento libre con amortiguación hipercritica

La gráfica de la ecuación (3.23) se presenta en la figura 3.21. El sistema retorna a la posición de equilibrio sin vibrar; pero en un tiempo mayor al empleado en desplazarse inicialmente. Esta solución particular se aplica al diseño de retardadores de puertas, brazos de tornamesas, etc.

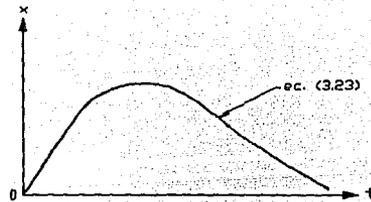


Figura 3.21. Amortiguación hipercrítica.

* Debe recordarse que en notación matemática e^i puede denotarse también $\exp(i)$.

3.2.2.4.-PROBLEMAS RESUELTOS.

I.-Deducir las expresiones que describen el movimiento libre amortiguado de un sistema vibratorio discreto de un grado de libertad (G.L.).

Con relación al sistema mostrado en la figura 3.17 (Inciso 3.2.2), una fuerza excitatriz que actúa sólo una vez, perturba el equilibrio estático del estado de reposo al desplazar una distancia x la masa m del cuerpo oscilante. El resorte de rigidez k se opone al desplazamiento mediante una fuerza restauradora P_r que tiende a retomar la masa a su posición inicial, ésta al acelerarse durante el regreso, se desplaza más allá del punto inicial por causa de la fuerza de inercia P_i inducida.

El ciclo oscilatorio así establecido va perdiendo energía cinética por causa de la fuerza amortiguadora P_D que genera el amortiguador, representado en la citada figura por el pistón de "amortiguamiento viscoso".

El amortiguador disminuye la amplitud de los desplazamientos x de la masa en cada nuevo ciclo de oscilación, después de un cierto tiempo t el sistema pierde toda su energía de movimiento, regresando a su estado de reposo inicial (equilibrio estático).

En el inciso 3.1, se indicó que para el caso de amortiguación viscosa, la fuerza amortiguadora P_D que se opone al movimiento es igual al producto de una constante de proporcionalidad viscosa "c" por la velocidad de la masa m .

$$P_D = -cx' \quad \dots(a)^*$$

Ya se ha mostrado que (Problema I, Inciso 3.2.1.1.)

$$P_r = -kx \quad \dots(b)$$

$$P_i = mx'' \quad \dots(c)$$

P_r y P_D son fuerzas que se oponen al movimiento generado por P_i . El equilibrio dinámico del ciclo oscilatorio descrito se representa en el diagrama de cuerpo en libertad de la figura 3.18 (Inciso 3.2.2.), de donde

$$P_r + P_D = P_i \quad \dots(d)$$

sustituyendo (a),(b) y (c) en (d)

$$-kx - cx' = mx''$$

de donde

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad \dots(3.12)$$

Ecuación del movimiento libre
amortiguado

* El signo menos (-) se usa debido a que P_D y x' en la figura 3.18 son de sentido contrario.

dividiendo (3.12) entre m

$$x'' + (c/m)x' + (k/m)x = 0 \quad \dots(e)$$

de la ec.(3.6) (Inciso 3.2.1.)

$$w^2 = k/m$$

y sustituyendo en (e)

$$x'' + (c/m)x' + w^2x = 0 \quad \dots(f)$$

(f) es una ecuación diferencial lineal de 2o.orden, cuya solución en función del tiempo t , asume la forma

$$x = e^{rt} \dots(g)$$

con: e = base de los logaritmos naturales

r = una constante

1a.derivada de (g) $x' = r e^{rt} \quad \dots(h)$

2a.derivada de (g) $x'' = r^2 e^{rt} \quad \dots(i)$

Sustituyendo (h) e (i) en (f)

$$r^2 e^{rt} + (c/m) r e^{rt} + w^2 e^{rt} = 0$$

factorizando

$$(r^2 + (c/m)r + w^2) e^{rt} = 0$$

dividiendo entre e^{rt}

$$r^2 + (c/m)r + w^2 = 0 \quad \dots(j)$$

(j) es una ecuación de 2o.grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0 \dots(k)$, cuya solución es ^[ref. 5]:

$$x_{1,2} = [-b \pm (b^2 - 4ac)^{0.5}] / (2a) \quad \dots(l)$$

por analogía entre (j) y (k) $a = 1$, $b = (c/m)$ y $c = w^2$

y empleando (l)

$$r_{1,2} = \{ -(c/m) \pm [(c/m)^2 - 4w^2]^{0.5} / 2 = -c/(2m) \pm \{ [(c/m)^2 - 4w^2] / 4 \}^{0.5}$$

de donde

$$r_{1,2} = -c/(2m) \pm \{ (c/2m)^2 - w^2 \}^{0.5} \quad \dots(m)$$

Por tanto la solución de la ecuación del movimiento (f) es del tipo de la ecuación (g); pero con dos partes (puesto que existen dos valores de r):

C,D=constantes arbitrarias a determinar

$$x = C e^{r_1 t} + D e^{r_2 t} \dots(3.13)$$

Solución general de la ecuación del movimiento libre amortiguado

Existen tres casos de interés dados por los valores de las raíces r_1 y r_2 de la ec. (m), que hacen que la solución general (3.13) se transforme en una de las siguientes particulares:

Caso a) Amortiguamiento Crítico.- Existe cuando $r_1 = r_2$

Para que $r_1 = r_2$ es necesario que en (m)

$$[c/(2m)]^2 - w^2 f^{0.5} = 0$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$[c/(2m)]^2 - w^2 = 0$$

y
$$[c/(2m)]^2 = w^2$$

de donde
$$c/(2m) = w \quad \dots(3.17a)$$

por tanto
$$c = 2mw \quad \dots(n)$$

este valor de c es llamado amortiguamiento crítico (C_0), debido a que es el amortiguamiento necesario para que el sistema no oscile, por tanto

$$C_0 = 2mw \quad \dots(3.18)$$

Se puede definir a todo amortiguamiento (c) de un sistema en términos de un porcentaje de su amortiguamiento crítico (C_0), que se designa con la letra ξ (xi), de la forma

$$\xi = c/C_0 = c/(2mw) \quad \dots(3.15)$$

de donde
$$\xi w = c/(2m) \quad \dots(o)$$

sustituyendo (o) en (m)

$$r_{1,2} = -\xi w \pm [\xi^2 w^2 - w^2]^{0.5} = -\xi w \pm [w^2(\xi^2 - 1)]^{0.5} = -\xi w \pm w[\xi^2 - 1]^{0.5}$$

y por tanto

$$r_{1,2} = w(-\xi \pm [\xi^2 - 1]^{0.5}) \quad \dots(3.14)$$

Si en la ecuación (3.14) $\xi = 1.0$ (3.17b), el radical se anula y $r_1 = r_2 = -w$ (p)

y de (o)
$$w = c/(2m) \quad \dots(q)$$

La ecuación (3.13) al reducirse a un solo término (por ser $r_1 = r_2$), no puede satisfacer simultáneamente las dos condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad, por lo cual se adoptará una nueva solución para (f) de la forma

$$x = (A_0 + B_0 t) e^{-\xi w t} \dots(r)$$

A_0, B_0 - constantes que dependen de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad

sustituyendo (p) en (r)

$$x = e^{-wt}(A_0 + B_0 t) \quad \dots (s)$$

1a. derivada de (s)

$$x' = e^{-wt} B_0 - (A_0 + B_0 t) w e^{-wt} \quad \dots (t)$$

2a. derivada de (s)

$$x'' = -w B_0 e^{-wt} + w(A_0 + B_0 t) w e^{-wt} - w e^{-wt} B_0 = -2w B_0 e^{-wt} + w^2(A_0 + B_0 t) e^{-wt} \quad \dots (u)$$

determinación de A_0 y B_0

de (s) para $t=0$

$$x_0 = e^0(A_0 + B_0(0)) = A_0 \quad ; \quad \dot{x}_0 = A_0 \quad \dots (v)$$

de (t) para $t=0$

$$x'_0 = e^0 B_0 - (A_0 + B_0(0)) w e^0 = B_0 - w A_0$$

de donde

$$B_0 = x'_0 + w A_0$$

sustituyendo (v) $B_0 = x'_0 + w x_0 \quad \dots (w)$

sustituyendo (v) y (w) en (s)

$$x = e^{-wt}(x_0 + x'_0 t + w x_0 t^2) \quad \dots (3.17)$$

Solución de la ecuación del movimiento libre con amortiguación crítica

con $w = c/(2m) \quad \dots (3.17a)$

$$\xi = 1.0 \quad \dots (3.17b)$$

La gráfica de la ecuación (3.17) se muestra en la figura 3.19 (inciso 3.2.2.1.), y puede observarse que el movimiento ya no es oscilatorio.

Comprobación de que (r) es solución de (f)

(f) puede escribirse $x'' + 2cx'(2m) + w^2 x = 0$

sustituyendo (q) en (f) $x'' + 2wx' + w^2 x = 0 \quad \dots (f')$

sustituyendo (s), (t) y (u) en (f')

$$-2w B_0 e^{-wt} + w^2 e^{-wt}(A_0 + B_0 t) + 2w e^{-wt} B_0 - 2w^2 e^{-wt}(A_0 + B_0 t) + w^2 e^{-wt}(A_0 + B_0 t) = 0$$

de donde $0 = 0$ (correcto)

Caso b) Amortiguamiento subcrítico.- Existe cuando r_1 y r_2 son números complejos de la forma $a \pm bi$, para lo cual es necesario que el radical de la ecuación (3.14) resulte un número imaginario, cosa que sucede si $\xi < 1.0$

como la unidad imaginaria es $i = [-1]^{0.5}$

la ecuación (3.14) puede escribirse para este caso como

$$r_{1,2} = w(-\xi \pm i[1-\xi^2]^{0.5}) \quad \dots(x) \quad \text{con } \xi < 1.0$$

Sustituyendo (x) en (3.13)

$$x = C \exp\{-w\xi t + iwt[1-\xi^2]^{0.5}\} + D \exp\{-w\xi t - iwt[1-\xi^2]^{0.5}\} = C \exp\{-w\xi t\} \exp\{iwt[1-\xi^2]^{0.5}\} + D \exp\{-w\xi t\} \exp\{-iwt[1-\xi^2]^{0.5}\} \quad \dots(y)$$

Recordando las fórmulas de Euler^[ref. 5]:

$$\exp\{\pm i\theta\} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

la ecuación (y) puede escribirse entonces como

$$\begin{aligned} x &= C \exp\{-w\xi t\} [\cos(wt[1-\xi^2]^{0.5}) + i\sin(wt[1-\xi^2]^{0.5})] + D \exp\{-w\xi t\} [\cos(wt[1-\xi^2]^{0.5}) \\ &\quad - i\sin(wt[1-\xi^2]^{0.5})] = \\ &= \exp\{-w\xi t\} [C \cos(wt[1-\xi^2]^{0.5}) + C i \sin(wt[1-\xi^2]^{0.5}) + D \cos(wt[1-\xi^2]^{0.5}) - D i \sin(wt[1-\xi^2]^{0.5})] = \\ &= \exp\{-w\xi t\} [(C+D) \cos(wt[1-\xi^2]^{0.5}) + (C-D) i \sin(wt[1-\xi^2]^{0.5})] \end{aligned}$$

tomando $A_0 = C+D$ y $B_0 = (C-D)i$ (por ser todas constantes),

donde : A_0, B_0 - constantes que dependen de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad

por lo cual

$$x = \exp\{-w\xi t\} [A_0 \cos(wt[1-\xi^2]^{0.5}) + B_0 \sin(wt[1-\xi^2]^{0.5})] \quad \dots(z)$$

Determinación de A_0 y B_0

de (z) para $t=0$

$$x_0 = e^0 [A_0 \cos(0) + B_0 \sin(0)] = A_0, \quad x_0 = A_0 \quad \dots(A)$$

derivando (z)

$$\begin{aligned} x' &= \exp\{-w\xi t\} [-A_0 w [1-\xi^2]^{0.5} \sin(wt[1-\xi^2]^{0.5}) + B_0 w [1-\xi^2]^{0.5} \cos(wt[1-\xi^2]^{0.5})] + \\ &\quad [A_0 \cos(wt[1-\xi^2]^{0.5}) + B_0 \sin(wt[1-\xi^2]^{0.5})] \exp\{-w\xi t\} (-w\xi) \end{aligned}$$

para $t=0$

$$x'_0 = e^0 [-A_0 \omega [1 - \xi^2]^{0.5} \text{sen}(0) + B_0 \omega [1 - \xi^2]^{0.5} \text{cos}(0)] - \omega \xi e^0 [A_0 \text{cos}(0) + B_0 \text{sen}(0)] =$$

$$x'_0 = B_0 \omega [1 - \xi^2]^{0.5} - A_0 \omega \xi$$

de donde

$$B_0 = [x'_0 + A_0 \omega \xi] / \{\omega [1 - \xi^2]^{0.5}\}$$

definiendo

$$\omega_D = \omega [1 - \xi^2]^{0.5} \dots (3.19)$$

ω_D - frecuencia angular del sistema amortiguado [rad/seg]

y sustituyendo (3.19) y (A) tenemos

$$B_0 = [x'_0 + x_0 \omega \xi] / \omega_D \dots (B)$$

Sustituyendo (A), (B) y (3.19) en (z)

$$x = e^{-\xi \omega t} \{ x_0 \text{cos} \omega_D t + [(x'_0 + \xi x_0 \omega) \text{sen} \omega_D t] / \omega_D \} \dots (3.18)$$

con $\xi < 1.0$

Solución de la ecuación del movimiento libre con amortiguación subcrítica

Análogamente a la ecuación (3.7) (Inciso 3.2.1.), puede establecerse el período del sistema amortiguado

$$T_D = 2\pi / \omega_D \dots (3.20)$$

La gráfica de la ecuación (3.18) se muestra en la figura 3.20 (Inciso 3.2.2.2.), donde puede observarse que las amplitudes de onda (desplazamientos), decrecen exponencialmente debido al amortiguamiento.

En dicha gráfica se pueden medir cualesquiera de dos amplitudes consecutivas:

para $t = n$ $x_n = x_0 \exp\{-\xi \omega t_n\} \dots (C)$

para $t = n + 1$ $x_{n+1} = x_0 \exp\{-\xi \omega t_{n+1}\} \dots (D)$

donde, ver figura 3.20

$$t_{n+1} = t_n + T_D \dots (E)$$

sustituyendo (E) en (D)

$$x_{n+1} = x_0 \exp\{-\xi \omega t_n\} \exp\{-\xi \omega T_D\} \dots (F)$$

dividiendo (C) entre (F)

$$X_n / X_{n+1} = (x_0 \exp\{-\xi w t_n\}) / (x_0 \exp\{-\xi w t_n\} \exp\{-\xi w T_D\}) = 1 / \exp\{-\xi w T_D\} = \exp\{\xi w T_D\} \quad \dots(G)$$

De la definición del Decremento Logarítmico (Inclso 3.2.2.2.)

$$S = \ln\{X_n / X_{n+1}\} \quad \dots(H)$$

sustituyendo (G) en (H) $S = \ln(\exp\{\xi w T_D\}) = \xi w T_D \quad \dots(I)$

sustituyendo (3.20) y (3.19) en (I)

$$S = \xi w 2\pi / wD = \xi w 2\pi / [w(1-\xi^2)^{0.5}] = 2\pi\xi / [1-\xi^2]^{0.5} \quad \dots(J)$$

por tanto de (H), (I) y (J)

$$S = \xi w T_D = 2\pi\xi / [1-\xi^2]^{0.5} = \ln\{X_n / X_{n+1}\} \quad \dots(3.21)$$

para valores pequeños de ξ : $\xi^2 \approx 0$ y de (3.21) $S = 2\pi\xi \quad \dots(3.22)$

Caso c) Amortiguamiento hipercrítico.- El sobreamortiguamiento existe cuando en la ecuación (3.14) r_1 y r_2 son números reales y $r_1 \neq r_2$, para lo cual el radical en dicha ecuación debe ser mayor que cero, cosa que sucede si $\xi > 1.0$

sustituyendo (3.14) en (3.13)

$$\begin{aligned} x &= C \exp\{-\xi w t + w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} + D \exp\{-\xi w t - w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} = \\ x &= C \exp\{-\xi w t\} \exp\{w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} + D \exp\{-\xi w t\} \exp\{-w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} \quad \dots(L) \end{aligned}$$

Determinación de C y D

1a. derivada de (L)

$$x' = C \exp\{-\xi w t\} \exp\{w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} (w [\xi^2 - 1]^{0.5}) - C \exp\{w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} \exp\{-\xi w t\} (\xi w) + \\ - D \exp\{-\xi w t\} \exp\{-w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} (w [\xi^2 - 1]^{0.5}) - D \exp\{-w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} \exp\{-\xi w t\} (\xi w)$$

de donde

$$x' = C w \exp\{-\xi w t\} \exp\{w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} ([\xi^2 - 1]^{0.5} - \xi) - D w \exp\{-\xi w t\} \exp\{-w t [\xi^2 - 1]^{0.5}\} ([\xi^2 - 1]^{0.5} + \xi) \quad \dots(M)$$

para $t=0$ de (L) $x_0 = C + D \quad \dots(N)$

para $t=0$ de (M) $x'_0 = C w ([\xi^2 - 1]^{0.5} - \xi) - D w ([\xi^2 - 1]^{0.5} + \xi) \quad \dots(O)$

de (N) $C = x_0 - D \quad \dots(P)$

sustituyendo (P) en (O)

$$\begin{aligned} x''_o &= (x_o D)w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - Dw([\xi^2-1]^{0.5} + \xi) \\ x'_o &= x_o w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - Dw([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - Dw([\xi^2-1]^{0.5} + \xi) \\ &= x_o w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - Dw([\xi^2-1]^{0.5} - \xi + [\xi^2-1]^{0.5} + \xi) \end{aligned}$$

y

$$x''_o = x_o w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - 2Dw([\xi^2-1]^{0.5})$$

por tanto

$$x''_o - x_o w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) = -2Dw([\xi^2-1]^{0.5})$$

de donde

$$D = \{x_o w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - x'_o\} / \{2w[\xi^2-1]^{0.5}\} \quad \dots (Q)$$

de (Q) y (P)

$$C = x_o - \{x_o w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - x'_o\} / \{2w[\xi^2-1]^{0.5}\} \quad \dots (R)$$

Sustituyendo (Q) y (R) en (L)

$$\begin{aligned} x &= \{x_o - [x_o w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - x'_o] / \{2w[\xi^2-1]^{0.5}\}\} \exp\{-\xi wt + wt[\xi^2-1]^{0.5}\} + \\ &\quad \{[x_o w([\xi^2-1]^{0.5}-\xi) - x'_o] / \{2w[\xi^2-1]^{0.5}\}\} \exp\{-\xi wt - wt[\xi^2-1]^{0.5}\} \end{aligned}$$

y factorizando

$$x = Q \{ (x_o - 1) \exp\{-\xi wt + wt[\xi^2 - 1]^{0.5}\} + \exp\{-\xi wt - wt[\xi^2 - 1]^{0.5}\} \} \dots (3. 23)$$

Solución de la ecuación del movimiento libre con amortiguación hiperbólica

con:

$$Q = \{x_o w([\xi^2 - 1]^{0.5} - \xi) - x'_o\} / \{2w[\xi^2 - 1]^{0.5}\}$$

$$\xi > 1.0 \quad \dots (3.23a)$$

II.-En la estructura mostrada en la figura 3.22, la cual es usada con fines publicitarios para anuncios comerciales, se efectuó una prueba de vibración libre midiéndose las amplitudes de dos desplazamientos consecutivos en $X_n=2.25$ [cm] y $X_{n+1}=2.153$ [cm]. Para ambos carteles el peso total por metro cuadrado de área vertical que soporta la columna tubular (perfil OC762x9.53 [mm]), es de 80 [kg/m²] y la máxima presión del viento esperada es de 170 [kg/m²]. Determinar: a) El porcentaje de amortiguamiento crítico, b) la ecuación del movimiento libre amortiguado, c) la frecuencia angular amortiguada, d) el período

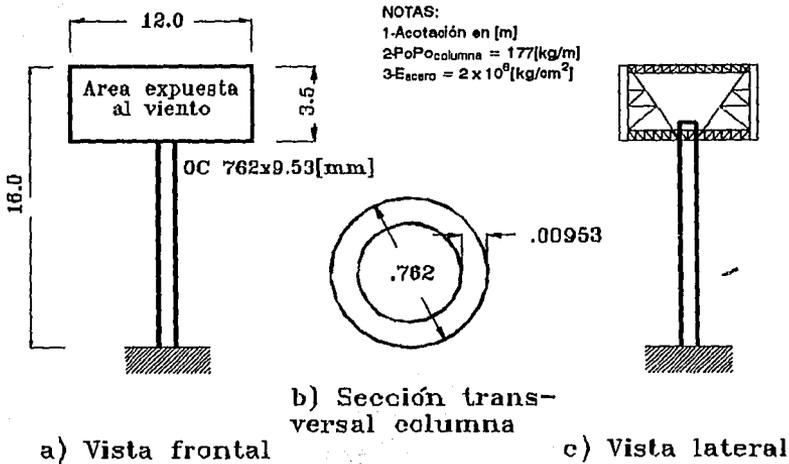


Figura 3.22. Estructura para anuncios publicitarios.

amortiguado de oscilación, e) la frecuencia natural, f) las respuestas de desplazamiento (x), velocidad (\dot{x}) y aceleración (\ddot{x}) del sistema, suponiendo que actúa una ráfaga de viento horizontal instantánea con la máxima presión, produciendo vibración libre.

a) Porcentaje de amortiguamiento crítico (ξ)

De la ecuación (3.21) $S = \ln[X_n/X_{n+1}]$

sustituyendo $S = \ln [2.25\text{cm}/2.153\text{cm}] = 0.04407$

De la ecuación (3.22) $S = 2\pi\xi$

por tanto $\xi = S/(2\pi) = 0.04407/(2\pi) = 0.007 = 0.7\%$... (a)

b) Ecuación del movimiento libre amortiguado

El área expuesta al viento según la figura 3.22a es $A = 3.5\text{[m]}(12\text{[m]}) = 42\text{ [m}^2\text{]}$ (b)

Carga sobre la columna $W_{\text{car}} = 42\text{[m}^2\text{]}(80\text{[kg/m}^2\text{]}) = 3360\text{ [kg]} = 3.36\text{ [ton]}$

Se considera que la mitad de la masa de la columna se concentra en la parte superior

$w_{\text{col}} = 12.5\text{[m]}(177\text{[kg/m]})/2 = 1106.25\text{ [kg]} = 1.11\text{ [ton]}$

La estructura se modela con el sistema vibratorio discreto simple de la figura 3.23 de masa:

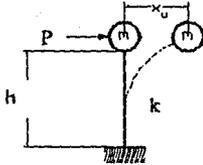


Figura 3.23. Sistema discreto simple

$$m = (W_{car} + W_{col})/g = 4.47[\text{ton}]/9.80665[\text{m/s}^2] = 0.4558[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}] \quad \dots (c)$$

y rigidez [ref. 6]:

$$k = 3EI/L^3 \quad \dots (d)$$

donde para el acero

$$E = (2)(10^6)[\text{kg/cm}^2] = (2)(10^7)[\text{ton/m}^2] \quad \dots (e)$$

Para el perfil OC762 X 9.53:

En la sección transversal circular de la figura 3.22b

$$I = \pi(D/2)^4/4 = \pi D^4/64 \quad [\text{ref. 6}]$$

por tanto:

Momento de Inercia del tubo hueco = Momento de Inercia círculo exterior - Momento de Inercia círculo Interior

$$I = \pi D_e^4/64 - \pi D_i^4/64 = \pi(D_e^4 - D_i^4)/64 \quad \dots (f)$$

de la figura 3.22b

$$D_i = D_e - 2t = 0.762 - 0.00953(2) = 0.74294[\text{m}] \quad \dots (g)$$

sustituyendo en (f)

$$I = \pi(0.762^4 - 0.74294^4)/64 = 0.001595[\text{m}^4] \quad \dots (h)$$

Sustituyendo (e) y (f) en (d)

$$k = (3)(2)(10^7)[\text{ton/m}^2](0.001595)[\text{m}^4]/(12.5[\text{m}])^3 = 48.9984 = 49[\text{ton/m}] \quad \dots (i)$$

de la ecuación (3.6) la frecuencia angular no amortiguada es

$$w = [k/m]^{0.5}$$

sustituyendo (c) e (i) en (3.6)

$$w = [49[\text{ton/m}]/0.4558[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}]]^{0.5} = 10.368 [\text{rad/seg}] \quad \dots (j)$$

De la ecuación (3.15)

$$\xi = c/(2mw)$$

se tiene

$$c = \xi 2mw = (0.007)(2)(0.4558[\text{ton}\cdot\text{s}^2/\text{m}])(10.368[\text{rad}/\text{seg}]) = 0.06616[\text{ton}\cdot\text{s}/\text{m}] \quad \dots(k)$$

De la ecuación (3.12)

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

y sustituyendo (c), (k) e (l)

$$0.4558x'' + 0.06616x' + 49x = 0 \quad \dots(m)$$

c) Frecuencia angular amortiguada (w_D)

De la ecuación (3.19)

$$w_D = w\sqrt{1-\xi^2}^{0.5}$$

sustituyendo (j) y (a)

$$w_D = 10.368\sqrt{1-(0.007)^2}^{0.5} = 10.3677[\text{rad}/\text{seg}] \quad \dots(n)$$

d) Período amortiguado de oscilación (T_D)

De la ecuación (3.20)

$$T_D = 2\pi/w_D$$

sustituyendo (n)

$$T_D = 2\pi/(10.3677[\text{rad}/\text{seg}]) = 0.60603[\text{seg}] \quad \dots(o)$$

e) Frecuencia natural (f)

De la ecuación (3.8)

$$f = 1/T_D = 1/0.60603[\text{seg}] = 1.65[\text{ciclos}/\text{seg}] = 1.65[\text{herz}] \quad \dots(p)$$

f) Ecuaciones y gráficas de desplazamiento (x), velocidad (x') y aceleración (x'')

La fuerza "instantánea" horizontal producida por el viento y supuesta estática es

$$P = (170\text{kg}/\text{m}^2)(3.5\text{m})(12.0\text{m}) = 7140[\text{kg}] = 7.14[\text{ton}] \quad \dots(q)$$

El desplazamiento inicial x_0 en el instante $t=0$, corresponde al desplazamiento estático producido por la carga del viento actuando horizontalmente como en la figura 3.23, y vale [ref. 6]

$$x_0 = P/k$$

sustituyendo (i) y (q)

$$x_0 = 7.14[\text{ton}]/49[\text{ton/m}] = 0.1457[\text{m}] \quad \dots(r)$$

Cuando la carga P deja de obrar, la masa m alcanza su deflexión máxima x_0 y debe detenerse para poder invertir el sentido de su desplazamiento, por tanto para ese instante

$$x'_0 = 0 \quad \dots(s)$$

De la ecuación (3.18) la respuesta a los desplazamientos es:

$$x = e^{-w\xi t} [A_0 \cos(wDt) + B_0 \sin(wDt)]$$

con

$$A_0 = x_0 \quad \text{y} \quad B_0 = (x'_0 + x_0 w\xi) / wD \quad \dots(t)$$

1a. derivada de la ecuación (3.18)

$$\begin{aligned} x' &= e^{-w\xi t} [-A_0 \sin(wDt) wD + B_0 \cos(wDt) wD] - w\xi [A_0 \cos(wDt) + B_0 \sin(wDt)] e^{-w\xi t} = \\ x' &= e^{-w\xi t} [wD [-A_0 \sin(wDt) + B_0 \cos(wDt)] - w\xi [A_0 \cos(wDt) + B_0 \sin(wDt)]] = \end{aligned} \quad \dots(u)$$

Respuesta de velocidad

2a. derivada de la ecuación (3.18)

$$\begin{aligned} x'' &= e^{-w\xi t} [wD [-A_0 \cos(wDt) wD - B_0 \sin(wDt) wD] - w\xi [-A_0 \sin(wDt) wD + B_0 \cos(wDt) wD]] + \\ &+ [wD [-A_0 \sin(wDt) + B_0 \cos(wDt)] - w\xi [A_0 \cos(wDt) + B_0 \sin(wDt)]] e^{-w\xi t} (-w\xi) = \\ &= e^{-w\xi t} [w^2 D^2 [-A_0 \cos(wDt) - B_0 \sin(wDt)] - w w D \xi [-A_0 \sin(wDt) wD + B_0 \cos(wDt) wD] + \\ &- w w D \xi [-A_0 \sin(wDt) + B_0 \cos(wDt)] + w^2 \xi^2 [A_0 \cos(wDt) + B_0 \sin(wDt)]] = \\ x'' &= e^{-w\xi t} [w^2 D^2 [-A_0 \cos(wDt) - B_0 \sin(wDt)] - 2w w D \xi [-A_0 \sin(wDt) + B_0 \cos(wDt)] + \\ &+ w^2 \xi^2 [A_0 \cos(wDt) + B_0 \sin(wDt)]] = \end{aligned} \quad \dots(v) \text{ Respuesta de aceleración}$$

Sustituyendo (a), (i), (n) y (s) en (t), (3.18), (u) y (v), se tiene

$$A_0 = 0.1457 [\text{m}]$$

$$\text{y} \quad B_0 = (0.1457)(10.368)(0.007)/10.3677 = 0.00102[\text{m}]$$

$$x = e^{-(10.368)(0.007)t} [0.1457\cos(10.3677t) + 0.00102\sen(10.3677t)] =$$

$$x = e^{-0.07258t} [0.1457\cos(10.3677t) + 0.00102\sen(10.3677t)] \quad \dots(w)$$

$$x' = e^{-0.07258t} [10.3677[-0.1457\sen(10.3677t) + 0.00102\cos(10.3677t)] - 0.07258[0.1457\cos(10.3677t) + 0.00102\sen(10.3677t)]]$$

$$x' = e^{-0.07258t} [-1.51057\sen(10.3677t) + 0.0106\cos(10.3677t) - 0.0106\cos(10.3677t) + -0.000074\sen(10.3677t)]$$

$$x' = e^{-0.07258t} [-1.510644\sen(10.3677t)] \quad \dots(y)$$

$$x'' = e^{-0.07258t} [10.3677^2 [-0.1457\cos(10.3677t) - 0.00102\sen(10.3677t)] - 2(10.368)(10.3677)(0.007) [-0.1457\sen(10.3677t) + 0.00102\cos(10.3677t)] + (10.368^2)(0.007^2)[0.1457\cos(10.3677t) + 0.00102\sen(10.3677t)]]$$

$$x'' = e^{-0.07258t} [-15.66118\cos(10.3677t) - 0.109639\sen(10.3677t) + 0.219263\sen(10.3677t) + -0.001535\cos(10.3677t) + 0.0007674\cos(10.3677t) + 0.00000537\sen(10.3677t)] =$$

$$x'' = e^{-0.07258t} [0.10962937\sen(10.3677t) - 15.6619476\cos(10.3677t)] \quad \dots(z)$$

Tabulando las ecuaciones (w), (y) y (z), se obtiene la siguiente tabla y gráficas de respuestas:

Tabla 3.5

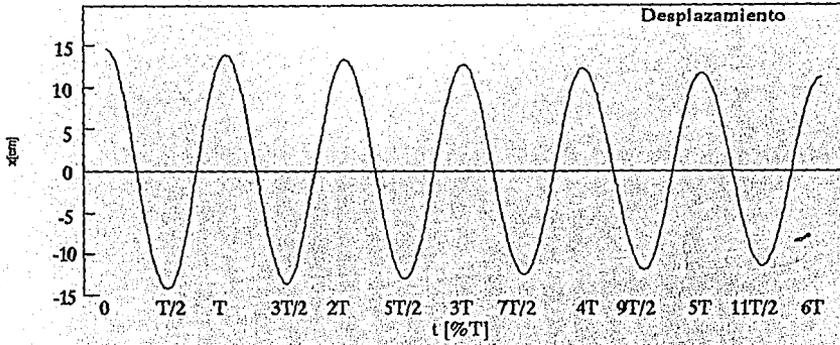
t[seg]	0.00	0.0758	0.1515	0.2273	0.3030	0.3788	0.4545	0.5303	0.6060	0.6818	0.7575
t[%T]	0.0T	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T	9T/8	5T/4
x[m]	0.1457	0.1032	0.0010	-0.1007	-0.1425	-0.1009	-0.00	0.0985	0.1394	0.0987	0.00
x'[m/s]	0.00	-1.062	-1.494	-1.051	0.00	1.039	1.462	1.028	0.00	-1.017	-1.430
x''[m/s²]	-15.66	-10.94	0.11	10.97	15.32	10.70	-0.11	-10.73	-14.99	-10.47	0.10

t[seg]	0.8333	0.9091	0.9848	1.0606	1.1363	1.2121	1.2878	1.3636	1.4393	1.5150	1.5907
t[%T]	11T/8	3T/2	13T/8	7T/4	15T/8	2T	17T/8	9T/4	19T/8	5T/2	21T/8
x[m]	-0.0963	-0.1364	-0.0966	-0.00	0.0942	0.1334	0.0945	0.00	-0.0921	-0.1305	-0.0925
x'[m/s]	-1.006	0.00	0.994	1.399	0.984	0.00	-0.973	-1.368	-0.962	0.00	0.952
x''[m/s²]	10.50	14.66	10.24	-0.10	-10.27	-14.34	-10.02	0.09	10.05	14.03	9.80

t[seg]	1.6666	1.7423	1.8181	1.8938	1.9696	2.0454	2.1211	2.1969	2.2726	2.3484	2.4241
t[%T]	11T/4	23T/8	3T	25T/8	13T/4	27T/8	7T/2	29T/8	15T/4	31T/8	4T
x[m]	-0.00	0.0901	0.1277	0.0904	0.00	-0.0882	-0.1249	-0.0885	-0.00	0.0863	0.1222
x'[m/s]	1.339	0.941	0.00	-0.931	-1.309	-0.921	0.00	0.911	1.281	0.901	0.00
x''[m/s²]	-0.10	-9.83	-13.73	-9.58	0.09	9.61	13.43	9.38	-0.09	-9.40	-13.14

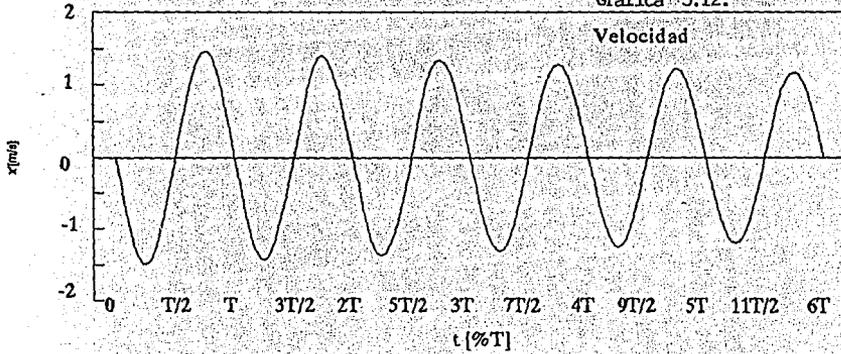
**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Gráfica 3.11.
Desplazamiento



Gráfica 3.12.

Velocidad



Gráfica 3.13.

Aceleración

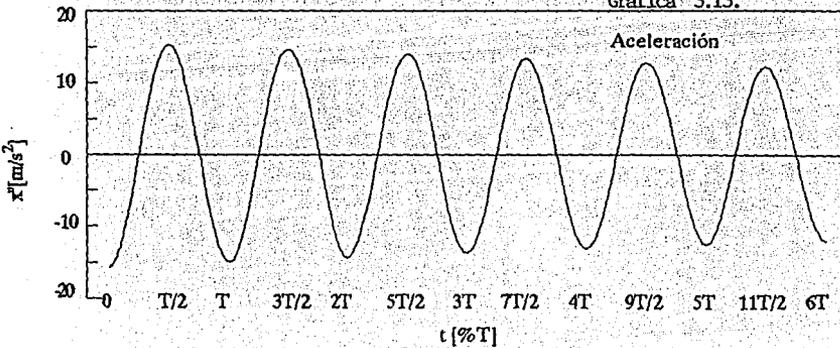


Tabla 3.5 (continuación)

t[seg]	2.4999	2.5766	2.6514	2.7271	2.8029	2.8786	2.9544	3.0301	3.1059	3.1817	3.2574
t[%T]	33T/8	17T/4	35T/8	9T/2	37T/8	19T/4	39T/8	5T	41T/8	21T/4	43T/8
x[m]	0.0868	0.00	-0.0844	-0.1195	-0.0847	-0.00	0.0825	0.1169	0.0828	0.00	-0.0807
x'[m/s]	-0.891	-1.253	-0.881	0.00	0.8714	1.228	0.862	0.00	-0.852	-1.199	-0.844
x''[m/s ²]	-9.17	0.09	9.20	12.85	8.98	-0.09	-9.00	-12.56	-8.78	0.08	8.80

t[seg]	3.3332	3.4089	3.4847	3.5604	3.6362
t[%T]	22T/4	45T/8	23T/4	47T/8	6T
x[m]	-0.1144	-0.0810	0.00	0.0790	0.1118
x'[m/s]	0.00	0.834	1.173	0.825	0.00
x''[m/s ²]	12.30	8.59	-0.08	-8.61	-12.03

III.-Una grúa viajera cuyo peso es de 500[kg], se encuentra colocada a la mitad del claro de su trabe carril, ver figura 3.24, y soporta un peso muerto de 2000[kg]. Si debido a un defecto en la fabricación del cable de soporte la carga es soltada repentinamente, determinar (despécese el peso propio de la trabe carril): a) La ecuación del movimiento libre amortiguado, b) la constante de amortiguamiento crítico (C_c), la frecuencia angular y el período de oscilación amortiguados (ω_D , T_D), la frecuencia natural (f) y el decremento logarítmico (S) del sistema; c) la respuesta de desplazamientos del sistema durante la oscilación y d) el valor de la velocidad máxima y el instante en que ésta se alcanza.

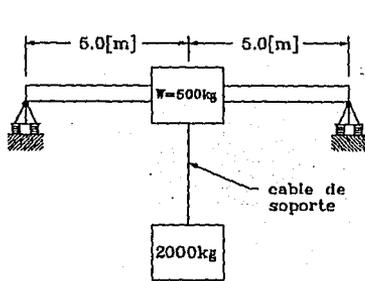


Figura 3.24. Grúa viajera de una nave industrial.

Características de la trabe carril:

$I = 9074 \times 10^8 \text{ [m}^4\text{]}$
 $\xi = 10\%$
 $E = 2 \times 10^6 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$

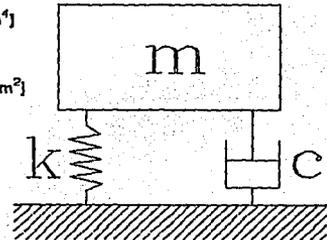


Figura 3.25. Sistema discreto simple que representa a la figura 3.24.

a) Ecuación del movimiento libre amortiguado

El sistema original puede idealizarse como un sistema vibratorio discreto simple como el mostrado en la figura 3.25, en donde:

$$m = W/g = 500[\text{kg}]/9.80665[\text{m/s}^2] = 50.99 \text{ [kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}] \quad \dots(a)$$

Para una viga simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro del claro, la rigidez k vale [ref. 6] :



$$k = 48EI/L^3 \quad \dots(b)$$

por tanto

$$k = (48)(2)(10^{10})[\text{kg/m}^2](9074)(10^{-8})[\text{m}^4]/(10[\text{m}])^3 = 87110.4 [\text{kg/m}] \quad \dots(c)$$

de la ecuación (3.6)

$$w = [k/m]^{0.5} = [87110.4[\text{kg/m}]/50.99[\text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}]]^{0.5} = 41.33 [\text{rad/seg}] \quad \dots(d)$$

de la ecuación (3.15)

$$\xi = c/(2mw)$$

de donde

$$c = \xi 2mw = (0.1)(2)(50.99[\text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}])(41.33 [\text{rad/s}]) = 421.48 [\text{kg}\cdot\text{s}/\text{m}] \quad \dots(e)$$

de la ecuación (3.12)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

y sustituyendo (a), (c) y (e)

$$50.99x'' + 421.48x' + 87110.4x = 0 \quad \dots(f)$$

ecuación del movimiento libre amortiguado.

b) Constante de amortiguamiento crítico (C_c), frecuencia angular amortiguada (w_D), período de oscilación amortiguado (T_D), frecuencia natural (f) y decremento logarítmico (S)

de la ecuación (3.16)

$$C_c = 2mw = 2(50.99[\text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}])(41.33[\text{rad/s}]) = 4214.83 [\text{kg}\cdot\text{s}/\text{m}] \quad \dots(g)$$

de la ecuación (3.19)

$$w_D = w[1-\xi^2]^{0.5} = 41.33[1-0.1^2]^{0.5} = 41.12 [\text{rad/seg}] \quad \dots(h)$$

de la ecuación (3.20)

$$T_D = 2\pi/w_D = 2\pi/41.12[\text{rad/s}] = 0.1528[\text{seg}] \quad \dots(i)$$

de la ecuación (3.8)

$$f = 1/T_D = 1/0.1528 \text{ [seg]} = 6.545 \text{ [hertz]} \quad \dots(j)$$

de la ecuación (3.22)

$$S = 2\pi\xi = (2)\pi(0.1) = 0.628 \quad \dots(k)$$

c) La respuesta de desplazamientos del sistema durante la oscilación

El desplazamiento inicial x_0 en el instante $t=0$ antes de iniciarse la oscilación, corresponde al desplazamiento estático producido por el peso propio de la grúa y la carga sostenida, y vale [rel.8]:

$$x_0 = P/k = (500+2000)/87110.4 \text{ [kg/m]} = 0.0287 \text{ [m]} = 2.87 \text{ [cm]} \quad \dots(m)$$

para ese instante de deflexión máxima, la velocidad vale: $x'_0 = 0 \quad \dots(n)$

portanto de la ecuación (3.18) para $\xi < 1.0$

$$x = e^{-\xi\omega t} [x_0 \cos\omega_d t + (x'_0 + \xi x_0 \omega \text{sen}\omega_d t) / \omega_d]$$

y sustituyendo (d), (h), (m) y (n)

$$x = e^{-4.133t} (0.0287 \cos(41.12t) + 0.002885 \text{sen}(41.12t)) \quad \dots(o)$$

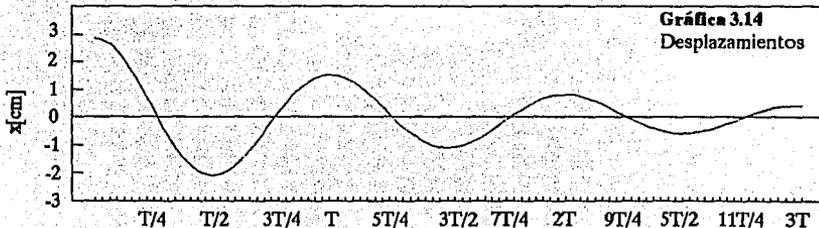
tabulando (o) se obtiene la siguiente tabla y gráfica:

Tabla 3.0

t[seg]	0.0	0.0191	0.0382	0.0573	0.0764	0.0955	0.1146	0.1337	0.1528	0.1719	0.1910
t[%T]	0T	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T	9T/8	5T/4
x[m]	0.0287	0.0206	0.0025	-0.0144	-0.0209	-0.0151	-0.0018	0.0105	0.0153	0.0110	0.0013

t[seg]	0.2101	0.2292	0.2483	0.2674	0.2865	0.3056	0.3247	0.3438	0.3629	0.3820	0.4011
t[%T]	11T/8	3T/2	13T/8	7T/4	15T/8	2T	17T/8	9T/4	19T/8	5T/2	21T/8
x[m]	-0.0077	-0.0111	-0.008	-0.001	0.0056	0.0081	0.0058	0.0007	-0.0041	-0.0059	-0.0043

t[seg]	0.4202	0.4393	0.4584
t[%T]	11T/4	23T/8	3T
x[m]	-0.0005	0.0030	0.0043



d) El valor de la velocidad máxima y el instante en que ésta se alcanza

En el problema resuelto II de este Inciso, se encontró que la respuesta de velocidades y aceleraciones para un sistema subamortiguado son

$$x' = e^{-w\xi t} \{ wD[-A_0 \operatorname{sen}(wDt) + B_0 \operatorname{cos}(wDt)] - w\xi[A_0 \operatorname{cos}(wDt) + B_0 \operatorname{sen}(wDt)] \} \quad \dots(u)$$

$$x'' = e^{-w\xi t} \{ w^2 D[-A_0 \operatorname{cos}(wDt) - B_0 \operatorname{sen}(wDt)] - 2w w D \xi [-A_0 \operatorname{sen}(wDt) + B_0 \operatorname{cos}(wDt)] +$$

$$w^2 \xi^2 [A_0 \operatorname{cos}(wDt) + B_0 \operatorname{sen}(wDt)] \} \quad \dots(v)$$

con:

$$A_0 = x_0$$

$$B_0 = (x'_0 + x_0 w \xi) / wD$$

sustituyendo valores se obtiene

$$B_0 = (0.0287)(41.33)(0.01) / 41.12 = 0.0029 [m]$$

$$x' = e^{-4.133t} \{ 41.12[-0.0287 \operatorname{sen}(41.12t) + 0.0029 \operatorname{cos}(41.12t)] - 4.133[0.0287 \operatorname{cos}(41.12t) + 0.0029 \operatorname{sen}(41.12t)] \} \quad \dots(w)$$

$$x'' = e^{-4.133t} \{ 1690.9[-0.0287 \operatorname{cos}(41.12t) - 0.0029 \operatorname{sen}(41.12t)] - 339.9[-0.0287 \operatorname{sen}(41.12t) + 0.0029 \operatorname{cos}(41.12t)] + 17.082[0.0287 \operatorname{cos}(41.12t) + 0.0029 \operatorname{sen}(41.12t)] \} \quad \dots(x)$$

Empleando en la ecuación (x) el criterio de la 1a. derivada:

$$x'' = -0.03 \approx 0 \quad \text{para cuando} \quad t = 0.03576 [\text{seg}]$$

por tanto sustituyendo este valor de t en (w)

$$x'_{\max} = -1.023 [m/s] \quad \dots(y)$$

IV.- Un tanque de almacenamiento de agua está soportado por una estructura metálica, como se muestra en la figura 3.26. Suponiendo que toda la masa del líquido se mueve con el tanque como una masa rígida, determinar (despréciase el peso propio de la estructura metálica): a) La ecuación del movimiento libre amortiguado, b) la constante de amortiguamiento crítico (C_c), la frecuencia angular y período de oscilación amortiguados (wD, T_D), la frecuencia natural (f) y el decremento logarítmico (S) del sistema, y c) La respuesta de desplazamientos del sistema si el tanque es desplazado lateralmente por una fuerza de 4 [ton].

a) Ecuación del movimiento libre amortiguado

Determinación de la rigidez lateral K: Empleando el Método del Trabajo Virtual^[ref.7], la rigidez lateral u oposición a los desplazamientos x producidos por una carga P como la mostrada en la figura 3.27a está dada por

$$P/k = x = (\sum \bar{q}_1 BL)/(AE) \dots(a) \text{ con } AE=\text{constante para este caso}$$

Características de la estructura:

$$E = 2 \times 10^6 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

A = 8 [cm²] (área transversal de cada barra)

$$\xi = 2\%$$

Peso propio del tanque (PoPo) = 500 [kg]

En la ecuación (a):

L - longitud de la barra

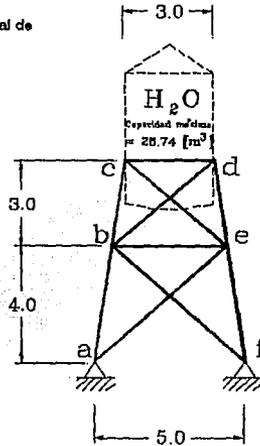
A - área transversal de la barra

E - módulo de elasticidad

\bar{q}_1 - fuerzas internas en las barras producidas por una carga virtual unitaria actuando en el punto donde se desea conocer la rigidez (figura 3.27b)

B - fuerzas internas en las barras, producidas por la carga real P (figura 3.27a)

$\bar{q}_1 BL$ - trabajo de \bar{q}_1 a través de los desplazamientos producidos por P



Acotaciones en [m]

Figura 3.26. Tanque de almacenamiento elevado.

Como se puede observar, la figura 3.27b es un caso particular de la figura 3.27a para cuando P = 1; por lo tanto solo debe resolverse la estructura de la figura 3.27b, y tendremos los mismos resultados para la figura 3.27a pero en términos de P.

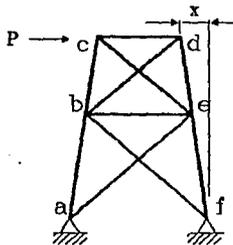


Figura 3.27a.

Resolver la estructura de la figura 3.27b implica resolver una estructura indeterminada, cuyo grado de indeterminación puede obtenerse con ^[ref. 7]:

$$G = b + r - 2n \dots(b)$$

b-Número de barras entre articulaciones

r-Número de reacciones

G-grado de indeterminación

n-Número de articulaciones

sustituyendo en (b)

$$G = 10 + 4 - 2(6) = 2 = 2^\circ \text{ grado}$$

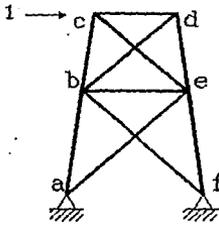
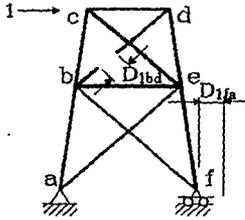
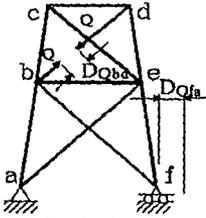


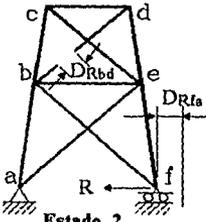
Figura 3.27b.



Estado 0.



Estado 1.



Estado 2.

Figura 3.28. Estados auxiliares para la solución de la figura 3.27b.

por tanto la estructura es indeterminada internamente en un grado (posee una barra de más), e indeterminada externamente en un grado (tiene una reacción de más).

De acuerdo con el método del trabajo virtual, es necesario plantear y resolver tres estados auxiliares imaginarios (0, 1 y 2 de la figura 3.28), que resultan estructuras isostáticas al nullificar o cortar una de las barras redundantes (como la barra bd) y eliminar una reacción redundante (como la horizontal en f); de acuerdo a esto tendremos en dichos estados desplazamientos en la barra bd (denominado D_{bd} en la figura 3.28) y en el nudo f (D_{fa} en la figura 3.28).

En el estado cero la estructura es cargada con la carga unitaria, el estado uno es cargado con la carga Q que es la fuerza interna desconocida que originalmente obra en la barra bd de la figura 3.27b, el estado dos es cargado con la carga R , que es la reacción desconocida que originalmente actúa en el apoyo f.

En la estructura original de la figura 3.27b los desplazamientos en la barra bd y en el nudo f valen cero, por lo que superponiendo los estados 0, 1 y 2 la ecuación de compatibilidad de desplazamientos es

$$\left. \begin{aligned} D_{1bd} + D_{Qbd} + D_{Rbd} &= 0 \\ D_{1fa} + D_{Qfa} + D_{Rfa} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

Cada término en la ecuación (A) se obtiene por trabajo virtual así:

$$\left. \begin{aligned} D_{1bd} &= (\sum q_1 q_0 L) / AE & D_{Qfa} &= (\sum q_2 q_L) / AE \\ D_{1fa} &= (\sum q_2 q_0 L) / AE & D_{Rbd} &= (\sum q_1 r_L) / AE \\ D_{Qbd} &= (\sum q_1 q_L) / AE & D_{Rfa} &= (\sum q_2 r_L) / AE \end{aligned} \right\} \dots (B)$$

en donde:

D_{1bd} - desplazamiento de la barra bd por causa de la carga unitaria

D_{Qbd} - desplazamiento de la barra bd por causa de la carga Q

D_{Qfa} - desplazamiento de la barra i j por causa de la carga Q

q_1 - fuerzas internas en las barras del estado uno cuando $Q = 1$
 q_2 - fuerzas internas en las barras del estado dos cuando $R = 1$
 q_0 - fuerzas internas en las barras del estado cero

q - fuerzas internas en las barras del estado uno cuando $Q = Q$
 r - fuerzas internas en las barras del estado dos cuando $R = R$

cargas virtuales unitarias

cargas reales

Analizando los estados 0, 1 y 2 se obtiene la siguiente tabla [Compresión (-); Tensión (+)]

Tabla 3.7

Barra	L[m]	q ₁	q	q ₂	r	q ₀	q ₁ q ₀ L	q ₂ q ₀ L	q ₁ qL	q ₂ qL y q ₁ L	q ₂ L
ab	4.04	0.00	0.00	0.914	0.914R	0.58	0.00	2.142	0.00	0.00	3.375R
bc	3.03	-0.67	-0.67Q	0.00	0.00	0.79	-1.604	0.00	1.36Q	0.00	0.00
de	3.03	-0.67	-0.67Q	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.36Q	0.00	0.00
ef	4.04	0.00	0.00	0.914	0.914R	-1.62	0.00	-5.982	0.00	0.00	3.375R
be	3.86	-0.66	-0.66Q	1.13	1.13R	-0.26	0.662	-1.134	1.69Q	-2.88Q	4.929R
cd	3.00	-0.85	-0.85Q	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.166Q	0.00	0.00
ce	4.56	1.00	1.00Q	0.00	0.00	-1.18	-5.381	0.00	4.56Q	0.00	0.00
ae	5.97	0.00	0.00	-1.35	-1.35R	1.24	0.00	-9.994	0.00	0.00	10.88R
bf	5.97	0.00	0.00	-1.35	-1.35R	0.31	0.00	-2.50	0.00	0.00	10.88R
Σ=							-8.323	-17.468	11.128Q	-2.88Q -2.88R	33.439R

Por tanto sustituyendo los valores de la tabla en las ecuaciones (B) y (A)

$$\left. \begin{aligned} 11.128Q - 2.880R &= 6.323 \\ -2.88Q + 33.439R &= 17.468 \end{aligned} \right\} \dots(C)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$\left. \begin{aligned} Q &= 0.719 \\ R &= 0.584 \end{aligned} \right\} \dots(D)$$

Con los sentidos indicados en la figura 3.2b

Ahora conocemos las fuerzas redundantes (R y Q) que sustituidas en la figura 27b, convierten la estructura en isostática. Realizando dicha sustitución y analizando la figura 3.27a y 3.27b se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 3.8

Barra	L	-q ₁	B	-q ₁ BL
ab	4.04	1.19	1.19P	5.721P
bc	3.03	0.31	0.31P	0.291P
de	3.03	-0.48	-0.48P	0.698P
ef	4.04	-1.012	-1.012P	4.138P
be	3.86	0.024	0.024P	0.002P
cd	3.00	-0.61	-0.61P	1.116P
ce	4.56	-0.461	-0.461P	0.969P
db	4.56	0.719	0.719P	2.357P
ae	5.97	0.334	0.334P	0.666P
bf	5.97	-0.594	-0.594P	2.106P
Σ				18.064P

Sustituyendo finalmente el valor de la tabla en la ecuación (a)

$$P/k = x = 18.064P/(AE)$$

de donde $k = AE/18.064$... (c)

sustituyendo los valores de A y E observados en la figura 3.26 en la ecuación (c)

$$k = (8)(10^{-4})[m^2](2)(10^7)[ton/m^2] / 18.064[m] = 885.74[ton/m] \dots(d)$$

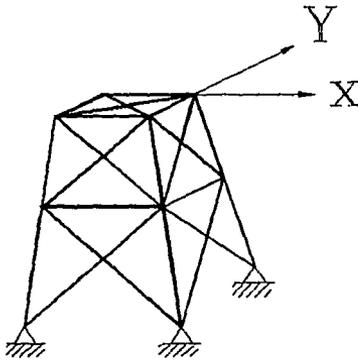


Figura 3.29.

Ya sea que se analice en dirección X o en dirección Y, la estructura consta de dos armaduras paralelas en cada dirección. Por tanto se puede idealizar como un sistema discreto simple como el de la figura 3.30, con rigidez:

$$K = 2k = 2(885.74) = 1771.5[\text{ton/m}]$$

El peso del agua dentro del tanque es

$$W_o = V\gamma_o \quad \dots(e)$$

V - volumen [m³]

γ_o - Peso específico del agua [ton/m³]

sustituyendo en (e)

$$W_o = (26.74[\text{m}^3])(1[\text{t/m}^3]) = 26.74[\text{ton}] \quad \dots(f)$$

El peso total sobre la estructura en la figura 3.29 es igual al peso del agua más el del tanque

$$W = W_o + W_{\text{tanque}} = 26.74 + 0.5 = 27.24[\text{ton}] \quad \dots(g)$$

la masa del sistema oscilatorio es

$$m = W/g = 27.24[\text{ton}]/9.80665[\text{m/s}^2] = 2.78[\text{t-s}^2/\text{m}] \quad \dots(h)$$

$$\text{de la ecuación (3.15)} \quad c = \xi(2mw) \quad \dots(i)$$

y de la ecuación (3.6)

$$w = [k/m]^{0.5} = (1771.5[\text{t/m}]/2.78[\text{t-s}^2/\text{m}])^{0.5} = 25.24[\text{rad/seg}] \quad \dots(j)$$

sustituyendo (h) y (i) en (j)

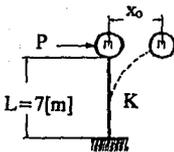
$$c = (0.02)(2)(2.78[\text{t-s}^2/\text{m}])(25.24[\text{rad/s}]) = 2.81 [\text{t-s/m}] \quad \dots(k)$$

$$\text{de la ecuación (3.12)} \quad mx'' + cx' + kx = 0$$

sustituyendo (h), (k) y (e) en (3.12)

$$2.78x'' + 2.81x' + 1771.5x = 0 \quad \dots(m) \quad \text{ecuación del movimiento libre subamortiguado}$$

Figura 3.30. Sistema discreto simple que representa a la estructura de la figura 3.29.



b) Constante de amortiguamiento crítico (C_c), frecuencia angular amortiguada (ω_D), período de oscilación amortiguado (T_D), frecuencia natural (f) y decremento logarítmico (S).

de la ecuación (3.16)

$$C_0 = 2mw = 2(2.78)(25.24) = 140.33[t-s/m] \quad \dots(r)$$

de la ecuación (3.19)

$$w_D = w[1-\xi^2]^{0.5} = 25.24[1-0.02^2]^{0.5} = 25.235 \text{ [rad/seg]} \quad \dots(o)$$

de la ecuación (3.20)

$$T_D = 2\pi/w_D = 2\pi/25.235[\text{rad/s}] = 0.249[\text{seg}] \quad \dots(p)$$

de la ecuación (3.8)

$$f = 1/T_D = 1/0.249[\text{seg}] = 4.02[\text{hertz}] \quad \dots(q)$$

de la ecuación (3.22)

$$S = 2\pi\xi = 2\pi(0.02) = 0.126 \quad \dots(r)$$

c) Respuesta de desplazamientos del sistema cuando es desplazado por una fuerza lateral de 4[ton]

El desplazamiento máximo inicial en la figura 3.30 es para $t = 0$

$$x_0 = P/k = 4[\text{ton}]/1771.5[t/m] = 0.0023[m] = 0.23[\text{cm}] \quad \dots(s)$$

Cuando el desplazamiento es máximo, la masa m debe detenerse para poder invertir el sentido de su desplazamiento, y para ese instante

$$x'_0 = 0 \quad \dots(t)$$

La respuesta de desplazamientos para cuando $\xi < 1.0$ es

$$x = e^{-\xi w_D t} [x_0 \cos w_D t + (x'_0 + \xi x_0 w_D \sin w_D t) / w_D] \quad \dots(3.18)$$

y sustituyendo

$$x = e^{-0.502t} (0.0022 \cos(25.235t) + (4.6)(10^{-5}) \sin(25.235t)) \quad \dots(u)$$

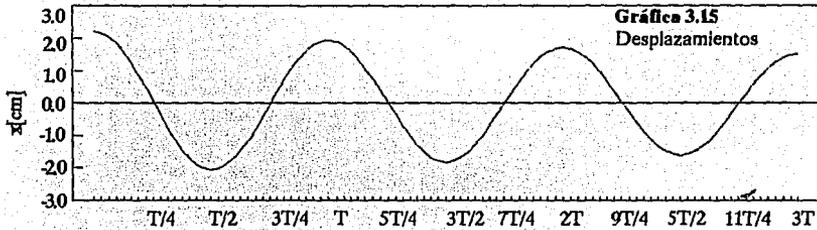
Tabulando y graficando la ecuación (u) se obtiene

Tabla 3.0

t[seg]	0.0	0.0311	0.0623	0.0934	0.1245	0.1556	0.1868	0.2179	0.2490	0.2801	0.3113
t[%T]	0%	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T	9T/8	5T/4
x[m]	0.0022	0.0016	0.00	-0.0015	-0.0021	-0.0015	0.00	0.0014	0.0019	0.0014	0.00

t[seg]	0.3424	0.3735	0.4046	0.4358	0.4669	0.4980	0.5291	0.5603	0.5914	0.6225	0.6536
t[%T]	11T/8	3T/2	13T/8	7T/4	15T/8	2T	17T/8	9T/4	19T/8	5T/2	21T/8
x[m]	-0.0013	-0.0018	-0.0013	0.00	0.0012	0.0017	0.0012	0.00	-0.0011	-0.0016	-0.0011

$t[\text{seg}]$	0.6848	0.7159	0.7470
$t[\%T]$	117/4	237/8	3T
$x[\text{m}]$	0.0000	0.0011	0.0015



V.-El puente peatonal mostrado en la figura 3.31 es usado para proporcionar acceso al primer piso de un edificio de oficinas. La estructuración del puente es en concreto reforzado, el sistema de piso está formado por losas aligeradas con casetones de concreto con peso volumétrico de $600 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ y con el arreglo indicado en las figuras 3.33 y 3.34, estas losas están soportadas por traveses de sección rectangular a nivel del lecho inferior, por lo que este tipo de puente es conocido como de "paso inferior", pues dichas traveses constituyen a la vez el soporte y el pretel de contención, ver figura 3.32.

Las traveses principales del puente están apoyadas en dos de sus extremos por los muros de concreto del cubo de elevadores y de las escaleras principales siendo la conexión en estos puntos del tipo rígido (monolíticamente colado). Un tercer soporte del puente lo forma por apoyo libre una columna circular hueca de 180 [cm] de diámetro exterior y un espesor de 20 [cm] ; finalmente otro de los extremos de las traveses del puente está simplemente apoyado en las traveses del edificio de oficinas.

Para la columna circular hueca C1, determinar: a) La ecuación del movimiento libre amortiguado si se conoce que el porcentaje de amortiguamiento crítico es del 5%; b) la frecuencia angular amortiguada, la frecuencia natural y el período de oscilación amortiguados; y c) si se requiere que la columna circular tenga un período de oscilación amortiguado de 0.4 [seg] con un porcentaje de amortiguamiento crítico de 5%, hallar el espesor de la columna.

a) Ecuación del movimiento libre amortiguado

I.- EVALUACION DE CARGAS

● CARGA MUERTA

Para un área como la mostrada en el detalle 1 de la figura 3.33 :

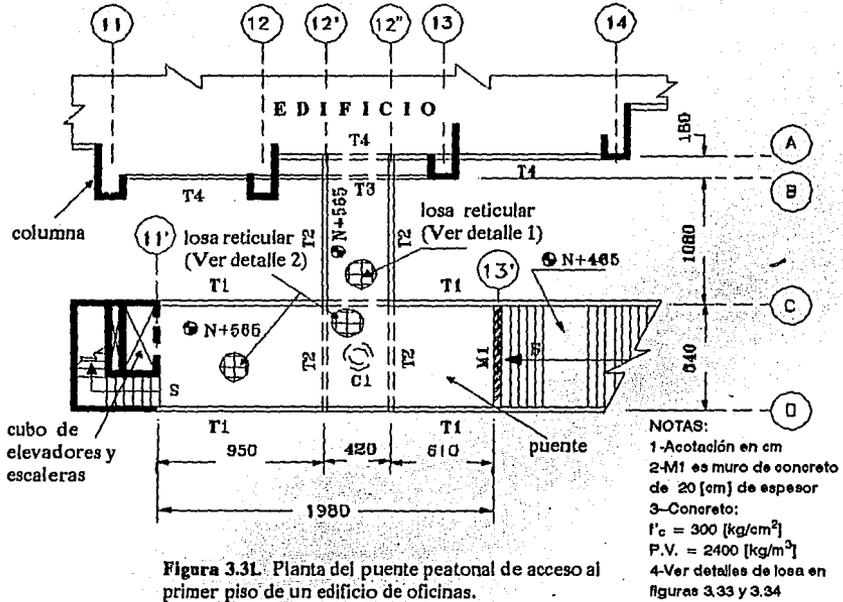


Figura 3.31. Planta del puente peatonal de acceso al primer piso de un edificio de oficinas.

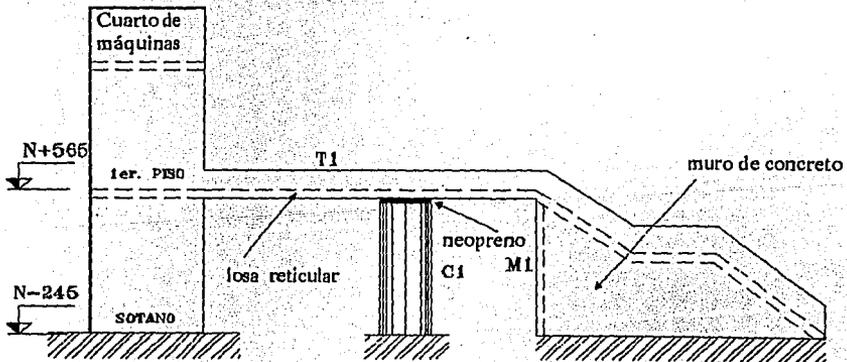
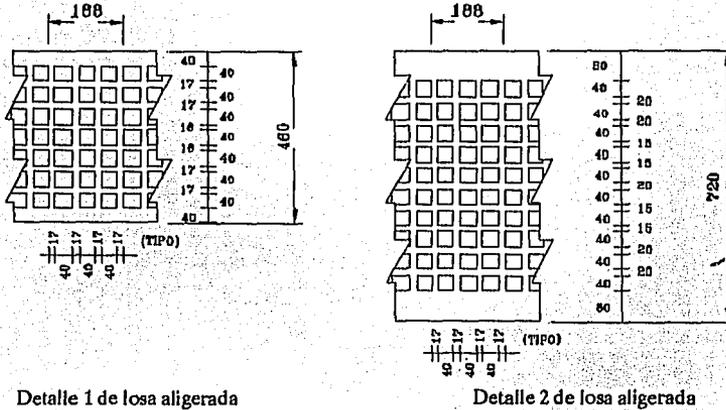


Figura 3.32. Elevación del puente peatonal de la figura 3.31.



Detalle 1 de losa aligerada

Detalle 2 de losa aligerada

Figura 3.33. Sistema de piso del puente peatonal.

El volumen total (V_T) es

$$V_T = (1.88m)(4.6m)(0.43m) = 3.719 [m^3] \quad \dots(a)$$

El volumen aligerado (V_a) con casetones de concreto es

$$\# \text{ de cajas} = 7 \times 3 = 21$$

$$V_a = (0.4m)(0.4m)(0.35m)(21) = 1.176 [m^3] \quad \dots(b)$$

El volumen neto (V_n) de concreto es

$$V_n = V_T - V_a = 3.719 - 1.176 = 2.543 [m^3] \quad \dots(c)$$

Por tanto de (b)

$$\text{Peso de casetones} = W_p = V_a \gamma_p = (1.176m^3)(600kg/m^3) = 706 [kg]$$

$$\text{Peso del concreto} = W_c = V_n \gamma_c = (2.543m^3)(2400kg/m^3) = 6103 [kg]$$

$$\text{Peso total de losa} = W_L = W_p + W_c = 706 + 6103 = 6809 [kg] \quad \dots(d)$$

$$\text{Peso de la losa por } m^2 = w_L = (6809kg)/[(1.88m)(4.6m)] = 787.4 [kg/m^2] \quad \dots(e)$$

Para un área como la mostrada en el detalle 2 de la figura 3.33 :

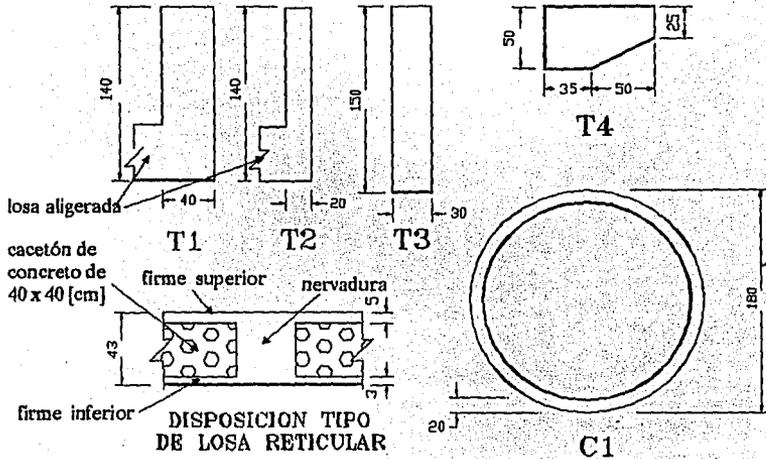


Figura 3.34. Elementos estructurales del puente peatonal.

El volumen total (V_T) es

$$V_T = (1.88m)(7.2m)(0.43m) = 5.82 [m^3] \quad \dots(f)$$

El volumen aligerado (V_a) con casetones de concreto es

$$\# \text{ de cajas} = 10 \times 3 = 30$$

$$V_a = (0.4m)(0.4m)(0.35m)(30) = 1.68 [m^3] \quad \dots(g)$$

El volumen neto (V_n) de concreto es

$$V_n = V_T - V_a = 5.82 - 1.68 = 4.14 [m^3] \quad \dots(h)$$

Por tanto de (g)

$$\text{Peso de casetones} = W_p = V_{ayp} = (1.68m^3)(600kg/m^3) = 1008 [kg]$$

$$\text{Peso del concreto} = W_c = V_{nc} = (4.14m^3)(2400kg/m^3) = 9936 [kg]$$

$$\text{Peso total de losa} = W_L = W_p + W_c = 1008 + 9936 = 10944 [kg] \quad \dots(i)$$

$$\text{Peso de la losa por } m^2 = w_L = (10944kg)/[(1.88m)(7.2m)] = 808.5 [kg/m^2] \quad \dots(j)$$

Peso de vigas:

$$\text{Viga T1: } w_{T1} = (1.4 \cdot 0.4)m(0.4m)(2400\text{kg/m}^3) = 960 \text{ [kg/m]}$$

$$\text{Viga T2: } w_{T2} = (1.4 \cdot 0.4)m(0.2m)(2400\text{kg/m}^3) = 480 \text{ [kg/m]}$$

● CARGA VIVA (RCDF-93^[ref. 4])

$$CV_{\text{sis}} = 150 \text{ [kg/m}^2\text{]}$$

II.- DESCARGA SOBRE LA COLUMNA CIRCULAR C1

Se necesita conocer la descarga del puente sobre la columna circular C1 con objeto de evaluar la masa oscilatoria, por tanto para ambos sentidos de circulación del puente, éste puede idealizarse mediante la viga continua de la figura 3.35, considerando que el tramo del puente paralelo a los ejes 12' y 12", se apoya en el tramo paralelo a los ejes C y D.

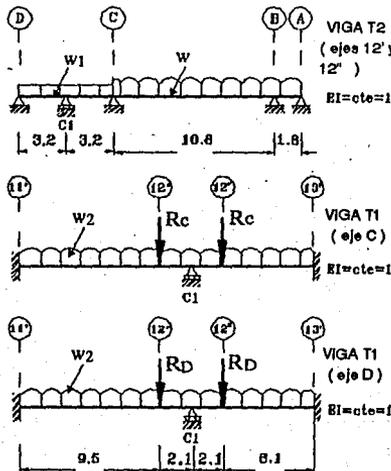


Figura 3.35. Modelo de análisis del puente peatonal.

Cargas sobre las vigas del puente (se consideran $20 \text{ [kg/m}^2\text{]}$ por ser losa colada en el lugar, RCDF-93^[ref. 4]):

Vigas T2 (ejes 12' y 12")

$$w = w_L + w_{T2} =$$

$$= [(4.6m)(787.4 + 20 + 150)\text{kg/m}^2 + 2(480\text{kg/m})]/2$$

$$= 2682 \text{ [kg/m]} \quad \dots (k)$$

$$w_1 = w_{T2} = 480 \text{ [kg/m}^2\text{]} \quad \dots (l)$$

Vigas T1 (ejes C y D)

$$w_2 = w_L + w_{T1} =$$

$$= [(7.2m)(808.5 + 20 + 150)\text{kg/m}^2 + 2(960\text{kg/m})]/2$$

$$= 4483 \text{ [kg/m]} \quad \dots (m)$$

● ANÁLISIS DE LAS VIGAS DE LOS EJES 12' Y 12"

Empleando el Método de Rigideces^[ref 7] para resolver la viga mostrada en la figura 3.36 y por ser una viga indeterminada en tercer grado es necesario plantear y resolver tres estados auxiliares imaginarios (1, 2 y 3 de la figura 3.36).

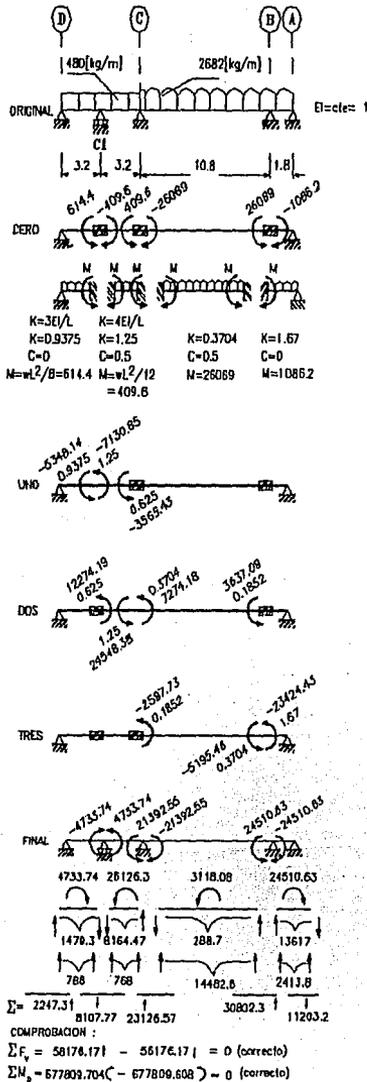


Figura 3.36. Modelo de análisis del tramo del puente paralelo a los ejes 12' y 12".

En el estado cero la estructura es cargada con las cargas reales y se sustituyen los apoyos articulados por nodos rígidos que impiden los giros angulares; se calculan los momentos de empotramiento perfecto M producidos por las cargas reales, así como los factores de rigidez K y de transporte C .

El estado uno se genera cuando se libera uno de los nodos restringidos y se permite el giro; se producen así momentos internos que son función de la rigidez K y giro angular θ de los tramos de viga que conectan, en el extremo opuesto al nodo liberado se crean momentos que son función del factor de transporte C .

El estado siguiente se genera al restringir la liberación del nodo anterior y efectuar una nueva liberación (estado dos) repitiendo los pasos mencionados en el párrafo anterior. Este ciclo se continúa hasta generar todos los estados auxiliares.

Aplicando los estados 0, 1, 2 y 3, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas en función de las condiciones de frontera que se conocen de la estructura real y que para este caso son: la suma de momentos en las articulaciones debe ser cero, condición necesaria para que exista equilibrio :

$$\Sigma M_{C1} = 0: 2.1875\theta_{C1} + 0.625\theta_C + 204.8 = 0$$

$$\Sigma M_C = 0: 0.6250\theta_{C1} + 1.620\theta_C + 0.185\theta_B - 25659.4 = 0$$

$$\Sigma M_B = 0: 0.1850\theta_C + 2.040\theta_B + 24982.8 = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

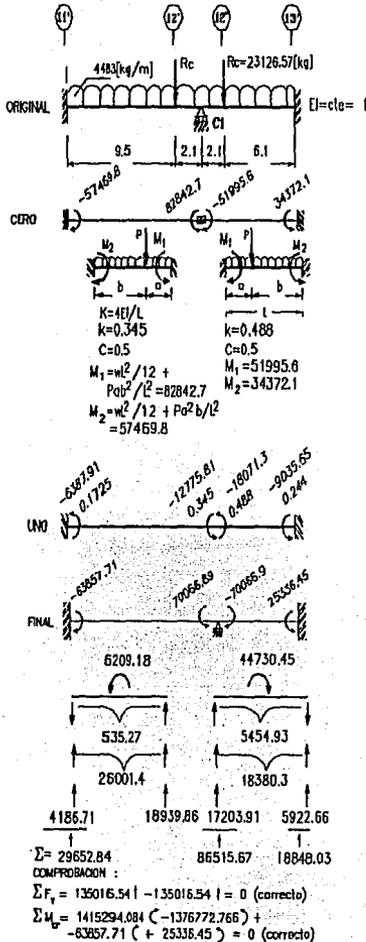
$$\theta_{C1} = -5704.680598$$

$$\theta_C = 19638.70209$$

$$\theta_B = -14026.60637$$

Sustituyendo estos valores en cada uno de los estados auxiliares y sumando por separado los momentos a ambos lados de cada nodo se obtiene el estado o condición final en equilibrio de la figura 3.36.

Finalmente, para obtener las reacciones de cada apoyo se descomponen los momentos internos de cada barra en un par de fuerzas y se superponen las reac-



ciones isostáticas producidas por las cargas actuantes. Como comprobación se verifica que exista el equilibrio básico de fuerzas en cualquier punto de la estructura de la figura 3.36.

Por tanto de dicha figura se observa que la descarga sobre la columna circular C1 es

$$P_1 = (8107.77)(2v/gas) = 16215.54 \text{ [kg]}(\text{tensión}) \dots (n)$$

● ANALISIS DE LA VIGA DEL EJE C

De la figura 3.35, se observa que se trata de una viga indeterminada en cuarto grado; pero ya que existen tablas en las que se han tabulado las reacciones para vigas empotradas [ref. 10], solo es necesario plantear un estado auxiliar para conocer la reacción en el apoyo deslizable. Usando el mismo procedimiento empleado en la viga anterior y superponiendo los estados auxiliares 0, y 1 mostrados en la figura 3.37a se obtiene:

$$\Sigma M_{C1} = 0: 0.833\theta_{C1} + 30847.1 = 0$$

$$\theta_{C1} = -30847.1/0.833 = -37031.33253$$

Procediendo análogamente a lo indicado en la viga precedente, se obtiene el estado final de equilibrio interno y externo mostrado en la figura 3.37a, en donde se observa que la descarga sobre la columna circular C1 debida a esta viga del puente es

$$P_2 = 86515.67 \text{ [kg]}(\text{compresión}) \dots (o)$$

● ANALISIS DE LA VIGA DEL EJE D

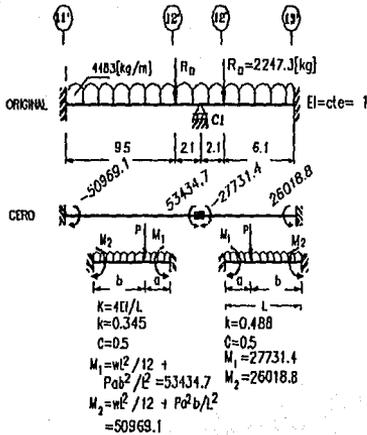
Esta viga es igual a la del eje C; pero con cargas diferentes, por lo que la ecuación de desplazamientos es, según se observa en la figura 37b:

$$\Sigma M_{C1} = 0: 0.833\theta_{C1} + 25703.3 = 0$$

$$\theta_{C1} = -25703.3/0.833 = -30856.30252$$

Figura 3.37a. Modelo de análisis de la viga del eje C.

de donde



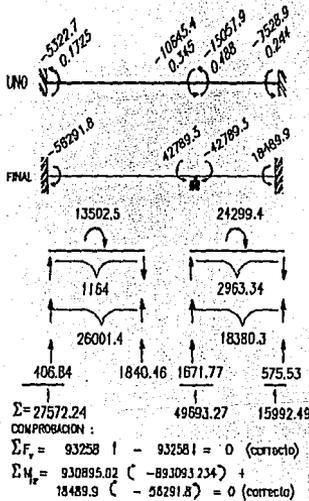
del estado final de equilibrio externo e interno de la citada figura se observa que la descarga sobre la columna circular C1 debida a esta viga del puente es

$$P_3 = 49693.27 \text{ [kg]} \text{ (compresión)} \quad \dots(p)$$

Por lo tanto de (n), (o) y (p), la descarga total sobre la columna circular C1 por los dos tramos del puente peatonal es

$$P_{C1} = P_1 + P_2 + P_3 = -16215.54 + 86515.67 + 49693.27 =$$

$$P_{C1} = 119993.4 \text{ [kg]} \quad \dots(q)$$



III.- MASA OSCILANTE DE LA COLUMNA C1

Por ser la columna C1 de dimensiones considerables*, se empleará el "Criterio de discretización de masas" mencionado en el inciso 3.2., y mostrado esquemáticamente en la figura 3.38, en donde se considera que la mitad de la masa de la columna está concentrada en la parte superior de la misma.

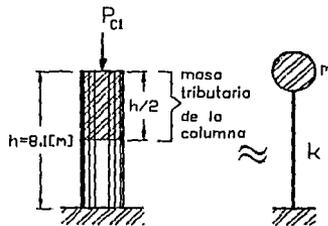


Figura 3.38. Sistema discreto simple que representa a la columna circular C1.

Figura 3.37b. Modelo de análisis de la viga del eje D.

Area exterior de la columna = $A_e = \pi r_e^2 = \pi(0.9m)^2 = 2.5447 \text{ [m}^2\text{]}$

Area del hueco interior = $A_i = \pi r_i^2 = \pi(0.7m)^2 = 1.5394 \text{ [m}^2\text{]}$

* La masa de la columna representa en este caso alrededor del 16% de la descarga del puente sobre la columna

$$\text{Area neta del concreto} = A_n = A_e - A_l = 2.5447 - 1.5394 = 1.0053 \approx 1 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\text{Peso de la columna} = W_{C1} = A_n \gamma_c = (1 \text{ m}^2)(2400 \text{ kg/m}^3) = 2400 \text{ [kg/m]}$$

$$\text{Masa del sistema oscilatorio} = m = \{P_{C1} + W_{C1}(h/2)\}/g = (119993.4 + 2400(8.1/2))/g = (119993.4 + 9720)/g = 129713.4 \text{ [kg]}/g = 129.7134 \text{ [ton]}/9.80665 \text{ [m/s}^2\text{]} = 13.227 \text{ [t-s}^2\text{/m]} \dots (r)$$

La rigidez de la columna vale^[ref. 6] (la columna se comporta como una viga en cantiliver)

$$K = 3EI/L^3 \dots (s)$$

Para concreto tipo 1 (Peso volumétrico $\geq 2200 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ en estado fresco, y $f'_c \geq 250 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$), el RCDF-93^[ref. 4] indica estimar el módulo de elasticidad E como

$$E = 14000[f'_c]^{0.5} = 14000[300]^{0.5} = 242487 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 2424870 \text{ [t/m}^2\text{]} \dots (t)$$

Momento de inercia de una sección transversal circular hueca^[ref. 8]

$$I = \pi(r^4_e - r^4_i)/4 = \pi(0.9^4 - 0.7^4)/4 = 0.32873 \text{ [m}^4\text{]} \dots (u)$$

sustituyendo (s) y (t) en (r)

$$K = 3(2424870 \text{ t/m}^2)(0.32873 \text{ m}^4)/(8.1 \text{ m})^3 = 4472.43 \text{ [t/m]} \dots (v)$$

de la ecuación (3.6) $w = [K/m]^{0.5}$

y sustituyendo (r) y (v)

$$w = [4472.43 \text{ [t/m]} / 13.227 \text{ [t-s}^2\text{/m]}]^{0.5} = 18.388 \text{ [rad/seg]} \dots (w)$$

de la ecuación (3.16) $C_o = 2mw = 2(13.227 \text{ [t-s}^2\text{/m]})(18.388 \text{ [rad/s]}) = 486.44 \text{ [t-s/m]} \dots (x)$

de la ecuación (3.15) $c = 2\xi mw = C_o \xi = (486.44 \text{ [t-s/m]})(0.05) = 24.322 \text{ [t-s/m]} \dots (y)$

de la ecuación (3.12), la expresión para el movimiento libre amortiguado es

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

y sustituyendo (r), (y) y (v)

$$13.227x'' + 24.322x' + 4472.43x = 0 \dots (z) \text{ Ecuación del movimiento libre amortiguado}$$

b) Frecuencia angular amortiguada (w_D), frecuencia natural amortiguada (f_D), y período de oscilación amortiguado (T_D)

de la ecuación (3.19) y sustituyendo (w)

$$w_D = w[1 - \xi^2]^{0.5} = 18.388[1 - 0.05^2]^{0.5} = 18.365 \text{ [rad/seg]} \dots (A)$$

de la ecuación (3.20) $T_D = 2\pi/w_D = 2\pi/18.365 = 0.3421 \text{ [seg]} \dots (B)$

de la definición de frecuencia natural $f_D = 1/T_D = 1/0.3421 = 2.92$ [ciclos/seg] ... (C)

c) Se requiere que $T_D = 0.4$ [seg] y $\xi = 0.05$

por tanto despejando w_D de la ecuación (3.20) $w_D = 2\pi/T_D = 2\pi/0.4 = 15.708$ [rad/seg] ... (D)

y despejando w de la ecuación (3.19)

$$w = w_D / [1 - \xi^2]^{0.5} = 15.708 / [1 - 0.05^2]^{0.5} = 15.7277 \text{ [rad/seg]} \quad \dots (E)$$

de la ecuación (3.6)

$$K = w^2 m$$

y sustituyendo (s), (r) y (E) en la ecuación anterior

$$3EI/L^3 = (15.7277)^2 \{ P C_1 / g + A \gamma \gamma_0 (h/2) / g \} \quad \dots (F)$$

y sustituyendo (t), L, γ , g, (u) y (q) en (F)

$$\{3(2424870)(\pi/4)(r^4 - r_i^4)\} / (8.1)^3 = (15.7277)^2 \{119.9934 / 9.80665 + \pi(r_e^2 - r_i^2)(2.4)(8.1/2) / 9.80665\}$$

$$\text{de donde} \quad 10750.89301(r^4 - r_i^4) = 3026.684249 + 770.2396928(r_e^2 - r_i^2)$$

$$\text{sustituyendo } r_e = 0.9 \text{ [m]}$$

$$7053.660904 - 10750.89301r_i^4 = 3026.684249 + 623.8941512 - 770.2396928r_i^2$$

$$\text{y factorizando} \quad 10750.89301r_i^4 - 770.2396928r_i^2 - 3403.082504 = 0 \quad \dots (G)$$

$$\text{iterando la ecuación (G)} \quad \eta \approx 0.774325 \text{ [m]}$$

por tanto el espesor requerido es

$$t = r_e - \eta = 0.9 - 0.774325 = 0.125675 \text{ [m]} = 12.5675 \text{ [cm]} \quad \dots (H)$$

3.2.2.5.-PROBLEMAS PROPUESTOS*

I.-La trabe en cantiliver mostrada en la figura 3.39 es usada en una bodega para la elevación y manejo de materiales con peso máximo de 1000 [kg]. El malacate con motor eléctrico usado para el levante tiene un peso de 300 [kg]. Si la carga es soltada repentinamente debido a una ruptura en el cable de soporte estando el malacate en la posición mostrada en la figura, determinar (despréciase el peso propio de la trabe): a) La ecuación del movimiento libre amortiguado si se sabe que el porcentaje de amortiguamiento crítico es del 1%; b) la frecuencia angular o circular amortiguada; c) el período de oscilación amortiguado; y d) la frecuencia natural amortiguada.

Solución [en kg, cm, seg]: a) $0.306x'' + 0.3746x' + 1146.3x = 0$; b) $w_D = 61.202$ [rad/seg]; c) $T_D = 0.1027$ [seg]; d) $f_D = 9.737$ [hertz].

* Aplíquese en todos ellos el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal de 1993.

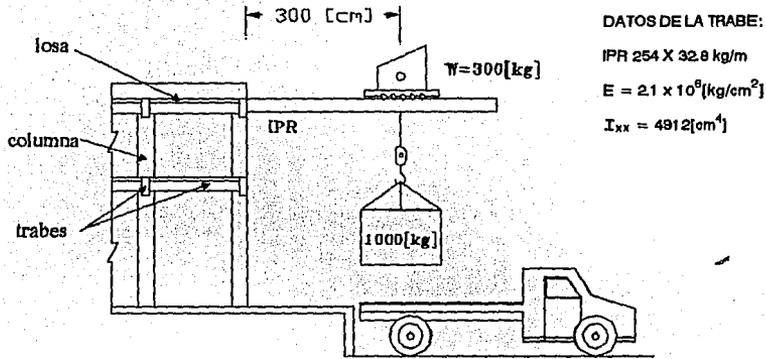


Figura 3.39. Trabe en cantiliver para manejo de materiales.

II.-La caseta de vigilancia para el control de acceso de vehículos a un estacionamiento, mostrada en la figura 3.40 está estructurada, para el sentido corto del inmueble, a base de muros de carga de 15 [cm] de espesor formados por piezas de block de barro hueco; cuenta con 2 marcos de concreto reforzado paralelos al sentido largo de la estructura que están constituidos por columnas y traveses de sección rectangular de 20 x 40 [cm]. El sistema de techo se forma con una losa maciza de 10 [cm] de espesor perimetralmente apoyada, esta losa soporta también un tanque de almacenamiento de agua con un peso neto de 200 [kg] y una capacidad máxima de 1200 [lts].

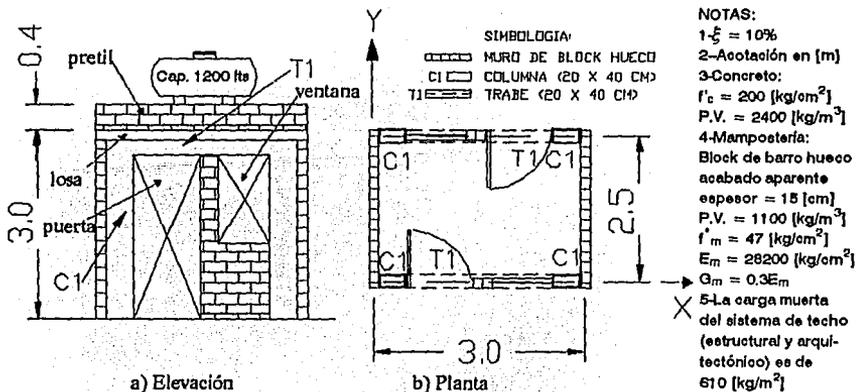


Figura 3.40. Caseta de vigilancia

Para el sentido corto de la estructura, determinar: a) La ecuación del movimiento libre amortiguado; b) la frecuencia angular o circular amortiguada; c) el período de oscilación amortiguado; d) la frecuencia natural amortiguada; y e) los desplazamientos de la masa en función del período de oscilación amortiguado, si una fuerza lateral estática de 5 [ton] actuando sólo por un instante de tiempo desplaza la estructura; para cuando $t= 0, T/8, T/4, 3T/8, T/2, 5T/8, 3T/4, 7T/8, T, 9T/8$ y $5T/4$.

Solución [en ton, mts, seg]: a) $0.857x'' + 15.14x' + 6686.1x = 0$; b) $\omega_D = 87.885$ [rad/seg]; c) $T_D = 0.0715$ [seg]; d) $f_D = 13.99$ [hertz]; e) los desplazamientos de la masa son:

t[seg]	0.0	0.0089	0.0179	0.0268	0.0358	0.0447	0.0536	0.0626	0.0715	0.0804	0.0894
t[%T]	0T	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T	9T/8	5T/4
x[cm]	0.0748	0.0539	0.0063	-0.0375	-0.0545	-0.0392	-0.0048	0.0275	0.0398	0.0287	0.0033

Tabla 3.10

III.-El puente peatonal mostrado en la figura 3.41 es empleado para cruzar una avenida importante de intenso tráfico en un centro de convivencia pública. La estructura es de concreto reforzado, el sistema de piso consta de una losa maciza de 20 [cm] de espesor soportada por tres traveses de sección rectangular prismática de 30×160 [cm]. El puente tiene tres apoyos; en los extremos es soportado por apoyo simple en los taludes del terreno natural revestidos con lajas de piedra braza; en el centro se apoya libremente sobre un sistema de tres arcos paralelos de sección rectangular prismática de 30×160 [cm] mediante unas ménsulas y placas de neopreno. Nótese que la parte central del puente es soportada íntegramente por el citado sistema de arcos y que fueron colados monolíticamente con el sistema de piso, ver figura 3.42.

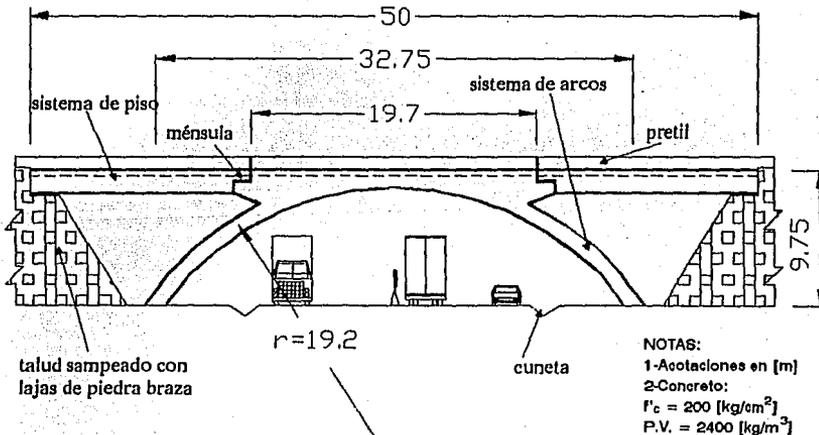


Figura 3.41. Puente peatonal

Si al realizar una prueba de vibración libre al sistema de arcos se miden las amplitudes de dos desplazamientos consecutivos en $X_n = 0.156$ [mm] y $X_{n+1} = 0.129$ [mm], para el mencionado sistema de arcos, determinar: a) El porcentaje de amortiguamiento crítico; b) la ecuación del movimiento libre amortiguado; c) la frecuencia angular amortiguada; d) el período amortiguado de oscilación; e) la frecuencia natural amortiguada; f) las respuestas de desplazamiento, velocidad y aceleración suponiendo que actúa una fuerza estática lateral de 200 [ton] en el sentido longitudinal del puente sólo por un instante de tiempo.

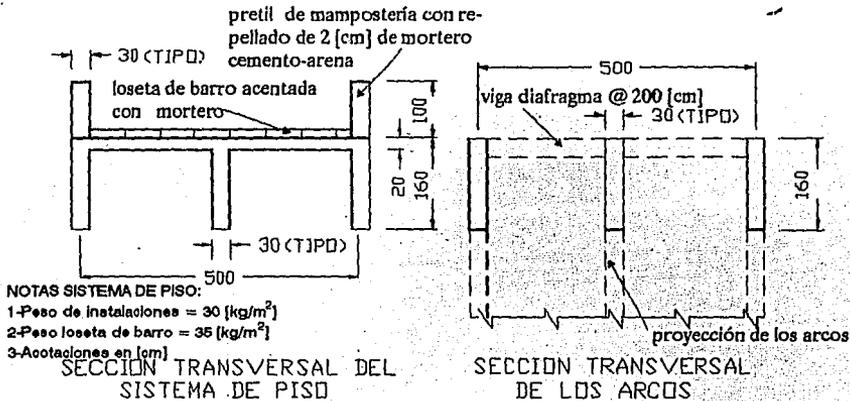


Figura 3.42. Elementos estructurales del puente peatonal de la figura 3.41.

Solución [en ton, mts, seg]: a) $\xi = 3\%$; b) $33.58x'' + 224x' + 415097.4x = 0$; c) $\omega_D = 111.132$ [rad/seg]; d) $T_D = 0.057$ [seg]; e) $f_D = 17.54$ [hertz]; f) $x = e^{-3.33546t} (4.82(10^{-4}) \cos(111.132t) + 1.4467(10^{-5}) \text{sen}(111.132t))$; $x' = e^{-3.33546t} (-0.053566 \text{sen}(111.132t) - 4.8264(10^{-5}) \text{sen}(111.132t))$; $x'' = e^{-3.33546t} (-5.95822 \cos(111.132t) + 0.178451 \text{sen}(111.132t))$

IV.-La sala de proyección de un cine está estructurada a base de columnas de concreto reforzado de sección transversal prismática de 90 x 50 [cm] espaciadas a cada 5 [m] en el sentido largo de la estructura y a cada 16 [m] en el sentido corto, como se muestra en la figura 3.43.

El claro de 16 [m] es salvado mediante una armadura de acero estructural A-36 tipo Howe, con la geometría y tipos de sección transversal de los elementos estructurales mostrados en las figuras 3.44 y 3.45. Para el sentido largo los claros son cubiertos por traves de concreto de sección transversal prismática de 30 x 80 [cm] y muros diafragma de mampostería de tabique rojo de 14 [cm] de espesor.

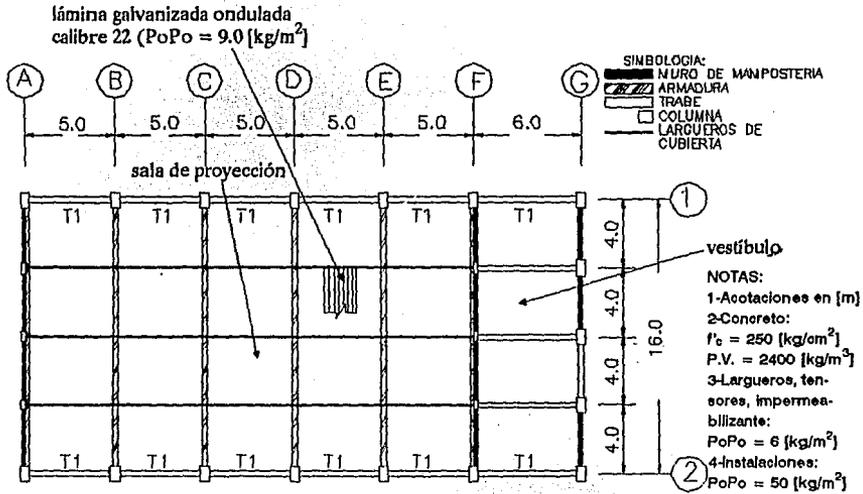


Figura 3.43. Planta estructural de un cine

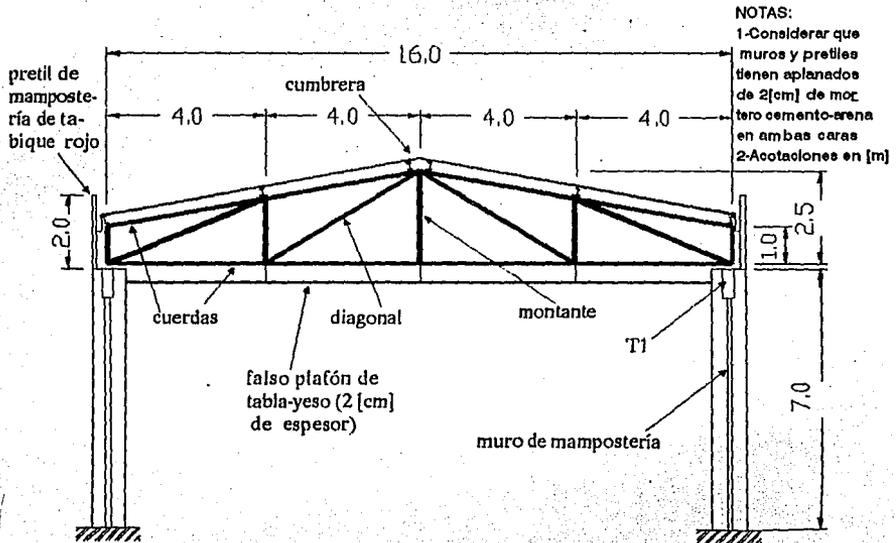


Figura 3.44. Elevación ejes B a E de la figura 3.43

El sistema de techo consiste en una lámina ondulada galvanizada calibre 22, soportada por largueros de cubierta que se apoyan en las armaduras mencionadas. Para la dirección corta de la estructura y conociendo que la cubierta no fue contraventeada, determinar para uno de los marcos de los ejes interiores: a) La ecuación del movimiento libre amortiguado si se sabe que el porcentaje de amortiguamiento crítico es del 6%; b) la constante de amortiguamiento crítico (C_c), la frecuencia angular y el período de oscilación amortiguados (ω_D, T_D), la frecuencia natural amortiguada (f_D), y el decremento logarítmico (S) del sistema; c) la respuesta de desplazamientos del sistema si una fuerza accidental estática de 5 [ton] que actúa sólo un instante de tiempo, desplaza dicho marco; y d) el valor de la velocidad máxima y el instante en que ésta se alcanza para la masa del marco citado.

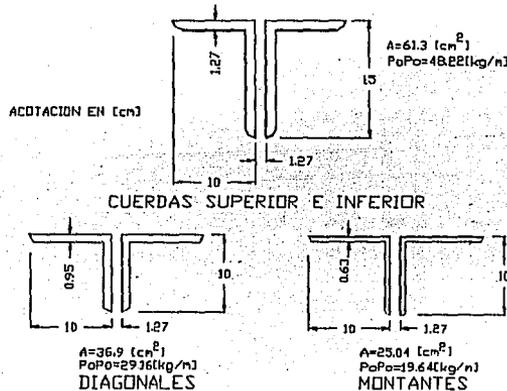


Figura 3.45. Elementos estructurales de la armadura de la figura 3.44

Solución [en ton, mts, seg]: a) $4.174x'' + 8.2796x' + 1140.4658x = 0$; b) $C_c = 137.992$ [t-s/m]; $\omega_D = 16.5$ [rad/s]; $T_D = 0.38$ [seg]; $f_D = 2.63$ [hertz]; $S = 0.377$; c) $x = e^{-0.9518t} (0.004384 \cos(16.5t) + 0.00026352 \sin(16.5t))$; d) $x'_{max} = 0.0002555$ [m/s]

V.-Una clínica para atención médica como la mostrada en la figura 3.46, consta de un solo nivel y está estructurada en concreto reforzado a base de marcos rígidos, con columnas de sección rectangular de 50×70 [cm]. En la dirección corta de la estructura se tiene un sistema de marcos de un solo claro con una longitud de 10 [m] que es salvada mediante una trabe de sección rectangular de 30×90 [cm] que además vuela hacia los lados del marco una distancia de 1.0 [m]. En la dirección larga de la estructura los claros de los marcos son de 6 [m] y se cubren con traveses de sección rectangular de 25×70 [cm]. El sistema

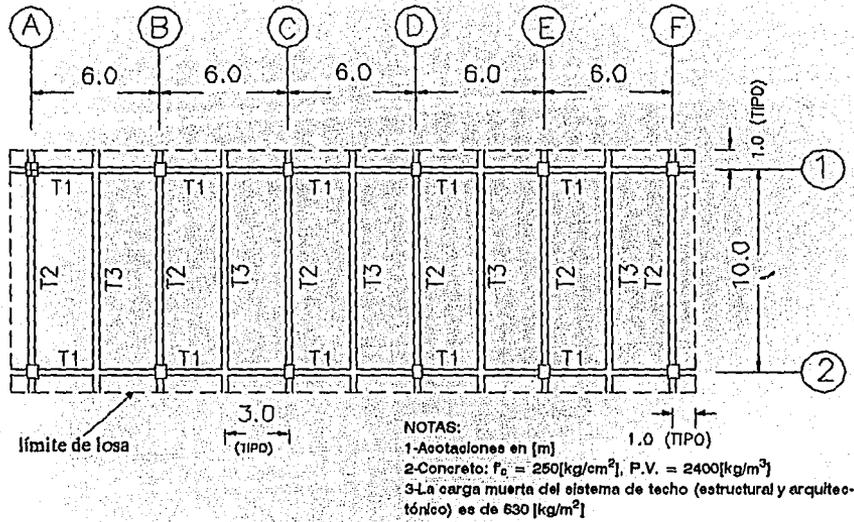


Figura 3.46. Planta estructural de una clínica de medicina

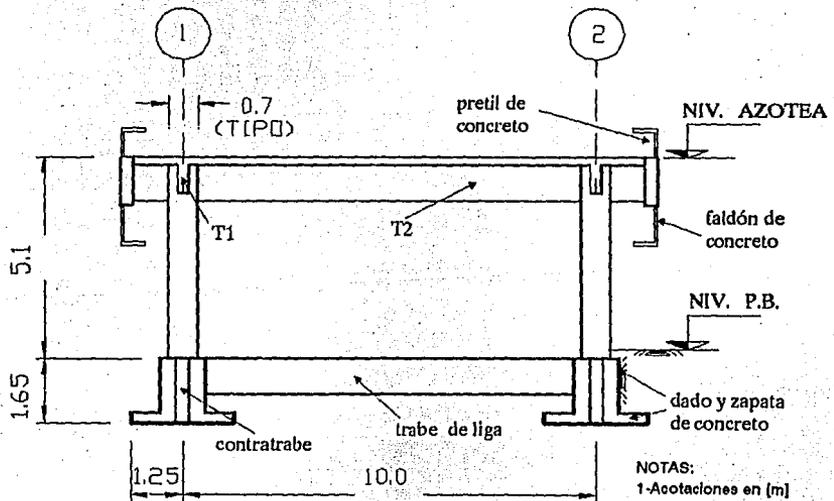


Figura 3.47. Elevación de los marcos de ejes letra de la figura 3.46

de techo consta de tableros de losas macizas de 10 [cm] de espesor, perimetralmente apoyados en los marcos mencionados y en vigas secundarias de sección rectangular de 30 x 70 [cm]. En el perímetro de la azotea existen pretilos y faldones de concreto cuyas dimensiones se indican en la figura 3.48.

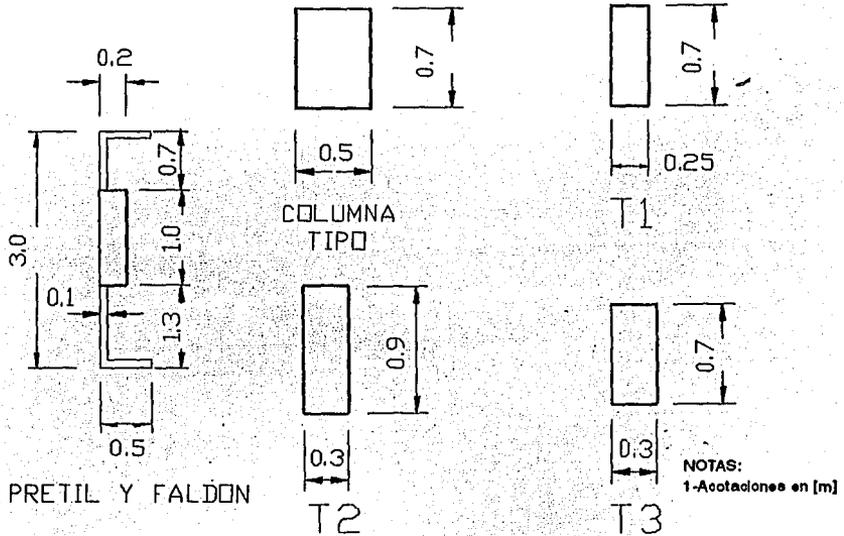


Figura 3.48. Elementos estructurales del inmueble de la figura 3.46

Para la dirección corta de la estructura, encontrar: a) La ecuación del movimiento libre amortiguado si se conoce que el porcentaje de amortiguamiento crítico es del 6%; b) la frecuencia angular amortiguada, el período de oscilación y la frecuencia natural amortiguados; y c) la altura de las columnas, si se requiere que la estructura vibre con un período de oscilación amortiguado de 0.35 [seg], manteniendo el mismo porcentaje de amortiguamiento citado.

Solución [en ton, mts, seg]: a) $48.5578x'' + 119.51x' + 21304.56x = 0$; b) $\omega_D = 21.353$ [rad/s]; $T_D = 0.2943$ [seg]; $f_D = 3.3979$ [hertz]; c) $h = 5.7825$ [m].

3.2.3- VIBRACION FORZADA SIN AMORTIGUAMIENTO.

El modelo mostrado en la figura 3.49 representa un sistema discreto simple que es similar al estudiado en el pasado inciso 3.2.1., en el sentido de que carece (teóricamente) de amortiguamiento; sin embargo existe una diferencia en cuanto al tiempo en que actúa la fuerza excitatriz $P(t)$, ya que para este caso no se trata de una fuerza estática que actúa solo una vez, sino de una fuerza dinámica, es decir que varía a través del tiempo.

La fuerza excitatriz $P(t)$ actúa continuamente sobre la masa oscilante aun después de iniciado su ciclo vibratorio, por lo que los desplazamientos iniciales estáticos producidos por la citada fuerza se ven incrementados por los desplazamientos dinámicos adicionales.

El diagrama de cuerpo en libertad de la figura 3.50, está representado entonces por la masa m del cuerpo oscilante, sobre la cual actúan: una fuerza de

inercia P_i generada durante el movimiento, una fuerza restauradora P_r producida por el resorte de rigidez k , y para este caso una fuerza excitatriz $P(t)$. Mediante el equilibrio dinámico, la ecuación general del movimiento se establece a partir del diagrama de cuerpo libre^[ref.1].

$$m\ddot{x} + kx = P(t) \quad \dots\dots(3.24)$$

Ecuación general del movimiento forzado no amortiguado

donde

$$P(t) = P_0 f(t) \quad \dots\dots(3.25)$$

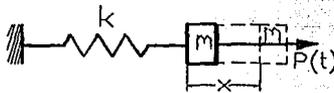
$P(t)$ -fuerza dinámica excitatriz [ton]

P_0 -amplitud de la fuerza[ton]

$f(t)$ -una función del tiempo

La fuerza excitatriz $P(t)$ que varía en función del tiempo, puede ser de diversos tipos tales como:

- a) *Excitación armónica*, b) *excitación en la base*, c) *excitación por impulsos*, y d) *excitación arbitraria*.



k -rigidez del sistema [ton/m]
 m -masa del cuerpo oscilante [ton-sec²/m]
 x -desplazamiento de la masa [m]

Figura 3.49. Sistema discreto simple sin amortiguamiento de 1 G.L.



$P(t)$ -fuerza excitatriz en función del tiempo[ton]
 P_r -fuerza restauradora del resorte[ton]
 P_i -fuerza de inercia [ton]
 $f(t)$ -una función del tiempo
 P_0 -magnitud de la fuerza excitatriz[ton]
 x'' -aceleración de la masa [m/s²]

Figura 3.50. Diagrama de cuerpo libre del sistema de la figura 3.49 .

a) *Excitación armónica.*- Es aquella fuerza que varía a través del tiempo de acuerdo con una función sinusoidal del tipo seno o coseno.

Por ejemplo, para cuando:

$$P(t) = P_0 \overline{\text{sen}} wt \quad \dots (3.25a)$$

la solución de la ecuación del movimiento es:

$$x = x_0 \cos wt + (x'_0/w) \text{sen} wt + X_{\text{est}}(\text{FAD}_{\text{arm}}) \quad \dots (3.26)$$

Solución de la ecuación del movimiento forzado armónico sin amortiguamiento, para cuando $P(t) = P_0 \overline{\text{sen}} wt$

donde:

$$X_{\text{est}} = P_0/k \quad \dots (3.27)$$

$$\text{FAD}_{\text{arm}} = (\overline{\text{sen}} wt - \Omega \text{sen} wt) / [1 - \Omega^2] \quad \dots (3.28)$$

$$\Omega = \overline{w} / w \quad \dots (3.29)$$

\overline{w} -frecuencia angular de la fuerza [rad/seg]

FAD_{arm} -factor de amplificación dinámica armónica

X_{est} -desplazamiento estático [m]

Ω -relación de frecuencias

Para los casos en que las frecuencias del sistema oscilatorio y la de la fuerza excitatriz coinciden, o sea $w = \overline{w}$, entonces $\text{FAD}_{\text{arm}} = \infty$, lo que físicamente se traduce en un incremento muy rápido de las amplitudes o desplazamientos dinámicos y se dice que el sistema entra en "resonancia", este fenómeno representa un serio peligro para las estructuras, especialmente los puentes que con facilidad pueden entrar en resonancia bajo la acción de vientos prolongados^[ref. 1].

b) *Excitación en la base.*- Esta condición ocurre cuando la fuerza excitatriz $P(t)$ se aplica en la base del sistema oscilatorio. Este caso es el más común en Ingeniería Civil ya que los sismos actúan desplazando el suelo y la cimentación de las estructuras.

Puede demostrarse que un sistema excitado en su base, es equivalente a uno de base fija sometido a una fuerza aplicada en la masa, igual al producto de dicha masa por la aceleración original de la base. En estas condiciones la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_a \quad \dots (3.30)$$

Ecuación del movimiento forzado en la base no amortiguando

donde

$$P(t) = -m\ddot{x}_a \quad \dots (3.31)$$

x_r, \ddot{x}_r -desplazamiento y aceleración, respectivamente relativo o efectivo de la masa (respecto a la base o suelo en movimiento)

x_a, \ddot{x}_a -desplazamiento y aceleración, respectivamente de la base o suelo

c) *Excitación por un impulso de duración dt.*

IMPULSO.- Es una fuerza no periódica que es aplicada súbitamente, es decir sólo durante un tiempo muy pequeño de duración dt .^[ref. 1]

Una fuerza impulsiva que se aplica a un sistema oscilatorio no tiene tiempo suficiente para producir oscilaciones sostenidas por la fuerza excitatriz $P(t)$, en este caso el movimiento generado en el sistema se llama de transición. La fuerza

excitatriz $P(t)$ en la ecuación del movimiento (3.24), es entonces

$$P(t) = P_0 dt \quad \dots (3.32)$$

cuya solución es

$$x(t) = P_0/(mw) \text{sen} w t dt \quad \dots (3.32a)$$

Solución de la ecuación del movimiento forzado por un impulso, sin amortiguamiento

$x(t)$ -respuesta de desplazamientos en función del tiempo [m]

d) *Excitación arbitraria (CASO GENERAL DE CARGA)*.- Este caso de carga comprende todas aquellas fuerzas de excitación $P(t)$, que no siguen una ley de variación en el tiempo bien definida o que pueda ser expresada por alguna función matemática.

Las cargas que se presentan en la realidad sobre las estructuras son muy complicadas e irregulares (como por ejemplo las gráficas de registros de la aceleración del suelo o acelerogramas durante un temblor), y comprenden las cargas de sismos, mareas, vientos, etc., es decir son excitaciones arbitrarias.

En la figura 3.51 se muestra la gráfica de una fuerza excitatriz arbitraria $P(t)$ que es aplicada a un sistema oscilatorio sencillo como el de la figura 3.49. Considerando que dicha fuerza está compuesta de una serie sucesiva de impulsos $P(\tau) = P_0 d\tau$ de pequeña duración $d\tau$, entonces la respuesta de desplazamientos del sistema oscilatorio puede

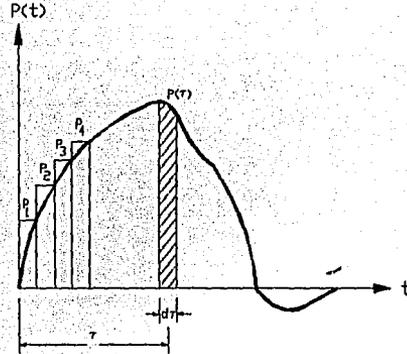


Figura 3.51. Excitación arbitraria.

obtenerse como la suma de una serie sucesiva de respuestas a cada impulso componente, es decir

$$x(t) = (P_0/m)(I.Duhamel)_1 \quad \dots (3.33)$$

$$x(t) = X_{est}(FAD)_1 \quad \dots (3.34)$$

Solución general de la ecuación del movimiento forzado sin amortiguamiento para cuando $x_0 = \dot{x}_0 = 0$
donde

$$I.Duhamel)_1 = \int_0^t (1/w) [f(\tau)] \text{sen} w(t-\tau) d\tau \quad \dots (3.35)$$

$$FAD)_1 = (I.Duhamel)_1 w^2 \quad \dots (3.36)$$

t -tiempo en el cual ocurre o se calcula la respuesta de desplazamientos del sistema [seg]

τ -tiempo en el que se presenta el impulso $P(\tau)$

$d\tau$ -duración del impulso $P(\tau)$

$(t-\tau)$ -Intervalo o lapso de tiempo en donde se presenta la oscilación del sistema

$FAD)_1$ -factor de amplificación dinámica sin amortiguamiento para el caso general de carga

En los casos en que el sistema oscilatorio antes de la aplicación de la fuerza excitatriz $P(t)$

tenga condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad diferentes de cero, la respuesta del sistema es

$$x(t) = x_0 \cos w(t-\tau) + (x'_0/w) \operatorname{sen} w(t-\tau) + X_{\text{est}}(FAD_1) \quad \dots (3.37)$$

Solución general de la ecuación del movimiento forzado sin amortiguamiento para cuando $x_0 \neq 0$ y $x'_0 \neq 0$

Las respuestas de un sistema oscilatorio sencillo sin amortiguamiento, sobre el que actúa una fuerza excitatriz $P(t)$ que sigue una ley de variación en el tiempo bien definida, también pueden ser obtenidas con las ecuaciones (3.33) a (3.37), por lo que el presente caso es conocido también como CASO GENERAL DE CARGA.

En la figura 3.52 se presenta una tabla de funciones de respuesta para sistemas no amortiguados, en la que se ha tabulado el valor de la integral de Duhamel para varios tipos de funciones de excitación.

ESPECTROS DE RESPUESTA DE SISTEMAS ELÁSTICOS

SISTEMA ELÁSTICO.- Es aquel sistema estructural que después de la aplicación de una fuerza no sufre deformaciones permanentes. Es un sistema que recupera su forma inicial después de que se suprimen las fuerzas deformantes^[ref. 11].

ESPECTRO DE RESPUESTA.- Es una gráfica en donde se relacionan las repuestas máximas (desplazamientos, velocidad y/o aceleración), con los periodos de un sistema oscilatorio de 1 G.L.

Para efectos de diseño de estructuras, interesan los valores numéricos máximos de las respuestas de un sistema oscilatorio, ya sean desplazamientos, velocidades y/o aceleraciones, ante la aplicación de una fuerza excitatriz definida ya sea por un acelerograma o por leyes de variación bien establecidas (armónicas, impulsos, explosiones, etc.).

Es para dicho valor para el que deberá diseñarse la estructura si se desea que se mantenga en el rango de comportamiento elástico ante tal fuerza.

Tales gráficas son útiles porque proporcionan rápidamente el valor de la respuesta máxima de un sistema determinado, del que se conoce su período de oscilación, y que está sometido a la acción de la fuerza excitatriz que sirvió para generar el espectro de respuesta (en el Tema IV, inciso 4.3.1, se generaliza y complementa la teoría sobre este tópico).

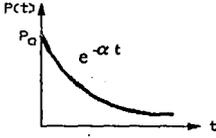
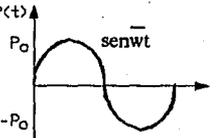
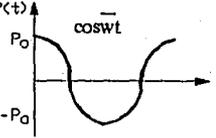
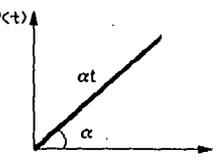
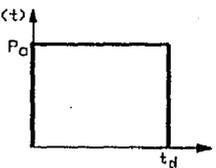
Descripción	Función de excitación	Integral de Duhamel $(1/w) \int_0^t [f(\tau)] \text{sen}w(t-\tau) d\tau$
Carga aplicada súbitamente (paradas, impactos, golpe de ariete, etc.)		$(1/w^2)(1 - \text{cos}wt)$
Liberación de presión de vapor		$(1/(w^2 + \alpha^2))[e^{-\alpha t} \cdot \text{cos}wt + (1/w)\alpha \text{sen}wt]$
Vibración de maquinaria		$[\Omega^2/(\bar{w}(1 - \Omega^2))][\bar{w} \text{sen}wt - (1/w)\text{sen}wt]$
Vibración de maquinaria		$[\Omega^2/(\bar{w}(1 - \Omega^2))][\bar{w} \text{cos}wt - \text{cos}wt]$
Pruebas a tracción		$(\alpha/w^2)[t - (1/w)\text{sen}wt]$
Pulso de duración finita		$(1/w^2)(1 - \text{cos}wt), t \leq t_d$ $(1/w^2)[\text{cos}w(t - t_d) - \text{cos}wt], t \geq t_d$

Figura 3.52. Valores de la Integral de Duhamel para diferentes funciones de excitación (adaptado ref. 1)

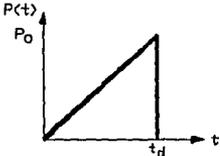
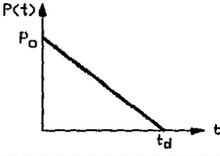
Descripción	Función de excitación	Integral de Duhamel $(1/\omega) \int_0^t [f(\tau)] \text{sen}\omega(t-\tau) d\tau$
Pruebas a tracción con ruptura		$(1/\omega^2 t_d)(t - (1/\omega) \text{sen}\omega t), t \leq t_d$ $(1/\omega^2 t_d) [t_d \text{cos}\omega(t - t_d) + (1/\omega) \text{sen}\omega(t - t_d) - (1/\omega) \text{sen}\omega t], t \geq t_d$
Cargas de explosión		$(1/\omega^2) [1 - \text{cos}\omega t - t/t_d + (1/\omega t_d) \text{sen}\omega t], t \leq t_d$ $(1/\omega^2) [-\text{cos}\omega t - (1/\omega t_d) \text{sen}\omega(t - t_d) + (1/\omega t_d) \text{sen}\omega t], t \geq t_d$

Figura 3.52. Valores de la Integral de Duhamel para diferentes funciones de excitación (adaptado ref. 1)

3.2.3.1.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.-Deducir las expresiones que describen el movimiento de vibración forzada sin amortiguamiento.

Con relación al sistema mostrado en la figura 3.49 (Inciso 3.2.3.), una fuerza excitatriz dinámica "P(t)", es decir variable en función del tiempo, perturba el equilibrio estático del estado de reposo al desplazar una distancia "x" la masa "m" del cuerpo oscilante.

El resorte de rigidez "k" se opone al desplazamiento mediante una fuerza restauradora "Pr", que tiende a retornar la masa a su posición inicial, ésta al acelerarse durante el retorno, se desplaza más allá del punto inicial por causa de la fuerza de inercia "Pi" inducida y por la acción de la fuerza excitatriz que sigue actuando durante un lapso de tiempo "t".

La fuerza excitatriz P(t) mantiene los desplazamientos de la masa m en cada nuevo ciclo de oscilación, por lo que se dice que se produce una oscilación sostenida o entretenida.

Ya se ha demostrado que (problema I, Inciso 3.2.1.1.)

$$P_r = -kx \quad \dots(a)$$

$$P_i = m\ddot{x} \quad \dots(b)$$

En el diagrama de cuerpo en libertad de la figura 3.50 (Inciso 3.2.3.), se representa el equilibrio dinámico, de donde

$$P_r = P_i - P(t) \quad \dots(c)^*$$

* El signo (-) de la fuerza excitatriz P(t) se usa debido a que como es físicamente conocido, la fuerza de inercia Pi se opone al movimiento.

sustituyendo (a) y (b) en (c) $-kx = mx'' - P(t)$

de donde

$$mx'' + kx = P(t) \quad \dots(3.24)$$

Ecuación general del movimiento forzado no amortiguado

con

$$P(t) = P_0 f(t) \quad \dots(3.25)$$

P_0 -amplitud de la fuerza [ton]

$f(t)$ -una función del tiempo

La fuerza excitatriz $P(t)$ se puede clasificar para su estudio en los siguientes tipos: a) Excitación armónica, b) excitación en la base, c) excitación por impulsos, y d) excitación arbitraria o CASO GENERAL DE CARGA.

A continuación se estudia cada tipo de carga:

a) Excitación armónica.- La ley de variación en el tiempo de la fuerza excitatriz $P(t)$ puede estar regida por una función del tipo seno o coseno.

De acuerdo a lo anterior y como las funciones seno y coseno pertenecen a las funciones periódicas o trascendentes, se deduce que la fuerza excitatriz posee su propia frecuencia w .

Por ejemplo para el caso en que (ver gráfica sinusoidal en la figura 3.52)

$$P(t) = P_0 f(t) = P_0 \overline{\text{sen}wt} \quad \dots(3.25a)$$

lo cual físicamente acontece entre otros casos, por vibraciones de maquinaria sobre un soporte estructural.

sustituyendo (3.25a) en (3.24), tenemos la ecuación particular del movimiento:

$$mx'' + kx = P_0 \overline{\text{sen}wt} \quad \dots(d)$$

Comparando la ecuación (3.24) con la (3.4) del inciso 3.2.1., el movimiento expresado por la ecuación (d) se puede considerar como la superposición de una vibración libre no amortiguada de frecuencia angular w , y una oscilación de una fuerza con frecuencia angular w .

Por tanto de dicha comparación, se deduce que la solución de la ecuación (d) es

$$x = \text{solución libre sin amortiguamiento (ec. (p), problema I, inciso 3.2.1.1.)} + x_{\text{par}} \quad \dots(e)$$

$$\text{y sustituyendo la ecuación (p) citada en (e)} \quad x = A_0 \cos wt + B_0 \overline{\text{sen}wt} + x_{\text{par}} \quad \dots(f)$$

A_0, B_0 -constantes que dependen de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad.

x_{par} -una solución particular

Se demostrará que (f) es la solución de (d)

Durante el lapso en que actúa $P(t) = P_0 \overline{\text{sen} \omega t}$, el sistema tiende a oscilar aproximándose a la misma frecuencia de la fuerza excitatriz, ω , y por tanto la solución particular en (f) está dada por

$$x_{\text{par}} = Y \overline{\text{sen} \omega t} \quad \dots (g)$$

Y-constante a determinar

Determinación de Y

$$1a. \text{ derivada de (g)} \quad x' = \overline{\omega Y \cos \omega t} \quad \dots (h)$$

$$2a. \text{ derivada de (g)} \quad x'' = -\overline{\omega^2 Y \text{sen} \omega t} \quad \dots (i)$$

sustituyendo (g) e (i) en (d)

$$m(-\overline{\omega^2 Y \text{sen} \omega t}) + k(Y \overline{\text{sen} \omega t}) = P_0 \overline{\text{sen} \omega t} \quad \dots (j)$$

dividiendo entre $\overline{\text{sen} \omega t}$

$$-m\overline{\omega^2} Y + kY = P_0 \quad \dots (k)$$

factorizando

$$Y(k - m\overline{\omega^2}) = P_0 \quad \dots (l)$$

de donde

$$Y = P_0 / (k - m\overline{\omega^2}) \quad \dots (m)$$

Por otro lado, sustituyendo (g) en (f)

$$x = A_0 \overline{\cos \omega t} + B_0 \overline{\text{sen} \omega t} + Y \overline{\text{sen} \omega t} \quad \dots (n)$$

1a. derivada de (n)

$$x' = -A_0 \overline{\omega \text{sen} \omega t} + B_0 \overline{\omega \cos \omega t} + Y \overline{\omega \cos \omega t} \quad \dots (o)$$

Determinación de A_0 y B_0 a partir de las condiciones Iniciales

de (n), para $t=0$: $x_0 = A_0 \overline{\cos(0)} + B_0 \overline{\text{sen}(0)} + Y \overline{\text{sen}(0)}$

$$x_0 = A_0 \quad \dots (p)$$

de (o), para $t=0$: $x'_0 = -A_0 \overline{\omega \text{sen}(0)} + B_0 \overline{\omega \cos(0)} + Y \overline{\omega \cos(0)}$

$$x'_0 = B_0 \overline{\omega} + Y \overline{\omega}$$

de donde

$$B_0 = (x'_0 - \bar{Y}w)/w = x'_0/w - \bar{Y}w/w \quad \dots(q)$$

Sustituyendo (p) y (q) en (n)

$$x = x_0 \cos wt + (x'_0/w - \bar{Y}w/w) \text{sen} wt + Y \text{sen} \bar{w}t$$

$$x = [x_0 \cos wt + (x'_0/w) \text{sen} wt] - (\bar{Y}w/w) \text{sen} wt + Y \text{sen} \bar{w}t \quad \dots(r)$$

comparando (r) y (3.5)

$$x = \text{sol. vibración libre sin amortig.} - (\bar{Y}w/w) \text{sen} wt + Y \text{sen} \bar{w}t$$

$$x = \text{ec. (3.5)} + Y [\text{sen} \bar{w}t - (\bar{w}/w) \text{sen} wt] \quad \dots(s)$$

sustituyendo (m) en (s)

$$x = \text{ec. (3.5)} + P_0 / (k - m\bar{w}^2) [\text{sen} \bar{w}t - (\bar{w}/w) \text{sen} wt]$$

multiplicando el denominador por w^2/w^2

$$x = \text{ec. (3.5)} + P_0 / [k - (\bar{w}^2/w^2) m w^2] [\text{sen} \bar{w}t - (\bar{w}/w) \text{sen} wt]$$

y como de la ecuación (3.6) $k = m w^2$

$$x = \text{ec. (3.5)} + P_0 / [k(1 - (\bar{w}^2/w^2))] [\text{sen} \bar{w}t - (\bar{w}/w) \text{sen} wt]$$

y llamando Ω a la relación de frecuencias $\Omega = \bar{w}/w$ (3.29)

$$x = \text{ec. (3.5)} + (P_0/k) (\text{sen} \bar{w}t - \Omega \text{sen} wt) / (1 - \Omega^2) \quad \dots(t)$$

sabemos que^(ref. 6)

$$X_{\text{estática}} = X_{\text{est}} = P_0/k \quad \dots(3.27)$$

y llamando

$$FAD_{\text{arm}} = (\text{sen} \bar{w}t - \Omega \text{sen} wt) / (1 - \Omega^2) \quad \dots(3.28)$$

sustituyendo finalmente (3.27), (3.28) y (3.5) en (t)

$$x = x_0 \cos wt + (x'_0/w) \text{sen} wt + X_{\text{est}} (FAD_{\text{arm}}) \quad \dots(3.26)$$

Solución de la ecuación del movimiento forzado armónico sin amortiguamiento para cuando $P(t) = P_0 \text{sen} wt$

Se puede dar el caso de que una estructura que tiene una frecuencia circular w , sea excitada por una fuerza con una frecuencia angular w igual a la de dicha estructura, es decir $w = \bar{w}$; esto se traduce según las ecuaciones (3.28) y (3.29) y su gráfica mostrada en la figura 3.53, en un $FAD = \infty$, en estos casos se dice que la estructura entra en un estado de "resonancia"

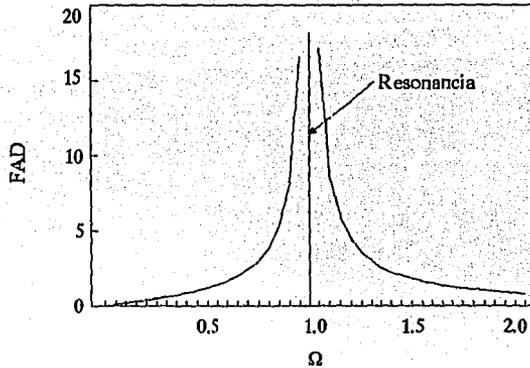


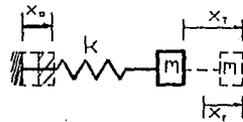
Figura 3.53. Efectos de la resonancia en la vibración forzada no amortiguada

aumentando sus desplazamientos enormemente, lo cual representa un serio peligro para su estabilidad y debe, por tanto evitarse cambiando las propiedades de la estructura como rigidez, masa, etc.

b) *Excitación en la base.* - Ocurre cuando la fuerza excitatriz $P(t)$ actúa aplicada en la base del sistema oscilatorio.

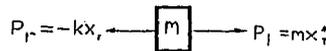
En Ingeniería Civil este es el caso de las estructuras sometidas a la acción de los sismos que actúan desplazando el suelo y su cimentación. Tenemos entonces un sistema oscilatorio como el mostrado en la figura 3.54, cuya base se desplaza una cantidad x_a , que es función del tiempo, este desplazamiento perturba el equilibrio estático del estado de reposo de la masa m del cuerpo oscilante, produciendo un desplazamiento x_r adicional al de la base.

El resorte de rigidez k , que en este caso está también en movimiento y por tanto se desplaza con la base, se opone al desplazamiento de la masa mediante una fuerza restauradora P_r que tiende a retornar la masa a su posición inicial, ésta al acelerarse durante el retorno, se desplaza más allá de su posición de reposo por causa de la fuerza de inercia P_i inducida.



- k - rigidez del sistema [ton/m]
- m - masa del cuerpo oscilante [ton-seg²/m]
- x_a - desplazamiento del apoyo [m]
- x_T - desplazamiento total de la masa [m] (respecto a la posición de reposo)
- x_r - desplazamiento relativo o efectivo de la masa (respecto al suelo en movimiento) [m]

Figura 3.54. Sistema discreto simple excitado en su base



- P_r - fuerza restauradora del resorte [ton]
- P_i - fuerza de inercia [ton]
- x_r'' - aceleración total de la masa [m/s²]

Figura 3.55. Diagrama de cuerpo libre del sistema discreto de la figura 3.54.

De el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 3.55, que representa el equilibrio dinámico, se establece

$$P_r = P_l \quad \dots(a)$$

y sustituyendo los valores de estas fuerzas

$$-kx_r = mx''_r \quad \dots(b)$$

de la figura 3.54, tenemos

$$x_r = x_T - x_a \quad \dots(c)$$

En física es un hecho demostrado que si un cuerpo con una aceleración original x''_a (respecto a un observador en reposo), expulsa otro cuerpo con una aceleración x''_r (relativa al 1er. cuerpo), este último tendrá una aceleración total x''_T (respecto al observador en reposo) de

$$x''_T = x''_a + x''_r \quad \dots(d)$$

sustituyendo (d) en (b)

$$m(x''_a + x''_r) + kx_r = 0$$

$$mx''_a + mx''_r + kx_r = 0$$

de donde

$$mx''_r + kx_r = -mx''_a \quad \dots(3.30) \quad \text{Ecuación del movimiento forzado en la base no amortiguado}$$

comparando (3.30) y (3.24), se observa que (3.30) es la ecuación de un sistema de base fija sometido a una fuerza excitatriz

$$P(t) = -mx''_a \quad \dots(3.31)$$

Esto quiere decir que un sistema excitado en la base, puede reemplazarse por uno equivalente de base fija sometido a una fuerza aplicada en la masa, igual al producto de la aceleración original de la base por la masa m .

En el caso de los sismos los datos de la aceleración del suelo se obtienen de los registros producidos por un acelerógrafo.

Suponiendo por ejemplo, que la excitación en la base es un desplazamiento que varía como una función armónica del tipo

$$x_a = X_1 \overline{\text{sen}} \omega t \quad \dots(e)$$

X_1 -amplitud del desplazamiento

1a. derivada de (e) $x'_a = X_1 \overline{\text{wcos}} \omega t$

2a. derivada de (e) $x'' = -X_1 \bar{\omega}^2 \text{sen} \bar{\omega} t \dots (f)$

sustituyendo (f) en (3.30)

$$m x'' + k x = m X_1 \bar{\omega}^2 \text{sen} \bar{\omega} t \dots (g)$$

y tomando en la ecuación (g) (por ser todas constantes)

$$P_0 = m X_1 \bar{\omega}^2 \dots (h)$$

sustituyendo (h) en (g)

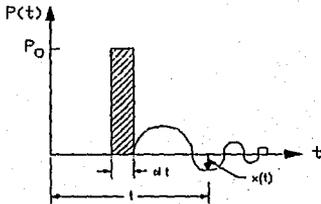
$$m x'' + k x = P_0 \text{sen} \bar{\omega} t \dots (i)$$

La ecuación (i) es la misma que la ecuación (d) del pasado inciso a); y por tanto su solución se obtendría con las ecuaciones (3.26), (3.27), (3.28) y (3.29) en términos de coordenadas relativas.

c) Excitación por impulsos.

Una fuerza impulsiva actúa durante un tiempo dt muy pequeño y tiene una gráfica como la mostrada en la figura 3.56, con

$$P(t) = P_0 dt \dots (3.32)$$



Al aplicar un impulso a un sistema oscilatorio no hay tiempo suficiente para producir oscilaciones sostenidas por la fuerza excitatriz $P(t)$, ya que el tiempo de aplicación de dicha fuerza es muy corto; en este caso el movimiento generado se llama de "transición".

En la figura 3.56 también se muestra la gráfica de la respuesta de desplazamientos del sistema ante la carga aplicada.

Figura 3.56. Gráfica de un impulso de duración dt .

Ya que el impulso actúa solo por un instante de tiempo, la respuesta del sistema estará dada por la ecuación (3.5) del inciso 3.2.1., del movimiento libre sin amortiguamiento

$$x = x_0 \cos \omega t + (x'_0 / \omega) \text{sen} \omega t \dots (3.5)$$

En el problema I del inciso 3.2.1.1., se dedujo esta ecuación para cuando actuaba una fuerza estática que desplazaba la masa del sistema una cantidad $x_0 = X_{est} = P/k$, después de lo cual dejaba de actuar dicha fuerza retornando el sistema por efecto del resorte a su posición original y produciendo la oscilación. En ese instante de condiciones iniciales (para $t=0$), se demostró que $x_0 = X_{est}$ y $x'_0 = 0$

En el caso presente, el impulso actúa solo un instante de tiempo y desaparece; pero a diferencia de la carga estática mencionada, el movimiento oscilatorio inicia desde el estado de reposo, es decir las condiciones iniciales (para $t=0$), son

$$x_0 = 0 \quad \text{y} \quad x'_0 = \text{velocidad producida por el impulso} \quad \dots(a)$$

El principio de la conservación del movimiento establece que^[ref. 9]

$$\text{cantidad de movimiento} = \text{impulso} \quad \dots(b)$$

La cantidad de movimiento es igual a la masa m por la velocidad inicial x'_0 , y el impulso es igual al producto de la fuerza P por el tiempo que actúa dt .

$$\text{Por tanto de (b)} \quad mx'_0 = P_0 dt$$

de donde la velocidad producida por el impulso o velocidad inicial es

$$x'_0 = (P_0/m)dt \quad \dots(c)$$

sustituyendo (a) y (c) en (3.5)

$$x(t) = [P_0/(mw)] \text{sen} \omega t \dots (3.32a) \text{ Solución de la ecuación del movimiento forzado por un impulso, sin amortiguamiento}$$

La aplicación práctica de las cargas impulsivas se utiliza para el diseño de estructuras a prueba de explosiones o sometidas a impactos.

d) Excitación arbitraria o CASO GENERAL DE CARGA

Este tipo de excitación comprende las cargas más comunes que se presentan en la realidad sobre las estructuras; este inciso es conocido también como CASO GENERAL DE CARGA, ya que con sus métodos de solución se pueden resolver también los casos anteriores de excitación.

Las fuerzas excitatrices arbitrarias comprenden las cargas de sismos, mareas, etc., y su característica principal es que no siguen una ley de aplicación o formación que pueda ser definida por una expresión algorítmica.

En la figura 3.51 del inciso 3.2.3., se muestra la gráfica de una fuerza excitatriz arbitraria $P(\tau)$. Para conocer la respuesta de un sistema oscilatorio ante la aplicación de este tipo de carga, se puede considerar que la fuerza está compuesta por una serie de impulsos sucesivos $P(\tau) = P_0 d\tau$ de pequeña duración. Tendremos así una serie de respuestas sucesivas del sistema dadas por la ecuación (3.32a) del caso c) antes visto.

Como la ecuación (3.32a) es una ecuación diferencial lineal y este tipo de ecuaciones diferenciales tienen la propiedad de superponerse^[ref. 14], la respuesta del sistema ante la carga arbitraria, estará dada por la suma de respuestas sucesivas a cada uno de los impulsos componentes.

Además, para el intervalo de tiempo dt muy pequeño, podemos considerar que $P(\tau)$ es continua y por tanto de la ecuación (3.25) tenemos

$$P(\tau) = P_0 f(\tau) \quad \dots(a)$$

Por lo tanto, integrando la ecuación (3.32a) y como la oscilación del sistema se presenta solo para el tiempo $(t-\tau)$

$$x(t) = (1/m) \int_0^t (P(\tau)/w) \text{sen}w(t-\tau) d\tau \quad \dots(b)$$

sustituyendo (a) en (b)

$$x(t) = (P_0/m)(l.Duhamel_1) \dots(3.33) \text{ Solución general de la ecuación del movimiento forzado sin amortiguamiento para cuando } x_0 = x'_0 = 0$$

donde

$$l.Duhamel_1 = \int_0^t [f(\tau)]/w \text{sen}w(t-\tau) d\tau \quad \dots(3.35)$$

t-tiempo en el cual ocurre la respuesta de desplazamiento $x(t)$ del sistema

τ -tiempo en el que se presenta el impulso $P(\tau)$

$d\tau$ -tiempo que dura el impulso $P(\tau)$

$[f(\tau)]$ -una función del tiempo

$(t-\tau)$ -intervalo o lapso de tiempo en donde se presenta la oscilación del sistema

$l.Duhamel_1$ -Integral de Duhamel, integral de convolución ó Integral de superposición, sin amortiguamiento

Si en la ecuación (b) multiplicamos por (w/w) , tenemos

$$x(t) = (P_0/mw^2) \int_0^t w[f(\tau)] \text{sen}w(t-\tau) d\tau \quad \dots(c)$$

de la ecuación (3.6) $k = mw^2$, y recordando la ecuación (3.27)

$$x(t) = X_{est} \int_0^t w[f(\tau)] \text{sen}w(t-\tau) d\tau \quad \dots(d)$$

ó

$$x(t) = X_{est}(FAD_1) \dots(3.34) \text{ Solución general de la ecuación del movimiento forzado sin amortiguamiento para cuando } x_0 = x'_0 = 0$$

donde

$$FAD_1 = \int_0^t w[f(\tau)] \text{sen}w(t-\tau) d\tau = (l.Duhamel_1)w^2 \quad \dots(3.36)$$

FAD_1 -factor de amplificación dinámica sin amortiguamiento

En los casos en que existen en el sistema condiciones Iniciales de desplazamiento (x_0) , y velocidad (x'_0) diferentes de cero, (por ejemplo al aplicar una nueva fuerza excitatriz antes de terminar la oscilación del sistema, o cuando la fuerza excitatriz cambia repentinamente su valor), la respuesta del sistema está dada, de forma análoga a como se demostró para el Inciso a) (ecuación (3.26)); es decir

$$x(t) = x_0 \text{cos}w(t-\tau) + (x'_0/w) \text{sen}w(t-\tau) + X_{est}(FAD_1) \quad \dots(3.37)$$

Solución general de la ecuación del movimiento forzado sin amortiguamiento para cuando $x_0 \neq 0$ y $x'_0 \neq 0$

En la figura 3.52, se tabulan algunos valores de la Integral de Duhamel para diferentes tipos de fuerzas de excitación que siguen una ley de aplicación definida por una expresión matemática bien conocida (armónicas, impulsos, etc.), para sistemas no amortiguados.

En los casos de fuerzas de excitación arbitrarias o complicadas (sismos, mareas, etc.), las respuestas dinámicas del sistema oscilatorio se determinan con métodos numéricos (a partir de acelerogramas, diagramas de aplicación de fuerzas, etc.), como se verá en el Inlcso 3.2.4.

II.- Determinar la respuesta de desplazamientos de un sistema oscilatorio simple ó de 1 G.L., sin amortiguamiento, sometido a las fuerzas excitatrices, cuyas gráficas son mostradas en las figuras 3.57 y 3.58.

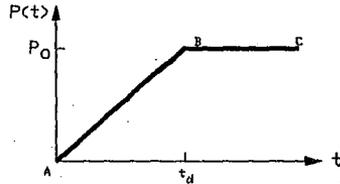
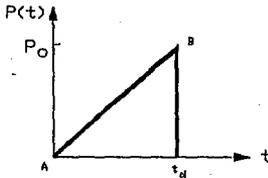


Figura 3.57. Fuerza excitatriz del problema II. a). Figura 3.58. Fuerza excitatriz del problema II. b).

a) Por observación de la gráfica de la figura 3.57, existen 2 intervalos de variación de la fuerza excitatriz $P(t)$

Intervalo 1.- $0 \leq t \leq d$

El punto A tiene coordenadas $(0,0)$, y para el punto B son (t_d, P_0) . Por tanto la ecuación de la recta es^[ref. 15]

$$P(t) - y_1 = m(\tau - x_1) \quad \dots(a)$$

$$\text{con } m = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = P_0 / t_d \quad \dots(b)$$

sustituyendo las coordenadas de los puntos A y B y (b) en (a)

$$P(t) = P_0 \tau / t_d \quad \dots(c)$$

comparando (c) con la ecuación (3.25)

$$[f(\tau)] = \tau / t_d \quad \dots(d)$$

la integral de Duhamel según la ecuación (3.33) es (Integrando τ desde 0 hasta t)

$$I.Duhamel_1 = (1/w) \int_0^t [f(\tau)] \text{sen}w(t-\tau) d\tau = (1/w t_d) \int_0^t \tau \text{sen}[(t-\tau)w] d\tau \quad \dots(e)$$

si hacemos que

$$u = \tau \quad \dots(f)$$

$$du = d\tau \quad \dots(g)$$

y

$$dv = \text{sen}w(t-\tau)d\tau \quad \dots(h)$$

$$v = \int_0^t \text{sen}(t-\tau)w d\tau = (-1/w) \int_0^t -w \text{sen}[(t-\tau)w] d\tau =$$

(tomando en esta última \int , $z = (t-\tau)w$, $dz = -w d\tau$)

$$v = (-1/w) \int_0^t \text{senz} dz = (-1/w) \text{cos}z = (1/w) [\text{cos}(t-\tau)w]_0^t \quad \dots(i)$$

sustituyendo (f) y (g) en (e) y recordando del cálculo diferencial que $\int u dv = uv - \int v du$

$$I.Duhamel_1 = (1/wt_d) \int u dv = (1/wt_d) \left\{ (1/w) [\tau \text{cos}(t-\tau)w]_0^t - (1/w) \int_0^t \text{cos}(t-\tau)w d\tau \right\} = \dots(j)$$

donde τ varía desde 0 hasta t

y usando nuevamente $z = (t-\tau)w$, $dz = -w d\tau$, en la integral de (j)

$$\begin{aligned} (1/w) \int_0^t \text{cos}(t-\tau)w d\tau &= (-1/w^2) \int_0^t -w \text{cos}(t-\tau)w d\tau = (-1/w^2) \int_0^t \text{cos}z dz = \\ &= (-1/w^2) \text{sen}z = (-1/w^2) [\text{sen}w(t-\tau)]_0^t \quad \dots(k) \end{aligned}$$

sustituyendo (k) en (j)

$$I.Duhamel_1 = (1/wt_d) \left\{ (1/w) [\tau \text{cos}w(t-\tau)]_0^t + (1/w^2) [\text{sen}w(t-\tau)]_0^t \right\}$$

y tomando los límites de τ

$$\begin{aligned} I.Duhamel_1 &= (1/wt_d) \left\{ (1/w) [t \text{cos}(t-t)w - (0) \text{cos}(t-0)w] + (1/w^2) [\text{sen}(t-t)w - \text{sen}(t-0)w] \right\} = \\ &= (1/wt_d) [(t/w) - (\text{sen}wt)/w^2] = \end{aligned}$$

$$I.Duhamel_1 = (1/w^2 t_d) [t - (1/w) \text{sen}wt] \quad \dots(l)$$

que es el valor de la integral de Duhamel tabulada en la figura 3.52

de la ecuación (3.35)

$$FAD_1 = (I.Duhamel_1)w^2 = (t/t_d) - (1/wt_d) \text{sen}wt \quad \dots(m)$$

por lo tanto de la ecuación (3.34) la respuesta dinámica de desplazamientos del sistema en función del tiempo es

$$x(t) = FAD_1 X_{est} = X_{est}[(t/t_d) - (1/wt_d)\text{sen}wt] \quad \dots (n)$$

Intervalo 2.- $t \geq t_d$

de la gráfica la magnitud P_0 de la fuerza $P(t)$ es $P_0 = 0$ para $t = t_d$

por lo tanto de la ecuación (3.27) $X_{est} = P_0/k = 0 \quad \dots (o)$

las condiciones iniciales de desplazamiento (x_0) y velocidad (x'_0) para este Intervalo son:

derivando (n)

$$x'(t) = (X_{est}/t_d)[1 - \text{cos}wt] \quad \dots (p)$$

y para $t = t_d$ de (n) y (p)

$$x_0 = X_{est}[1 - (1/wt_d)\text{sen}wt_d] \quad \dots (q)$$

$$x'_0 = (X_{est}/t_d)[1 - \text{cos}wt_d] \quad \dots (r)$$

la respuesta para cuando existen condiciones iniciales esta dada por la ecuación (3.37), (o), (q), (r) y $\tau = t_d$

$$x(t) = X_{est}[1 - (1/wt_d)\text{sen}wt_d]\text{cos}w(t-t_d) + (X_{est}/wt_d)[1 - \text{cos}wt_d]\text{sen}w(t-t_d) + (o)FAD_1 \quad \dots (s)$$

y tomando el siguiente cambio de variable para efectuar simplificaciones con mayor facilidad:
 $x = w(t-t_d)$, $y = wt_d$

tenemos de (s)

$$x(t) = X_{est}\{[1 - (1/y)\text{sen}y]\text{cos}x + [1/y - (1/y)\text{cos}y]\text{sen}x\} = X_{est}\{\text{cos}x - (1/y)\text{sen}y\text{cos}x + (1/y)\text{sen}x - (1/y)\text{sen}x\text{cos}y\} = (X_{est}/y)\{y\text{cos}x - \text{sen}y\text{cos}x + \text{sen}x - \text{sen}x\text{cos}y\}$$

recordando que en trigonometría se demuestra que^[ref. 5] $\text{sen}(x+y) = \text{sen}x\text{cos}y + \text{sen}y\text{cos}x$

$$x(t) = (X_{est}/y)\{y\text{cos}x + \text{sen}x - \text{sen}(x+y)\}$$

y retomando los valores originales de estas variables

$$x(t) = (X_{est}/wt_d)\{wt_d\text{cos}w(t-t_d) + \text{sen}w(t-t_d) - \text{sen}(wt-wt_d + wt_d)\}$$

de donde la respuesta dinámica de desplazamientos en función del tiempo es

$$x(t) = X_{est}(1/wt_d)\{wt_d\text{cos}w(t-t_d) + \text{sen}w(t-t_d) - \text{sen}wt\} \quad \dots (t)$$

sustituyendo de las ecuaciones (3.27) y (3.6) $X_{est} = P_0/k = P_0/(w^2m)$ en (t)

$$x(t) = (P_0/m)(1/w^2)(1/wt_d)[wt_d \cos w(t-t_d) + \text{sen} w(t-t_d) - \text{sen} wt]$$

$$x(t) = (P_0/m)(1/w^2 t_d)[t_d \cos w(t-t_d) + (1/w) \text{sen} w(t-t_d) - (1/w) \text{sen} wt] \quad \dots (u)$$

comparando (u) con (3.33)

$$I.Duhamel_1 = (1/w^2 t_d)[t_d \cos w(t-t_d) + (1/w) \text{sen} w(t-t_d) - (1/w) \text{sen} wt], t \geq t_d \quad \dots (v)$$

que es el valor de la Integral de Duhamel tabulado en la figura 3.52.

b) Por observación de la gráfica de la figura 3.58, existen 2 intervalos de variación de la fuerza excitatriz $P(t)$

Intervalo 1.- $0 \leq t \leq t_d$, se presenta una carga excitatriz igual a la del caso anterior a), y por lo tanto la respuesta es (ver ecuación (n) del inciso a)):

$$x(t) = X_{est}[1 - (1/wt_d) \text{sen} wt] \quad \dots (a)$$

Intervalo 2.- $t \geq t_d$, se presenta una carga excitatriz aplicada súbitamente y que es igual a la del caso a) del problema propuesto l que se plantea en el próximo inciso 3.2.3.2.

Al resolver dicho problema se encontrará que la I.Duhamel₁ para esta carga vale

$$I.Duhamel_1 = (1/w^2) \int_{t_d}^t \cos w(t-\tau) d\tau$$

(donde τ varía desde el límite inferior $\tau = t_d$, hasta el límite superior de la Integral $\tau = t$)

tomando los límites para τ

$$I.Duhamel_1 = (1/w^2)[\cos w(t-t) - \cos w(t-t_d)] = (1/w^2)[1 - \cos w(t-t_d)] \quad \dots (b)$$

sustituyendo (b) en la ecuación (3.36)

$$FAD_1 = 1 - \cos w(t-t_d) \quad \dots (c)$$

Como ambas partes de la fuerza excitatriz se aplican consecutivamente, la respuesta del sistema estará dada por la ecuación (3.37), ya que cuando se aplica el presente intervalo de carga se tienen condiciones iniciales de desplazamiento (x_0) y velocidad (x'_0) originadas por el Intervalo 1 de carga.

Las condiciones iniciales son iguales a las calculadas en el inciso a) (ecuaciones (q) y (r)), ya que la carga es la misma cuando $0 \leq t \leq t_d$ y valen

$$x_0 = X_{est}[1 - (1/wt_d) \text{sen} wt_d] \quad \dots (d)$$

$$x'_0 = (X_{est}/t_d)[1 - \cos wt_d] \quad \dots (e)$$

por lo tanto sustituyendo (d), (e) y (c) en la ecuación (3.37) y como para este intervalo $\tau = t_d$

$$x(t) = X_{est}[1 - (1/wt_d)\text{sen}wt_d]\text{cos}w(t-t_d) + (X_{est}/wt_d)[1 - \text{cos}wt_d]\text{sen}w(t-t_d) + X_{est}[1 - \text{cos}w(t-t_d)] \dots (f)$$

se puede simplificar más fácilmente la ecuación (f) tomando el siguiente cambio de variable

$$x = w(t-t_d) \dots (g)$$

$$y = wt_d \dots (h)$$

por lo que (f) puede escribirse

$$\begin{aligned} x(t) &= X_{est}\{[1 - (1/y)\text{sen}y]\text{cos}x + [1/y - (1/y)\text{cos}y]\text{sen}x + (1 - \text{cos}x)\} \\ &= X_{est}\{\text{cos}x - (1/y)\text{sen}y\text{cos}x + (1/y)\text{sen}x - (1/y)\text{sen}x\text{cos}y + 1 - \text{cos}x\} \\ &= X_{est}\{[-(\text{sen}y\text{cos}x + \text{sen}x\text{cos}y) + \text{sen}x]/y + 1\} \dots (i) \end{aligned}$$

y recordando que^[ref. 5] $\text{sen}(x+y) = \text{sen}x\text{cos}y + \text{cos}x\text{sen}y$

(i) puede escribirse como

$$x(t) = X_{est}\{[\text{sen}x - \text{sen}(x+y)]/y + 1\} \dots (j)$$

y sustituyendo (g) y (h) en (j)

$$x(t) = X_{est}\{(1/wt_d)[\text{sen}w(t-t_d) - \text{sen}[wt - wt_d + wt_d] + 1]\}$$

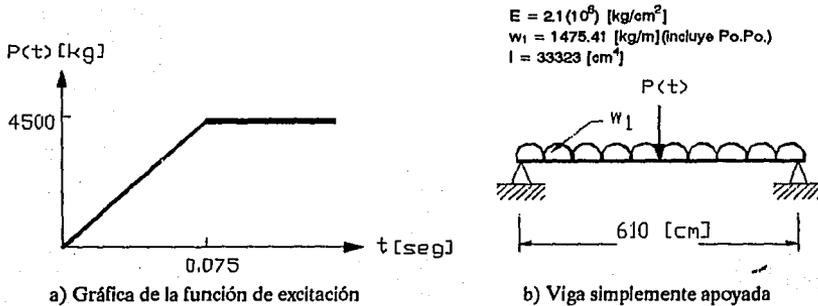
de donde la respuesta dinámica de desplazamientos en función del tiempo es

$$x(t) = X_{est}\{1 + (1/wt_d)[\text{sen}w(t-t_d) - \text{sen}wt]\}, t \geq t_d \dots (k)$$

en donde la expresión entre corchetes es el factor de amplificación dinámica (FAD_1)

III.- En un laboratorio de pruebas de materiales, una máquina hidráulica induce una carga que varía con respecto al tiempo de acuerdo con la gráfica mostrada en la figura 3.59a). Dicha carga es aplicada sobre el centro del claro de la viga de acero simplemente apoyada, cuyas características se indican en la figura 3.59b).

Suponiendo que la masa se concentra en el centro de gravedad de la viga, determinar: a) El desplazamiento dinámico máximo de la viga, el instante en que éste ocurre, y el valor de la deflexión total máxima de la misma; y b) la gráfica de la respuesta dinámica de desplazamientos del sistema.



$E = 2.1 (10^6) \text{ [kg/cm}^2\text{]}$
 $w_1 = 1475.41 \text{ [kg/m] (incluye Po.Po.)}$
 $I = 33323 \text{ [cm}^4\text{]}$

a) Gráfica de la función de excitación

b) Viga simplemente apoyada

Figura 3.59. Prueba de carga dinámica sobre una viga simplemente apoyada

a) Desplazamiento dinámico máximo de la viga (x_{max}), el tiempo en que ocurre (t) y la deflexión total de la viga (Δ_T)

Si suponemos que la masa del sistema de la viga para efectos dinámicos se concentra en el centro del claro, ésta puede modelarse como un sistema oscilatorio de 1 G.L. de masa.

$$m = W/g = (1475.41 \text{ kg/m})(6.1 \text{ m}) / (9.80665 \text{ m/s}^2) = 917.75 \text{ [kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}] = 9.1775 \text{ [kg}\cdot\text{s}^2/\text{cm}] \dots (a)$$

para una viga simplemente apoyada, con carga uniforme distribuida y con carga puntual el desplazamiento máximo (que ocurre en el centro del claro), vale^[ref. 6]

$$\Delta = 5w_1L^4 / (384EI) \dots (b) \text{ (carga uniforme)}$$

$$\Delta = PL^3 / (48EI) \dots (c) \text{ (carga puntual)}$$

$P(t)$ es puntual y de (c) y como $P = K\Delta$, la rigidez vale

$$k = P/\Delta = 48EI/L^3 = (48)(2.1)(10^6) \text{ [kg/cm}^2\text{]} / (33323) \text{ [cm}^4\text{]} / (610 \text{ cm})^3 = 14798.41 \text{ [kg/cm]} \dots (d)$$

de la ecuación (3.6) y de (a) y (d)

$$w = [k/m]^{0.5} = [14798.41 / 9.1775]^{0.5} = 40.16 \text{ [rad/seg]} \dots (e)$$

I- Respuesta para cuando $t \leq 0.075$

Del problema resuelto II.b), se determinó que la respuesta de desplazamientos está dada por

$$x(t) = X_{est} FAD_1 = X_{est} [t/t_d - (1/wt_d) \text{sen}wt] \dots (f)$$

para encontrar x_{max} , empleando el criterio de la 1a. derivada, de (f) tenemos

$$x'(t) = X_{est} [1/t_d - (1/t_d) \text{cos}wt] = 0 \dots (g)$$

de donde

$$\cos wt = 1$$

$$wt = \arccos(1) = n2\pi$$

$$t = n2\pi/w$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$, tomando $n = 1$ y como de la ecuación (3.7) $T = 2\pi/w$

$$t = 2\pi/w = T = 2\pi/40.16 = 0.1565 \text{ [seg]} \quad \dots (h)$$

este tiempo está fuera del intervalo de validez de la ecuación (f), ya que es mayor que $t_d = 0.075$ [seg], por tanto para este intervalo no hay un máximo en el desplazamiento.

II- Respuesta para cuando $t \geq 0.075$

En el problema resuelto II inciso b) se determinó que la respuesta es

$$x(t) = X_{est} \{ 1 + (\operatorname{sen} w(t-t_d) - \operatorname{sen} wt) / (wt_d) \} \quad \dots (i)$$

usando nuevamente el criterio de la 1a. derivada de (i) para hallar x_{max} :

$$x'(t) = X_{est} \{ (1/wt_d) (w \cos w(t-t_d) - w \cos wt) \} = 0 \quad \dots (j)$$

de donde

$$\cos w(t-t_d) - \cos wt = 0 \quad \dots (k)$$

Recordando que^[ref. 5]

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, y tomando $x = 2n\pi$, $y = wt$, tenemos

$$\cos(2n\pi - wt) = \cos 2n\pi \cos wt + \operatorname{sen} 2n\pi \operatorname{sen} wt = \cos wt \quad \dots (l)$$

sustituyendo (l) en (k)

$$\cos w(t - t_d) = \cos(2n\pi - wt) \quad \dots (m)$$

$$w(t - t_d) = \arccos(\cos(2n\pi - wt))$$

de donde

$$w(t - t_d) = 2n\pi - wt$$

$$wt + wt = 2n\pi + wt_d$$

$$2wt = 2n\pi + wt_d$$

y tomando $n = 1$

$$t = (2\pi + w t_d)/(2w) \quad \dots (n)$$

sustituyendo valores

$$t = (2\pi + (40.16)(0.075))/(2(40.16)) = 0.116 \text{ [seg]} \quad \dots (o)$$

sustituyendo (o) en (l)

$$x_{\max} = X_{\text{est}} \{1 + (1/(40.16)(0.045)) (\text{sen}[40.16(0.116 - 0.075)] - \text{sen}[40.16(0.116)])\}$$

$$x_{\max} = 1.66 X_{\text{est}} \quad \dots (p)$$

y sustituyendo la ecuación (3.27), (d) y P_0 en (p)

$$x_{\max} = 1.66 P_0/k = 1.66(4500\text{kg})/14798.41[\text{kg/cm}] = 0.505 \text{ [cm]} \quad \dots (q)$$

el desplazamiento encontrado en (q) es producido por la fuerza excitatriz $P(t)$, y por lo tanto de (b) y (q) se obtiene el desplazamiento total de la viga como

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{tot}} &= \Delta_{w1} + x_{\max} = 5w_1 L^4 / (384EI) + 0.505 \text{ [cm]} \\ &= [5(14.7541\text{kg/cm})(601\text{cm})^4 / (384(2.1)(10^8\text{kg/cm}^2)(33323\text{cm}^4)] \\ &\quad + 0.505 \text{ [cm]} = 0.358 + 0.505 = 0.863 \text{ [cm]} \quad \dots (r) \end{aligned}$$

b) Gráfica de los desplazamientos dinámicos

sustituyendo (d), P_0 , (e) y $t_d = 0.075$ [seg]

en (f)

$$\begin{aligned} x(t) &= (4500\text{kg}/14798.41[\text{kg/cm}]) \{t/0.075 - [1/(40.16)0.075] \text{sen}(40.16t)\} \\ &= 0.3041 [13.3333t - 0.332 \text{sen}(40.16t)] \end{aligned}$$

$$x(t) = 4.055t - 0.101 \text{sen}(40.16t) \quad \dots (s) \text{ con } t \leq 0.075$$

en (l)

$$x(t) = 0.3041 \{1 + 0.332 [\text{sen}40.16(t - 0.075) - \text{sen}(40.16t)]\}$$

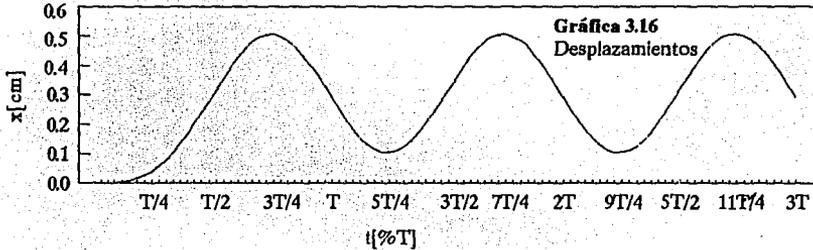
$$x(t) = 0.3041 + 0.101 \text{sen}(40.16t - 3.012) - 0.101 \text{sen}(40.16t) \quad \dots (t) \text{ con } t \geq 0.075$$

Tabulando (s) y (t), se obtiene la siguiente tabla y gráfica

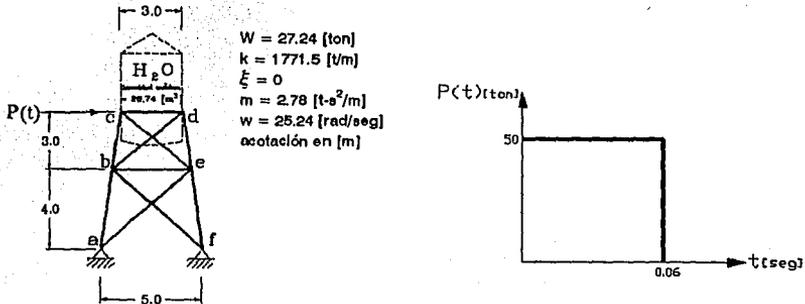
Tabla 3.11

t[seg]	0.0	0.0391	0.0783	0.1160	0.1174	0.1565	0.1956	0.2348	0.2739	0.3130	0.3521
t[%T]	0T	T/4	T/2	0.7412T	3T/4	T	5T/4	3T/2	7T/4	2T	9T/4
x[cm]	0.000	0.058	0.318	0.506	0.505	0.291	0.103	0.318	0.505	0.290	0.103

t[seg]	0.3130	0.4304	0.4695
t[%T]	4T/2	11T/4	3T
x[m]	0.290	0.505	0.290



IV.- Para la estructura metálica mostrada en la figura 3.60a), que soporta un tanque de almacenamiento de agua, y cuyas características estructurales fueron obtenidas en el problema resuelto IV, inciso 3.2.2.4., determinar: a) La respuesta dinámica de desplazamientos si la estructura es sometida a una carga excitatriz que varía de acuerdo a la gráfica mostrada en la figura 3.60b), (suponer que la masa del líquido se mueve con el tanque como un cuerpo rígido); b) el valor del desplazamiento máximo y el tiempo en que se produce; y c) la gráfica de la ecuación de la respuesta dinámica de desplazamientos.



a) Tanque de almacenamiento de agua

b) Diagrama de la función de excitación

Figura 3.60. Fuerza excitatriz aplicada a la estructura metálica de un tanque elevado

a) Respuesta dinámica de desplazamientos

De la ecuación (3.7)

$$T = 2\pi/w = 2\pi/25.24[\text{rad/seg}] = 0.25 \text{ [seg]}$$

...(a)

la respuesta del sistema está dada por la ecuación (3.35) y (3.36) y es

$$x(t) = X_{est} FAD_1 = X_{est} W^2 (I. Duhamel) \quad \dots (b)$$

Para el tipo de fuerza excitatriz $P(t)$ aplicada, de la tabla de funciones de respuestas para sistemas de 1 G.L., no amortiguados de la figura 3.52, se tiene

$$\text{si } t \leq [t_d = 0.06 \text{ seg}] \quad I. Duhamel = (1 - \cos \omega t) / \omega^2 \quad \dots (c)$$

$$\text{si } t \geq [t_d = 0.06 \text{ seg}] \quad I. Duhamel = (\cos \omega(t - t_d) - \cos \omega t) / \omega^2 \quad \dots (d)$$

de la ecuación (3.27)

$$X_{est} = P_0/k = 50[\text{ton}]/1771.5[t/m] = 0.0282 [m] = 2.82 [\text{cm}] \quad \dots (e)$$

I- Respuesta para $t \leq 0.06$ [seg]

sustituyendo (c) y (e) en (b)

$$x(t) = 0.0282(1 - \cos 25.24t) \quad \dots (f)$$

II- Respuesta para $t \geq 0.06$ [seg]

sustituyendo (d) y (e) en (b)

$$x(t) = 0.0282[\cos 25.24(t - 0.06) - \cos 25.24t] \quad \dots (g)$$

b) Desplazamiento máximo (x_{max}) y el instante en que se produce

I- Investigando para $t \leq 0.06$ [seg]

empleando el criterio de la 1a. derivada, de (f)

$$x'(t) = (0.0282)(25.24) \text{sen} 25.24t = 0$$

de donde

$$\text{sen} 25.24t = 0$$

$$25.24t = \arcsen(0) = n\pi \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

tomando $n = 1$ y despejando t

$$t = \pi/25.24 = 0.124 [\text{seg}] \quad \dots (h)$$

el tiempo obtenido en (h) es mayor que $t_d = 0.06$ [seg] y por lo tanto está fuera del rango de validez de (f) por lo que no hay máximo para este intervalo de aplicación de la fuerza

II- Investigando para $t \geq 0.06$ [seg]

por el criterio de la 1a. derivada, de (g)

$$x'(t) = 0.0282[-25.24\text{sen}25.24(t-0.06) + 25.24\text{sen}25.24t] = 0$$

$$-\text{sen}(25.24t - 1.5144) + \text{sen}25.24t = 0$$

recordando que^[ref. 5] $\text{sen}(x-y) = \text{sen}x\text{cos}y - \text{cos}x\text{sen}y$, se tiene

$$-\text{sen}25.24t\text{cos}1.5144 + \text{cos}25.24t\text{sen}1.5144 + \text{sen}25.24t = 0$$

$$-0.05637\text{sen}25.24t + 0.99841\text{cos}25.24t + \text{sen}25.24t = 0$$

$$0.94363\text{sen}25.24t = -0.99841\text{cos}25.24t$$

de donde

$$(\text{sen}25.24t)/(\text{cos}25.24t) = -0.99841/0.94363 = -1.058052 \quad \dots (f)$$

y como $\text{sen}/\text{cos} = \text{tan}$, se tiene

$$\text{tan}25.24t = -1.058052 \text{ [rad]}$$

$$25.24t = \arctan(-1.058052) = -0.8136 + n\pi \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$

de donde

$$t = (-0.8136 + n\pi)/25.24$$

tomando $n = 1$ para que $t \geq 0.06$

$$t = 2.327992654/25.24 = 0.09223426 \approx 0.369T \text{ [seg]} \quad \dots (j)$$

sustituyendo (j) en (g)

$$x_{\text{max}} = 3.874 \text{ [cm]} \quad \dots (k)$$

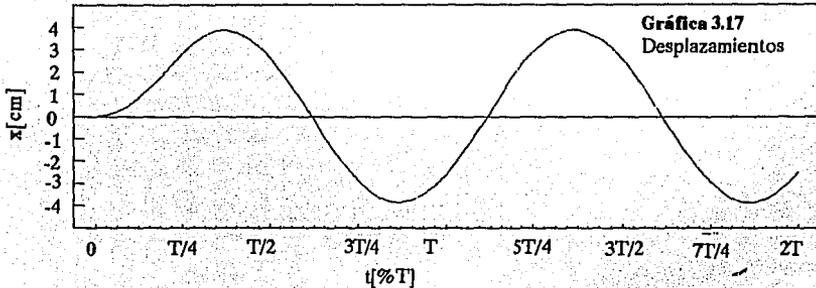
c) Gráfica de la respuesta de desplazamientos dinámica

Tabulando las ecuaciones (f) y (g), se obtiene la siguiente tabla y gráfica

Tabla 3.12

t[seg]	0.0	0.0063	0.0125	0.0188	0.025	0.0313	0.0375	0.0500	0.0750	0.1000	0.1250
t[%T]	0T	0.025T	0.05T	0.075T	0.1T	0.125T	0.15T	0.2T	0.3T	0.4T	0.5T
x[m]	0.0	0.035	0.139	0.310	0.543	0.833	1.172	1.963	3.513	3.800	2.623

t[seg]	0.1500	0.1750	0.2000	0.2250	0.2500	0.3125	0.3750	0.4375	0.5000
t[%T]	0.6T	0.7T	0.8T	0.9T	T	5T/4	3T/2	7T/4	2T
x[m]	0.436	-1.919	-3.535	-3.789	-2.585	2.903	2.546	-2.937	-2.506



V.- Obtener a) el Espectro de Respuesta de desplazamientos de un sistema sencillo (de 1 G.L.), sin amortiguamiento sometido a la carga excitatriz cuya gráfica se muestra en la figura.3.61; y b) la respuesta máxima de desplazamientos, usando el espectro obtenido en a) para la viga del problema III anterior, así como la magnitud de las fuerzas máximas que debe soportar la viga.

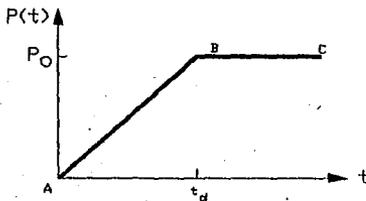


Figura 3.61. Gráfica de la función de excitación para el problema V.

a) Espectro de Respuesta de desplazamientos

De la definición de Espectro de Respuesta dada en el inciso 3.2.3., debemos encontrar el valor del desplazamiento máximo del sistema bajo la acción de la fuerza excitatriz $P(t)$ de la gráfica de la figura.

En el problema resuelto II.b), de este inciso, se determinaron las expresiones de respuestas del sistema, que son

$$x(t) = X_{est}[t/t_d - (1/wt_d)\text{sen}wt] \quad \dots(a)\text{con } t \leq t_d$$

$$x(t) = X_{est}\{1 + (1/wt_d)[\text{sen}w(t - t_d) - \text{sen}wt]\} \quad \dots(b)\text{con } t \geq t_d$$

En el problema resuelto III, de este inciso, se encontró que la respuesta máxima cuando $t \leq t_d$ está dada para cuando

$$t = 2\pi/w = T \quad \dots(c)\text{con } T \leq t_d$$

sustituyendo (c) en (a)

$$x_{max} = X_{est}[T/t_d - (1/wt_d)\text{sen}2\pi] = X_{est}(T/t_d) \quad \dots(d)\text{con } t \leq t_d \text{ y } T \leq t_d$$

en el problema citado también se encontró que la respuesta máxima cuando $t \geq t_d$, está dada para cuando

$$t = (2\pi + wt_d)/(2w) = (T + t_d)/2 \quad \dots(e) \text{ con } t \geq t_d$$

sustituyendo (e) en (b)

$$x_{\max} = X_{est} \{ 1 + (1/wt_d) [\text{sen}w[(T + t_d)/2 - t_d] - \text{sen}w(T + t_d)/2] \}$$

$$= X_{est} \{ 1 + (1/wt_d) [\text{sen}w(T - t_d)/2 - \text{sen}w(T + t_d)/2] \}$$

ya que^[ref. 5] $\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}x\text{cos}y \pm \text{cos}x\text{sen}y$

$$x_{\max} = X_{est} \{ 1 + (1/wt_d) (\text{sen}(wT/2)\text{cos}(wt_d/2) - \text{cos}(wT/2)\text{sen}(wt_d/2) - \text{sen}(wT/2)\text{cos}(wt_d/2) - \text{cos}(wT/2)\text{sen}(wt_d/2)) \}$$

$$= X_{est} \{ 1 - (1/wt_d) (2\text{cos}(wT/2)\text{sen}(wt_d/2)) \}$$

como $\text{cos}\pi = -1$, y de (3.7) $T = 2\pi/w$ y despejando $w = 2\pi/T$, se tiene

$$x_{\max} = X_{est} \{ 1 - (T/(2\pi t_d)) (2\text{cos}\pi \text{sen}(\pi t_d/T)) \}$$

de donde

$$x_{\max} = X_{est} \{ 1 + (T/(\pi t_d)) \text{sen}(\pi t_d/T) \} \quad \dots(f) \text{ con } T \neq 0 \text{ y } t \geq t_d$$

graficando (d) se obtiene una línea recta con ordenada mayor de valor $x_{\max} = X_{est}$ cuando $T = t_d$

tabulando (f) se obtiene la siguiente tabla y el Espectro de Respuesta de desplazamientos mostrado en la figura 3.62a y 3.62b.

Tabla 3.13

t/t _d	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050	0.055	0.060
x _{max} /X _{est}	1.000	1.004	1.000	1.000	0.992	1.011	1.000	1.009	1.000	1.010	1.017
t/t _d	0.065	0.070	0.075	0.080	0.085	0.090	0.095	0.100	0.150	0.200	0.250
x _{max} /X _{est}	0.981	1.017	0.978	1.028	0.982	0.990	1.030	1.000	1.041	1.000	1.000
t/t _d	0.300	0.350	0.400	0.450	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.800	0.900
x _{max} /X _{est}	0.917	1.048	1.127	1.092	1.000	0.905	0.835	0.795	0.783	0.820	0.902
t/t _d	1.000	1.100	1.200	1.300	1.400	1.500	1.600	1.700	1.800	1.900	2.000
x _{max} /X _{est}	1.000	1.099	1.191	1.274	1.348	1.414	1.471	1.521	1.564	1.603	1.637
t/t _d	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.00			
x _{max} /X _{est}	1.827	1.900	1.936	1.955	1.967	1.975	1.980	1.984			

b) Respuesta máxima de desplazamientos y magnitud máxima de la fuerza que debe resistir la viga del problema III de este inciso

En el citado problema se calculó $k = 14798.41 \text{ [kg/cm]}$

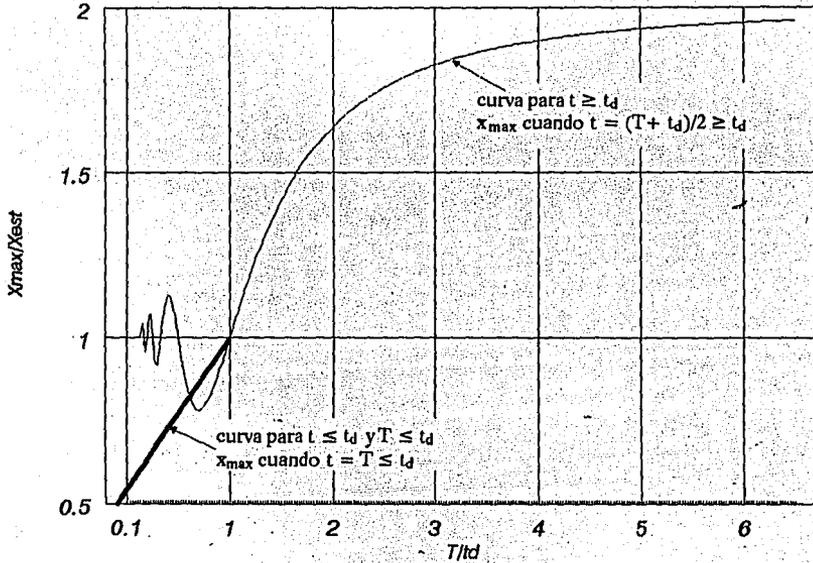


Figura 3.62a. Espectro de respuesta de desplazamientos de un sistema oscilatorio simple sin amortiguamiento sometido a la función de excitación $P(t)$ de la figura 3.61.

$$T = 0.1565 \text{ [seg]}$$

$$t_d = 0.075 \text{ [seg]}$$

$$P_o = 4500 \text{ [kg]}$$

Como $T > t_d$, se emplea la gráfica del espectro de respuestas de la figura 3.62a, con

$$T/t_d = 0.1565 / 0.075 = 2.087$$

por lo tanto, en base a la gráfica

$$x_{max} = 1.66X_{est} = 1.66P_o/k = 1.66(4500)/14798.41 = 0.505 \text{ [cm]} \quad \dots(g)$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el problema mencionado.

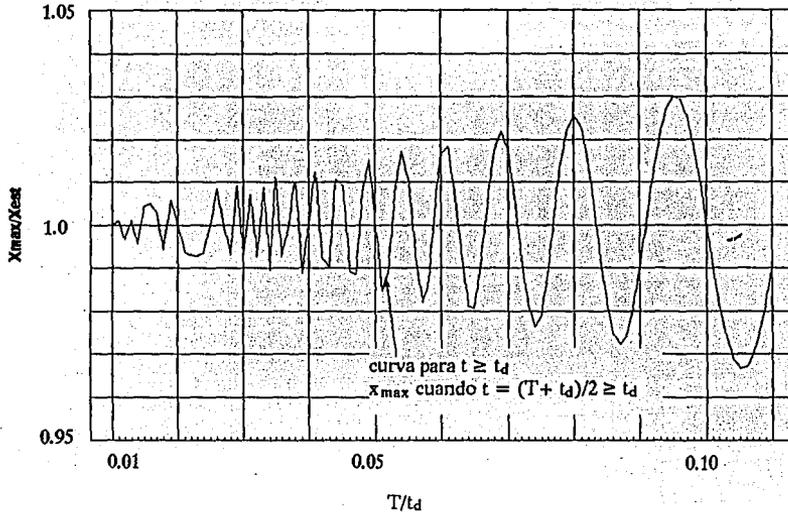


Figura 3.62b. Ampliación de parte del Espectro de Respuesta de desplazamientos de la figura 3.62a.

La máxima fuerza que debe resistir la viga por efectos dinámicos es

$$P_{max} = kx_{max} = (14798.41[\text{kg/cm}]) (0.505) = 7473.2 [\text{kg}] \quad \dots(h)$$

Por lo tanto se puede revisar la resistencia de la viga contra los elementos mecánicos producidos por las cargas gravitacionales (ver figura 3.59) y la fuerza concentrada obtenida en (h).

3.2.3.2. PROBLEMAS PROPUESTOS

I.- Determinar la respuesta de desplazamientos de un sistema oscilatorio simple o de 1 G.L., sin amortiguamiento, sometido a las cargas excitricas $P(t) = P_0[f(t)]$, cuyas gráficas se muestran en las figuras 3.63 y 3.64.

Solución: a) $x(t) = X_{est}(1 - \cos\omega t)$; b) $x(t) = X_{est}[1 - \cos\omega t - (t/td) + (1/\omega td)\text{sen}\omega t]$, con $t \leq td$;
 $x(t) = X_{est}[-\cos\omega t - (1/\omega td)\text{sen}\omega(t - td) + (1/\omega td)\text{sen}\omega t]$, con $t \geq td$

II.- Determinar la respuesta de desplazamientos de un sistema oscilatorio sencillo o de 1 G.L., sin amortiguamiento, sometido a la carga excitatriz $P(t) = P_0[f(t)]$, cuya gráfica se muestra en la figura 3.65.

Solución: $x(t) = X_{est}(1 - \cos\omega t)$, con $t \leq td$; $x(t) = X_{est}[\cos\omega(t - td) - \cos\omega t]$, con $t \geq td$

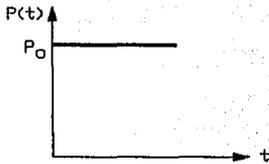


Figura 3.63. Función de excitación para el problema I.

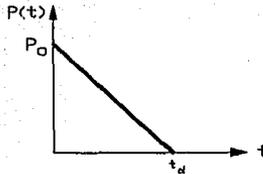


Figura 3.64. Función de excitación para el problema I.

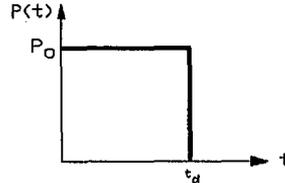


Figura 3.65. Función de excitación para el problema II.

III.- Determinar la respuesta de desplazamientos de un sistema oscilatorio sencillo o de 1 G.L., sin amortiguamiento, sometido a una fuerza excitatriz $P(t) = P_0[f(t)]$, cuya gráfica se muestra en la figura 3.66.

Solución: $x(t) = X_{est}(t/t_d - (1/wt_d)\text{sen}wt)$, con $0 \leq t \leq t_d$; $x(t) = X_{est}\{1 + (1/wt_d)(\text{sen}w(t - t_d) - \text{sen}wt)\}$, con $t_d \leq t \leq t_e$; $x(t) = X_{est}\{(1/wt_d)[\text{sen}w(t - t_d) - \text{sen}wt] + (1/w(t_e - t_d))[\text{sen}w(t - t_d) - \text{sen}w(t - t_e)]\}$, con $t_e \leq t \leq t_f$; $X_{est}(1/w)\{(1/t_d)[\text{sen}w(t - t_d) - \text{sen}wt] - (1/(t_e - t_d))[\text{sen}w(t - t_e) - \text{sen}w(t - t_d)]\}$, con $t \geq t_f$

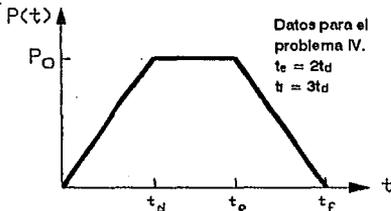


Figura 3.66. Función de excitación para los problemas III y IV.

IV.- Obtener el Espectro de Respuesta de desplazamientos de un sistema de 1 G.L., sin amortiguamiento, sometido a la carga excitatriz cuya gráfica se muestra en la figura 3.66, y para cuando $t \geq t_f$.

Solución: El Espectro de Respuesta de desplazamientos se muestra en la figura 3.67.

V.- La estructura mostrada en la figura 3.68, la cual es usada con fines publicitarios y cuyas características se determinaron en el problema II del inciso 32.2.4, es sujeta a un repentino deslizamiento de su cimentación con un decaimiento de carácter exponencial con la gráfica mostrada en la citada figura. Suponiendo que no existe amortiguamiento, determinar: a) La ecuación de respuesta dinámica de desplazamientos absolutos o totales; b) el valor de la respuesta máxima absoluta de desplazamientos y aceleración del extremo superior en el intervalo de aplicación de la fuerza; y c) el valor del desplazamiento y aceleración máximos relativos al apoyo, en el intervalo mencionado.

Solución: a) $x(t) = X_{est}(w^2/(w^2 + 1))[e^{-t} - \cos wt + (1/w)\text{sen}wt]$, con $t \leq t_d$; b) $x_{max} = 1.737$ [cm], $x''_{max} = -106.26$ [cm/s²]; c) $x_r_{max} = 0.986$ [cm], $x''_r_{max} = -107.011$ [cm/s²]

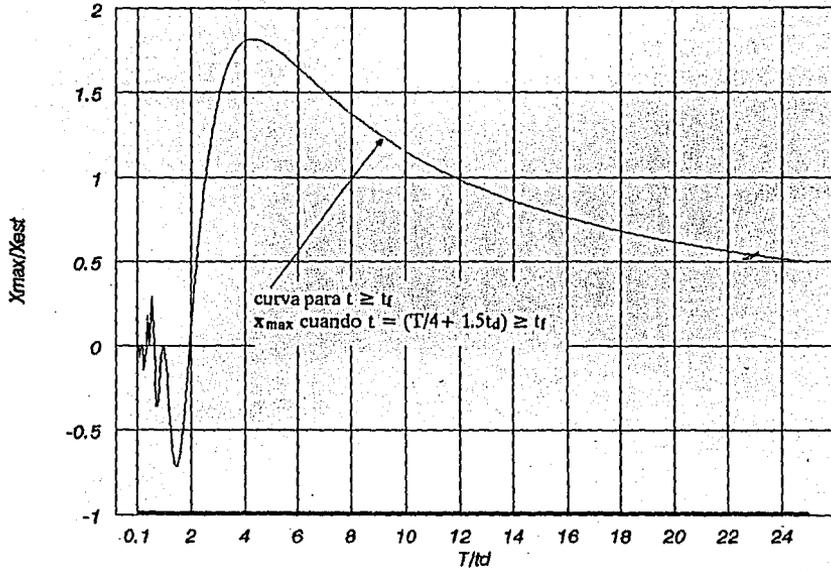


Figura 3.67. Espectro de respuesta de desplazamientos de un sistema oscilatorio sencillo sin amortiguamiento sometido a la función de excitación $P(t)$ de la figura 3.66.

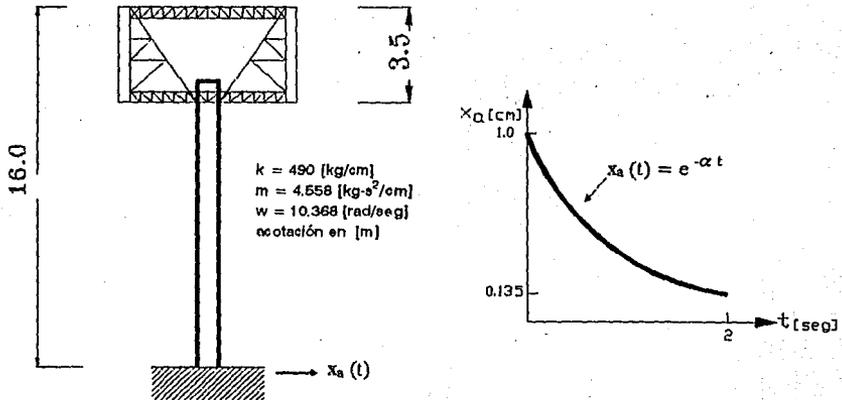


Figura 3.68. Estructura para carteles publicitarios sometida a un deslizamiento de la cimentación con la gráfica mostrada.

3.2.4.- VIBRACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO.

La figura 3.69 muestra un sistema vibratorio discreto sencillo o de 1 G.L., en el cual las oscilaciones son sostenidas por la acción de una fuerza excitatriz dinámica P(t) que inyecta energía al sistema durante el lapso de tiempo en que actúa sobre este.

A diferencia del movimiento estudiado en el inciso 3.2.3., en el presente caso se toman en cuenta los efectos del amortiguamiento representado en la figura citada por el pistón, que ocasiona una pérdida de energía cinética en el sistema vibratorio.

Se representa entonces el diagrama de cuerpo libre mediante la figura 3.70, en cuya masa actúan: una fuerza de inercia P_i producida durante el movimiento, una fuerza restauradora P_r generada por el resorte de rigidez k, una fuerza

excitatriz P(t) que mantiene y aumenta las oscilaciones, y para este caso una fuerza amortiguadora P_D que disipa la energía del movimiento. Estableciendo el equilibrio dinámico, de la citada figura se obtiene la ecuación general del movimiento forzado amortiguado^[ref. 1]:

$$mx'' + cx' + kx = P(t) \quad \dots (3.38)$$

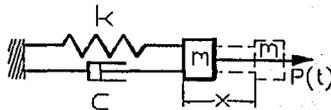
Ecuación general del movimiento forzado amortiguado

La fuerza excitatriz P(t) puede ser clasificada en varios tipos; pero como se demostró en el inciso 3.2.3.1., todos estos casos de cargas dinámicas pueden resolverse con los métodos del CASO GENERAL DE CARGA y tratarse como cargas arbitrarias o irregulares, por lo que la solución general de la ecuación del movimiento forzado amortiguado es

$$x(t) = (P_0/m)(I.Duhamel)_2 \quad \dots (3.39)$$

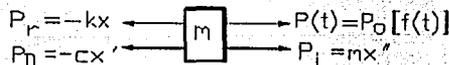
$$x(t) = X_{est} FAD_2 \quad \dots (3.40)$$

Solución general de la ecuación del movimiento forzado amortiguado para cuando x₀ = x'₀ = 0



- k-rigidez del sistema [ton/m]
- m-masa del cuerpo oscilante [ton-seg²/m]
- x-desplazamiento de la masa [m]
- c-constante de amortiguación del sistema [ton-seg/m]

Figura 3.69. Sistema discreto simple amortiguado de 1. G.L.



- P(t)-fuerza excitatriz en función del tiempo [ton]
- P_r-fuerza restauradora del resorte [ton]
- P_i-fuerza de inercia [ton]
- P_D-fuerza amortiguadora [ton]
- f(t)-una función del tiempo
- P₀-magnitud de la fuerza excitatriz [ton]
- x'-velocidad de la masa [m/s]
- x''-aceleración de la masa [m/s²]

Figura 3.70. Diagrama de cuerpo libre del sistema de la figura 3.69.

donde

$$I.Duhamel_2 = \int_0^t (1/w_D) [(\tau)] \exp[-\xi w(t - \tau)] [sen w_D(t - \tau) d \tau] \quad \dots(3.41)$$

$$FAD_2 = (I.Duhamel_2)w^2 \quad \dots(3.42)$$

I.Duhamel₂-integral de Duhamel, integral de convolución, o integral de superposición, con amortiguamiento

FAD₂-factor de amplificación dinámica con amortiguamiento

En los casos en que el sistema vibratorio antes de la aplicación de la fuerza excitatriz $P(t)$ tenga condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad diferentes de cero, la respuesta del sistema es

$$x(t) = \exp[-\xi w(t - \tau)] [x_0 \cos w_D(t - \tau) + (x'_0 + w \xi x_0) / w_D] sen w_D(t - \tau) + X_{est}(FAD_2) \quad \dots(3.43)$$

Solución general de la ecuación del movimiento forzado amortiguado para cuando $x_0 \neq 0$ y $x'_0 \neq 0$

En Ingeniería Civil para el caso tan frecuente de los movimientos sísmicos, es muy útil establecer la ecuación del movimiento para excitación en la base o cimentación de las estructuras, y que es

$$m\ddot{x}_T + c\dot{x}'_r + kx_r = 0 \quad \dots(3.44)$$

con Ecuación del movimiento forzado en la base con amortiguamiento

$$x_T = x_a + x_r \quad \dots(3.44a)$$

$$x'_T = x'_a + x'_r \quad \dots(3.44b)$$

$$x''_T = x''_a + x''_r \quad \dots(3.44c)$$

donde los subíndices para el desplazamiento (x), velocidad (x') y aceleración (x'') del sistema significan:

a-del apoyo, base o suelo

T-total o absoluto

r-relativo al apoyo

En los casos de fuerzas armónicas con frecuencias angulares \bar{w} que se aproximan a las frecuencias angulares w de los sistemas vibratorios sobre los que actúan, los factores de amplificación dinámica (FAD_2) de la ecuación (3.40) o (3.43), aunque no tienden hacia infinito como en el caso no amortiguado, si crecen sensiblemente y pueden provocar por tanto el colapso del sistema estructural. Si el valor de las frecuencias angulares de la fuerza excitatriz y del sistema oscilatorio son iguales se dice que el sistema entra en **resonancia**. Se debe evitar que el sistema estructural que se diseñe tenga frecuencias similares a la de la fuerza excitatriz, para lo cual se maneja la relación entre masa y rigidez de la estructura.

METODO NUMERICO DE EVALUACION DE LAS RESPUESTAS DINAMICAS

Las fuerzas de excitación $P(t)$ que comúnmente se presentan en la práctica sobre las estructuras civiles son casi siempre complicadas y de tipo arbitrario, por lo que la aplicación de los procedimientos analíticos de integración hasta aquí descritos, usados para obtener las respuestas de desplazamiento, velocidad y aceleración de un

sistema oscilatorio, requieren un número excesivo e impráctico de cálculos, motivo por el cual se debe dejar de lado dicha evaluación analítica y aplicarse algún método numérico de evaluación de las respuestas mencionadas.

El método aquí presentado está basado en el que desarrolló N.M. Newmark en 1959^[ref. 13]. Con referencia a la figuras 3.71 y 3.72, que representan una fuerza excitatriz $P(t)$ arbitraria, es decir con una gráfica irregular con respecto al tiempo, el método está basado en las siguientes hipótesis:

- la fuerza excitatriz $P(t)$ está compuesta por una serie de impulsos sucesivos en intervalos de duración Δt , tan pequeños como la exactitud de la evaluación de la respuesta lo requiera.
- la variación de la fuerza excitatriz $P(t)$ en cada intervalo Δt es lineal.
- los valores iniciales de desplazamiento (x_i) y velocidad (\dot{x}'_i) al inicio de cada intervalo Δt son conocidos.

Puede demostrarse que las respuestas dinámicas de un sistema oscilatorio simple con o

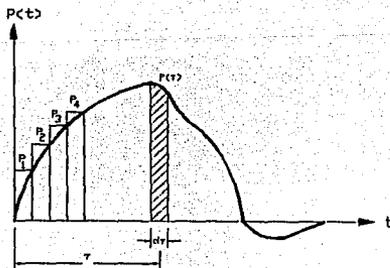


Figura 3.71. Excitación arbitraria compuesta de una serie de impulsos en intervalos de duración Δt .

sin amortiguamiento, ante la aplicación de cualquier fuerza excitatriz $P(t)$ así considerada están dadas por

$$D_0 = (P_{i+1} - P_i) / (k \Delta t) \quad \dots (3.45)$$

$$C_0 = (P_i - c D_0) / k \quad \dots (3.46)$$

$$A_0 = x_{i1} - C_0 \quad \dots (3.47)$$

$$B_0 = [\dot{x}'_{i1} + A_0 \xi \omega - D_0] / \omega D \quad \dots (3.48)$$

$$x_{i1+1} = \exp(-\xi \omega \Delta t) [A_0 \cos \omega D \Delta t + B_0 \sin \omega D \Delta t] + C_0 + D_0 \Delta t \quad \dots (3.49)$$

$$\dot{x}'_{i1+1} = \omega D \exp(-\xi \omega \Delta t) [-A_0 \sin \omega D \Delta t + B_0 \cos \omega D \Delta t] - \xi \omega \exp(-\xi \omega \Delta t) [A_0 \cos \omega D \Delta t + B_0 \sin \omega D \Delta t] + D_0 \quad \dots (3.50)$$

$$\ddot{x}''_{i1} = [P_i - c \dot{x}'_{i1} - k x_{i1}] / m \quad \dots (3.51)$$

A_0, B_0, C_0, D_0 son constantes

Δt - duración de un intervalo [seg] (generalmente $\Delta t \leq 0.1 T$)

En la figura 3.72 los subíndices indican:

i - valor al inicio del intervalo considerado

$i+1$ - valor al final del intervalo considerado

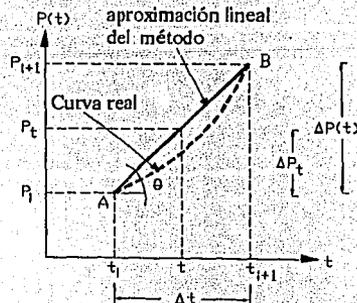


Figura 3.72. Ampliación de uno de los impulsos componentes de la fuerza excitatriz de la figura 3.71

Los métodos numéricos tienen como característica principal el poder automatizarse de una forma relativamente fácil mediante programas de computadora como los de la referencia [12]. El presente método puede aplicarse sistemáticamente introduciendo las siguientes expresiones:

$$M = \cos \omega_D \Delta t \quad \dots (3.52)$$

$$N = \sin \omega_D \Delta t \quad \dots (3.53)$$

$$P = \xi w \quad \dots (3.54)$$

$$Q = \exp(-P \Delta t) \quad \dots (3.55)$$

M, N, P, Q-valores constantes en un sistema oscilatorio simple determinado

con lo cual las respuestas pueden escribirse como

$$x_{ti+1} = Q[A_0 M + B_0 N] + C_0 + D_0 \Delta t \quad \dots (3.56)$$

$$x'_{ti+1} = Q \omega_D [-A_0 N + B_0 M] - P Q [A_0 M + B_0 N] + D_0 \quad \dots (3.57)$$

los pasos a seguir para la aplicación sistemática del método son:

1. Seleccionar $\Delta t \leq 0.1T$
2. De la gráfica de P(t), obtener para cada incremento de tiempo $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, los valores

de la carga P_{ti+1} , comenzando el llenado de la tabla mostrada en la figura 3.73, y continuándolo para los siguientes pasos.

3. Calcular M, N, P y Q con las ecuaciones (3.52) a (3.55)

4. Usar las condiciones iniciales de reposo conocidas del sistema oscilatorio: $x_i = x_0 = 0$, $x'_i = x'_0 = 0$.

5. Calcular D_0, C_0, A_0 y B_0 con las ecuaciones (3.45) a (3.48).

6. Calcular x''_i al inicio del intervalo con la ecuación (3.51).

7. Obtener x_{ti+1} y x'_{ti+1} al final del intervalo con las ecuaciones (3.56) y (3.57).

8. Iniciar un nuevo intervalo tomando como condiciones iniciales (x_i y x'_i) las calculadas en el intervalo anterior del paso 7, y repetir los pasos 5 a 8 hasta obtener los valores de las respuestas para los tiempos deseados.

Este método puede sistematizarse fácilmente en una calculadora de bolsillo con el programa desarrollado en el problema III del siguiente inciso.

t_i	P_i	(3.56) x_i	(3.57) x'_i	(3.51) x''_i	(3.45) D_0	(3.46) C_0	(3.47) A_0	(3.48) B_0	← # de ecuación
$t_{i+1} = t_i + \Delta t$									

Figura 3.73. Tabla para evaluación de las respuestas de un sistema oscilatorio simple usando el método numérico

3.2.4.1.- PROBLEMAS RESUELTOS

I.- Deducir las expresiones que describen el movimiento de vibración forzada con amortiguamiento.

En el sistema oscilatorio simple que se muestra en la figura 3.69 (Inciso 3.2.4.), una fuerza excitatriz dinámica $P(t)$, rompe el equilibrio estático del estado de reposo desplazando una distancia x la masa m del sistema. La rigidez k del cuerpo oscilante se opone al desplazamiento generando una fuerza restauradora P_r que retorna a la masa a su posición inicial; ésta al acelerarse durante el retorno se desliza más allá de dicha posición por causa de la fuerza de inercia P_i producida y por la fuerza excitatriz que sigue obrando sobre el sistema durante un tiempo t , estableciéndose así un ciclo oscilatorio.

El amortiguamiento c del sistema oscilatorio, representado por el pistón, ocasiona una pérdida o disipación de energía cinética por causa de la fuerza amortiguadora P_D , que disminuye la amplitud de los desplazamientos en cada nuevo ciclo.

Se ha establecido que (problema I, inciso 3.2.1.1. y problema I, inciso 3.2.2.4.)

$$P_r = -kx \quad \dots (a)$$

$$P_i = mx'' \quad \dots (b)$$

$$P_D = -cx' \quad \dots (c)$$

del diagrama de cuerpo libre de la figura 3.70 (Inciso 3.2.4.), se puede establecer el equilibrio dinámico siguiente

$$P_D + P_r = P_i - P(t) \quad \dots (d)$$

sustituyendo (a), (b) y (c), en (d)

$$-cx' - kx = mx'' - P(t)$$

de donde

$$mx'' + cx' + kx = P(t) \quad \dots (3.38)$$

Ecuación general del movimiento forzado amortiguado

ya que la fuerza excitatriz es función del tiempo, tenemos nuevamente

$$P(t) = P_o[f(t)] \quad \dots (3.25)$$

P_o -amplitud de la fuerza excitatriz [ton]

$f(t)$ -una función del tiempo

Como se indicó en el inciso 3.2.3., la fuerza excitatriz $P(t)$, puede clasificarse en varios tipos: a) Armónica, b) en la base, c) por impulsos y d) arbitraria.

En el problema I, del inciso 3.2.3.1., se demostró que todos los casos de carga pueden resolverse con los métodos del caso de fuerza excitatriz arbitraria o CASO GENERAL DE CARGA,

*El signo (-) se usa debido a que la fuerza de inercia se opone al movimiento

por lo que se deducirá la respuesta de desplazamientos del sistema para dicho caso cuando se tiene amortiguamiento.

Para una fuerza impulsiva de pequeña duración dt como la mostrada en la figura 3.56 (Inciso 3.2.3.1.), que actúa solo por ese instante de tiempo, la respuesta del sistema está dada por la ecuación (3.18) del movimiento libre con amortiguamiento subcrítico (que es el tipo de amortiguamiento de Interés para el Ingeniero Civil)

$$x = \exp(-\xi w t) [x_0 \cos w_D t + \{x'_0 + w \xi x_0 / w_D\} \sin w_D t] \quad \dots(3.18)$$

Una fuerza de impulso que se aplica a un sistema oscilatorio en estado de reposo, al actuar súbitamente imprime una velocidad inicial a la masa del cuerpo. En el problema resuelto I, del Inciso 3.2.3.1., se demostró que las condiciones iniciales (para $t = 0$) son

$$x_0 = 0 \text{ y } x'_0 = (P_0/m)dt \quad \dots(e)$$

sustituyendo (e) en (3.18)

$$x = \exp(-\xi w t) \{ (0) \cos w_D t + [P_0 dt / m w_D + (0)] \sin w_D t \}$$

$$x = [P_0 \exp(-\xi w t) / m w_D] \sin w_D t \quad \dots(f)$$

En la figura 3.71 (inciso 3.2.4.), se muestra la gráfica de una fuerza excitatriz arbitraria $P(t)$, es decir una fuerza cuya variación en el tiempo no sigue una ley establecida por una ecuación matemática.

Si dicha fuerza actúa sobre un sistema oscilatorio, se puede conocer su respuesta de desplazamientos $x(t)$, considerando que la fuerza excitatriz $P(t)$ está compuesta por una serie sucesiva de impulsos $P(\tau) = P_0 d\tau$ de pequeña duración, y por tanto dicha respuesta estará integrada por una serie de respuestas sucesivas del sistema dadas por (f).

Las ecuaciones diferenciales lineales como la ecuación (f), tienen la propiedad de superponerse^[ref. 14]. La respuesta del sistema ante la carga arbitraria, está dada por la suma de respuestas sucesivas a cada uno de los impulsos componentes y como para el intervalo de tiempo $d\tau$ muy pequeño se puede considerar que $P(\tau)$ es continua, y como la oscilación del sistema se presenta para el tiempo $(t - \tau)$, tenemos:

$$P(\tau) = P_0 [f(\tau)] \quad \dots(g)$$

Integrando la ecuación (f) y sustituyendo (g) se tiene

$$x(t) = P_0 / m (I. Duhamel_2) \quad \dots(3.39) \text{ Solución general de la ecuación del movimiento forzado amortiguado para cuando } x_0 = x'_0 = 0$$

donde

$$I. Duhamel_2 = \int_0^t \{ [f(\tau)] \exp(-\xi w(t - \tau)) / w_D \} \sin w_D(t - \tau) d\tau \quad \dots(3.41)$$

Multiplicando la ecuación (3.39) por (w^2/w_D^2) y como de la ecuación (3.6) $k = m w^2$

$$x(t) = (P_0/k) (w^2/w_D) \int_0^t [f(\tau)] \exp(-\xi w(t - \tau)) \sin w_D(t - \tau) d\tau$$

y sustituyendo la ecuación (3.27)

$$x(t) = X_{est}FAD_2 \quad \dots(3.40)$$

Solución general de la ecuación del movimiento forzado amortiguado para cuando $x_0 = x'_0 = 0$

con

$$FAD_2 = (I.Duhamel_2)w^2 \quad \dots(3.42)$$

t-tiempo en el cual ocurre la respuesta de desplazamientos $x(t)$ del sistema

τ -tiempo en el que se presenta el impulso componente $P(\tau)$

$d\tau$ -tiempo que dura el impulso componente $P(\tau)$

$\{f(\tau)\}$ -una función del tiempo

$(t - \tau)$ -intervalo o lapso de tiempo en donde se presenta la oscilación del sistema

I.Duhamel₂-Integral de Duhamel, integral de convolución o integral de superposición, con amortiguamiento

FAD₂-factor de amplificación dinámica con amortiguamiento

En los casos en que existen en el sistema oscilatorio condiciones iniciales de desplazamiento (x_0) y velocidad (x'_0), diferentes de cero (por ejemplo al aplicar consecutivamente una nueva fuerza excitatriz antes de terminar la oscilación del sistema, o cuando la fuerza excitatriz cambia repentinamente su valor), la respuesta está dada de forma análoga a como se demostró en el problema I caso a) (Inciso 3.2.3.1.), es decir

$$x(t) = \text{solución vibración libre con amortiguamiento} + X_{est}(FAD_2) \quad \dots(h)$$

y sustituyendo la ecuación (3.18) en (h) para el tiempo en que el sistema oscila $(t - \tau)$

$$x(t) = \exp(-\xi w(t - \tau)) [x_0 \cos w_D(t - \tau) + \{x'_0 + w \xi x_0 / w_D\} \sin w_D(t - \tau)] + X_{est}(FAD_2) \quad \dots(3.43)$$

Solución general de la ecuación del movimiento forzado amortiguado para cuando $x_0 \neq 0$ y $x'_0 \neq 0$

En Ingeniería Civil para el caso frecuente de los movimientos sísmicos, es muy útil establecer la ecuación del movimiento para excitación en la base del sistema:

Con referencia a la figura 3.74, un sistema oscilatorio sufre un desplazamiento del apoyo o base " x_a ", que es función del tiempo, la masa " m " del sistema se mueve entonces una distancia total " x_T ", que es igual al desplazamiento original de la base más un desplazamiento adicional " x_r ", causado por la fuerza de inercia " P_r ", por tanto

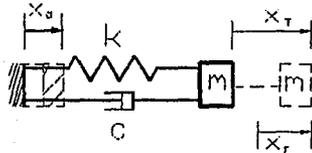
$$x_T = x_a + x_r \quad \dots(3.44a)$$

la base experimenta también una aceleración x''_a que es función del tiempo y la masa tendrá una aceleración x''_T igual a la original de la base más una adicional x''_r

$$x''_T = x''_a + x''_r \quad \dots(3.44c)$$

Respecto a la velocidad de la masa del sistema, por consideraciones análogas se tiene

$$x'_T = x'_a + x'_r \quad \dots(3.44b)$$



- c-amortiguamiento del sistema [ton-seg/m]
- k-rigidez del sistema [ton/m]
- m-masa del cuerpo oscilante [ton-seg²/m]
- x_a -desplazamiento del apoyo [m]
- x_T -desplazamiento total de la masa [m] (respecto a la posición de reposo)
- x_r -desplazamiento relativo o efectivo de la masa (respecto al suelo en movimiento) [m]

Figura 3.74. Sistema discreto simple excitado en su base.



- P_D -fuerza amortiguadora del pistón [ton]
- P_r -fuerza restauradora del resorte [ton]
- P_i -fuerza de inercia [ton]
- x''_T -aceleración total de la masa [m/s²]
- x'_r -velocidad relativa de la masa [m/s] (respecto al apoyo)

Figura 3.75. Diagrama de cuerpo libre del sistema discreto de la figura 3.74.

donde los subíndices para el desplazamiento (x), velocidad (x') y aceleración (x'') del sistema significan:

- a-del apoyo, base o suelo
- T-total o absoluto
- r-relativo al apoyo

El resorte de rigidez "k" y el pistón de amortiguamiento "c", se oponen a los movimientos de la masa causados por la fuerza de inercia, por lo que el equilibrio dinámico representado en la figura 3.75, puede establecerse como

$$P_r + P_D = P_i \quad \dots (l)$$

de donde

$$P_i - P_r - P_D = 0 \quad \dots (o)$$

Las fuerzas del resorte "P_r" y del pistón "P_D", son función de el desplazamiento y velocidad relativos, respectivamente, ya que ambos se mueven para este caso junto con la base, por tanto de la figura 3.75, y la ecuación (o)

$$mx''_T + cx'_r + kx_r = 0 \quad \dots (3.44)$$

Ecuación del movimiento forzado en la base con amortiguamiento

II.- Para un sistema oscilatorio simple o de 1 G.L., con amortiguamiento, sujeto a la acción de la fuerza excitatriz armónica $P(t) = P_0[f(t)]$, cuya gráfica en función del tiempo se muestra en la figura 3.76, determinar: a) La respuesta dinámica de desplazamientos y b) mostrar gráficamente lo que sucede si la

frecuencia angular $\bar{\omega}$ de la fuerza excitatriz se aproxima o tiende a igualar el valor de la frecuencia angular ω_D del sistema.

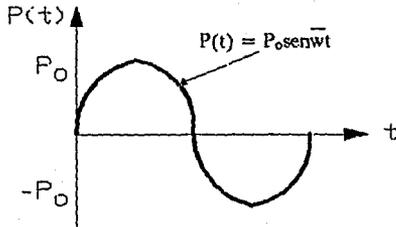


Figura 3.76. Función de excitación armónica.

a) Respuesta dinámica de desplazamientos

De la observación de la gráfica de la figura 3.76, que es una función armónica del tipo seno y de la ecuación (3.25)

$$P(t) = P_0 \text{sen} \bar{\omega} t \quad \dots (a)$$

sustituyendo (a) en la ecuación (3.38)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \text{sen} \bar{\omega} t \quad \dots (b)$$

comparando con la ecuación (3.12), el movimiento expresado por (b) se puede considerar como la superposición de una vibración libre amortiguada de frecuencia angular ω_D , y una oscilación sostenida de una fuerza con frecuencia angular $\bar{\omega}$.

Por tanto de dicha comparación se deduce que la solución de (b) es

$$x = \text{solución libre amortiguada (ec. (z), problema 1, inciso 3.2.2.4.)} + x_{\text{par}} \quad \dots (c)$$

$$x = \exp(-\xi \omega t) [A_0 \cos \omega_D t + B_0 \text{sen} \omega_D t] + x_{\text{par}} \quad \dots (d)$$

A_0, B_0 - constantes que dependen de las condiciones iniciales

Se encontrará el valor de x_{par} :

Durante la acción de la fuerza excitatriz $P(t)$, el sistema tiende a oscilar aproximándose a la misma frecuencia $\bar{\omega}$ de dicha fuerza, y por tanto una solución para x_{par} es

$$x_{\text{par}} = Y \cos \bar{\omega} t + Z \text{sen} \bar{\omega} t \quad \dots (e)$$

Y, Z - constantes a determinar

Determinación de Y y Z

$$1a. \text{ derivada de (e) } \dot{x} = -\bar{\omega} Y \text{sen} \bar{\omega} t + \bar{\omega} Z \cos \bar{\omega} t \quad \dots (f)$$

$$2a. \text{ derivada de (e) } \ddot{x} = -\bar{\omega}^2 Y \cos \bar{\omega} t - \bar{\omega}^2 Z \text{sen} \bar{\omega} t \quad \dots (g)$$

dividiendo entre m en (b) y como de (3.6) $k = \omega^2 m$, se tiene

$$x'' + (c/m)x' + \omega^2 x = (P_0/m) \text{sen} \bar{\omega} t$$

multiplicando el 2o. miembro por (w^2/w^2) y sustituyendo la ecuación (3.27)

$$x'' + (c/m)x' + w^2x = X_{est}w^2 \overline{\text{sen}wt} \quad \dots (h)$$

sustituyendo (e), (f) y (g) en (h)

$$\begin{aligned} -Y\overline{w}^2 \overline{\text{cos}wt} + Z\overline{w}^2 \overline{\text{sen}wt} - (c/m)Y\overline{w} \overline{\text{sen}wt} + (c/m)Z\overline{w} \overline{\text{cos}wt} + w^2Y\overline{\text{cos}wt} + w^2Z\overline{\text{sen}wt} = \\ = X_{est}w^2 \overline{\text{sen}wt} \quad \dots (i) \end{aligned}$$

se resolverá por el método de coeficientes indeterminados^[ref. 14] de las Ecuaciones Diferenciales. Por tanto, factorizando (i)

$$[(w^2 - \overline{w}^2)Z - (c/m)\overline{w}Y] \overline{\text{sen}wt} + [(w^2 - \overline{w}^2)Y + (c/m)\overline{w}Z] \overline{\text{cos}wt} = (X_{est}w^2) \overline{\text{sen}wt}$$

Igualando coeficientes se obtiene

$$(w^2 - \overline{w}^2)Z - (c/m)\overline{w}Y = X_{est}w^2 \quad \dots (j)$$

$$(c/m)\overline{w}Z + (w^2 - \overline{w}^2)Y = 0 \quad \dots (k)$$

de (k)

$$Z = -(w^2 - \overline{w}^2)Y / [(c/m)\overline{w}] \quad \dots (l)$$

sustituyendo (l) en (j)

$$-(w^2 - \overline{w}^2)^2 Y / [(c/m)\overline{w}] - (c/m)\overline{w}Y = X_{est}w^2$$

$$-(w^2 - \overline{w}^2)^2 Y - (c/m)^2 \overline{w}^2 Y = X_{est}w^2 \overline{w}(c/m)$$

de donde

$$Y = -X_{est}w^2 \overline{w}(c/m) / [(w^2 - \overline{w}^2)^2 + (c/m)^2 \overline{w}^2] \quad \dots (m)$$

sustituyendo (m) en (l)

$$Z = X_{est}w^2 \overline{w}(c/m) (w^2 - \overline{w}^2) / \{(c/m)\overline{w}[(w^2 - \overline{w}^2)^2 + (c/m)^2 \overline{w}^2]\}$$

$$Z = X_{est}w^2 (w^2 - \overline{w}^2) / [(w^2 - \overline{w}^2)^2 + (c/m)^2 \overline{w}^2] \quad \dots (n)$$

sustituyendo (m) y (n) en (e), la respuesta es

$$\begin{aligned} x_{par} = X_{est}w^2 (w^2 - \overline{w}^2) / [(w^2 - \overline{w}^2)^2 + (c/m)^2 \overline{w}^2] \overline{\text{sen}wt} - X_{est}w^2 \overline{w}(c/m) / [(w^2 - \overline{w}^2)^2 \\ + (c/m)^2 \overline{w}^2] \overline{\text{cos}wt} \end{aligned}$$

de donde

$$x_{par} = \{X_{est}w^2 / [(w^2 - \overline{w}^2)^2 + (c/m)^2 \overline{w}^2]\} [(w^2 - \overline{w}^2) \overline{\text{sen}wt} - \overline{w}(c/m) \overline{\text{cos}wt}] \quad \dots (o)$$

sustituyendo de la ecuación (3.15) $c = 2m\omega\xi$ y multiplicando por $(1/w^4)/(1/w^4)$

$$x_{par} = \{ (1/w^4) X_{est} w^2 / [(1/w^4) \{ (w^2 - \bar{w}^2)^2 + 4m^2 \xi^2 w^2 \bar{w}^2 / m^2 \}] \} [(w^2 - \bar{w}^2) \overline{sen\omega t} - (\bar{w} 2m \xi w / m) \overline{cos\omega t}] =$$

$$x_{par} = X_{est} \{ (1 - \bar{w}^2 / w^2) \overline{sen\omega t} - 2(\bar{w} / w) \xi \overline{cos\omega t} \} / [(1 - (\bar{w}^2 / w^2))^2 + 4\xi^2 (\bar{w}^2 / w^2)] \quad \dots (p)$$

y sustituyendo la ecuación (3.29) en (p)

$$x_{par} = H \{ (1 - \Omega^2) \overline{sen\omega t} - 2\Omega\xi \overline{cos\omega t} \} \quad \dots (q)$$

con

$$H = X_{est} / [(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2] \quad \dots (r)$$

sustituyendo la expresión (q) que da el valor obtenido de x_{par} en (d), se tiene

$$x = \exp(-\xi\omega t) [A_0 \overline{cos\omega t} + B_0 \overline{sen\omega t}] + H \{ (1 - \Omega^2) \overline{sen\omega t} - 2\Omega\xi \overline{cos\omega t} \} \quad \dots (s)$$

Determinación de A_0 y B_0

1a. derivada de (s)

$$x' = -\exp(-\xi\omega t) \omega A_0 \overline{sen\omega t} + \exp(-\xi\omega t) \omega B_0 \overline{cos\omega t} - \xi\omega \exp(-\xi\omega t) [A_0 \overline{cos\omega t} + B_0 \overline{sen\omega t}] + H \{ (1 - \Omega^2) \overline{w\cos\omega t} - 2\Omega\xi \overline{w\sen\omega t} \} \quad \dots (t)$$

de las condiciones iniciales, para $t = 0$ y recordando que $\cos(0) = 1$, $\sen(0) = 0$, y $\exp(0) = 1$, se tiene

de (r), para $t = 0$

$$x_0 = A_0 + H(-2\Omega\xi)$$

por tanto

$$A_0 = x_0 + 2H\Omega\xi \quad \dots (u)$$

de (s), para $t = 0$

$$x'_0 = \omega B_0 - \xi\omega A_0 + H(1 - \Omega^2)\bar{w}$$

y sustituyendo (u)

$$x'_0 = \omega B_0 - \xi\omega x_0 - 2\xi^2 \omega H \Omega + H(1 - \Omega^2)\bar{w} = \omega B_0 - \xi\omega x_0 - H(2\xi^2 \omega \Omega - (1 - \Omega^2)\bar{w})$$

de donde

$$B_0 = (x'_0 + \xi\omega x_0) / \omega + H(2\xi^2 \omega \Omega - (1 - \Omega^2)\bar{w}) / \omega \quad \dots (v)$$

sustituyendo (u), y (v) en (s) y factorizando

$$x = \exp(-\xi\omega t)[x_0 \cos\omega t + \{x'_0 + \xi\omega x_0/\omega_D\} \operatorname{sen}\omega t] + \exp(-\xi\omega t)[2H\Omega\xi \cos\omega t + (1/\omega_D)H(2\xi^2\omega\Omega - (1 - \Omega^2)\bar{w}) \operatorname{sen}\omega t] + H[(1 - \Omega^2) \operatorname{sen}\bar{\omega}t - 2\Omega\xi \cos\bar{\omega}t] \quad \dots(w)$$

comparando (w) con (3.18), se tiene la respuesta dinámica de desplazamientos del sistema

$$x = \text{ec. (3.18)} + H\{\exp(-\xi\omega t)[2\Omega\xi \cos\omega t + (1/\omega_D)(2\xi^2\omega\Omega - (1 - \Omega^2)\bar{w}) \operatorname{sen}\omega t] + [(1 - \Omega^2) \operatorname{sen}\bar{\omega}t - 2\Omega\xi \cos\bar{\omega}t]\} \quad \dots(x)$$

b) Efectos de la aproximación de \bar{w} a w

si $\bar{w} \rightarrow w$, de la ecuación (3.29)

$$\Omega = \bar{w}/w \approx 1 \quad \dots(y)$$

Comparando (x) con (3.43) la expresión entre llaves en (x) es el Factor Dinámico de Carga FAD_2 . Se puede mostrar con claridad lo que sucede con este factor y con los desplazamientos del sistema graficando la expresión (r) obtenida en el inciso a), la cual es parte integrante del FAD_2 de la ecuación (x) y no depende de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad que se presenten o no en el sistema.

Sustituyendo (y) en (r) se obtiene

$$H / X_{\text{est}} = FAD = 1/(4\xi^2) \quad \dots(z)$$

lo que indica que cuando no hay amortiguamiento en el sistema la amplificación dinámica tiende a infinito si $w = \bar{w}$; graficando (r) en términos del FAD y Ω , para distintos valores de ξ en un sistema de 1 G.L., se obtiene la gráfica mostrada en la figura 3.77.

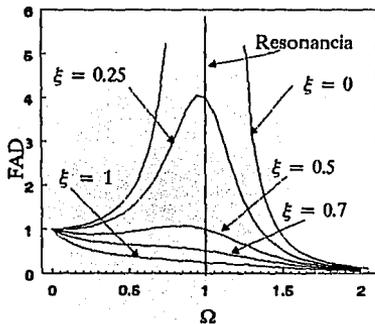


Figura 3.77. Efectos de amortiguación y resonancia en vibración forzada

En la figura mencionada se muestra claramente el efecto de la amortiguación del sistema oscilatorio, a mayor amortiguación presente, menores son las amplitudes dinámicas. Aún cuando para $\xi > 0$, la respuesta no tiende a infinito, el FAD sí puede crecer sensiblemente y provocar el colapso del sistema o estructura, sobre todo si el valor de la frecuencia de la fuerza excitatriz se acerca a la frecuencia del sistema; en caso de que estas frecuencias coincidan se dice que el sistema entra en resonancia.

Debemos evitar que nuestro sistema estructural tenga frecuencias similares a la de la fuerza excitatriz, para lo cual se maneja la relación entre masa y rigidez.

III.- a) Deducir las expresiones de un método numérico para la evaluación de las respuestas de un sistema oscilatorio ante excitaciones arbitrarias y en general ante cualquier tipo de carga dinámica; y b) codificar un programa para computadora de bolsillo para la aplicación automatizada del método numérico deducido en a).

En Ingeniería Civil el caso más común de fuerzas de excitación $P(t)$, es el de los sismos, que excitan la base de los sistemas estructurales al acelerar su cimentación; ya se demostró que dicha aceleración puede aplicarse a la masa del sistema dejando fija su cimentación (problema I, inciso 3.2.3.1.).

Las fuerzas de excitación que se presentan en la práctica sobre las estructuras, son casi siempre complicadas y de tipo arbitrario, es decir sus variaciones a través del tiempo tienen una gráfica irregular, como la mostrada en la figura 3.71 (inciso 3.2.4.).

Asimismo la aplicación de los procedimientos analíticos de integración, aun para funciones de excitación definidas por una expresión matemática conocida, requieren de un número excesivo de cálculos, que son imprácticos en las aplicaciones profesionales de la Ingeniería Civil al diseño de estructuras.

Por los motivos expresados, para fines prácticos debemos desechar la evaluación analítica de las respuestas estructurales y aplicar métodos numéricos de evaluación de estas respuestas, que por otro lado, tienen como característica una gran facilidad para ser automatizadas mediante programas de computadoras como los de la referencia [12]. Uno de los métodos usados con más frecuencia se presenta a continuación y está basado en el desarrollado originalmente por N.M. Newmark en 1959^[ref. 13].

Las bases del método consisten en considerar que la fuerza excitatriz $P(t)$ está compuesta por una serie de impulsos sucesivos de duración Δt tan pequeños como la exactitud de la evaluación de la respuesta lo requiera, ver figura 3.71 (inciso 3.2.4.).

La figura 3.72 (inciso 3.2.4.) muestra un intervalo de la curva de la fuerza excitatriz $P(t)$ ampliado; se asume que la curva está compuesta en estos intervalos por tramos rectos que se aproximan tanto como se desee a la curva real de línea punteada, simplemente tomando Δt suficientemente pequeño, y que los valores iniciales de desplazamiento (x_i) y velocidad (\dot{x}'_i) en el punto A, son conocidos. De la citada figura se establece que

$$\Delta P(t) = P_{i+1} - P_i \quad \dots(a)$$

$$\tan\theta = \Delta P(t)/\Delta t = (P_{i+1} - P_i)/\Delta t \quad \dots(b)$$

para cualquier tiempo t dentro del intervalo en estudio

$$\tan\theta = \Delta P(t)/(t - t_i) \quad \dots(c)$$

de donde

$$\Delta P_t = (\tan\theta)(t - t_i) \quad \dots(d)$$

sustituyendo (b) en (d)

$$\Delta t = (P_{i+1} - P_i)(t-t_i)/\Delta t \quad \dots(e)$$

el valor de la fuerza $P(t)$ para el tiempo t es

$$P(t) = P_t = P_i + \Delta P_t \quad \dots(f)$$

sustituyendo (e) en (f)

$$P(t) = P_t = P_i + (P_{i+1} - P_i)(t-t_i)/\Delta t \quad \dots(g)$$

de donde

$$P(t) = P_t = P_i + P_{i+1}t/\Delta t - P_it/\Delta t - P_{i+1}t_i/\Delta t + P_it_i/\Delta t = [1 + (t-t_i)/\Delta t]P_i + (t-t_i)P_{i+1}/\Delta t$$

$$P(t) = P_t = [1 - (t-t_i)/\Delta t]P_i + (t-t_i)P_{i+1}/\Delta t \quad \dots(h)$$

sustituyendo (h) en la ecuación (3.38), se tiene la ecuación del movimiento forzado amortiguado para el intervalo Δt

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = [1 - (t-t_i)/\Delta t]P_i + (t-t_i)P_{i+1}/\Delta t \quad \dots(i)$$

En el problema II anterior, se demostró que la solución de una ecuación como esta, para el lapso de tiempo en que el sistema oscila $(t-t_i)$ es

$$x(t) = \exp(-\xi w(t-t_i)) [A_0 \cos w_D(t-t_i) + B_0 \sin w_D(t-t_i)] + x_{par} \quad \dots(j)$$

x_{par} = solución particular

A_0, B_0 = constantes a determinar, que dependen de las condiciones iniciales

aplicando los métodos para resolver las ecuaciones diferenciales^[ref. 14], una solución para x_{par} es

$$x_{par} = C_0 + D_0(t-t_i) \quad \dots(k)$$

determinación de C_0 y D_0

$$1a. \text{ derivada de (k) } x' = D_0 \quad \dots(l)$$

$$2a. \text{ derivada de (k) } x'' = 0 \quad \dots(m)$$

sustituyendo (k), (l) y (m) en (i)

$$m(0) + cD_0 + k[C_0 + D_0(t-t_i)] = [1 - (t-t_i)/\Delta t]P_i + (t-t_i)P_{i+1}/\Delta t$$

$$cD_0 + kC_0 + kD_0(t-t_i) = P_i - (t-t_i)P_i/\Delta t + (t-t_i)P_{i+1}/\Delta t$$

factorizando

$$(cD_o + kC_o) + kD_o(t - t_i) = (P_{i+1}/\Delta t - P_i/\Delta t)(t - t_i) + P_i$$

$$(cD_o + kC_o) + kD_o(t - t_i) = [P_{i+1} - P_i]/\Delta t(t - t_i) + P_i \quad \dots(n)$$

se resolverá por el método de los coeficientes indeterminados de las ecuaciones diferenciales, igualando coeficientes se tiene

$$kD_o = (P_{i+1} - P_i)/\Delta t \quad \dots(o)$$

$$cD_o + kC_o = P_i \quad \dots(p)$$

de donde

$$D_o = (P_{i+1} - P_i)/(k\Delta t) \quad \dots(3.45)$$

$$C_o = (P_i - cD_o)/k \quad \dots(3.46)$$

sustituyendo (k) en (j)

$$x(t) = \exp(-\xi w(t - t_i))[A_o \cos w_D(t - t_i) + B_o \sin w_D(t - t_i)] + C_o + D_o(t - t_i) \quad \dots(q)$$

determinación de A_o y B_o

1a. derivada de (q)

$$x'(t) = \exp(-\xi w(t - t_i))[-A_o w_D \sin w_D(t - t_i) + B_o w_D \cos w_D(t - t_i)] - \xi w \exp(-\xi w(t - t_i))[A_o \cos w_D(t - t_i) + B_o \sin w_D(t - t_i)] + D_o \quad \dots(r)$$

de (q) para t = t_i

$$x_{ii} = \exp(0)[A_o \cos(0) + B_o \sin(0)] + C_o + D_o(0)$$

$$x_{ii} = A_o + C_o$$

$$A_o = x_{ii} - C_o \quad \dots(3.47)$$

de (r) para t = t_i

$$x'_{ii} = \exp(0)[-A_o w_D \sin(0) + B_o w_D \cos(0)] - \xi w \exp(0)[A_o \cos(0) + B_o \sin(0)] + D_o$$

$$x'_{ii} = B_o w_D - A_o \xi w + D_o$$

$$B_o = [x'_{ii} + A_o \xi w - D_o]/w_D \quad \dots(3.48)$$

podemos conocer el valor de el desplazamiento y la velocidad al final del intervalo Δt (punto B, figura 3.72), con las ecuaciones (q) y (r) para cuando t toma el valor $t_1 + \Delta t$

de (q)

$$x_{t_1+1} = \exp(-\xi w(t_1 + \Delta t - t_1)) [A_0 \cos w_D(t_1 + \Delta t - t_1) + B_0 \sin w_D(t_1 + \Delta t - t_1)] + C_0 + D_0(t_1 + \Delta t - t_1)$$

$$x'_{t_1+1} = \exp(-\xi w \Delta t) [A_0 \cos w_D \Delta t + B_0 \sin w_D \Delta t] + C_0 + D_0 \Delta t \quad \dots (3.49)$$

analogamente, de (r)

$$x'_{t_1+1} = \exp(-\xi w \Delta t) w_D [-A_0 \sin w_D \Delta t + B_0 \cos w_D \Delta t] - \xi w \exp(-\xi w \Delta t) w_D [A_0 \cos w_D \Delta t + B_0 \sin w_D \Delta t] + D_0 \quad \dots (3.50)$$

en el inicio del intervalo o punto A de la figura 3.72, desconocemos la aceleración del sistema X''_1 ; pero ésta puede determinarse con la ecuación (3.38) para $t = t_1$ como

$$m x''_1 + c x'_1 + k x_1 = P_1 \quad \dots (s)$$

de donde

$$x''_1 = [P_1 - c x'_1 - k x_1] / m \quad \dots (3.51)$$

Para poder aplicar metódicamente estas respuestas, por facilidad se introducen las siguientes variables

$$M = \cos w_D \Delta t \quad \dots (3.52)$$

$$N = \sin w_D \Delta t \quad \dots (3.53)$$

$$P = \xi w \quad \dots (3.54)$$

$$Q = \exp(-\xi w \Delta t) = \exp(-P \Delta t) \quad \dots (3.55)$$

portanto las ecuaciones (3.49), (3.50) y (3.51), pueden escribirse como

$$x_{t_1+1} = Q[A_0 M + B_0 N] + C_0 + D_0 \Delta t \quad \dots (3.56)$$

$$x'_{t_1+1} = Q w_D [-A_0 N + B_0 M] - P Q [A_0 M + B_0 N] + D_0 \quad \dots (3.57)$$

Los pasos a seguir para la aplicación manual del método fueron mencionados al final del inciso 3.2.4.

b) Programación del método en calculadora de bolsillo

A continuación se indica la codificación en lenguaje básico de la programación del método numérico deducido en a).

10 INPUT "K=";K;"M=";M;"M0,% AMORTIG.=";X9

```

15  ANGLE 1: INPUT "TIEMPO MAX.EVALUADO=";Z8
20  W=SQR(K/M0):T1=2*PI/W:C=X9*2*M0*W:W1=W*SQR(1-X9^2)
30  PRINT "W=",W;"WD=";W1;"PERIODO=";T1
33  INPUT "DELTA T=";T2
35  M1=FRAC((W1*T2)/(2*PI))*2*PI
40  M=COSM1:N=SENM1:P=X9*W:Q=EXP(-P*T2)
50  X1=0;V1=0:T=0
55  INPUT "P(I)=";P2
60  IF T > 0 THEN P2=P1 ELSE P2=P2
65  INPUT "P(I+1)=";P1:X0=X1:V0=V1
70  D0=(P1-P2)/(K*T2):C0=(P2-C*D0)/K:A0=X0-C0:B0=(V0+A0*X9*W-D0)/W1
75  A1=(P2-C*V0-K*X0)/M0:PRINT "A(I)=";A1
80  X1=Q*(A0*M+B0*N)+C0+D0*T2
90  V1=Q*W1*(-A0*N+B0*M)-P*Q*(A0*M+B0*N)+D0
100 PRINT "D0=";D0;"C0=";C0;"A0=";A0;"B0=";B0
110 T=T+T2:IF T > Z8 THEN END
120 PRINT "T=";T;"X(I)=";X1;"V(I)=";V1:GOTO 60

```

La siguiente tabla relaciona la nomenclatura usada en el método numérico y los símbolos del programa de computadora.

Método:	ξ	w_D	Δt	T	x_{ii}	x'_{ii}	D_0	C_0	A_0	B_0	x_{ii+1}
Programa:	X9	W1	T2	T1	X0	V0	D0	C0	A0	B0	X1
Método:	x'_{ii+1}	x'_{ii}	m	P_{i+1}	P_i						
Programa:	V1	A1	M0	P1	P2						

IV.- La estructura del cubo de elevadores de un edificio se muestra en las figuras 3.78 y 3.79. Para el movimiento del elevador se utiliza un motor eléctrico acoplado a una serie de poleas y cables, que en conjunto tienen un peso (incluyendo el del elevador con su carga viva y muerta) de 1500 [kg].

Durante el movimiento de arranque ascendente del elevador, el mecanismo eléctrico mencionado produce una fuerza armónica sinusoidal $P(t) = P_0 \text{sen} \omega t$, según especificaciones proporcionadas por el fabricante la magnitud de la fuerza es de 3000 [kg] con una frecuencia angular de 60 [rad/seg].

El mecanismo de levante es montado a través de aisladores y amortiguadores de resorte e hidráulicos con rigidez $K_a = 3215$ [kg/cm] y amortiguamiento $c_a = 25$ [kg-cm/seg], respectivamente, sobre dos vigas IPR152x13,6 [kg/m], con las características mostradas en la figura 3.79, que están empotradas en los muros de concreto del cubo de elevadores.

Mediante pruebas de vibración libre efectuadas a cada viga se determinó el valor de dos desplazamientos de respuesta consecutivos en $X_n = 8 \text{ [mm]}$ y $X_{n+1} = 6.63 \text{ [mm]}$.

Suponiendo que la masa de las vigas se concentra en el centro del claro, determinar: a) La respuesta dinámica de desplazamientos, velocidad y aceleración del sistema para los primeros 0.25 [seg] de excitación, usando para ello el método numérico de evaluación de respuestas; b) la gráfica de la respuesta de desplazamientos con los valores obtenidos en a); c) la deflexión total máxima del sistema amortiguado, para ese lapso; y d) la fuerza máxima puntual que debe soportar la viga en el centro del claro.

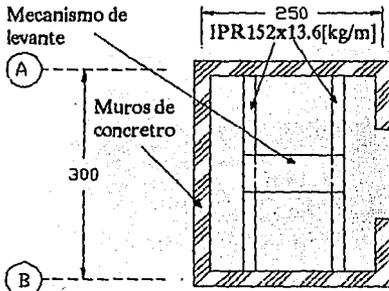


Figura 3.78. Planta del cubo de elevadores de un edificio

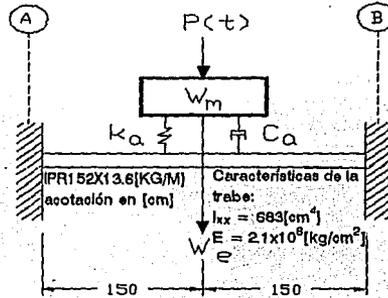


Figura 3.79. Vigas de soporte del mecanismo de levante del elevador de la figura 3.78

a) Evaluación de las respuestas dinámicas mediante el método numérico.

La masa total oscilante del sistema (m_o) es

$$m_o = (W_m + W_e + W_{IPR})/g \quad \dots (a)$$

de los datos del problema

$$W_m + W_e = 1500 \text{ [kg]} \quad \dots (b)$$

$$W_{IPR} = 2(13.6 \text{ kg/m})(3m) = 81.6 \approx 82 \text{ [kg]} \quad \dots (c)$$

sustituyendo (b) y (c) en (a)

$$m_o = (1500 + 82)/980.665 = 1.613 \text{ [kg-s}^2\text{/cm]} \quad \dots (d)$$

Como los análisis de estructuras hasta aquí presentados (y los más comúnmente usados en la práctica), son lineales y elásticos, es decir sus deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas en un rango lineal por lo que se dice que cumplen con la Ley de Hooke; el sistema

estructural formado por las vigas y el motor con sus amortiguadores y aisladores, en este caso puede modelarse como un sistema oscilatorio simple como el mostrado en la figura 3.80. Ya que la viga y el aislador-amortiguador de la base del mecanismo de levante están en serie^[ref. 13]

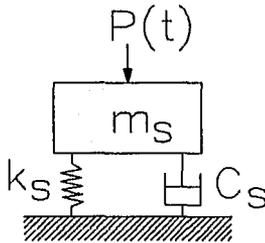


Figura 3.80. Sistema de 1 G.L. que representa a la estructura de la figura 3.79.

$$(1/k_s) = (1/k_a) + (1/k_{IPR}) \quad \dots(e)$$

$$(1/c_s) = (1/c_a) + (1/c_{IPR}) \quad \dots(f)$$

k_s -rigidez del sistema

c_a -constante de amortiguamiento del sistema

k_a -rigidez del aislador del mecanismo

c_a -constante de amortiguamiento del aislador del mecanismo

k_{IPR} -rigidez de la viga

c_{IPR} -constante de amortiguamiento de la viga

Para una viga doblemente empotrada, con una carga puntual en el centro del claro, se demuestra que la deflexión máxima en dicho punto, vale^[ref. 10]

$$\Delta_{max1} = PL^3/(192EI) \quad \dots(g)$$

para la misma viga sometida a una carga uniforme distribuida, la deflexión máxima es en el centro del claro y vale^[ref. 10]

$$\Delta_{max2} = wL^4/(384EI) \quad \dots(h)$$

la fuerza excitatriz se aplica en el centro del claro, y como $P = k\Delta$, de (g) para dos vigas

$$k_{IPR} = P/\Delta_{max1} = 2(192EI/L^3) = (192)(2)(2.1)(10^6)(683)/300^3 = 20398.93 \text{ [kg/cm]} \quad \dots(i)$$

sustituyendo (i) en (e) y como $k_a = 3215 \text{ [kg/cm]}$

$$(1/k_s) = (1/3215) + (1/20398.93) = 3.600842(10^{-4})$$

$$k_s = 2777.3 \text{ [kg/cm]} \quad \dots(j)$$

para las vigas, la masa m_{IPR} es de (c)

$$m_{IPR} = (82\text{kg})/(980.665\text{cm/s}^2) = 0.084 \text{ [kg}\cdot\text{s}^2/\text{cm]} \quad \dots(k)$$

y de (3.6), (f) y (k)

$$w_{PR} = [20398.93/0.084]^{0.5} = 492.8 \text{ [rad/s]} \quad \dots(l)$$

y de la ecuación (3.21) y los datos del sistema

$$S = \ln[X_n/X_{n+1}] = \ln[8/6.63] = 0.18784$$

y de la ecuación (3.22)

$$\xi \approx S/2\pi \approx 0.03 \quad \dots(m)$$

de la ecuación (3.15), (m), (k) y (l)

$$c_{PR} = 2\xi m P w_{PR} = 2(0.03)(0.084)(492.8) = 2.484 \text{ [kg-s/cm]}$$

sustituyendo (n) en (f) y como $c_a = 25 \text{ [kg-s/cm]}$

$$(1/c_s) = (1/25) + (1/2.484) = 0.4426$$

$$c_s = 2.2594 \text{ [kg-s/cm]} \quad \dots(n)$$

para el sistema, de la ecuación (3.6), (d) y (l)

$$w_s = [k_s/m_s]^{0.5} = [2777.3/1.613]^{0.5} = 41.495 \text{ [r/s]} \quad \dots(o)$$

de la ecuación (3.15), (d), (n) y (o)

$$\xi_s = c_s/(2m_s w_s) = 2.2594/(2(1.613)(41.495)) = 0.017 \quad \dots(p)$$

y de la ecuación (3.19)

$$w_{D_s} = w_s [1 - \xi_s^2]^{0.5} = 41.495 [1 - 0.017^2]^{0.5} = 41.489 \text{ [r/s]} \quad \dots(q)$$

de la ecuación (3.7) $T_s = 2\pi/w_s = 2\pi/41.495 = 0.15 \text{ [seg]}$

... (r)

por tanto se elige $\Delta t = 0.1 T_s = 0.015 \text{ [seg]}$

... (s)

ahora se procederá a llenar para cada paso de tiempo la siguiente tabla donde de las ecuaciones (3.52) a (3.55), se tiene para el sistema oscilatorio:

$$M = \cos w_{D_s} \Delta t = \cos(41.489(0.015)) = 0.8125195221 \quad \dots(t)$$

$$N = \sin w_{D_s} \Delta t = \sin(41.489(0.015)) = 0.582933981 \quad \dots(u)$$

$$P = \xi w = (0.017)(41.495) = 0.705415 \quad \dots(v)$$

$$Q = \exp(-P\Delta t) = \exp(-0.015(0.705415)) = 0.9894745592 \quad \dots(w)$$

en esta tabla la ley de variación de la fuerza excitatriz $P(t)$ es

$$P(t) = 3000\text{sen}60t$$

... (x)

y

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

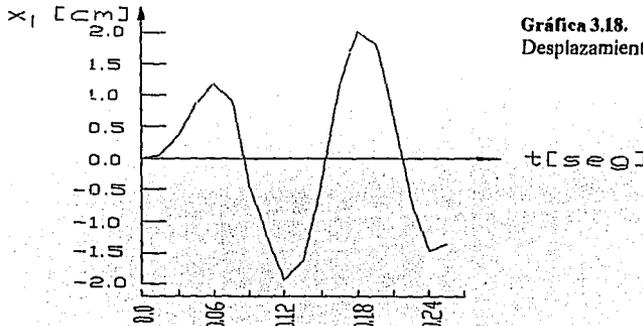
... (y)

(y)	(x)	(3.56)	(3.57)	(3.51)	(3.45)	(3.46)	(3.47)	(3.48)
t_i	F_i	x_i	x'_i	x''_i	D_o	C_o	A_o	B_o
[s]	[kg]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]				
0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	56.4097	-0.0462	0.0462	-1.3588
0.015	2350.0	0.053	10.505	1350.31	13.7184	0.8349	0.7816	-0.0907
0.030	2921.5	0.360	29.876	1149.29	-39.3524	1.0842	-0.7242	1.6583
0.045	1282.1	0.867	32.962	-744.44	-62.6436	0.5130	0.3540	2.3104
0.060	-1327.6	1.191	4.808	-2879.76	-38.5266	-0.4465	1.6370	1.0723
0.075	-2932.6	0.910	-43.297	-3324.33	14.7457	-1.0680	1.9783	-1.3854
0.090	-2318.3	-0.044	-78.705	-1250.64	56.8586	-0.8813	0.8374	-3.2532
0.105	50.4	-1.232	-70.846	-2251.84	55.9440	-0.0277	-1.2039	-3.0765
0.120	2381.0	-1.931	-15.929	4823.38	12.6910	0.8469	-2.7779	-0.7371
0.135	2909.7	-1.621	56.458	4515.63	-40.1661	1.0806	-2.7018	2.2830
0.150	1236.4	-0.371	101.242	1273.21	-62.6268	0.4965	-0.8737	3.9349
0.165	-1372.6	1.124	89.427	-2911.49	-37.6913	-0.4633	1.5878	3.0668
0.180	-2942.8	2.017	24.484	-5331.15	15.7659	-1.0725	3.0891	0.2622
0.195	-2268.0	1.799	-51.272	-4441.99	57.2955	-0.8700	2.6688	-2.5714
0.210	100.9	0.652	-92.609	-928.82	55.4615	-0.0091	0.6609	-3.5625
0.225	2411.4	-0.701	-78.110	2811.60	11.6564	0.8587	-1.5594	-2.1901
0.240	2897	-1.483	-22.305	4381.65	-40.9702	1.0787	-2.5601	0.4064
0.255	1190.2	-1.362	35.135	3032.95	-62.5899	0.4798	-1.8415	2.3241

Tabla 3.14. Valores de respuestas dinámicas del sistema de la figura 3.80

b) Gráfica de la respuesta dinámica de desplazamientos

de los valores de la tabla se obtiene la siguiente gráfica de respuesta de desplazamientos del sistema



Gráfica 3.18.
Desplazamientos

c) *Deflexión máxima durante los primeros 0.25 [seg] de aplicación de la fuerza excitatriz*

de la tabla del inciso a), la deflexión máxima por causa de la fuerza dinámica producida por el mecanismo de levante es

$$x_{\max} = 2.017 \text{ [cm]} \quad \dots (Z)$$

a este valor debe agregarse la deflexión estática producida por el peso de las vigas Δ_{IPR} más la producida por el peso del sistema Δ_s , pues en este caso estos desplazamientos actúan en el mismo sentido que x_{\max} .

la deflexión por peso propio (PoPo), de las vigas es, de (h)

$$\Delta_{\text{IPR}} = wL^4 / (384EI) = 2(0.136 \text{ kg/cm})(300 \text{ cm})^4 / [(384)(2.1)(10^6)(2)(683 \text{ cm}^4)] = 0.002 \text{ [cm]} \quad \dots (A)$$

la deflexión por causa del peso del sistema es, de (g) para 2 vigas

$$\Delta_s = PL^3 / (192EI) = (1500)(300)^3 / [(192)(2.1)(10^6)(683)(2)] = 0.074 \text{ [cm]} \quad \dots (B)$$

por tanto la deflexión máxima en el centro del claro es de (z), (A) y (B)

$$\Delta_{\max} = x_{\max} + \Delta_{\text{IPR}} + \Delta_s = 2.017 + 0.002 + 0.074 = 2.093 \text{ [cm]} \quad \dots (C)$$

d) *La fuerza máxima concentrada que debe soportar la viga en el centro del claro*

las deflexiones por causa de fuerzas concentradas aplicadas en el centro del claro Δ_{PCC} son, de (z) y (B)

$$\Delta_{\text{PCC}} = x_{\max} + \Delta_s = 2.017 + 0.074 = 2.091 \text{ [cm]} \quad \dots (D)$$

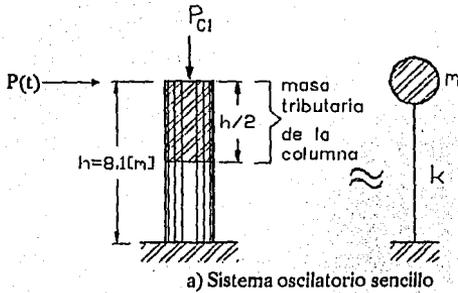
la rigidez por causa de estas fuerzas está dada por (I), y como $P = k\Delta$, tenemos de (D) e (I)

$$P = (20398.93)(2.091) = 42654.16 = 42654 \text{ [kg]} \quad \dots (E)$$

que es el valor de la fuerza aplicada en el centro del claro, para la que deben diseñarse las vigas por el método de esfuerzos permisibles, si se desea que no sufran deformaciones permanentes.

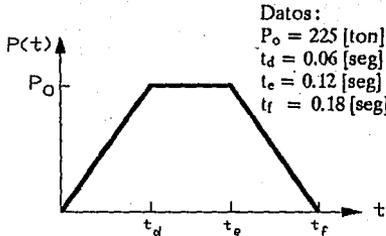
V.- Determinar las respuestas dinámicas de la estructura mostrada en la figura 3.81a), cuyas características fueron obtenidas en el problema resuelto V del inciso 3.2.2.4., y que representa a la columna de soporte de un puente peatonal; para cuando (valuar la respuesta para los primeros 0.3 [seg] de aplicación de la fuerza): 1) Se aplica una fuerza excitatriz cuya gráfica aparece en la figura 3.81b); y 2) se aplica una fuerza excitatriz cuya variación a través del tiempo está registrada en la figura 3.81c).

Obtener las respuestas por el método numérico de evaluación y comparar la respuesta de desplazamientos contra la que se obtiene por el método exacto analítico.

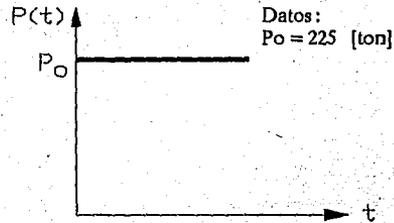


Características estructurales:

- $w = 18.388 \text{ [rad/seg]}$
- $m = 13.227 \text{ [t-s}^2/\text{m]}$
- $k = 4472.43 \text{ [t/m]}$
- $\xi = 0 \text{ (para caso 1)}$
- $\xi = 0.2 \text{ (para caso 2)}$
- $T = 0.342 \text{ [seg]}$



b) Fuerza excitatriz para el problema V1.



c) Fuerza excitatriz para el problema V2.

Figura 3.81. Sistema discreto simple que representa a la columna de soporte del puente peatonal de la figura 3.31 sometido a dos casos de vibración forzada.

1) Respuestas dinámicas ante la aplicación de la fuerza de la figura 3.81b).

● Por el método numérico de evaluación

De la gráfica de la fuerza aplicada se calcula el valor de la fuerza $P(t)$ para cada t_{i+1} . Las ecuaciones de las rectas se establecen por procedimientos de geometría analítica^[rel. 5] (véase por ejemplo el problema 11b, inciso 3.2.3.1.), y son:

$$P(t) = 3750t \quad \dots(a1) \text{ con } t \leq 0.06$$

$$P(t) = 225 \quad \dots(a2) \text{ con } 0.06 \leq t \leq 0.12$$

$$P(t) = -3750(t - 0.12) + 225 = -3750t + 675 \quad \dots(a3) \text{ con } 0.12 \leq t \leq 0.18$$

$$P(t) = 0 \quad \dots(a4) \text{ con } t \geq 0.18$$

Procediendo con cálculos manuales se construye la tabla que aparece a continuación, calculándose con las ecuaciones (3.52) a (3.57), (con $w = w_D$ para cuando no existe amortiguamiento) los valores de

$$M = 0.8516617725$$

$$N = 0.5240918099$$

$$P = 0$$

$$Q = 1$$

t_i [s]	(a) P_i [ton]	(3.56) x_i [m]	(3.57) $x' i$ [m/s]	(3.51) $x' i$ [m/s ²]	(3.45) D_0	(3.46) C_0	(3.47) A_0	(3.48) B_0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8385	0.0	0.0	-0.0456
0.03	112.5	0.001	0.124	8.080	0.8385	0.0252	-0.0239	-0.0389
0.06	225.0	0.010	0.461	13.764	0.0	0.0503	-0.0407	0.0250
0.09	225.0	0.029	0.785	7.283	0.0	0.0503	-0.0215	0.0427
0.12	225.0	0.054	0.876	-1.358	-0.8385	0.0503	0.0040	0.0932
0.15	112.5	0.077	0.593	-17.677	-0.8385	0.0252	0.0523	0.0773
0.18	0.0	0.085	-0.132	-28.752	0.0	0.0	0.0850	-0.0072
0.21	0.0	0.069	-0.932	-23.216	0.0	0.0	0.0687	-0.0507
0.24	0.0	0.032	-1.455	-10.792	0.0	0.0	0.0319	-0.0791
0.27	0.0	-0.014	-1.547	4.833	0.0	0.0	-0.0143	-0.0841
0.30	0.0	-0.056	-1.180	19.024	0.0	0.0	-0.0563	-0.0642

Tabla 3.15. Valores de respuestas dinámicas del sistema de la figura 3.81a

● Por la solución exacta analítica

En el problema III, inciso 3.2.3.2., se determinó

$$x(t) = X_{est} [1/t_d - (1/w t_d) \text{sen} w t] \dots (b) \text{ con } 0 \leq t \leq t_d$$

$$x(t) = X_{est} \{1 + (1/w t_d) [\text{sen} w (t - t_d) - \text{sen} w t]\} \dots (c) \text{ con } t_d \leq t \leq t_e$$

$$x(t) = X_{est} \{ (1/w t_d) [\text{sen} w (t - t_d) - \text{sen} w t] + (1/w (t_e - t_d)) [\text{sen} w (t - t_d) - \text{sen} w (t - t_e)] \} \dots (d) \text{ con } t_e \leq t \leq t_f$$

$$x(t) = X_{est} (1/w) \{ (1/t_d) [\text{sen} w (t - t_d) - \text{sen} w t] - (1/(t_e - t_d)) [\text{sen} w (t - t_e) - \text{sen} w (t - t_f)] \} \dots (e) \text{ con } t \geq t_f$$

$$y \text{ para el presente caso: } t_d = 0.06 \text{ [seg]}, t_e = 0.12 \text{ [seg]} \text{ y } t_f = 0.18 \text{ [seg]}$$

de la ecuación (3.27)

$$X_{est} = P_0/k = 225/4472.43 = 0.050308 \text{ [m]} \dots (f)$$

tabulando las ecuaciones (b) a (e) se obtiene la siguiente tabla

Tabla 3.16

t [seg]	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30
x [m]	0	0.001	0.010	0.029	0.054	0.076	0.085	0.069	0.032	-0.014	-0.056

Comparando los valores "exactos" con los del método numérico, se comprueba que son iguales, por lo que se prueba que el método numérico es confiable.

b) Respuestas dinámicas ante la aplicación de la fuerza de la figura 3.81c).

● Por el método numérico de evaluación

De la gráfica de la fuerza excitatriz se deduce

$$P_0 = 225 \text{ [ton]} \text{ para } t \geq 0$$

empleando el programa del método numérico en calculadora de bolsillo desarrollado en el problema III anterior, o procediendo manualmente como en a), se obtiene la siguiente tabla

t	P_i	(3,56) x_i	(3,57) x'_i	(3,51) x''_i
[s]	[ton]	[m]	[m/s]	[m/s ²]
0.0	225.0	0.0	0.0	17.011
0.03	225.0	0.007	0.435	11.462
0.06	225.0	0.024	0.668	3.961
0.09	225.0	0.045	0.677	-3.110
0.12	225.0	0.063	0.504	-7.952
0.15	225.0	0.074	0.231	-9.719
0.18	225.0	0.077	-0.049	-8.548
0.21	225.0	0.072	-0.261	-5.333
0.24	225.0	0.062	-0.362	-1.335
0.27	225.0	0.051	-0.346	2.227
0.30	225.0	0.042	-0.241	4.490

Tabla 3.17. Valores de respuestas dinámicas del sistema de la figura 3.81a

● Por la solución exacta analítica

En el problema propuesto I, que se plantea en el próximo inciso 3.2.4.2., se determinará la siguiente respuesta de desplazamientos

$$x(t) = X_{est} [1 - \exp(-\xi\omega t) (\cos\omega t + (\xi\omega/\omega_0) \sin\omega t)] \quad \dots (I)$$

como $X_{est} = P_0/k = 225/4472.43 = 0.050308 \text{ [m]} \quad \dots (m)$

tabulando (I) se obtiene la siguiente tabla

Tabla 3.18

t [seg]	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30
x [m]	0	0.007	0.024	0.045	0.063	0.074	0.077	0.072	0.062	0.051	0.042

Nuevamente se comprueba que el método numérico, ahora programado en computadora de bolsillo, es confiable.

VI.- Un centro de recreación social posee una pista de hielo con la estructuración en concreto reforzado mostrada en la figura 3.82. La cubierta o azotea está formada por losas de concreto macizas de

10 [cm] de espesor, perimetralmente apoyadas en traves de sección rectangular, que es variable en las zonas voladas del perímetro, ver figura 3.83, y prismáticas en las zonas internas, con las dimensiones mostradas en la figura 3.84. La resistencia a fuerzas laterales es suministrada en la dirección corta del inmueble por un sistema de 5 arcos paralelos entre si y con sección rectangular constante de 0.7 x 0.5 [m].

Para la dirección corta de la estructura, determinar: a) La ecuación del movimiento forzado amortiguado; b) la frecuencia angular y la frecuencia natural amortiguadas, y el período de oscilación; c) las respuestas dinámicas relativas a la cimentación de la estructura, si ésta sufre una aceleración del suelo con una variación en el tiempo como la mostrada en la figura 3.85; d) el valor de la aceleración máxima absoluta de la azotea de la estructura; y e) el valor de la fuerza máxima que debe resistir la estructura por causa de la aceleración mencionada.

a) Ecuación del movimiento forzado amortiguado

I - EVALUACION DE CARGAS

● CARGA MUERTA

Con referencia a la figura 3.84, se establecen las siguientes cargas

SISTEMA DE TECHO	[kg/m ²]	
1- Impermeabilizante	10	
2- Enladrillado (esp. 2 cm) (0.02m)(1500kg/m ³)	30	
3- Mortero cemento:arena (esp. 2 cm) (0.02m)(2100kg/m ³)	42	
4- Relleno de tezontle para dar pendiente (esp. prom. 15 cm) (0.15m)(1250kg/m ³)	188	
5- Losa de concreto (esp. 10 cm) (0.1m)(2400kg/m ³)	240	
6- Falso plafón de yeso (placas de esp. 2 cm) (0.02m)(1500kg/m ³)	30	
7- Instalaciones	30	
8- RCDI ^[ret.4] (Art.197)	40	
	610 [kg/m ²]	...(a)

TRABES

T1: $w = (0.3m)(0.7m)(2400kg/m^3) = 504 [kg/m]$...(b)
T2: $w = (0.25m)(0.4m)(2400kg/m^3) = 240 [kg/m]$...(c)
T3(voladas): $w = (0.4 + 0.7)[m](12/2)[m](0.25m)(2400kg/m^3) = 3960 [kg]$...(d)
T4(voladas): $w = (0.4 + 0.7)[m](12/2)[m](0.5m)(2400kg/m^3) = 7920 [kg]$...(e)
T3(centro): $w = (0.25m)(0.7m)(2400kg/m^3) = 420 [kg/m]$...(f)

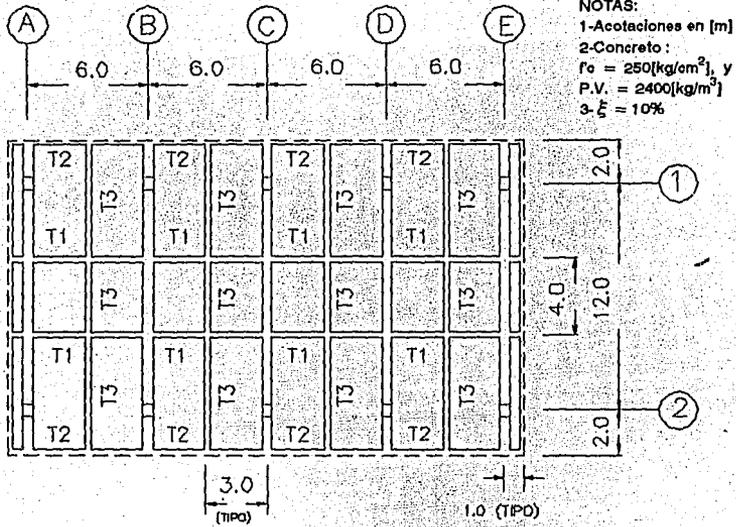


Figura 3.82 Planta estructural de una pista de hielo para patinaje.

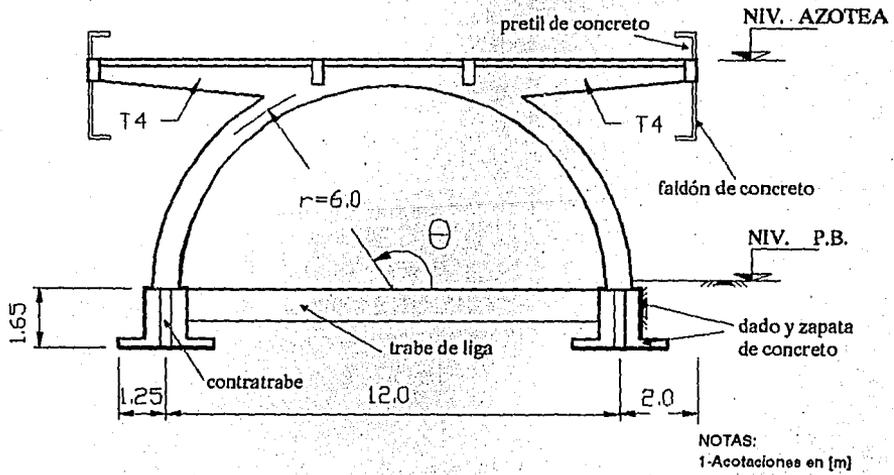


Figura 3.83 Elevación de los arcos de ejes letra de la figura 3.82

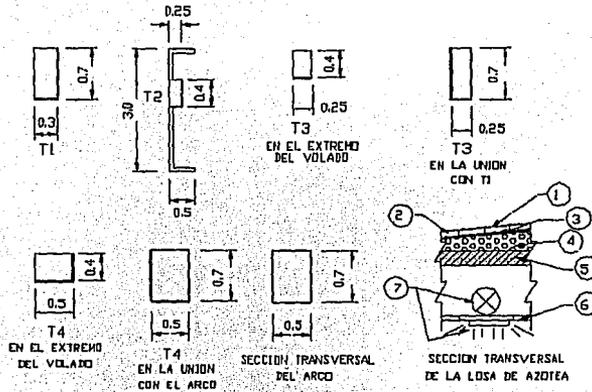


Figura 3.84. Detalles estructurales del inmueble de la figura 3.82.

ARCOS

$$w = (0.5m)(0.7m)(2400kg/m^3) = 840 [kg/m] \quad \dots(f)$$

PRETILES Y FALDONES

$$w = (3 + (0.4)2)m(0.1m)(2400kg/m^3) = 912 [kg/m] \quad \dots(g)$$

● **CARGA VIVA**

RCDF-93^[ref. 4]: $CV_{sols} = 70 [kg/m^2] \quad \dots(h)$

II- MASA DEL SISTEMA

De la figura 3.82 y de (a) hasta (h) se puede calcular

$$W_{losa} = (26m)((16m)(610 + 70)[kg/m^2]) = 282880 [kg]$$

$$\begin{aligned} W_{trabes} &= (26m)(2w_{T1} + 2w_{T2}) + (4m)(4w_{T3}) + 8w_{T3}(\text{volados}) + 10w_{T4}(\text{volados}) \\ &= (26m)[2(504kg/m) + 2(240kg/m)] + (4m)4(420kg/m) + 8(3960kg) + 10(7920kg) \\ &= 156288 [kg] \end{aligned}$$

$$W_{pretil} = (26(2) + (16)2)m(912kg/m) = 76608 [kg]$$

de la figura 3.86, se considera que la masa de la mitad de la altura de entrepiso del arco, se concentra en la parte superior o azotea, por tanto

$$W_{arcos} = (5arcos)S(840kg/m) = (5)(6)(2.0944)(840) = 52778.86 = 52779 [kg]$$

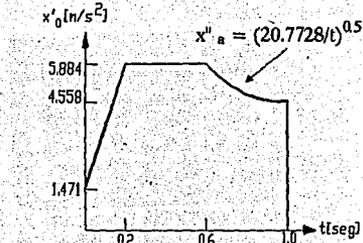


Figura 3.85. Función de aceleración del suelo

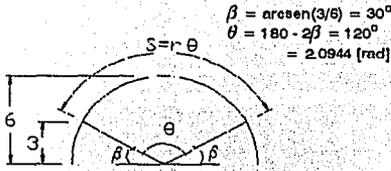


Figura 3.86. Longitud de arco (S)

$$W_{total} = W_T = 282880 + 156288 + 76608 + 52779 = 568555 \text{ [kg]} = 568.555 \text{ [ton]} \dots (I)$$

y la masa del sistema oscilatorio es

$$m = W_T/g = 568.555/9.80665 = 57.977 \text{ [t-s}^2\text{/m]} = 579.77 \text{ [kg-s}^2\text{/cm]} \dots (II)$$

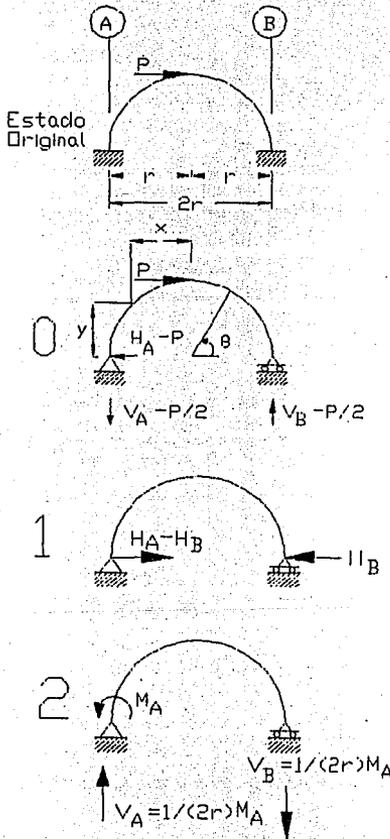


Figura 3.87a. Análisis de un arco hiperestático.

III- RIGIDEZ DEL SISTEMA

Para un arco con la masa concentrada en la parte superior, la rigidez ante desplazamientos laterales puede obtenerse aplicando una carga horizontal P en dicha zona como se muestra en la figura 3.87a, y obteniendo su desplazamiento lateral Δ. Para ello primero se debe determinar las reacciones del arco por causa de la carga P.

• REACCIONES DEL ARCO DE LA FIGURA 3.87a

Empleando el método del trabajo virtual (véase [ref. 7]), de la figura mencionada se observa que el arco es indeterminado en 3^{er} grado y las reacciones pueden obtenerse planteando los 7 estados auxiliares denominados 0 a 6 de las figuras 3.87a y 3.87b.

El estado cero se obtiene del arco original al reducirlo a un arco isostático quitando las reacciones redundantes desconocidas HB, MA y MB.

Los estados 1 a 3 se obtienen al cargar a el arco isostático generado, las reacciones redundantes que se escogieron como desconocidas, y los estados auxiliares 4 a 6 se obtienen cuando las reacciones redundantes toman el valor de una fuerza unitaria.

Se resuelven todos los estados auxiliares (0 a 6), encontrando el valor de las reacciones en sus apoyos y las ecuaciones de variación de los

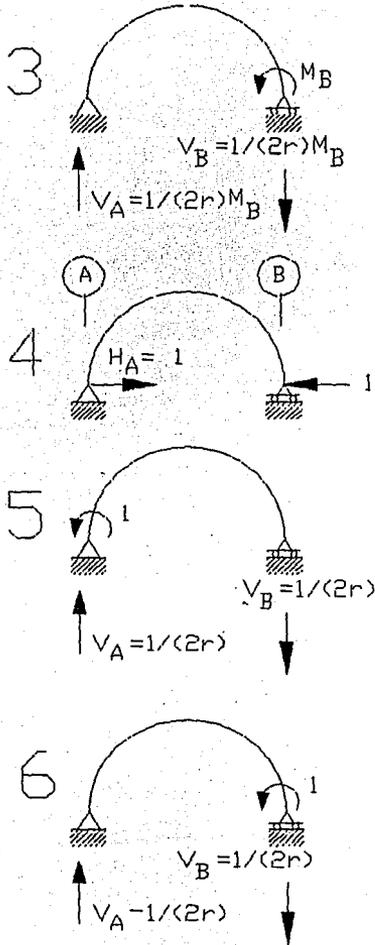


Figura 3.87b. Análisis de un arco hiperestático.

Estado 2

$$M_2 = (0.5\cos\theta - 0.5)M_A \quad \dots (n) \text{ con } \pi \geq \theta \geq 0$$

momentos flexionantes a lo largo del arco y que son

Estado 0

para cualquier arco circular:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Reacciones:

$$\uparrow \downarrow + \Sigma M_B = 0: -V_A(2r) + rP = 0 \Rightarrow V_A = 0.5P$$

$$\rightarrow + \Sigma F_H = 0: P - H_A = 0 \Rightarrow H_A = P$$

$$\uparrow + \Sigma F_V = 0: V_B - 0.5P = 0 \Rightarrow V_B = 0.5P$$

para una sección en cualquier punto del arco situado antes de el punto de aplicación de la carga P, es decir donde $\pi \geq \theta \geq \pi/2$

$$M_o = Py - 0.5P(r+x) = Py - 0.5Pr - 0.5Px \\ = P(y - 0.5r - 0.5x)$$

$$M_o = Pr(\sin\theta - 0.5 - 0.5\cos\theta) \dots (k) \text{ con } \pi \geq \theta \geq \pi/2$$

para una sección en cualquier punto del arco situado después de el punto de aplicación de la carga P, es decir donde $\pi/2 \geq \theta \geq 0$

$$M_o = Py + P(r-y) - 0.5P(r+x) \\ = P(y + r - y - 0.5r - 0.5x) \\ = P(0.5r - 0.5r\cos\theta)$$

$$M_o = 0.5rP(1 - \cos\theta) \dots (l) \text{ con } \pi/2 \geq \theta \geq 0$$

Procediendo análogamente para los demás estados, se obtiene

Estado 1

$$M_1 = -rH\sin\theta \quad \dots (m) \text{ con } \pi \geq \theta \geq 0$$

Estado 3

$$M_3 = (0.5\cos\theta + 0.5)M_B \quad \dots (o) \text{ con } \pi \geq \theta \geq 0$$

Estado 4

$$m_4 = -r\sin\theta \quad \dots (p) \text{ con } \pi \geq \theta \geq 0$$

Estado 5

$$m_5 = 0.5\cos\theta - 0.5 \quad \dots (q) \text{ con } \pi \geq \theta \geq 0$$

Estado 6

$$m_6 = 0.5\cos\theta + 0.5 \quad \dots (r) \text{ con } \pi \geq \theta \geq 0$$

r-radio del arco

M_0, M_1, \dots, M_3 -momentos flexionantes producidos por cargas reales o redundantes

m_4, m_5, m_6 -momentos flexionantes producidos por cargas virtuales unitarias

El valor de las reacciones H_B , M_A y M_B se puede obtener planteando las ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos o condiciones de frontera conocidas en la estructura original de la figura 3.87a

$$\Delta_{HB} = 0: D_{HBCR} + D_{HBHB} + D_{HBMA} + D_{HBMB} = 0$$

$$\theta_A = 0: \theta_{ACR} + \theta_{AHB} + \theta_{AMA} + \theta_{AMB} = 0 \quad \dots (s)$$

$$\theta_B = 0: \theta_{BCR} + \theta_{BHB} + \theta_{BMA} + \theta_{BMB} = 0$$

D_{HBCR} -desplazamiento horizontal en B por causa de la carga real

D_{HBMA} -desplazamiento horizontal en B por causa de la reacción M_A

θ_{BHB} -giro en B por causa de la reacción H_B

eto.

El valor de estos desplazamientos se obtiene por trabajo virtual con la expresión^[ref. 7]

$$\theta EI = \Delta EI = \int_0^L m M d\theta \quad \dots (t) \text{ con } EI = \text{constante}$$

m-ecuación de momentos flexionantes producidos por cargas virtuales unitarias

M-ecuación de momentos flexionantes producidos por cargas reales o redundantes

Por lo tanto de (t) y superponiendo los siguientes estados se obtiene (en estas integrales se usó el programa de calculadora de bolsillo para integrales definidas, cuya codificación está al final de este ejemplo):

de los estados 5 y 0, integrando primero de π a $\pi/2$ y después de $\pi/2$ a 0 (ecs. (k), (l) y (q))

$$\begin{aligned} E_{I\theta} ACR &= \int m_5 M_0 d\theta = Pr \int (0.5 \cos\theta - 0.5)(\sin\theta - 0.5 - 0.5 \cos\theta) d\theta \\ &+ Pr \int (0.5 \cos\theta - 0.5)(0.5(1 - \cos\theta)) d\theta = 0.554Pr + 0.089Pr = 0.643Pr \quad \dots(u) \end{aligned}$$

de los estados 5 y 1, integrando de π a 0 (ecs. (q) y (m))

$$E_{I\theta} AHB = \int m_5 M_1 d\theta = rH_B \int (0.5 \cos\theta - 0.5)(-\sin\theta) d\theta = -1rH_B \quad \dots(v)$$

de los estados 5 y 2, integrando de π a 0 (ecs. (q) y (n))

$$E_{I\theta} AMA = \int m_5 M_2 d\theta = M_A \int (0.5 \cos\theta - 0.5)^2 d\theta = -1.1781M_A \quad \dots(w)$$

de los estados 5 y 3, integrando de π a 0 (ecs. (q) y (o))

$$E_{I\theta} AMB = \int m_5 M_3 d\theta = M_B \int (0.5 \cos\theta - 0.5)(0.5 \cos\theta + 0.5) d\theta = 0.3927M_B \quad \dots(x)$$

de los estados 4 y 0, integrando primero de π a $\pi/2$ y después de $\pi/2$ a 0 (ecs. (k), (l) y (p))

$$\begin{aligned} E_{ID} HBCR &= P \int m_4 M_0 d\theta + P \int m_4 M_0 d\theta = Pr^2 \int (-\sin\theta)(\sin\theta - 0.5 \cos\theta - 0.5) d\theta \\ &+ Pr^2 \int (-\sin\theta)(0.5(1 - \cos\theta)) d\theta = 0.5354Pr^2 + 0.25Pr^2 = 0.7854Pr^2 \quad \dots(y) \end{aligned}$$

de los estados 4 y 1, integrando de π a 0 (ecs. (p) y (m))

$$E_{ID} HBHB = \int m_4 M_1 d\theta = r^2 H_B \int (-\sin\theta)(-\sin\theta) d\theta = -1.571r^2 H_B \quad \dots(z)$$

de los estados 4 y 2, integrando de π a 0 (ecs. (p) y (n))

$$E_{ID} HBMA = \int m_4 M_2 d\theta = rM_A \int (-\sin\theta)(0.5 \cos\theta - 0.5) d\theta = -1rM_A \quad \dots(A)$$

de los estados 4 y 3, integrando de π a 0 (ecs. (p) y (o))

$$E_{ID} HBMB = \int m_4 M_3 d\theta = rM_B \int (-\sin\theta)(0.5 \cos\theta + 0.5) d\theta = 1rM_B \quad \dots(B)$$

de los estados 6 y 0, integrando primero de π a $\pi/2$ y después de $\pi/2$ a 0 (ecs. (k), (l) y (r))

$$\begin{aligned} E_{I\theta} BCR &= \int m_6 M_0 d\theta = Pr \int (0.5 \cos\theta + 0.5)(\sin\theta - 0.5 - 0.5 \cos\theta) d\theta \\ &+ Pr \int (0.5 \cos\theta + 0.5)(0.5(1 - \cos\theta)) d\theta = -0.161Pr - 0.19635Pr = -0.35735Pr \quad \dots(C) \end{aligned}$$

de los estados 6 y 1, integrando de π a 0 (ecs. (r) y (m))

$$E_{I\theta} BHB = \int m_6 M_1 d\theta = rH_B \int (0.5 \cos\theta + 0.5)(-\sin\theta) d\theta = 1rH_B \quad \dots(D)$$

de los estados 6 y 2, Integrando de π a 0 (ecs. (r) y (n))

$$E\theta_{BMA} = \int m_e M_2 d\theta = M_A \int (0.5 \cos \theta + 0.5)(0.5 \cos \theta - 0.5) d\theta = 0.3927 M_A \quad \dots(E)$$

de los estados 6 y 3, Integrando de π a 0 (ecs. (r) y (o))

$$E\theta_{BMB} = \int m_e M_3 d\theta = M_B \int (0.5 \cos \theta + 0.5)(0.5 \cos \theta + 0.5) d\theta = -1.178 M_B \quad \dots(F)$$

sustituyendo (u) hasta (z) y (A) hasta (F) en (s)

$$\begin{aligned} -1.571 r^2 H_B - r M_A + r M_B &= -0.7854 P r^2 \\ -r H_B - 1.1781 M_A + 0.3927 M_B &= -0.643 P r \end{aligned} \quad \dots(G)$$

$$r H_B + 0.3927 M_A - 1.178 M_B = 0.35735 P r$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas

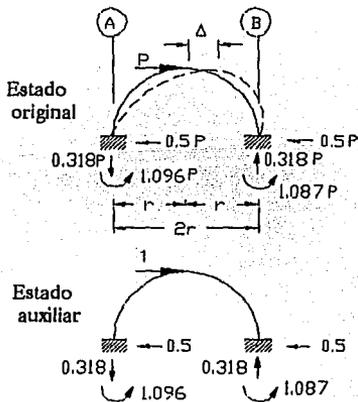
$$H_B = 0.499 P$$

$$M_A = 1.096 P \quad \dots(H)$$

$$M_B = 1.087 P$$

sustituyendo el valor de las reacciones dadas por (H) en el arco original de la figura 3.87a, y resolviendo el arco que ahora es isostático se calculan las reacciones restantes mostradas en la figura 3.88.

• DETERMINACION DEL DESPLAZAMIENTO Δ



Ahora se puede calcular ya el desplazamiento lateral Δ de un arco de la estructura de la pista de hielo.

Empleando nuevamente el método del trabajo virtual tomando en cuenta las deformaciones por flexión, fuerza cortante y fuerza axial, se tiene^[ref.7]

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^L m M d\theta / (EI) + \int_0^L v v d\theta / (GA_c) \\ &\quad + \int_0^L n N d\theta / (A_T E) \quad \dots(I) \end{aligned}$$

con

$$A_T = 0.7(0.5) = 0.35 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(IIa)$$

$$A_c = A_T / \gamma = 0.35 / 1.5 = 0.233 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(IIb)$$

Figura 3.88. Rigidez lateral de un arco hiperestático

$$I = bh^3/12 = 0.5(0.7^3)/12 = 0.0143 \text{ [m}^4\text{]} \quad \dots (1c)$$

$$E = 14000 \text{ [f.c]}^{0.5} = 14000 [200]^{0.5} = 221359.4 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 2213594 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots (1d) \text{ [ref. 4]}$$

$$G = 0.4E = 0.4(2213594) = 885437.6 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots (1e) \text{ [ref. 4]}$$

en una sección cualquiera de un arco, las ecuaciones de variación de la fuerza cortante y fuerza axial o normal son^[ref. 17]

$$V = R_x \cos \theta + R_y \sin \theta \quad \dots (1f)$$

$$N = -R_x \sin \theta + R_y \cos \theta \quad \dots (1g)$$

G-módulo de elasticidad a cortante [kg/cm²]

E-módulo de elasticidad a flexión [kg/cm²]

A_T-área bruta o total [cm²]

A_c-área a cortante [cm²]

γ -factor de forma geométrica ($\gamma = 1.5$ en sección rectangular^[ref. 16])

v-ecuación de fuerza cortante producida por cargas virtuales unitarias

V-ecuación de fuerza cortante producida por cargas reales

n-ecuación de fuerza axial o normal producida por cargas virtuales unitarias

N-ecuación de fuerza axial o normal producida por cargas reales

R_x, R_y-resultante de todas las fuerzas cortantes o normales que actúan a la izquierda de una sección determinada en un arco.

De la figura 3.88 se obtiene por el método de las secciones antes empleado, las ecuaciones de momentos, fuerzas cortantes y fuerzas axiales para la carga real P y una carga virtual unitaria colocada en el punto, dirección y sentido en que se desea conocer el desplazamiento Δ y que son

$$m = 0.5r \sin \theta - 0.318r(\cos \theta + 1) - 1.096 \quad \dots (J) \text{ con } \pi \geq \theta \geq \pi/2$$

$$v = -0.5 \cos \theta - 0.318 \sin \theta \quad \dots (K) \text{ con } \pi \geq \theta \geq \pi/2$$

$$n = 0.5 \sin \theta - 0.318 \cos \theta \quad \dots (L) \text{ con } \pi \geq \theta \geq \pi/2$$

ya que en este caso la carga unitaria de la figura 3.88 es igual a la carga P cuando toma un valor unitario, y ya que el arco es prácticamente simétrico, se tiene de (I)

$$\Delta = 2P \int_0^L m^2 d\theta / (EI) + 2P \int_0^L v^2 d\theta / (A_c G) + 2P \int_0^L n^2 d\theta / (A_T E) \quad \dots (M)$$

y sustituyendo (J), (K) y (L) en (M) y empleando nuevamente el programa para integrales definidas cuya codificación se muestra al final de este ejemplo, se obtiene al integrar desde π hasta $\pi/2$

$$\Delta = 2P/(EI) \int (0.5r \operatorname{sen} \theta - 0.318r(\cos \theta + 1)^2) d\theta + 2P/(A_0 G) \int (-0.5 \cos \theta - 0.318 \operatorname{sen} \theta)^2 d\theta \\ + 2P/(A_1 E) \int (0.5 \operatorname{sen} \theta - 0.318 \cos \theta)^2 d\theta = \\ = -2P(0.33964)/(EI) - 2P(0.116763)/(A_0 G) - 2P(0.43478)/(A_1 E)$$

sustituyendo las ecuaciones (1a) hasta (1e)

$$\Delta = -2P(0.33964)/(2213594(0.0143)) - 2P(0.116763)/(0.233(885437.6)) \\ - 2P(0.43478)/(0.35(2213594)) = \\ = -2.14592639(10^{-5})P - 1.131934662(10^{-6})P - 1.1223635(10^{-6})P = \\ = -2.3713562(10^{-5})P [m] = -0.002371P [cm] \quad \dots (N)$$

La rigidez lateral está dada por la ecuación $P = k\Delta$, de donde

$$k = P/\Delta = P/0.002371P = 42169 [t/m] \quad \dots (O)$$

para el sistema de 5 arcos, cuya rigidez está en paralelo y debido a que la losa constituye un diafragma rígido forzando a que todos los arcos se desplacen lateralmente la misma cantidad Δ , se tiene

$$k = (5)(42169) = 210845 [t/m] \quad \dots (P)$$

de la ecuación (3.6), (I) y (P)

$$w = [k/m]^{0.5} = [210845/57.977]^{0.5} = 60.305 [\text{rad/seg}] \quad \dots (Q)$$

IV- AMORTIGUAMIENTO DEL SISTEMA

De la ecuación (3.15) y (I)

$$c = 2m\xi w = 2(57.977)(0.1)(60.305) = 699.261 [\text{ton-s/m}] \quad \dots (R)$$

Por lo tanto sustituyendo (I), (P) y (R) en (3.38) se tiene la siguiente ecuación del movimiento forzado amortiguado

$$57.977x'' + 699.261x' + 210845x = P(t) \quad \dots (S)$$

b) Frecuencia angular amortiguada (w_D), frecuencia natural amortiguada (w_0) y período de oscilación (T)

$$\text{de la ecuación (3.19)} \quad w_D = w_0[1 - \xi^2]^{0.5} = 60.305(1 - 0.1^2)^{0.5} = 60 [\text{rad/s}] \quad \dots (T)$$

de la definición de frecuencia natural y de la ecuación (3.20) y (T)

$$f_D = 1/T_D = w_D/2\pi = 9.55 [\text{hertz}] \quad \dots (U)$$

de la ecuación (3.7) y (Q)

$$T = 2\pi/w = 2\pi/60.305 = 0.104 [\text{seg}] \quad \dots (V)$$

c) Respuestas dinámicas de la estructura respecto a la cimentación

De la ecuación (3.44) y (3.44c)

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_a \quad \dots(W)$$

de la gráfica de la función de excitación de la figura 3.85, y con la ecuación de la recta entre dos puntos^[ref. 5], tenemos

coordenadas de los puntos A(0, 1.471), B(0.2, 5.884), C(0.6, 5.884)

recta \overline{AB} : $x''_a = 22.065t + 1.471 \quad \dots(Y) \text{ con } t \leq 0.2$

recta \overline{BC} : $x''_a = 5.884 \quad \dots(Z) \text{ con } 0.2 \leq t \leq 0.6$

curva \overline{CDE} (dato): $x''_a = (20.7728/t)^{0.5} \quad \dots(AA) \text{ con } 0.6 \leq t \leq 1.0$

Empleando el programa del método numérico de evaluación de respuestas (ver problema IIIb anterior), se obtiene la siguiente tabla, con

$$\Delta t = 0.05 \text{ [seg]} \quad \dots(AB)$$

$$P(t) = -m\ddot{x}_a \quad \dots(AC)$$

$x_{r0} = \dot{x}'_{r0} = 0$ (el sistema está originalmente en reposo)

Tabla 3.10

t	(y)(z)(Aa)	(3.49)	(3.50)	(3.51)
[s]	P(t) = -m\ddot{x}_a	x _r	\dot{x}' _r	x'' _r
	[kg]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0.0	-85300	0.0	0.0	-147.127
0.01	-98100	-0.007	-1.408	-126.021
0.02	-110500	-0.027	-2.387	-85.430
0.03	-123700	-0.053	-2.685	10.021
0.04	-136500	-0.078	-2.228	73.569
0.05	-149300	-0.095	-1.301	105.446
0.06	-162000	-0.103	-0.248	96.811
0.07	-174800	-0.101	0.568	59.938
0.08	-187600	-0.093	0.898	5.582
0.09	-200400	-0.085	0.692	-44.484
0.10	-213200	-0.081	0.078	-74.060
0.11	-226000	-0.084	-0.694	-75.683
0.12	-238800	-0.095	-1.350	-51.937
0.13	-251600	-0.110	-1.684	-13.647
0.14	-264400	-0.127	-1.622	24.829
0.15	-277200	-0.141	-1.230	50.681
0.16	-290000	-0.151	-0.678	56.753
0.17	-302800	-0.155	-0.181	43.273
0.18	-315600	-0.155	0.147	16.944
0.19	-328300	-0.153	0.170	-11.872
0.20	-341137	-0.152	-0.087	-33.678
0.21	-341137	-0.155	-0.354	-22.196
0.22	-341137	-0.159	-0.191	-4.643
0.23	-341137	-0.164	-0.449	12.459
0.24	-341137	-0.167	-0.282	23.478

Tabla 3.19
(continuación)

t	(y)(z)(Aa) P(t) = -m \ddot{x} ₀	(3.49) x _r	(3.50) x' _r	(3.51) x'' _r
[s]	[kg]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0.25	-341137	-0.169	-0.010	25.441
0.26	-341137	-0.168	0.217	18.727
0.27	-341137	-0.165	0.346	6.551
0.28	-341137	-0.161	0.346	-6.418
0.29	-341137	-0.158	0.230	-15.781
0.30	-341137	-0.157	0.051	-18.835
0.31	-341137	-0.157	-0.124	-15.283
0.32	-341137	-0.159	-0.239	-7.055
0.33	-341137	-0.162	-0.261	2.582
0.34	-341137	-0.164	-0.194	10.267
0.35	-341137	-0.165	-0.070	13.666
0.36	-341137	-0.165	0.063	12.137
0.37	-341137	-0.164	0.160	6.748
0.38	-341137	-0.162	0.193	-0.271
0.39	-341137	-0.161	0.158	-6.402
0.40	-341137	-0.159	0.074	-9.710
0.41	-341137	-0.159	-0.024	-9.414
0.42	-341137	-0.160	-0.104	-6.024
0.43	-341137	-0.161	-0.140	-1.106
0.44	-341137	-0.162	-0.125	3.760
0.45	-341137	-0.163	-0.070	6.744
0.46	-341137	-0.164	0.001	7.147
0.47	-341137	-0.163	0.064	5.130
0.48	-341137	-0.163	0.099	1.637
0.49	-341137	-0.162	0.097	-2.003
0.50	-341137	-0.161	0.063	-4.584
0.51	-341137	-0.160	0.011	-5.317
0.52	-341137	-0.161	-0.038	-4.217
0.53	-341137	-0.161	-0.069	-1.841
0.54	-341137	-0.162	-0.073	0.877
0.55	-341137	-0.162	-0.053	2.995
0.56	-341137	-0.163	-0.018	3.877
0.57	-341137	-0.163	0.020	3.370
0.58	-341137	-0.162	0.046	1.801
0.59	-341137	-0.162	0.054	-0.189
0.60	-341137	-0.161	0.044	-1.839
0.61	-338328	-0.161	0.042	1.524
0.62	-335589	-0.160	0.070	3.936
0.63	-332915	-0.160	0.115	4.666
0.64	-330304	-0.158	0.158	3.667
0.65	-327753	-0.156	0.184	1.470
0.66	-325260	-0.155	0.186	-1.054
0.67	-322824	-0.153	0.165	-3.028
0.68	-320442	-0.151	0.129	-3.854
0.69	-318111	-0.150	0.092	-3.383
0.70	-315831	-0.149	0.065	-1.920
0.71	-313599	-0.149	0.055	-0.058
0.72	-311413	-0.148	0.062	1.541
0.73	-309273	-0.148	0.083	2.378
0.74	-307176	-0.147	0.107	2.261
0.75	-305121	-0.145	0.125	1.343
0.76	-303107	-0.144	0.132	0.021
0.77	-301133	-0.143	0.126	-1.220
0.78	-299196	-0.142	0.109	-1.970
0.79	-297296	-0.141	0.088	-2.037
0.80	-295433	-0.140	0.070	-1.476
0.81	-293603	-0.139	0.060	-0.539
0.82	-291807	-0.139	0.060	0.419
0.83	-290044	-0.138	0.067	1.079

t	(y)(z)(Aa) P(t) = -m x'' _a	(3.49) x _r	(3.50) x' r	(3.51) x'' r
[s]	[kg]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0.84	-288313	-0.137	0.079	1.256
0.85	-288612	-0.136	0.091	0.950
0.86	-284940	-0.136	0.097	0.318
0.87	-283298	-0.135	0.097	-0.393
0.88	-281684	-0.134	0.090	-0.936
0.89	-280097	-0.133	0.079	-1.147
0.90	-278536	-0.132	0.068	-0.993
0.91	-277002	-0.131	0.060	-0.567
0.92	-275492	-0.131	0.057	-0.038
0.93	-274007	-0.130	0.059	0.405
0.94	-272546	-0.130	0.064	0.627
0.95	-271108	-0.129	0.070	0.580
0.96	-269692	-0.128	0.075	0.312
0.97	-268298	-0.127	0.078	-0.063
0.98	-266926	-0.127	0.074	-0.480
0.99	-265574	-0.126	0.069	-0.608
1.00	0	-0.118	2.187	403.194
1.01	0	-0.079	5.389	221.275
1.02	0	-0.018	6.435	-13.513
1.03	0	0.042	5.225	-217.134
1.04	0	0.081	2.415	-325.456
1.05	0	0.089	-0.878	-313.309
1.06	0	0.066	-3.505	-198.417
1.07	0	0.024	-4.669	-30.638
1.08	0	-0.022	-4.149	128.261
1.09	0	-0.055	-2.309	226.479
1.10	0	-0.066	0.089	238.270
1.11	0	-0.054	2.185	169.534
1.12	0	-0.025	3.317	52.266
1.13	0	0.008	3.217	-69.049
1.14	0	0.035	2.060	-153.632
1.15	0	0.048	0.350	-177.547
1.16	0	0.043	-1.283	-139.738
1.17	0	0.024	-2.303	-59.785
1.18	0	0.000	-2.442	30.953
1.19	0	-0.022	-1.754	101.094
1.20	0	-0.034	-0.561	129.668
1.21	0	-0.033	0.683	111.902
1.22	0	-0.021	1.559	58.965
1.23	0	-0.004	1.817	-7.554
1.24	0	0.013	1.442	-64.004
1.25	0	0.023	0.630	-92.770
1.26	0	0.025	-0.299	-87.436
1.27	0	0.018	-1.023	-53.649
1.28	0	0.006	-1.325	-5.872

Tabla 3.19. Respuestas dinámicas del sistema de la figura 3.82

por lo tanto de los resultados obtenidos en la tabla anterior

$$x_{r\max} = 0.169 \text{ [cm]}$$

...(AD)

$$x'_{r\max} = 6.435 \text{ [cm/s]}$$

...(AE)

d) El valor de la aceleración máxima absoluta

Como se demostró en el inciso 3.2.1., cuando el desplazamiento es máximo, la aceleración es máxima

por tanto de la tabla, para $t = 0.25$ [seg]

$$x'_{r} = 25.441 \text{ [cm/s}^2\text{]} \quad \dots(\text{AF})$$

de (Z) para $t = 0.25$ [seg], la aceleración de la base es

$$x''_{a} = 588.4 \text{ [cm/s}^2\text{]} \quad \dots(\text{AG})$$

de la ecuación (3.44c), (AF) y (AG)

$$x''_{T_{\max}} = x''_{a} + x''_{r} = 588.4 + 25.441 = 613.841 \text{ [cm/s}^2\text{]} \quad \dots(\text{AH})$$

e) Valor de la fuerza máxima en la azotea

de la ecuación $P = k\Delta$, y como $\Delta = x_{r_{\max}} = 0.169$ [cm], se tiene

$$P = (2108450 \text{ kg/cm})(0.169 \text{ cm}) = 356328 \text{ [kg]} = 356.3 \text{ [ton]} \quad \dots(\text{AI})$$

esta fuerza también puede obtenerse de la ecuación (3.44), de donde

$$P = kx_r = -mx''_{T} - cx'_r \quad \dots(\text{AJ})$$

sustituyendo (AH) en (AJ) y como para $t = 0.25$ [seg], de la tabla se tiene $x'_r = -0.01$ [cm/s]

$$P = -(579.77 \text{ kg-s}^2/\text{cm})(613.841 \text{ cm/s}^2) - (6992.61 \text{ kg-s/cm})(-0.01 \text{ cm/s}) = -355816.67 \text{ [kg]}$$

el sentido de la fuerza no es de interés, por lo que

$$P = 355.8 \text{ [ton]} \quad \dots(\text{AK})$$

que es un valor prácticamente igual al de (AI), (la pequeña diferencia es debida al redondeo en los valores de x_r de la tabla)

La resistencia del conjunto de arcos puede revisarse contra los elementos mecánicos obtenidos por la aplicación de la fuerza lateral dada por (AI) en la azotea de la estructura.

●PROGRAMA EN CALCULADORA DE BOLSILLO PARA EL CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

A continuación se muestra la codificación en lenguaje basic de la programación de el método numérico de Simpson^[ref. 18], para obtener el valor de integrales definidas.

```
05  ANGLE 1
10  INPUT "# INTERVALOS=";N,"LIM.INF=";A,"LIM.SUP=";B
```

```

20  N=2*N:D=(B-A)/N:S=0:X=A
30  FOR I=0 TO N
40  IF I=0 THEN M=1: GOTO 80
50  IF I=N THEN M=1: GOTO 80
55  C=I/2-INT(I/2)
60  IF C=0 THEN M=2: GOTO 80
70  IF C <> 0 THEN M=4
80  Y=f(x) (definir la función a integrar en términos de x)
85  Y=Y*M
90  S=S+Y
100 X=X+D
110 NEXT I
120 S=1/3*D*S
130 PRINT "AREA=";S:END

```

Antes de correr el programa se debe indicar en la línea 80 la función a integrar en términos de la variable x , en funciones trascendentes los límites de integración son en radianes. El método divide la curva de la función a integrar en intervalos, por lo que según la exactitud deseada se debe aumentar el número de intervalos que se piden como dato en la línea 10, generalmente con 5 intervalos la exactitud es aceptable.

3.2.4.2.- PROBLEMAS PROPUESTOS

I.-a) Determinar la respuesta de desplazamientos de un sistema simple o de 1 G.L., con amortiguamiento, sometido a la carga excitatriz $P(t) = P_0[f(t)]$, cuya gráfica se muestra en la figura 3.89; y b) Graficar la respuesta obtenida en a).

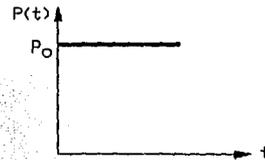


Figura 3.89. Función de excitación para el problema I.

Solución: $x(t) = X_{est}\{1 - \exp(-\xi\omega t)(\cos\omega_d t + (\xi\omega/\omega_d)\sin\omega_d t)\}$

II.- Determinar las respuestas dinámicas máximas de la estructura cuyas características se muestran en la figura 3.90a), que fueron obtenidas en el problema II del inciso 2.1.1., y que representa a la cubierta de una estación expendedora de gasolina; para cuando se aplica la fuerza excitatriz cuya variación a través del tiempo se observa en la gráfica de la figura 3.90b). (Despreciar el efecto de coseo de la cubierta, lo que reduce el problema a un sistema de 1 G.L.).

Solución: $x_{max} = 3.302$ [cm], $\dot{x}'_{max} = -21.925$ [cm/s], $\ddot{x}''_{max} = -216.385$ [cm/s²]

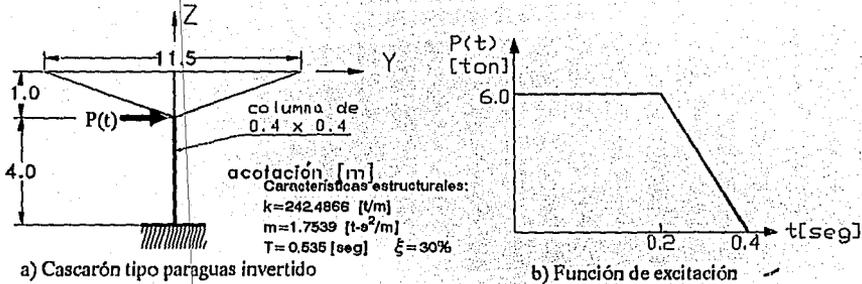


Figura 3.90. Fuerza excitatriz actuante sobre la cubierta de una estación expendedora de gasolina

III.- Si el sistema discreto simple cuyas características se muestran en la figura 3.91a), y que representa la estructura del puente peatonal estudiado en el problema III del inciso 3.2.1.1., sufre un deslizamiento de tierra con una aceleración con variación respecto al tiempo con la gráfica indicada en la figura 3.91b), determinar: a) El valor máximo de las respuestas de desplazamiento y velocidad de la masa relativas a la base de la estructura, y el valor máximo de la aceleración total o absoluta de la masa del sistema; y b) el valor máximo de la fuerza lateral que deberá resistir la estructura.

Solución (usando $\Delta t = 0.01$ [seg]): a) $x_{r \max} = -2.584$ [cm], $x'_{r \max} = 44.361$ [cm/s], $x''_{r \max} = 1447.019$ [cm/s²], $x''_{T \max} = 1384.087$ [cm/s²]; b) $P_{\max} = 40.674$ [ton]

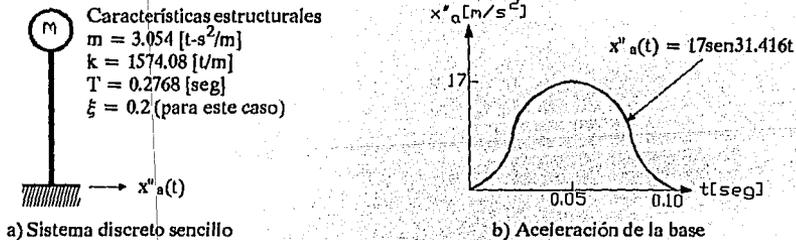
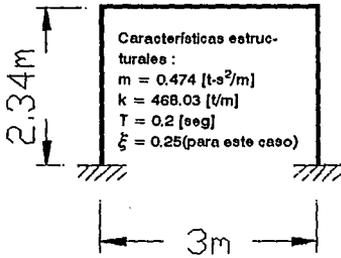


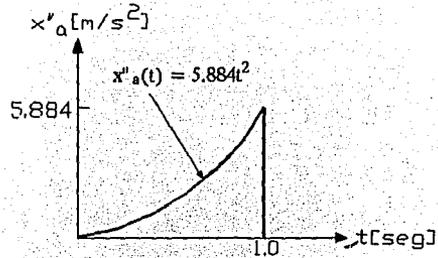
Figura 3.91. Sistema oscilatorio simple sometido a un movimiento de su cimentación

IV.- Determinar las respuestas dinámicas relativas y el valor del desplazamiento máximo relativo, para la estructura mostrada en la figura 3.92a), cuyas características fueron obtenidas en el problema V del inciso 3.2.1.1., y que representa a uno de los marcos de soporte del andador peatonal de acceso a un edificio; si es sujeta a una aceleración de la cimentación como la mostrada en la gráfica de la figura 3.92b).

Solución: $x_{r \max} = -0.576$ [cm]



a) Marco estructural



b) Función de aceleración del suelo

Figura 3.92. Marco estructural sometido a un deslizamiento de su cimentación.

V.- Determinar las respuestas dinámicas relativas, así como el desplazamiento máximo relativo, y el valor máximo de la fuerza que debe resistir la estructura de la clínica para atención médica mostrada en las figuras 3.46, 3.47 y 3.48 del problema V del pasado inciso 3.2.2.4., si es sometida a un sismo con los valores de aceleración del suelo mostrados en la gráfica de la figura 3.93, suponiendo que dicho sismo actúa paralelo a la dirección corta de la estructura.

Solución: $x_{r\max} = 0.386 \text{ [cm]}$, $P_{\max} = 82235.6 \text{ [kg]}$

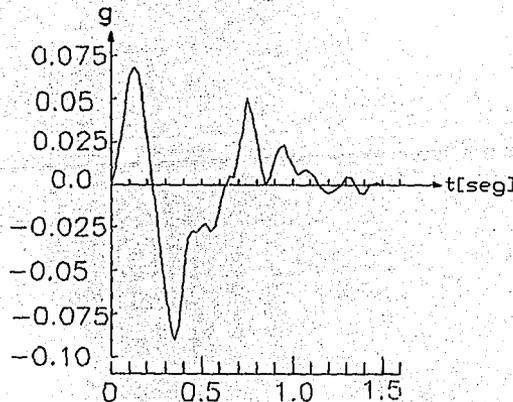


Figura 3.93. Acelerograma del sismo del Puerto Hueneme del 18 de marzo de 1957, componente E-W [ref. 13].

3.3. OSCILACIONES EN SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

Los sistemas discretos compuestos o de varios grados de libertad (G.L.), son más complejos que los sistemas discretos simples, pero son los más comunes e importantes en Ingeniería Civil, pues comprenden a casi todas las estructuras concebibles.

Los conceptos fundamentales y ecuaciones del movimiento así como características principales de los sistemas múltiples, se pueden ejemplificar y establecer estudiando un sistema de 2 G.L., teniendo en mente que todo lo que se deduzca para dicho sistema es válido para cualquier sistema de varios G.L., siendo la cantidad de cálculos necesarios para la resolución de las ecuaciones lo único que varía.

A medida en que los grados de libertad se multiplican, lo hacen asimismo las ecuaciones del movimiento y la complejidad de las soluciones por lo que recurrir al empleo del cálculo matricial se vuelve indispensable.

En general las estructuras tienen múltiples grados de libertad, y para hacer factible su análisis, se recurre a toda clase de simplificaciones, manteniendo el comportamiento del modelo de la estructura lo más cercano a la realidad posible dentro de un rango que usualmente se considera aceptable, de acuerdo a la

práctica y a la comparación experimental con estructuras reales.

Debe recordarse la definición dada al inicio de este tema sobre grados de libertad dinámicos y estáticos, en el sentido de que dinámicamente los grados de libertad de un cuerpo son aquellos a través de los cuales se desarrollan fuerzas de inercia mientras que estáticamente es el número de desplazamientos nodales que se eligen para definir el perfil deformado de un cuerpo.

Las siguientes definiciones^[ref. 3] son útiles para la mejor comprensión del movimiento libre no amortiguado en sistemas múltiples

MODOS NATURALES DE VIBRACION.- Son las diferentes maneras de vibrar de una estructura de varios grados de libertad.

FORMA DEL MODO.- Es el conjunto de desplazamientos de cada masa de un sistema oscilatorio compuesto que configuran o grafican un modo natural de vibración.

MODO FUNDAMENTAL DE VIBRACION.- Es el primer modo natural de vibración y su *forma de modo* no tiene ningún punto de inflexión, tiene las siguientes características^[ref. 27]: a) Posee la menor frecuencia circular, b) tiene el mayor período de oscilación, y c) posee los mayores desplazamientos de las masas.

Como características de identificación de las *formas de los modos* se tiene que el segundo modo

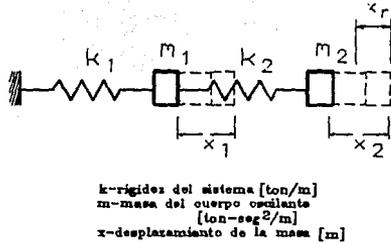


Figura 3.94. Sistema discreto compuesto de 2 G.L. sin amortiguamiento.

de vibración tiene un punto de inflexión en su configuración o gráfica, el tercer modo tiene dos puntos de inflexión, el cuarto tres, etc.

3.3.1. VIBRACION LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO

En la figura 3.94 se muestra un sistema discreto compuesto de 2 G.L., en el cual existen dos masas m_1 y m_2 concentradas en dos puntos del cuerpo oscilante y la rigidez u oposición que ofrece el sistema a sufrir desplazamientos está representada por los dos resortes de rigidez k_1 y k_2 . Una fuerza excitatriz estática que actúa solo una vez desplaza las masas del cuerpo oscilante en distancias x_1 y x_2 , al dejar de obrar esta fuerza, las fuerzas restauradoras de los resortes tienden a regresar a las masas a su posición original de reposo; en este retorno se generan dos fuerzas de inercia que obligan a dichas masas a desplazarse más allá del punto inicial, estableciéndose así un ciclo que se repite indefinidamente debido a la ausencia de amortiguamiento del sistema.

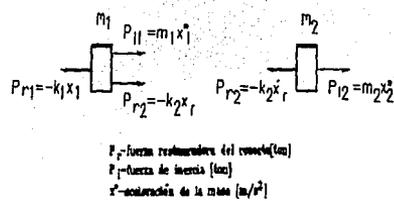


Figura 3.95. Diagrama de cuerpo libre del sistema compuesto de la figura 3.94.

Del diagrama de cuerpo en libertad de la figura 3.95 puede demostrarse que las siguientes expresiones son válidas para un sistema de n grados de libertad (G.L.)

$$M\{x''\} + K\{x\} = 0 \quad \dots (3.58)$$

Ecuación general del movimiento no amortiguado

M -matriz de masas

K -matriz de rigidez

$\{x\}$ -vector de desplazamientos

$\{x''\}$ -vector de aceleraciones

esta ecuación puede expresarse como

$$[K - \omega^2 M]\{z\} = 0 \quad \dots (3.59)$$

Ecuación característica general

donde

$$\{z\} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \vdots \\ z_{ij} \end{bmatrix} \quad \dots (3.59a)$$

$\{z\}$ -vector de coordenadas relativas z_{ij} de las masas que configura o gráfica una forma modal

ω -frecuencia angular de una forma modal

z_j -componente del vector modal donde los subíndices

Indican: i -# de masa o nivel

j -# de modo o # de forma modal

A la ecuación (3.59) se le denomina **ecuación característica** y representa un problema matemático muy importante conocido como **problema de valores característicos** (o **eigen-valores**), cuya solución no trivial, es decir en la cual no todos los componentes del vector $\{z\}$ son iguales a cero está dada por el denominado **determinante característico**^[ref. 1], expresado como

$$| \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} | = 0 \quad \dots (3.60)$$

Determinante característico general

ω^2 -valores característicos

Esta ecuación representa un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas, donde n es igual al número de grados de libertad del sistema oscilatorio, al resolverse da los n valores ω^2 conocidos como **valores característicos**. Para cada valor de ω^2 que se sustituya en la ecuación característica (3.59) se obtiene las n coordenadas $z_{11}, z_{12}, \dots, z_{ij}$ de las masas que constituyen los elementos del vector modal $\{z\}$, por lo que en general se tendrán n vectores modales, uno para cada frecuencia. Como el sistema de ecuaciones dado por la expresión (3.59) es homogéneo, es decir sus términos independientes son iguales a cero, es imposible calcular los valores absolutos de las coordenadas $\{z\}$, a menos que se conozca una de ellas con certeza, por lo que se recurre a obtener cifras relativas de todas las coordenadas

z_{ij} con respecto a una de ellas (usualmente se toma el valor arbitrario para $z_{11} = 1$).

En particular para un sistema de 2 G.L. en el cual las rigideces se representan con resortes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = 0 \dots (3.61)$$

cuyo determinante característico vale

$$(\omega^2)^2 - \omega^2 [k_2/m_2 + (k_1 + k_2)/m_1] + k_1 k_2 / m_1 m_2 = 0 \quad \dots (3.62)$$

y tiene por solución

$$\omega^2 = (1/2) [k_2/m_2 + (k_1 + k_2)/m_1] \pm (1/2) \{ [k_2/m_2 + (k_1 + k_2)/m_1]^2 - 4k_1 k_2 / m_1 m_2 \}^{0.5} \dots (3.63)$$

Las siguientes propiedades de los vectores modales son útiles en el tratamiento para la obtención de las respuestas de un sistema múltiple de n G.L.

ORTOGONALIDAD DE LAS FORMAS DE LOS MODOS DE VIBRACION

Dos vectores son ortogonales respecto a una matriz \mathbf{A} ^[ref. 20]

$$\{y\}^T \mathbf{A} \{v\} = 0 \quad \dots (3.64)$$

\mathbf{A} -matriz simétrica

$\{y\}^T$ -cualquier vector transpuesto

$\{v\}$ -cualquier vector

Dos vectores modales $\{z\}_h$ y $\{z\}_j$ son ortogonales respecto a la matriz de masas y de rigidez si $h \neq j$

$$\{z\}_j^T M \{z\}_h = 0 \quad \dots(3.65)$$

$$\{z\}_j^T K \{z\}_h = 0 \quad \dots(3.66)$$

NORMALIZACION DE LAS FORMAS DE LOS MODOS DE VIBRACION

Un vector $\{v\}_h$ es normalizado respecto a una matriz si^[ref.1]

$$\{v\}_h^T A \{v\}_h = 1 \quad \dots(3.67)$$

y un vector modal $\{z\}_h$ está normalizado respecto a la matriz de masas si

$$\{r\}_h^T M \{r\}_h = 1 \quad \dots(3.68)$$

$\{r\}_h$ -vector de coordenadas del modo h normalizado

para encontrar $\{r\}_h$ se debe resolver

$$\{z\}_h^T M \{z\}_h = N_h^2 \quad \dots(3.69)$$

N_h -constante arbitraria cuyo valor depende de la escala de la configuración del modo

$\{z\}_h$ -vector del modo h sin normalizar

por lo que

$$\{r\}_h = (1/N_h) \{z\}_h \quad \dots(3.70)$$

Para facilidad en las operaciones de los vectores modales conviene normalizarlos con respecto a la matriz de masas. La normalización de vectores se usa frecuentemente en los programas de análisis por computadora.

Para que vibre libremente un sistema de varios G.L. deben existir en él condiciones iniciales, por ejemplo de desplazamientos de las masas; la solución de la ecuación general del movimiento se puede obtener por el siguiente método.

3.3.1.1. METODO DIRECTO PASO A PASO DE SUPERPOSICION MODAL

Este método consiste en resolver la ecuación general del movimiento de un sistema de n G.L., mediante la superposición de las respuestas de cada modo de vibración y se vale de una transformación de coordenadas para convertir un sistema de n G.L. en n sistemas de 1 G.L.

La respuesta de desplazamientos del sistema compuesto es

$$\{x\} = Z\{f\} \quad \dots(3.71)$$

Z-matriz modal cuyas columnas son los vectores de formas modales

$\{f\}$ -vector de coordenadas generalizadas en función del tiempo

$\{x\}$ -vector de desplazamientos absolutos o totales

para modos normalizados la respuesta es

$$\{x\} = R\{f\} \quad \dots(3.72)$$

R-matriz modal normalizada cuyas columnas se forman con los vectores modales normalizados

Ya sea que los vectores modales estén normalizados o no, pueden obtenerse las n ecuaciones de los n sistemas transformados de

1 G.L., llamadas **ecuaciones desacopladas**, una para cada modo j y expresarlas como

$$[M_j] \ddot{z}_j + [K_j] z_j = 0 \quad \dots (3.73)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

donde

$$[M_j] = \{z\}^T M \{z\} \quad \dots (3.74)$$

$$[K_j] = \{z\}^T K \{z\} \quad \dots (3.75)$$

$[M_j]$ -escalar que representa la masa transformada para el modo j

$[K_j]$ -escalar que representa la rigidez transformada para el modo j

f_j -función de aceleración en la coordenada generalizada del modo j

z_j -función de desplazamientos en la coordenada generalizada del modo j

o expresarlas también en la forma

$$\ddot{z}_j + (\omega_j^2) z_j = 0 \quad \dots (3.76)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

Se dice que se obtiene un sistema de n ecuaciones desacopladas porque son ecuaciones independientes, es decir las coordenadas de una masa i no contienen términos que estén relacionados con las otras masas.

A su vez dicho sistema de ecuaciones independientes puede ser resuelto para cada modo j , por la solución particular de desplazamientos dada por la ecuación (3.5) de los sistemas simples sin amortiguamiento (inciso 3.2.1. del presente tema).

No obstante como *no todos los modos de vibración contribuyen a la respuesta total en la misma forma*, ésta es expresada como la suma de las formas modales multiplicadas por un **coeficiente de participación o influencia** de manera tal que para cada modo j es

$$z_j = c_j f_j(t) = c_j \cos \omega_j t + [(c_j') / \omega_j] \sin \omega_j t \quad \dots (3.77)$$

en donde

$$c_j = \{z\}^T M \{x_0\} / [M_j] = \{z\}^T K \{x_0\} / [K_j]$$

$$= \{z\}^T K \{x_0\} / (\omega_j^2) [M_j] \quad \dots (3.78)$$

c_j -coeficiente de participación o influencia

c_j' -derivada de c_j , que depende de la velocidad inicial del sistema

$\{x_0\}$ -vector de desplazamientos iniciales de las masas

$f_j(t)$ -una función del tiempo parte de f_j

Al sustituir en la ecuación (3.71) la respuesta f_j del sistema de 1 G.L. en vibración libre, obtenida para cada modo j , se tiene al efectuar el producto matricial la respuesta total de cada masa del sistema compuesto.

3.3.1.2 ECUACION MATRICIAL DEL MOVIMIENTO

La manera de obtener las ecuaciones del movimiento a partir del equilibrio dinámico de un sistema compuesto como el de la figura 3.95, es perfectamente válida para cualquier número de G.L., sin embargo resulta impráctico y muy laborioso establecer individualmente para cada masa de un sistema de n G.L., las n ecuaciones

mostrada en la figura 3.96, y que estáticamente posee 3 G.L. en cada extremo, definidos por 2 desplazamientos y 1 giro en la dirección positiva de sus ejes coordenados locales xy; la matriz de rigidez del elemento en dichas coordenadas es la expresada en la ecuación (3.79), (se han despreciado las deformaciones por esfuerzo cortante*) [ref. 10]

Generalmente en un sistema estructural existen elementos cuyas coordenadas locales xy, no coinciden con las coordenadas generales de la estructura X, Y, como es el caso de las columnas y contravientos de un marco, por lo que forman un ángulo α con el eje global X, ver figura 3.96. La matriz de rigidez local de un elemento K' se puede expresar en coordenadas globales mediante una matriz de transformación o giro R , que en el caso del elemento en estudio es la indicada en la ecuación 3.80.

$$\begin{matrix}
 & u_m & v_m & \theta_m & u_n & v_n & \theta_n \\
 \begin{matrix} u_m \\ v_m \\ \theta_m \\ u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 \$ & \& & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\& & \$ & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \$ & \& & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\& & \$ & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \end{matrix} = R \dots (3.80)$$

R -matriz de giro o de transformación de coordenadas
 $\$ = \cos \alpha$
 $\& = \sin \alpha$
 α -ángulo de inclinación del eje x local del elemento respecto al eje global X (positivo en el sentido indicado en la figura 3.96)

La matriz de rigidez del elemento recto en coordenadas globales está dada por

$$K = R^T K' R \dots (3.81)$$

R^T -matriz de giro transpuesta
 K -matriz de rigidez global de un elemento recto

Efectuando este producto matricial se obtiene la matriz global general para un elemento recto expresada en la ecuación (3.82).

$$\begin{matrix}
 & u_m & v_m & \theta_m & u_n & v_n & \theta_n \\
 \begin{matrix} u_m \\ v_m \\ \theta_m \\ u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 EA\$^2/L & EA\$\&/L & -6EI\&/L^2 & -EA\$^2/L & -EA\$\&/L & -6EI\&/L^2 \\
 +12EI\&^2/L^3 & -12EI\$\&/L^3 & & -12EI\&^2/L^3 & +12EI\$\&/L^3 & \\
 EA\$\&/L & EA\&^2/L & 6EI\$/L^2 & -EA\$\&/L & -EA\&^2/L & 6EI\$/L^2 \\
 -12EI\$\&/L^3 & +12EI\&^2/L^3 & & +12EI\$/L^3 & -12EI\&^2/L^3 & \\
 -6EI\&/L^2 & 6EI\$/L^2 & 4EI/L & 6EI\&/L^2 & -6EI\$/L^2 & 2EI/L \\
 -EA\$^2/L & -EA\$\&/L & 6EI\$/L^2 & EA\$^2/L & EA\$\&/L & 6EI\&/L^2 \\
 -12EI\&^2/L^3 & +12EI\$\&/L^3 & & +12EI\&^2/L^3 & -12EI\$/L^3 & \\
 -EA\$\&/L & -EA\&^2/L & -6EI\$/L^2 & EA\$\&/L & EA\&^2/L & -6EI\$/L^2 \\
 +12EI\$/L^3 & -12EI\&^2/L^3 & & -12EI\$/L^3 & +12EI\&^2/L^3 & \\
 -6EI\&/L^2 & 6EI\$/L^2 & 2EI/L & 6EI\&/L^2 & -6EI\$/L^2 & 4EI/L
 \end{bmatrix}
 \end{matrix} = K \dots (3.82)$$

K-matriz de rigidez global general para un elemento recto

*En elementos estructurales que se clasifican como esbeltos, como son la gran mayoría de las trabes y columnas, las deformaciones por esfuerzo cortante son insignificantes pues el trabajo de dichos elementos es principalmente a flexión, sin embargo como se verá en el tema IV, en elementos estructurales tales como los muros deben tomarse en cuenta dichas deformaciones [ref. 2].

Para una barra con articulaciones en ambos extremos como es el caso de las armaduras o algunos contravientos, no se tiene el grado de libertad θ y su matriz de rigidez en coordenadas globales se obtiene suprimiendo en la ecuación (3.82) los renglones y columnas θ_m y θ_n , como además se acostumbra idealizar estos elementos despreciando la flexión, los términos EI son nulos y su matriz global es

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} U_m & V_m & U_n & V_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} U_m \\ V_m \\ U_n \\ V_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \text{\$}^2 & \text{\$} & -\text{\$}^2 & -\text{\$} \\ \text{\$} & \text{\&}^2 & -\text{\$} & -\text{\&}^2 \\ -\text{\$}^2 & -\text{\$} & \text{\$}^2 & \text{\$} \\ -\text{\$} & -\text{\&}^2 & \text{\$} & \text{\&}^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad AE/L = K_{ar} \dots (3.83)$$

K_{ar} -matriz de rigidez global de un elemento recto articulado en ambos extremos

Las matrices de rigideces globales de los elementos rectos, permiten la determinación inmediata y directa de la matriz de rigidez de una estructura reticular. En el caso particular de que existan en los extremos del elemento estructural apoyos o soportes que impidan alguno de los G.L., simplemente se eliminan las filas y columnas correspondientes a ese G.L. en la matriz global del elemento. Por ejemplo: con referencia a la figura 3.97, el elemento # 1 tiene una articulación en el extremo n, y por tanto deben eliminarse el renglón y columna θ_n y tomar $EI = 0$ en dicho extremo; en el elemento # 2 que es un apoyo articulado en el extremo n, se elimina v_n y u_n debido a que estos desplazamientos están restringidos.

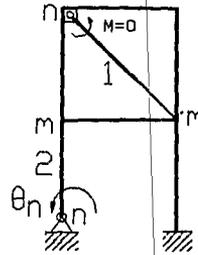


Figura 3.97. Estructura reticular con articulaciones.

En general para un miembro con articulaciones, apoyos, etc. en sus extremos la siguiente regla sencilla es útil: si no se trata de un apoyo se quita el G.L., y si es un apoyo se quita el grado de restricción de su matriz de rigidez.

Para un sistema estructural en general, su matriz de rigideces K_e , está formada por un arreglo cuadrado y simétrico que se ensambla a partir de las contribuciones de rigidez de los elementos estructurales rectos que la forman y que se conectan o que llegan a cada uno de sus nodos. Esta matriz de rigideces de la estructura es de orden $n \times n$ donde $n = (3 \text{ G.L.} \times \# \text{ de nodos}) - \# \text{ de restricciones en apoyos}$.

A partir de la ecuación matricial que relaciona fuerzas y desplazamientos en una estructura, dada por^[ref. 10]

$$\{Q\} = K_e \{D\} \dots (3.84)$$

- {Q}-vector de fuerzas o cargas
- K_e -matriz de rigidez de la estructura
- {D}-vector de desplazamientos

pueden obtenerse matrices particionadas expresadas en forma general o simbólica como

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ M\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & K_{u\theta} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{v\theta} \\ K_{\theta u} & K_{\theta v} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{.....(3.85)}$$

U-subvector de desplazamientos laterales

V-subvector de desplazamientos verticales

Θ-subvector de desplazamientos angulares

F_u-subvector de fuerzas laterales

F_v-subvector de fuerzas verticales

Mθ-subvector de fuerzas angulares o momentos

de donde

$$F_u = K_{uu}U + K_{uv}V + K_{u\theta}\Theta \quad \text{.....(3.86)}$$

$$F_v = K_{vu}U + K_{vv}V + K_{v\theta}\Theta \quad \text{.....(3.87)}$$

$$M\theta = K_{\theta u}U + K_{\theta v}V + K_{\theta\theta}\Theta \quad \text{.....(3.88)}$$

K_{ij} - elemento componente de K_n y que representa la fuerza generada en la dirección del G.L. i causada por un desplazamiento unitario del G.L. j

MATRIZ DE RIGIDEZ SIN CONSIDERAR DEFORMACIONES AXIALES

En aras de simplificar el análisis estructural y reducir el número de cálculos necesarios y las dimensiones de las matrices de rigideces, en la gran mayoría de las estructuras reticulares se pueden despreciar las deformaciones axiales u y por cortante v de los elementos horizontales (vigas)^[ref. 10], ya que la flexión controla su comportamiento, y pueden despreciarse también las

deformaciones axiales v de los elementos no horizontales^[ref. 2].

Entonces los G.L. estáticos de dichos elementos respecto a las coordenadas globales de la estructura X, Y, son los mostrados en la figura 3.98.

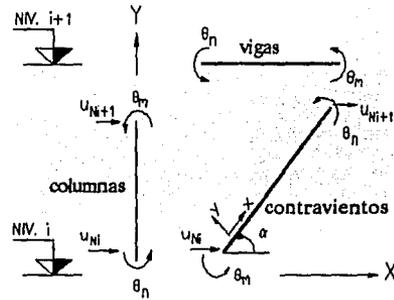


Figura 3.98. Grados de libertad estáticos de un elemento recto sin considerar deformaciones axiales

La matriz de rigidez global K de cada elemento en estas condiciones, puede obtenerse de la matriz global general de la ecuación (3.82) simplemente suprimiendo los renglones y columnas u_m, v_m, u_n, v_n en vigas y v_m, v_n en elementos no horizontales y expresarlos como

$$\begin{bmatrix} \theta_m & \theta_n \\ 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} = K_{viga} \quad \text{.....(3.89)}$$

K_{viga}-Matriz de rigidez global de elementos horizontales (despreciando deformaciones axiales y por cortante)

	UNi	θ_m	UNi+1	θ_n	
UNi	EAS^2/L $+12EI\delta^2/L^3$	$-6EI\delta/L^2$	$-EAS^2/L$ $-12EI\delta^2/L^3$	$-6EI\delta/L^2$	= $K_{col} \dots(3.90)$
θ_m	$-6EI\delta/L^2$	$4EI/L$	$6EI\delta/L^2$	$2EI/L$	
UNi+1	$-EAS^2/L$ $-12EI\delta^2/L^3$	$6EI\delta/L^2$	EAS^2/L $+12EI\delta^2/L^3$	$6EI\delta/L^2$	
θ_n	$-6EI\delta/L^2$	$2EI/L$	$6EI\delta/L^2$	$4EI/L$	

K_{col} -Matriz de rigidez global de elementos no horizontales (despreciando deformaciones axiales y por cortante)

UNi- Σ de rigideces laterales u de los elementos no horizontales que se conectan al nivel Ni

Para una barra doblemente articulada sometida sólo a cargas laterales

	UNi	UNi+1	
UNi	$E\delta^2$	$-E\delta^2$	$EA/L = K_{arm} \dots(3.91)$
UNi+1	$-E\delta^2$	$E\delta^2$	

K_{arm} -Matriz de rigidez global de elementos no horizontales articulados en sus extremos (sólo para cargas laterales, se desprecian deformaciones axiales y por cortante)

La matriz de rigidez de la estructura K_s , será de orden $n \times n$, con $n = \#$ de nodos + $\#$ de niveles. Ya que se han despreciado las deformaciones axiales, al ensamblar K_s deben sumarse todas las contribuciones de rigidez lateral u de los miembros no horizontales que lleguen o se conecten a un piso i, pues todos ellos tendrán el mismo desplazamiento lateral Δ , como se indica en la figura 3.99.

El número de G.L. estáticos que se eligen en el análisis de una estructura es un paso importante

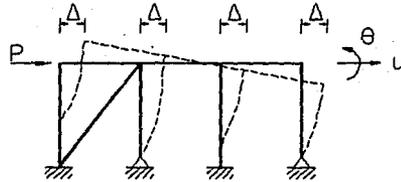


Figura 3.99. Desplazamiento lateral de un marco sin considerar las deformaciones axiales de sus elementos estructurales.

ya que determina el número de ecuaciones que deben resolverse.

Si al tratar con una estructura en particular los efectos axiales son realmente despreciables, el trabajo extra que se ejecuta al operar con seis G.L. de cada elemento recto (ecuación 3.82), es un desperdicio de esfuerzo^[ref.10], a menos de que se disponga de un programa de cómputo con la automatización del método para seis G.L. por miembro y de una computadora.

En estructuras con vigas de peraltes muy grandes, conocidas como vigas diafragma, es decir vigas con relación longitud del claro a peralte^[ref.21] $L/h \leq 3$, y en armaduras, no pueden despreciarse las deformaciones axiales.

3.3.1.4. MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL

En Ingeniería Civil al tratar el problema de los sismos que inducen fuerzas laterales en las estructuras, interesa conocer la **rigidez lateral** u oposición a los desplazamientos laterales.

Es posible obtener entonces la **matriz de rigidez lateral** k^* de una estructura por el proceso denominado **condensación estática**, particionando en forma diferente la ecuación (3.84) y expresándola como

$$\begin{bmatrix} F \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ G \end{bmatrix} \quad \dots(3.92)$$

U-subvector de desplazamientos laterales

G-subvector de desplazamientos verticales y angulares

F-subvector de fuerzas laterales

P-subvector de fuerzas verticales y momentos

K_{11} -parte de la matriz que corresponde a los desplazamientos laterales

de donde

$$F = K_{11}U + K_{12}G \quad \dots(3.93)$$

$$P = K_{21}U + K_{22}G \quad \dots(3.94)$$

Para el caso en que solo existen cargas laterales sobre la estructura ($P = 0$)

$$G = -[K_{22}]^{-1}K_{21}U \quad \dots(3.95)$$

$$F = K^*U \quad \dots(3.96)$$

(cargas laterales = matriz de rigidez lateral x desplazamientos laterales)

$$K^* = K_{11} - K_{12}[K_{22}]^{-1}K_{21} \quad \dots(3.97)$$

K^* -matriz de rigidez lateral

$[K_{22}]^{-1}$ -matriz inversa de K_{22}

Este proceso se llama **condensación estática** porque reduce el orden de la matriz de rigidez original K_0 .

En las estructuras reticulares, desde el punto de vista dinámico los G.L. que son de interés son aquellos en que se generan fuerzas de inercia cuando las masas de los pisos se mueven lateralmente, es decir importan los desplazamientos laterales; sin embargo esto no anula los restantes G.L. estáticos, por lo que debe usarse el proceso de condensación estática para transformar la matriz de rigidez original de la estructura en una matriz en función del número de G.L. dinámicos.

3.3.1.5. MATRIZ DE RIGIDEZ DE ENTREPISO

Como se verá en el tema IV gran parte de las estructuras reticulares pueden modelarse como sistemas denominados **Estructuras de Cortante**, en donde los marcos estructurales pueden representarse para efectos dinámicos mediante cualquiera de los sistemas oscilatorios múltiples

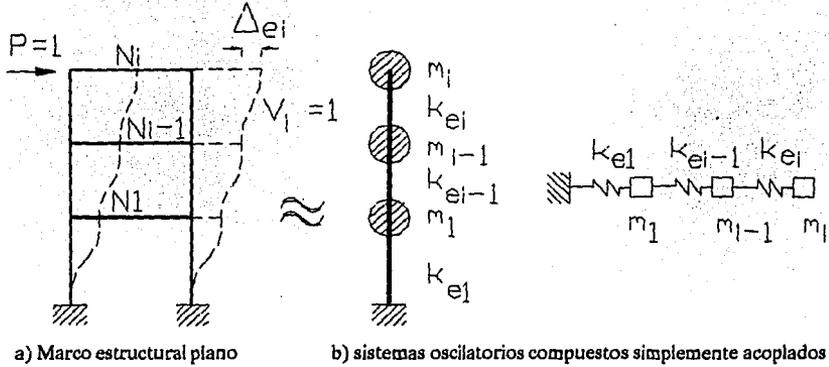


Figura 3.100. Modelo dinámico de una estructura reticular a) como marco plano y b) con rigideces de entrepiso

de la figura 3.100b, en donde las barras o los resortes representan el concepto denominado **rigidez de entrepiso**.

Este modelo de los edificios sólo sirve para simplificar aun más el análisis dinámico de marcos planos ante fuerzas horizontales. Es un modelo en extinción^[ref. 22], debido a que actualmente existen en gran escala modelos más refinados que se emplean en programas de computadoras en los despachos de cálculo. Sin embargo los conceptos que maneja son importantes porque el RCDF-93^[ref. 4] hace mención de ellos.

RIGIDEZ DE ENTREPISO.- Es la relación entre la fuerza cortante en un entrepiso y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles que lo limitan^[ref. 2].

De la figura 3.101, para un entrepiso i:

$$K_{ei} = V_i / \Delta_{ei} \quad \dots (3.98)$$

$$\Delta_{ei} = \Delta_{Ni} - \Delta_{Ni-1} \quad \dots (3.99)$$

K_{ei} -rigidez del entrepiso i

V_i -fuerza cortante en el entrepiso i

Δ_{ei} -desplazamiento del entrepiso i

Δ_{Ni} -desplazamiento del nivel i

Δ_{Ni-1} -desplazamiento del nivel i-1

La rigidez de entrepiso así definida es dependiente del sistema de cargas laterales aplicado, y para calcularla con exactitud deben conocerse de

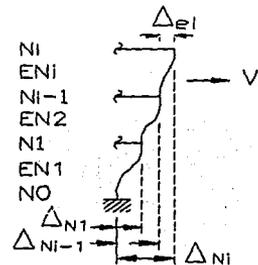


Figura 3.101. Rigidez de entrepiso

antemano dichas cargas, lo cual en general no es posible^[ref. 2].

Una forma de hallar la rigidez de entrepiso con muy buena aproximación, es empleando el método de trabajo virtual que consiste en este caso en aplicar una fuerza unitaria lateral P en el nivel Ni, tal y como se indica en la figura 3.100a, y calcular la rigidez de entrepiso con la ecuación (3.98) con $V_i = 1$. Este proceso se repite para cada nivel de la estructura. Lo anterior se deriva de la definición de rigidez de resorte del modelo de la figura 3.100b y que representa la fuerza necesaria en el piso i para producir un desplazamiento unitario relativo de dos pisos consecutivos^[ref. 12].

Como se verá en el tema IV para marcos ordinarios es aceptable recurrir a hipótesis más simplistas para calcular la rigidez de entrepiso, cumpliendo con ciertas condiciones que dan validez a los resultados obtenidos.

SISTEMA OSCILATORIO SIMPLEMENTE ACOPLADO.- Es un sistema oscilatorio como el mostrado en la figura 3.100b en el cual sólo una de sus masas está conectada con resortes al suelo y cada masa m_i , excepto la última, está conectada sólo a m_{i+1} y m_{i-1} .^[ref. 13]

SISTEMA OSCILATORIO ESTRECHAMENTE ACOPLADO.- Es un sistema oscilatorio en el cual más de una de sus masas está conectada mediante resortes al suelo^[ref. 13], ver figura 3.102.

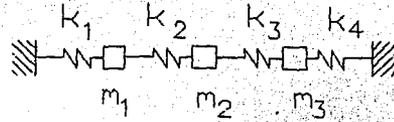


Figura 3.102. Sistema oscilatorio compuesto estrechamente acoplado.

En el modelo oscilatorio de rigideces de entrepiso existe solo un grado de libertad dinámico para cada masa, que es el movimiento lateral indicado en la figura 3.103.

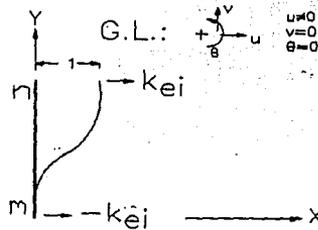


Figura 3.103. Elemento recto con 1 G.L.

La matriz de rigidez global del miembro para este caso, que es el de un elemento recto con $u \neq 0, \theta = 0$ y $v = 0$, puede obtenerse a partir de la matriz global general de la ecuación (3.82), eliminando los renglones y columnas v_n, v_m, θ_n y θ_m , tomando la K_{ei} calculada en vez de $12EI/L^3$ y como $\xi = \cos \alpha = 0, \& = \text{sen} \alpha = 1$, se tiene

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} u_m & u_n \end{matrix} \\
 \begin{matrix} u_m \\ u_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{ei} & -K_{ei} \\ -K_{ei} & K_{ei} \end{bmatrix}
 \end{matrix}
 = K_I \dots (3.100)$$

K_I -matriz de rigidez de entrepiso de un elemento recto

Entonces la **matriz de rigidez de entrepiso** del sistema oscilatorio K_{en} , será de orden $n \times n$, donde $n = 1$ G.L. \times # de pisos.

Cuando en un marco la rigidez de las vigas es muy pequeña comparada con la de las columnas $K_{en} \rightarrow 3\Sigma EI_v/L^3$ y las columnas se comportan como cantiliver, y cuando la rigidez de las vigas es muy grande comparada con la de las columnas $K_{en} \rightarrow 12\Sigma EI_v/L^3$ por lo que las columnas se comportan como empotradas en sus dos extremos. En general para un marco

$$3\Sigma EI_v/L^3 \leq K_{en} \leq 12\Sigma EI_v/L^3 \quad \dots (3.100a)$$

ΣEI_v -sumatoria de todas las rigideces de las columnas de un entrepiso i

Debe notarse que la matriz de rigidez de entrepiso es diferente a la matriz de rigidez lateral, ya que la primera corresponde a marcos o edificios de cortante modelados como sistemas oscilatorios simplemente acoplados (de resortes) y la segunda corresponde a un modelo como marco plano.

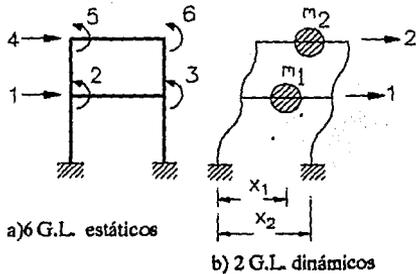


Figura 3.104 Grados de libertad estáticos y dinámicos (adaptado de la [ref. 2]).

3.3.1.6. MATRIZ DE MASAS

Las posibilidades de desplazamiento que tiene la masa de un cuerpo define los G.L. dinámicos de un sistema oscilatorio de acuerdo al número de masas componentes. En otras palabras el número total de G.L. dinámicos de todo el sistema oscilatorio es igual al número de masas por el número de G.L. por masa.

En Ingeniería Civil el caso más común desde el punto de vista sísmico es el de las estructuras reticulares de edificaciones, en donde las fuerzas de inercia importantes son las que generan las masas de los pisos al moverse lateralmente como se indica en la figura 3.104.

En un sistema oscilatorio compuesto, en el que todas las masas tienen el mismo movimiento, si se eligen como coordenadas de dichas masas los desplazamientos absolutos, es decir respecto a la base del sistema (como x_1 y x_2 en la figura 3.104), la matriz de masas es una matriz diagonal^[ref. 13] del tipo

$$\begin{matrix}
 u_1 & u_2 & \dots & u_n \\
 \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} & = & M \dots (3.101)
 \end{matrix}$$

M-matriz de masas

DISCRETIZACION DE MASAS EN ELEMENTOS DE SOPORTE.

En una estructura que puede modelarse como un sistema de varios G.L. los elementos de soporte como columnas, contravientos, muros, etc., físicamente son sistemas continuos; no obstante para facilidad en el análisis dinámico, en la práctica se usa un "criterio de discretización de masas" que considera que la parte de la masa del soporte (incluyendo elementos no estructurales que se apoyen en él como fachadas, muros divisorios, plafones, etc.), comprendida en el área tributaria vertical, se concentra en los niveles de losa que se conectan en sus extremos. El área tributaria vertical de una losa o nivel se considera limitada por las mitades de las alturas de entrepiso arriba y abajo del nivel en cuestión.

En la formulación y solución matricial de las ecuaciones del movimiento de sistemas de varios G.L. que representen estructuras reales, la cantidad de cálculos y operaciones involucradas aun

para estructuras de pocos pisos es grande, por lo que es práctica común recurrir al uso de computadoras digitales, herramientas indispensables para el ingeniero civil que se enfrenta a la solución de problemas dinámicos.

El cálculo a mano de este tipo de problemas es laborioso pero necesario para comprender la forma en que son resueltos por los programas de análisis de estructuras por computadora, de uso obligado en la práctica profesional actual (como los de la referencia [12] y [25]); sin embargo se puede emplear una calculadora de bolsillo con programas sencillos de inversión, multiplicación y suma de matrices, con los que interactivamente se puede comprender mucho mejor el proceso de solución mencionado.

Al final del problema resuelto I del siguiente inciso, se indica la codificación en lenguaje basic, para calculadora de bolsillo, de los programas mencionados y que son útiles en la solución de los problemas que se plantean.

3.3.1.7.-PROBLEMAS RESUELTOS

I.- Deducir las expresiones que describen el movimiento libre no amortiguado de un sistema vibratorio discreto compuesto de 2 G.L., y generalizarlas para un sistema de n G.L.

Con referencia al sistema mostrado en la figura 3.94 (inciso 3.3.1.), una fuerza excitatriz que actúa solo una vez perturba el equilibrio estático del estado de reposo, desplazando a las masas m_1 y m_2 una cantidad x_1 y x_2 , respectivamente.

Los resortes de rigidez k_1 y k_2 , se oponen a los desplazamientos mediante la generación de dos fuerzas restauradoras P_{r1} y P_{r2} , que tienden a regresar las masas a su posición inicial. Durante

este retorno la aceleración que se imprime a cada masa genera las fuerzas de inercia P_{11} y P_{12} que las empujan más allá del punto inicial y en dirección opuesta.

De esta manera se establece un ciclo oscilatorio de duración infinita cuyo equilibrio dinámico se muestra en el diagrama de cuerpo en libertad de la figura 3.95 (inciso 3.3.1.).

Ya se ha demostrado que para la masa m_1 (problema I, inciso 3.2.1.1.)

$$P_{11} = -k_1 x_1 \quad \dots (a)$$

$$P_{11} = m_1 \ddot{x}_1 \quad \dots (b)$$

para la masa m_2 , el desplazamiento relativo o efectivo es igual al desplazamiento total x_2 (respecto a la posición en reposo), menos el desplazamiento de la masa m_1

$$x_r = x_2 - x_1 \quad \dots (c)$$

la fuerza restauradora del segundo resorte P_{12} es entonces de (c)

$$P_{12} = -k_2 x_r = -k_2(x_2 - x_1) \quad \dots (d)$$

la fuerza de inercia en la masa m_2 es $P_{12} = m_2 \ddot{x}_2$... (e)

del diagrama de cuerpo libre de la figura 3.95 (inciso 3.3.1.), el equilibrio dinámico es para cada masa

$$P_{11} = P_{11} + P_{12} \quad \dots (f)$$

$$P_{12} = P_{12} \quad \dots (g)$$

sustituyendo (a), (b), (d) y (e) en (f) y (g)

$$-k_1 x_1 = m_1 \ddot{x}_1 - k_2(x_2 - x_1) \quad \dots (h)$$

$$-k_2(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \quad \dots (i)$$

de donde la ecuación del movimiento es

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad \dots (j)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad \dots (k)$$

expresando (j) y (k) en forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots (l)$$

o en forma general para un sistema múltiple de n grados de libertad

$$M\{\ddot{x}^n\} + k\{x\} = 0 \quad \dots(3.58)$$

Ecuación general del movimiento libre no amortiguado

M-matriz de masas del sistema

K-matriz de rigidez del sistema

$\{x\}$ -vector de desplazamientos

$\{\ddot{x}^n\}$ -vector de aceleraciones

una posible solución de la ecuación (3.58) está dada en forma tal que el desplazamiento de cada una de las masas con respecto a su posición en reposo, es igual al producto de una función de la masa considerada por una función del tiempo

$$x_1 = z_1 f \quad \dots(m)$$

$$x_2 = z_2 f \quad \dots(n)$$

z_1, z_2 -constantes a determinar en función de la masa considerada

f-una función del tiempo a determinar, y que es la misma para todas las masas

la 2a. derivada de (m) y (n) respecto al tiempo es

$$\ddot{x}_1 = z_1 \ddot{f} \quad \dots(o)$$

$$\ddot{x}_2 = z_2 \ddot{f} \quad \dots(p)$$

sustituyendo (m), (n), (o) y (p) en (3.58)

$$M\{z\}\ddot{f} + K\{z\}f = 0$$

$\{z\}$ -vector de coordenadas relativas de las masas z_1, z_2 , conocido como vector de forma modal

de donde

$$K\{z\} = -M\{z\}\ddot{f} \quad \dots(q)$$

y

$$[M]^{-1}\{z\} K\{z\} = -\ddot{f}$$

comparando esta ecuación con la ecuación (3.6), resulta que se puede tomar

$$w^2 = -\ddot{f} \quad \dots(r)$$

sustituyendo (r) en (q)

$$K\{z\} = M\{z\}w^2 \quad \dots(s)$$

de (s) se obtiene para un sistema de n G.L.

$$[k-w^2M]\{z\} = 0 \quad \text{Ecuación característica general} \quad \dots(3.59)$$

{z}-vector de forma modal con componentes $z_{11}, z_{12}, \dots, z_{ij}$ que representan las coordenadas relativas de las masas

z_{ij} -componente del vector de forma modal, donde los subíndices indican:

i-# de masa o nivel

j-# de forma modal

al conjunto de valores z_{ij} del vector {z} se le denomina **forma del modo**; y a la ecuación (3.59) se la conoce como **ecuación característica** porque representa un importante problema matemático llamado **problema de valores característicos o eigenvalores**^[ref. 1,2]; éstos están constituidos por los valores de w^2 , uno por cada grado de libertad dinámico, se obtienen resolviendo la ecuación (3.59) que representa un sistema de n ecuaciones homogéneas, es decir con términos independientes iguales a cero, y su solución no trivial en donde no todos los términos del vector de forma modal {z} son cero se obtiene cuando su **determinante característico** es igual a cero^[ref. 1], es decir

$$|k-w^2M| = 0 \quad \text{Determinante característico general} \quad \dots(3.60)$$

las frecuencias obtenidas son valores reales y positivos, se acostumbra numerarlas en orden creciente w_1, w_2, \dots, w_n . A la primera de estas frecuencias se le denomina **frecuencia angular fundamental** y está asociada con un **período fundamental** y una **forma modal fundamental**

En particular para el sistema de 2 G.L. en estudio se tiene sustituyendo en (3.59) los valores de las matrices dadas en (I)

$$[k-w^2M]\{z\} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \end{bmatrix} w^2 \{z\} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 w^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2 w^2) \end{bmatrix} \{z\} = 0 \quad \dots(3.61)$$

cuyo determinante característico dado por la ecuación (3.60) vale

$$\begin{aligned} |k-w^2M| &= (k_1 + k_2 - m_1 w^2)(k_2 - m_2 w^2) - k_2^2 = k_1 k_2 + k_2^2 - k_2 m_1 w^2 - k_1 m_2 w^2 - k_2 m_2 w^2 \\ &+ m_1 m_2 w^4 - k_2^2 = (w^2)^2 m_1 m_2 - w^2 (k_2 m_1 + k_1 m_2 + k_2 m_2) + k_1 k_2 \\ &= (w^2)^2 m_1 m_2 - w^2 [k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2] + k_1 k_2 = 0 \quad \dots(t) \end{aligned}$$

de donde dividiendo entre $m_1 m_2$

$$(w^2)^2 - w^2 [k_2/m_2 + (k_1 + k_2)/m_1] + k_1 k_2/m_1 m_2 = 0 \quad \dots(3.62)$$

esta ecuación es de segundo grado y existen por tanto dos soluciones para w dadas por la fórmula [ref. 5]

$$(w^2)_{1,2} = [-b \pm (b^2 - 4ac)^{0.5}] / (2a)$$

donde para este caso

$$a = 1$$

$$b = -[k_2/m_2 + (k_1 + k_2)/m_1]$$

$$c = k_1 k_2 / m_1 m_2$$

de donde se obtiene

$$(w^2)_{1,2} = (1/2)[k_2/m_2 + (k_1 + k_2)/m_1] \pm (1/2)\{[k_2/m_2 + (k_1 + k_2)/m_1]^2 - 4k_1 k_2 / m_1 m_2\}^{0.5} \dots (3.63)$$

Determinación de $\{z\}$ y $\{f\}$

Para cualquier sistema compuesto, con los valores cuadráticos de las frecuencias angulares obtenidos (valores característicos), es posible conocer las coordenadas de las masas que son las componentes del vector de forma modal $\{z\}$, sustituyendo cada valor característico cuadrático w^2 en la ecuación característica (3.59). Como esta expresión representa un sistema de ecuaciones homogéneas, es imposible obtener los valores absolutos de las coordenadas z_{ij} , a menos que se conozca una de ellas con certeza [ref. 1], se recurre entonces a la obtención de valores relativos de las coordenadas z_{ij} a una de ellas (generalmente $z_{11} = 1$).

De (r), para el sistema de 2 G.L. $\ddot{r} = -w^2 r \dots (u)$

comparando (u) con la ecuación (i) del problema I, Inciso 3.2.1.1., la solución de (u), está dada por la ecuación (p) de dicho problema como

$$\dot{r} = A_1 \text{sen} w_1 t + A_2 \text{cos} w_1 t \dots (v)$$

A_{1j}, B_{2j} -constantes a determinar

como existen dos frecuencias w_1 en el sistema, se tienen también dos valores de f_1 y dos soluciones dadas por (m) y (n)

para el modo 1

$$x_1 = z_{11} f_1 \dots (w)$$

$$x_2 = z_{21} f_1 \dots (x)$$

para el modo 2

$$x_1 = z_{12} f_2 \dots (y)$$

$$x_2 = z_{22} f_2 \dots (z)$$

El sistema oscilatorio en general puede vibrar con una frecuencia cualquiera w_1 [ref. 1], en cuyo caso por el principio de superposición la forma de vibración será una combinación de cada frecuencia del sistema que puede expresarse como

$$x_1 = z_{11}f_1 + z_{12}f_2$$

$$x_2 = z_{21}f_1 + z_{22}f_2$$

y sustituyendo (v), se obtiene la respuesta de desplazamientos del sistema

$$x_1 = z_{11}(A_{11}\text{sen}w_1t + A_{21}\text{cos}w_1t) + z_{12}(A_{12}\text{sen}w_2t + A_{22}\text{cos}w_2t) \quad \dots(A)$$

$$x_2 = z_{21}(A_{11}\text{sen}w_1t + A_{21}\text{cos}w_1t) + z_{22}(A_{12}\text{sen}w_2t + A_{22}\text{cos}w_2t) \quad \dots(B)$$

$A_{11}, A_{21}, A_{12}, A_{22}$ -constantes que dependen de las condiciones iniciales de desplazamiento $x_i(0)$ y velocidad $\dot{x}_i(0)$ de las masas

Por ejemplo si en un sistema múltiple de 2 G.L. con $m_1 = m_2 = m$ y $K_1 = K_2 = k$, se tienen las frecuencias angulares naturales dadas por la ecuación (3.63) como

$$(w^2)_{1,2} = (1/2)(k/m + 2k/m) \pm \{[k/m + 2k/m]^2 - 4k^2/m^2\}^{0.5} (1/2) =$$

$$(3/2)(k/m) \pm \{9(k/m)^2 - 4(k/m)^2\}^{0.5} = 1.5k/m \pm 5^{0.5}k/(2m)$$

de donde $w_1^2 = 0.38197k/m;$ $w_2^2 = 2.618k/m$

sustituyendo w_1^2 en la ecuación (3.61) y tomando arbitrariamente el valor $z_{11} = 1.0$

$$(2k - mw_1^2)z_{11} - kz_{21} = 0$$

$$-kz_{11} + (k - mw_1^2)z_{21} = 0$$

para la primera ecuación

$$(2k - mw_1^2)z_{11} - kz_{21} = (2k - 0.38197k)z_{11} - kz_{21} = 1.618kz_{11} - kz_{21} = 0$$

de donde $z_{21} = 1.618$

procediendo análogamente para w_2^2 y tomando $z_{12} = 1.0$ se obtiene

$$(2k - 2.618k)z_{12} - kz_{22} = -0.618kz_{12} - kz_{22} = 0$$

de donde $z_{22} = -0.618$

graficando estos valores se tienen las formas de los modos mostradas en la figura 3.105

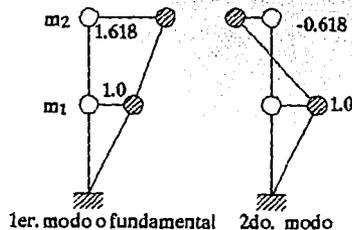


Figura 3.105. Formas de los modos de vibración cuando $k_1 = K_2 = k$ y $m_1 = m_2 = m$

Para poder generalizar las respuestas dadas por las ecuaciones (A) y (B) para un sistema de n G.L., las siguientes propiedades de los vectores modales son útiles

● ORTOGONALIDAD DE LOS MODOS

En álgebra matricial^[ref. 20], se dice que dos vectores $\{x\}$ y $\{y\}$ son ortogonales respecto a la matriz simétrica A si

$$\{y\}^T A \{x\} = 0 \quad \dots(3.64)$$

A -matriz simétrica

$\{y\}^T$ -vector transpuesto

$\{x\}$ -cualquier vector

Los vectores modales $\{z\}_h$ y $\{z\}_j$ son ortogonales respecto a una matriz si $h \neq j$

Demostración

de (s) para dos vectores modales $\{z\}_h$ y $\{z\}_j$

$$K\{z\}_h = (\omega^2)_h M\{z\}_h \quad \dots(C)$$

$$K\{z\}_j = (\omega^2)_j M\{z\}_j \quad \dots(D)$$

premultiplicando (C) por $\{z\}_j^T$ y (D) por $\{z\}_h^T$

$$\{z\}_j^T K\{z\}_h = (\omega^2)_h \{z\}_j^T M\{z\}_h \quad \dots(E)$$

$$\{z\}_h^T K\{z\}_j = (\omega^2)_j \{z\}_h^T M\{z\}_j \quad \dots(F)$$

para cualesquier dos vectores se puede demostrar^[ref. 20] que

$$\{y\}^T A \{x\} = \{x\}^T A \{y\} \quad \dots(G)$$

por tanto (F) puede escribirse como

$$\{z\}_j^T K\{z\}_h = (\omega^2)_j \{z\}_j^T M\{z\}_h \quad \dots(H)$$

sustituyendo (H) en (E)

$$(\omega^2)_j \{z\}_j^T M\{z\}_h = (\omega^2)_h \{z\}_j^T M\{z\}_h$$

$$[(\omega^2)_h - (\omega^2)_j] \{z\}_j^T M\{z\}_h = 0 \quad \dots(I)$$

Como en (I) $h \neq j$ entonces $(\omega^2)_h - (\omega^2)_j \neq 0$ y por tanto

$$\{z\}_j^T M\{z\}_h = 0 \quad \dots(3.65)$$

comparando la ecuación (3.65) con la ecuación (3.64), se observa que $\{z\}$ y $\{z\}_h$ son ortogonales

análogamente con la matriz K se demuestra

$$\{z\}_i^T K \{z\}_h = 0 \quad \dots (3.66)$$

● NORMALIZACION DE LOS MODOS

Un vector $\{v\}_h$ es normalizado respecto a una matriz si

$$\{v\}_h^T A \{v\}_h = 1 \quad \dots (3.67)$$

por tanto un vector modal es normalizado respecto a la matriz de masas si^(ref. 3)

$$\{r\}_h^T M \{r\}_h = 1 \quad \dots (3.68)$$

$\{r\}_h$ - vector de coordenadas del modo h normalizado

A -matriz simétrica cualquiera

M -matriz de masas simétrica

sea un producto vectorial tal que

$$\{z\}_h^T M \{z\}_h = N_h^2 \quad \dots (3.69)$$

N_h -constante arbitraria cuyo valor depende de la escala de la configuración del modo

$\{z\}_h$ -vector de coordenadas del modo h sin normalizar

si se define el vector

$$\{r\}_h = (1/N_h) \{z\}_h \quad \dots (3.70)$$

y entonces si se cumple la siguiente igualdad

$$\{r\}_h^T M \{r\}_h = (1/N_h) \{z\}_h^T M (1/N_h) \{z\}_h = (1/N_h^2) \{z\}_h^T M \{z\}_h = 1 \quad \dots (J)$$

se dice que $\{r\}_h = (1/N_h) \{z\}_h$ es un vector normalizado

● RESPUESTAS DE SISTEMAS DE VARIOS G.L. POR EL METODO DIRECTO PASO A PASO DE SUPERPOSICION MODAL

Para un sistema de n G.L. la respuesta es generalizando (A) y (B), y expresándolas en forma matricial

$$\{x\} = Z \{f\} \quad \dots (3.71)$$

$\{x\}$ -vector de desplazamientos absolutos o totales de las masas

Z -matriz modal cuyas columnas son los vectores de formas modales

$\{f\}$ -vector de coordenadas generalizadas en función del tiempo

si los vectores de forma modal que integran las columnas de la matriz de formas modales están normalizados, la respuesta de desplazamientos del sistema puede expresarse como

$$\{x\} = \mathbf{R}\{f\} \quad \dots(3.72)$$

R-matriz modal normalizada cuyas columnas son los vectores de formas modales normalizados

al trabajar en la solución de las ecuaciones del movimiento de sistemas compuestos, para facilitar las labores de cálculo es conveniente, mas no necesario, trabajar con modos normalizados pues es posible reducir algunos denominadores a la unidad. La normalización de vectores es muy usada en los programas de análisis por computadora.

Como \mathbf{Z} y \mathbf{R} no dependen del tiempo, la 2a. derivada de la ecuación (3.71) es

$$\{x''\} = \mathbf{Z}\{f''\} \quad \dots(L)$$

sustituyendo la ecuación (3.71) y (L) en la ecuación general del movimiento (3.56) se tiene

$$\mathbf{M}\mathbf{Z}\{f''\} + \mathbf{K}\mathbf{Z}\{f\} = 0 \quad \dots(M)$$

premultiplicando por $\{z\}_j^T$

$$\{z\}_j^T \mathbf{M}\mathbf{Z}\{f''\} + \{z\}_j^T \mathbf{K}\mathbf{Z}\{f\} = 0 \quad \dots(N)$$

por las propiedades de ortogonalidad de los modos con respecto a la matriz de masas y de rigidez, todos los siguientes productos son nulos excepto el último término (cuando el modo $j = j$)

$$\{z\}_j^T \mathbf{M}\mathbf{Z} = \{z\}_j^T \mathbf{M}\{z\}_1 + \{z\}_j^T \mathbf{M}\{z\}_2 + \dots + \{z\}_j^T \mathbf{M}\{z\}_j$$

$$\{z\}_j^T \mathbf{K}\mathbf{Z} = \{z\}_j^T \mathbf{K}\{z\}_1 + \{z\}_j^T \mathbf{K}\{z\}_2 + \dots + \{z\}_j^T \mathbf{K}\{z\}_j$$

por lo que la ecuación (N) resulta

$$\{z\}_j^T \mathbf{M}\{z\}_j \{f''\} + \{z\}_j^T \mathbf{K}\{z\}_j \{f\} = 0 \quad \dots(O)$$

que puede ser expresada para el modo de vibrar j como

$$[M_j] \ddot{f}_j + [K_j] f_j = 0 \quad \dots(3.73)$$

con

$$[M_j] = \{z\}_j^T \mathbf{M}\{z\}_j \quad \dots(3.74)$$

$$[K_j] = \{z\}_j^T \mathbf{K}\{z\}_j \quad \dots(3.75)$$

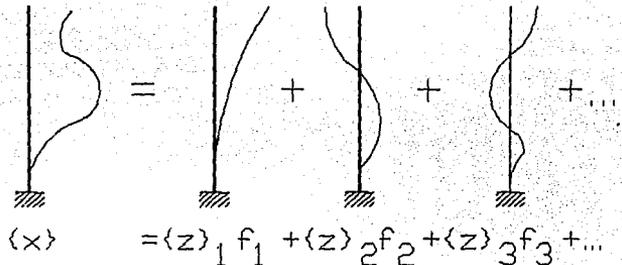


Figura 3.106. Respuesta de desplazamientos de un sistema oscilatorio obtenida mediante superposición modal.

[M]_j-escalar que representa la masa transformada del modo j

[K]_j-escalar que representa la rigidez transformada del modo j

f_j-función de desplazamiento en la coordenada generalizada del modo j

f_j-función de aceleración en la coordenada generalizada del modo j

La ecuación (3.73) expresada para cada modo de vibrar de un sistema de n G.L., representa un conjunto de n ecuaciones independientes de 1 G.L., estas ecuaciones son conocidas como **ecuaciones desacopladas** ya que solo aparecen en ellas las coordenadas de la masa i sin términos relacionados con las otras masas. Dicho de otra manera se ha descompuesto un sistema compuesto de n G.L. en n sistemas de 1 G.L. independientes^[ref. 23].

De la ecuación (3.6), para este caso

$$[k_j] = (\omega_j^2)[M_j] \quad \dots (P)$$

sustituyendo (P) en (3.73)

$$[M_j] \ddot{f}_j + (\omega_j^2)[M_j]f_j = 0$$

dividiendo entre [M]_j que es un escalar

$$\ddot{f}_j + (\omega_j^2)f_j = 0 \quad \dots (3.76)$$

Las ecuaciones (3.73) o (3.76) pueden ser resueltas para cada modo j, por la solución o respuesta de desplazamientos para sistemas de 1 G.L. en vibración libre dada por la ecuación (3.5) del inciso 3.2.1., que en este caso será en términos de f_j en vez de x.

Sin embargo no todos los modos de vibración contribuyen con el mismo porcentaje a la respuesta total del sistema compuesto debido a que cada uno posee una frecuencia angular diferente a la de los demás y por tanto no todas las respuestas máximas de cada modo se producen al mismo tiempo. Cualquier configuración de desplazamientos del sistema como la observada en la figura 3.106, puede entonces ser expresada como una suma de formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes denominados **coeficientes de participación o de influencia**, por lo cual de la citada ecuación (3.5) y para cada modo j

$$f_j = c_j f_j(t) = c_j \cos \omega_j t - (c_j' / \omega_j) \sin \omega_j t \quad \dots(3.77)$$

c_j -coeficiente de participación o de influencia del modo j

c_j' -derivada de c_j

$f_j(t)$ -función del tiempo de f_j

Para que exista vibración libre en un sistema oscilatorio, es necesario que haya por ejemplo condiciones iniciales de desplazamiento en sus masas, en cuyo caso el vector $\{x\}$ de la ecuación (3.71) tendrá desplazamientos iniciales expresados en forma general como

$$\{x\} = \{x_0\}$$

sustituyendo esta condición y premultiplicando por $\{z\}^T M$ o por $\{z\}^T K$ en la citada ecuación, se obtiene

$$\{z\}^T M \{x_0\} = \{z\}^T M Z \{f\} \quad \dots(Q)$$

empleando nuevamente la ortogonalidad de los modos, (Q) puede escribirse como

$$\{z\}^T M \{x_0\} = \{z\}^T M \{z\} f_j$$

para el caso en que $f_j(t)$ representa un máximo relativo a la unidad (es decir $f_j(t) = 1$), sustituyendo la ecuación (3.74) y la ecuación (3.77), se tiene

$$\{z\}^T M \{x_0\} = [M_j] c_j$$

de donde para todo modo j

$$c_j = \{z\}^T M \{x_0\} / [M_j] = \{z\}^T K \{x_0\} / [k_j] = \{z\}^T K \{x_0\} / (\omega_j^2) [M_j] \quad \dots(3.78)$$

$\{x_0\}$ -vector de desplazamientos iniciales de las masas

Al sustituir la respuesta f_j del sistema de 1 G.L. en vibración libre, obtenida para cada modo incluido ya su porcentaje de participación en la ecuación (3.71), se tienen respuestas que expresadas en forma general son

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \dots(R)$$

de donde desarrollando el producto matricial se obtiene

$$x_1 = z_{11}f_1 + z_{12}f_2 + \dots + z_{1n}f_n$$

$$x_2 = z_{21}f_1 + z_{22}f_2 + \dots + z_{2n}f_n$$

$$\dots = \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$\dots = \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$x_n = z_{n1}f_1 + z_{n2}f_2 + \dots + z_{nn}f_n$$

... (S)

Por último se puede generalizar la matriz de masas de la ecuación (I) para un sistema de n G.L. en la cual todas las masas tiene el mismo movimiento y expresarla como

$$\begin{matrix} & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ \dots \\ u_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} & = & \mathbf{M} & \dots(3.101) \end{matrix}$$

Al trabajar con sistemas estructurales de múltiples G.L. (que son los más comunes en la práctica) es necesario el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio dinámico en forma matricial; pues es un método que se adapta muy bien para efectuar cálculos en que toman parte ecuaciones simultáneas, además de que es la manera natural de trabajo de las computadoras.

Usando una calculadora de bolsillo se pueden programar métodos numéricos para invertir, multiplicar y sumar matrices de tal forma que interactivamente se faciliten los cálculos y exista una mejor comprensión del método.

A continuación se indica la codificación de la programación de dichos métodos:

● PROGRAMA PARA MULTIPLICAR O PARA SUMAR DOS MATRICES

```

10 INPUT"# DE RENGLONES MTZ.1=";N;"# COLUMNAS MTZ.2=";M;"# COLUMNAS MTZ.3=";MI
20 DIM A(N,M),B(M,MI),C(N,MI)
30 FOR I=1 TO N
40 FOR J=1 TO M
50 INPUT"COEF.X RENGLON MTZ.1=";A(I,J)
60 NEXT J
70 NEXT I
80 FOR I=1 TO M
90 FOR J=1 TO MI

```

```

100 INPUT "COEF.X RENGLON MTZ.2=";B(I,J)
110 NEXT J
120 NEXT I
125 INPUT "SUMAR?,1=SI,2=NO";W:IF W=1 THEN 260
130 FOR I=1 TO M
140 FOR J=1 TO N
150 FOR K=1 TO M1
160 C(J,K)=C(J,K)+A(J,I)*B(I,K)
170 NEXT K
180 NEXT J
190 NEXT I
200 FOR I=1 TO N
210 FOR J=1 TO M1
220 PRINT "RESULTADOS COEF.MTZ.3=(;I;J)=";C(I,J)
230 NEXT J
240 NEXT I
250 END
260 FOR I=1 TO M
270 FOR J=1 TO M
280 C(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
290 NEXT J
300 NEXT I
310 GOTO 200

```

Los datos de las matrices requeridos por el programa, son por renglón hasta terminar la matriz uno y después los renglones de la matriz dos, los resultados obtenidos son también por renglón.

●PROGRAMA PARA INVERSION DE UNA MATRIZ (METODO DE GAUSS-JORDAN)

```

10 INPUT "NO.DE RENGLONES N=";N:M=N
20 DIM A(N,M),H(N,2),P(N)
30 FOR I=1 TO N
40 FOR J=1 TO M
50 INPUT "COEF.X RENGLON=";A(I,J)
60 NEXT J
70 NEXT I
105 GO SUB PROG 1
106 BEEP 0
110 FOR I=1 TO N
120 FOR J=1 TO M
130 PRINT "ELEM.MATRIZ INV.=";A(I,J)
140 NEXT J
150 NEXT I
200 END
SUBROUTINA EN EL AREA DE PROGRAMA 1
10 D=1
20 FOR J=1 TO N
30 P(J)=0
40 NEXT J
50 FOR I2=1 TO N
60 A1=0

```

```

70  FOR I=1 TO N
80  IF P(I)=1 THEN 160
90  FOR J=1 TO N
100 IF P(J)=1 THEN 150
110 IF ABS(AI) >ABS(A(I,J)) THEN 150
120 R=I
130 C=J
140 AI=A(I,J)
150 NEXT J
160 NEXT I
170 P1=A(R,C)
180 IF ABS(P1)<1E-8 THEN 670
190 D=D*P1
200 H(I2,1)=R
210 H(I2,2)=C
220 P(C)=1
230 IF R=C THEN 360
240 D=-D
250 FOR J=1 TO N
260 C1=A(R,J)
270 A(R,J)=A(C,J)
280 A(C,J)=C1
290 NEXT J
360 A(C,C)=1
370 FOR J=1 TO N
380 A(C,J)=A(C,J)/P1
390 NEXT J
440 FOR I=1 TO N
450 IF I=C THEN 540
460 C0=A(I,C)
470 A(I,C)=0
480 FOR J=1 TO N
490 A(I,J)=A(I,J)-C0*A(C,J)
500 NEXT J
540 NEXT I
550 FOR I2=1 TO N
560 I=N-I2+1
570 IF H(I,1)=H(I,2) THEN 650
580 R=H(I,1)
590 C=H(I,2)
600 FOR I=1 TO N
610 C1=A(I,R)
620 A(I,R)=A(I,C)
630 A(I,C)=C1
640 NEXT I
650 NEXT I2
660 RETURN
670 PRINT *LA MTZ.ES SINGULAR, DETERM.=0

```

680 END

NOTA: Probar invirtiendo la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

En la línea 105 del programa principal se ordena ejecutar la subrutina almacenada en el área de programa 1; pero ésta puede ser almacenada en cualquier otra área o en una línea mayor haciendo las modificaciones correspondientes. El método para inversión de matrices de Gauss-Jordan y su codificación en lenguaje fortran así como ejemplos resueltos manualmente pueden ser consultados en la referencia [24].

II.- La estructura reticular de concreto reforzado ($f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$) mostrada en la figura 3.107 es parte integrante de un edificio de oficinas. La dimensión mayor de sus elementos estructurales es paralela al plano del marco.

1. Modelando la estructura como marco plano obtener: a) La matriz de rigidez de la estructura y la matriz de rigidez lateral considerando 6 G.L. por elemento; b) la matriz de rigidez de la estructura y la matriz de rigidez lateral despreciando las deformaciones axiales de los elementos.

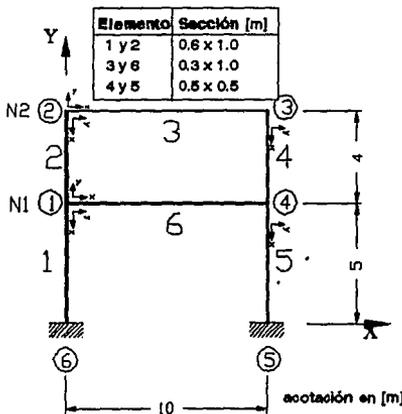


Figura 3.107. Marco plano que es parte integrante de un edificio de oficinas.

2. Modelando la estructura como edificio de cortante (sistema oscilatorio simplemente acoplado o de resortes), obtener: c) la matriz de rigidez de entrespiso considerando 6 G.L. por elemento; y d) la matriz de rigidez de entrespiso despreciando las deformaciones axiales de los elementos.

1.a) Matriz de rigidez de la estructura (K_e) y matriz de rigidez lateral (k^*) con 6 G.L. en cada elemento.

Eligiendo los sentidos positivos locales y el extremo inicial m de los elementos de la forma indicada en la figura 3.107 (la elección es arbitraria y puede ser en cualquier extremo), se calculan los parámetros de la siguiente tabla 3.20, donde α es el ángulo que debe girar un elemento en el

sentido de las manecillas del reloj para que el eje local x coincida con el eje global X

Tabla (3.20) de propiedades de elementos estructurales

BARRA #	α	s	c	s^2	c^2	$s \cdot c$	L [m]	A_c [m ²]	I [m ⁴]	AE/L *	EI/L *	EI/L ² *	EI/L ³ *
1	1-6	270	0	-1	0	1	0	5	0.60	0.05	0.12	0.01	0.0004
2	2-1	270	0	-1	0	1	0	4	0.60	0.05	0.15	0.0125	0.0003125
3	2-3	0	1	0	1	0	0	10	0.30	0.25	0.03	0.0250	0.00025
4	3-4	270	0	-1	0	1	0	4	0.25	0.0052	0.0625	0.0013	0.000325
5	4-5	270	0	-1	0	1	0	5	0.25	0.0052	0.05	0.00104	0.000208
6	1-4	0	1	0	1	0	0	10	0.30	0.25	0.03	0.025	0.00025

*Calculada en términos de E

sustituyendo los datos de la tabla 3.20 en la ecuación (3.82), se obtiene la matriz de rigidez global de cada elemento (para las vigas es más fácil usar la ecuación (3.79), pues sus ejes locales coinciden con los globales). Debe recordarse que las restricciones de los apoyos no son Incluidas en las matrices porque producen singularidades en la ecuación característica (3.59).

$$\begin{matrix} u_4 & v_4 & \theta_4 \\ u_4 & \begin{bmatrix} 0.000624 & 0 & 0.001248 \\ 0 & 0.12 & 0 \\ 0.001248 & 0 & 0.00416 \end{bmatrix} & E = K_5 \\ v_4 & & \\ \theta_4 & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 \\ u_1 & \begin{bmatrix} 0.0048 & 0 & 0.012 \\ 0 & 0.12 & 0 \\ 0.012 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} & E = K_1 \\ v_1 & & \\ \theta_1 & & \end{matrix}$$

$$K_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.00936 & 0 & 0.01875 & -0.00936 & 0 & 0.01875 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 & -0.15 & 0 \\ 0.01875 & 0 & 0.05 & -0.01875 & 0 & 0.025 \\ -0.00936 & 0 & -0.01875 & 0.00936 & 0 & -0.01875 \\ 0 & -0.15 & 0 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0.01875 & 0 & 0.025 & -0.01875 & 0 & 0.05 \end{bmatrix} & E
 \end{matrix}$$

$$K_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.03 & 0 & 0 & -0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0.15 & 0 & -0.003 & 0.15 \\ 0 & 0.15 & 0.1 & 0 & -0.15 & 0.05 \\ -0.03 & 0 & 0 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & -0.003 & -0.15 & 0 & 0.003 & -0.15 \\ 0 & 0.15 & 0.05 & 0 & -0.15 & 0.1 \end{bmatrix} & E
 \end{matrix}$$

$$K_6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_4 & v_4 & \theta_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.03 & 0 & 0 & -0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0.15 & 0 & -0.003 & 0.15 \\ 0 & 0.15 & 0.1 & 0 & -0.15 & 0.05 \\ -0.03 & 0 & 0 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & -0.003 & -0.15 & 0 & 0.003 & -0.15 \\ 0 & 0.15 & 0.05 & 0 & -0.15 & 0.1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad E$$

$$K_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_4 & v_4 & \theta_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.000972 & 0 & 0.00195 & -0.000972 & 0 & 0.00195 \\ 0 & 0.0625 & 0 & 0 & -0.0625 & 0 \\ 0.00195 & 0 & 0.0052 & -0.00195 & 0 & 0.0026 \\ -0.000972 & 0 & -0.00195 & 0.000972 & 0 & -0.00195 \\ 0 & -0.0625 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 \\ 0.00195 & 0 & 0.0026 & -0.00195 & 0 & 0.0052 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad E$$

la matriz de rigidez de la estructura K_e es la siguiente, de orden $n \times n$, con $n = \# \text{ nodos} \times \# \text{ G.L.}$
 - # de restricciones = $6 \times 3 - 6 = 12$, y conviene ordenarla y particionarla como indica la ecuación (3.85).

	u1	u2	u3	u4	v1	v2	v3	v4	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
u1	0.04416	-0.00936	0	-0.03	0	0	0	0	-0.00675	-0.01875	0	0
u2	-0.00936	0.03936	-0.03	0	0	0	0	0	0.01875	0.01875	0	0
u3	0	-0.03	0.000972	-0.000972	0	0	0	0	0	0	0.00195	0.00195
u4	-0.03	0	-0.000972	0.001596	0	0	0	0	0	0	-0.00195	-0.000702
v1	0	0	0	0	0.273	-0.15	0	-0.003	0.15	0	0	0.15
v2	0	0	0	0	-0.150	0.153	-0.003	0	0	0.15	0.15	0
v3	0	0	0	0	0	-0.003	0.0655	-0.0625	0	-0.15	-0.15	0
v4	0	0	0	0	-0.003	0	-0.0625	0.1155	-0.15	0	0	-0.15
θ_1	-0.00675	0.01875	0	0	0.15	0	0	-0.15	0.19	0.025	0	0.05
θ_2	-0.01875	0.01875	0	0	0	0.15	-0.15	0	0.025	0.15	0.05	0
θ_3	0	0	0.00195	-0.00195	0	0.15	-0.15	0	0	0.05	0.1052	0.0026
θ_4	0	0	0.00195	-0.000702	0.15	0	0	-0.15	0.05	0	0.0026	0.10936

Todas las contribuciones a la rigidez efectuadas por los elementos estructurales en un nodo determinado deben sumarse, por ejemplo la celda u_1-u_1 de la matriz K_e se ensambla sumando el renglón u_1 y columna u_1 de los elementos 1, 2 y 6, la celda u_1-u_2 se ensambla con la contribución u_1-u_2 del elemento 2 que es la única, procediendo análogamente se completa el renglón u_1 , posteriormente se llenan las celdas u_2-u_2 , u_2-u_3 , u_2-u_4 , etc. hasta completar el renglón u_2 procediendo de esta manera renglón por renglón se llenan todas las celdas del triángulo superior

de la matriz y como todas las matrices de rigidez son simétricas se procede a llenar el triángulo inferior obteniendo así la matriz de la estructura.

La matriz de rigidez lateral K^* se calcula con la ecuación (3.97) mediante los siguientes pasos:

empleando los programas de calculadora de bolsillo indicados en el problema anterior (o procediendo manualmente con el método de Gauss-Jordan y multiplicando matrices), se obtiene la inversa de la matriz $[K_{22}]^{-1}$, y los siguientes productos matriciales

$$[K_{22}]^{-1} =$$

5.338361768	5.964923761	5.684182974	7.187931757	0.9501647512	-0.3425639646	-0.2896128442	2.109365894
5.964923761	10.177363	11.57432881	5.684182974	-0.2632861479	0.9201868829	1.561979865	-0.3018284416
5.684182973	11.57432881	8.221610858	6.357960863	0.6318867551	-2.208448519	-3.748751676	0.7243882596
7.187931757	5.684182974	6.357960864	2.748963784	-2.280395403	0.8221535149	0.695070826	-5.062478145
0.9501647513	-0.2632861479	0.6318867551	-2.280395403	4.479615833	-0.3928217823	1.62417614	-6.517809736
-0.3425639646	0.9201868829	-2.208448519	0.822153515	-0.3928217822	6.06791412	-7.393237676	1.952918151
-0.2896128442	1.561979865	-3.748751676	0.695070826	1.624176139	-7.393237676	5.435430334	0.4788005183
2.109365894	-0.3018284414	0.7243882596	-5.062478145	-6.517809736	1.952918151	0.4788005183	2.275685805

$$K_{12}[K_{22}]^{-1} =$$

9.46226498E-6	-0.01547632256	0.03714317413	-2.2709436E-5	-0.02287199846	-0.1111218427	0.1276600175	0.007378000387
0.01139251475	0.01231688878	-0.02956053307	-0.0273420354	0.07662738845	0.1064079813	-0.1081699038	-0.08559171722
0.003548518447	0.002457295276	-0.00589750866	-0.0085164442	-0.00954258551	-0.0106086230	0.01153275016	0.00537124833
-0.0009160298E-4	-0.0028339771	0.00680154521	0.00219847154	0.001408358964	0.01304586493	-0.0109352071	-0.002531192446

$$-K_{12}[K_{22}]^{-1}K_{21} =$$

-0.00223792054	0.002512384522	-2.633241349E-4	2.541163904E-4
0.002512384521	-0.003431913183	3.77835161E-4	-2.710166979E-4
-2.633241348E-4	3.778351609E-4	-3.296279706E-5	2.625947914E-5
2.541163904E-4	-2.71016698E-4	2.625947915E-5	-2.310055098E-5

de donde

$$K^* =$$

0.04192207946	-0.006847615478	-2.633241349E-4	-0.02974588361
-0.006847615479	0.03592808682	-0.02962216484	-2.710166979E-4
-2.633241348E-4	-0.02962216484	0.0309390372	-9.457405209E-4
-0.02974588361	-2.71016698E-4	-9.457405209E-4	0.03157289945

1.b) Matriz de rigidez de la estructura (K_e) y matriz de rigidez lateral (K^*) despreciando deformaciones axiales.

Sustituyendo los datos de la tabla 3.20 en la ecuación (3.89) se encuentran las matrices de rigidez global de los elementos horizontales, y sustituyéndolos en la ecuación (3.90) se obtienen las matrices de rigidez global de las columnas

$$\begin{matrix} \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_2 & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix} \end{matrix} E = K_3$$

$$\begin{matrix} UN1 & \theta_1 \\ UN1 & \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.012 \\ 0.012 & 0.04 \end{bmatrix} \end{matrix} E = K_1$$

$$\begin{matrix} \theta_1 & \theta_4 \\ \theta_4 & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix} \end{matrix} E = K_6$$

$$\begin{matrix} UN1 & \theta_4 \\ UN1 & \begin{bmatrix} 0.000624 & 0.001248 \\ 0.001248 & 0.00416 \end{bmatrix} \end{matrix} E = K_5$$

$$\begin{matrix} UN2 & \theta_2 & UN1 & \theta_1 \\ UN2 & \begin{bmatrix} 0.00936 & 0.01875 \\ 0.01875 & 0.05 \end{bmatrix} & UN1 & \begin{bmatrix} -0.00936 & 0.01875 \\ -0.01875 & 0.025 \end{bmatrix} \\ \theta_2 & & \theta_1 & \end{matrix} E = K_2$$

$$\begin{matrix} UN2 & \theta_3 & UN1 & \theta_4 \\ UN2 & \begin{bmatrix} 0.000972 & 0.00195 \\ 0.00195 & 0.0052 \end{bmatrix} & UN1 & \begin{bmatrix} -0.000972 & 0.00195 \\ -0.00195 & 0.0026 \end{bmatrix} \\ \theta_3 & & \theta_4 & \end{matrix} E = K_4$$

Procediendo como se indicó en el inciso 1a) se calcula la matriz de rigidez de la estructura K_0 que es de orden $n \times n$, con $n = \# \text{ nodos} + \# \text{ pisos} = 6$, ordenada y particionada como indica la ecuación (3.92)

$$\begin{matrix} UN1 & UN2 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ UN1 & \begin{bmatrix} 0.015756 & -0.010332 \\ -0.010332 & 0.010332 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.00675 & 0.01875 \\ 0.01875 & 0.19 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.01875 & 0.025 \\ 0.025 & 0.15 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.00195 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1052 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -7.02E-4 & 0.00195 \\ 0.00195 & 0.0026 \end{bmatrix} \\ UN2 & & & & & \\ \theta_1 & & & & & \\ \theta_2 & & & & & \\ \theta_3 & & & & & \\ \theta_4 & & & & & \end{matrix} E = K_0$$

Con la ecuación (3.97) y los programas de calculadora de bolsillo indicados en el problema anterior, se calcula

$$\begin{bmatrix} 6.174813605 & -1.250664496 & 0.6645866862 & -2.838959452 \\ -1.250664496 & 8.175876799 & -3.90229815 & 0.6645866862 \\ 0.6645866862 & -3.90229815 & 11.374601111 & -0.5742803327 \\ -2.838959452 & 0.6645866862 & -0.5742803327 & 10.45575257 \end{bmatrix} 1/E = [K_{22}]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0.01753302704 & 0.1377127631 & -0.04690480281 & -4.818842794E-4 \\ -0.08808776891 & -0.1235341933 & 0.03964646443 & 0.0215006185 \end{bmatrix} \cdot K_{12}[K_{22}]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -0.002608659592 & 0.002818454525 \\ 0.002818454525 & -0.00384867498 \end{bmatrix} E = -K_{12}[K_{22}]^{-1}K_{21}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} 0.01314734041 & -0.007513545475 \\ -0.007513545475 & 0.00648332502 \end{bmatrix} E = K^*$$

2c) Matriz de rigidez de entrepiso K_{en} considerando 6 G.L. en cada elemento

El módulo de elasticidad del marco es ^[ref. 4]

$$E = 14000 [Pc]^{0.5} = 221359.4 [kg/cm^2] = 2213594 [t/m^2] \quad \dots (a)$$

Invirtiendo la matriz de rigidez lateral k^* , calculada en 1a) se tiene

$$\begin{bmatrix} 204.2635363 & 222.9065486 & 221.3010834 & 200.9857912 \\ 222.9065486 & 376.1792058 & 368.920882 & 224.2874949 \\ 221.3010834 & 368.920882 & 394.2545156 & 223.4714766 \\ 200.9857912 & 224.2874949 & 223.4714766 & 229.6473167 \end{bmatrix} 1/E = [k^*]^{-1}$$

premultiplicando la ecuación (3.96) por $[k^*]^{-1}$

$$\{U\} = [k^*]^{-1}\{F\} \quad \dots (b)$$

o explícitamente

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 204.2635363 & 222.9065486 & 221.3010834 & 200.9857912 \\ 222.9065486 & 376.1792058 & 368.920882 & 224.2874949 \\ 221.3010834 & 368.920882 & 394.2545156 & 223.4714766 \\ 200.9857912 & 224.2874949 & 223.4714766 & 229.6473167 \end{bmatrix} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad \dots (c)$$

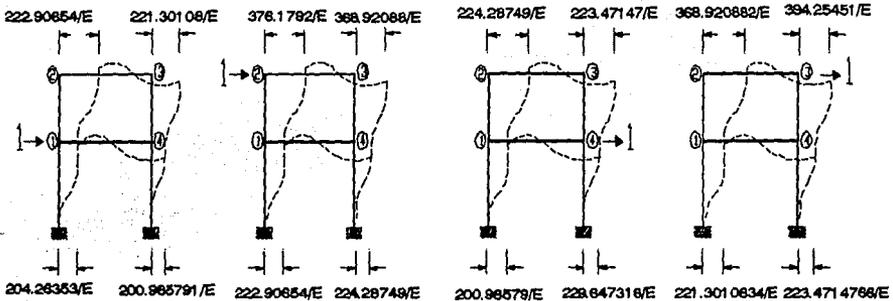


Figura 3.108 Obtención de desplazamientos causados por una fuerza unitaria, considerando deformaciones axiales de los elementos estructurales.

de las figuras 3.108a) y 3.108b), aplicando una fuerza unitaria en el nivel 2 (nodos 2 ó 3) y de la ecuación (3.99)

$$\Delta_{e2max} = (394.2545156 - 223.4714766)/E = 170.783039/E \quad \dots (d)$$

de la ecuación (3.98), (d), (a) y como $V_1 = 1$

$$k_{e2} = 1/(170.783039/E) = 12981 \text{ [t/m]} \quad \dots (e)$$

análogamente para una fuerza unitaria en el nivel 1 (nodos 1 ó 4)

$$\Delta_{e1max} = 229.6473167/E \quad \dots (f)$$

$$k_{e1} = E/229.6473167 = 9639 \text{ [t/m]} \quad \dots (g)$$

si el edificio se idealiza para efectos dinámicos mediante el sistema oscilatorio simplemente apoyado mostrado en la figura 3.108d), de la ecuación (3.100) las matrices globales de cada elemento rígido son (tomando arbitrariamente como extremo m el inferior de cada elemento)

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 \\ u_0 & k_{e1} & -k_{e1} \\ u_1 & -k_{e1} & k_{e1} \end{bmatrix} = k_1$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & k_{e2} & -k_{e2} \\ u_2 & -k_{e2} & k_{e2} \end{bmatrix} = k_2$$

y ensamblando como se indicó en 1a), la matriz de rigidez de entrepiso K_{en} es

$$u_1 \begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} \\ -k_{e2} & k_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22600 & -12961 \\ -12961 & 12961 \end{bmatrix} = K_{en} \quad \dots (b)$$

2d) Matriz de rigidez de entrepiso K_{en} despreciando las deformaciones axiales de los elementos

Invirtiendo la matriz de rigidez lateral k^* , calculada en 1b) se tiene

$$\begin{bmatrix} 225.2318577 & 261.0218985 \\ 261.0218985 & 456.7409308 \end{bmatrix} 1/E = [K^*]^{-1}$$

sustituyendo en (b)

$$\begin{bmatrix} u_{N1} \\ u_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225.2318577 & 261.0218985 \\ 261.0218985 & 456.7409308 \end{bmatrix} 1/E \begin{bmatrix} F_{N1} \\ F_{N2} \end{bmatrix} \quad \dots (i)$$

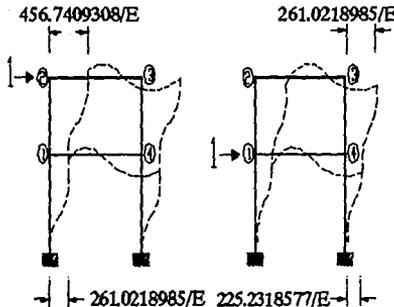


Figura 3.106c). Desplazamientos producidos por una fuerza unitaria, despreciando deformaciones axiales de los elementos estructurales.

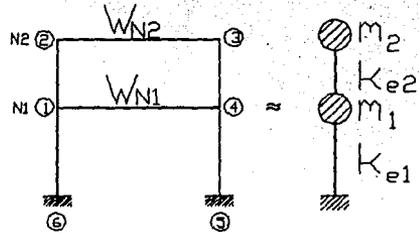


Figura 3.106d). Marco modelado como sistema de varios G.L. simplemente acoplado

De la figura 3.106c, aplicando una fuerza unitaria en el nivel 2 y de (i) y las ecuaciones (3.98) y (3.99)

$$\Delta_{e2} = (456.7409308 - 261.0218985)/E = 195.7190323/E \quad \dots (j)$$

$$k_{e2} = E/195.7190323 = 11310 \text{ [t/m]} \quad \dots (k)$$

análogamente para una fuerza unitaria en el nivel 1

$$\Delta_{e1} = 225.2318577/E \quad \dots (l)$$

$$k_{e1} = E/225.2318577 = 9828 \text{ [t/m]} \quad \dots (m)$$

sustituyendo (k) y (m) en (h)

$$\begin{matrix} \text{UN1} \\ \text{UN2} \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} \\ -k_{e2} & k_{e2} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{UN1} \\ \text{UN2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 21138 & -11310 \\ -11310 & 11310 \end{bmatrix} = K_{en} \quad \dots (n)$$

Se puede observar que la matriz de rigidez de entrepiso K_{en} depende del sistema de fuerzas aplicadas, mientras que la matriz de rigidez lateral no depende de las fuerzas aplicadas, también debe notarse que la cantidad de operaciones y el tamaño de las matrices se reduce grandemente al despreciar las deformaciones axiales de los elementos estructurales mientras que la pérdida de precisión en los resultados es poco significativa.

La matriz de rigidez lateral con 6 G.L. por elemento tiene más precisión que la matriz de rigidez lateral sin considerar las deformaciones axiales, y ésta a su vez posee más precisión que la matriz de rigidez de entrepiso, asimismo existen programas de análisis estructural como los de las referencias 12 y 25 que consideran elementos estructurales en el espacio con 12 G.L. e involucran deformaciones por flexión, fuerza axial, fuerza cortante y torsión y los resultados que arrojan pueden considerarse como exactos^[ref. 2].

III.- Para el marco del problema anterior y empleando las matrices de rigidez calculadas despreciando las deformaciones axiales de los elementos, obtener las frecuencias, períodos y formas de los modos de vibración: a) Modelando el marco para efectos dinámicos como estructura de cortante (sistema de varios G.L. simplemente acoplado); y b) Analizándolo dinámicamente como un modelo de marco plano. Los pesos de los pisos o niveles del marco son: $W_{N2} = 35 \text{ [ton]}$, $W_{N1} = 30 \text{ [ton]}$.

a) Modelación como estructura de cortante (sistema de varios G.L. sencillamente acoplado)

Del problema anterior se obtuvo el modelo mostrado en la figura 3.108d.

las masas de los pisos son

$$m_2 = W/g = 35/9.80665 = 3.569 \text{ [t-s}^2\text{/m]}$$

$$m_1 = W/g = 30/9.80665 = 3.0591 \text{ [t-s}^2\text{/m]}$$

la matriz de masas es empleando la ecuación (3.101)

$$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3.0591 & 0 \\ 0 & 3.569 \end{bmatrix} = M$$

sustituyendo la matriz de masa M anterior y la matriz de rigidez de entrapiso encontrada en el problema II (ecuación n), en la expresión (3.61) se tiene la siguiente ecuación característica

$$\begin{bmatrix} 21138 - 3.0591w^2 & -11310 \\ -11310 & 11310 - 3.569w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots(a)$$

cuyos valores característicos se obtienen con la ecuación (3.63) como

$$w^2 = (1/2)(11310/3.569 + 21138/3.0591) \pm (1/2)\{[(11310/3.569 + 21138/3.0591)^2 - 4(9828)(11310)/(3.569(3.0591))]\}^{0.5}$$

$$w^2 = 5039.41517 \pm 3900.611926 \quad \dots(b)$$

de donde

$$(w_1)^2 = 5039.41517 - 3900.611926 = 1138.803244 \quad \dots(c)$$

$$(w_2)^2 = 5039.41517 + 3900.611926 = 8940.027096 \quad \dots(d)$$

y por lo tanto

$$w_1 = 33.746 \text{ [rad/seg]} \quad \dots(e)$$

$$w_2 = 94.552 \text{ [rad/seg]} \quad \dots(f)$$

de la ecuación (3.7)

$$T_1 = 2\pi/w_1 = 0.1862 \text{ [seg]} \quad \dots(g)$$

$$T_2 = 2\pi/w_2 = 0.0665 \text{ [seg]} \quad \dots(h)$$

sustituyendo (c) en el primer renglón de (a) y tomando arbitrariamente $z_{11} = 1.0$... (i)

$$17654.287z_{11} - 11310z_{21} = 0$$

y por tanto

$$z_{21} = 1.561 \quad \dots(j)$$

sustituyendo (d) en el primer renglón de (a) y tomando $z_{12} = 1.0$... (k)

$$-6210.43689z_{12} - 11310z_{22} = 0$$

y se tiene

$$z_{22} = -0.549 \quad \dots(l)$$

graficando (i), (j), (k) y (l) se obtienen las formas de los modos de vibración de la figura 3.108e.

b) Modelación como marco plano

En el inciso 1b) del problema anterior se calculó la siguiente matriz de rigidez lateral K^*

$$\begin{bmatrix} 0.01314734041 & -0.007513545475 \\ -0.007513545475 & 0.00648332502 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 29102.87385 & -16631.93918 \\ -16631.93918 & 14351.44936 \end{bmatrix} = K^*$$

sustituyendo K^* y la matriz de masas M obtenida en a), en la ecuación (3.59)

$$\begin{bmatrix} 29102.87385 - 3.0591w^2 & -16631.93918 \\ -16631.93918 & 14351.44936 - 3.569w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots(m)$$

resolviendo su determinante característico, se tiene

$$|K - Mw^2| = (29102.87385 - 3.0591w^2)(14351.44936 - 3.569w^2) - 16631.93918^2 = 0$$

$$= 141047019.4 - 147770.6755w^2 + 10.9179279w^4 = 0$$

multiplicando ambos miembros por (10^{-6}) y tomando $y = w^2$

$$(10.9179279)(10^{-6})y^2 - 0.1477706755y + 141.0470194 = 0 \quad \dots(n)$$

de donde

$$y_{1,2} = (-b \pm [b^2 - 4ac]^{0.5})/2a$$

$$y_{1,2} = (0.1477706755$$

$$\pm [0.1477706755^2 - 4(10.9179279)(10^{-6})(141.0470194)]^{0.5}) / (2(10.9179279)(10^{-6}))$$

$$= 6767.340692 \pm 5733.938869$$

por lo que

$$(w_1)^2 = 1033.401823 \quad \dots(o)$$

$$(w_2)^2 = 12501.27956 \quad \dots(p)$$

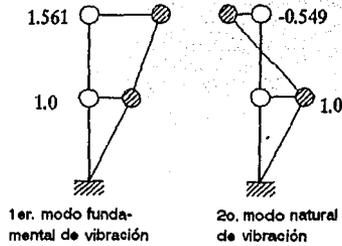


Figura 3.108e. Formas de los modos de vibración de la estructura de la figura 3.107.

$$w_1 = 32.147 \text{ [r/s]} \quad \dots (q)$$

$$w_2 = 111.809 \text{ [r/s]} \quad \dots (r)$$

y de las ecuaciones (3.7), (q) y (r)

$$T_1 = 2\pi/w_1 = 0.1955 \text{ [seg]} \quad \dots (s)$$

$$T_2 = 2\pi/w_2 = 0.0562 \text{ [seg]} \quad \dots (t)$$

sustituyendo (o) en la primera ecuación de (m) y tomando $z_{11} = 1.0$... (u)

$$25941.59433z_{11} - 16631.93918z_{21} = 0$$

y se tiene

$$z_{21} = 1.56 \quad \dots (v)$$

sustituyendo (p) en la primera ecuación de (m) y tomando $z_{12} = 1.0$... (w)

$$-9139.790452z_{12} - 16631.93918z_{22} = 0$$

de donde $z_{22} = -0.55$... (x)

que verifica los resultados obtenidos anteriormente

IV.- El marco estructural de concreto reforzado ($f'_c = 250 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$), mostrado en la figura 3.109, es parte de un edificio habitacional, si la menor dimensión de sus columnas y la mayor dimensión de sus trabes son paralelas al plano del marco, y si se desprecian las deformaciones axiales de sus elementos estructurales, determinar : a) La matriz de rigidez de la estructura; b) la matriz de rigidez lateral; c) la matriz de rigidez de entrepiso; d) las frecuencias angulares, períodos y formas de los modos de vibración si el marco es modelando como un sistema de varios G.L. sencillamente acoplado (edificio de cortante); y e) las frecuencias angulares, períodos y formas de los modos de vibración si la estructura es modelada como marco plano.

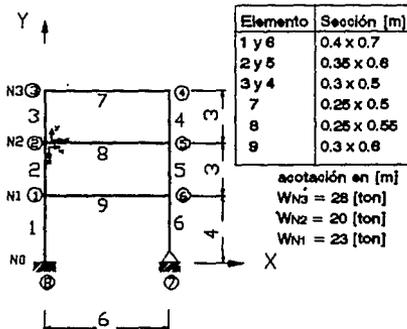


Figura 3.109. Marco plano que es componente estructural de un edificio habitacional.

a) Matriz de rigidez de la estructura

Se pueden numerar los nodos y los elementos estructurales del marco en cualquier orden como por ejemplo el indicado en la figura 3.109, en donde también se ha elegido el nodo 8 como

origen de las coordenadas globales de la estructura. Las coordenadas locales x, y de cada elemento estructural vertical se escogen en su extremo superior y para los elementos horizontales en su extremo izquierdo.

Se calcula el ángulo α que deben girar los ejes locales mencionados (en el sentido de las manecillas del reloj), para coincidir con los ejes globales y se tabulan las propiedades de los elementos estructurales generando la siguiente tabla 3.21

Tabla (3.21) de propiedades de elementos estructurales

BARRA #	m-n	α	\$	&	\$^2	&^2	\$&	L [m]	A [m ²]	I [m ⁴]	AE/L *	EI/L *	EI/L ² *	EI/L ³ *
1	1-8	270	0	-1	0	1	0	4	0.28	0.00373	0.07	9.333E-4	2.333E-4	5.833E-5
2	2-1	270	0	-1	0	1	0	3	0.21	0.00214	0.07	7.146E-4	2.382E-4	7.940E-5
3	3-2	270	0	-1	0	1	0	3	0.15	0.001125	0.05	3.75E-4	1.25E-4	4.167E-5
4	4-5	270	0	-1	0	1	0	3	0.15	0.001125	0.05	3.75E-4	1.25E-4	4.167E-5
5	5-6	270	0	-1	0	1	0	3	0.21	0.00214	0.07	7.146E-4	2.382E-4	7.94E-5
6	6-7	270	0	-1	0	1	0	4	0.28	0.00373	0.07	9.333E-4	2.333E-4	5.833E-5
7	3-4	0	1	0	1	0	0	6	0.125	0.002604	0.0208	4.34E-4	7.234E-5	1.206E-5
8	2-5	0	1	0	1	0	0	6	0.1375	0.0035	0.02292	5.777E-4	9.628E-5	1.605E-5
9	1-6	0	1	0	1	0	0	6	0.18	0.0054	0.03	9E-4	1.5E-4	2.5E-5

*Calculada en términos de E

Con los datos de la tabla 3.21 y las ecuaciones (3.89) y (3.90) se obtiene la matriz de rigidez global de las vigas y columnas, en particular para el elemento número 6 se debe incluir el grado de libertad $\theta_n = \theta_7$ del apoyo que tiene la posibilidad de girar.

$$\begin{matrix} & \theta_3 & \theta_4 \\ \theta_3 & \begin{bmatrix} 17.36E-4 & 8.68E-4 \\ 8.68E-4 & 17.36E-4 \end{bmatrix} \\ \theta_4 & \end{matrix} E = K_7$$

$$\begin{matrix} & \theta_2 & \theta_5 \\ \theta_2 & \begin{bmatrix} 23.108E-4 & 11.554E-4 \\ 11.554E-4 & 23.108E-4 \end{bmatrix} \\ \theta_5 & \end{matrix} E = K_8$$

$$\begin{matrix} & \theta_1 & \theta_6 \\ \theta_1 & \begin{bmatrix} 36E-4 & 18E-4 \\ 18E-4 & 36E-4 \end{bmatrix} \\ \theta_6 & \end{matrix} E = K_9$$

$$\begin{matrix} & u_{N1} & \theta_1 \\ u_{N1} & \begin{bmatrix} 69.996E-5 & 13.998E-4 \\ 13.998E-4 & 37.332E-4 \end{bmatrix} \\ \theta_1 & \end{matrix} E = K_{10}$$

$$\begin{matrix} & u_{N1} & \theta_6 & \theta_7 \\ u_{N1} & \begin{bmatrix} 69.996E-5 & 13.998E-4 & 13.998E-4 \\ & 37.332E-4 & 18.666E-4 \\ & & 37.332E-4 \end{bmatrix} \\ \theta_6 & & & \\ \theta_7 & & & \end{matrix} E = K_6$$

simétrica

	UN2	θ_2	UN1	θ_1	
UN2	95.28E-5	14.292E-4	-95.28E-5	14.292E-4	E = K ₂
θ_2		28.584E-4	-14.292E-4	14.292E-4	
UN1			95.28E-5	-14.292E-4	
θ_1		simétrica		28.584E-4	

	UN3	θ_3	UN2	θ_2	
UN3	50.004E-5	7.5E-4	-50.004E-5	7.5E-4	E = K ₃
θ_3		15E-4	-7.5E-4	7.5E-4	
UN2			50.004E-5	-7.5E-4	
θ_2		simétrica		15E-4	

	UN2	θ_5	UN1	θ_6	
UN1	95.28E-5	14.292E-4	-95.28E-5	14.292E-4	E = K ₅
θ_5		28.584E-4	-14.292E-4	14.292E-4	
UN1			95.28E-5	-14.292E-4	
θ_6		simétrica		28.584E-4	

	UN3	θ_4	UN2	θ_5	
UN3	50.004E-5	7.5E-4	-50.004E-5	7.5E-4	E = K ₄
θ_4		15E-4	-7.5E-4	7.5E-4	
UN2			50.004E-5	-7.5E-4	
θ_5		simétrica		15E-4	

la matriz de rigidez K_0 de la estructura para este caso es de orden $n \times n$, con $n = \#$ de nodos no restringidos + $\#$ de niveles + $\#$ G.L. de apoyos = $6 + 3 + 1 = 10$, y ordenada, particionada y ensamblada como indica la ecuación (3.92) y el proceso mencionado en el problema II, es la siguiente

	uN1	uN2	uN3	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
uN1	0.00830552	-0.0019056	0	-2.94E-5	-14.292E-4	0	0	-14.292E-4	-2.94E-5	13.998E-4
uN2	-0.0019056	0.00290568	-0.00100008	14.292E-4	6.792E-4	-7.5E-4	-7.5E-4	6.792E-4	14.292E-4	0
uN3	0	-0.00100008	0.00100008	0	7.5E-4	7.5E-4	7.5E-4	7.5E-4	0	0
θ_1	-2.94E-5	14.292E-4	0	0.0101916	14.292E-4	0	0	0	18E-4	0
θ_2	-14.292E-4	6.792E-4	7.5E-4	14.292E-4	0.0066692	7.5E-4	0	11.554E-4	0	0
θ_3	0	-7.5E-4	7.5E-4	0	7.5E-4	0.003236	8.68E-4	0	0	0
θ_4	0	-7.5E-4	7.5E-4	0	0	8.68E-4	0.003236	7.5E-4	0	0
θ_5	-14.292E-4	6.792E-4	7.5E-4	0	11.554E-4	0	7.5E-4	0.0066692	14.292E-4	0
θ_6	-2.94E-5	14.292E-4	0	18E-4	0	0	0	14.292E-4	0.0101916	18.666E-4
θ_7	13.998E-4	0	0	0	0	0	0	0	18.666E-4	37.332E-4

b) Matriz de rigidez lateral

La matriz de rigidez lateral K^* se encuentra con la ecuación (3.97). Empleando los programas de calculadora de bolsillo dados en el problema I anterior (o procediendo con cálculos a mano con el método de Gauss-Jordan y multiplicando matrices), se calcula la inversa de la matriz $[k_{22}]^{-1}$ y los siguientes productos matriciales

$$[K_{22}]^{-1} =$$

105.5124754	-25.03202733	6.887939658	-4.049944969	9.502520395	-21.98065065	10.99032533
-25.03202733	165.9451619	-43.65733772	19.37358688	-33.06447733	9.970880205	-4.985440103
6.887939658	-43.65733772	345.1840796	-97.08833902	19.41077864	-4.335588199	2.167794099
-4.049944969	19.37358688	-97.08833902	345.2162153	-43.79599272	7.548160434	-3.774080217
9.502520395	-33.06447733	19.41077864	-43.79599272	166.5003688	-27.55007548	13.77503774
-21.98065065	9.970880206	-4.335588199	7.548160434	-27.55007548	116.5375651	-58.26878256
10.99032533	-4.985440103	2.167794099	-3.774080217	13.77503774	-58.26878256	297.0011008

1/E

$$-K_{12}[K_{22}]^{-1} =$$

-0.03512319306	0.1964488957	-0.03761262128	-0.0295186974	0.1708936801	0.05922042923	-0.4045700346
-0.1067075468	-0.06693998263	0.1988922477	0.1976839557	-0.08312500232	-0.1207915235	0.06039576177
0.009518634184	-0.0814477003	-0.1678868861	-0.1677791028	-0.08178800804	0.01077496728	-0.005387483639

-0.001092031603	3.342873364E-4	2.251584428E-4
3.342873365E-4	-7.380819616E-4	1.698834138E-4
2.251584429E-4	1.698834138E-4	-3.741762729E-4

$$E = -k_{12}[k_{22}]^{-1}k_{21}$$

de donde

0.002213488397	-0.001571312664	2.251584428E-4
-0.001571312664	0.002167598038	-8.301965862E-4
2.251584429E-4	-8.301965862E-4	6.259037271E-4

$$E = k^*$$

El módulo de elasticidad del marco es^[ref. 4]

$$E = 14000 [f_o]^{0.5} = 221359.4 [kg/cm^2] = 2213594 [t/m^2] \quad \dots (a)$$

y sustituyendo E se tiene

4899.764635	-3478.248285	498.409378
-3478.248285	4798.182011	-1837.718182
498.409378	-1837.718182	1385.496735

$$= k^*$$

c) Matriz de rigidez de entreplazo

Invertiendo la matriz de rigidez lateral obtenida en b) se tiene

$$\begin{bmatrix} 7.361041329E-4 & 8.784583747E-4 & 9.003830127E-4 \\ 8.784583747E-4 & 0.001471956467 & 0.001636387307 \\ 9.003830127E-4 & 0.001636387307 & 0.002568363591 \end{bmatrix} = [k^*]^{-1} \quad \dots(b)$$

premultiplicando la ecuación (3.96) por $[k^*]^{-1}$

$$\{U\} = [k^*]^{-1} \{F\} \quad \dots(c)$$

aplicando una fuerza unitaria (1 [ton]) en el nivel 3 se obtiene de (b) y (c)

$$U_{N3} = 0.002568363591 [m] \quad \dots(d)$$

$$U_{N2} = 0.001636387307 [m] \quad \dots(e)$$

y de las ecuaciones (3.98) y (3.99) $\Delta_{e3} = U_{N3} - U_{N2} = 9.31976284E-4$ $\dots(f)$

$$K_{e3} = 1/\Delta_{e3} = 1072.99 \approx 1073 [t/m] \quad \dots(g)$$

aplicando una fuerza unitaria (1 [ton]) en el nivel 2 se obtiene de (b) y (c)

$$U_{N2} = 0.001471956467 [m] \quad \dots(h)$$

$$U_{N1} = 0.0008784583747 [m] \quad \dots(i)$$

y de las ecuaciones (3.98) y (3.99) $\Delta_{e2} = U_{N2} - U_{N1} = 5.934980923E-4$ $\dots(j)$

$$K_{e2} = 1/\Delta_{e2} = 1685 [t/m] \quad \dots(k)$$

análogamente aplicando una fuerza unitaria (1 [ton]) en el nivel 1

$$\Delta_{e1} = U_{N1} = 7.361041329E-4 [m] \quad \dots(l)$$

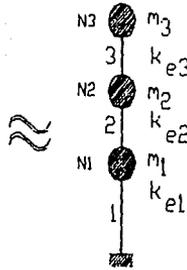
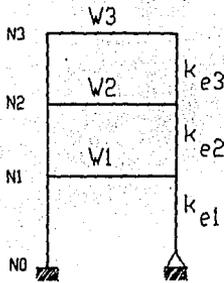
$$K_{e1} = 1359 [t/m] \quad \dots(m)$$

por tanto modelando la estructura como edificio de cortante se obtiene el sistema de 3 G.L. simplemente acoplado mostrado en la figura 3.109a, donde la matriz de rigidez global de cada elemento es según la ecuación (3.100) y tomando arbitrariamente como extremo m el extremo superior de cada elemento

$$\begin{matrix} u_1 & u_0 \\ u_1 & \begin{bmatrix} k_{e1} & -k_{e1} \\ -k_{e1} & k_{e1} \end{bmatrix} \\ u_0 \end{matrix} = K_1$$

$$\begin{matrix} u_2 & u_1 \\ u_2 & \begin{bmatrix} k_{e2} & -k_{e2} \\ -k_{e2} & k_{e2} \end{bmatrix} \\ u_1 \end{matrix} = K_2$$

$$\begin{matrix} u_3 & u_2 \\ u_3 & \begin{bmatrix} k_{e3} & -k_{e3} \\ -k_{e3} & k_{e3} \end{bmatrix} \\ u_2 \end{matrix} = K_3$$



la matriz de rigidez de entrepiso K_{en} del sistema oscilatorio es de orden $n \times n$, con $n = \#pisos = 3$

$$\begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} & 0 \\ -k_{e2} & k_{e2} + k_{e3} & -k_{e3} \\ 0 & -k_{e3} & k_{e3} \end{bmatrix} & = & K_{en} \end{matrix}$$

y sustituyendo (g), (k) y (m)

$$\begin{bmatrix} 3044 & -1685 & 0 \\ -1685 & 2758 & -1073 \\ 0 & -1073 & 1073 \end{bmatrix} = K_{en} \quad \dots (n)$$

Figura 3.109a. Marco plano modelado como un sistema simplemente acoplado.

d) Frecuencias angulares, períodos de oscilación y formas de los modos de vibración, modelando la estructura como edificio de cortante

las masas de los pisos son $m_3 = 28/9.80665 = 2.86 \text{ [t-s}^2/\text{m]}$

$m_2 = 20/9.80665 = 2.04 \text{ [t-s}^2/\text{m]}$

$m_1 = 23/9.80665 = 2.35 \text{ [t-s}^2/\text{m]}$

cuando todas las masas de un sistema oscilatorio tienen un único e igual G.L. dinámico, la matriz de masas es según la ecuación (3.101)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.35 & 0 & 0 \\ 0 & 2.04 & 0 \\ 0 & 0 & 2.86 \end{bmatrix} = M \quad \dots (o)$$

sustituyendo las matrices (n) y (o) en la ecuación característica general (3.59)

$$\begin{bmatrix} 3044 & -1685 & 0 \\ -1685 & 2758 & -1073 \\ 0 & -1073 & 1073 \end{bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} 2.35 & 0 & 0 \\ 0 & 2.04 & 0 \\ 0 & 0 & 2.86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \{0\}$$

desarrollando el determinante característico de la ecuación (3.60), se tiene por cofactores^[ref. 5] de la primera fila

$$\begin{vmatrix} 3044 - 2.35w^2 & -1685 & 0 \\ -1685 & 2758 - 2.04w^2 & -1073 \\ 0 & -1073 & 1073 - 2.86w^2 \end{vmatrix} = \{0\}$$

$$(3044 - 2.35w^2) \begin{vmatrix} 2758 - 2.04w^2 & -1073 \\ -1073 & 1073 - 2.86w^2 \end{vmatrix} + (1685) \begin{vmatrix} -1685 & -1073 \\ 0 & 1073 - 2.86w^2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (3044 - 2.35w^2) \{ (2758 - 2.04w^2)(1073 - 2.86w^2) - 1073^2 \} + 1685 \{ (-1685)(1073 - 2.86w^2) + 0 \}$$

$$= (3044 - 2.35w^2) \{ 2959334 - 10076.8w^2 + 5.8344w^4 - 1151329 \} + 1685 \{ 4816.24w^2 - 1808005 \}$$

$$= \{ 5503567220 - 34922590.95w^2 + 41440.3936w^4 - 13.71084w^6 \} + 8115364.4w^2 - 3046488425$$

$$= 0$$

de donde

$$-13.71084w^6 + 41440.3936w^4 - 26807226.55w^2 + 2457078795 = 0 \quad \dots (p)$$

multiplicando (p) por 10^{-6} y tomando $y = w^2$

$$0.00001371084y^3 - 0.0414403936y^2 + 26.80722655y - 2457.078795 = 0 \quad \dots (q)$$

iterando (q) se llega a

y	109.531	759.933	2152.991
ec(n)	-0.0018	0.0041	0.026

por tanto

$$(w_1)^2 = 109.531 \quad (w_2)^2 = 759.933 \quad (w_3)^2 = 2152.991 \quad \dots (r)$$

de donde

$$w_1 = 10.466 \text{ [rad/seg]} \quad w_2 = 27.567 \text{ [rad/seg]} \quad w_3 = 46.4003 \text{ [rad/seg]} \quad \dots (s)$$

como de la ecuación (3.7) $T = 2\pi/w$, se tiene que los períodos son

$$T_1 = 0.6003 \text{ [seg]} \quad T_2 = 0.2279 \text{ [seg]} \quad T_3 = 0.135 \text{ [seg]} \quad \dots (t)$$

sustituyendo $(w_1)^2$ dada por (r) en la ecuación característica obtenida antes y tomando

$$z_{11} = 1.0 \quad \dots (u)$$

$$2786.60215z_{11} - 1885z_{21} = 0$$

$$-1685z_{11} + 2534.55676z_{21} - 1073z_{31} = 0$$

$$-1073z_{21} + 759.74134z_{31} = 0$$

de la primera y última ecuaciones anteriores se calcula

$$z_{21} = 2786.60215/1685 = 1.653769822 \approx 1.654 \quad \dots (v)$$

$$z_{31} = 1073(1.653769822)/759.74134 = 2.335656789 \approx 2.336 \quad \dots (w)$$

cuyos valores satisfacen la segunda ecuación obtenida antes
 sustituyendo $(w_2)^2$ dada por (r) en la ecuación característica obtenida antes y tomando $z_{12} = 1.0 \dots (x)$

$$1258.15745z_{12} - 1685z_{22} = 0$$

$$-1685z_{12} + 1207.73668z_{22} - 1073z_{32} = 0$$

$$-1073z_{22} - 1100.40838z_{32} = 0$$

de donde

$$z_{22} = 1258.15745/1685 \approx 0.747 \quad \dots (y)$$

$$z_{32} = -0.728 \quad \dots (z)$$

analogamente, sustituyendo $(w_3)^2$ dada por (r) en la ecuación característica

$$-2015.52885z_{13} - 1685z_{23} = 0$$

$$-1685z_{13} - 1634.10164z_{23} - 1073z_{33} = 0$$

$$-1073z_{23} - 5084.55426z_{33} = 0$$

de donde tomando $z_{13} = 1.0 \quad \dots (aa)$

$$z_{23} = -1.196 \quad \dots (ab)$$

$$z_{33} = 0.253 \quad \dots (ac)$$

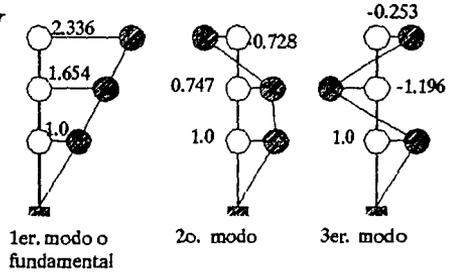


Figura 3.109b. Formas de los modos de vibración del sistema compuesto de la figura 3.109a.

La gráfica de los valores dados por (u) hasta (z) y (aa) hasta (ac) se muestra en la figura 3.109b

e) Frecuencias angulares, períodos de oscilación y formas de los modos de vibración modelando la estructura como marco plano

Usando la matriz de rigidez lateral K^* hallada en a), la matriz de masas dada por (o), y sustituyendo en la ecuación característica general (3.59) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 4899.764635 & -3478.248285 & 498.409378 \\ -3478.248285 & 4798.182011 & -1837.718182 \\ 498.409378 & -1837.718182 & 1385.496735 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.35 & 0 & 0 \\ 0 & 2.04 & 0 \\ 0 & 0 & 2.86 \end{bmatrix} w^2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \{0\}$$

desarrollando el determinante como se hizo en el inciso anterior

$$\begin{vmatrix} 4899.764635 - 2.35w^2 & -3478.248285 & 498.409378 \\ -3478.248285 & 4798.182011 - 2.04w^2 & -1837.718182 \\ 498.409378 & -1837.718182 & 1385.496735 - 2.86w^2 \end{vmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{aligned}
 & (4899.764635 - 2.35w^2) \begin{vmatrix} 4798.182011 - 2.04w^2 & -1837.718182 \\ -1837.718182 & 1385.496735 - 2.86w^2 \end{vmatrix} + \\
 & (3478.248285) \begin{vmatrix} -3478.248285 & -1837.718182 \\ 498.409378 & 1385.496735 - 2.86w^2 \end{vmatrix} + 498.409378 \begin{vmatrix} -3478.248285 & 4798.182011 - 2.04w^2 \\ 498.409378 & -1837.718182 \end{vmatrix} \\
 & = (4899.764635 - 2.35w^2) \{ (4798.182011 - 2.04w^2)(1385.496735 - 2.86w^2) - 1837.718182^2 \} \\
 & + 3478.248285 \{ (-3478.248285)(1385.496735 - 2.86w^2) + (1837.718182)(498.409378) \} \\
 & + 498.409378 \{ (-3478.248285)(-1837.718182) - (498.409378)(4798.182011 - 2.04w^2) \} \\
 & = (3270657.394 - 16549.21389w^2 + 5.8344w^4)(4899.764635 - 2.35w^2) \\
 & + 3478.248285 \{ 9947.790095w^2 - 3903165.666 \} + 498.409378 \{ 1016.755131w^2 + 4000581.203 \} \\
 & = 1.602545143(10^{10}) - 88773297.83w^2 + 67477.83922w^4 - 13.71084w^6 + 34600883.84w^8 \\
 & - 1.357617928(10^{10}) + 506760.2924w^2 + 1993927189 = 0
 \end{aligned}$$

de donde

$$-13.71084w^6 + 67477.83922w^4 - 53665653.7w^2 + 4443199339 = 0$$

multiplicando por -10^{-8} y tomando $y = w^2$

$$0.00001371084y^3 - 0.06747783922y^2 + 53.6656537y - 4443.199339 = 0 \dots (ad)$$

iterando (ad) se obtiene

y	93.6005	876.114	3951.781
ec(ad)	-0.0009	-0.0028	0.032

por lo tanto

$$(w_1)^2 = 93.6005 \qquad (w_2)^2 = 876.114 \qquad (w_3)^2 = 3951.781 \dots (ae)$$

$$w_1 = 9.675 \text{ [rad/seg]} \qquad w_2 = 29.599 \text{ [rad/seg]} \qquad w_3 = 62.863 \text{ [rad/seg]} \dots (af)$$

$$T_1 = 0.6494 \text{ [seg]} \qquad T_2 = 0.2123 \text{ [seg]} \qquad T_3 = 0.09995 \text{ [seg]} \dots (ag)$$

Comparando estos resultados y los dados por (t) del inciso d), con los obtenidos al analizar la estructura con el programa de la referencia 25, que pueden considerarse como exactos y que son $T_1 = 0.652941[s]$; $T_2 = 0.212795[s]$; $T_3 = 0.100025[s]$, se observa que la aproximación del modelo de resortes es adecuada; pero el modelo como marco plano es más preciso.

sustituyendo $(w_1)^2$ dada por (ae) en la ecuación característica obtenida antes y tomando $z_{11} = 1.0 \dots (ah)$

$$4679.80346z_{11} - 3478.248285z_{21} + 498.409378z_{31} = 0$$

$$-3478.248285z_{11} + 4607.236991z_{21} - 1837.71882z_{31} = 0$$

$$498.409378z_{11} - 1837.71882z_{21} + 1117.799305z_{31} = 0$$

de las dos primeras ecuaciones anteriores se calcula

$$z_{21} = 1.676510437 \approx 1.677 \quad \dots (ai)$$

$$z_{31} = 2.310382072 \approx 2.310 \quad \dots (aj)$$

cuyos valores satisfacen la tercera ecuación obtenida antes

sustituyendo $(w_2)^2$ dada por (ae) en la ecuación característica obtenida antes y tomando $z_{12} = 1.0 \dots (ak)$

$$2840.896735z_{12} - 3478.248285z_{22} + 498.409378z_{32} = 0$$

$$-3478.248285z_{12} + 3010.9094513z_{22} - 1837.71882z_{32} = 0$$

de donde $z_{22} = 0.713 \quad \dots (al)$

$$z_{32} = -0.725 \quad \dots (am)$$

análogamente, sustituyendo $(w_3)^2$ dada por (ae) en la ecuación característica

$$-4386.920715z_{13} - 3478.248285z_{23} + 498.409378z_{33} = 0$$

$$-3478.248285z_{13} - 3263.451229z_{23} - 1837.71882z_{33} = 0$$

de donde tomando $z_{13} = 1.0 \quad \dots (an)$

$$z_{23} = -1.222 \quad \dots (ao)$$

$$z_{33} = 0.277 \quad \dots (ap)$$

V.- El marco estructural de concreto reforzado ($f_c = 200 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$), mostrado en la figura 3.110 está contraventeado con perfiles de acero y elementos de concreto con la disposición mostrada en la citada figura, las dimensiones mayores de la sección transversal de los elementos estructurales es paralela al plano del marco, si el edificio se modela: a) Como estructura de cortante, y b) como marco plano; obtener las frecuencias angulares, períodos de oscilación y formas modales de vibración. Supóngase que los contravientos no están unidos en sus intersecciones.

a) Modelando el marco como estructura de cortante

El módulo de elasticidad del marco es^[ref. 4]

$$E = 8000[f_c]^{0.5} = 113137.1 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 1131371 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots (a)$$

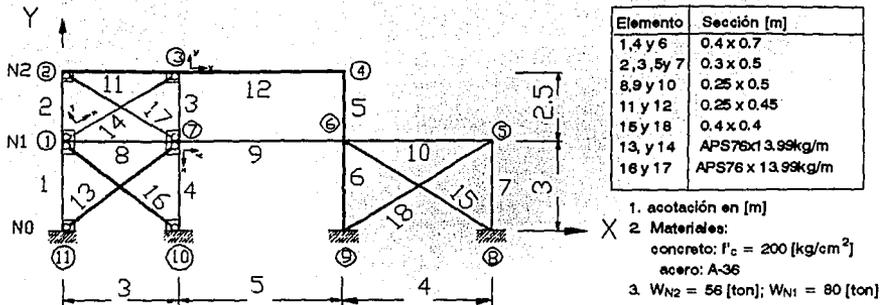


Figura 3.110. Marco estructural contraventado.

• Matriz de rigidez de la estructura

Numerando los nodos y los elementos estructurales del marco como se indica en la figura 3.110, eligiendo el nodo 11 como origen de las coordenadas globales de la estructura, y tomando las coordenadas locales x,y de cada elemento estructural como se indica en algunos de ellos, se calcula el ángulo α que deben girar los ejes locales mencionados para coincidir con los ejes globales y se tabulan las propiedades de los elementos estructurales generando la siguiente tabla 3.22.

Tabla (3.22) de propiedades de elementos estructurales

Barra	α	s	c	s^2	c^2	sc	L	A	I	AE/L	EI/L	EI/L ²	EI/L ³
# m-n							[m]	[m ²]	[m ⁴]	[t/m]	[t-m]	[ton]	[t/m]
1 1-11	270	0	-1	0	1	0	3	0.28	0.01143	105594.63	4311.7806	1437.2602	479.0867
2 2-1	270	0	-1	0	1	0	2.5	0.15	0.003125	67882.26	1414.2138	565.6855	226.2742
3 3-7	270	0	-1	0	1	0	2.5	0.15	0.003125	67882.26	1414.2138	565.6855	226.2742
4 7-10	270	0	-1	0	1	0	3	0.28	0.01143	105594.63	4311.7806	1437.2602	479.0867
5 4-6	270	0	-1	0	1	0	2.5	0.15	0.003125	67882.26	1414.2138	565.6855	226.2742
6 6-9	270	0	-1	0	1	0	3	0.28	0.01143	105594.63	4311.7806	1437.2602	479.0867
7 5-8	270	0	-1	0	1	0	3	0.15	0.003125	56568.55	1178.5115	392.8372	130.9457
8 1-7	0	1	0	1	0	0	3	0.125	0.0026	47140.46	982.0929	327.3643	109.1214
9 7-6	0	1	0	1	0	0	5	0.125	0.0026	28284.28	589.2557	117.8511	23.5702
10 6-5	0	1	0	1	0	0	4	0.125	0.0026	35355.34	736.5697	184.1424	46.0356
11 2-3	0	1	0	1	0	0	3	0.1125	0.0019	42426.41	715.9457	238.6486	79.5495
12 3-4	0	1	0	1	0	0	5	0.1125	0.0019	25455.85	429.5674	85.9135	17.1827
13 11-7	45	0.7071	0.7071	0.5	0.5	0.5	4.243	17.74E-4		8780.11			
14 1-3	39.81	0.7682	0.6402	0.59	0.41	0.492	3.905	17.74E-4		9540.08			
15 6-8	323.13	0.8	-0.6	0.64	0.36	-0.48	5	0.16	0.00213	36203.87	482.7183	96.544	19.3087

Con los datos de la tabla 3.22 y las ecuaciones (3.89) y (3.90) se obtiene la matriz de rigidez global de las vigas, columnas y contravientos.

Para los contravientos puede suponerse por ejemplo que las fuerzas laterales actúan de izquierda a derecha, a la rigidez lateral contribuyen solo los contravientos de acero que están en tensión (elementos números 13 y 14), y los contravientos de concreto que están en compresión (elemento # 15), debido a que los primeros son muy esbeltos para resistir compresiones y a que en los segundos el concreto, en teoría, no resiste tensiones^[ref. 2].

$$\begin{matrix} & \text{UN1} & \theta_1 \\ \text{UN1} & \begin{bmatrix} 5749.0404 & 8623.5612 \\ 8623.5612 & 17247.1224 \end{bmatrix} & \\ \theta_1 & & \end{matrix} = K_1$$

$$\begin{matrix} & \text{UN1} & \theta_7 \\ \text{UN1} & \begin{bmatrix} 5749.0404 & 8623.5612 \\ 8623.5612 & 17247.1224 \end{bmatrix} & \\ \theta_7 & & \end{matrix} = K_4$$

$$\begin{matrix} & \text{UN1} & \theta_6 \\ \text{UN1} & \begin{bmatrix} 5749.0404 & 8623.5612 \\ 8623.5612 & 17247.1224 \end{bmatrix} & \\ \theta_6 & & \end{matrix} = K_6$$

$$\begin{matrix} & \text{UN1} & \theta_5 \\ \text{UN1} & \begin{bmatrix} 1571.3484 & 2357.0232 \\ 2357.0232 & 4714.046 \end{bmatrix} & \\ \theta_5 & & \end{matrix} = K_7$$

$$\begin{matrix} & \text{UN2} & \theta_2 & \text{UN1} & \theta_1 \\ \text{UN1} & \begin{bmatrix} 2715.2904 & 3394.113 & -2715.2904 & 3394.113 \\ & 5656.8552 & -3394.113 & 2828.4276 \\ & & 2715.2904 & -3394.113 \\ & & & 5656.8552 \end{bmatrix} & \\ \theta_2 & & & & \\ \text{UN1} & & & & \\ \theta_1 & & \text{simétrica} & & \end{matrix} = K_2$$

$$\begin{matrix} & \text{UN2} & \theta_3 & \text{UN1} & \theta_7 \\ \text{UN2} & \begin{bmatrix} 2715.2904 & 3394.113 & -2715.2904 & 3394.113 \\ & 5656.8552 & -3394.113 & 2828.4276 \\ & & 2715.2904 & -3394.113 \\ & & & 5656.8552 \end{bmatrix} & \\ \theta_3 & & & & \\ \text{UN1} & & & & \\ \theta_7 & & \text{simétrica} & & \end{matrix} = K_3$$

$$\begin{matrix} & \text{UN2} & \theta_4 & \text{UN1} & \theta_6 \\ \text{UN2} & \begin{bmatrix} 2715.2904 & 3394.113 & -2715.2904 & 3394.113 \\ & 5656.8552 & -3394.113 & 2828.4276 \\ & & 2715.2904 & -3394.113 \\ & & & 5656.8552 \end{bmatrix} & \\ \theta_4 & & & & \\ \text{UN1} & & & & \\ \theta_6 & & \text{simétrica} & & \end{matrix} = K_5$$

$$\begin{matrix} & \text{UN0} & \text{UN1} \\ \text{UN0} & \begin{bmatrix} 4390.055 & -4390.055 \\ -4390.055 & 4390.055 \end{bmatrix} & \\ \text{UN1} & & \end{matrix} = K_{13}$$

$$\begin{matrix} & \text{UN1} & \text{UN2} \\ \text{UN1} & \begin{bmatrix} 5628.6472 & -5628.6472 \\ -5628.6472 & 5628.6472 \end{bmatrix} & \\ \text{UN2} & & \end{matrix} = K_{14}$$

$$\begin{matrix} u_{N1} & \theta_6 \\ u_{N1} & \theta_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 23253.89038 & 347.5584 \\ 347.5584 & 1930.8732 \end{bmatrix} = K_{15}$$

$$\begin{matrix} \theta_1 & \theta_7 \\ \theta_7 & \theta_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3928.3716 & 1964.1858 \\ 1964.1858 & 3928.3716 \end{bmatrix} = K_8$$

$$\begin{matrix} \theta_7 & \theta_6 \\ \theta_6 & \theta_7 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2357.0228 & 1178.5114 \\ 1178.5114 & 2357.0228 \end{bmatrix} = K_9$$

$$\begin{matrix} \theta_6 & \theta_5 \\ \theta_5 & \theta_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2946.2788 & 1473.1394 \\ 1473.1394 & 2946.2788 \end{bmatrix} = K_{10}$$

$$\begin{matrix} \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_3 & \theta_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2863.7828 & 1431.8914 \\ 1431.8914 & 2863.7828 \end{bmatrix} = K_{11}$$

$$\begin{matrix} \theta_3 & \theta_4 \\ \theta_4 & \theta_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1718.2696 & 859.1348 \\ 859.1348 & 1718.2696 \end{bmatrix} = K_{12}$$

la matriz de rigidez K_e de la estructura sin incluir las restricciones de apoyos es de orden $n \times n$, con $n = \#$ de nodos + $\#$ de niveles = $7 + 2 = 9$, y ordenada, particionada y ensamblada como indica la ecuación (3.92) y el proceso mencionado en el problema II, es la siguiente

$K_e =$

	u_{N1}	u_{N2}	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
u_{N1}	46023.56218-13774.5184	5229.4482	-3394.113	-3394.113	-3394.113	2357.0232	5577.0066	5229.4482	
u_{N2}	-13774.5184 13774.5184	3394.113	3394.113	3394.113	3394.113	0	3394.113	3394.113	
θ_1	5229.4482	3394.113	26832.3492	2828.4276	0	0	0	0	1964.1858
θ_2	-3394.113	3394.113	2828.4276	8520.638	1431.8914	0	0	0	0
θ_3	-3394.113	3394.113	0	1431.8914	10238.9076	859.1348	0	0	2828.4276
θ_4	-3394.113	3394.113	0	0	859.1348	7375.1248	0	2828.4276	0
θ_5	2357.0232	0	0	0	0	0	7660.3248	1473.1394	0
θ_6	5577.0066	3394.113	0	0	0	2828.4276	1473.1394	30138.1524	1178.5114
θ_7	5229.4482	3394.113	1964.1858	0	2828.4276	0	0	1178.5114	29189.372

• Matriz de rigidez lateral

La matriz de rigidez lateral K^* se encuentra con la ecuación (3.97). Empleando los programas de calculadora de bolsillo dados en el problema I anterior (o procediendo con cálculos a mano con el método de Gauss-Jordan y multiplicando matrices), se calcula la inversa de la matriz $[K_{22}]^{-1}$ y los siguientes productos matriciales

$$[K_{22}]^{-1}$$

3.888808164E-5	-1.336205873E-5	2.696532659E-6	-3.712736963E-7	-2.865854367E-8	1.490244255E-7	-2.884131667E-6
-1.336205873E-5	1.24889806E-4	-1.840028614E-5	2.266620215E-6	6.175494385E-8	-3.211257047E-7	2.695086879E-6
2.696532659E-6	-1.840028614E-5	1.041665799E-4	-1.27544097E-5	-3.108705768E-7	1.616526982E-6	-1.034038061E-5
-3.712736963E-7	2.266620215E-6	-1.27544097E-5	1.422733399E-4	2.605815907E-6	-1.355024257E-5	1.807962511E-6
-2.865854367E-8	6.175494386E-8	-3.108705768E-7	2.605815907E-6	1.318312749E-4	-6.700237895E-6	3.025715101E-7
1.490244255E-7	-3.211257047E-7	1.616526982E-6	-1.355024257E-5	-6.700237895E-6	3.484123669E-5	-1.573371836E-6
-2.884131667E-6	2.695086879E-6	-1.034038061E-5	1.807962511E-6	3.025715101E-7	-1.573371836E-6	3.551862044E-5

$$(-K_{12}[K_{22}]^{-1}) =$$

-0.2265044983	0.4265583679	0.2795010393	0.5092097838	-0.2667956091	-0.212662956	-0.1824113933
-0.08524713483	-0.3318357841	-0.2273531764	-0.4061802796	0.01381276594	-0.07182638218	-0.06561237901

$$\begin{bmatrix} -8078.031583 & 2015.052113 \\ 2015.052011 & -4100.27554 \end{bmatrix} = -K_{12} [K_{22}]^{-1} K_{21}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} 37945.5306 & -11759.46629 \\ -11759.46639 & 9674.24286 \end{bmatrix} = K^{\circ}$$

• Matriz de rigidez de entrepiso

invirtiendo la matriz de rigidez lateral se tiene

$$\begin{bmatrix} 4.228082436E-5 & 5.139419549E-5 \\ 5.139419593E-5 & 1.658391605E-4 \end{bmatrix} = [K^{\circ}]^{-1}$$

premultiplicando la ecuación (3.96) por $[K^{\circ}]^{-1}$

$$\{U\} = [K^{\circ}]^{-1} \{F\} \quad \dots (b)$$

aplicando una fuerza unitaria (1 [ton]) en el nivel 2 se obtiene de (b) y $[K^{\circ}]^{-1}$

$$U_{N1} = 5.139419549(10^{-5}) [m] \quad \dots (c)$$

$$U_{N2} = 1.658391605(10^{-4}) [m] \quad \dots (d)$$

y de las ecuaciones (3.98) y (3.89)

$$\Delta_{e2} = U_{N2} - U_{N1} = 1.14444965(10^{-4}) \quad \dots (e)$$

$$K_{e2} = 1/\Delta_{e2} = 8737.82 \approx 8738 [t/m] \quad \dots (f)$$

análogamente aplicando una fuerza unitaria (1 [ton]) en el nivel 1

$$\Delta_{e1} = U_{N1} = 4.228082436(10^{-5}) [m] \quad \dots(g)$$

$$K_{e1} = 23651.38 \approx 23651 [t/m] \quad \dots(h)$$

se obtiene entonces un sistema de 2 G.L. simplemente acoplado, la matriz de rigidez de entrepiso K_{en} del sistema oscilatorio es de orden $n \times n$, con $n = \#pisos = 2$, y en el problema II, ecuación (h), se encontró que dicha matriz es

$$\begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} \\ -k_{e2} & k_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32389 & -8738 \\ -8738 & 8738 \end{bmatrix} = K_{en}$$

● Frecuencias angulares, períodos de oscilación y formas de los modos de vibración

las masas del sistema oscilatorio son

$$m_1 = 80/9.80665 = 8.157729704 [t \cdot s^2/m] \quad \dots(i)$$

$$m_2 = 56/9.80665 = 5.710410793 [t \cdot s^2/m] \quad \dots(j)$$

sustituyendo (f), (h), (i) y (j) en la ecuación (3.63)

$$w^2 = (1/2)[8738/5.710410793 + 32389/8.157729704]$$

$$\pm (1/2)\{[8738/5.710410793 + 32389/8.157729704]^2 - 4(23651)(8738)/48.58398775\}^{0.5}$$

$$= 2750.266237 \pm 1768.508901$$

$$(w_1)^2 = 981.757336 \quad \dots(k)$$

$$(w_2)^2 = 4518.775138 \quad \dots(l)$$

de donde

$$w_1 = 31.333 [\text{rad/seg}] \quad \dots(m)$$

$$w_2 = 67.222 [\text{rad/seg}] \quad \dots(n)$$

y de la ecuación (3.7)

$$T_1 = 0.2005 [\text{seg}] \quad \dots(o)$$

$$T_2 = 0.09347 [\text{seg}] \quad \dots(p)$$

sustituyendo $(w_1)^2$ dada por (k) en la primera ecuación de (3.61) y tomando $z_{11} = 1.0$... (q)

$$(k_1 + k_2 - m_1 (w_1)^2)z_{11} - k_2 z_{21} = 0$$

$$(32389 - (8.157729704)(981.757336))z_{11} - 8738z_{21} = 0$$

de donde

$$z_{21} = 2.790 \quad \dots (r)$$

analogamente sustituyendo $(w_2)^2$ dada por (k) en la primera ecuación de (3.61) y tomando $z_{12} = 1.0 \dots (s)$

$$\begin{aligned} & (k_1 + k_2 - m_1(w_2)^2)z_{12} - k_2z_{22} \\ & = (32389 - (8.157729704)(4518.775136))z_{12} \\ & \quad - 8738z_{22} = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$z_{22} = -0.512 \quad \dots (t)$$

La gráfica de los valores dados por (q) hasta (t) se muestra en la figura 3.110a

b) Modelando la estructura como marco plano.

La matriz de masas es de (l) y (l) del inciso a) y la ecuación (3.101) $\begin{bmatrix} 8.157729704 & 0 \\ 0 & 5.710410793 \end{bmatrix} = \mathbf{M}$

Usando la matriz de rigidez lateral \mathbf{K}^* hallada en a), la matriz de masas \mathbf{M} , y sustituyendo en la ecuación característica general (3.59) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 37945.5306 & -11759.46629 \\ -11759.46629 & 9674.24286 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8.157729704 & 0 \\ 0 & 5.710410793 \end{bmatrix} w^2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \{0\}$$

desarrollando el determinante característico dado por la ecuación (3.60)

$$\begin{aligned} |\mathbf{K} - w^2\mathbf{M}| &= (37945.5306 - 8.157729704w^2)(9674.24286 - 5.710410793w^2) - 11759.46639^2 \\ &= 228809228.7 - 295604.4258w^2 + 46.58398775w^4 = 0 \end{aligned}$$

aplicando la solución de las ecuaciones cuadráticas

$$w_{1,2}^2 = (-b \pm [b^2 - 4ac]^{0.5})/2a$$

$$\begin{aligned} w_{1,2}^2 &= (295604.4258 \pm [295604.4258^2 - 4(46.58398775)(228809228.7)]^{0.5})/(2(46.58398775)) \\ &= 3172.811518 \pm 2270.457204 \end{aligned}$$

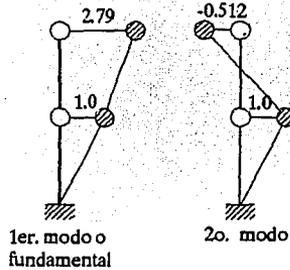


Figura 3.110a. Formas de los modos de vibración de la estructura de la figura 3.110.

de donde

• Frecuencias angulares, periodos de oscilación y formas de los modos de vibración

$$(w_1)^2 = 902.354314 \quad \dots (u)$$

$$(w_2)^2 = 5443.268722 \quad \dots (v)$$

$$w_1 = 30.039 \text{ [rad/seg]} \quad \dots (w)$$

$$w_2 = 73.779 \text{ [rad/seg]} \quad \dots (x)$$

$$T_1 = 0.2092 \text{ [seg]} \quad \dots (y)$$

$$T_2 = 0.08516 \text{ [seg]} \quad \dots (z)$$

Comparando estos resultados y los dados por (m), (n), (o) y (p) del inciso a), con los obtenidos al analizar la estructura con el programa de la referencia [25], que pueden considerarse como exactos y que son $T_1 = 0.211349[s]$; $T_2 = 0.081077[s]$, se observa que la aproximación del modelo de resortes es adecuada; pero el modelo como marco plano tiene más precisión.

sustituyendo $(w_1)^2$ dada por (u) en la primera ecuación característica obtenida antes y tomando $z_{11} = 1.0$... (aa)

$$30584.36801z_{11} - 11759.46829z_{21} = 0$$

de donde $z_{21} = 2.6008$... (ab)

sustituyendo $(w_2)^2$ dada por (v) en la primera ecuación característica obtenida antes y tomando $z_{12} = 1.0$... (ac)

$$-8458.18434z_{12} - 11759.46028z_{22} = 0$$

de donde $z_{22} = -0.549$... (ad)

VI.- Si en el marco del problema IV anterior, actúa un sistema de fuerzas estáticas solo por un instante, de tal manera que sus masas sufren desplazamientos iniciales de $x_1(0) = 3$ [cm], $x_2(0) = 5$ [cm], $x_3(0) = 7$ [cm], después de lo cual al desaparecer esta fuerza el sistema vibra libremente, determinar las ecuaciones de respuesta dinámica de desplazamientos del sistema oscilatorio.

En el problema IV pasado, se obtuvieron los siguientes vectores de formas de los modos de vibración $\{z\}$, matriz de masas M y matriz de rigidez lateral k

$$\{z\}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.677 \\ 2.310 \end{bmatrix}$$

$$\{z\}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.713 \\ -0.725 \end{bmatrix}$$

$$\{z\}_3 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.222 \\ 0.277 \end{bmatrix}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} 4899.764635 & -3478.248285 & 498.409378 \\ -3478.248285 & 4798.182011 & -1837.718182 \\ 498.409378 & -1837.718182 & 1385.496735 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 2.35 & 0 & 0 \\ 0 & 2.04 & 0 \\ 0 & 0 & 2.86 \end{bmatrix}$$

• NORMALIZACION DE LOS MODOS RESPECTO A LA MATRIZ DE MASAS M

De la ecuación (3.69) para el modo $\{z\}_1$

$$\{z\}_1^T M \{z\}_1 = (N_1)^2 \quad \dots(a)$$

y sustituyendo vectores, matrices y usando los programas de multiplicación de matrices para calculadora de bolsillo dados en el problema I anterior

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 1.677 & 2.31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.35 & 0 & 0 \\ 0 & 2.04 & 0 \\ 0 & 0 & 2.86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.677 \\ 2.310 \end{bmatrix} = 23.34839716 = (N_1)^2$$

de donde

$$N_1 = 4.832017918 \quad \dots(b)$$

y de la ecuación (3.70) se obtiene el modo 1 normalizado

$$\{r\}_1 = (1/N_1)\{z\}_1 = \begin{bmatrix} 0.20695 \\ 0.34706 \\ 0.47806 \end{bmatrix} \quad \dots(c)$$

procediendo de la misma manera para los demás modos se obtiene

$$N_2 = 2.211415895$$

$$N_3 = 2.369756169$$

$$\{r\}_2 = \begin{bmatrix} 0.45220 \\ 0.32242 \\ -0.32784 \end{bmatrix} \quad \dots(d) \quad \{r\}_3 = \begin{bmatrix} 0.42198 \\ -0.51566 \\ 0.11689 \end{bmatrix} \quad \dots(e)$$

la matriz de modos normalizados R es entonces de (c), (d) y (e)

$$R = \begin{bmatrix} 0.20695 & 0.45220 & 0.42198 \\ 0.34706 & 0.32242 & -0.51566 \\ 0.47806 & -0.32784 & -0.11689 \end{bmatrix} \quad \dots(f)$$

•TRANSFORMACION DEL SISTEMA DE 3 G.L. EN 3 SISTEMAS DE 1 G.L.

como los modos están normalizados respecto a \mathbf{M} , de la ecuación (3.74) se tiene

$$[M_j] = \{r\}^T \mathbf{M} \{r\} = 1.0$$

$$[M_1] = [M_2] = [M_3] = 1.0 \quad \dots(g)$$

de la ecuación (3.75) con $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}$

$$[K_1] = \{r\}^T \mathbf{K} \{r\}_1 \quad \dots(h)$$

$$\text{efectuando primero } \{r\}^T \mathbf{K} = \{45.11502867 \quad 66.89401206 \quad 127.6979177\} \quad \dots(i)$$

$$[K_1] = 93.60005754 \quad \dots(j)$$

procediendo análogamente con los modos 2 y 3

$$\{r\}^T \mathbf{K} = \{930.8182255 \quad 576.6434983 \quad -821.3576251\}$$

$$[K_2] = \{r\}^T \mathbf{K} \{r\}_2 = 876.1112821 \quad \dots(k)$$

$$\{r\}^T \mathbf{K} = \{3919.455264 \quad -4156.792625 \quad 1319.90728\}$$

$$[K_3] = \{r\}^T \mathbf{K} \{r\}_3 = 3951.707377 \quad \dots(l)$$

sustituyendo (g), (j), (k) y (l) en la ecuación (3.73)

$$f_1 + 93.60005754f_1 = 0 \quad \dots(m)$$

$$f_2 + 876.1112821f_2 = 0 \quad \dots(n)$$

$$f_3 + 3951.707377f_3 = 0 \quad \dots(o)$$

comparando (m), (n) y (o) con la ecuación (3.70)

$$w_1^2 = 93.600 \quad w_2^2 = 876.111 \quad w_3^2 = 3951.707 \quad \dots(p)$$

se comprueba que estos valores concuerdan con los obtenidos en el problema IV pasado

de la ecuación (3.78), los coeficientes de participación del modo 1 son

$$c_1 = \{r\}^T \mathbf{M} \{x_0\} / [M_1] \quad \dots(q)$$

$$\text{con } \{x_0\} = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\{r\}^T \mathbf{M} = \{0.4863325 \quad 0.7080024 \quad 1.3672516\} \quad \dots(r)$$

$$\{r\}^T_1 \mathbf{M} \{x_0\} = 0.145697707 \quad \dots (s)$$

sustituyendo (g) y (s) en (q)

$$c_1 = 0.145697707 \quad \dots (t)$$

análogamente

$$\begin{aligned} \{r\}^T_2 \mathbf{M} &= \{1.06267 \quad 0.6577368 \quad -0.9376224\} \\ c_2 &= -8.6663(10^{-4}) \quad \dots (u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{r\}^T_3 \mathbf{M} &= \{0.991653 \quad -1.0519464 \quad 0.3343054\} \\ c_3 &= 5.53648(10^{-4}) \quad \dots (v) \end{aligned}$$

por tanto la respuesta en función del tiempo $f(t)$ para las ecuaciones (m), (n) y (o), que son ecuaciones del movimiento libre, está dada para cada modo j por la ecuación (3.77)

$$f_j(t) = c_j f_j(t) = c_j \cos \omega_j t + [c'_j / \omega_j] \sin \omega_j t$$

cuando las cargas estáticas dejan de actuar, las masas del sistema alcanzan sus desplazamientos máximos $\{x_0\}$ y deben detenerse para invertir sus desplazamientos e iniciar la oscilación libre, y para ese instante $t = 0$, $x'_0 = 0$ y por tanto $c'_j = 0$, es decir la velocidad vale cero.

las respuestas de 1 G.L. serán según la ecuación (3.77), (t), (u) y (v)

$$f_1 = c_1 f_1(t) = 0.145697707 \cos 9.875t \quad \dots (w)$$

$$f_2 = c_2 f_2(t) = -8.6663(10^{-4}) \cos 29.599t \quad \dots (x)$$

$$f_3 = c_3 f_3(t) = 5.53648(10^{-4}) \cos 62.863t \quad \dots (y)$$

finalmente sustituyendo (w), (x), (y) y (f) en la ecuación (3.72), se obtienen las respuestas dinámicas de desplazamientos del sistema de 3 G.L.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20695 & 0.4522 & 0.42198 \\ 0.34706 & 0.32242 & -0.51566 \\ 0.47806 & -0.32784 & 0.11689 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1457 \cos 9.675t \\ -8.6663(10^{-4}) \cos 29.599t \\ 5.53648(10^{-4}) \cos 62.863t \end{bmatrix}$$

3.3.1.8.- PROBLEMAS PROPUESTOS

I.- Para el marco de concreto reforzado ($F_c = 200 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$) mostrado en la figura 3.111, y cuya dimensión mayor de sus elementos estructurales es paralela al plano del marco, determinar considerando 3 G.L. estáticos en cada extremo de dichos elementos: a) La matriz de rigidez de la estructura; y b) la matriz de rigidez lateral.

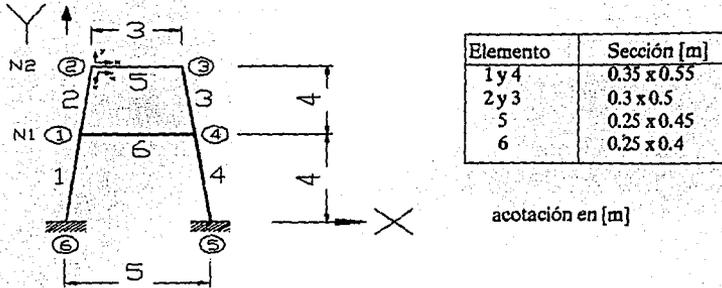


Figura 3.11L. Marco plano de dos niveles

Solución en [ton,m,seg]: a) Matriz de rigidez de la estructura K_0

	u1	u2	u3	u4	v1	v2	v3	v4
u1	31389.16471	-1284.608471	0	-28284.3	11620.01232	-5098.45776	0	0
u2	-1284.608471	43711.00847	-42426.4	0	-5098.45776	5098.45776	0	0
u3	0	-42426.4	43712.78391	-1286.383913	0	0	-5105.450401	5105.450401
u4	-28284.3	0	-1286.383913	31399.43268	0	0	5105.450401	-11635.94941
v1	11620.01232	-5098.45776	0	0	94962.16372	-41464.20613	0	-282.84
v2	-5098.45776	5098.45776	0	0	-41464.20613	42418.79413	-954.588	0
v3	0	0	-5105.450401	5105.450501	0	-954.588	42418.82145	-41464.23345
v4	0	0	5105.450401	-11635.94941	-282.84	0	-41464.23345	94962.23345
θ_1	716.176648	1295.457573	0	0	476.2270707	-161.8179645	0	-565.686
θ_2	-1295.457573	1295.457573	0	0	161.8179645	1270.076036	-1431.894	0
θ_3	0	0	1295.457573	-1295.457573	0	1431.894	-1269.854099	-162.0399012
θ_4	0	0	1295.457573	716.176648	565.686	0	162.0399012	-476.1043759

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	
716.176648	-1295.457573	0	0	u1
1295.457573	1295.457573	0	0	u2
0	0	1295.457573	1295.457573	u3
0	0	-1295.457573	716.176648	u4
476.2270707	161.8179645	0	565.686	v1
-161.8179645	1270.076036	1431.894	0	v2
0	-1431.894	-1269.854099	162.0399012	v3
-565.686	0	-162.0399012	-476.1043759	v4
10464.72	1754.18	0	754.24	θ_1
1754.18	6372.16	1431.9	0	θ_2
0	1431.9	6372.16	1754.18	θ_3
754.24	0	1754.18	10464.72	θ_4

= K_0

b) Matriz de rigidez lateral K^*

$$\begin{bmatrix} 29562.44921 & -497.0127684 & -78.12991595 & -28177.69909 \\ -497.0127684 & 42762.42986 & -42318.54368 & -78.07828148 \\ -78.12991595 & -42318.54368 & 42762.54158 & -497.0887132 \\ -28177.69909 & -78.07828105 & -497.0887133 & 29562.79797 \end{bmatrix} = K^*$$

II.- Para el marco rígido de acero estructural A-36 mostrado en la figura 3.112, determinar, despreciando las deformaciones axiales de sus elementos estructurales y usando un modelo de marco plano para efectos dinámicos: a) La matriz de rigidez lateral; b) las frecuencias angulares de vibración; c) los períodos de oscilación; y d) las formas de los modos de vibración.

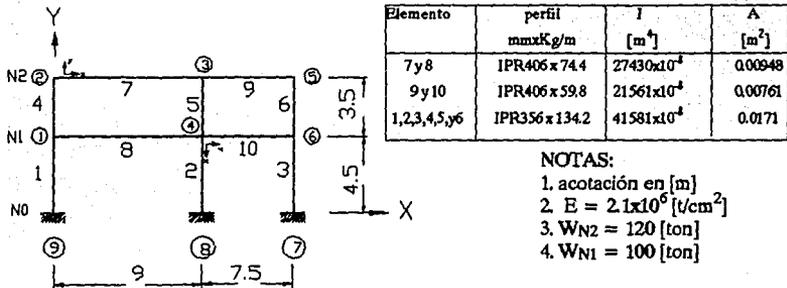


Figura 3.112. Marco plano de acero estructural.

Solución en [ton,m,seg]: a) Matriz de rigidez lateral K^*

$$\begin{bmatrix} 7036.248796 & -3506.004231 \\ -3506.004232 & 2460.124149 \end{bmatrix} = K^*$$

- b) $w_1 = 6.905$ [r/s]; $w_2 = 29.041$ [r/s];
 c) $T_1 = 0.9099$ [seg]; $T_2 = 0.2164$ [seg];
 d) $z_{11} = 1.0, z_{21} = 1.868, z_{12} = 1.0, z_{22} = -0.4461$.

III.- Usando un modelo dinámico sencillamente acoplado (edificio de cortante), determinar para la estructura del problema I anterior, cuyos niveles 1 y 2 pesan 47 y 40 [ton], respectivamente: a) Las frecuencias naturales de vibración; b) los períodos de oscilación; c) las formas de los modos de vibración; y d) las ecuaciones de respuesta dinámica de desplazamientos si la estructura vibra libremente desde un desplazamiento máximo inicial estático de los pisos 1 y 2 de 5 y 10 [cm], respectivamente.

Solución en [ton,m,seg]: a) $w_1 = 9.624$ [r/s]; $w_2 = 22.108$ [r/s]; b) $T_1 = 0.6529$ [seg], $T_2 = 0.2842$ [seg]; c) $z_{11} = 1.0$, $z_{21} = 2.176$, $z_{12} = 1.0$, $z_{22} = -0.54$; d) $x_1 = 0.04685\cos 9.624t + 0.00323\cos 22.108t$, $x_2 = 0.101935\cos 9.624t - 0.00174\cos 22.108t$.

IV.- El marco mostrado en la figura 3.113, tiene su dimensión menor de la sección transversal de las columnas, y su dimensión mayor de la sección transversal de las vigas, paralelas al plano del marco y forma parte de una estructura que puede ser modelada como un edificio de cortante. Determinar: a) La matriz de rigidez de entrepiso; b) las frecuencias naturales de vibración; c) los periodos de oscilación; y d) las formas de los modos de vibración.

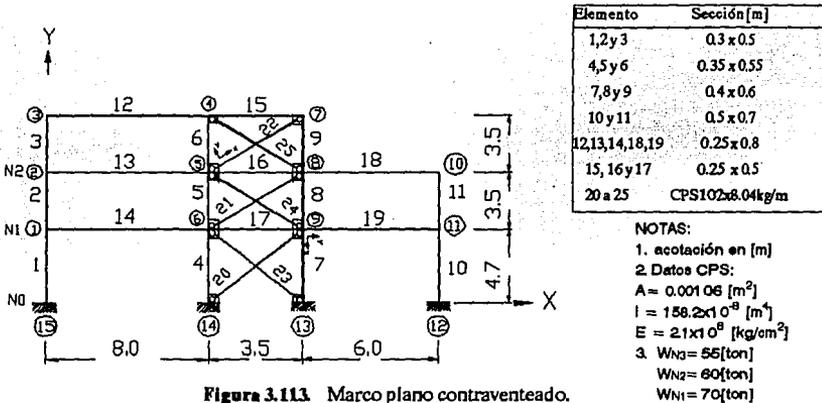


Figura 3.113 Marco plano contraventeado.

Solución en [ton,cm,seg]: a) Matriz de rigidez de entrepiso K_{en}

$$\begin{bmatrix} 105.45 & -63.05 & 0 \\ -63.05 & 109.49 & -46.44 \\ 0 & -46.44 & 46.44 \end{bmatrix} = K_{en}$$

b) $w_1 = 12.618$ [r/s], $w_2 = 33.731$ [r/s], $w_3 = 52.985$ [r/s]; c) $T_1 = 0.4979$ [seg], $T_2 = 0.1863$ [seg], $T_3 = 0.1168$ [seg]; d) $z_{11} = 1.0$, $z_{21} = 1.492$, $z_{31} = 1.847$, $z_{12} = 1.0$, $z_{22} = 0.384$, $z_{32} = -1.027$, $z_{13} = 1.0$, $z_{23} = -1.495$, $z_{33} = 0.628$.

V.- Empleando la matriz de rigidez lateral determinar para el marco mostrado en la figura 3.114 que tiene la dimensión menor de la sección transversal de las columnas, y la dimensión mayor de la sección transversal de las vigas, paralelas al plano del marco: a) Las frecuencias naturales de vibración; b) los periodos de oscilación; c) las formas de los modos de vibrar; y d) las ecuaciones de respuesta dinámica de desplazamientos si actúa un sistema de fuerzas estáticas sólo por un instante, desplazando los pisos 3,

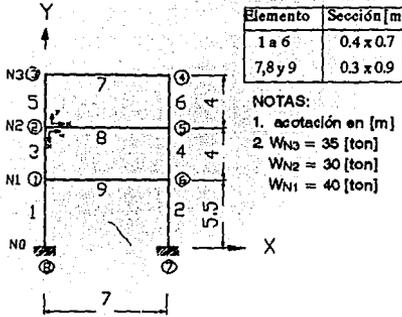


Figura 3.114. Marco plano de 3 niveles.

2 y 1 lateralmente en distancias de 14, 10 y 7 [cm], respectivamente.

Solución en [ton, m, seg]:

a) $w_1 = 9.1198$ [r/s], $w_2 = 27.916$ [r/s],
 $w_3 = 52.5794$ [r/s]; b) $T_1 = 0.689$ [seg],
 $T_2 = 0.225$ [seg], $T_3 = 0.1195$ [seg]; c) $z_{11} = 1.0$,
 $z_{21} = 1.393$, $z_{31} = 1.631$, $z_{12} = 1.0$, $z_{22} = 0.185$,
 $z_{32} = -0.836$, $z_{13} = 1.0$, $z_{23} = -2.245$, $z_{33} = 0.942$;

d) $x_1 = 0.0783344 \cos 9.1198t - 0.011338221 \cos 27.916t + 0.003066876 \cos 52.5794t$,
 $x_2 = 0.1091284 \cos 9.1198t - 0.002097587 \cos 27.916t - 0.006884922 \cos 52.5794t$,
 $x_3 = 0.1277778 \cos 9.1198t + 0.009478843 \cos 27.916t - 0.002888902 \cos 52.5794t$.

3.3.2.- METODOS NUMERICOS PARA OBTENER FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRAR.

El procedimiento hasta ahora seguido para encontrar los valores característicos, frecuencias angulares y formas de los modos de vibración de un sistema de varios G.L., consistente en efectuar la solución del determinante característico y el producto matricial de la ecuación característica, es muy laborioso y resulta impráctico en sistemas de más de 3 G.L.

Se han desarrollado métodos numéricos de aproximaciones sucesivas para resolver fácilmente estos problemas. Los más comúnmente usados en los programas de cómputo que trabajan con modelos de estructuras reticulares tridimensionales o planos, son el

método de Jacobi o de diagonalización por rotaciones sucesivas, y el método de iteración del subespacio o método de iteración inversa^[ref. 22], mientras que para los modelos estructurales más simples como los sencillamente acoplados (de resortes), se utilizan el método de Newmark y el método de Holzer.

3.3.2.1.- METODO DE NEWMARK

Las bases de este método suponen que cada masa de un sistema oscilatorio simplemente acoplado se mueve en movimiento armónico simple definido por $x = x_0 \cos wt$ ó $x = x_0 \sin wt$ (x_0 es la amplitud del desplazamiento), estando la aceleración dada por $x'' = -w^2 x_0 \cos wt = -w^2 x$ ó $x'' = -w^2 x_0 \sin wt = -w^2 x$, y la fuerza de inercia en cada masa será $F_i = m x'' = -m w^2 x$.

La fuerza restauradora de cada resorte es $P_r = k\Delta_r$, donde k es la rigidez de entrepiso expresada como la fuerza cortante V necesaria para producir un desplazamiento unitario entre dos niveles consecutivos Δ_r , es decir $k = V/\Delta_r$.

Entonces las fuerzas a que se verá sujeta cada masa dependerán solo de x y de w^2 .

Este método es aplicable para el cálculo de la primera forma del modo de vibrar o forma fundamental de sistemas sencillamente acoplados (de resortes) y consta de los siguientes pasos:

a) Suponer una configuración deformada de la estructura (forma del modo), es decir un vector de desplazamientos $\{x\}$ de cada masa, usualmente se suponen valores iguales al número de piso o nivel (numerados de abajo hacia arriba).

b) Calcular la fuerza de inercia en cada masa acorde al desplazamiento supuesto y relativa a la frecuencia angular fundamental desconocida con

$$F/w^2 = mx \quad \dots (3.102)$$

c) Obtener la fuerza cortante en cada entrepiso relativa a la frecuencia angular fundamental desconocida V/w^2 , para lo cual se idealiza la estructura como una viga en voladizo, es decir los cortantes en cada entrepiso estarán dados por la suma acumulada de fuerzas de inercia.

d) Calcular las deformaciones de entrepiso relativas a la frecuencia angular fundamental desconocida, con

$$\Delta_r/w^2 = (V/w^2)/k \quad \dots (3.103)$$

e) Obtener la acumulación de deformaciones de entrepiso en cada piso o nivel (deformación total respecto a la base)

f) Calcular el valor característico w^2 para cada masa, con

$$w^2 = x/(\Delta/w^2) \quad \dots (3.104)$$

si todos estos valores característicos son iguales en todos los pisos o niveles, la configuración obtenida es la forma del modo fundamental buscado, si son diferentes entonces se calcula un nuevo vector de desplazamientos de las masas mejorado, con

$$(\Delta w^2)/(\Delta/w^2)_1 = x_1 \quad \dots (3.105)$$

x_1 -componente del vector mejorado o nuevo vector $\{x\}$ para la masa i

y se repite el proceso hasta encontrar el valor de la frecuencia angular con la aproximación deseada.

Se pueden tabular los datos obtenidos con ayuda de la tabla 3.23

Tabla 3.23. Método de Newmark

x	F/w^2	V/w^2	Δ_r/w^2	Δ/w^2	w^2

El método puede fácilmente ser programado en una calculadora de bolsillo con la codificación indicada al final del problema I del próximo inciso 3.3.2.4. Aunque puede emplearse este método para la obtención de las frecuencias angulares superiores mediante un proceso denominado limpia^[ref. 26], es mejor el empleo para este caso de el método de Holzer que se describe a continuación.

3.3.2.2- METODO DE HOLZER

Este método se basa en las mismas consideraciones indicadas para el método de Newmark, es adecuado para encontrar los valores característicos superiores de sistemas simplemente acoplados (de resortes), estos valores pueden obtenerse con los siguientes pasos

a) Suponer un valor arbitrario de w^2 mayor al fundamental

b) Proponer la amplitud del desplazamiento x_1 que es igual al desplazamiento relativo a la base Δr_1 de la masa m_1 , usualmente es conveniente tomarlo igual a 1.0

c) Calcular la fuerza cortante V_i en el entrepiso o resorte 1, y la fuerza de inercia F_i en la masa o nivel 1 con

$$V_i = K_i \Delta r_i \quad \dots(3.106)$$

$$F_i = m_i w^2 x_i \quad \dots(3.107)$$

d) Por equilibrio de fuerzas obtener la fuerza cortante V_{i+1} en el resorte superior con

$$V_{i+1} = V_i - F_i \quad \dots(3.108)$$

e) Calcular el desplazamiento relativo o de entrepiso del resorte mencionado con

$$\Delta r_{i+1} = V_{i+1} / K_{i+1} \quad \dots(3.109)$$

f) Hallar el desplazamiento total o absoluto x_{i+1} de la masa o nivel superior $i+1$ y la fuerza de inercia F_{i+1} correspondiente con

$$x_{i+1} = x_i + \Delta r_{i+1} \quad \dots(3.110)$$

$$F_{i+1} = m_{i+1} w^2 x_{i+1} \quad \dots(3.111)$$

g) Repetir los pasos d) a f) hasta completar todas las masas

h) Al aplicar la ecuación (3.108) a la última masa se obtiene un residuo que indica el grado de aproximación del valor característico w^2 propuesto. Un cambio de signo en el valor de los residuos de dos iteraciones sucesivas indica que existe una raíz o valor característico entre los correspondientes valores propuestos de esos residuos, por lo que se deben probar valores que hagan que el residuo tienda a cero. Cuando los residuos son pequeños, una aproximación más precisa al valor característico buscado se obtiene con la siguiente expresión

$$w^2 = w^2 \Sigma V \Delta r / \Sigma F x \quad \dots(3.112)$$

w^2 -nuevo valor característico más preciso

$\Sigma V \Delta r$ -sumatoria de los productos $V \Delta r$ de todos los entrepisos o resortes del sistema estructural.

$\Sigma F x$ -sumatoria de los productos $F x$ de todas las masas o niveles del sistema estructural.

i) Si se satisface el equilibrio entre la fuerza cortante V del último resorte y la fuerza de inercia F de la última masa el residuo será igual a cero, y el valor característico w^2 y las amplitudes x corresponden a un vector de forma del modo de vibración $\{z\}$.

La tabla 3.24 es útil para tabular los datos obtenidos.

x	F	V	Δr	w^2 (propuesta)

Tabla 3.24. Método de Holzer.

La codificación en lenguaje basic del programa para calculadora de bolsillo de este método se indica en el problema I del próximo inciso 3.3.2.4.

3.3.2.3.- METODO DE ITERACION INVERSA

Este método puede ser aplicado a cualquier tipo de matrices de masas y rigideces y no solamente a sistemas sencillamente acoplados, además de que puede ser empleado para calcular cualquier forma del modo de vibrar, aunque por su manera de proceder trabajando con operaciones matriciales, es adecuado para emplearse en programas de computadora.

Este procedimiento se basa en que la ecuación característica general dada por la expresión (3.59), puede escribirse como (ver ecuación (s) del problema I, inciso 3.3.1.7.)

$$K\{z\} = M\{z\}w^2 \quad \dots(3.113)$$

Los pasos a seguir para la aplicación del método son

a) Suponer arbitrariamente un valor del vector de desplazamientos de las masas $\{x\}$ (es decir se supone arbitrariamente un valor de $w^2\{z\}$), usualmente se suponen valores iguales al número de piso o nivel (numerados de abajo hacia arriba).

b) Calcular el producto vectorial

$$\{x^*\} = M\{x\} \quad \dots(3.114)$$

M-matriz de masa

c) Calcular los valores de un vector $\{y\}$ resolviendo el sistema de ecuaciones expresado por

$$K\{y\} = \{x^*\} \quad \dots(3.115)$$

K-matriz de rigidez

La ecuación (3.115) es otra forma de expresar la ecuación (3.113).

d) Se repite el ciclo indicado desde a) a c) con un vector $\{x\}$ mejorado proporcional a $\{y\}$ usando

$$\{x\} = \{y\}/y_1 \quad \dots(3.116)$$

y_1 -desplazamiento de la masa 1

Esto se efectúa hasta que el valor del vector $\{y\}$ del ciclo iterativo i sea lo suficientemente aproximado al obtenido en el $i-1$, entonces $\{x\}$ representa una forma del modo de vibración o

vector de forma modal $\{z\}$ y el valor característico w^2 correspondiente puede obtenerse con:

$$w^2 = \{y\}^T \{x^*\} / (\{y\}^T M \{y\}) \quad \dots(3.117)$$

e) Los modos superiores al fundamental se calculan con los mismos pasos a) a f), suponiendo un valor inicial del vector de desplazamientos $\{x\}$ igual a 1 en todas las masas, y usando en lugar de la matriz de rigidez K la siguiente matriz afectada por un "corrimiento" producido por la introducción de una constante arbitraria μ y expresada como

$$K' = K - \mu M \quad \dots(3.118)$$

entonces el método convergerá hacia el valor característico más cercano a μ ; dicho valor es calculado en este caso con

$$w^2 = \mu + \{y\}^T \{x^*\} / (\{y\}^T M \{y\}) \quad \dots(3.119)$$

Los datos obtenidos pueden ser tabulados en la tabla 3.25.

Tabla 3.25. Método de Iteración Inversa.

Niv.	$\{x\}$	$\{x^*\}$	$\{y\}$

La programación del método en calculadora de bolsillo se indica al final del problema III del inciso 3.3.2.4.

3.3.2.4.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Para el sistema de 3. G.L. simplemente acoplado de la figura 3.115, que representa el modelo dinámico de la estructura de cortante cuyas características se calcularon en el problema resuelto IV del inciso 3.3.1.7., determinar por el método de Newmark y Holzer las frecuencias angulares, períodos de oscilación y formas de los modos de vibración.

Aplicando los pasos del Método de Newmark, se obtiene la tabla 3.26 y forma del modo 1

NIV	x	F/w ²	V/w ²	Δ_r/w^2	Δ/w^2	w ²
N3	3	8.58			0.02657	112.93905
EN3			8.58	0.008		
N2	2	4.08			0.01856	107.74121
EN2			12.66	0.007513		
N1	1	2.35			0.01105	90.49774
EN1			15.01	0.01105		
N3	2.405	6.87694			0.02184	110.11905
EN3			6.87694	0.00641		
N2	1.68	3.4272			0.01543	108.87881
EN2			10.30414	0.00612		
N1	1.0	2.35			0.00931	107.41139
EN1			12.65414	0.00931		

NIV	x	F/w ²	V/w ²	Δ_T/w^2	Δ/w^2	w ²
N3	2.346	6.70956			0.02139	109.67742
EN3			6.70956	0.00625		
N2	1.657	3.38028			0.01514	109.44518
EN2			10.08984	0.00599		
N1	1	2.35			0.00915	109.28962
EN1			12.43984	0.00915		
N3	2.338	6.68668			0.02133	109.61088
EN3			6.68668	0.00623		
N2	1.655	3.3762			0.01510	109.602649
EN2			10.06288	0.00597		
N1	1.0	2.35			0.00913	109.52903
EN1			12.41288	0.00913		

Tabla 3.26

de esta tabla y de la ecuación (3.7), se tiene

$$(w_1)^2 = 109.6$$

$$w_1 = 10.469 \text{ [r/s]}$$

$$T_1 = 0.6002 \text{ [seg]}$$

$$z_{11} = 1.0$$

$$z_{21} = 1.655$$

$$z_{31} = 2.338$$

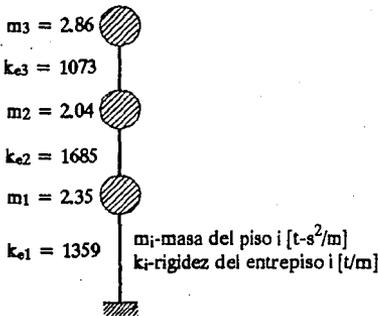


Figura 3.115. Sistema de 3 G.L. simplemente acoplado.

Forma del modo 2.

Siguiendo los pasos estipulados para el Método de Holzer se obtiene la tabla 3.27 mostrada en la siguiente página, donde se prueba para el primer ciclo de iteración proponiendo $w^2 = 600$ y se obtiene un residuo negativo, se prueba para el segundo ciclo con $w^2 = 800$ y se obtiene un residuo positivo, con lo que se deduce que debido a este cambio de signo existe una raíz o frecuencia entre los dos valores supuestos.

Proponiendo un nuevo valor $w^2 = 750$ se obtiene un residuo negativo menor que el primero, por lo que debe proponerse un valor característico más grande.

Mejorando la aproximación con la ecuación (3.105), se obtiene

$$w^2 = 750(3744.376089)/3698.390817 = 759.325$$

NIV	x	F	V	Δ_r	$w^2(\text{Propuesta})$
Residuo			-915.069		600
N3	-0.18298	-313.994			
EN3			-1229.063	-1.14545	
N2	0.96247	1178.063			
EN2			-51	-0.03753	
N1	1.0	1410			
EN1			1359	1.0	
Residuo			285.981		800
N3	-0.84544	-1934.367			
EN3			-1648.386	-1.53624	
N2	0.6908	1127.386			
EN2			-521	-0.30920	
N1	1.0	1880			
EN1			1359	1.0	
Residuo			-97.604		740
N3	-0.64727	-1369.882			
EN3			-1467.486	-1.36765	
N2	0.72038	1087.486			
EN2			-380	-0.27962	
N1	1.0	1739			
EN1			1359	1.0	
Residuo			-65.697		750
N3	-0.69996	-1501.414			
EN3			-1567.111	-1.46049	
N2	0.76053	1163.611			
EN2			-403.5	-0.23947	
N1	1.0	1762.5			
EN1			1359	1.0	
Residuo			-30.281		759.325
N3	-0.6755	-1448.947			
EN3			-1479.228	-1.37859	
N2	0.70309	1075.728			
EN2			-403.5	-0.29691	
N1	1.0	1762.5			
EN1			1359	1.0	

Tabla 3.27

al probar con este valor se tiene un residuo muy pequeño, por lo que se considera que la aproximación lograda es adecuada y por tanto la solución para este modo es

$$(w_2)^2 = 759.325 \quad w_2 = 27.556 \quad T_2 = 0.228 \text{ [seg]}$$

Forma del modo 3.

Procediendo análogamente para el modo 3 se tiene la tabla 3.28, de donde

$$(w_3)^2 = 2153.2 \quad w_3 = 46.403 \text{ [r/s]} \quad T_3 = 0.1354 \text{ [seg]}$$

Puede observarse que los resultados son prácticamente iguales a los obtenidos en el problema IV del inciso 3.3.1.7.

NIV	x	F	V	Δ_r	w^2 (Propuesta)
Residuo			1077.408		
N3	0.0257	154.3542			2100
EN3			1231.762	1.14796	
N2	-1.12226	-4807.762			
EN2			-3576	-2.12226	
N1	1.0	4935			
EN1			1359	1.0	
Residuo			69.999		
N3	0.23818	1464.569			2150
EN3			1534.568	1.43017	
N2	-1.19199	-5228.068			
EN2			-3693.5	-2.19199	
N1	1.0	5052.5			
EN1			1359	1.0	
Residuo			-37.703		
N3	0.26014	1603.321			2155
EN3			1565.618	1.4591	
N2	-1.19896	-5270.868			
EN2			-3705.25	-2.19896	
N1	1.0	5064.25			
EN1			1359	1.0	
Residuo			1.216		
N3	0.25222	1553.209			2153.2
EN3			1554.425	1.44867	
N2	-1.19645	-5255.445			
EN2			-3701.02	-2.19645	
N1	1.0	5060.02			
EN1			1359	1.0	

Tabla 3.28

Los métodos iterativos de Newmark y Holzer pueden fácilmente ser programados en una calculadora de bolsillo de tal manera que interactivamente se faciliten los cálculos para la solución del problema de los valores característicos.

A continuación se indica la codificación de la programación de dichos métodos:

```

05  REM METODO NEWMARK
10  INPUT "# DE MASAS=";N;DIM M(N),K(N),X(N),F(N),V(N+1),D(N),T(N),W(N)
15  FOR I=1 TO N
20  INPUT "RIGIDEZ=";K(I),"MASA=";M(I):NEXT I
40  FOR I=1 TO N
50  X(I)=F(I)=X(I)*M(I):NEXT I
60  FOR I=N TO 1 STEP -1
70  V(I)=V(I+1)+F(I):D(I)=V(I)/K(I):NEXT I
80  FOR I=1 TO N
90  T(I)=T(I-1)+D(I):W(I)=ROUND(X(I)/T(I),-4):NEXT I
120 FOR I=1 TO (N-1)
130 IF W(I+1)=W(I) THEN NEXT I ELSE 170

```

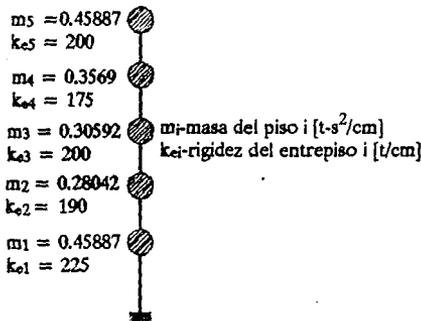
```

140 FOR I=1 TO N
150 PRINT "W2(" ; I ; ")=" ; W(I) ; "X(" ; I ; ")=" ; X(I) ; NEXT I
160 INPUT "MODOS SUPERIORES, 1=SI,2=NO";L:IF L=2 THEN END ELSE 195
170 L1=T(I):FOR I=1 TO N
180 X(I)=T(I)/L1:F(I)=X(I)*M(I):NEXT I
190 GOTO 60
192 REM METODO HOLZER
195 U=1: T=0: W=0
200 INPUT "TANTEO: W2=";W:X(1)=1:D(1)=X(1):V(1)=K(1)*D(1):F(1)=M(1)*W*X(1)
210 FOR I=2 TO N:V(I)=V(I-1)-F(I-1):D(I)=V(I)/K(I):X(I)=X(I-1)+D(I)
215 F(I)=M(I)*W*X(I):NEXT I:V(N+1)=V(N)-F(N)
220 IF ROUND(V(N),-2)=ROUND(F(N),-2) THEN 240
230 PRINT "PARA W2=";W;"RESIDUO V=";V(N+1): IF ABSV(N+1)<50 THEN 235 ELSE 200
235 FOR I=1 TO N:W1=W1+V(I)*D(I):W2=W2+F(I)*X(I):NEXT I:W1=W*W1/W2
237 PRINT "PROPUESTA: TANTEAR CON W2=";W1:ERASE W1,W2:GOTO 200
240 U=U+1:PRINT "SOLUCION=W(" ; U ; ")=" ; W;"RESIDUO V=";V(N+1):FOR I=1 TO N
250 PRINT "X(" ; I ; ")=" ; X(I):NEXT I:IF U=N THEN END ELSE 200
    
```

NOTA: Los datos de las masas y rigideces se introducen en la calculadora en orden de los niveles inferiores hasta los niveles superiores.

La frecuencia fundamental y su forma modal los da la calculadora de bolsillo al converger el método Newmark, para los modos superiores la calculadora pedirá datos de "tanteo" para un valor característico w^2 arbitrario, dando como resultado del cálculo un residuo de la fuerza cortante V; se deben probar varios valores de w^2 buscando que el residuo tienda a cero, un cambio de signo en el residuo indica una raíz o forma del modo entre los dos valores característicos correspondientes que se probaron, por lo que se tendrá delimitado un intervalo y deberá tantearse con valores dentro de él. Para cuando el residuo es pequeño (menor que 50), el programa propondrá un posible valor de w^2 , el cual deberá ser probado en caso de hallarse dentro del mencionado intervalo (convergencia del método).

II.- Para el sistema de 5 G.L. simplemente acoplado mostrado en la figura 3.116, determinar las frecuencias angulares, periodos de oscilación y formas de los modos de vibración



Usando el programa para calculadora de bolsillo dado en el problema I anterior (o procediendo manualmente como en el problema citado), se obtiene

● Forma del modo 1

El programa converge por el método de Newmark al primer modo con

$$(w_1)^2 = 42.99$$

$$w_1 = 6.557 \text{ [r/s]}$$

$$T_1 = 0.958 \text{ [seg]}$$

Figura 3.116. Sistema de 5 G.L. simplemente acoplado

$$z_{11} = 1.0 \quad z_{21} = 2.08 \quad z_{31} = 2.981 \quad z_{41} = 3.787 \quad z_{51} = 4.202$$

● Forma del modo 2

probando valores arbitrarios se obtiene la tabla 3.29

$(w_2)^2$	60	150	360	370.694	371.2186166
Residuo V	-64.935	-232.09	-18.808	-0.879	-0.001736

Tabla 3.29

de donde

$$(w_2)^2 = 371.219 \quad w_2 = 19.267 \text{ [r/s]} \quad T_2 = 0.326 \text{ [seg]}$$

$$z_{12} = 1.0 \quad z_{22} = 1.288 \quad z_{32} = 0.891 \quad z_{42} = -0.141 \quad z_{52} = -0.950$$

● Forma del modo 3

analogamente para este modo

$(w_3)^2$	800	1000	900	877.7749092	879.7333311
Residuo V	122.39	-207.86	-34.42	3.315	0.0352

Tabla 3.30

de donde

$$(w_3)^2 = 879.733 \quad w_3 = 29.66 \text{ [r/s]} \quad T_3 = 0.212 \text{ [seg]}$$

$$z_{13} = 1.0 \quad z_{23} = 0.0596 \quad z_{33} = -0.907 \quad z_{43} = -0.617 \quad z_{53} = 0.606$$

De igual manera para los demás modos

● Forma del modo 4

$(w_4)^2$	1400	1600	1500	1480	1480.67656
Residuo V	-236.57	504.41	70.01	-2.38	-0.0125

Tabla 3.31

de donde

$$(w_4)^2 = 1480.677 \quad w_4 = 38.480 \text{ [r/s]} \quad T_4 = 0.163 \text{ [seg]}$$

$$z_{14} = 1.0 \quad z_{24} = -1.392 \quad z_{34} = -0.775 \quad z_{44} = 1.936 \quad z_{54} = -0.808$$

● Forma del modo 5

$(w_5)^2$	2225	2235	2232.534606	2232.889593	2232.900767
Residuo V	155.1	-42.5	7.36	0.225	0.000201

Tabla 3.32

de donde

$$(w_5)^2 = 2232.9 \quad w_5 = 47.234 \text{ [r/s]} \quad T_5 = 0.133 \text{ [seg]}$$

$$z_{15} = 1.0 \quad z_{25} = -3.209 \quad z_{35} = 2.838 \quad z_{45} = -1.330 \quad z_{55} = 0.323$$

III.- Para el marco plano del problema IV del inciso 3.3.1.7., determinar empleando la matriz de rigidez lateral y el Método de Iteración Inversa, las frecuencias angulares, períodos de oscilación y formas de los modos de vibración.

En el problema IV, se obtuvo (en [ton,m,seg])

$$K^* = \begin{bmatrix} 4899.764635 & -3478.248285 & 498.409378 \\ -3478.248285 & 4798.182011 & -1837.718182 \\ 498.409378 & -1837.718182 & 1385.496735 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 2.35 & 0 & 0 \\ 0 & 2.04 & 0 \\ 0 & 0 & 2.86 \end{bmatrix}$$

● Forma del modo 1

Aplicando los pasos del Método de iteración Inversa se obtiene la tabla 3.33 y forma del modo fundamental

Tabla 3.33

NIV	{x}	{x*}	{y}	NIV	{x}	{x*}	{y}
1	1.0	2.35	0.01303924113	1	1.0	2.35	0.01068554338
2	2.0	4.08	0.02211016266	2	1.676697521	3.420462943	0.01791463867
3	3.0	8.58	0.0308289199	3	2.310968482	6.609369859	0.02468836713
1	1.0	2.35	0.01085691266	1	1.0	2.35	0.01068372221
2	1.695663301	3.459153134	0.01822127096	2	1.676512703	3.420085915	0.01791137579
3	2.364318567	6.761951102	0.02514356337	3	2.310445642	6.607874536	0.02468396881
1	1.0	2.35	0.01070114246	1	1.0	2.35	0.01068372221
2	1.678310541	3.423753504	0.01794257903	2	1.676512703	3.420085915	0.01791137579
3	2.315903624	6.623484365	0.02473000294	3	2.310389877	6.607715048	0.02468350001

por tanto de la ecuación (3.117) y efectuando primero

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.2494867257$$

$$\{y\}^T M = \{0.02510674719 \quad 0.03653920661 \quad 0.07059481003\}$$

$$\{y\}^T M \{y\} = 0.002665227967$$

$$(w_1)^2 = 93.80052078$$

$$w_1 = 9.675 \text{ [r/s]}$$

$$T_1 = 0.8494 \text{ [seg]}$$

● Forma del modo 2

Suponiendo arbitrariamente $\mu = 600$, se tiene de la ecuación (3.118)

$$K' = K - \mu M = \begin{bmatrix} 3489.764635 & -3478.248285 & 498.409378 \\ -3478.248285 & 3574.182011 & -1837.718182 \\ 498.409378 & -1837.718182 & -330.503265 \end{bmatrix}$$

procediendo como en el modo 1 pero usando K' en vez de K , se obtiene la tabla 3.34 y forma del modo 2

Tabla 3.34

NIV	{x}	{x*}	{y}	NIV	{x}	{x*}	{y}
1	1.0	2.35	2.707353435E-4	1	1.0	2.35	0.003744301275
2	1.0	2.04	-8.824070943E-4	2	0.691813108	1.41129874	0.002711088214
3	1.0	2.86	-0.003338688362	3	-0.7911406693	-2.262662314	-0.002581998455
1	1.0	2.35	0.002483659899	1	1.0	2.35	0.003557030978
2	-3.259297744	-6.648967398	0.0249902548	2	0.7240571777	1.477076643	0.002513905643
3	-12.33192652	-35.26930985	0.005213437409	3	-0.6895808496	-1.97220123	-0.002646846107
1	1.0	2.35	0.001896162842	1	1.0	2.35	0.003657591842
2	1.006186669	2.052620805	7.659735427E-4	2	0.7067426903	1.441755088	0.002619789221
3	0.2099094732	0.6003410934	-0.003216062809	3	-0.7441166871	-2.128173725	-0.002612024074
1	1.0	2.35	0.005412618613	1	1.0	2.35	0.003602312285
2	0.4039597896	0.8240779708	0.0044678432	2	0.7162606804	1.461171788	0.002561583701
3	-1.696089986	-4.85081736	-0.002003367339	3	-0.7141376586	-2.042433704	-0.00263116618
1	1.0	2.35	0.002967961101	1	1.0	2.35	0.003632318168
2	0.8254494765	1.683916932	0.001893663472	2	0.7110942914	1.450632354	0.002593177804
3	-0.3701290415	-1.058569059	-0.002850776945	3	-0.730410351	-2.088973604	-0.002620775797
1	1.0	2.35	0.004056619176	1	1.0	2.35	0.003615917572
2	0.6380351385	1.301591683	0.003039937921	2	0.7139181329	1.456392991	0.00257590912
3	-0.9605169502	-2.747078478	-0.00247384446	3	-0.7215160334	-2.063535856	-0.002626454966
1	1.0	2.35	0.003409973335	1	1.0	2.35	0.00362484807
2	0.7493772003	1.528729489	0.002359064251	2	0.7123804869	1.453256193	0.002585312312
3	-0.6098291096	-1.744111253	-0.002697768587	3	-0.726359192	-2.077387289	-0.002623362529

y de la ecuación (3.119) y efectuando primero

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.01772525408$$

$$\{y\}^T M = \{0.008518392985 \quad 0.005274037118 \quad -0.007502816833\}$$

$$\{y\}^T M \{y\} = 8.419552193E-5$$

$$(w_2)^2 = 600 + 276.114 = 876.114 \quad w_2 = 29.599 \text{ [r/s]} \quad T_2 = 0.2123 \text{ [seg]}$$

• Forma del modo 3

Análogamente para este modo y suponiendo arbitrariamente $\mu = 3500$, se tiene de la ecuación (3.118)

$$K' = K - \mu M = \begin{bmatrix} -3325.235365 & -3478.248285 & 498.409378 \\ -3478.248285 & -2341.817989 & -1837.718182 \\ 498.409378 & -1837.718182 & -8624.503265 \end{bmatrix}$$

y aplicando los pasos del método pero usando K' en vez de K , se calcula la tabla 3.35 y forma del modo 3

Tabla 3.35

NIV	{x}	{x*}	{y}	NIV	{x}	{x*}	{y}
1	1.0	2.35	-3.465804579E-5	1	1.0	2.35	0.002202962723
2	1.0	2.04	-6.698465202E-4	2	-1.212322515	-2.473137931	-0.002694324783
3	1.0	2.86	-1.908845895E-4	3	0.2768322423	0.791740213	6.096173366E-4
1	1.0	2.35	-0.0191507127	1	1.0	2.35	0.002215136205
2	19.32730207	39.42769622	0.01670234753	2	-1.223046017	-2.495013875	-0.002705515209
3	5.507655876	15.75189581	-0.006492083849	3	0.2767261244	0.7914367158	6.127404989E-4
1	1.0	2.35	0.001839758173	1	1.0	2.35	0.002213191155
2	-0.8721527911	-1.779191694	-0.002363170969	2	-1.221376457	-2.491607972	-0.002703721336
3	0.338999595	0.9695388417	4.974496513E-4	3	0.2766152698	0.7911196716	6.122826153E-4
1	1.0	2.35	0.002282663416				
2	-1.284500867	-2.620381769	-0.002767324253				
3	0.2703886079	0.7733114186	6.319148318E-4				

y de la ecuación (3.119) y efectuando primero

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.01242200167$$

$$\{y\}^T M = \{0.005200999214 \quad -0.005515591525 \quad 0.00175112828\}$$

$$\{y\}^T M \{y\} = 2.749561335E-5$$

$$(\omega_3)^2 = 3500 + 451.7812173 = 3951.781217 \quad \omega_3 = 62.863 \text{ [r/s]} \quad T_3 = 0.09995 \text{ [seg]}$$

Puede observarse que los resultados son los mismos que los obtenidos en el problema IV del inciso 3.3.1.7.

Este método iterativo puede ser también fácilmente programado en una calculadora de bolsillo de tal manera que interactivamente se faciliten los cálculos para la solución del problema de los valores característicos.

A continuación se lista la codificación de la programación de dicho método:

```

10 CLEAR: INPUT "# DE RENGLONES MTZ. K=";N:M=N+1
20 DIM K(N,N),M(N,N),L(N,N),A(N,M),X(N),W(N),Y(N),Z(N)
30 FOR I=1 TO N
40   FOR J=1 TO N
50     INPUT "DATOS X RENG.MTZ. K=";K(I,J):L(I,J)=K(I,J)
60   NEXT J
70 NEXT I
80 FOR I=1 TO N
90   FOR J=1 TO N
100    INPUT "DATOS X RENG.MTZ. M=";M(I,J)
110   NEXT J
120  NEXT I
130 FOR I=1 TO N
140  X(I)=1:A(I,M)=M(I,I)*X(I):NEXT I
145 REM SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
150 FOR I=1 TO N
160   FOR J=1 TO N
170    A(I,J)=L(I,J):NEXT J
180   NEXT I
190   FOR I=1 TO N
200    P1=A(I,I)
210    FOR J=1 TO M
220     A(I,J)=A(I,J)/P1:NEXT J
230    FOR K=1 TO N
240     IF K=I THEN 290
250     C1=A(K,I)
260     FOR J=1 TO M
270      A(K,J)=A(K,J)-C1*A(I,J)
280     NEXT J
290     NEXT K
300    NEXT I
310   FOR I=1 TO N
320    Y(I)=A(I,M):NEXT I
330   V=V1:Z8=Z8+1:IF Z8>1 THEN 360
340   FOR I=1 TO N
350    Z(I)=A(I,M):NEXT I:IF Z8=1 THEN 410
360   FOR I=1 TO N
370    IF ABS(Y(I)-Z(I))<1E-6 THEN V1=1 ELSE V1=0:NEXT I
380   IF V1=1 THEN 430
390   FOR I=1 TO N
400    Z(I)=A(I,M):NEXT I
410   FOR I=1 TO N
420    X(I)=Y(I)/V:A(I,M)=M(I,I)*X(I):W(I)=A(I,M):NEXT I:GOTO 150
430   FOR I=1 TO N
440    PRINT "Z(";I;")=";X(I),"X(";I;")=";W(I),"Y(";I;")=";Y(I):NEXT I
450   INPUT "MODOS SUPERIORES?,1=SI,2=NO";V3

```

```

460 IF V3=1 THEN 470 ELSE END
470 INPUT *MU=";V4
480 FOR I=1 TO N
490 FOR J=1 TO N
500 L(I,J)=K(I,J)-V4*M(I,J):NEXT J
510 NEXT I
520 FOR I=1 TO N
530 X(I)=1:A(I,M)=M(I,I)*X(I):NEXT I:Z8=0:GOTO 150
    
```

El programa requiere como datos de entrada el valor por renglón de los coeficientes de la matriz de rigidez **K** y de la matriz de masas **M**, y converge hacia los valores del primer modo cuando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas dan valores del vector $\{y\}$ menores que 1×10^{-6} ; para los valores característicos superiores se deben probar valores arbitrarios de la constante μ ; el programa entrega los resultados finales de los vectores $\{x\}$, $\{x^*\}$, y $\{y\}$, y el valor característico correspondiente debe ser calculado con las ecuaciones (3.117) o (3.119).

IV.- Obtener las frecuencias angulares, períodos de oscilación y formas de los modos de vibración para un marco plano de 3 niveles cuyas matrices de masas y rigideces laterales son:

$$K^* = \begin{bmatrix} 4041.78848 & -3073.375202 & 354.0376144 \\ -3073.375202 & 5867.761942 & -2908.179778 \\ 354.0376144 & -2908.179779 & 2562.58669 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 4.0789 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0591 & 0 \\ 0 & 0 & 3.569 \end{bmatrix}$$

Empleando el programa para calculadora de bolsillo del método de iteración inversa dado en el problema anterior (o procediendo manualmente como en dicho ejemplo) se obtiene

• Forma del modo 1

NIV	$\{x\}$	$\{x^*\}$	$\{y\}$
1	1.0	4.0789	0.01202374357
2	1.392633762	4.260205942	0.01674460596
3	1.631244572	5.821911878	0.0196135331

Tabla 3.36

De la tabla 3.36 y de la ecuación (3.117) y empleando el programa para calculadora de bolsillo para multiplicar matrices (o procediendo manualmente), se tiene primero

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.2345673788$$

$$\{y\}^T M = \{0.04904364765 \quad 0.05122342409 \quad 0.07000069963\}$$

$$\{y\}^T M \{y\} = 0.002820365335$$

$$(\omega_1)^2 = 83.16914688$$

$$\omega_1 = 9.1197 \text{ [r/s]}$$

$$T_1 = 0.689 \text{ [seg]}$$

● Forma del modo 2

Suponiendo arbitrariamente $\mu = 500$, el programa entrega los resultados mostrados en la tabla 3.37

NIV	{x}	{x*}	{y}
1	1.0	4.0789	0.003582280437
2	0.1842285009	0.5635734072	6.620673667E-4
3	-0.8364055835	-2.985131528	-0.002991932196

Tabla 3.37

de la ecuación (3.119) y efectuando primero

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.02391619836$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} = \{0.01461176367 \quad 0.002025330281 \quad -0.01067820601\}$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} \{y\} = 8.563280859E-5$$

$$(w_2)^2 = 500 + 279.2877958$$

$$(w_2)^2 = 779.2877958 \quad w_2 = 27.9157 \text{ [r/s]} \quad T_2 = 0.225 \text{ [seg]}$$

● Forma del modo 3

para este modo y suponiendo arbitrariamente $\mu = 3000$, el programa arroja los resultados listados en la tabla 3.38

NIV	{x}	{x*}	{y}
1	1.0	4.0789	-0.004247833089
2	-2.245359419	-6.868778998	0.009538153443
3	0.9424650073	3.363657611	-0.004003506948

Tabla 3.38

se tiene de la ecuación (3.119)

$$\{y\}^T \{x^*\} = -0.09630838105$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} = \{-0.01732648639 \quad 0.0291781652 \quad -0.0142885163\}$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} \{y\} = 4.091100133E-4$$

$$(w_3)^2 = 3000 - 235.4094936 = 2764.590506 \quad w_3 = 52.5794 \text{ [r/s]} \quad T_3 = 0.1195 \text{ [seg]}$$

3.3.2.5.- PROBLEMAS PROPUESTOS

I.- Para el sistema de 3 G.L. simplemente acoplado mostrado en la figura 3.117, determinar por el método de Newmark y Holzer las frecuencias angulares, periodos de oscilación y formas de los modos de vibración.

Solución: Forma del modo 1: $(w_1)^2 = 107.254$; $w_1 = 10.356 \text{ [r/s]}$; $T_1 = 0.607 \text{ [seg]}$; $z_{11} = 1.0$; $z_{21} = 2.136$; $z_{31} = 2.937$; Forma del modo 2: $(w_2)^2 = 853.925$; $w_2 = 29.222 \text{ [r/s]}$; $T_2 = 0.215 \text{ [seg]}$; $z_{12} = 1.0$; $z_{22} = 1.098$; $z_{32} = -0.937$; Forma del modo 3: $(w_3)^2 = 2018.743$; $w_3 = 44.930 \text{ [r/s]}$; $T_3 = 0.14 \text{ [seg]}$; $z_{13} = 1.0$; $z_{23} = -0.526$; $z_{33} = 0.127$

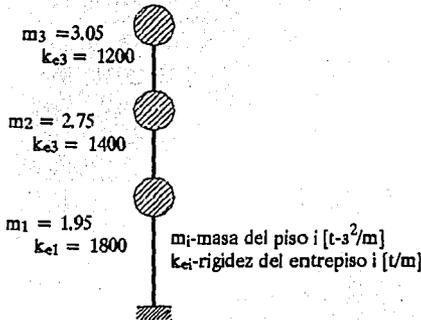


Figura 3.117. Sistema de 3 G.L. simplemente acoplado

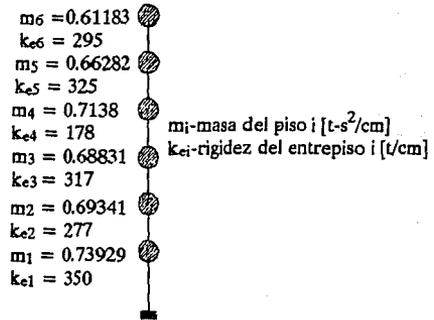


Figura 3.118. Sistema de 6 G.L. simplemente acoplado

II.- Para el sistema de 6 G.L. simplemente acoplado de la figura 3.118, determinar por el Método de Newmark y Holzer las frecuencias angulares, los períodos de oscilación y las formas de los modos de vibración.

Solución: Forma del modo 1: $(w_1)^2 = 24.804$; $w_1 = 4.980$ [r/s]; $T_1 = 1.262$ [seg]; $z_{11} = 1.0$; $z_{21} = 2.197$; $z_{31} = 3.124$; $z_{41} = 4.476$; $z_{51} = 4.972$; $z_{61} = 5.242$; Forma del modo 2: $(w_2)^2 = 204.9996039$; $w_2 = 14.318$ [r/s]; $T_2 = 0.4388$ [seg]; $z_{12} = 1.0$; $z_{22} = 1.718$; $z_{32} = 1.573$; $z_{42} = 0.0702$; $z_{52} = -0.784$; $z_{62} = -1.365$; Forma del modo 3: $(w_3)^2 = 565.955568$; $w_3 = 23.790$ [r/s]; $T_3 = 0.264$ [seg]; $z_{13} = 1.0$; $z_{23} = 0.753$; $z_{33} = -0.395$; $z_{43} = -1.575$; $z_{53} = -0.264$; $z_{63} = 1.517$; Forma del modo 4: $(w_4)^2 = 850.354167$; $w_4 = 29.161$ [r/s]; $T_4 = 0.215$ [seg]; $z_{14} = 1.0$; $z_{24} = -0.006$; $z_{34} = -0.874$; $z_{44} = 0.454$; $z_{54} = 0.333$; $z_{64} = -0.437$; Forma del modo 5: $(w_5)^2 = 1385.519575$; $w_5 = 37.223$ [r/s]; $T_5 = 0.1688$ [seg]; $z_{15} = 1.0$; $z_{25} = -1.434$; $z_{35} = 0.786$; $z_{45} = 0.530$; $z_{55} = -1.223$; $z_{65} = 0.653$; Forma del modo 6: $(w_6)^2 = 1514.499723$; $w_6 = 38.917$ [r/s]; $T_6 = 0.1615$ [seg]; $z_{16} = 1.0$; $z_{26} = -1.779$; $z_{36} = 1.686$; $z_{46} = -2.017$; $z_{56} = 2.663$; $z_{66} = -1.244$

III.- Para el marco plano del problema IV, del inciso 3.3.1.8, que puede ser modelado como estructura de cortante, determinar empleando la matriz de rigidez de entrepiso y el Método de Iteración Inversa, las frecuencias angulares, períodos de oscilación y formas de los modos de vibración.

Solución: ver problema IV, inciso 3.3.1.8.

IV.- Empleando la matriz de rigidez lateral y la matriz de masas del marco plano del problema II del inciso 3.3.1.8, y el Método de iteración inversa, determinar las frecuencias angulares, los períodos de oscilación y las formas de los modos de vibración.

Solución: ver problema II, inciso 3.3.1.8.

3.3.3.- VIBRACION FORZADA SIN AMORTIGUAMIENTO

En la figura 3.119 se muestra un sistema discreto compuesto de 2 G.L., en donde a diferencia del sistema estudiado en el inciso 3.3.1., actúan ahora sobre cada masa dos fuerzas excitatrices dinámicas $P(t)_1$ y $P(t)_2$ que inyectan energía al sistema y amplifican los desplazamientos de las oscilaciones debido a la ausencia de amortiguamiento.

Estableciendo el equilibrio dinámico de las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.120, se puede deducir la siguiente ecuación general del movimiento forzado no amortiguado de un sistema oscilatorio de n G.L.

$$M\{\ddot{x}\} + K\{x\} = \{P(t)\} \quad \dots\dots(3.120)$$

Ecuación general del movimiento forzado no amortiguado

- $\{P(t)\}$ -vector de fuerzas excitatrices en función del tiempo
- M -matriz de masas
- K -matriz de rigidez
- $\{x\}$ -vector de desplazamientos de las masas
- $\{\ddot{x}\}$ -vector de aceleraciones de las masas

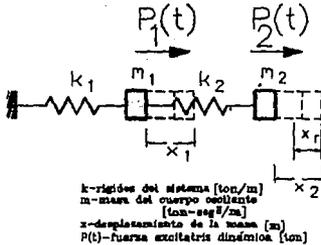


Figura 3.119. Sistema discreto compuesto de 2 G.L. en vibración forzada y sin amortiguamiento.

La solución de esta ecuación puede obtenerse nuevamente por el método directo paso a paso de superposición modal indicado a continuación.

3.3.3.1. METODO DIRECTO PASO A PASO DE SUPERPOSICION MODAL.

Como se mostró en el inciso 3.3.1.1., este método transforma el sistema oscilatorio original de n G.L. en n sistemas oscilatorios de 1 G.L.

La respuesta de desplazamientos dinámicos del sistema compuesto está dada por las ecuaciones (3.71) o (3.72). Las n ecuaciones desacopladas o independientes de los n sistemas de 1 G.L., expresadas para cada modo j pueden obtenerse con

$$[M_j]\ddot{f}_j + [k_j]f_j = [P_j] \quad \dots\dots(3.121)$$

que puede escribirse también como

$$\ddot{f}_j + (\omega_j^2)f_j = [P_j]/[M_j] \quad \dots\dots(3.122)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

donde

$$[P_j] = \{z_j\}^T \{P(t)\} \quad \dots\dots(3.123)$$

$[P_j]$ -Escalar que representa la fuerza excitatriz transformada para el modo j

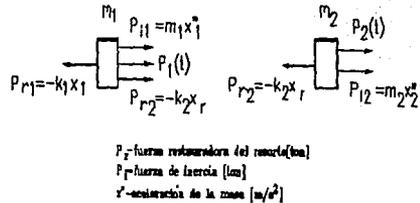


Figura 3.120. Diagrama de cuerpo libre del sistema compuesto de la figura 3.119.

Los valores de $[M_j]$ y $[K_j]$ se obtienen con las ecuaciones (3.74) y (3.75).

El sistema de ecuaciones independientes puede ser resuelto analíticamente para cada modo j , por la solución particular de desplazamientos dada por las ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.37) de los sistemas simples en vibración forzada no amortiguada estudiados en el pasado inciso 3.2.3., o preferentemente por el método numérico de evaluación de respuestas establecido en el inciso 3.2.4., ya que la respuesta de interés es el desplazamiento máximo para cada forma del modo.

Para el presente caso puede demostrarse que el coeficiente de participación de cada forma modal j está dado por

$$c_j = \{z\}^T \{P_0\} / \{(w^2)_j / [M_j]\} = \{z\}^T \{P_0\} / [k_j] = X_{estj} \quad \dots (3.124)$$

c_j - coeficiente de participación de la forma del modo j

$\{P_0\}$ - vector de magnitudes estáticas de las fuerzas dinámicas

X_{estj} - desplazamiento estático de la forma del modo j (ecuación (3.27))

La ecuación (3.122) puede escribirse entonces como

$$\ddot{r}_j + (w^2)_j r_j = c_j (w^2)_j \{f(t)\} \quad \dots (3.125)$$

$\{f(t)\}$ - vector de funciones del tiempo de las fuerzas excitatrices

Las respuestas máximas obtenidas para cada ecuación desacoplada al ser sustituidas en las

ecuaciones (3.71) o (3.72) dan como resultado las respuestas de desplazamientos del sistema de n G.L.; éstas definen a su vez la respuesta máxima de cada modo individualmente; pero como sus frecuencias angulares son diferentes, los máximos de cada modo no ocurren simultáneamente. Para obtener la respuesta máxima real es necesario recurrir a métodos estadísticos.

La respuesta máxima posible se obtiene sumando los valores absolutos dados por las ecuaciones (3.71) o (3.72) con^[ref.1]

$$X_{abs} = \sum_i \sum_j |z_j f_j|_{max} \quad \dots (3.126a)$$

X_{abs} - respuesta máxima posible

$f_j|_{max}$ - valor máximo de la función de respuesta

El valor de la respuesta anterior puede ser demasiado conservador por lo que en base a un estudio probabilístico^[ref.13] se ha propuesto la siguiente ecuación para encontrar la **respuesta máxima probable**

$$X_{ars} = \{\sum_i \sum_j (z_j f_j|_{max})^2\}^{0.5} \quad \dots (3.126b)$$

X_{ars} - respuesta máxima probable

El criterio expresado por la ecuación (3.126b) debe ser aplicado a la obtención para cada modo de todo tipo de respuestas dinámicas incluidas elementos mecánicos, desplazamientos de entrepiso, fuerzas laterales, etc., a partir de las cuales con dicha ecuación se obtendrá la **respuesta máxima probable**.

3.3.3.2. VIBRACION FORZADA EN LA BASE SIN AMORTIGUAMIENTO

Para cuando la base o cimentación de un sistema oscilatorio de n G.L. es excitada por una aceleración del terreno en función del tiempo, puede demostrarse que la ecuación general del movimiento es

$$M\{x''_r\} + K\{x_r\} = -M\{1\}x''_a \quad \dots(3.127)$$

Ecuación general del movimiento en la base sin amortiguamiento

x''_a - aceleración del apoyo o base en función del tiempo

$\{x''_r\}$ -vector de aceleraciones de las masas respecto a la base

$\{x_r\}$ -vector de desplazamientos de las masas respecto a la base

$\{1\}$ -vector unitario

cuya solución es

$$\{x_r\} = Z\{f\} \quad \dots(3.128)$$

Esta ecuación puede ser transformada mediante el Método directo paso a paso de superposición modal en un sistema de n ecuaciones desacopladas o independientes de 1 G.L., que para cada modo j pueden obtenerse con

$$[M_j]f''_j + [k_j]f_j = -\{z\}^T_j M\{1\}x''_a \quad \dots(3.129)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

que puede escribirse también como

$$f''_j + (w_j^2)f_j = c_j x''_a \quad \dots(3.130)$$

donde

$$c_j = -\{z\}^T_j M\{1\} / [M_j] \quad \dots(3.131)$$

c_j -coeficiente de participación de la forma del modo j para aceleración en la base o apoyo

El sistema de ecuaciones desacopladas puede ser resuelto por los métodos antes vistos relativos a sistemas de 1 G.L.

3.3.3.3.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Deducir las expresiones que describen el movimiento forzado no amortiguado de un sistema discreto compuesto de 2 G.L. , y generalizarlas para un sistema de n G.L.

En la figura 3.119 del inciso 3.3.3.1 se muestra un sistema discreto de 2 G.L. cuyo estado de reposo es perturbado por la acción sobre las masas del sistema de dos fuerzas excitatrices $P_1(t)$ y $P_2(t)$, que desplazan a las masas m_1 y m_2 distancias x_1 y x_2 , respectivamente, respecto a la posición original.

Los resortes de rigidez k_1 y k_2 se oponen a los desplazamientos generando dos fuerzas restauradoras P_{11} y P_{12} que tienden a regresar las masas a su posición inicial. Durante este movimiento se producen en ellas dos fuerzas de inercia P_{11} y P_{12} que empujan a dichas masas más allá del punto de reposo inicial y en dirección opuesta.

Se genera así un ciclo oscilatorio cuyos desplazamientos aumentan por causa de las fuerzas excitatrices que actúan durante un lapso de tiempo t , después del cual el sistema continúa oscilando indefinidamente debido a la carencia de amortiguamiento.

Ya se ha demostrado que (problema I, inciso 3.3.1.7.)

$$P_{r1} = -k_1 x_1 \quad \dots(a)$$

$$P_{i1} = m_1 x''_1 \quad \dots(b)$$

$$P_{r2} = -k_2 x_r = -k_2(x_2 - x_1) \quad \dots(c)$$

$$P_{i2} = m_2 x''_2 \quad \dots(d)$$

del diagrama de cuerpo libre de la figura 3.120, inciso 3.3.3., el equilibrio dinámico es para cada masa

$$P_{r1} = P_{i1} + P_{r2} - P_1(t) \quad \dots(e)^*$$

$$P_{r2} = P_{i2} - P_2(t) \quad \dots(f)^*$$

sustituyendo (a), (b), (c) y (d) en (e) y (f)

$$-k_1 x_1 = m_1 x''_1 - k_2(x_2 - x_1) - P_1(t)$$

$$-k_2(x_2 - x_1) = m_2 x''_2 - P_2(t)$$

de donde

$$m_1 x''_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = P_1(t) \quad \dots(g)$$

$$m_2 x''_2 + k_2(x_2 - x_1) = P_2(t) \quad \dots(h)$$

y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$

o en forma general para un sistema compuesto de n G.L.

$$M\{x''\} + K\{x\} = \{P(t)\} \quad \dots(3.120)$$

Ecuación general del movimiento forzado no amortiguado

$\{P(t)\}$ -vector de fuerzas excitatrices en función del tiempo

M -matriz de masas

K -matriz de rigidez

$\{x''\}$ -vector de aceleraciones de las masas

$\{x\}$ -vector de desplazamientos de las masas

* El signo (-) es debido a que la masa se opone al movimiento

una posible solución de esta ecuación como se vio en el inciso 3.3.1.7. (problema I), está dada en forma tal que el desplazamiento de cada una de las masas con respecto a su posición de reposo es igual al producto de una función de la masa considerada por una función del tiempo

$$x_1 = z_{11}f_1(t) + z_{12}f_2(t)$$

$$x_2 = z_{21}f_1(t) + z_{22}f_2(t)$$

o en forma matricial

$$\{x\} = Z\{f\} \quad \dots(3.71)$$

$\{x\}$ -vector de desplazamientos absolutos de las masas

Z-matriz de formas de los modos

$\{f\}$ -vector de coordenadas generalizadas en función del tiempo

como $\{x\}$ y Z no dependen del tiempo

$$\{x''\} = Z\{f''\} \quad \dots(l)$$

sustituyendo la ecuación (3.71) e (l) en la ecuación (3.120)

$$MZ\{f''\} + KZ\{f\} = \{P(t)\} \quad \dots(j)$$

premultiplicando por $\{z\}^T$

$$\{z\}^T MZ\{f''\} + \{z\}^T KZ\{f\} = \{z\}^T \{P(t)\} \quad \dots(k)$$

por las propiedades de ortogonalidad de los modos con respecto a la matriz de masas y de rigidez (ver inciso 3.3.1.), todos los siguientes productos son nulos excepto el último (cuando el modo j transpuesto es igual al modo j)

$$\{z\}^T MZ = \{z\}^T M\{z\}_1 + \{z\}^T M\{z\}_2 + \dots + \{z\}^T M\{z\}_j = \{z\}^T M\{z\}_j \quad \dots(l)$$

$$\{z\}^T KZ = \{z\}^T K\{z\}_1 + \{z\}^T K\{z\}_2 + \dots + \{z\}^T K\{z\}_j = \{z\}^T K\{z\}_j \quad \dots(m)$$

por lo que (k) resulta

$$\{z\}^T M\{z\}_j \{f''\}_j + \{z\}^T K\{z\}_j \{f\}_j = \{z\}^T \{P(t)\}_j \quad \dots(n)$$

que puede expresarse para el modo de vibrar j como

$$[M_j]f''_j + [k_j]f_j = [P_j] \quad \dots(3.121)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

con

$$[M_j] = \{z\}^T M\{z\}_j \quad \dots(3.74)$$

$$[k_j] = \{z\}^T K\{z\}_j \quad \dots(3.75)$$

$$[P_j] = \{z\}_j^T \{P(t)\} \quad \dots (3.123)$$

$[M_j]$ -masa transformada para la forma del modo j

$[k_j]$ -rigidez transformada para la forma del modo j

$[P_j]$ -fuerza excitatriz transformada para la forma del modo j

la ecuación (3.121) representa la ecuación del movimiento forzado no amortiguado para un sistema de 1 G.L., y de la ecuación (3.6), para este caso

$$[K_j] = (w^2)_j [M_j] \quad \dots (o)$$

sustituyendo (o) en la ecuación (3.121) y dividiendo entre $[M_j]$ que es un escalar resulta

$$P_j + (w^2)_j f_j = [P_j] / [M_j] \quad \dots (3.122)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

Como se indicó en la ecuación (3.25) del inciso 3.2.3, en general una fuerza excitatriz dinámica es igual al producto de su magnitud estática por una función del tiempo

$$P(t) = P_o \{f(t)\} \quad \dots (3.25)$$

sustituyendo dicha ecuación en (3.122)

$$P_j + (w^2)_j f_j = \{z\}_j^T \{P_o\} \{f(t)\} / [M_j] \quad \dots (p)$$

(p) puede escribirse como

$$P_j + (w^2)_j f_j = c_j (w^2)_j \{f(t)\} \quad \dots (3.125)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

donde (ver (o) y ecuación (3.27))

$$c_j = \{z\}_j^T \{P_o\} / (w^2)_j [M_j] = \{z\}_j^T \{P_o\} / [k_j] = X_{estj} \quad \dots (3.124)$$

c_j -coeficiente de participación de la forma del modo j

X_{estj} -desplazamiento estático de la forma del modo j

$\{f(t)\}$ -vector de funciones del tiempo de las fuerzas excitatrices

Las ecuaciones (3.121), (3.122) o (3.125) pueden ser resueltas para cada modo j , por la solución o respuesta de desplazamientos dinámicos para sistemas de 1 G.L. en vibración forzada no amortiguada, es decir se resuelven analíticamente por las ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.37), sin embargo como en Ingeniería Civil para diseño interesan las respuestas máximas, es mucho más práctico emplear el método numérico de evaluación de respuestas dinámicas deducido en el inciso 3.2.4. y programado en una calculadora de bolsillo.

Al sustituir los valores máximos de las respuestas dinámicas de las ecuaciones desacopladas o independientes de 1 G.L. en las ecuaciones (3.71) o (3.72), se tiene como resultado un sistema de n ecuaciones que pueden expresarse en forma general como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix} \quad \dots (q)$$

y desarrollando el producto matricial

$$\begin{aligned}
 x_1 &= z_{11}f_1 + z_{12}f_2 + \dots + z_{1n}f_n \\
 x_2 &= z_{21}f_1 + z_{22}f_2 + \dots + z_{2n}f_n \\
 \cdot & \quad \quad \quad \cdot \\
 \cdot & \quad \quad \quad \cdot \\
 x_n &= z_{n1}f_1 + z_{n2}f_2 + \dots + z_{nn}f_n
 \end{aligned} \quad \dots (r)$$

Las ecuaciones anteriores definen la respuesta máxima de cada modo individualmente; pero dichos máximos no ocurren simultáneamente en el tiempo debido a que las frecuencias de cada forma modal son diferentes.

Como la contribución de cada modo de vibrar puede tener el mismo signo en algún momento del movimiento, la **respuesta máxima posible** se obtiene sumando los valores absolutos lo que representa una cota superior^[ref. 1], dada como

$$x_{abs} = \sum_i \sum_j |z_{ij} f_{jmax}| \quad \dots (3.126a)$$

x_{abs} -respuesta máxima posible

f_{jmax} -valor máximo de la función de respuesta f_j

Con base en estudios probabilísticos se ha demostrado^[ref. 13] que estos valores absolutos son muy conservadores y que un estimado más razonable se obtiene con la denominada **respuesta máxima probable** dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las contribuciones a la respuesta de cada modo, expresada como

$$x_{prob} = \{ \sum_j \sum_i (z_{ij} f_{jmax})^2 \}^{0.5} \quad \dots (3.126b)$$

x_{prob} -respuesta máxima probable

En este último criterio se entiende por respuesta del sistema oscilatorio no solo los desplazamientos, velocidades o aceleraciones, sino también elementos mecánicos, fuerzas laterales, desplazamientos de entrepiso, etc., esto implica que se debe calcular para cada modo la respuesta de interés y después emplear la ecuación (3.126b) para la obtención de la respuesta probable debida a la combinación de los modos.

● VIBRACION FORZADA EN LA BASE SIN AMORTIGUAMIENTO

Análogamente al proceso anterior, para cuando la base es excitada por una aceleración x^a que es función del tiempo, la ecuación del movimiento puede expresarse en forma matricial como

$$M\{x^r\} + K\{x_r\} = -M\{1\}x^a \quad \dots (3.127)$$

Ecuación general del movimiento en la base sin amortiguamiento

$\{x^r\}$ -vector de aceleraciones de las masas relativas a la base

$\{x_r\}$ -vector de desplazamientos de las masas relativas a la base

x^a -aceleración de la base en función del tiempo

$\{1\}$ -vector unitario

cuya respuesta es

$$\{x_r\} = Z\{f\} \quad \dots (3.128)$$

la 2a. derivada respecto al tiempo de la ecuación (3.128) es

$$\{x^r\} = Z\{f''\} \quad \dots (s)$$

sustituyendo (3.128) y (s) en (3.127)

$$MZ\{f''\} + KZ\{f\} = -M\{1\}x^a \quad \dots (t)$$

premultiplicando (t) por $\{z\}^T$ y usando nuevamente las propiedades de ortogonalidad (ecuaciones (3.65) y (3.66))

$$\{z\}^T M\{z\}f'' + \{z\}^T K\{z\}f = -\{z\}^T M\{1\}x^a$$

y sustituyendo (3.74) y (3.75)

$$[M]_j f'' + [k]_j f = -\{z\}^T M\{1\}x^a \quad \dots (3.129)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

dividiendo (3.129) entre $[M]_j$ y como de (o)

$$(w^2)_j = [k]_j/[M]_j$$

$$f'' + (w^2)_j f = c_j x^a \quad \dots (3.130)$$

Ecuación desacoplada o independiente para el modo j

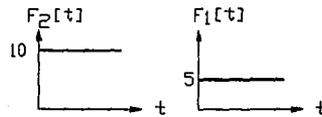
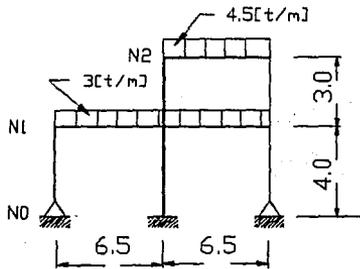
donde

$$c_j = -\{z\}^T M\{1\}/[M]_j \quad \dots (3.131)$$

c_j -coeficiente de participación para aceleración en la base

El sistema de ecuaciones desacopladas puede ser resuelto por los métodos antes vistos relativos a sistemas de 1 G.L.

II.- Para el marco plano sin amortiguamiento mostrado en la figura 3.121a, que es parte integrante de un edificio que puede ser modelado como una estructura de cortante, determinar las respuestas máximas de desplazamientos dinámicos, si las masas del sistema están sujetas a la acción de las fuerzas excitatrices cuyas gráficas se indican en la figura 3.121b. Mediante una inspección de la estructura se ha determinado que las dimensiones de las traves comparadas con las columnas son tales que puede considerarse a las traves infinitamente rígidas.



a) Marco plano con traves ∞ rígidas respecto a las columnas

b) Funciones de excitación de las masas del marco plano

- NOTAS:
 1- $EI = 2 \times 10^9$ [kg-cm²] (columnas)
 2-traves ∞ rígidas
 3-actuación en [m]

Figura 3.121. Marco plano que forma parte de una estructura de cortante.

●MASAS

$$m_1 = W_{N1}/g = (3)(6.5)(2)/9.80665 = 3.977 \text{ [t-s}^2/\text{m]} = 0.03977 \text{ [t-s}^2/\text{cm]} \quad \dots (a)$$

$$m_2 = W_{N2}/g = (4.5)(6.5)/9.80665 = 2.983 \text{ [t-s}^2/\text{m]} = 0.02983 \text{ [t-s}^2/\text{cm]} \quad \dots (b)$$

●RIGIDECES

Quando en un marco la rigidez de las traves es muy grande comparada con la de las columnas, estas últimas se comportan como empotradas en ambos extremos y su rigidez vale $K_c = 12EI/L^3$, excepto para las columnas con apoyos articulados para las cuales vale ^[rel. 7] $K_c = 3EI/L^3$

por tanto

$$K_{e1} = 2[(3)(2)(10^9)/400^3] + (12)(2)10^9/400^3 = 562.5 \text{ [kg/cm]} = 0.5625 \text{ [t/cm]} \quad \dots (c)$$

$$K_{e2} = 2[(12)(2)(10^9)/300^3] = 1777.78 \text{ [kg/cm]} = 1.778 \text{ [t/cm]} \quad \dots (d)$$

en el problema II, ecuación (h), del Inciso 3.3.1.7, se obtuvo para un sistema sencillamente acoplado de 2 G.L. la matriz de rigidez de entrepliso como:

$$K_{en} = \begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} \\ -k_{e2} & k_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3405 & -1.778 \\ -1.778 & 1.778 \end{bmatrix}$$

● FRECUENCIAS ANGULARES Y PERIODOS DE OSCILACION

Como el marco es una estructura de cortante, puede modelarse como un sistema simplemente acoplado, y sus frecuencias angulares se pueden calcular con la ecuación (3.63)

$$(w_{1,2})^2 = (1/2)[1.778/0.02983 + (0.5625 + 1.778)/0.03977] \pm (1/2)\{[1.778/0.02983 + (0.5625 + 1.778)/0.03977]^2 - 4(0.5625)(1.778)/(0.03977)(0.02983)\}^{0.5}$$

$$(w_{1,2})^2 = 59.2277 \pm 51.6225 \quad \dots(e)$$

$$(w_1)^2 = 7.6052 \quad \dots(f)$$

$$(w_2)^2 = 110.8502 \quad \dots(g)$$

de donde

$$w_1 = 2.758 \text{ [r/s]} \quad \dots(h)$$

$$w_2 = 10.529 \text{ [r/s]} \quad \dots(i)$$

de la ecuación (3.7), (h) e (i)

$$T_1 = 2.278 \text{ [seg]}$$

$$T_2 = 0.597 \text{ [seg]}$$

● FORMAS DE LOS MODOS

sustituyendo (a), (b), (c), (d) y (h) en la ecuación (3.61) y tomando

$$z_{11} = 1.0 \quad \dots(j)$$

$$(2.3405 - 0.3025)z_{11} - 1.778z_{21} = 0$$

$$z_{21} = 1.148 \quad \dots(k)$$

sustituyendo (a), (b), (c), (d) e (i) en la ecuación (3.61) y tomando

$$z_{12} = 1.0 \quad \dots(l)$$

$$(2.3405 - 4.4085)z_{12} - 1.778z_{22} = 0$$

$$z_{22} = -1.163 \quad \dots(m)$$

• MODOS NORMALIZADOS

sustituyendo (j) y (k) en la ecuación (3.69)

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 1.146 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03977 & 0 \\ 0 & 0.02983 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.146 \end{bmatrix} = 0.07894621628 = (N_1)^2$$

de donde

$$N_1 = 0.2809736932$$

y de la ecuación (3.70)

$$\{r\}_1 = \begin{bmatrix} 3.55905 \\ 4.07867 \end{bmatrix}$$

análogamente sustituyendo (l) y (m) en la ecuación (3.69)

$$N_2 = 0.2830497011$$

y de la ecuación (3.70)

$$\{r\}_2 = \begin{bmatrix} 3.53295 \\ -4.10882 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$R = \begin{bmatrix} 3.55905 & 3.53295 \\ 4.07867 & -4.10882 \end{bmatrix}$$

• RESPUESTAS POR EL METODO DE SUPERPOSICION MODAL

Forma del modo 1

De la ecuación (3.74) y por estar normalizados los modos respecto a M

$$[M]_1 = \{r\}_1^T M \{r\}_1 = 1.0 \quad \dots (n)$$

de la ecuación (3.75)

$$[K]_1 = \{r\}_1^T K \{r\}_1 = 7.605164549 \quad \dots (o)$$

de la ecuación (3.123)

$$[P]_1 = \{r\}_1^T \{P(t)\} = \begin{bmatrix} 3.55905 & 4.07867 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 58.58195 \quad \dots (p)$$

similarmente para las demás formas de los modos

Forma del modo 2

$$[M_2] = \{r\}^T M \{r\}_2 = 1.0 \quad \dots (q)$$

de la ecuación (3.75)

$$[k_2] = \{r\}^T K \{r\}_2 = 110.8502178 \quad \dots (r)$$

de la ecuación (3.123)

$$[P_2] = \{r\}^T P \{t\} = -23.4235 \quad \dots (s)$$

● TRANSFORMACION DEL SISTEMA DE 2 G.L. EN 2 SISTEMAS DE 1 G.L.

sustituyendo (n), (o), (p), (q), (r), y (s) en la ecuación (3.121)

$$f_1 + 7.605164549f_1 = 58.58195 \quad \dots (t)$$

$$f_2 + 110.8502178f_2 = -23.42345 \quad \dots (u)$$

por analogía entre la ecuación (t) y la ecuación (3.24) del movimiento forzado no amortiguado para sistemas de 1 G.L., la solución es según la ecuación (3.34) para este caso

$$f_1 = X_{est1}(FAD)_1 \quad \dots (v)$$

con

$$FAD_1 = w_2(l.Duhamel)$$

y empleando la tabla de la figura 3.52, inciso 3.2.3., para este tipo de carga

$$FAD_1 = 1 - \cos w_1 t$$

y de la ecuación (3.27)

$$X_{est1} = P_{o1}/[k_1] = 58.58195/7.605164549 = 7.7029$$

por lo tanto de (v)

$$f_1 = 7.7029(1 - \cos 2.758t) \quad \dots (w)$$

análogamente para la ecuación (u)

$$X_{est2} = P_{o2}/[k_2] = -23.42345/110.8502178 = -0.21131$$

$$f_2 = -0.21131(1 - \cos 10.529t) \quad \dots (x)$$

● ECUACIONES DE RESPUESTA DINÁMICA DE DESPLAZAMIENTOS DEL SISTEMA DE 2 G.L.

Las ecuaciones de respuestas dinámicas del sistema de 2 G.L. son, según la ecuación (3.72) y la matriz \mathbf{R} obtenida

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.55905 & 3.53295 \\ 4.07867 & -4.10882 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.7029(1 - \cos 2.758t) \\ -0.21131(1 - \cos 10.529t) \end{bmatrix}$$

de donde

$$x_1 = 27.41500625(1 - \cos 2.758t) - 0.7465476645(1 - \cos 10.529t) \quad \dots (y)$$

$$x_2 = 31.41758714(1 - \cos 2.758t) + 0.8682347542(1 - \cos 10.529t) \quad \dots (z)$$

En Ingeniería Civil interesan el valor de los desplazamientos máximos y el tiempo en que se alcanza este valor que se puede obtener:

1) por el criterio de la 1a. derivada de (w)

$$2.758 \operatorname{sen} 2.758t = 0$$

de donde

$$2.758t = \arcsen(0) = n\pi \quad \text{con } n=0,1,2,\dots$$

tomando $n = 1$

$$t = \pi/2.758 = 1.139083631 \text{ [seg]} \quad \dots (aa)$$

2) por el criterio de la 1a. derivada de (x)

$$10.529 \operatorname{sen} 10.529t = 0$$

$$10.529t = \arcsen(0) = \pi$$

$$t = \pi/10.529 = 0.2983752164 \quad \dots (ab)$$

sustituyendo (aa) y (ab) en (y) y (z)

$$x_1 = 27.41500625(1 - \cos \pi) + 0.7465476645(1 - \cos \pi)$$

$$x_1 = 54.8300125 - 1.493095329 \quad \dots (ac)$$

$$x_2 = 31.41758714(1 - \cos \pi) + 0.8682347542(1 - \cos \pi)$$

$$x_2 = 62.83517428 + 1.736469508 \quad \dots (ad)$$

FALLA DE ORIGEN

● RESPUESTA MAXIMA POSIBLE

Como se indicó en el inciso 3.3.3.1, el máximo de cada modo de vibración no ocurre simultáneamente en el tiempo, por tanto de la ecuación (3.126a), la respuesta máxima posible es

$$x_{1abs} = 54.8300125 + 1.493095329 = 56.323 \text{ [cm]} \quad \dots(ae)$$

$$x_{2abs} = 62.83517428 + 1.736469508 = 64.572 \text{ [cm]} \quad \dots(af)$$

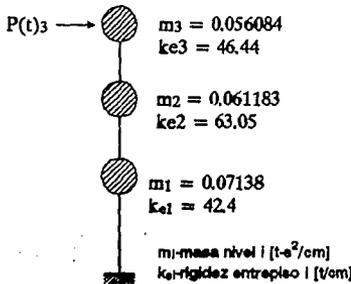
● RESPUESTA MAXIMA PROBABLE

Una respuesta más cercana a la realidad se obtiene con la ecuación (3.126b)

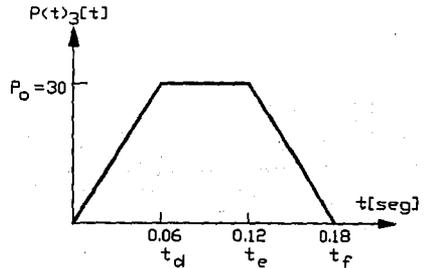
$$x_{1pro} = \{54.8300125^2 + 1.493095329^2\}^{0.5} = 54.850 \text{ [cm]} \quad \dots(ag)$$

$$x_{2pro} = \{62.83517428^2 + 1.736469508^2\}^{0.5} = 62.859 \text{ [cm]} \quad \dots(ah)$$

III.- Si el marco plano de la figura 3.113, inciso 3.3.1.8, que es parte de una estructura de cortante, es representado para efectos dinámicos por el sistema sencillamente acoplado de la figura 3.122a, y está sometido a la acción de una fuerza excitatriz en el nivel 3 con la gráfica mostrada en la figura 3.122b, determinar la respuesta máxima posible y la respuesta máxima probable de desplazamientos de cada una de sus masas: a) Por el método directo paso a paso de superposición modal; y b) usando un espectro de respuesta mediante el denominado **Método Modal Espectral**.



a) Sistema oscilatorio de 3 G.L.



b) Función de excitación

Figura 3.122. Sistema sencillamente acoplado que representa al marco plano de la figura 3.113, sometido a una fuerza excitatriz aplicada en el nivel 3.

● MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES

Para un sistema oscilatorio de este tipo, al resolver el problema IV del inciso 3.3.1.8, se encuentra que la matriz de rigidez de entrepiso es:

FALLA DE ORIGEN

$$K_{en} = \begin{bmatrix} k_{e1} + k_{e2} & -k_{e2} & 0 \\ -k_{e2} & k_{e2} + k_{e3} & -k_{e3} \\ 0 & -k_{e3} & k_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.45 & -63.05 & 0 \\ -63.05 & 109.49 & -46.44 \\ 0 & -46.44 & 46.44 \end{bmatrix}$$

de la ecuación (3.101) la matriz de masas es

$$M = \begin{bmatrix} 0.07138 & 0 & 0 \\ 0 & 0.061183 & 0 \\ 0 & 0 & 0.056084 \end{bmatrix}$$

• FRECUENCIAS ANGULARES, PERIODOS DE OSCILACION Y FORMAS DE LOS MODOS

Empleando el Método de Newmark y Holzer programado en una calculadora de bolsillo (ver final del problema I, inciso 3.3.2.4.), o procediendo con cálculos manuales, se obtiene

Forma del modo 1

$$(w_1)^2 = 159.224 \quad w_1 = 12.618 \text{ [r/s]} \quad T_1 = 0.4979 \text{ [seg]} \quad \dots(a)$$

$$z_{11} = 1.0 \quad z_{21} = 1.492 \quad z_{31} = 1.847 \quad \dots(b)$$

Forma del modo 2

$$(w_2)^2 = 1137.780361 \quad w_2 = 33.731 \text{ [r/s]} \quad T_2 = 0.1863 \text{ [seg]} \quad \dots(c)$$

$$z_{12} = 1.0 \quad z_{22} = 0.384 \quad z_{32} = -1.028 \quad \dots(d)$$

Forma del modo 3

$$(w_3)^2 = 2797.893876 \quad w_3 = 52.895 \text{ [r/s]} \quad T_3 = 0.1188 \text{ [seg]} \quad \dots(e)$$

$$z_{13} = 1.0 \quad z_{23} = -1.495 \quad z_{33} = 0.628 \quad \dots(f)$$

• NORMALIZACION DE LOS MODOS

Forma del modo 1

de la ecuación (3.89)

$$\{1.0 \quad 1.492 \quad 1.847\} \begin{bmatrix} 0.07138 & 0 & 0 \\ 0 & 0.061183 & 0 \\ 0 & 0 & 0.056084 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.492 \\ 1.847 \end{bmatrix} = 0.3989027361 = (N_1)^2$$

$$N_1 = 0.631587473$$

FALLA DE ORIGEN

y de la ecuación (3.70)

$$\{r\}_1 =$$

1.5833
2.3623
2.9244

Análogamente para los otros modos

Forma del modo 2 y forma del modo 3

$$N_2 = 0.3737251132$$

$$N_3 = 0.4798376463$$

$$\{r\}_2 =$$

2.6758
1.0275
-2.7507

$$\{r\}_3 =$$

2.0840
-3.1156
1.3088

por lo tanto la respuesta del sistema de 3 G.L. es según la ecuación (3.72)

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1.5833 & 2.6758 & 2.0840 \\ 2.3623 & 1.0275 & -3.1156 \\ 2.9244 & -2.7507 & 1.3088 \end{matrix} \begin{matrix} f_{1\max} \\ f_{2\max} \\ f_{3\max} \end{matrix} \dots (g)$$

a) Respuestas por el Método paso a paso de Superposición Modal

Forma del modo 1

de la ecuación (3.74) y por ser los modos normalizados respecto a M

$$[M_1] = 1.0$$

... (h)

de la ecuación (3.75)

$$[k_1] = \{r\}^T K \{r\}_1 = \{18.01597 \quad 23.012026 \quad 26.103924\} \{r\}_1 = 159.2243097 \dots (i)$$

como comprobación $[k_1] = (w_1)^2$ se debe cumplir por ser modos normalizados respecto a M

de la ecuación (3.123) y como

$$\{P(t)\} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ P(t)_3 \end{matrix}$$

se tiene

$$[P_1] = \{r\}^T \{P(t)\} = 2.9244P(t)_3$$

... (j)

Análogamente se obtiene para las demás formas modales

FALLA DE ORIGEN

Forma del modo 2

$$[M_2] = 1.0 \quad \dots (k)$$

$$[k_2] = \{217.379235 \quad 71.534293 \quad -175.459608\} \{r_2\} = 1137.801587 \quad \dots (l)$$

$$[P_2] = -2.7507P(t)_3 \quad \dots (m)$$

Forma del modo 3

$$[M_3] = 1.0 \quad \dots (n)$$

$$[k_3] = \{416.19638 \quad -533.303916 \quad 205.469136\} \{r_3\} = 2797.832942 \quad \dots (o)$$

$$[P_3] = 1.3088P(t)_3 \quad \dots (p)$$

• TRANSFORMACION DEL SISTEMA DE 3 G.L. EN 3 SISTEMAS DE 1 G.L.

sustituyendo (h) hasta (p) en la ecuación (3.121)

$$f_1 + 159.2243097f_1 = 2.9244P(t)_3 \quad \dots (q)$$

$$f_2 + 1137.801587f_2 = -2.7507P(t)_3 \quad \dots (r)$$

$$f_3 + 2797.832942f_3 = 1.3088P(t)_3 \quad \dots (s)$$

• RESPUESTAS MAXIMAS DE LAS ECUACIONES DESACOPLADAS

Interesan las respuestas máximas de desplazamientos de las ecuaciones desacopladas de 1 G.L. (q), (r) y (s), que pueden obtenerse más fácilmente empleando el **Método numérico de evaluación de respuestas dinámicas** estudiado en el inciso 3.2.4. y programado en una calculadora de bolsillo (ver problema III, del inciso 3.2.4.1.).

Empleando dicho método programado con $w = w_0$ y $\xi = 0$ (o procediendo con cálculos manuales como en el problema IV del inciso citado), se obtienen las siguientes tablas y respuestas máximas

Ecuación (q) o Forma del modo 1

Tabla 3.39

t_1	$(2.9244)P_1$	x_1	\dot{x}_1	\ddot{x}_1
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0.0	0	0	0	0
0.03	43.866	0.007	0.65	42.826
0.06	87.732	0.051	2.509	79.588
0.09	87.732	0.160	4.662	62.254
0.12	87.732	0.324	6.133	36.105
0.15	43.866	0.514	6.127	-37.982

Tabla 3.39
(continuación)

t_i	$(2.9244)P_i$	x_i	\dot{x}_i	\ddot{x}_i
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0.18	0	0.670	3.930	-106.690
0.21	0	0.738	0.527	-117.466
0.24	0	0.701	-2.950	-111.609
0.27	0	0.565	-6.010	-89.948
0.30	0	0.349	-8.219	-55.550
0.33	0	0.083	-9.264	-13.287
0.36	0	-0.194	-8.998	30.858
0.39	0	-0.444	-7.457	70.633
0.42	0	-0.631	-4.860	100.407
0.45	0	-0.728	-1.575	115.963
0.48	0	-0.723	1.933	115.099
0.51	0	-0.615	5.167	97.937
0.54	0	-0.420	7.670	66.908
0.57	0	-0.166	9.086	26.404
0.60	0	0.112	9.216	-17.838
0.63	0	0.374	8.041	-59.555
0.66	0	0.583	5.728	-92.839
0.69	0	0.710	2.603	-112.977
0.72	0	0.736	-0.890	-117.117
0.75	0	0.657	-4.257	-104.674
0.78	0	0.486	-7.022	-77.409
0.81	0	0.246	-8.792	-39.183
0.84	0	-0.029	-9.317	4.591
0.87	0	-0.300	-8.523	47.715

de donde

$$f_{1 \max} = x_{1 \max} = 0.738 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.21 \text{ [seg]} \quad \dots(t)$$

Ecuación (r) o Forma del modo 2

Tabla 3.40

t_i	$(-2.7507)P_i$	x_i	\dot{x}_i	\ddot{x}_i
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0	0	0	0	0
0.015	-20.63025	-0.001	-0.151	-19.761
0.030	-41.2605	-0.006	-0.568	-34.570
0.045	-61.89075	-0.019	-1.145	-40.717
0.060	-82.521	-0.040	-1.738	-36.660
0.075	-82.521	-0.069	-2.047	-3.655
0.090	-82.521	-0.099	-1.843	30.266
0.105	-82.521	-0.122	-1.177	56.602
0.120	-82.521	-0.133	-0.216	68.754
0.135	-61.89075	-0.128	0.950	83.439

Tabla 3.40
(continuación)

t_i [s]	$(-2.7507)P_1$ [ton]	x_i [cm]	\dot{x}_i [cm/s]	\ddot{x}_i [cm/s ²]
0.150	-41.2605	-0.104	2.181	77.214
0.165	-20.63025	-0.064	3.169	51.641
0.180	0	-0.012	3.665	13.126
0.195	0	0.043	3.395	-48.439
0.210	0	0.086	2.273	-97.865
0.225	0	0.108	0.582	-122.768
0.240	0	0.103	-1.255	-116.906
0.255	0	0.072	-2.777	-81.749
0.270	0	0.023	-3.604	-26.106
0.285	0	-0.032	-3.527	36.079
0.300	0	-0.078	-2.567	89.222
0.315	0	-0.105	-0.963	120.008
0.330	0	-0.106	0.882	120.720
0.345	0	-0.080	2.506	91.182
0.360	0	-0.034	3.502	38.794
0.375	0	0.020	3.620	-23.315
0.390	0	0.070	2.832	-79.582
0.405	0	0.102	1.334	-115.906
0.420	0	0.108	-0.499	-123.185
0.435	0	0.088	-2.206	-99.596
0.450	0	0.045	-3.361	-51.048
0.465	0	-0.009	-3.673	10.292

de donde

$$f_{2\max} = x_{1\max} = -0.133 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.12 \text{ [seg]} \quad \dots(u)$$

Ecuación (s) o Forma del modo 3

Tabla 3.41

t_i [s]	$(1.3088)P_1$ [ton]	x_i [cm]	\dot{x}_i [cm/s]	\ddot{x}_i [cm/s ²]
0	0	0	0	0
0.01	6.544	0.00011	0.032	6.243
0.02	13.088	0.00082	0.119	10.780
0.03	19.632	0.00260	0.238	12.370
0.04	26.176	0.00557	0.355	10.580
0.05	32.720	0.00959	0.440	5.897
0.06	39.264	0.01418	0.468	-0.397
0.07	39.264	0.01862	0.400	-12.826
0.08	39.264	0.02181	0.223	-21.749
0.09	39.264	0.02287	-0.015	-24.728
0.10	39.264	0.02152	-0.249	-20.948

Tabla 3.41
(continuación)

t_i	$(1.3088)P_i$	x_i	\dot{x}_i	\ddot{x}_i
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0.11	39.264	0.01812	-0.415	-11.443
0.12	39.264	0.01361	-0.467	1.190
0.13	32.720	0.00910	-0.424	7.254
0.14	26.176	0.00530	-0.329	11.336
0.15	19.632	0.00261	-0.208	12.319
0.16	13.088	0.00113	-0.094	9.935
0.17	6.544	0.00061	-0.018	4.836
0.18	0	0.00057	-0.001	-1.585
0.19	0	0.00048	-0.016	-1.330
0.20	0	0.00025	-0.027	-0.711
0.21	0	-0.00004	-0.030	0.102
0.22	0	-0.00032	-0.025	0.887
0.23	0	-0.00051	-0.013	1.430
0.24	0	-0.00057	0.002	1.582
0.25	0	-0.00047	0.017	1.302

de donde

$$f_{3\max} = x_{1\max} = 0.02287 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.09 \text{ [seg]} \quad \dots (v)$$

● ECUACIONES DE RESPUESTA DINAMICA DE DESPLAZAMIENTOS DEL SISTEMA DE 3 G.L.

sustituyendo (t), (u) y (v) en (g) y efectuando el producto matricial

$$x_1 = (1.5833)(0.738) - (2.6758)(0.133) + (2.0840)(0.02287)$$

$$x_2 = (2.3623)(0.738) - (1.0275)(0.133) - (3.1156)(0.02287)$$

$$x_3 = (2.9244)(0.738) + (2.7507)(0.133) + (1.3088)(0.02287)$$

De las ecuaciones (t), (u) y (v) puede observarse que el máximo de cada forma modal no se presenta en el mismo tiempo t

● RESPUESTA MAXIMA POSIBLE

de la ecuación (3.126a)

$$x_{1\max} = (1.5833)(0.738) + (2.6758)(0.133) + (2.0840)(0.02287) = 1.572 \text{ [cm]} \quad \dots (w)$$

$$x_{2\max} = (2.3623)(0.738) + (1.0275)(0.133) + (3.1156)(0.02287) = 1.951 \text{ [cm]} \quad \dots (x)$$

$$x_{3\max} = (2.9244)(0.738) + (2.7507)(0.133) + (1.3088)(0.02287) = 2.554 \text{ [cm]} \quad \dots (y)$$

● RESPUESTA MÁXIMA PROBABLE

de la ecuación (3.126b)

$$X_{1\text{res}} = \{[1.5833(0.738)]^2 + [2.6758(0.133)]^2 + [2.0840(0.02287)]^2\}^{0.5} = 1.2224 \text{ [cm]} \dots(\text{aa})$$

$$X_{2\text{res}} = \{[2.3623(0.738)]^2 + [1.0275(0.133)]^2 + [3.1156(0.02287)]^2\}^{0.5} = 1.7502 \text{ [cm]} \dots(\text{ab})$$

$$X_{3\text{res}} = \{[2.9244(0.738)]^2 + [2.7507(0.133)]^2 + [1.3088(0.02287)]^2\}^{0.5} = 2.1892 \text{ [cm]} \dots(\text{ac})$$

b) Respuestas por el Método Modal Espectral

Usando un espectro de respuestas de sistemas de 1 G.L. para la función de excitación considerada, puede obtenerse la respuesta máxima del sistema de ecuaciones desacopladas muy fácilmente; a esta forma de proceder se le denomina Método Modal Espectral y en detalle se estudiará en el Tema IV.

Para la función excitatriz considerada (figura 3.122b), los espectros de respuestas fueron calculados y graficados en los problemas V, inciso 3.2.3.1., y IV, inciso 3.2.3.2., y se muestran en las figuras 3.62a y 3.67. De dichas figuras se obtiene

Forma del modo 1

de la figura 3.67 y como se cumple que $(T_1/4 + 1.5t_d) = (0.4979/4 + 1.5(0.06)) = 0.21 > [t = 0.18]$, para $T_1/t_d = 8.3$

se encuentra $X_{1\text{max}}/X_{\text{est1}} = 1.339$

de la ecuación (3.27) e (l),(l) y la figura 3.122b

$$X_{\text{est1}} = P_{01}/[k_1] = (2.9244)(30)/159.2243097 = 0.551$$

y por tanto

$$f_{1\text{max}} = X_{1\text{max}} = (1.339)(0.551) = 0.737789 \approx 0.738 \dots(\text{ad})$$

Forma del modo 2

de la figura 3.62a y como se cumple que $(T_2 + t_d)/2 = (0.1863 + 0.06)/2 = 0.12 > [t_d = 0.06]$, para $T_2/t_d = 3.105$

se encuentra $X_{2\text{max}}/X_{\text{est2}} = 1.839$

de la ecuación (3.27) y (l),(m) y la figura 3.122b

$$X_{\text{est2}} = P_{02}/[k_2] = (-2.7507)(30)/1137.801587 = -0.07253$$

y por tanto

$$f_{2\text{max}} = X_{2\text{max}} = (-0.07253)(1.839) = -0.13338 \approx -0.133 \dots(\text{ae})$$

FALLA DE ORIGEN

Forma del modo 3

De la figura 3.62a y como se cumple que $(T_3 + t_d)/2 = (0.1188 + 0.06)/2 = 0.09 > [t_d = 0.06]$, para $T_3/t_d = 1.98$

se encuentra $X_{3max}/X_{est3} = 1.637$

de la ecuación (3.27) y (c), (p) y la figura 3.122b

$$X_{est3} = P_{o3}/[k_3] = (1.3088)(30)/2797.832942 = 0.01403371853$$

y por tanto

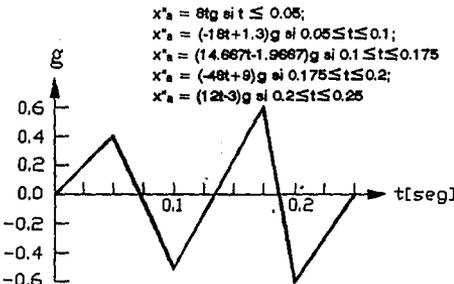
$$f_{3max} = X_{3max} = (0.01403371853)(1.637) \approx 0.023 \quad \dots (af)$$

Comparando (ad), (ae) y (af) con (t), (u) y (v) se observa que las respuestas máximas son las mismas; pero la obtención de éstas por el Método Modal Espectral es más fácil que por el Método de Superposición Modal.

IV.- Determinar los desplazamientos máximos de los pisos relativos a la cimentación, y las fuerzas laterales sísmicas correspondientes, que tendrá que resistir el marco plano del problema V, del inciso 3.3.1.7, figura 3.110, si es excitado por un sismo con el acelerograma indicado en la figura 3.123. Usar un modelo de marco plano y el criterio de respuestas máximas probables.

• MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES

En el problema V del inciso 3.3.1.7., se calculó para el modelo de marco plano las siguientes matrices (en [ton,mts,seg])



$$K^* = \begin{bmatrix} 37945.5306 & -11759.4663 \\ -11759.4663 & 9674.24286 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 8.157729704 & 0 \\ 0 & 5.710410793 \end{bmatrix}$$

Figura 3.123. Acelerograma aplicado a la cimentación del marco plano de la figura 3.110.

Por procedimientos de Geometría Analítica (o vease problema II, inciso 3.2.3.1.), se establecen las ecuaciones de las rectas indicadas en el acelerograma.

● FRECUENCIAS ANGULARES, PERIODOS DE OSCILACION Y FORMAS DE LOS MODOS DE VIBRACION

En el citado problema también se obtuvo

$$\{z\}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.6008 \end{bmatrix}$$

$$\{z\}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.549 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = 30.039 \text{ [r/s]}; \quad T_1 = 0.2092 \text{ [seg]}$$

$$w_2 = 73.779 \text{ [r/s]}; \quad T_2 = 0.08516 \text{ [seg]}$$

● NORMALIZACION DE MODOS

Forma del modo 1

de la ecuación (3.69)

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.6008 \\ 8.157729704 & 0 \\ 0 & 5.710410793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.6008 \end{bmatrix} = 46.78386563 = (N_1)^2$$

$$N_1 = 6.839873217$$

y de la ecuación (3.70)

$$\{r\}_1 = \begin{bmatrix} 0.146202 \\ 0.380241 \end{bmatrix}$$

Análogamente para la forma del modo 2

$$(N_2)^2 = \{8.157729704 \quad -3.135015525\} \{z\}_2 = 9.878853227$$

$$N_2 = 3.143064305$$

$$\{r\}_2 = \begin{bmatrix} 0.318161 \\ -0.174670 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la respuesta del sistema de 2 G.L. es según la ecuación (3.128)

$$\begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.146202 & 0.318161 \\ 0.380241 & -0.174670 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad \dots (a)$$

● RESPUESTAS POR EL METODO DE SUPERPOSICION MODAL

Forma del modo 1

de la ecuación (3.74) y por ser modos normalizados respecto a M $[M_1] = 1.0 \quad \dots (b)$

de la ecuación (3.75)

$$[k_1] = \{r\}^T K \{r\}_1 = \{1076.281239 \quad 1959.286287\} \{r_1\} = 902.3554468 \quad \dots(c)$$

el coeficiente de participación es según la ecuación (3.131)

$$c_1 = -\{r\}^T M \{1\} / [M_1] = \{-1.192676398 \quad -2.17133231\} \{1\} = -3.364008708 \quad \dots(d)$$

de manera similar, se tiene para la forma del modo 2

$$[M_2] = 1.0 \quad \dots(e)$$

$$[k_2] = \{14126.81394 \quad -5431.203558\} \{r\}_2 = 5443.269575 \quad \dots(f)$$

$$c_2 = \{-2.59547144 \quad 0.9974374532\} \{1\} = -1.598033987 \quad \dots(g)$$

• TRANSFORMACION DEL SISTEMA DE 2 G.L. EN 2 SISTEMAS DE 1 G.L.

sustituyendo (b) hasta (g) en la ecuación (3.130) se obtiene

$$P_1 + 902.3554468f_1 = -3.364008708x_1 \quad \dots(h)$$

$$P_2 + 5443.269575f_2 = -1.598033987x_2 \quad \dots(i)$$

• RESPUESTAS MAXIMAS DE LAS ECUACIONES DESACOPLADAS

Empleando el Método Numérico de Evaluación de Respuestas (ver Inciso 3.2.4.), programado en una calculadora de bolsillo (o procediendo manualmente como en el problema IV del Inciso 3.2.4.1.), se obtiene las siguientes tablas y respuestas máximas

para la ecuación (h) o forma del modo 1

t_i	$P_1 = -3.364008708x_1$	x_r	\dot{x}_r	\ddot{x}_r
[s]	[s]	[m]	[m/s]	[m/s ²]
0	0	0	0	0
0.02	-5.278	0.00035	-0.051	-4.966
0.04	-10.557	-0.00262	-0.187	-8.194
0.06	-7.258	-0.00751	-0.276	-0.481
0.08	4.619	-0.01203	-0.122	15.472
0.10	16.495	-0.01054	0.306	26.005
0.12	6.818	-0.00037	0.648	7.151
0.14	-2.860	0.01258	0.575	-14.208
0.16	-12.537	0.02001	0.113	-30.590
0.18	-11.876	0.01624	-0.476	-26.532
0.20	19.794	0.00421	-0.585	15.995
0.22	11.876	-0.00421	-0.258	15.671
0.24	3.959	-0.00654	0.005	9.86

Tabla 3.42
(continuación)

t_i [s]	$P_1 = -3.364008708 \times 10^{-4}$ [t]	x_r [m]	\dot{x}_r [m/s]	\ddot{x}_r [m/s ²]
0.26	0	-0.00479	0.151	4.32
0.28	0	-0.00110	0.206	0.992
0.30	0	0.00297	0.189	-2.683
0.32	0	0.00601	0.105	-5.419
0.34	0	0.00693	-0.015	-6.257
0.36	0	0.00543	-0.130	-4.903
0.38	0	0.00203	-0.200	-1.833
0.40	0	-0.00208	-0.199	1.88
0.42	0	-0.00547	-0.129	4.934
0.44	0	-0.00694	-0.014	6.260
0.46	0	-0.00598	0.107	5.394

de donde

$$f_{1\max} = x_{r\max} = 0.02001 \text{ [m]} \text{ para } t = 0.16 \text{ [seg]} \quad \dots (j)$$

para la ecuación (i) o forma del modo 2

Tabla 3.43

t_i [s]	$P_1 = -1.598033987 \times 10^{-4}$ [t]	x_r [m]	\dot{x}_r [m/s]	\ddot{x}_r [m/s ²]
0	0	0	0	0
0.01	-1.254	-0.00002	-0.006	-1.143
0.02	-2.507	-0.00015	-0.021	-1.691
0.03	-3.761	-0.00044	-0.037	-1.360
0.04	-5.015	-0.00086	-0.046	-0.322
0.05	-6.269	-0.00131	-0.043	0.884
0.06	-3.448	-0.00162	-0.010	5.345
0.07	-0.627	-0.00141	0.055	7.027
0.08	2.194	-0.00053	0.118	5.054
0.09	5.015	0.00084	0.147	0.452
0.10	7.836	0.00224	0.126	-4.384
0.11	5.537	0.00315	0.043	-11.609
0.12	3.239	0.00295	-0.085	-12.795
0.13	0.940	0.00152	-0.191	-7.328
0.14	-1.358	-0.00061	-0.219	1.951
0.15	-3.657	-0.00255	-0.155	10.215
0.16	-5.955	-0.00351	-0.033	13.166
0.17	-8.254	-0.00322	0.085	9.270
0.18	-5.642	-0.00196	0.160	5.029
0.19	1.881	-0.00014	0.200	2.651
0.20	9.403	0.00193	0.208	-1.107
0.21	7.522	0.00374	0.135	-12.862

Tabla 3.43
(continuación)

t_i	$P_i = -1.598033987x^a$	x_r	x'_r	x''_r
[s]	[t]	[m]	[m/s]	[m/s ²]
0.22	5.642	0.00433	-0.026	-17.927
0.23	3.761	0.00320	-0.192	-13.669
0.24	1.881	0.00077	-0.276	-2.301
0.25	0	-0.00189	-0.234	10.262
0.26	0	-0.00353	-0.080	19.204
0.27	0	-0.00334	0.116	18.158
0.28	0	-0.00141	0.252	7.668
0.29	0	0.00125	0.256	-6.809
0.30	0	0.00326	0.127	-17.746
0.31	0	0.00357	-0.068	-19.453
0.32	0	0.00203	-0.227	-11.043
0.33	0	-0.00057	-0.269	3.110
0.34	0	-0.00287	-0.171	15.646
0.35	0	-0.00368	0.016	20.044
0.36	0	-0.00258	0.195	14.018
0.37	0	-0.00013	0.272	0.702
0.38	0	0.00238	0.208	-12.980

de donde $f_{2max} = x_{rmax} = 0.00433 [m]$ para $t = 0.22 [seg]$... (k)

sustituyendo (j) y (k) en (a) y efectuando el producto matricial

$$x_{1r} = 0.146202(0.02001) + 0.318161(0.00433) = 0.00292550202 + 0.00137763713$$

$$x_{2r} = 0.380241(0.02001) - 0.17487(0.00433) = 0.00760862241 - 7.563211(10^{-4})$$

● RESPUESTA MAXIMA PROBABLE

De la ecuación (3.126b) las respuestas máximas de desplazamientos son

$$x_{1rmax} = \{0.00292550202^2 + 0.00137763713^2\}^{0.5} = 0.00323 [m] = 0.323 [cm] \dots (l)$$

$$x_{2rmax} = \{0.00760862241^2 + [-7.563211(10^{-4})]^2\}^{0.5} = 0.00765 [m] = 0.765 [cm] \dots (m)$$

● FUERZAS SISMICAS EN LOS PISOS

De la ecuación (3.98), K^s , x_{1r} y x_{2r} se tiene para cada forma modal

Forma del modo 1

$$\begin{bmatrix} F_{N1} \\ F_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37945.5306 \\ -11759.4663 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11759.4663 \\ 9674.24286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00292550202 \\ 0.00760862241 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.5363876 \\ 39.20531861 \end{bmatrix}$$

Forma del modo 2

$$\begin{bmatrix} F_{N1} \\ F_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37945.5306 & -11759.4663 \\ -11759.4663 & 9674.24286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00137763713 \\ -7.563211E-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61.16910436 \\ -23.51711141 \end{bmatrix}$$

y de la ecuación (3.126b)

$$F_{N1\text{arra}} = \{21.5363876^2 + 61.16910436^2\}^{0.5} = 64.85 \text{ [ton]}$$

$$F_{N2\text{arra}} = \{39.20531861^2 + 23.51711141^2\}^{0.5} = 45.72 \text{ [ton]}$$

Entonces la resistencia de los elementos estructurales del marco podrá revisarse contra los elementos mecánicos máximos probables, que son el producto del análisis estructural del marco bajo la acción de las fuerzas sísmicas F_{N1} y F_{N2} , para cada modo y obteniendo posteriormente dichos elementos mecánicos con la ecuación (3.126b).

3.3.3.4.- PROBLEMAS PROPUESTOS

I.- Para el marco plano mostrado en la figura 3.124a, que puede ser modelado como estructura de cortante, determinar, despreciando el amortiguamiento, las respuestas máximas de desplazamientos dinámicos, si las masas del marco están sujetas a la acción de las fuerzas excitatrices que tienen las gráficas mostradas en la figura 3.124b. Una inspección de la estructura indicó que las traveses pueden considerarse infinitamente rígidas respecto a las columnas.

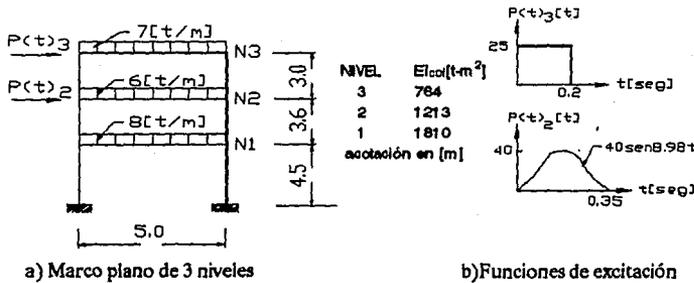


Figura 3.124. Marco plano integrante de una estructura de cortante con traveses ∞ rígidas

Solución: $x_{1\text{abs}} = 3.142 \text{ [cm]}$, $x_{2\text{abs}} = 6.197 \text{ [cm]}$, $x_{3\text{abs}} = 9.074 \text{ [cm]}$, $x_{1\text{res}} = 2.521 \text{ [cm]}$, $x_{2\text{res}} = 5.541 \text{ [cm]}$, $x_{3\text{res}} = 8.654 \text{ [cm]}$.

II.- Si el marco plano de la figura 3.112, inciso 3.3.1.8, es sujeto a la acción de un movimiento del suelo con la gráfica mostrada en la figura 3.125, determinar usando un modelo de marco plano y despreciando

el amortiguamiento, los desplazamientos máximos de los pisos relativos a la base y las fuerzas laterales correspondientes que tendrá que resistir. Emplear el criterio de la respuesta máxima probable.

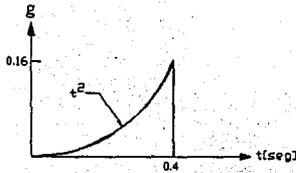


Figura 3.125. Función del movimiento del terreno para el marco plano de la figura 3.112.

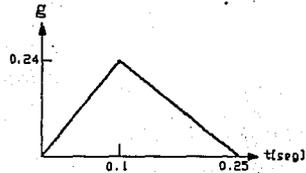


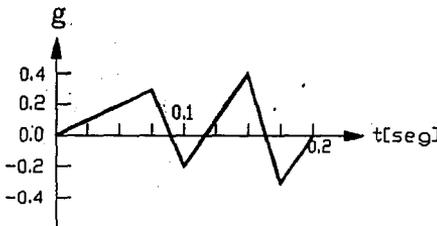
Figura 3.126. Función de aceleración del suelo para el marco de la figura 3.114.

Solución: $x_{1\text{arso}} = 1.692 \text{ [cm]}$, $x_{2\text{arso}} = 3.1582 \text{ [cm]}$, $F_{N1\text{arso}} = 10.257 \text{ [ton]}$, $F_{N2\text{arso}} = 18.705 \text{ [ton]}$

III.- Calcular, empleando el criterio de respuestas máximas probables, los desplazamientos y las fuerzas sísmicas en los pisos del marco plano de la figura 3.114, inciso 3.3.1.8, si es sometido a una aceleración del terreno con la gráfica mostrada en la figura 3.126. Usar un modelo dinámico de marco plano despreciando el amortiguamiento.

Solución: $x_{1\text{arso}} = 2.088 \text{ [cm]}$, $x_{2\text{arso}} = 2.904 \text{ [cm]}$, $x_{3\text{arso}} = 3.401 \text{ [cm]}$, $F_{N1\text{arso}} = 7.975 \text{ [ton]}$, $F_{N2\text{arso}} = 7.4805 \text{ [ton]}$, $F_{N3\text{arso}} = 10.428 \text{ [ton]}$.

IV.- Determinar los desplazamientos máximos de los pisos relativos a la cimentación, y las fuerzas sísmicas correspondientes, que tendrá que resistir el sistema oscilatorio simplemente acoplado de la figura 3.117, inciso 3.3.2.5., si es excitado por un sismo con el acelerograma mostrado en la figura 3.127. Usar el criterio de respuestas máximas probables, despreciando el amortiguamiento.



Solución: $x_{1\text{arso}} = 5.885 \text{ [cm]}$,
 $x_{2\text{arso}} = 12.5697 \text{ [cm]}$, $x_{3\text{arso}} = 17.2829 \text{ [cm]}$,
 $F_{N1\text{arso}} = 60.241 \text{ [ton]}$, $F_{N2\text{arso}} = 58.858 \text{ [ton]}$,
 $F_{N3\text{arso}} = 23.823 \text{ [ton]}$.

Figura 3.127. Acelerograma aplicado a la cimentación del sistema de la figura 3.117.

3.3.4.- EFECTOS DEL AMORTIGUAMIENTO.

El amortiguamiento estructural que comunemente se reemplaza por el amortiguamiento viscoso para facilitar el análisis^[ref. 1], es una propiedad que influye en las respuestas dinámicas de un sistema oscilatorio; este tipo de amortiguamiento toma en cuenta fuentes de disipación de la energía del movimiento como son^[ref. 2]: fricciones internas del material estructural, fricciones en los apoyos y en elementos no estructurales, etc. La magnitud de la aportación al amortiguamiento de cada una de estas fuentes es muy difícil de cuantificar con precisión.

El amortiguamiento normalmente presente en las estructuras civiles es relativamente pequeño (menor al 20%^[ref. 1]), y para efectos prácticos no afectará el cálculo de las frecuencias angulares y formas de los modos de vibración de el sistema oscilatorio. Entonces el problema de valores característicos para una estructura amor-

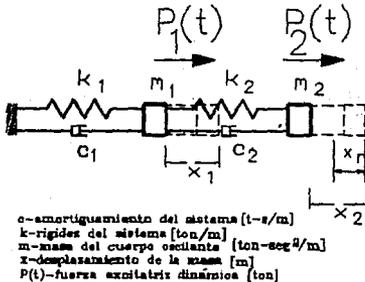


Figura 3.128. Sistema discreto compuesto de 2 G.L. en vibración forzada con amortiguamiento

tuada es resuelto como si se tratara de un sistema sin amortiguamiento^[ref. 12].

Con referencia a las figuras 3.128 y 3.129, la ecuación general del movimiento forzado amortiguado puede expresarse matricialmente como

$$M\{x''\} + C\{x'\} + k\{x\} = \{P(t)\} \quad \dots(3.132)$$

Ecuación general del movimiento forzado con amortiguamiento

C -matriz de amortiguamiento del sistema

$\{x'\}$ -vector de velocidades de las masas del sistema

Esta ecuación puede ser transformada por el método de superposición modal presentado en los incisos 3.3.1.1. y 3.3.3.1. anteriores, en un sistema de n ecuaciones desacopladas o independientes de 1 G.L., que para cada modo de vibrar j son

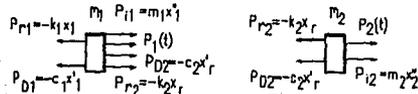
$$[M_j]P_j + [C_j]P_j + [K_j]P_j = [P_j] \quad \dots(3.133)$$

Ecuación desacoplada o independiente para la forma del modo j

donde

$$[C_j] = \{z\}^T [C] \{z\} \quad \dots(3.134)$$

$[C_j]$ -amortiguamiento transformado para la forma del modo j



P_r -fuerza restauradora del resorte [ton]

P_l -fuerza de inercia [ton]

P_1 -fuerza amortiguadora del pistón [ton]

x' -aceleración de la masa [m/s²]

v -velocidad de la masa [m/s]

Figura 3.129. Diagrama de cuerpo libre del sistema compuesto de la figura 3.128

f_j : función de velocidad en la coordenada generalizada para el modo j

Los demás términos de la ecuación (3.133) son los mismos definidos anteriormente por las ecuaciones (3.74), (3.75) y (3.123).

La ecuación general del movimiento puede expresarse también en la forma

$$\ddot{r}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{r}_j + (\omega_j^2) r_j = [P_j]/[M_j] \quad \dots (3.135)$$

Ecuación desacoplada o independiente para la forma del modo j

ξ_j : porcentaje de amortiguamiento crítico asociado a la forma modal j

En la ecuación (3.134) se ha supuesto que el vector $\{z_j\}$ es ortogonal a la matriz de amortiguamiento C , lo cual generalmente no sucede, a menos que se exprese la matriz C en forma proporcional a la matriz K , a la matriz M , o a ambas simultáneamente^[ref. 13], mediante el uso de los denominados **porcentajes de amortiguamiento crítico proporcionales** ξ_j asociados a cada forma modal j , obtenidos con

$$C = \alpha_1 M + \alpha_2 K \quad \dots (3.136)$$

α_1, α_2 : coeficientes de proporcionalidad

Los porcentajes de amortiguamiento crítico proporcional se determinan para un sistema oscilatorio en particular mediante experimentos de vibración libre o forzada midiendo desplazamientos consecutivos en cada forma del modo de vibrar, de manera análoga al empleo del decremento logarítmico estudiado en el inciso 3.2.2.2.

3.3.4.1. VIBRACION FORZADA EN LA BASE CON AMORTIGUAMIENTO

Si la cimentación de un sistema oscilatorio de n G.L., es excitada por una aceleración del suelo en función del tiempo, puede demostrarse que la ecuación general del movimiento es

$$M\{x''_r\} + C\{x'_r\} + K\{x_r\} = -M\{1\}x''_a \dots (3.137)$$

$\{x''_r\}, \{x'_r\}, \{x_r\}$ - vectores de aceleración, velocidad, y desplazamiento de las masas respecto a la base

Cuya solución está dada por la ecuación (3.128) del inciso 3.3.3.2., y puede ser transformada mediante el Método Directo Paso a Paso de Superposición Modal en un sistema de n ecuaciones desacopladas o independientes que son expresadas para cada forma modal j como

$$[M_j]\ddot{r}_j + [C_j]\dot{r}_j + [k_j]r_j = -\{z_j\}^T M\{1\}x''_a \dots (3.138)$$

Ecuación desacoplada o independiente para la forma del modo j

que puede escribirse como

$$\ddot{r}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{r}_j + (\omega_j^2) r_j = c_j x''_a \quad \dots (3.139)$$

Donde el coeficiente de participación c_j está dado por la ecuación (3.131), del inciso 3.3.3.2.

3.3.4.2.- AMORTIGUAMIENTO EN ESTRUCTURAS COMPLETAS.

En los reportes de ensayos de vibraciones libres y forzadas en estructuras completas a base de marcos, o marcos y muros de cortante, enfocados a la determinación de los grados de amortiguamiento correspondientes a cada forma del modo de vibración, se encuentra que el porcentaje

de amortiguamiento crítico ξ_j depende casi exclusivamente del tipo de estructura y de los materiales estructurales utilizados^[ref. 13].

Este porcentaje aumenta generalmente con el grado o nivel de degradación de la estructura y con la amplitud de la vibración, así por ejemplo cuando el concreto reforzado se agrieta durante una vibración, aumenta su porcentaje de amortiguamiento debido al aumento de fricción entre las grietas. En estructuras de acero la disipación de energía tiene lugar casi totalmente por deformaciones internas permanentes^[ref. 13].

Como se verá en el inciso 3.5 de este tema, la energía inyectada por un sismo se disipa principalmente en la actividad inelástica o de deformaciones permanentes del sistema: por ejemplo, la fluencia de un elemento estructural equivale a una amortiguación viscosa del 16% de la crítica en vibración armónica, y del 4% en vibración arbitraria (sismos)^[ref. 1].

En los experimentos para determinar los porcentajes de amortiguamiento crítico, formas modales, períodos de vibración, etc., en estructuras reales para compararlos contra los teóricos que sirvieron para el diseño o para la revisión de una estructura existente, se usan sistemas excitatrices de diversa índole que van desde cables que tensan la estructura y la sueltan repentinamente, hasta sofisticadas máquinas reciprocantes adaptadas a computadores analógicos que excitan

la estructura armónicamente con fuerzas y frecuencias controladas^[ref. 1].

Si se emplea el Método Directo paso a paso de superposición modal y se han obtenido ya experimentalmente los porcentajes de amortiguamiento crítico proporcionales, éstos pueden sustituirse directamente en la ecuación (3.135) o (3.139) para cada forma modal. Entonces al calcularse las respuestas máximas para cada ecuación desacoplada, puede obtenerse la respuesta del sistema de n G.L. con las ecuaciones (3.71), (3.72) o (3.128).

Al diseñarse una estructura civil no es posible conocer los porcentajes de amortiguamiento crítico asociados a cada modo de vibración, ya que la estructura no está construida. En estructuras existentes que se revisan sísmicamente, raramente se efectúan experimentos para determinar dichos porcentajes^[ref. 1.] (excepto en edificios muy importantes por su función).

En el diseño de estructuras podrían suponerse los porcentajes de amortiguamiento crítico que debería tener la estructura al construirse; pero debido a la incertidumbre existente en la calidad de los materiales estructurales, en la elaboración del concreto, en los procesos constructivos usados, etc., el sistema estructural no tendrá dichos porcentajes en la realidad. No obstante en la práctica, al efectuar un análisis paso a paso, es usual suponer porcentajes de amortiguamiento del 5% constantes para todos los

modos de vibración, a menos que se justifique otro valor experimentalmente^[ref. 2]. "La falta de datos precisos sobre el amortiguamiento hace que

raras veces se justifique un tratamiento más refinado"^[ref. 13].

3.3.4.3.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Deducir las expresiones que describen el movimiento forzado con amortiguamiento de sistemas discretos de varios G.L.

En la figura 3.128 del inciso 3.3.4., se muestra un sistema discreto de 2 G.L., que a diferencia del estudiado en el problema I del inciso 3.3.3.3., pierde energía de movimiento debido a la presencia de los amortiguadores con constantes de amortiguamiento viscoso c_1 y c_2 , que producen las dos fuerzas opuestas al movimiento P_{D1} y P_{D2} .

En el problema mencionado se establecieron las siguientes expresiones

$$P_{r1} = -k_1 x_1 \quad \dots (a)$$

$$P_{i1} = m_1 \ddot{x}_1 \quad \dots (b)$$

$$P_{r2} = -k_2 (x_2 - x_1) \quad \dots (c)$$

$$P_{i2} = m_2 \ddot{x}_2 \quad \dots (d)$$

Para la masa m_2 de la figura 3.128, la velocidad relativa o efectiva es igual a la velocidad total \dot{x}'_2 de dicha masa respecto a la posición de reposo, menos la velocidad de la masa m_1

$$\dot{x}'_r = \dot{x}'_2 - \dot{x}'_1 \quad \dots (e)$$

la fuerza amortiguadora P_{D2} del segundo pistón, que está también en movimiento, es entonces para este caso

$$P_{D2} = -c_2 \dot{x}'_r = -c_2 (\dot{x}'_2 - \dot{x}'_1) \quad \dots (f)^*$$

y para el primer pistón

$$P_{D1} = -c_1 \dot{x}'_1 \quad \dots (g)^*$$

Del equilibrio dinámico del diagrama de cuerpo en libertad de la figura 3.129, inciso 3.3.4., se tiene para cada masa

$$P_{r1} + P_{D1} = P_{i1} + P_{r2} + P_{D2} - P_1(t) \quad \dots (h)^{**}$$

$$P_{r2} + P_{D2} = P_{i2} - P_2(t) \quad \dots (i)^{**}$$

*El signo menos (-) es debido a que P_D y \dot{x}' son de sentido contrario

**El signo menos (-) es debido a que la masa se opone al movimiento

sustituyendo (a), (b), (c), (d), (e), (f) y (g) en (h) e (i)

$$-k_1x_1 - c_1x'_1 = m_1x''_1 - k_2(x_2 - x_1) - c_2(x'_2 - x'_1) - P_1(t)$$

$$-k_2(x_2 - x_1) - c_2(x'_2 - x'_1) = m_2x''_2 - P_2(t)$$

de donde

$$m_1x''_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) + c_1x'_1 - c_2(x'_2 - x'_1) = P_1(t) \quad \dots(j)$$

$$m_2x''_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(x'_2 - x'_1) = P_2(t) \quad \dots(k)$$

y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$

o en forma general para un sistema compuesto de n G.L.

$$\mathbf{M}\{x''\} + \mathbf{C}\{x'\} + \mathbf{K}\{x\} = \{P(t)\} \quad \dots(3.132)$$

Ecuación general del movimiento forzado con amortiguamiento

C-matriz de amortiguamiento

{x'}-vector de velocidades de las masas

los demás términos de esta ecuación han sido definidos en ecuaciones anteriores.

Si se asume que esta ecuación tiene la misma respuesta que la del movimiento no amortiguado, dada por las ecuaciones (3.71) y (3.72), las derivadas 1a. y 2a. respecto al tiempo son

$$\{x'\} = \mathbf{Z}\{f'\} \quad \dots(l)$$

$$\{x''\} = \mathbf{Z}\{f''\} \quad \dots(m)$$

sustituyendo (l), (m) y la ecuación (3.72) en la ecuación (3.132)

$$\mathbf{MZ}\{f''\} + \mathbf{CZ}\{f'\} + \mathbf{KZ}\{f\} = \{P(t)\} \quad \dots(n)$$

premultiplicando por {z}^T

$$\{z\}^T \mathbf{M}\{z\}\{f''\} + \{z\}^T \mathbf{C}\{z\}\{f'\} + \{z\}^T \mathbf{K}\{z\}\{f\} = \{z\}^T \{P(t)\} \quad \dots(o)$$

Por las propiedades de ortogonalidad de los modos (ver problema I, inciso 3.3.3.3.), (o) puede escribirse como

$$\{z\}^T \mathbf{M}\{z\}_i \{f''\}_i + \{z\}^T \mathbf{C}\{z\}_i \{f'\}_i + \{z\}^T \mathbf{K}\{z\}_i \{f\}_i = \{z\}^T \{P(t)\}_i \quad \dots(p)$$

que para la forma del modo de vibrar j resulta

$$[M_j]\ddot{r}_j + [C_j]\dot{r}_j + [k_j]r_j = [P_j] \quad \dots(3.133)$$

Ecuación desacoplada o independiente para la forma del modo j

con

$$[C_j] = \{z\}^T [C] \{z\} \quad \dots(3.134)$$

$[C_j]$ -amortiguamiento transformado para la forma del modo j

y los demás términos son los mismos definidos anteriormente por las ecuaciones (3.74), (3.75) y (3.123). En la ecuación (3.133), se ha supuesto que los modos son ortogonales a la matriz de amortiguamiento C , por tanto de las ecuaciones (3.6) y (3.15), para este caso

$$[k_j] = (w_j^2)[M_j] \quad \dots(q)$$

$$[C_j] = 2\xi_j [M_j] w_j \quad \dots(r)$$

sustituyendo (q) y (r) en (3.133) y dividiendo entre $[M_j]$, resulta

$$\ddot{r}_j + 2\xi_j w_j \dot{r}_j + (w_j^2)r_j = [P_j]/[M_j] \quad \dots(3.135)$$

ξ_j -porcentaje de amortiguamiento crítico para la forma del modo j

sin embargo casi nunca será ortogonal la forma del modo j a la matriz C , excepto si los coeficientes de dicha matriz son **coeficientes de amortiguamiento crítico proporcionales**, los cuales hacen que la matriz C sea proporcional a la matriz K , a la matriz M , o a ambas cumpliendo con^[ref. 1]

$$C = \alpha_1 M + \alpha_2 K \quad \dots(3.136)$$

α_1, α_2 -coeficientes de proporcionalidad

Como se indicó en el inciso 3.3.4.2., dichos coeficientes o porcentajes de amortiguamiento crítico para cada forma modal, son obtenidos mediante experimentos de vibración libre o forzada en estructuras reales, y para fines de diseño es usual suponer $\xi_j = 0.05$ constante para todas las formas modales^[ref. 2]

• VIBRACION FORZADA EN LA BASE CON AMORTIGUAMIENTO

Análogamente al proceso anterior y a lo demostrado en el problema I del inciso 3.3.3.3., relacionado con este tópico, la ecuación del movimiento puede expresarse como

$$M\{\dot{x}'_r\} + C\{x'_r\} + K\{x_r\} = -M\{1\}x''_a \quad \dots(3.137)$$

$\{x'_r\}$ -vector de velocidades de las masas relativos a la base

cuya solución está dada por la ecuación (3.128), y las ecuaciones desacopladas para cada modo j son por analogía con la ecuación (3.129) y (3.130)

$$[M_j]\ddot{f}_j + [C_j]\dot{f}_j + [k_j]f_j = -\{z\}^T_j \mathbf{M}\{1\}x^*a \quad \dots(3.138)$$

Ecuación desacoplada o independiente para la forma del modo j

ó

$$\ddot{f}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{f}_j + (\omega_j^2)f_j = c_jx^*a \quad \dots(3.139)$$

donde el coeficiente de participación c_j es el definido por la ecuación (3.131).

II.- Resolver el problema IIIa) del inciso 3.3.3.3, considerando un porcentaje de amortiguamiento crítico del 5% constante para todas las formas de los modos de vibración.

● RESPUESTAS POR EL METODO DIRECTO PASO A PASO DE SUPERPOSICION MODAL

Para amortiguamiento subcrítico, que es el caso de las estructuras en Ingeniería Civil, las formas de los modos de vibración y valores característicos no son afectados por el amortiguamiento, por tanto estos valores son los mismos que se calcularon en el problema citado.

Sustituyendo los porcentajes de amortiguamiento para cada modo y las ecuaciones (h) a (p) obtenidas en el mencionado problema, en la ecuación (3.135), se tienen las siguientes ecuaciones desacopladas

$$\ddot{f}_1 + 2(0.05)(12.618)\dot{f}_1 + 159.2243097f_1 = 2.9244P_3(t) \quad \dots(a)$$

$$\ddot{f}_2 + 2(0.05)(33.731)\dot{f}_2 + 1137.801587f_2 = -2.7507P_3(t) \quad \dots(b)$$

$$\ddot{f}_3 + 2(0.05)(52.895)\dot{f}_3 + 2797.832942f_3 = 1.3088P_3(t) \quad \dots(c)$$

● RESPUESTAS MAXIMAS DE LAS ECUACIONES DESACOPLADAS

Empleando el Método Numérico de Evaluación de Respuestas Dinámicas del inciso 3.2.4., (o procediendo manualmente como en el problema III del inciso 3.2.4.1.), se obtienen las siguientes tablas y respuestas máximas para cada forma del modo

Ecuación (a) o forma del modo 1

Tabla 3.44

t_1	$2.9244P_1$	x_1	\dot{x}_1	\ddot{x}_1
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0	0	0	0	0
0.03	43.866	0.0065	0.6421	42.025
0.06	87.732	0.0502	2.4471	76.650
0.09	87.732	0.1556	4.479	57.312

Tabla 3.44
(continuación)

t_i	$2.9244P_i$	x_i	\dot{x}_i	x_i^2
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0.12	87.732	0.3119	5.8131	30.730
0.15	43.866	0.4893	5.6478	-41.161
0.18	0	0.6302	3.4278	-104.662
0.21	0	0.6846	0.1801	-109.235
0.24	0	0.6419	-2.9721	-98.460
0.27	0	0.5116	-5.5941	-74.404
0.30	0	0.3151	-7.3415	-40.904
0.33	0	0.082	-8.0038	-2.963
0.36	0	-0.1537	-7.5294	33.979
0.39	0	-0.3594	-6.0264	64.828
0.42	0	-0.5075	-3.7418	85.523
0.45	0	-0.5795	-1.0222	93.565
0.48	0	-0.5684	1.7385	88.308
0.51	0	-0.4787	4.1550	70.975
0.54	0	-0.3258	5.9044	44.424
0.57	0	-0.1333	6.7684	12.687
0.60	0	0.0705	6.6598	-19.635

de donde

$$f_{1 \max} = x_{1 \max} = 0.6846 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.21 \text{ [seg]} \quad \dots (d)$$

Ecuación (b) o forma del modo 2

Tabla 3.45

t_i	$-2.7507P_i$	x_i	\dot{x}_i	x_i^2
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0	0	0	0	0
0.015	-20.6325	-8E-4	-0.1490	-19.272
0.030	-41.2605	-0.0057	-0.5495	-32.879
0.045	-61.89075	-0.0180	-1.0914	-37.783
0.060	-82.521	-0.0385	-1.6353	-33.213
0.075	-82.521	-0.0656	-1.8991	-1.482
0.090	-82.521	-0.0931	-1.6859	29.045
0.105	-82.521	-0.1141	-1.0712	50.968
0.120	-82.521	-0.1240	-0.2251	59.356
0.135	-61.89075	-0.1201	0.7832	72.095
0.150	-41.2605	-0.1003	1.8457	66.589
0.165	-20.6325	-0.0658	2.7002	45.081
0.180	0	-0.0213	3.1481	13.622
0.195	0	0.0254	2.951	-38.884
0.210	0	0.0636	2.0426	-79.299

Tabla 3.46
(continuación)

t_i	$-2.7507P_i$	x_i	\dot{x}_i	\ddot{x}_i
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0.225	0	0.0844	0.6799	-96.343
0.240	0	0.0835	-0.7817	-92.416
0.255	0	0.0623	-1.9802	-64.199
0.270	0	0.0269	-2.6357	-21.687
0.285	0	-0.0134	-2.6148	24.027
0.300	0	-0.0484	-1.9560	61.614
0.315	0	-0.0698	-0.8517	82.291

de donde

$$f_{2\max} = x_{1\max} = -0.124 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.12 \text{ [seg]} \quad \dots (e)$$

Ecuación (c) o forma del modo 3

Tabla 3.46

t_i	$1.3088P_i$	x_i	\dot{x}_i	\ddot{x}_i
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]
0	0	0	0	0
0.01	6.544	0.0001	0.0314	6.081
0.02	13.088	0.0008	0.1151	10.230
0.03	19.632	0.0025	0.2261	11.441
0.04	26.176	0.0053	0.3335	9.545
0.05	32.720	0.0091	0.4088	5.205
0.06	39.264	0.0133	0.4337	-0.297
0.07	39.264	0.0174	0.3727	-11.517
0.08	39.264	0.0205	0.2156	-19.093
0.09	39.264	0.0216	0.0092	-21.196
0.10	39.264	0.0207	-0.189	-175.48
0.11	39.264	0.0180	-0.3267	-9.416
0.12	39.264	0.0144	-0.3703	0.804
0.13	32.720	0.0108	-0.3445	4.202
0.14	26.176	0.0077	-0.2906	6.307
0.15	19.632	0.0051	-0.2244	6.624
0.16	13.088	0.0031	-0.1641	5.161
0.17	6.544	0.0017	-0.1255	2.400
0.18	0	0.0005	-0.1178	-0.858
0.19	0	-0.0006	-0.1099	2.361
0.20	0	-0.0016	-0.0732	4.786
0.21	0	-0.0020	-0.0189	5.812
0.22	0	-0.0019	0.0376	5.237
0.23	0	-0.0013	0.0812	3.298

de donde

$$f_{3\max} = x_{1\max} = 0.0216 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.09 \text{ [seg]} \quad \dots (f)$$

● ECUACIONES DE RESPUESTA DINAMICA DE DESPLAZAMIENTOS DEL SISTEMA DE 3 G.L.

Sustituyendo (d), (e), (f) y la matriz modal normalizada calculada en el problema IIIa) del inciso 3.3.3.3, en la ecuación (3.72) y efectuando el producto matricial

$$x_1 = 1.5833(0.6846) + 2.6758(-0.124) + 2.084(0.0216) \quad \dots (g)$$

$$x_2 = 2.3623(0.6846) + 1.0275(-0.124) - 3.1156(0.0216) \quad \dots (h)$$

$$x_3 = 2.9244(0.6846) - 2.7507(-0.124) + 1.3088(0.0216) \quad \dots (i)$$

● RESPUESTA MAXIMA POSIBLE

De (g), (h) e (i) y la ecuación (3.126a)

$$x_{1abs} = 1.08392718 + 0.3317992 + 0.0450144 = 1.461 \text{ [cm]} \quad \dots (j)$$

$$x_{2abs} = 1.61723058 + 0.12741 + 0.06729696 = 1.812 \text{ [cm]} \quad \dots (k)$$

$$x_{3abs} = 2.00204424 + 0.3410868 + 0.02827008 = 2.371 \text{ [cm]} \quad \dots (l)$$

● RESPUESTA MAXIMA PROBABLE

De (g), (h) e (i) y la ecuación (3.126b)

$$x_{1pro} = \{(1.08392718)^2 + (0.3317992)^2 + (0.0450144)^2\}^{0.5} = 1.134 \text{ [cm]} \quad \dots (m)$$

$$x_{2pro} = \{(1.61723058)^2 + (0.12741)^2 + (0.06729696)^2\}^{0.5} = 1.624 \text{ [cm]} \quad \dots (n)$$

$$x_{3pro} = \{(2.00204424)^2 + (0.3410868)^2 + (0.02827008)^2\}^{0.5} = 2.031 \text{ [cm]} \quad \dots (o)$$

3.3.4.4.- PROBLEMAS PROPUESTOS.

I.- Resolver el problema I del inciso 3.3.3.4, considerando un porcentaje de amortiguamiento crítico del 5% constante para todas las formas de los modos de vibración.

Solución: $x_{1abs} = 2.886 \text{ [cm]}$, $x_{2abs} = 5.717 \text{ [cm]}$, $x_{3abs} = 8.386 \text{ [cm]}$, $x_{1pro} = 2.331 \text{ [cm]}$, $x_{2pro} = 5.131 \text{ [cm]}$, $x_{3pro} = 8.015 \text{ [cm]}$.

II.- Resolver el problema II del inciso 3.3.3.4, si se han determinado experimentalmente los porcentajes de amortiguamiento crítico proporcional asociados al modo 1 y 2, con un valor de 8% y 11%, respectivamente.

Solución: $x_{1pro} = 1.5003 \text{ [cm]}$, $x_{2pro} = 2.7997 \text{ [cm]}$, $F_{N1pro} = 9.344 \text{ [ton]}$, $F_{N2pro} = 16.622 \text{ [ton]}$.

3.4.- SISTEMAS CONTINUOS

Los sistemas continuos son aquellos que poseen propiedades de masa y rigidez distribuidas en forma continua a lo largo de sus miembros y ofrecen por tanto un número infinito de grados de libertad.

Las idealizaciones de estructuras consistentes en tratarlas con propiedades distribuidas son las que arrojan los resultados más precisos, pues en la realidad todas las estructuras tienen su masa y rigidez en forma distribuida; pero esta forma de análisis solo se presta en la práctica de Ingeniería al análisis de los sistemas más sencillos ya que el cálculo analítico de estructuras completas, que son los tipos más frecuentes de estructuras civiles, requiere de un trabajo tan grande que la posibilidad de llegar a una solución por tal medio solo tendría interés académico^[ref. 13].

A continuación se presentan algunos casos que son fundamentales y que se prestan a un tratamiento práctico como sistemas distribuidos.

3.4.1.- VIBRACION EN SISTEMAS CONTINUOS

ECUACION DE ONDA UNIDIMENSIONAL

La figura 3.130a muestra un cable flexible cuya masa está distribuida a lo largo del mismo. Una fuerza P constante en toda su longitud lo mantiene tensado.

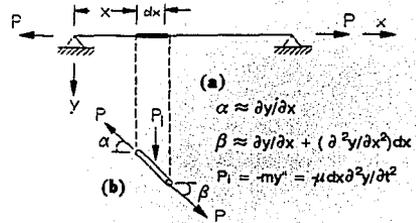


Figura 3.130. Cable en vibración transversal.

La figura 3.130b muestra un elemento infinitesimal que se ha aislado del cable para su análisis. Existen dos variables independientes: la posición x del elemento a lo largo del cable y el tiempo t, y por tal motivo se emplean derivadas parciales para obtener la ecuación del movimiento oscilatorio.

A partir del equilibrio dinámico de la citada figura se tiene^[ref. 1]

$$\mu dx \partial^2 y / \partial t^2 = -P \partial y / \partial x + P (\partial y / \partial x + \partial^2 y dx / \partial x^2) \dots (a)$$

de donde

$$\mu \partial^2 y / \partial t^2 = P \partial^2 y / \partial x^2 \dots (b)$$

μ - masa por unidad de longitud [ton-m²/m²]

y definiendo

$$(V^2)_0 = P / \mu \dots (3.140)$$

V₀ - velocidad de propagación de la onda

se tiene la siguiente ecuación de onda unidimensional

$$\partial^2 y / \partial t^2 = (V^2)_c \partial^2 y / \partial x^2 \quad \dots (3.141)$$

VIBRACION TRANSVERSAL DE CABLES

Con referencia a la figura 3.130b el desplazamiento "y" del elemento infinitesimal en cualquier instante puede encontrarse como el producto de dos funciones de las variables independientes

$$y = X(t) \quad \dots (c)$$

X-función pura de x

Si el sistema vibra en uno de sus modos naturales con frecuencia w , la función del tiempo puede estar dada por^[ref. 1]

$$f(t) = A_1 \cos wt + B_1 \sin wt \quad \dots (d)$$

A_1, B_1 -constantes que dependen de las condiciones iniciales

sustituyendo (d) en (c)

$$y = X(A_1 \cos wt + B_1 \sin wt) \quad \dots (e)$$

derivando respecto a x

1a. derivada

$$\partial y / \partial x = (A_1 \cos wt + B_1 \sin wt) dX / dx$$

2a. derivada

$$\partial^2 y / \partial x^2 = (A_1 \cos wt + B_1 \sin wt) d^2 X / dx^2 \quad \dots (f)$$

derivando respecto a t

1a. derivada

$$\partial y / \partial t = X(-A_1 w \sin wt + B_1 w \cos wt)$$

2a. derivada

$$\partial^2 y / \partial t^2 = -Xw^2(A_1 \cos wt + B_1 \sin wt) \quad \dots (g)$$

sustituyendo (f) y (g) en la ecuación (3.141)

$$-Xw^2(A_1 \cos wt + B_1 \sin wt) = (V^2)_c(A_1 \cos wt + B_1 \sin wt) d^2 X / dx^2$$

de donde

$$(V^2)_c d^2 X / dx^2 + Xw^2 = 0$$

dividiendo entre $(V^2)_c$

$$d^2 X / dx^2 + w^2 X / (V^2)_c = 0 \quad \dots (h)$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria (h) es

$$X = A_2 \cos(wx/V_c) + B_2 \sin(wx/V_c) \quad \dots (i)$$

A_2, B_2 son constantes que dependen de las condiciones de los extremos del cable (figura 3.130a), en $x = 0, y = 0$ y de (e) e (i) $A_2 = 0$; en $x = L, y = 0$ y $B_2 \sin(wL/V_c) = 0$

y por tanto

$$\arcsen(wL/V_c) = 0$$

$$wL/V_c = n\pi$$

y en general

$$w_n = n\pi V_c / L = n\pi [P/\mu]^{0.5} / L \quad \dots (3.142)$$

w_n -frecuencias angulares del sistema w_1, w_2, \dots, w_n [rad/s]

como $A_2 = 0$, de (i) y (e)

$$y = B_2[\text{sen}(wx/V_0)](A_1 \cos wt + B_1 \text{sen} wt) \dots (j)$$

por ser A_1, B_1 y B_2 constantes, (j) puede escribirse como

$$y = (A_0 \cos wt + B_0 \text{sen} wt) \text{sen}(wx/V_0) \dots (3.143)$$

A_0, B_0 -constantes que dependen de las condiciones iniciales

los valores máximos de la ecuación (3.143) están definidos por

$$X_n = \text{sen}(w_n x/V_0) \dots (k)$$

sustituyendo la ecuación (3.142) en (k)

$$X_n = \text{sen}(n\pi x/L) \dots (3.143a)$$

X_n -amplitudes componentes de las formas modales

por lo general el sistema oscila con una configuración que es una combinación de los diversos modos naturales; por el principio de superposición la ecuación general del movimiento se puede escribir entonces como

$$y = \sum_n (A_0^{(n)} \cos w_n t + B_0^{(n)} \text{sen} w_n t) \text{sen}(n\pi x/L) \dots (3.144)$$

cuya 1a. derivada es

$$y' = \sum_{n+1} (-A_0^{(n)} w_n \text{sen} w_n t + B_0^{(n)} w_n \cos w_n t) \text{sen}(n\pi x/L) \dots (l)$$

para $t = 0$, de (3.144) y (l)

$$y_0(x) = \sum_n A_0^{(n)} \text{sen}(n\pi x/L) \dots (m)$$

$$y'_0(x) = \sum_{n+1} w_n B_0^{(n)} \text{sen}(n\pi x/L) \dots (n)$$

multiplicando ambos lados de la ecuación (n) por $\text{sen}(n'\pi x/L)$ e integrando de $x = 0$ a $x = L$, se obtiene

$$\int_0^L y_0(x) \text{sen}(n'\pi x/L) dx = A_0^{(n)} \int_0^L \text{sen}(n\pi x/L) \text{sen}(n'\pi x/L) dx \dots (o)$$

si $n \neq n'$, la integral de la parte derecha de (o) es cero, y para $n = n'$ vale $L/2$, por tanto

$$A_0^{(n)} = (2/L) \int_0^L y_0(x) \text{sen}(n\pi x/L) dx \dots (3.145)$$

analogamente para la ecuación (n) se tiene

$$B_0^{(n)} = (2/w_n L) \int_0^L y'_0(x) \text{sen}(n\pi x/L) dx \dots (3.146)$$

$y_0(x)$ -configuración estática inicial del cable

3.4.2.- DISCRETIZACION DE SISTEMAS CONTINUOS

De los sistemas con masa y rigidez distribuidas, únicamente los casos más simples y sencillos se prestan al cálculo analítico de las respuestas dinámicas, formas de los modos de vibrar, frecuencias naturales de vibración, etc., mediante un tratamiento como sistemas continuos.

En la práctica, con ayuda de programas de cómputo, aplicando el método de superposición modal, estudiado en el inciso 3.3, y empleando un criterio de discretización de masas es posible cal-

cular con la aproximación deseada, las respuestas dinámicas de los sistemas continuos^[ref. 15].

El caso práctico más común de discretización de sistemas continuos es el de los elementos rectos horizontales (vigas, traves, etc.), ya que el de marcos planos es resuelto usualmente como sistemas discretos de varios G.L., en el que las masas se suponen concentradas en los niveles de los pisos despreciando los grados de libertad dinámicos producto de aceleraciones verticales y rotacionales, y empleando el criterio de discretización y los métodos de solución presentados en el inciso 3.3. Con este procedimiento se introducen errores insignificantes en los marcos planos^[ref. 13].

Considerando un segmento recto como el mostrado en la figura 3.131, si se eligen como grados de libertad dinámicos v y θ , con los sentidos positivos indicados, con el objeto de que coincidan con los G.L. estáticos que se eligieron para obtener la matriz de rigidez de las vigas en el inciso 3.3.1.2. y figura 3.96, la matriz de masas M_{sh} que se obtiene, llamada **matriz consistente**, está dada por^[ref. 15]

$$(3.147) \dots M_{sh} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{matrix} v_m & \theta_m & v_n & \theta_n \\ \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_m \\ \theta_m \\ v_n \\ \theta_n \end{matrix} \end{matrix}$$

M_{sh} -matriz de masas de elementos horizontales en coordenadas globales

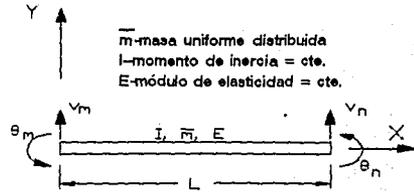


Figura 3.131. Elemento horizontal recto componente de una viga con 2 G.L. dinámicos por nodo

La matriz de rigidez K_{sh} se obtiene suprimiendo los renglones y columnas u_n y u_m de la matriz general dada por la ecuación (3.79) del inciso 3.3.1.2., por lo que puede expresarse como

$$(3.148) \dots K_{sh} = \begin{matrix} v_m & \theta_m & v_n & \theta_n \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_m \\ \theta_m \\ v_n \\ \theta_n \end{matrix} \end{matrix}$$

K_{sh} -matriz de rigidez de elementos horizontales en coordenadas globales

Las matrices de masas M_v y rigidez K_v de un elemento horizontal discretizado en segmentos rectos, serán entonces arreglos cuadrados de orden $n \times n$, con $n = \#$ de nodos no restringidos \times 2 G.L.

La discretización de un elemento horizontal puede efectuarse dividiendo su longitud en segmentos discretos separados uniformemente una distancia L . La matriz de rigidez y la matriz de masa de cada segmento reemplazarán a las distribuidas del sistema continuo.

Este procedimiento es ideal para ser programado en una computadora y poder efectuar una división del sistema en un número adecuado de segmentos (es recomendable un número mínimo de 5 segmentos entre apoyos), según la precisión deseada.

En los problemas siguientes, por efectuarse los cálculos con una calculadora de bolsillo, se discretizan los sistemas continuos en un número

pequeño de segmentos para ejemplificar el procedimiento de solución.

Al obtenerse las matrices M_v y K_v del sistema discretizado, pueden encontrarse las respuestas dinámicas por el Método Directo Paso a Paso de Superposición Modal, calculando previamente los valores característicos, formas de los modos y frecuencias angulares con el Método de Iteración Inversa del inciso 3.3.2.3.

3.4.3.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Determinar la respuesta máxima de desplazamientos dinámicos para la trabe mostrada en la figura 3.132a, si es excitada por la fuerza cuya gráfica en función del tiempo se muestra en la figura 3.132b. Considerar 20% de amortiguamiento crítico constante para cada forma del modo y el criterio de respuesta máxima probable. Despréciase el peso propio.

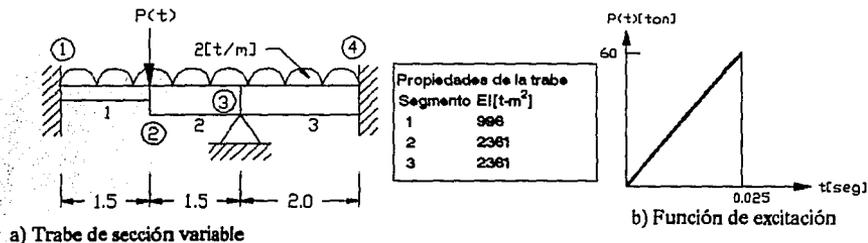


Figura 3.132. Sistema continuo que representa una trabe doblemente empotrada con apoyo.

● DISCRETIZACION DEL SISTEMA CONTINUO

Se divide el sistema continuo en tres tramos para ilustrar el procedimiento de solución; pero es recomendable si se cuenta con una computadora efectuar mayores secciones.

Se numeran los segmentos y los nodos obtenidos de izquierda a derecha, como se muestra en la figura 3.132a.

la masa distribuida es $m = w/g = 2/9.80665 = 0.204[t-s^2/m^2]$

Para cada segmento las matrices de masas M_{eh} y de rigideces K_{eh} se calculan con las ecuaciones (3.147) y (3.148)

$$M_{eh1} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 0.1137 & 0.024 & 0.0393 & -0.0142 \\ 0.024 & 0.0066 & 0.0142 & -0.0049 \\ 0.0393 & 0.0142 & 0.1137 & -0.024 \\ -0.0142 & -0.0049 & -0.024 & 0.0066 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

$$K_{eh1} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 3541 & 2656 & -3541 & 2656 \\ 2656 & 2656 & -2656 & 1328 \\ -3541 & -2656 & 3541 & -2656 \\ 2656 & 1328 & -2656 & 2656 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

$$M_{eh2} = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 0.1137 & 0.024 & 0.0393 & -0.0142 \\ 0.024 & 0.0066 & 0.0142 & -0.0049 \\ 0.0393 & 0.0142 & 0.1137 & -0.024 \\ -0.0142 & -0.0049 & -0.024 & 0.0066 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$K_{eh2} = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 8395 & 6296 & -8395 & 6296 \\ 6296 & 6296 & -6296 & 3148 \\ -8395 & -6296 & 8395 & -6296 \\ 6296 & 3148 & -6296 & 6296 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$M_{eh3} = \begin{bmatrix} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ 0.1515 & 0.0427 & 0.05246 & -0.02526 \\ 0.0427 & 0.0155 & 0.02526 & -0.01166 \\ 0.05246 & 0.02526 & 0.1515 & -0.0427 \\ -0.02526 & -0.01166 & -0.0427 & 0.0155 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

$$K_{eh3} = \begin{bmatrix} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ 3542 & 3542 & -3542 & 3542 \\ 3542 & 4722 & -3542 & 2361 \\ -3542 & -3542 & 3542 & -3542 \\ 3542 & 2361 & -3542 & 4722 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

• MATRICES DE RIGIDECES Y DE MASAS DEL SISTEMA DISCRETIZADO

Estas matrices serán de orden $n \times n$, con $n = 3$ (2 G.L. en el nodo 1 + 1 G.L. en el nodo 3)

$$M_v = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & \theta_3 \\ 0.2274 & 0 & -0.0142 \\ 0 & 0.0132 & -0.0049 \\ -0.0142 & -0.0049 & 0.0221 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & \theta_3 \\ 11936 & 3640 & 6296 \\ 3640 & 8952 & 3148 \\ 6296 & 3148 & 8657 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

• FRECUENCIAS ANGULARES, PERIODOS DE OSCILACION Y FORMAS DE LOS MODOS DE VIBRACION

Por tratarse de un sistema estrechamente acoplado, se emplea el Método de Iteración Inversa, programado en una calculadora de bolsillo (ver codificación al final del problema III del inciso 3.3.2.4), o procediendo con cálculos manuales (como al inicio del citado problema), se obtiene

Forma del modo 1

$\{z\}_1$	$\{x^*\}$	$\{y\}$
1.0	0.2274	3.340725322E-5
-0.1698857546	-0.002242491961	-5.351991932E-6
-0.6938517908	-0.01533412458	-2.412130302E-5

de la ecuación (3.117) se tiene

$$\{y\}^T \{x^*\} = 7.978690247E-6$$

$$\{y\}^T M = \{7.939331885E-6 \quad 4.75480913E-8 \quad -9.81239032E-7\}$$

$$\{y\}^T M \{y\} = 2.886455577E-10$$

$$(w_1)^2 = 27641.62588$$

$$w_1 = 166.26 \text{ [r/s]}$$

$$T_1 = 0.0378 \text{ [s]}$$

Forma del modo 2

con $\mu = 221000$ se obtiene

$\{z\}_2$	$\{x^*\}$	$\{y\}$
1.0	0.2274	1.845707567E-5
-7.215471515	-0.095244224	-1.32108052E-4
8.203153942	0.1812897021	1.500431806E-4

de la ecuación (3.119)

$$\{y\}^T \{x^*\} = 4.398095142E-5$$

$$\{y\}^T M = \{2.066525843E-8 \quad -2.479037871E-8 \quad -3.70119272E-8\}$$

$$\{y\}^T M \{y\} = 9.209816984E-10$$

$$(w_2)^2 = 221000 + 47754.425 = 268754.25; \quad w_2 = 518.415 \text{ [r/s]} \quad T_2 = 0.01212 \text{ [s]}$$

Forma del modo 3

Análogamente con $\mu = 880000$

$\{z\}_3$	$\{x^*\}$	$\{y\}$
1.0	0.2274	6.133997986E-6
14.67640354	0.1937285271	9.177213797E-5
8.973355464	0.1983111558	5.574822386E-5

$$\{y\}^T \{x^*\} = 3.022924697E-5$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} = \{6.032463632E-7 \quad 9.382259243E-7 \quad 6.952494998E-7\}$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} \{y\} = 1.285622357E-10$$

$$(w_3)^2 = 880000 + 235133.1774 = 1115133.177; \quad w_3 = 1055.999 \text{ [r/s]}; \quad T_3 = 0.00595 \text{ [s]}$$

• NORMALIZACION DE LAS FORMAS DE LOS MODOS DE VIBRACION

Forma del modo 1

de la ecuación (3.69)

$$\{z\}^T_1 \mathbf{M} = \{0.2372526954 \quad 0.001157381814 \quad -0.02870168438\}$$

$$(N_1)^2 = \{z\}^T_1 \mathbf{M} \{z\}_1 = 0.2569707878$$

$$N_1 = 0.5069228618$$

de la ecuación (3.70)

$$\{r\}_1 = \begin{bmatrix} 1.9726867 \\ -0.33513137 \\ -1.3687522 \end{bmatrix}$$

Análogamente para las demás formas modales

Forma del modo 2

$$\{z\}^T_2 \mathbf{M} = \{0.110915214 \quad -0.1354396783 \quad 0.2024455125\}$$

$$(N_2)^2 = \{z\}^T_2 \mathbf{M} \{z\}_2 = 2.748868059$$

$$N_2 = 1.657971067$$

$$\{r\}_2 = \begin{bmatrix} 0.60315 \\ -4.3519 \\ 4.9477 \end{bmatrix}$$

Forma del modo 3

$$\{z\}^T_3 \mathbf{M} = \{0.09997835241 \quad 0.149759085 \quad 0.1121967784\}$$

$$(N_3)^2 = \{z\}^T_3 \mathbf{M} \{z\}_3 = 3.304684692 \quad N_3 = 1.817879174$$

$$\{r\}_3 = \begin{bmatrix} 0.55009 \\ 8.07337 \\ 4.93617 \end{bmatrix}$$

• RESPUESTAS POR EL METODO DE SUPERPOSICION MODAL

Forma del modo 1

de la ecuación (3.74) y por ser modos normalizados respecto a \mathbf{M}

$$[M_1] = 1.0 \quad \dots(a)$$

de la ecuación (3.75)

$$\begin{aligned} \{r\}_1^T \mathbf{K} &= \{13708.44641 \quad -128.3483618 \quad -484.245885\} \\ \{k_1\} &= \{r\}_1^T \mathbf{K} \{r\}_1 = 27748.29609 \quad \dots(b) \end{aligned}$$

El vector de fuerzas excitatrices es, de la figura 3.132a

$$\{P(t)\} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

por tanto de la ecuación (3.123)

$$\{P_1\} = \{r\}_1^T \{P(t)\} = 1.9726867 P_1(t) \quad \dots(c)$$

Similarmente para las otras formas modales

Forma del modo 2

$$[M_2] = 1.0 \quad \dots(d)$$

$$\begin{aligned} \{r\}_2^T \mathbf{K} &= \{22508.73696 \quad -21188.1574 \quad 32929.69335\} \\ \{k_2\} &= \{r\}_2^T \mathbf{K} \{r\}_2 = 288711.1307 \quad \dots(e) \\ \{P_2\} &= \{r\}_2^T \{P(t)\} = 0.60315 P_1(t) \quad \dots(f) \end{aligned}$$

Forma del modo 3

$$[M_3] = 1.0 \quad \dots(g)$$

$$\begin{aligned} \{r\}_3^T \mathbf{K} &= \{87031.06736 \quad 89814.199 \quad 71610.75909\} \\ \{k_3\} &= \{r\}_3^T \mathbf{K} \{r\}_3 = 1115459.26 \quad \dots(h) \\ \{P_3\} &= \{r\}_3^T \{P(t)\} = 0.55009 P_1(t) \quad \dots(i) \end{aligned}$$

• TRANSFORMACION DEL SISTEMA DE 3 G.L. EN 3 SISTEMAS DE 1 G.L.

Sustituyendo (a) hasta (i) en la ecuación (3.135), y como $(w^2)_i = [k_i]$ por ser modos normalizados, se tiene

$$P_1 + 0.4(166.26)f'_1 + 27748.29609f_1 = 1.9726867P_1(t) \quad \dots (j)$$

$$P_2 + 0.4(518.415)f'_2 + 268711.1307f_2 = 0.60315P_1(t) \quad \dots (k)$$

$$P_3 + 0.4(1055.999)f'_3 + 1115459.26f_3 = 0.55009P_1(t) \quad \dots (l)$$

• RESPUESTAS MAXIMAS DE LAS ECUACIONES DESACOPLADAS

Empleando el Método numérico de evaluación de respuestas dinámicas presentado en el inciso 3.2.4., y programado en una calculadora de bolsillo o procediendo con cálculos manuales (ver problema III, del inciso 3.2.4.1.), se tienen las siguientes tablas y respuestas máximas

Ecuación (j) o Forma del modo 1

Tabla 3.47

t_i [seg]	$1.9726867P_1$ [ton]	x_i [m]	\dot{x}_i [m/s]	\ddot{x}_i [m/s ²]
0	0	0	0	0
0.00378	17.896	3.93E-5	0.030155	14.796381
0.00756	35.792	2.799E-4	0.101224	21.281269
0.01134	53.689	8.14E-4	0.180001	19.107202
0.01512	71.585	0.001614	0.238059	10.937622
0.0189	89.481	0.002568	0.260323	0.878352
0.02268	107.377	0.0035369	0.247213	-7.239034
0.02646	0	0.0041326	-3.8E-5	-114.670005
0.3024	0	0.0034021	-0.358409	-70.520663
0.03402	0	0.0016807	-0.515461	-12.289544
0.0378	0	-2.274E-4	-0.462767	37.1434
0.04158	0	-0.0016335	-0.264893	62.975694
0.04536	0	-0.0021726	-0.021257	61.703009

de donde

$$f_{1 \max} = x_{1 \max} = 0.0041326[m] \text{ para } t = 0.02646 [s] \quad \dots (m)$$

Ecuación (k) o Forma del modo 2

Tabla 3.48

t_i [seg]	$0.60315P_1$ [ton]	θ_i [rad]	$\dot{\theta}_i$ [rad/s]	$\ddot{\theta}_i$ [rad/s ²]
0	0	0	0	0
0.0012	1.737	4E-7	9.31E-4	1.440591

Tabla 3.48
(continuación)

t_i [seg]	0.60315P ₁ [ton]	θ_i [rad]	$\dot{\theta}_i$ [rad/s]	$\ddot{\theta}_i$ [rad/s ²]
0.0024	3.474	2.7E-6	0.003134	2.086053
0.0036	5.211	8E-6	0.0056	1.897458
0.0048	6.948	1.56E-5	0.007451	1.121081
0.0060	8.685	2.54E-5	0.00821	0.143898
0.0072	10.422	3.25E-5	0.007866	-0.665758
0.0084	12.160	4.4E-5	0.006775	-1.075424
0.0096	13.897	5.14E-5	0.005465	-1.038996
0.0108	15.634	5.73E-5	0.004418	-0.665991
0.012	17.371	6.22E-5	0.003922	-0.154264
0.0132	19.108	6.69E-5	0.004022	0.295905
0.0144	20.845	7.2E-5	0.004552	0.548769
0.0156	22.582	7.79E-5	0.005243	0.563923
0.0168	24.319	8.46E-5	0.005829	0.388705
0.0180	26.056	9.18E-5	0.006139	0.123162
0.0192	27.793	9.92E-5	0.006132	-0.124735
0.0204	29.530	1.064E-4	0.005879	-0.276656
0.0216	31.267	1.132E-4	0.005519	-0.303354
0.0228	33.004	1.196E-4	0.005194	-0.223558
0.0240	34.741	1.258E-4	0.005005	-0.087193
0.0252	0	1.236E-4	-0.014564	-30.205192
0.0264	0	8.78E-5	-0.042108	-14.858095
0.0276	0	3.07E-5	-0.049619	2.036301
0.0288	0	-2.4E-5	-0.039019	14.53384
0.0300	0	-5.87E-5	-0.017812	19.458031
0.0312	0	-6.63E-5	0.004631	16.843933
0.0324	0	-5.02E-5	0.020594	9.219084

de donde

$$f_{2\max} = \theta_{1\max} = 1.258E-4 [\text{rad}] \text{ para } t = 0.024 [\text{s}] \quad \dots(n)$$

Ecuación (1) o Forma del modo 3

Tabla 3.49

t_i [seg]	0.55009P ₁ [ton]	θ_i [rad]	$\dot{\theta}_i$ [rad/s]	$\ddot{\theta}_i$ [rad/s ²]
0	0	0	0	0
0.0006	0.79	0	2.11E-4	0.6521
0.0012	1.58	3E-7	7.07E-4	0.934515
0.0018	2.38	9E-7	0.001258	0.8414
0.0024	3.17	1.8E-6	0.00166	0.472269
0.0030	3.96	2.8E-6	0.001808	0.023793
0.0036	4.75	3.9E-6	0.001708	-0.33243

Tabla 3.40
(continuación)

t_i [seg]	0.55009P _i [ton]	θ_i [rad]	$\dot{\theta}_i$ [rad/s]	$\ddot{\theta}_i$ [rad/s ²]
0.0042	5.55	4.9E-6	0.001452	-0.486611
0.0048	6.34	5.6E-6	0.001162	-0.447612
0.0054	7.13	6.3E-6	9.44E-4	-0.263808
0.0060	7.92	6.8E-6	8.55E-4	-0.030669
0.0066	8.71	7.3E-6	8.98E-4	0.16079
0.0072	9.51	7.9E-6	0.001031	0.262482
0.0078	10.30	8.6E-6	0.001188	0.243116
0.0084	11.09	9.3E-6	0.001307	0.144694
0.0090	11.88	1.01E-5	0.001356	0.018677
0.0096	12.67	1.09E-5	0.001334	-0.085531
0.0102	13.47	1.17E-5	0.001267	-0.128814
0.0108	14.26	1.24E-5	0.001187	-0.126475
0.0114	15.05	1.31E-5	0.001124	-0.081278
0.0120	15.84	1.38E-5	0.001093	-0.018321
0.0126	16.64	1.45E-5	0.001103	0.045079
0.0132	17.43	1.51E-5	0.001139	0.070566
0.0138	18.22	1.58E-5	0.001181	0.066141
0.0144	19.01	1.65E-5	0.001214	0.04002
0.0150	19.80	1.73E-5	0.001228	0.00602
0.0156	20.60	1.8E-5	0.001225	-0.014178
0.0162	21.39	1.87E-5	0.00121	-0.033245
0.0168	22.18	1.95E-5	0.001188	-0.036639
0.0174	22.97	2.02E-5	0.001169	-0.026706
0.0180	23.76	2.09E-5	0.001157	-0.009836
0.0186	24.56	2.16E-5	0.001159	0.014885
0.0192	25.35	2.23E-5	0.001171	0.02071
0.0198	26.14	2.3E-5	0.001183	0.018128
0.0204	26.93	2.37E-5	0.001191	0.009905
0.0210	27.72	2.44E-5	0.001194	1.26E-4
0.0216	28.52	2.51E-5	0.001194	7.48E-4
0.0222	29.31	2.58E-5	0.001192	-0.007281
0.0228	30.11	2.65E-5	0.001189	-0.00276
0.0234	0	2.55E-5	-0.007071	-25.512743
0.0240	0	1.75E-5	-0.018442	-11.705707
0.0246	0	5.2E-6	-0.020941	3.025109
0.0252	0	-6.1E-6	-0.015698	13.420013
0.0258	0	-1.28E-5	-0.006244	16.88424
0.0264	0	-1.36E-5	0.003235	13.781311

de donde

$$f_{3\max} = \theta_{i\max} = 2.65E-5[\text{rad}] \text{ para } t = 0.0228 [\text{s}] \quad \dots(o)$$

● RESPUESTAS DEL SISTEMA DISCRETIZADO

sustituyendo (m), (n) y (o) y las formas modales normalizadas en la ecuación (3.72)

x_2	1.9726867	0.60315	0.55009	0.0041326
θ_2	-0.33513137	-4.3519	8.07337	1.258E-4
θ_3	-1.3687522	4.9477	4.93617	2.65E-5

● RESPUESTA MAXIMA PROBABLE

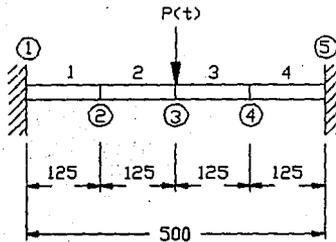
De la ecuación (3.126b)

$$x_{2max} = \{(0.008152325056)^2 + (7.587627E-5)^2 + (1.4577385E-5)^2\}^{0.5} = 0.008153 \text{ [m]} \\ = 0.8153 \text{ [cm]} \quad \dots (p)$$

$$\theta_{2max} = \{(-0.0013849639)^2 + (-5.4746902E-4)^2 + (2.13944305E-4)^2\}^{0.5} = 0.0015045 \text{ [rad]} \quad \dots (q)$$

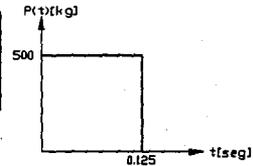
$$\theta_{3max} = \{((-0.005656505342)^2 + (6.2242066E-4)^2 + (1.30808505E-4)^2\}^{0.5} = 0.005662 \text{ [rad]} \quad \dots (r)$$

II.- Determinar la respuesta máxima de desplazamientos dinámicos para la trabe mostrada en la figura 3.133a, si está sujeta a la acción dinámica de la fuerza cuya gráfica aparece en la figura 3.133b. Considerar 5% de amortiguamiento constante para cada forma modal y el criterio de respuesta máxima probable.



a) Trabe doblemente empotrada

Características de la trabe
 $E = 4828.28 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$
 $I = 4182.3 \text{ [cm}^4\text{]}$
 $m = 0.007031 \text{ [kg-c}^2\text{/cm}^2\text{]}$



b) Función de excitación

Figura 3.133 Sistema continuo que representa el modelo dinámico de una trabe doblemente empotrada.

● DISCRETIZACION DEL SISTEMA CONTINUO

Dividiendo la trabe en cuatro segmentos de igual longitud y numerando los 5 nodos obtenidos de izquierda a derecha, como se muestra en la figura 3.133a, se discretiza el sistema continuo.

El área tributaria de cada nodo no restringido es de 125 [cm], y por tanto su masa concentrada vale

$$\bar{m}_L = (0.007031)(125) = 0.878875 \text{ [kg-s}^2\text{/cm]}$$

por tanto para cada segmento la matriz de masa M_{eh} y la matriz de rigidez K_{eh} se calculan con las ecuaciones (3.147) y (3.148)

$$M_{eh1} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 0.32644 & 5.7545 & 0.113 & -3.4004 \\ 5.7545 & 130.785 & 3.4004 & -98.0887 \\ 0.113 & 3.4004 & 0.32644 & -5.7545 \\ -3.4004 & -98.0887 & -5.7545 & 130.785 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

$$K_{eh1} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 118.309 & 7394.291 & -118.309 & 7394.291 \\ 7394.291 & 6.161909E5 & -7394.291 & 3.080954E5 \\ -118.309 & -7394.291 & 118.309 & -7394.291 \\ 7394.291 & 3.080954E5 & -7394.291 & 6.161909E5 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

$$M_{eh2} = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 0.32644 & 5.7545 & 0.113 & -3.4004 \\ 5.7545 & 130.785 & 3.4004 & -98.0887 \\ 0.113 & 3.4004 & 0.32644 & -5.7545 \\ -3.4004 & -98.0887 & -5.7545 & 130.785 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$K_{eh2} = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 118.309 & 7394.291 & -118.309 & 7394.291 \\ 7394.291 & 6.161909E5 & -7394.291 & 3.080954E5 \\ -118.309 & -7394.291 & 118.309 & -7394.291 \\ 7394.291 & 3.080954E5 & -7394.291 & 6.161909E5 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$M_{eh3} = \begin{bmatrix} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ 0.32644 & 5.7545 & 0.113 & -3.4004 \\ 5.7545 & 130.785 & 3.4004 & -98.0887 \\ 0.113 & 3.4004 & 0.32644 & -5.7545 \\ -3.4004 & -98.0887 & -5.7545 & 130.785 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

$$K_{eh3} = \begin{bmatrix} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ 118.309 & 7394.291 & -118.309 & 7394.291 \\ 7394.291 & 6.161909E5 & -7394.291 & 3.080954E5 \\ -118.309 & -7394.291 & 118.309 & -7394.291 \\ 7394.291 & 3.080954E5 & -7394.291 & 6.161909E5 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

$$M_{eh4} = \begin{bmatrix} v_4 & \theta_4 & v_5 & \theta_5 \\ 0.32644 & 5.7545 & 0.113 & -3.4004 \\ 5.7545 & 130.785 & 3.4004 & -98.0887 \\ 0.113 & 3.4004 & 0.32644 & -5.7545 \\ -3.4004 & -98.0887 & -5.7545 & 130.785 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_4 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{matrix}$$

$$K_{eh4} = \begin{bmatrix} v_4 & \theta_4 & v_5 & \theta_5 \\ 118.309 & 7394.291 & -118.309 & 7394.291 \\ 7394.291 & 6.161909E5 & -7394.291 & 3.080954E5 \\ -118.309 & -7394.291 & 118.309 & -7394.291 \\ 7394.291 & 3.080954E5 & -7394.291 & 6.161909E5 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_4 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{matrix}$$

• MATRICES DE RIGIDEZ Y DE MASAS DEL SISTEMA DISCRETIZADO

La matriz de masas y la matriz de rigidez serán de orden $n \times n$, con $n = 3 \text{ nodos} \times 2 \text{ G.L.} = 6$

$$\begin{matrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ \begin{bmatrix} 0.65288 & 0 & 0.113 & -3.4004 & 0 & 0 \\ 0 & 261.57 & 3.4004 & -98.0887 & 0 & 0 \\ 0.113 & 3.4004 & 0.65288 & 0 & 0.113 & -3.4004 \\ -3.4004 & -98.0887 & 0 & 261.57 & 3.4004 & -98.0887 \\ 0 & 0 & 0.113 & 3.4004 & 0.65288 & 0 \\ 0 & 0 & -3.4004 & -98.0887 & 0 & 261.57 \end{bmatrix} & = & M_v \end{matrix}$$

	v_2	θ_2	v_3	θ_3	v_4	θ_4	
v_2	236.618	0	-118.309	7394.291	0	0	= K_v
θ_2	0	1.2323818E6	-7394.291	3.080954E5	0	0	
v_3	-118.309	-7394.291	236.618	0	-118.309	7394.291	
θ_3	7394.291	3.080954E5	0	1.2323818E6	-7394.291	3.080954E5	
v_4	0	0	-118.309	-7394.291	236.618	0	
θ_4	0	0	7394.291	3.080954E5	0	1.2323818E6	

● FRECUENCIAS ANGULARES, PERIODOS DE OSCILACION Y FORMAS DE LOS MODOS DE VIBRACION

Por tratarse de un sistema estrechamente acoplado (con 2 masas conectadas a los apoyos) y empleando el Método de Iteración Inversa programado en una calculadora de bolsillo o procediendo manualmente (ver problema III del inciso 3.3.2.4.), se obtiene:

Forma del modo 1

$\{z\}_1$	$\{x^*\}$	$\{y\}$
1.0	0.65288	0.03469216324
0.011111092408	2.906284412	3.855499122E-4
1.840238568	1.201454956	0.06386402595
-5.92920428E-6	-0.001550901964	-2.99195711E-8
0.999182307	0.6523461446	0.03468803708
-0.01110782937	-2.905474929	-3.855342956E-4

de la ecuación (3.117) se tiene

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.1242488553$$

$$\{y\}^T M = \{0.02986655621 \quad 0.3180144591 \quad 0.05215750264 \quad -2.33884682E-5 \quad 0.029866365884 \\ -0.3180045048\}$$

$$\{y\}^T M \{y\} = 0.005648247341$$

$$(w_1)^2 = 21.998 \quad w_1 = 4.69 \text{ [r/s]} \quad T_1 = 1.34 \text{ [s]}$$

Análogamente para las demás formas modales

Forma del modo 2

con $\mu = 150$ se obtiene

{z}₂	{x*}	{y}
1.0	0.65288	0.04310270975
0.004248646899	1.111318569	1.831965258E-4
-3.44325623E-4	-2.248033127E-4	2.06647575E-6
-0.01563179268	-4.088808013	-6.736268285E-4
-1.00038102	-0.6531287604	-0.04310047262
0.004253043369	1.112468554	1.831701096E-4

de la ecuación (3.119)

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.05945274639$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} = \{0.03043173132 \quad 0.114000922 \quad 1.691782017E-6 \quad -0.5052622979 \quad -0.03042980372 \\ 0.1139799586\}$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} \{y\} = 0.003005349542$$

$$(w_2)^2 = 150 + 19.782 = 169.782 \quad w_2 = 13.03 \text{ [r/s]} \quad T_2 = 0.482 \text{ [s]}$$

Forma del modo 3

$$\mu = 625$$

{z}₃	{x*}	{y}
1.0	0.65288	0.02765312354
-0.009256702885	-2.421275774	-2.564983123E-4
-1.031448891	-0.6734123521	-0.02854477559
-2.756990196E-5	-0.007211459256	4.53429291E-8
0.9974082305	0.6511878855	0.02765795827
0.009277974913	2.426839898	2.564721776E-4

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.05653057287$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} = \{0.01482845747 \quad -0.1641603861 \quad -0.0141304657 \quad 3.08638844E-5 \quad 0.01483192234 \\ 0.1641446348\}$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} \{y\} = 0.001307830218$$

$$(w_3)^2 = 625 + 43.225 = 668.225 \quad w_3 = 25.85 \text{ [r/s]} \quad T_3 = 0.243 \text{ [s]}$$

Forma del modo 4

$$\mu = 2500$$

$\{z\}_4$	$\{x^*\}$	$\{y\}$
1.0	0.65288	-0.007584758944
-0.07460107663	-19.51340361	5.639655146E-4
5.289310646E-5	3.453285135E-5	-3.2329615E-7
0.08221697927	21.50549527	-6.248644731E-4
-1.00243997	-0.6544730074	0.007586086109
-0.07462432972	-19.51948592	5.639727675E-4

$$\{y\}^T \{x^*\} = -0.04536819119$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} = \{-0.002827184797 \quad 0.2088075042 \quad -8.576672E-8 \quad -0.2224968585 \quad 0.002827978212$$

$$0.2088116\}$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} \{y\} = 4.174514712E-4$$

$$(w_4)^2 = 2500 - 108.679 = 2391.321 \quad w_4 = 48.901 \text{ [r/s]} \quad T_4 = 0.129 \text{ [s]}$$

Forma del modo 5

$\mu = 6400$ se obtiene

$\{z\}_5$	$\{x^*\}$	$\{y\}$
1.0	0.65288	-0.01075438676
0.2976030495	77.84402965	0.003200563443
-4.756494903	-3.105420392	-0.05115189495
-1.214165524E-5	-0.00317589276	-3.692742E-9
1.000051076	0.6529133468	0.01075443293
-0.2976232298	-77.84930823	-0.003200567141

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.6711978679$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} = \{0.001241172455 \quad 0.6632348384 \quad -0.009199148113 \quad -4.4618E-7 \quad 0.001241177485$$

$$-0.6632350813\}$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} \{y\} = 0.004742703652$$

$$(w_5)^2 = 6400 + 141.52 = 6541.52 \quad w_5 = 80.88 \text{ [r/s]} \quad T_5 = 0.0777 \text{ [s]}$$

Forma del modo 6

$$\mu = 15900$$

$\{z\}_6$	$\{x^*\}$	$\{y\}$
1.0	0.65288	0.002546623748
0.1044378457	27.31780731	2.656902771E-4
1.305182503E-4	8.521275528E-5	-1.9015084E-8
0.1693401447	44.29430164	4.309462651E-4
-0.9998942824	-0.6528109791	-0.002546623373
0.1044483814	27.32056313	2.656885368E-4

$$\{y\}^T \{x^*\} = 0.0369304035$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} = \{1.97247884E-4 \quad 0.02722558221 \quad -8.454483E-9 \quad 0.04328127999 \quad -1.972519366E-4 \quad 0.02722525632\}$$

$$\{y\}^T \mathbf{M} \{y\} = 3.41235595E-5$$

$$(\omega_e)^2 = 15900 + 1082.26 = 16982.26 \quad \omega_e = 130.316 \text{ [r/s]} \quad T_e = 0.048 \text{ [s]}$$

• NORMALIZACION DE LAS FORMAS DE LOS MODOS DE VIBRACION

Forma del modo 1

de la ecuación (3.69)

$$\{z\}^T \mathbf{M} = \{0.8606471199 \quad 9.164413226 \quad 1.502915206 \quad -0.00463494132 \quad 0.8802729411 \quad -9.162440567\}$$

$$(N_1)^2 = \{z\}^T \mathbf{M} \{z\}_1 = 4.689739102$$

$$N_1 = 2.165580546$$

y de la ecuación (3.70)

$$\{r\}_1 =$$

0.46177
0.00513
0.84977
-2.73793E-6
0.46139
-0.00513

Análogamente para las otras formas modales

Forma del modo 2

$$\{z\}^T_2 \mathbf{M} = \{0.705995439 \quad 2.64344994 \quad -2.828083299E-4 \quad -11.72482338 \quad -0.706322017 \\ 2.646941622\}$$

$$(N_2)^2 = \{z\}^T_2 \mathbf{M} \{z\}_2 = 1.618355327$$

$$N_2 = 1.272145953$$

$$\{r\}_2 = \begin{bmatrix} 0.78607 \\ 0.0033398 \\ -2.706651E-4 \\ -0.012288 \\ -0.78637 \\ 0.00334 \end{bmatrix}$$

Forma del modo 3

$$\{z\}^T_3 \mathbf{M} = \{0.536420024 \quad -5.925910287 \quad -0.5107305403 \quad -0.01811105785 \quad 0.5345404122 \\ 5.936883003\}$$

$$(N_3)^2 = \{z\}^T_3 \mathbf{M} \{z\}_3 = 1.706304622 \quad N_3 = 1.306255956$$

$$\{r\}_3 = \begin{bmatrix} 0.76555 \\ -0.00709 \\ -0.78962 \\ -2.110605E-5 \\ 0.763563 \\ -0.007103 \end{bmatrix}$$

Forma del modo 4 $\{z\}^T_4 \mathbf{M} = \{0.3733153606 \quad -27.57778037 \quad -1.62113951E-4 \quad 29.33372451 \\ -0.3748964144 \quad -27.5842224\}$

$$(N_4)^2 = \{z\}^T_4 \mathbf{M} \{z\}_4 = 7.276642937$$

$$N_4 = 2.697525336$$

$$\{r\}_4 = \begin{bmatrix} 0.37071 \\ -0.02766 \\ 1.9608E-5 \\ 0.03048 \\ -0.37161 \\ -0.027664 \end{bmatrix}$$

Forma del modo 5

$$\{z\}_5^T \mathbf{M} = \{0.1154373624 \quad 61.67123535 \quad -0.8554071806 \quad -0.0010227544 \quad 0.115388136 \\ -61.67413199\}$$

$$(N_5)^2 = \{z\}_5^T \mathbf{M} \{z\}_5 = 41.00877336$$

$$N_5 = 6.403809285$$

$$\{r\}_5 = \begin{array}{|l} 0.15616 \\ 0.04647 \\ -0.74276 \\ -1.89601E-6 \\ 0.15617 \\ -0.04648 \end{array}$$

Forma del modo 6

$$\{z\}_6^T \mathbf{M} = \{0.07707052053 \quad 10.70789646 \quad 6.133325E-5 \quad 17.00448267 \quad -0.0769720025 \\ 10.70976466\}$$

$$(N_6)^2 = \{z\}_6^T \mathbf{M} \{z\}_6 = 5.270503172$$

$$N_6 = 2.295757647$$

$$\{r\}_6 = \begin{array}{|l} 0.43559 \\ 0.045492 \\ 5.68519E-5 \\ 0.07376 \\ -0.43554 \\ 0.045496 \end{array}$$

● RESPUESTAS POR EL METODO DE SUPERPOSICION MODAL

Forma del modo 1

de la ecuación (3.74) y por ser modos normalizados respecto a \mathbf{M}

$$[M_1] = 1.0$$

... (a)

de la ecuación (3.75)

$$\{r\}_1^T \mathbf{K} = \{8.707409879 \quad 37.82842729 \quad 15.98731576 \quad -0.56434449 \quad 8.657985142 \\ -39.51551457\}$$

$$\{k_1\} = \{r\}^T_1 K \{r\}_1 = 21.998 \quad \dots (b)$$

El vector de fuerzas excitatrices es, de la figura 3.133a

$$\{P(t)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_3(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por tanto de la ecuación (3.123)

$$\{P_1\} = \{r\}^T_1 \{P(t)\} = 0.84977 P_3(t) \quad \dots (c)$$

Similarmenete para las otras formas modales

Forma del modo 2

$$\{M_2\} = 1.0 \quad \dots (d)$$

$$\{r\}^T_2 K = \{95.16928557 \quad 332.033837 \quad -0.027072675 \quad -1458.412965 \quad -95.17622673 \\ 328.2775603\}$$

$$\{k_2\} = 169.78 \quad \dots (e)$$

$$\{P_2\} = -2.706651 P_3(t) \quad \dots (f)$$

Forma del modo 3

$$\{M_3\} = 1.0 \quad \dots (g)$$

$$\{r\}^T_3 K = \{274.4059982 \quad -2905.409579 \quad -262.7989629 \quad -7.31301547 \quad 274.2479668 \\ 2908.425189\}$$

$$\{k_3\} = 668.248 \quad \dots (h)$$

$$\{P_3\} = -0.78982 P_3(t) \quad \dots (i)$$

Forma del modo 4

$$\{M_4\} = 1.0 \quad \dots (j)$$

$$\{r\}^T_4 K = \{313.0923287 \quad -24697.07778 \quad 0.081540541 \quad 26006.85745 \quad -313.3099245 \\ -24701.71734\}$$

$$\{k_4\} = 2391.654 \quad \dots (k)$$

$$\{P_4\} = 1.9608E-5P_3(t) \quad \dots (l)$$

Forma del modo 5

$$\{M_5\} = 1.0 \quad \dots (m)$$

$$\{r\}^T_5 K = \{124.8114401 \quad 62760.38168 \quad -900.0011841 \quad -5.4915053 \quad 124.8418456 \\ -62773.8738\}$$

$$\{k_5\} = 6541.677 \quad \dots (n)$$

$$\{P_5\} = -0.74276P_3(t) \quad \dots (o)$$

Forma del modo 6

$$\{M_6\} = 1.0 \quad \dots (p)$$

$$\{r\}^T_6 K = \{648.4646127 \quad 78788.20917 \quad 0.037113896 \quad 125374.8545 \quad -648.466234 \\ 78793.97946\}$$

$$\{k_6\} = 16981.591 \quad \dots (q)$$

$$\{P_6\} = 5.68519E-5P_3(t) \quad \dots (r)$$

• TRANSFORMACION DEL SISTEMA DE 6 G.L. EN 6 SISTEMAS DE 1 G.L.

Sustituyendo (a) hasta (r) en la ecuación (3.135), y como $(w^2)_i = [k_i]$ por ser modos normalizados, se tiene

$$f''_1 + 0.1(4.69)f'_1 + 21.998f_1 = 0.84977P_3(t) \quad \dots (s)$$

$$f''_2 + 0.1(13.03)f'_2 + 169.78f_2 = -2.706651(10^{-4})P_3(t) \quad \dots (t)$$

$$f''_3 + 0.1(25.85)f'_3 + 666.246f_3 = -0.78962P_3(t) \quad \dots (u)$$

$$f''_4 + 0.1(48.901)f'_4 + 2391.654f_4 = 1.9608(10^{-5})P_3(t) \quad \dots (v)$$

$$f''_5 + 0.1(80.88)f'_5 + 6541.677f_5 = -0.74276P_3(t) \quad \dots (w)$$

$$f''_6 + 0.1(130.316)f'_6 + 16981.591f_6 = 5.68519(10^{-5})P_3(t) \quad \dots (x)$$

• RESPUESTAS MAXIMAS DE LAS ECUACIONES DESACOPLADAS

Empleando el Método numérico de evaluación de respuestas dinámicas presentado en 3.2.4, y programado en una calculadora de bolsillo o procediendo con cálculos manuales (ver problema III, del inciso 3.2.4.1.), se tienen las siguientes respuestas máximas

Ecuación (s) o Forma del modo 1

con $\Delta t = 0.0134$ [seg] se tiene

$$f_{1\max} = x_{1\max} = 10.5278 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.3886 \text{ [s]} \quad \dots(y)$$

Ecuación (t) o Forma del modo 2

con $\Delta t = 0.0482$ [seg] se encuentra

$$f_{2\max} = \theta_{1\max} = -0.001018 \text{ [rad]} \text{ para } t = 0.1928 \text{ [s]} \quad \dots(z)$$

Ecuación (u) o Forma del modo 3

con $\Delta t = 0.0243$ [seg] se calcula

$$f_{3\max} = x_{1\max} = 1.095643 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.1215 \text{ [s]} \quad \dots(aa)$$

Ecuación (v) o Forma del modo 4

con $\Delta t = 0.0129$ [seg] se tiene

$$f_{4\max} = \theta_{1\max} = 8E-6 \text{ [rad]} \text{ para } t = 0.0645 \text{ [s]} \quad \dots(ab)$$

Ecuación (w) o Forma del modo 5

con $\Delta t = 0.00777$ [seg] se encuentra

$$f_{5\max} = x_{1\max} = -0.1052804 \text{ [cm]} \text{ para } t = 0.03885 \text{ [s]} \quad \dots(ac)$$

Ecuación (x) o Forma del modo 6

con $\Delta t = 0.0048$ [seg] se calcula

$$f_{6\max} = \theta_{1\max} = 3.1E-6 \text{ [rad]} \text{ para } t = 0.024 \text{ [s]} \quad \dots(ad)$$

• RESPUESTAS DEL SISTEMA DISCRETIZADO

sustituyendo (y), (z), (aa), (ab), (ac) y (ad) y las formas modales normalizadas en la ecuación (3.72), y efectuando el producto matricial se tiene

$$x_2 = 4.861422206 - 8.0021926E-4 - 0.8387694987 + 2.965568E-6 - 0.01644058726 + 1.350329E-6$$

$$\theta_2 = 0.054007614 - 3.3999164E-6 + 0.00776810887 - 2.2128E-7 - 0.004892380188 + 1.410252E-7$$

$$x_3 = 8.946208606 + 2.755370718E-7 + 0.8651416257 + 1.56864E-10 + 0.0781980699$$

$$+ 1.7624089E-10$$

$$\theta_3 = -2.882437945E-5 + 1.2509184E-5 + 2.312469594E-5 + 2.4384E-7 + 1.996126912E-7 + 2.28656E-7$$

$$x_4 = 4.857421642 + 8.0052466E-4 - 0.836592456 - 2.97288E-6 - 0.01644164007 - 1.350174E-6$$

$$\theta_4 = -0.054007614 - 3.40012E-6 - 0.007782352229 - 2.21312E-7 + 0.004893432992 + 1.410376E-7$$

● RESPUESTA MAXIMA PROBABLE

De la ecuación (3.126b) y las ecuaciones anteriores, se tiene

$$x_{2crsa} = 4.933 \text{ [cm]}$$

$$\theta_{2crsa} = 0.0548 \text{ [rad]}$$

$$x_{3crsa} = 8.9883 \text{ [cm]}$$

$$\theta_{3crsa} = 3.902E-5 \text{ [rad]}$$

$$x_{4crsa} = 4.929 \text{ [cm]}$$

$$\theta_{4crsa} = 0.0548 \text{ [rad]}$$

Puede notarse que existe simetría en las deflexiones de la trabe, lo que comprueba los resultados.

3.4.4.- PROBLEMAS PROPUESTOS

I.- Si la fuerza excitatriz $P(t)$ mostrada en la figura 3.134b, es aplicada a la trabe que aparece en la figura 3.134a, determinar las respuestas máximas dinámicas considerando 10% de amortiguamiento crítico, constante para todas las formas modales. Considerar el criterio de respuesta máxima probable y que la carga de la trabe incluye su peso propio.

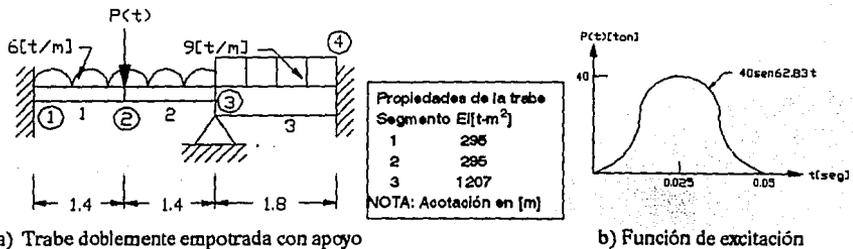


Figura 3.134. Sistema continuo que representa el modelo dinámico de una trabe empotrada

Solución: $x_{2ars} = 2.193 \text{ [cm]}$, $\theta_{2ars} = 0.00213 \text{ [rad]}$, $\theta_{3ars} = 0.0063 \text{ [rad]}$.

II.- Si la trabe mostrada en la figura 3.135a, es sujeta a la acción de la fuerza excitatriz cuya gráfica a través del tiempo se muestra en la figura 3.135b, determinar las respuestas máximas de desplazamientos dinámicos considerando 10% de amortiguamiento constante para todas las formas modales de vibración y el criterio de respuesta máxima probable. La carga de la trabe incluye peso propio.

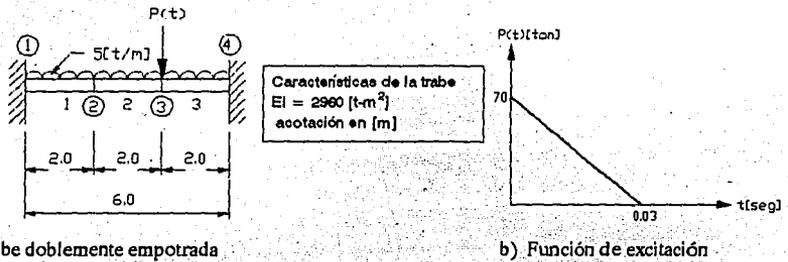


Figura 3.135. Sistema continuo que representa el modelo dinámico de una trabe empotrada.

Solución: $x_{2ars} = 0.9218 \text{ [cm]}$, $\theta_{2ars} = 0.00465 \text{ [rad]}$, $x_{3ars} = 0.9228 \text{ [cm]}$, $\theta_{3ars} = 0.00465 \text{ [rad]}$.

3.5.- SISTEMAS NO LINEALES.

En los sistemas oscilatorios discretos y continuos estudiados hasta ahora, se ha supuesto implícitamente en la deducción de las ecuaciones del movimiento, que el material componente de tales sistemas tiene un comportamiento lineal elástico, es decir que cumplen con la **Ley de Hooke**, que establece que la relación de la carga aplicada a la deformación producida es lineal en toda su extensión^[ref.1].

En las pruebas de fuerza-desplazamiento que se efectúan en laboratorio a los diversos materiales estructurales, al inicio de la etapa de carga se presenta una trayectoria fuerza-desplazamiento que es lineal o que se aproxima mucho a ella; si la carga deja de aplicarse el material vuelve a su estado original y no sufre deformaciones permanentes por lo que se dice que tuvo un **comportamiento elástico**. Si la carga sigue aumentando, a partir de un punto denominado **punto de fluencia**, las deformaciones ya no son proporcionales a los esfuerzos soportados sino que crecen rápidamente para incrementos pequeños de dicha carga; si la fuerza aplicada deja de actuar el material ya no regresa totalmente a su estado original sino que sufre **deformaciones permanentes** por lo que se dice que tuvo un **comportamiento plástico o inelástico**.

Las estructuras presentan también un comportamiento elástico hasta cierto nivel de esfuer-

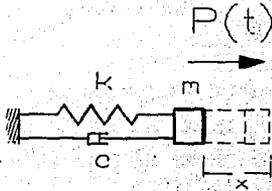
zos, a partir del cual incursionan en una etapa plástica o inelástica.

Las cargas estáticas que obran en las estructuras (como el peso propio), permanecen generalmente dentro del rango elástico durante la vida útil de la estructura, sin embargo cargas dinámicas como los sismos, explosiones, mareas, etc., fuerzan a las estructuras a incursionar dentro del rango plástico ocasionando la fluencia y deformación permanente o plástica de los materiales componentes de sus elementos estructurales.

Si los niveles de esfuerzos en las estructuras son excepcionalmente altos, las incursiones en la región plástica de los miembros estructurales dúctiles, absorben y disipan la energía del movimiento, introducen más amortiguamiento y si la estructura está bien diseñada pueden en un momento determinado evitar el colapso total.

La propiedad de superposición es exclusiva de los sistemas lineales por lo que los métodos hasta aquí estudiados para obtener las respuestas dinámicas de los sistemas oscilatorios no pueden ser aplicados a sistemas no lineales.

Los sistemas no lineales se resuelven mediante procedimientos numéricos aproximados, como el Método β de Newmark, el método de integración por pasos de aceleración lineal, etc.^[ref.12]



c-amortiguamiento del sistema [t-s/m]
 k-rigidez del sistema [ton/m]
 m-masa del cuerpo oscilante [ton-seg²/m]
 x-desplazamiento de la masa [m]
 P(t)-fuerza excitatriz dinámica [ton]

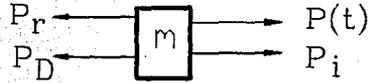
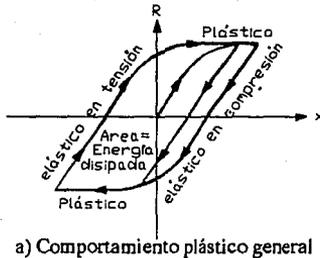
Figura 3.136. Sistema oscilatorio simple con rigidez no lineal.

Teniendo en cuenta el comportamiento no lineal del sistema de la figura 3.136, que representa el modelo dinámico de un sistema oscilatorio de 1 G.L., cuyo diagrama de cuerpo libre aparece en la figura 3.137, se establece el equilibrio dinámico de fuerzas para el tiempo t_i , como

$$P_i(t) + P_D(t) + P_R(t) = P(t) \quad \dots (3.149)$$

$P_i(t)$ -fuerza de inercia
 $P_D(t)$ -fuerza amortiguadora
 $P_R(t)$ -fuerza restauradora
 $P(t)$ -fuerza excitatriz

En general, cualquiera de los elementos del sistema oscilatorio puede tener un comportamiento no lineal pero el caso más útil y frecuente en Ingeniería Civil es aquel en que la fuerza restauradora del resorte es no lineal y las otras fuerzas son de comportamiento lineal.



P_R -fuerza restauradora del resorte[ton]
 P_i -fuerza de inercia [ton]
 P_D -fuerza amortiguadora del pistón[ton]

Figura 3.137. Diagrama de cuerpo libre del sistema oscilatorio de la figura 3.136.

Si un sistema oscilatorio fluye plásticamente, la fuerza restauradora R varía en función de el desplazamiento x como se muestra en la gráfica de la figura 3.138a, en la cual existe una porción de la curva con comportamiento elástico lineal; al incrementarse los esfuerzos ocurre el flujo plástico. Cuando el sistema es descargado o el sentido de la carga se invierte, el comportamiento es nuevamente elástico.

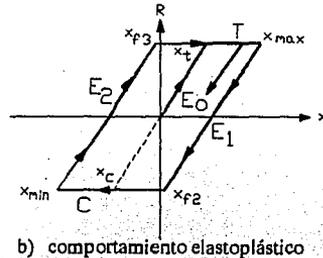


Figura 3.138. Comportamiento no lineal de los materiales de los sistemas estructurales

El sistema puede estar sujeto a un ciclo de carga e inversión de carga debido a la variación de la fuerza excitatriz, por lo que el comportamiento del material estructural es semejante al descrito antes pero ahora con desplazamientos de sentido contrario debido a la oscilación del sistema. Este ciclo de carga se conoce como ciclo histerético^[ref. 12], en el cual la energía disipada es proporcional a el área bajo la curva de cada ciclo.

Algunos sistemas estructurales no tienen un punto de fluencia bien definido, por este motivo el comportamiento generalizado de las estructuras es teóricamente simplificado asumiendo una curva fuerza-desplazamiento con un comportamiento denominado **elastoplástico** que tiene la gráfica del ciclo histerético que se muestra en la figura 3.138b.

Con referencia a dicha figura, si el sistema parte del reposo, es decir si la estructura está descargada, las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad son cero ($x_0=0$, $\dot{x}'_0=0$). Cuando la carga empieza a aplicarse el sistema se comporta elásticamente siguiendo la recta E_0 .

El desplazamiento o punto de fluencia x_t en que el comportamiento plástico en tensión da inicio y el desplazamiento o punto de fluencia x_c en que el comportamiento plástico en compresión comienza, son calculados con:

$$x_t = R_t/k \quad \dots(3.150)$$

$$x_c = R_c/k \quad \dots(3.151)$$

x_t -punto de fluencia en tensión

x_c -punto de fluencia en compresión

R_t -valor de la fuerza que produce fluencia en tensión

R_c -valor de la fuerza que produce fluencia en compresión

k -rigidez elástica ó lineal del sistema

El sistema permanecerá en la **etapa elástica** siempre que el desplazamiento producido x esté dentro del intervalo que limita dicha etapa, dado por:

$$x_c < x < x_t \quad \dots(3.152)$$

Si el desplazamiento x se incrementa hasta x_t el sistema incursiona en la **etapa plástica o inelástica de tensión** a lo largo de la curva T de la figura 3.138b, y permanecerá en esta etapa siempre que la velocidad sea positiva ($\dot{x}' > 0$). Cuando la velocidad es negativa ($\dot{x}' < 0$) el sistema oscilatorio retorna a la etapa elástica, pero a lo largo de la recta E_1 pues ha sufrido deformación permanente; al darse este cambio de velocidad se alcanza el desplazamiento máximo en tensión ya que el sistema debe detenerse para poder invertir su desplazamiento y velocidad.

En esta etapa elástica de la recta E_1 los desplazamientos se incrementan en sentido contrario a los iniciales por lo que existe un nuevo punto de fluencia en compresión dado por

$$x_{t2} = x_{max} - (R_t - R_c)/k \quad \dots(3.153)$$

$x_{1\max}$ -máximo desplazamiento en la recta T de fluencia
(ocurre cuando $x' = 0$)

x_{12} -nuevo punto de fluencia en la recta E₁

El sistema permanecerá en la etapa elástica de la recta E₁ siempre que el desplazamiento producido x este dentro de un intervalo similar al de la ecuación (3.152) expresado ahora como $x_{12} < x < x_{1\max}$

Cuando los desplazamientos del sistema son menores que x_{12} se incursiona en la **etapa plástica de compresión** a lo largo de la curva C de la figura 3.138b, y se permanece en esta etapa siempre que los desplazamientos sigan disminuyendo. Cuando el desplazamiento se incrementa en el sentido positivo, es decir la velocidad cambia de negativa a positiva, el sistema oscilatorio retorna nuevamente a la etapa elástica, esta vez a lo largo de la recta E₂; entonces en este momento se alcanza el desplazamiento mínimo en compresión ya que el sistema debe detenerse para invertir su desplazamiento y velocidad.

Los desplazamientos siguen incrementándose en sentido positivo a lo largo de la recta de etapa elástica E₂, por lo que existe un nuevo punto de fluencia en tensión dado por

$$x_{13} = x_{\min} + (R_t - R_c)/k \quad \dots (3.154)$$

x_{\min} -mínimo desplazamiento en la recta C de fluencia
(ocurre cuando $x' = 0$)

x_{13} -nuevo punto de fluencia en la recta E₂

El sistema permanecerá en la recta E₂ siempre que se respete el intervalo dado en forma análoga a la ecuación (3.152) por $x_{\min} < x < x_{13}$

Finalmente si los desplazamientos son mayores o iguales que x_{13} , se presenta una nueva fluencia del material y se inicia un nuevo ciclo histerético. Las condiciones dadas por la ecuación (3.152) son válidas en forma similar para cualquier etapa elástica como las curvas E₀, E₁, E₂,... de cualquier ciclo histerético.

En cualquier segmento del ciclo elastoplástico de la figura 3.138b, la fuerza restauradora del resorte del sistema oscilatorio se puede calcular como:

En la etapa elástica (E₀, E₁, E₂,...)

$$R_t = R_{t1} - (x_{t1} - x)k \quad \dots (3.155)$$

En la etapa plástica de tensión

$$R_t = R_t \quad \dots (3.156)$$

En la etapa plástica de compresión

$$R_t = R_c \quad \dots (3.157)$$

R_t -fuerza restauradora del resorte en cualquier segmento del ciclo elastoplástico

R_{t1} -fuerza que produce fluencia según el segmento del ciclo elastoplástico en cuestión

x_{t1} -punto de fluencia del segmento del ciclo elastoplástico en cuestión

Tomando en cuenta lo anterior, en el siguiente inciso se presenta el Método de Integración por pasos de Aceleración Lineal que

sirve para obtener la solución o respuestas de aceleración, velocidad y desplazamientos del movimiento dinámico de sistemas no lineales expresado por la ecuación (3.149).

3.5.1.- METODO DE INTEGRACION PASO A PASO DE ACELERACION LINEAL.

El Método de Integración paso a paso de Aceleración Lineal^[ref. 12], es similar al presentado en 3.2.4 de este tema; es decir, con referencia a las figuras 3.139a y 3.139b que representan una función de aceleración arbitraria o irregular, el método se basa en las siguientes hipótesis:

- La función de excitación está compuesta por una serie de impulsos sucesivos en intervalos iguales de duración Δt , tan pequeños como la exactitud de la evaluación de la respuesta lo requiera.
- Durante el intervalo Δt la rigidez del sistema es constante.
- La variación de la función de excitación en cada intervalo Δt es lineal
- Los valores iniciales de desplazamiento y velocidad al inicio de cada intervalo son conocidos.

- Las características no lineales de la rigidez del sistema son evaluadas al inicio de cada intervalo.

Puede demostrarse que las respuestas dinámicas de un sistema oscilatorio sencillo, ante la acción de cualquier fuerza excitatriz así considerada están dadas por

$$x''_0 = P(t=0)/m \quad \dots (3.158)$$

$$\overline{k(t)} = k(t) + 6m/\Delta t^2 + 3c/\Delta t \quad \dots (3.159)$$

con

$$k(t) = k \text{ (etapa elástica)}$$

$$k(t) = 0 \text{ (etapa plástica)}$$

$$\overline{\Delta P(t)} = \Delta P(t) + m[6x''_{ta}/\Delta t + 3x'_{ta}] + c[3x'_{ta} + \Delta t x''_{ta}/2] \quad \dots (3.160)$$

$$\Delta x(t) = \overline{\Delta P(t)} / \overline{k(t)} \quad \dots (3.161)$$

$$\Delta x'(t) = 3\Delta x(t)/\Delta t - 3x'_{ta} - x''_{ta}\Delta t/2 \quad \dots (3.162)$$

$$x'_{tb} = \Delta x'(t) + x'_{ta} \quad \dots (3.163)$$

$$x_{tb} = \Delta x(t) + x_{ta} \quad \dots (3.164)$$

$$x''_{tb} = [P_{tb} - cx'_{tb} - R_1]/(1/m) \quad \dots (3.165)$$

x''_0 -aceleración inicial (para $t = 0$)

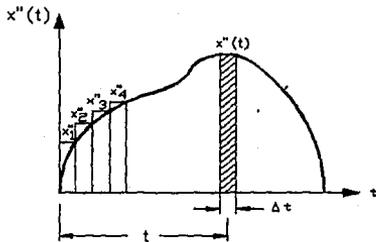


Figura 3.139a. Función de excitación arbitraria o irregular de la aceleración del terreno.

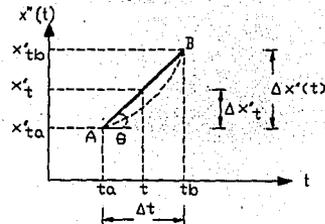


Figura 3.139b. Ampliación de uno de los impulsos componentes de la función de excitación de la figura 3.139a.

- P_i - fuerza de excitación inicial (para $t = 0$)
- m - masa del sistema oscilatorio
- c - constante de amortiguamiento del sistema oscilatorio
- Δt - duración de un intervalo de tiempo o paso (generalmente $\Delta t \approx 0.1T$)
- $k(t)$ - rigidez del sistema en función del tiempo
- $\bar{k}(t)$ - rigidez efectiva en función del tiempo
- $\Delta P(t)$ - incremento de la fuerza excitatriz en función del tiempo
- $\overline{\Delta P}(t)$ - incremento efectivo de la fuerza excitatriz en función del tiempo
- x, \dot{x}, \ddot{x} - desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema, respectivamente, los subíndices indican:
- t_a - al inicio del intervalo de tiempo
- t_b - al final del intervalo de tiempo
- $\Delta x(t), \Delta \dot{x}(t)$ - incremento de desplazamientos y velocidad, respectivamente, en función del tiempo
- R_i - fuerza restauradora del resorte en cualquier segmento del ciclo elastoplástico, dada por las ecuaciones (3.155), (3.156) y (3.157)

Los pasos a seguir para la aplicación sistemática del método, tabulando los cálculos efectuados en la tabla de la figura 3.140, son:

1.- Calcular la frecuencia angular y período del sistema seleccionando $\Delta t \approx 0.1T$, y encontrar los puntos de fluencia en tensión y compresión con las ecuaciones (3.150) y (3.151).

2.- Obtener para cada paso de tiempo $t_b = t_a + \Delta t$ el valor de las fuerzas de excitación $P(t)$, y encontrar $x''_{t_a} = x''_0$ con la ecuación (3.158), así como $x_0 = 0$ y $x'_0 = 0$ (el sistema parte del reposo), al inicio del primer intervalo.

3.- Calcular $\bar{k}(t)$ y $\overline{\Delta P}(t)$ con las ecuaciones (3.159) y (3.160).

4.- Obtener Δx con la ecuación (3.161)

5.- Calcular $\Delta \dot{x}(t)$ con la ecuación (3.162)

6.- Obtener x'_{t_b} y x_{t_b} al final del intervalo con las ecuaciones (3.163) y (3.164).

7.- Obtener x''_{t_b} con la ecuación (3.165)

8.- Iniciar el siguiente intervalo tomando como desplazamiento, velocidad y aceleración iniciales, las calculadas en el intervalo anterior, y repetir los pasos 3 a 8 hasta obtener los valores de las respuestas para los tiempos deseados.

Este método puede sistematizarse mediante un programa interactivo en una calculadora de bolsillo con la codificación indicada al final del problema I del próximo inciso.

t_a	P_i	(3.164) x_{t_a}	(3.163) \dot{x}_{t_a}	(3.165) \ddot{x}_{t_a}	(3.159) $k(t)$	(3.160) $\Delta P(t)$	(3.161) $\Delta x(t)$	(3.162) $\Delta \dot{x}(t)$

Figura 3.140. Tabla para evaluación de las respuestas de un sistema oscilatorio simple no lineal

3.5.2.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- a) Deducir las expresiones del Método de Integración Paso a Paso de Aceleración Lineal, para la evaluación de las respuestas de un sistema oscilatorio sencillo con comportamiento no lineal ante cualquier tipo de carga dinámica; y b) Codificar un programa para computadora de bolsillo para la aplicación automatizada del método deducido en a).

En el sistema oscilatorio sencillo de la figura 3.136 del inciso 3.5, sólo la fuerza restauradora producida por la rigidez del resorte tiene un comportamiento no lineal, mientras que las fuerzas de inercia y amortiguadora son lineales.

Al ser excitado este sistema por una aceleración del terreno que tiene una variación con respecto al tiempo de tipo arbitrario o irregular con la gráfica mostrada en la figura 3.139a del inciso 3.5.1, las respuestas dinámicas de desplazamiento, velocidad y aceleración pueden ser calculadas considerando que la aceleración del terreno está compuesta por una serie de impulsos sucesivos en intervalos iguales de duración Δt .

La figura 3.139b del inciso 3.5.1, muestra un tramo de la curva de la función de excitación ampliado, se asume que la curva está compuesta en estos intervalos por tramos rectos que se aproximan tanto como se desee a la curva real de línea punteada simplemente tomando Δt suficientemente pequeño, es decir, la variación de la aceleración dentro del intervalo es lineal.

*Se asume que son conocidos los valores iniciales del intervalo en el punto A, es decir se conoce x^{*t_a} , \dot{x}^{*t_a} y \ddot{x}^{*t_a} . De la citada figura se establece*

$$\Delta x^*(t) = x^{*t_b} - x^{*t_a} \quad \dots(a)$$

$$\tan \theta = \Delta x^*(t) / \Delta t = (x^{*t_b} - x^{*t_a}) / \Delta t \quad \dots(b)$$

para cualquier tiempo t dentro del intervalo en estudio

$$\tan \theta = \Delta x^*_t / (t - t_a) \quad \dots(c)$$

de donde

$$\Delta x^*_t = (\tan \theta)(t - t_a) \quad \dots(d)$$

sustituyendo (b) en (d)

$$\Delta x^*_t = [x^{*t_b} - x^{*t_a}] (t - t_a) / \Delta t \quad \dots(e)$$

la aceleración total para el tiempo t es

$$\ddot{x}^*_t = \ddot{x}^*_{t_a} + \Delta \ddot{x}^*_t \quad \dots(f)$$

sustituyendo (e) en (f)

$$x'_t = x'_{t_a} + [x''_{t_b} - x''_{t_a}](t - t_a)/\Delta t \quad \dots (g)$$

el incremento de velocidad dentro del intervalo se obtiene integrando (g) respecto a t desde t_a hasta t

$$\Delta x'_t = \int_{t_a}^t x'_{t_a} dt + \int_{t_a}^t (x''_{t_b} - x''_{t_a})(t - t_a)/\Delta t dt = x'_{t_a} \int_{t_a}^t dt + [x''_{t_b} - x''_{t_a}]/\Delta t \int_{t_a}^t (t - t_a) dt =$$

$t_a, t_b, x'_{t_a}, x''_{t_b}$ -constantes conocidas

$$= x'_{t_a} [t]_{t_a}^t + [(x''_{t_b} - x''_{t_a})/\Delta t] [t^2/2 - t_a t]_{t_a}^t =$$

$$= x'_{t_a}(t - t_a) + [(x''_{t_b} - x''_{t_a})/\Delta t] [t^2/2 - t_a t - (t_a)^2/2 + (t_a)^2] \quad \dots (h)$$

$$\text{como } [t^2/2 - t_a t - (t_a)^2/2 + (t_a)^2] = (1/2)(t^2 - 2t_a t + (t_a)^2) = (1/2)(t - t_a)^2 \quad \dots (i)$$

sustituyendo (i) en (h)

$$\Delta x'_t = x'_{t_a}(t - t_a) + [(x''_{t_b} - x''_{t_a})/2\Delta t](t - t_a)^2 \quad \dots (j)$$

la velocidad total es igual al valor de la velocidad inicial x'_{t_a} conocida del intervalo más el incremento $\Delta x'_t$

$$x'_t = x'_{t_a} + \Delta x'_t = x'_{t_a} + x'_{t_a}(t - t_a) + [(x''_{t_b} - x''_{t_a})/2\Delta t](t - t_a)^2 \quad \dots (k)$$

el incremento en el desplazamiento dentro del intervalo se obtiene integrando (j) respecto a t desde t_a hasta t

$$\Delta x_t = x'_{t_a} \int_{t_a}^t dt + x'_{t_a} \int_{t_a}^t (t - t_a) dt + A \int_{t_a}^t (t - t_a)^2 dt \quad \dots (l)$$

con

$$A = [(x''_{t_b} - x''_{t_a})/2\Delta t] = \Delta x''(t)/2\Delta t$$

la 1a. y 2a. integrales de (l) son las mismas que se integraron antes, y son iguales a $(t - t_a)$, y a $(1/2)(t - t_a)^2$, respectivamente; se resolverá la 3a. integral

$$A \int_{t_a}^t (t - t_a)^2 dt = (1/3)[A(t - t_a)^3]_{t_a}^t = (A/3)(t - t_a)^3$$

sustituyendo estos últimos valores en (l)

$$\Delta x_t = x'_{t_a}(t - t_a) + (x'_{t_a}/2)(t - t_a)^2 + (A/3)(t - t_a)^3 \quad \dots (m)$$

el desplazamiento total es igual al valor del desplazamiento inicial x_{t_a} (que se asume conocido) más el incremento Δx_t

$$x_t = x_{t_a} + \Delta x_t = x_{t_a} + x'_{t_a}(t - t_a) + (x'_{t_a}/2)(t - t_a)^2 + (A/3)(t - t_a)^3 \quad \dots (n)$$

Si definimos

$$\Delta x'(t) = x'_{tb} - x'_{ta} \quad \dots(o)$$

$$\Delta x(t) = x_{tb} - x_{ta} \quad \dots(p)$$

$\Delta x'(t)$, $\Delta x(t)$ -incremento de la velocidad y desplazamiento en función del tiempo, respectivamente

podemos conocer la velocidad final x'_{tb} en el intervalo con la ecuación (k) para $t = t_b$

$$x'_{tb} = x'_{ta} + x''_{ta}(t_b - t_a) + A(t_b - t_a)^2$$

como $\Delta t = t_b - t_a$ y de (o) y (m) en la ecuación anterior

$$\Delta x'(t) = x''_{ta}\Delta t + \Delta x''(t)\Delta t/2 \quad \dots(q)$$

Podemos conocer el desplazamiento final x_{tb} en el intervalo con la ecuación (n) para $t = t_b$

$$x_{tb} = x_{ta} + x'_{ta}(t_b - t_a) + (x''_{ta}/2)(t_b - t_a)^2 + (A/3)(t_b - t_a)^3$$

como $\Delta t = t_b - t_a$ y de (p) y (m) en la ecuación anterior

$$\Delta x(t) = x'_{ta}\Delta t + (x''_{ta}/2)\Delta t^2 + \Delta x''(t)\Delta t^2/6 \quad \dots(r)$$

despejando $\Delta x''(t)$ de (r)

$$\Delta x''(t) = (\Delta x(t) - x'_{ta}\Delta t - (x''_{ta}/2)\Delta t^2) / (\Delta t^2/6)$$

$$\Delta x''(t) = 6\Delta x(t) / \Delta t^2 - 6x'_{ta} / \Delta t - 3x''_{ta} \quad \dots(s)$$

sustituyendo (s) en (q)

$$\Delta x'(t) = x''_{ta}\Delta t + 3\Delta x(t) / \Delta t - 3x'_{ta} - (3/2)x''_{ta}\Delta t$$

$$\Delta x'(t) = 3\Delta x(t) / \Delta t - 3x'_{ta} - x''_{ta}\Delta t/2 \quad \dots(3.162)$$

la ecuación del movimiento forzado amortiguado dentro del intervalo es de la ecuación (3.38)

$$m\Delta x''(t) + c\Delta x'(t) + k(t)\Delta x(t) = \Delta P(t) \quad \dots(u)$$

$k(t)$ -rigidez en función de la gráfica fuerza-desplazamiento del material

sustituyendo (s) y (t) en (u)

$$m[6\Delta x(t) / \Delta t^2 - 6x'_{ta} / \Delta t - 3x''_{ta}] + c[3\Delta x(t) / \Delta t - 3x'_{ta} - x''_{ta}\Delta t/2] + k(t)\Delta x(t) = \Delta P(t)$$

que puede escribirse como

$$[k(t) + 6m/\Delta t^2 + 3c/\Delta t]\Delta x(t) = \Delta P(t) + [6x'_{ta}/\Delta t + 3x''_{ta}]m + [3x'_{ta} + (\Delta t/2)x''_{ta}]c \quad \dots(v)$$

de donde

$$\overline{k(t)} \Delta x(t) = \overline{\Delta P(t)} \quad \dots (w)$$

finalmente

$$\Delta x(t) = \overline{\Delta P(t)} / \overline{k(t)} \quad \dots (3.161)$$

con

$$\overline{k(t)} = k(t) + 6m/\Delta t^2 + 3c/\Delta t \quad \dots (3.159)$$

$k(t) = k$ para comportamiento elástico

$k(t) = 0$ para comportamiento plástico

$$\overline{\Delta P(t)} = \Delta P(t) + m[6x'_{ta}/\Delta t + 3x''_{ta}] + c[3x'_{ta} + (\Delta t/2)x''_{ta}] \quad \dots (3.160)$$

$\overline{k(t)}$ -rigidez efectiva en función del tiempo

$k(t)$ -rigidez elastoplástica del material en función del tiempo

k -rigidez elástica del sistema

$\overline{\Delta P(t)}$ -incremento efectivo de la fuerza en función del tiempo

$\Delta P(t)$ -incremento de la fuerza excitatriz

m -masa del sistema oscilatorio

c -amortiguamiento del sistema oscilatorio

Δt -duración del intervalo de tiempo, generalmente $\Delta t \approx 0.1T$

x, x', x'' -desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente, del sistema oscilatorio, donde los subíndices indican:

t_a -al inicio del intervalo Δt

t_b -al final del intervalo Δt

Al final de cada intervalo, el desplazamiento y velocidad pueden calcularse con (o) y (p) expresadas como

$$x'_{tb} = \Delta x'(t) + x'_{ta} \quad \dots (3.163)$$

$$x_{tb} = \Delta x(t) + x_{ta} \quad \dots (3.164)$$

la aceleración al final del intervalo puede hallarse estableciendo el equilibrio dinámico del diagrama de cuerpo libre de la figura 3.137 del inciso 3.5, expresada como

$$P_i = P(t) + P_D + P_r$$

sustituyendo $P_i = mx''_{tb}$, $P_D = -cx'_{tb}$ y $P_r = -R_i$

P_i -fuerza de inercia

P_D -fuerza amortiguadora

P_r -fuerza restauradora

R_i -fuerza restauradora elastoplástica

se tiene

$$x''_{tb} = [P_{tb} - cx'_{tb} - R_i]/(1/m) \quad \dots(3.165)$$

x''_{tb} -aceleración al final del intervalo

donde

$$R_i = R_{fi} - (x_{fi} - x_{tb})k \quad \dots(3.155) \text{ (etapa elástica)}$$

$$R_i = R_t \quad \dots(3.156) \text{ (etapa plástica en tensión)}$$

$$R_i = R_c \quad \dots(3.157) \text{ (etapa plástica en compresión)}$$

R_{fi} -fuerza de fluencia en un ciclo histérico

x_{fi} -punto de fluencia del segmento del ciclo elastoplástico en cuestión

R_i -fuerza restauradora del resorte en cualquier segmento del ciclo elastoplástico

Los pasos a seguir para la aplicación sistemática del método fueron indicados al final del inciso 3.5.1.

b) Programación del método en calculadora de bolsillo

A continuación se indica la codificación en lenguaje básico de la programación del método numérico deducido en a).

```

10 CLEAR: INPUT "RIGIDEZ K=";K,"MASA M=";M,"% DE AMORTIGUAMIENTO=";X9
20 W=SQR(K/M):T0=2*PI/W
30 PRINT "W=",W,"PERIODO=";T0
40 INPUT "TIEMPO MAXIMO EVALUADO=";T1,"INCREMENTO DE T=";T2
45 INPUT "FLUENCIA EN TENSION=";R4,"FLUENCIA EN COMPRESION=";R5
   :X5=R4/K:X6=R5/K
50 C=X9*2*M*W:X1=0:V1=0:INPUT "P(I)=";P:A1=P/M:K2=K
60 Z8=Z8+1:IF Z8=1 THEN 70 ELSE 80
70 X2=X1:V2=V1:A2=A1:GOTO 85
80 X2=X3:V2=V3
85 PRINT "T(A)=";T,"X(TA)=";X2,"V(TA)=";V2,"A(TA)=";A2,"KY=";KY
90 INPUT "P(I+1)=";P1:K1=K2+6*M/T2^2+3*C/T2
100 P2=P1-P:P3=P2+M*(6*V2/T2+3*A2)+C*(3*V2+T2*A2/2)
120 T=T+T2:X4=P3/K1:V4=3*X4/T2-3*V2-A2*T2/2:V3=V4+V2:X3=X4+X2
130 IF Z8=1 THEN IF P1<0 THEN Z7=1

```

```

135 IF Z7=1 THEN GOSUB 600 ELSE GOSUB 400
140 A2=(P1-C*V3-R6)/M:P=PI:IF T>T1 THEN END ELSE 60
400 REM CICLO ELASTOPLASTICO (+)
410 IF KY=0 THEN 460
420 IF KY=-1 THEN 490
430 IF KY=1 THEN 510
440 IF KY=-2 THEN 550
450 IF KY=2 THEN 570 ELSE END
460 IF X3>=X5 THEN 490
470 IF X3<=X6 THEN Z7=1:GOTO 690
480 R6=R4-(X5-X3)*K:K2=K:KY=0:RETURN
490 KY=-1:IF V3*V2<0 THEN 510
500 R6=R4:K2=0:RETURN
510 KY=1:X8=X8+1:IF X8=1 THEN L1=X3:L2=L1-(R4-R5)/K
520 IF X3>L2 THEN IF X3<=L1 THEN R6=R5-(L2-X3)*K:K2=K:RETURN
530 IF X3<=L2 THEN IF X3<L1 THEN 550
540 X8=0:KY=-1:GOTO 500
550 KY=-2:IF X3>X2 THEN 570
560 R6=R5:K2=0:RETURN
570 KY=2:Z9=Z9+1:IF Z9=1 THEN L3=X2:L4=L3+(R4-R5)/K
580 IF X3<L4 THEN IF X3>L3 THEN R6=R4-(L4-X3)*K:K2=K:RETURN
590 IF X3>=L4 THEN X5=L4:K2=0:KY=-1:R6=R4:X8=0:Z9=0:RETURN
595 Z9=0:KY=-2:GOTO 560
600 REM CICLO ELASTOPLASTICO (-)
610 IF KY=0 THEN 660
620 IF KY=-1 THEN 750
630 IF KY=1 THEN 710
640 IF KY=-2 THEN 690
650 IF KY=2 THEN 770 ELSE END
660 IF X3<=X6 THEN 690
670 IF X3>=X5 THEN Z7=2:GOTO 490
680 R6=R5-(X6-X3)*K:K2=K:KY=0:RETURN
690 KY=-2:IF V3*V2<0 THEN 710
700 R6=R5:K2=0:RETURN
710 KY=1:X8=X8+1:IF X8=1 THEN L3=X3:L2=L3+(R4-R5)/K
720 IF X3<L2 THEN IF X3>=L3 THEN R6=R4-(L2-X3)*K:K2=K:RETURN
730 IF X3>=L2 THEN IF X3>L3 THEN 750
740 X8=0:KY=-2:GOTO 700
750 KY=-1:IF X3<X2 THEN 770
760 R6=R4:K2=0:RETURN
770 KY=2:Z9=Z9+1:IF Z9=1 THEN L1=X2:L4=L1-(R4-R5)/K
780 IF X3>L4 THEN IF X3<L1 THEN R6=R5-(L4-X3)*K:K2=K:RETURN
790 IF X3<=L4 THEN X6=L4:K2=0:KY=-2:R6=R5:X8=0:Z9=0:RETURN
795 Z9=0:KY=-1:GOTO 760

```

La siguiente tabla relaciona la nomenclatura usada en el método numérico y los símbolos del programa de computadora.

Método:	x_0	x'_0	x''_0	x_{1a}	x'_{1a}	x''_{1a}	x_{1b}	x'_{1b}	x''_{1b}	$\Delta x(t)$
Programa:	X1	V1	A1	X2	V2	A2	X3	V3	A3	X4

Método: $\Delta x(t)$	$\Delta x^*(t)$	x_i	x_e	R_i	R_e	R_i	k		
Programa: V4	A4	X5	X6	R4	R5	R6	K		
Método: m	w	ξ	T	Δt	P_i	$\overline{\Delta P(t)}$	P_{i+1}	$\Delta P(t)$	
Programa: M	W	X9	T0	T2	P	P3	P1	P2	
Método: $\overline{k(t)}$	$k(t)$	x_{max}	x_{fz}	x_{min}	x_{fz}	t			
Programa: K1	K2	L1	L2	L3	L4	T			

La variable KY usada en el programa sirve para indicar en que segmento o etapa del ciclo histerético estamos incursionando, de esta forma se tienen las siguientes claves para KY referidas a la figura 3.138b.

- KY = 0 indica etapa elástica en recta E_o
- KY = -1 indica etapa plástica en recta T
- KY = 1 indica etapa elástica en recta E₁
- KY = -2 indica etapa plástica en recta C
- KY = 2 indica etapa elástica en recta E₂

Los datos de entrada que se requieren son masa, rigidez elástica, y porcentaje de amortiguamiento, el programa entrega el valor de la frecuencia angular y el periodo de oscilación, requiriendo luego el valor de Δt , el tiempo máximo de evaluación de las respuestas, y las fuerzas de fluencia en tensión y compresión. Para cada paso o intervalo se requieren los valores de la fuerza excitatriz y al final de éste el programa calcula y muestra los valores de el desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema.

II.- Para el sistema oscilatorio simple o de 1 G.L., mostrado en la figura 3.141a, que tiene un comportamiento elastoplástico y que es sometido a la acción de la fuerza excitatriz cuya variación con respecto al tiempo aparece en la gráfica de la figura 3.141b, determinar: a) las respuestas dinámicas de desplazamiento, velocidad y aceleración, considerando un porcentaje de amortiguamiento crítico del 10% y la curva carga-desplazamiento elastoplástica de la figura 3.141c. Emplear cálculos manuales y b) las respuestas dinámicas mencionadas en a) asumiendo: 1-Comportamiento plástico y 2-Comportamiento elástico. Usar el programa para calculadora de bolsillo del Método de integración por pasos de aceleración lineal cuya codificación fue indicada en el problema anterior y graficar los resultados de desplazamientos.

a) Respuestas dinámicas con cálculos manuales

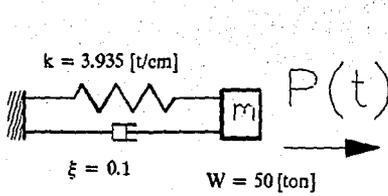
La masa del sistema es $m = W/g = 50/980.665 = 0.051 [t \cdot s^2/cm]$... (a)

y de la ecuación (3.6), (3.7) y (3.15)

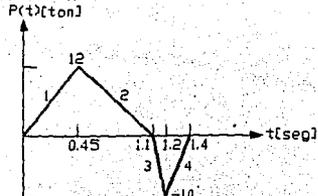
$w = [k/m]^{0.5} = 8.784 [rad/seg]$... (b)

$T = 2\pi/w = 0.715 [seg]$... (c)

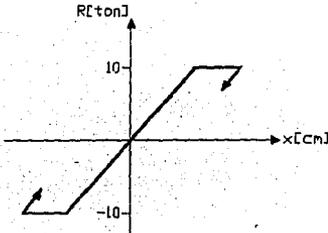
$c = 2m w \xi = 2(0.051)(8.784)(0.1) = 0.0896 [t \cdot s/cm]$... (d)



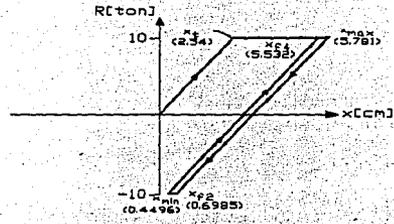
a) Sistema con rigidez no lineal



b) Función de excitación



c) Curva elastoplástica carga-desplazamiento



d) Puntos de fluencia calculados en el primer ciclo histérico.

Figura 3.14L. Sistema oscilatorio sencillo no lineal en vibración forzada amortiguada de la ecuación (3.150) y (3.151) y la figura 3.141c

$$R_t = 10 \text{ [ton]} \quad \dots (e)$$

$$x_{t1} = 10/3.935 = 2.541 \text{ [cm]} \quad \dots (f)$$

$$R_o = -10 \text{ [ton]} \quad \dots (g)$$

$$x_o = -2.541 \text{ [cm]} \quad \dots (h)$$

como el sistema parte de la posición en reposo

$$x_o = 0, \text{ y } x'_o = 0 \text{ para } t = 0$$

de la ecuación (3.158)

$$x''_o = P_{(t=0)}/m = 0$$

tomando $\Delta t = 0.1T \approx 0.1 \text{ [seg]}$... (i)

Se tiene para cada paso de tiempo Δt , los siguientes cálculos:

de la ecuación (3.159), (a), (d) e (i)

$$\overline{k(t)} = k(t) + 6(0.051)/(0.1)^2 + 3(0.0896)/0.1 = k(t) + 33.288 \quad \dots (j)$$

con $k(t) = k$ para etapa elástica

$k(t) = 0$ para etapa plástica

de la ecuación (3.160), (a), (d) e (l)

$$\overline{\Delta P(t)} = \Delta P(t) + (0.051)[6x'_{ta}/0.1 + 3x''_{ta}] + 0.0896[3x'_{ta} + 0.1x''_{ta}/2]$$

$$\overline{\Delta P(t)} = \Delta P(t) + 3.3288x'_{ta} + 0.15748x''_{ta} \quad \dots(k)$$

con

$$\Delta P(t) = P_{tb} - P_{ta} \quad \dots(l)$$

de la ecuación (3.161), (3.162), (3.163) y (3.164)

$$\Delta x(t) = \overline{\Delta P(t)} / \overline{K(t)} \quad \dots(m)$$

$$\Delta x'(t) = 3\Delta x(t)/0.1 - 3x'_{ta} - x''_{ta}(0.1)/2$$

$$\Delta x''(t) = 30\Delta x(t) - 3x''_{ta} - 0.05x'_{ta} \quad \dots(n)$$

$$x_{tb} = \Delta x(t) + x_{ta} \quad \dots(o)$$

$$x'_{tb} = \Delta x'(t) + x'_{ta} \quad \dots(p)$$

de la ecuación (3.165)

$$x''_{tb} = [P_{tb} - cx'_{tb} - R_1] / 19.60784314 \quad \dots(q)$$

con R_1 dado por las ecuaciones (3.155), (3.156) y (3.157)

Efectuando los cálculos desde (j) hasta (q) para cada incremento de tiempo, se realiza el análisis paso a paso del sistema, se indican a continuación los cálculos para los primeros tres pasos, los resultados para todo el proceso se muestran en la tabla 3.50 al final del problema.

Paso 1: $t = 0$

$t = 0$ implica $(x_{ta} = x_0 = 0) < (x_{t1} = 2.541)$ y por tanto $KY = 0$ (etapa elástica, curva E_0)

$x'_{ta} = x'_0 = 0$, y de la ecuación (3.166) $R_1 = 10 - 2.541k = 0$, $x''_{ta} = x''_0 = 0$

como es etapa elástica $k(t) = k$ y de (j) $k(t) = 3.935 + 33.288 = 37.223$

de (l)

$$\Delta P(t) = 2.6667 - 0 = 2.6667$$

de (k)

$$\overline{\Delta P(t)} = 2.6667 + 0 + 0 = 2.6667$$

de (m)

$$\Delta x(t) = 2.6667/37.223 = 0.07164$$

de (n)

$$\Delta x'(t) = 30(0.07164) + 0 + 0 = 2.1492$$

de (o) y (p)

$$x_{tb} = 0.0716; \quad x'_{tb} = 2.1492$$

como $(x_{tb} = 0.0716) < (x_{t1} = 2.541)$ entonces $KY = 0$ (etapa elástica, curva E_0)

de la ecuación (3.166) $R_1 = 10 - (2.541 - 0.0716)k = 0.2829$ (se usará para el paso 2)

de (q)

$$x^*_{tb} = (2.6667 - 0.0896(2.1492) - 0.2829)19.60784314 = 42.9653$$

Paso 2: $t = 0.1$

$$x_{ta2} = x_{tb1} = 0.0716$$

$$x'_{ta2} = x'_{tb1} = 2.148$$

$$x^*_{ta2} = x^*_{tb1} = 42.9653$$

por ser etapa elástica $k(t) = k$ y de (j) $\overline{k(t)} = 37.223$

$$\text{de (l)} \quad \Delta P(t) = 5.3333 - 2.6667 = 2.6667$$

de (k)

$$\overline{\Delta P(t)} = 2.6667 + 3.3288(2.1492) + 0.15748(42.9653) = 16.5871$$

de (m)

$$\Delta x(t) = 16.5871/37.223 = 0.4456$$

de (n)

$$\Delta x'(t) = 30(0.4456) - 3(2.1492) - 0.05(42.9653) = 4.7721$$

de (o) y (p)

$$x_{tb} = 0.0716 + 0.4456 = 0.5172; \quad x'_{tb} = 2.148 + 4.7721 = 6.9201$$

como $(x_{tb} = 0.5172) < (x_{t1} = 2.541)$ implica $KY = 0$ (etapa elástica, curva E_0)

de la ecuación (3.166) $R_1 = 10 - (2.541 - 0.5172)k = 2.0363$

de (q)

$$x''_{tb} = (5.3333 - (0.0896)(6.9201) - 2.0363)19.60784314 = 52.4894$$

Paso 3: $t = 0.2$

$$x_{ta3} = x_{tb2} = 0.5172$$

$$x'_{ta3} = x'_{tb2} = 6.9201$$

$$x''_{ta3} = x''_{tb2} = 52.4894$$

por ser etapa elástica $k(t) = k$ y de (j) $\overline{k(t)} = 37.223$

de (l) $\Delta P(t) = 8 - 5.3333 = 2.6667$

de (k)

$$\overline{\Delta P(t)} = 2.6667 + 3.3288(6.9201) + 0.15748(52.4894) = 33.9684$$

de (m)

$$\Delta x(t) = 33.9684/37.223 = 0.9126$$

de (n)

$$\Delta x'(t) = 30(0.9126) - 3(6.9201) - 0.05(52.4894) = 3.9932$$

de (o) y (p)

$$x_{tb} = 0.5172 + 0.9126 = 1.4298; x'_{tb} = 6.9201 + 3.9932 = 10.9133$$

como $(x_{tb} = 1.4298) < (x_t = 2.541)$ implica $KY = 0$ (etapa elástica, curva E_c)

de la ecuación (166) $R_1 = 10 - (2.541 - 1.4298)k = 5.6274$

de (q)

$$x''_{tb} = (8 - (0.0896)(10.9133) - 5.6274)19.60784314 = 27.3484$$

Similarmenete se calculan los pasos restantes.

Tabla 3.50

t_n	P	x_{ta}	KY	x'_{ta}	R_1	x''_{ta}	$w(t)$	$k(t)$	$\Delta P(t)$	$\overline{\Delta P(t)}$	$\Delta x(t)$	$\Delta x'(t)$
[s]	[t]	[cm]		[cm/s]	[ton]	[cm/s ²]	[t]	[t]	[t]	[t]	[cm]	[cm/s]
0	0	0	0	0	0	0	k	37.223	2.6667	2.6667	0.07164	2.1492
0.1	2.6667	0.0716	0	2.1492	0.2829	42.9654	k	37.223	2.6667	16.5871	0.4456	4.7721
0.2	5.3333	0.5172	0	6.9201	2.0363	52.4894	k	37.223	2.6667	33.9684	0.9126	3.9932

Tabla 3.50 (continuación)

t_a	P	x_{ta}	KY	\dot{x}'_{ta}	R_t	\ddot{x}''_{ta}	$l(t)$	$l(t)$	$\Delta P(t)$	$\Delta P(t)$	$\Delta x(t)$	$\Delta \dot{x}(t)$
[s]	[t]	[cm]		[cm/s]	[ton]	[cm/s ²]	[t]	[t]	[t]	[t]	[cm]	[cm/s]
0.3	8.00	1.4298	0	10.9133	5.6274	27.3484	K	37.223	2.6667	43.3017	1.1633	0.7917
0.4	10.6667	2.5931	-1	11.705	10	-7.4915	0	33.288	0.4102	38.1940	1.1474	-0.3184
0.5	11.0769	3.7405	-1	11.3866	10	1.1110	0	333.288	-1.8461	36.2326	1.0885	-1.5604
0.6	9.2308	4.8290	-1	9.8262	10	-32.3456	0	33.288	-1.8461	25.7696	0.7741	-4.6383
0.7	7.3846	5.6031	-1	5.1879	10	-60.3968	0	33.288	-1.8461	5.9121	0.1776	-7.2159
0.8	5.5385	5.7807	1	-2.028	10	-83.9175	k	37.223	-1.8461	-21.8123	-0.5860	-7.3001
0.9	3.6923	5.1947	1	-9.328	7.6941	-62.0791	k	37.223	-1.8461	-42.6734	-1.1464	-3.3040
1.0	1.8462	4.0483	1	-12.632	3.1830	-4.0191	k	37.223	-1.8461	-44.5284	-1.1963	2.2080
1.1	0	2.8520	1	-10.424	-1.5244	48.2037	k	37.223	-10	-37.1083	-0.9969	-1.0452
1.2	-10	1.8551	1	-11.4692	-5.4472	-69.1208	k	37.223	5	44.0638	-1.1838	2.3496
1.3	-5	0.6713	-2	-9.1196	-10	114.0611	0	33.288	5	-7.3950	-0.2222	14.9898
1.4	0	0.4491	-2	5.8702	-10	185.7625	0	33.255	0	48.7946	1.4658	17.0753
1.5	0	1.9149	2	22.9455	-4.2333	42.6938	k	37.223	0	83.1038	2.2326	-3.9932

b) Respuestas dinámicas con el programa para calculadora de bolsillo del Método de integración por pasos de aceleración lineal

1-Comportamiento plástico- Con el programa mencionado se obtiene la tabla 3.51 de respuestas en donde los cálculos son efectuados con un mayor número de cifras significativas

Tabla 3.51

t_a	P	x_{ta}	KY	\dot{x}'_{ta}	\ddot{x}''_{ta}
[s]	[ton]	[cm]		[cm/s]	[cm/s ²]
0	0	0	0	0	0
0.1	2.6667	0.0716	0	2.1492	42.9849
0.2	5.3333	0.5173	0	6.9233	52.4955
0.3	8.00	1.4302	0	10.9149	27.3369
0.4	10.6667	2.5936	-1	11.7054	-7.4912
0.5	11.0769	3.7410	-1	11.3864	1.1123
0.6	9.2308	4.8295	-1	9.8249	-32.3425
0.7	7.3846	5.6035	-1	5.1879	-60.3964
0.8	5.5385	5.7811	1	-2.0278	-83.9181
0.9	3.6923	5.1951	1	-9.3278	-62.0816
1.0	1.8462	4.0487	1	-12.6328	-4.0196
1.1	0	2.8524	1	-10.4236	48.2050
1.2	-10	1.8555	1	-11.4693	-69.1206
1.3	-5	0.6717	-2	-9.1190	114.0593
1.4	0	0.4496	-2	5.8720	185.7625

Tabla 3.51
(continuación)

t_a	P	x_{ta}	KY	\dot{x}'_{ta}	\ddot{x}''_{ta}
[s]	[ton]	[cm]		[cm/s]	[cm/s ²]
1.5	0	1.9156	2	22.9484	42.6496
1.6	0	4.1483	2	18.9511	-122.5945
1.7	0	5.3244	2	3.5107	-186.2138
1.8	0	4.8506	2	-11.9266	-122.5321
1.9	0	3.2656	2	-17.5695	9.6732
2.0	0	1.7353	2	-11.2533	116.6498
2.1	0	1.2224	2	1.2884	134.1873
2.2	0	1.9054	2	11.2018	64.0787

Se observa que el desplazamiento máximo es $x_{\max} = 5.78$ [cm]

La gráfica del ciclo histerético se muestra en la figura 3.141d, en donde se indican los puntos de fluencia alcanzados en el material componente del sistema oscilatorio.

2-Comportamiento elástico- Usando el mismo programa pero con un valor grande de la fuerza restauradora para mantener al sistema en el rango elástico ($R_t=100$ y $R_c=-100$ en este caso), se calculan las respuestas mostradas en la tabla 3.52.

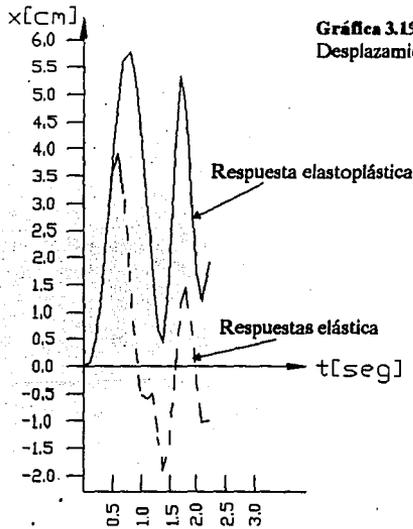
Tabla 3.52

t_a	P	x_{ta}	KY	\dot{x}'_{ta}	\ddot{x}''_{ta}
[s]	[t]	[cm]		[cm/s]	[cm/s ²]
0	0	0	0	0	0
0.1	2.6667	0.0716	0	2.1492	42.9849
0.2	5.3333	0.5173	0	6.9233	52.4955
0.3	8.0	1.4302	0	10.9149	27.3369
0.4	10.6667	2.5936	0	11.7053	-11.5277
0.5	11.0769	3.6027	0	7.4369	-73.8404
0.6	9.2308	3.9057	0	-2.0894	-116.6874
0.7	7.3546	3.1756	0	-11.8906	-79.3347
0.8	5.5385	1.7270	0	-15.7100	2.9461
0.9	3.6923	0.2850	0	-11.9890	71.4736
1.0	1.8462	-0.5344	0	-4.1768	84.7711
1.1	0	-0.5989	0	2.1807	42.3773
1.2	-10	-0.4932	0	-3.3107	-152.2054
1.3	-5	-1.2989	0	-9.9389	19.6424
1.4	0	-1.9703	0	-1.2461	154.2129

Tabla 3.52
(continuación)

t_a	P	x_{ta}	KY	\dot{x}'_{ta}	\ddot{x}''_{ta}
[s]	[t]	[cm]		[cm/s]	[cm/s ²]
1.5	0	-1.4293	0	11.0114	90.9378
1.6	0	-0.0599	0	14.5143	-20.8798
1.7	0	1.1498	0	8.3051	-103.3049
1.8	0	1.4555	0	-2.2752	-108.3011
1.9	0	0.7938	0	-9.8844	-43.8817
2.0	0	-0.2758	0	-10.125	39.0678
2.1	0	-1.0160	0	-3.9088	85.2575
2.2	0	-1.0048	0	3.8890	70.6987

De los resultados de desplazamientos de las tablas 3.51 y 3.52 se obtiene la gráfica 3.19 en donde pueden compararse las respuestas elásticas e inelásticas



III.- Determinar: a) Las respuestas dinámicas del marco mostrado en la figura 3.142a, que tiene un comportamiento elastoplástico cuya curva fuerza-desplazamiento aparece en la figura 3.142c; si es sometido a un movimiento del suelo con el acelerograma mostrado en la figura 3.142b, b) Repetir los cálculos asumiendo comportamiento elástico, y c) Graficar los desplazamientos obtenidos en a) y b).

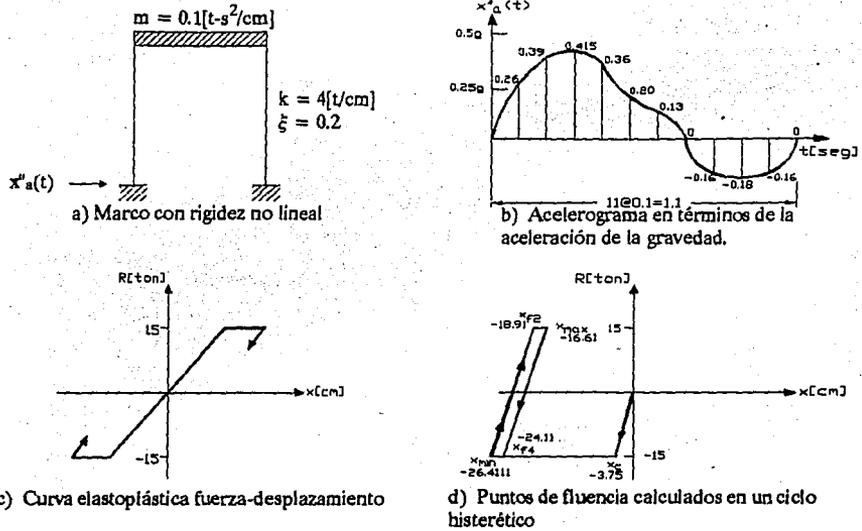


Figura 3.142. Sistema oscilatorio no lineal de 1 G.L. sujeto a una aceleración del suelo.

a) Comportamiento elastoplástico.- Utilizando el Método de Integración por pasos de aceleración lineal, programado en una calculadora de bolsillo (ver codificación al final del problema I), o procediendo con cálculos manuales como en el problema anterior, se obtiene la tabla 3.53, en donde de acuerdo con 3.2.3., referente a aceleración en la base, se ha sustituido dicha aceleración por una fuerza excitatriz aplicada en la masa con una magnitud de $-m\ddot{x}_a$

El programa entrega los siguientes resultados

$w = 8.325 \text{ [rad/seg]}$

$T = 0.993 \text{ [seg]}$

por tanto: $\Delta t = 0.1 \text{ [seg]}$

Tabla 3.53

t_n [s]	$P_i = -m\ddot{x}_a$ [ton]	x_{tar} [cm]	\dot{x}_{tar} [cm/s]	\ddot{x}_{tar} [cm/s ²]	KY
0	0	0	0	0	0
0.1	-25.50	-0.3562	-10.6859	-213.7186	0
0.2	-38.25	-2.4766	-31.5526	-203.6156	0
0.3	-40.70	-6.3790	-43.7868	-146.2271	-2
0.4	-35.30	-11.3542	-54.3708	-65.4516	-2
0.5	-19.61	-16.8619	-53.2169	88.5293	-2
0.6	-12.75	-21.6726	-42.3132	129.5448	-2

Tabla 3.53
(continuación)

t_i	$P_i = -m\ddot{x}_a$	x_{tar}	\dot{x}_{tar}	\ddot{x}_{tar}	KY
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]	
0.7	0	-25.1160	-25.1541	213.6356	-2
0.8	15.69	-26.4111	0.7746	304.9403	1
0.9	17.65	-24.9788	26.1716	202.9999	1
1.0	15.69	-21.6487	37.4099	21.7649	1
1.1	0	-18.2408	26.3275	-216.6039	-1
1.2	0	-16.6100	7.0993	-167.9600	-1
1.3	0	-16.6770	-7.8107	-127.5601	2
1.4	0	-17.9716	-16.8361	-52.9469	2
1.5	0	-19.7923	-18.3036	23.5964	2
1.6	0	-21.4174	-13.3238	75.9999	2
1.7	0	-22.3434	-4.9331	91.8138	2
1.8	0	-22.4082	3.3323	73.4947	2
1.9	0	-21.7726	8.7281	34.4209	2
2.0	0	-20.7982	10.0538	-7.9075	2
2.1	0	-19.8835	7.7279	-38.6102	2
2.2	0	-19.3225	3.3044	-49.8592	2
2.3	0	-19.2283	-1.2889	-42.0081	2
2.4	0	-19.5335	-4.4763	-21.7386	2
2.5	0	-20.0510	-5.4872	1.5209	2
2.6	0	-20.5624	-4.4492	19.3389	2
2.7	0	-20.8976	-2.1324	26.8958	2
2.8	0	-20.9814	0.4040	23.8337	2
2.9	0	-20.8392	2.2673	13.4307	2

Se observa que el desplazamiento máximo absoluto es de $x_{max} = 26.41$ [cm]

El sistema termina su oscilación vibrando a lo largo de la curva E_2 (KY = 2), como se observa en la figura 3.142d, después de efectuar un ciclo histerético casi completo.

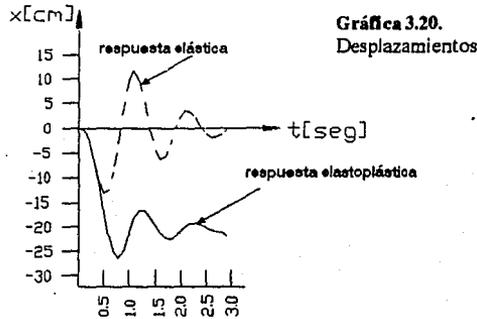
b) Comportamiento elástico.- Utilizando el mismo programa de evaluación de respuestas y considerando un valor de $R_t = 100$ y $R_c = -100$ para mantener en este caso al sistema en el rango elástico, se calculan los resultados listados en la tabla 3.54.

FALTA DE ORIGEN

Tabla 3.54

t_a	$P_i = -m\ddot{x}_a$	x_{tar}	\dot{x}'_{tar}	\ddot{x}''_{tar}	KY
[s]	[ton]	[cm]	[cm/s]	[cm/s ²]	
0	0	0	0	0	0
0.1	-25.5	-0.3562	-10.6859	-213.7186	0
0.2	-38.25	-2.4766	-31.5526	-203.6156	0
0.3	-40.7	-6.3790	-43.7868	-41.0681	0
0.4	-35.3	-10.6169	-37.5115	166.5745	0
0.5	-19.61	-13.2119	-11.1533	360.5897	0
0.6	-12.75	-12.5943	22.8051	318.5772	0
0.7	0	-8.8718	50.1357	228.0359	0
0.8	15.69	-2.9233	66.7817	104.8845	0
0.9	17.65	3.8672	64.9065	-142.3902	0
1.0	15.69	9.3460	41.6693	-322.3543	0
1.1	0	11.6531	1.9932	-471.1663	0
1.2	0	9.7836	-36.5136	-298.9701	0
1.3	0	5.0306	-54.6149	-63.0561	0
1.4	0	-0.4012	-50.5689	143.9769	0
1.5	0	-4.5467	-30.4278	258.8457	0
1.6	0	-6.2890	-4.3564	262.5825	0
1.7	0	-5.5536	17.6476	177.4975	0
1.8	0	-3.1122	29.0699	50.9478	0
1.9	0	-0.1452	28.3248	-65.8499	0
2.0	0	2.2415	18.2419	-135.8074	0
2.1	0	3.3706	4.1814	-145.4033	0
2.2	0	3.1304	-8.2997	-104.2189	0
2.3	0	1.8916	-15.3521	-36.8279	0
2.4	0	0.2814	-15.7624	28.6205	0
2.5	0	-1.0818	-10.8015	70.5976	0
2.6	0	-1.7933	-3.2713	80.0066	0
2.7	0	-1.7527	3.7590	60.5989	0
2.8	0	-1.1332	8.0385	24.9907	0
2.9	0	-0.2651	8.7157	-11.4456	0

c) De los resultados de desplazamientos de las tablas 3.53 y 3.54 se obtiene la gráfica 3.20 en donde se observa la diferencia en el comportamiento del sistema.



Gráfica 3.20.
Desplazamientos

3.5.3.- PROBLEMAS PROPUESTOS.

I.- Para el Marco mostrado en la figura 3.143a, que tiene un comportamiento elástico-plástico con la curva carga-desplazamiento que aparece en la gráfica de la figura 3.143c; determinar las respuestas dinámicas de desplazamiento, velocidad y aceleración, producidas por la acción de la fuerza excitatriz que varía respecto al tiempo como lo indica la figura 3.142b.

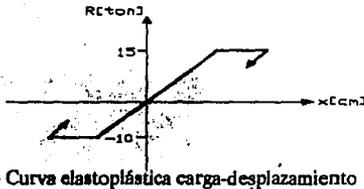
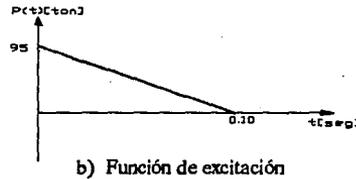
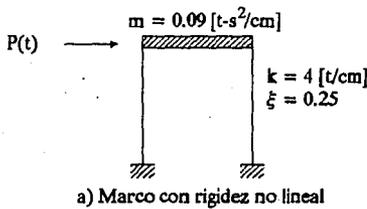


Figura 3.143. Marco plano de 1 G.L. no lineal sometido a vibración forzada amortiguada.

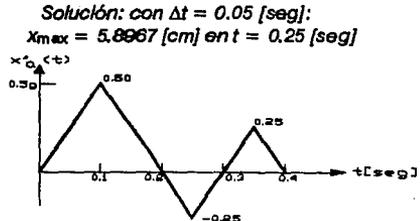


Figura 3.144. Acelerograma para el problema II, inciso 3.5.3.

II.- Resolver el problema III del inciso 3.5.2, si el movimiento del suelo tiene el acelerograma mostrado en la figura 3.144.

Solución: con $\Delta t = 0.05$ [seg]: $x_{max} = -5.1843$ [cm] para $t = 0.3$ [seg]

BIBLIOGRAFIA.**1.- ESTRUCTURAS ANTISISMICAS.**

Estrada Uribe Gabriel,
Cia. Editorial Continental, S.A. de C.V., México 1984.

2.- MANUAL DE DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS.

Meli Piralla Roberto y Bazán Zurita Enrique,
Ed. Limusa, S.A. de C.V., México 1987.

3.- APUNTES DE DISEÑO ESTRUCTURAL.

De Buen y López de Heredia O., et al.,
Facultad de Ingeniería, UNAM, México 1985.

4.- REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL (RCDF-93).

Diario Oficial de la Federación., 2 de agosto., México 1993.

5.- FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS UNIVERSITARIAS.

Allendoerfer Carl B. y Cletus O. Oakley,
Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V., México 1972.

6.- RESISTENCIA DE MATERIALES.

Nash William A., Serie Schaum.,
Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V., México 1980.

7.- ANALISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS.

Kinney J. Sterling,
Ed. CECSA., México 1981.

8.- MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS, ESTATICA.

Beer Ferdinand P. y Johnston E. Russell,
Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V., México 1982.

9.- FISICA GENERAL.

Bueche Frederick J.,
Serie Schaum., Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V., México 1982.

10.- INGENIERIA ESTRUCTURAL, ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS.

Vol. 2, White Richard N., et al.,
Ed. Limusa, S.A., México 1981.

11.- TEORIA DE LA ELASTICIDAD.

Timoshenko S. y Goodier J. N.,
Urmo S.A. de Ediciones., España 1975.

12.- MICROCOMPUTER-AIDED ENGINEERING, STRUCTURAL DYNAMICS.

Paz Mario., Ed. Van Nostrand Reinhold Company Inc.,
New York, USA 1988.

13.- FUNDAMENTOS DE INGENIERIA SISMICA.

Newmark N.M. y Rosenblueth E.,
Ed. Diana, S.A., México 1978.

14.- ECUACIONES DIFERENCIALES ELEMENTALES.

Reinville Earl D.,
Ed. Trillas., México 1981.

15.- GEOMETRIA ANALITICA.

Lehmann Charles H.,
Ed. Limusa, S.A., México, 1980.

16.- DISEÑO DE ACERO ESTRUCTURAL.

Bowles Joseph E.,
Ed. Limusa, S.A., México 1984.

17.- APLICACIONES DE LA ESTATICA.

Neoeocheer Murrieta Antonio, et al.,
Ed. Limusa, S.A., México 1982.

18.- EL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA.

Leithold Louis.,
Ed. Harla S.A. de C.V., México 1973.

20.- COMPENDIO DEL MANUAL AHMSA.

Altos Hornos de México, S.A., Monclova, Coahuila 1987.

FALLA DE ORIGEN

21.- ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL CONCRETO REFORZADO.

González Cuevas Oscar M. y Robles Fernández Francisco,
Ed. Limusa, S.A., México 1990.

22.- CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA., ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS CON FUNDAMENTO EN EL REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL (RCDF-87).

Cervantes Beltrán Ramón,
Facultad de Ingeniería UNAM, División de Educación Continua., México 1992.

23.- CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA., VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

Trigos José Luis,
Facultad de Ingeniería UNAM, División de Educación Continua., México 1992.

24.- METODOS NUMERICOS.

Luthe Rodolfo., et al.,
Ed. Limusa, México 1980.

25.- SAP IV-80: A STRUCTURAL ANALYSIS PROGRAM FOR STATIC AND DYNAMIC RESPONSE OF LINEAR SYSTEMS.

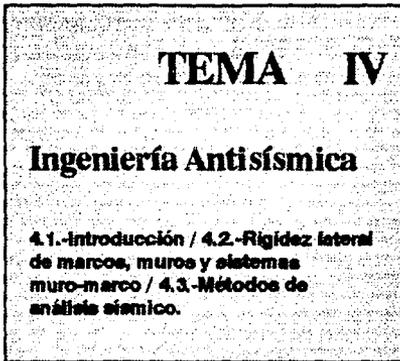
Wilson K.J., et al.,
Earthquake Engineering Research Center., Universidad de California, USA 1980.

26.- CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA., METODOS DE STODOLLA-VIANELLO-NEWMARK.

Del Valle C. Enrique.,
Facultad de Ingeniería UNAM, División de Educación Continua., México 1992.

27.- DISEÑO ESTRUCTURAL.

Meli Piralla Roberto,
Ed. Limusa, S.A., México 1989.



4.1.- INTRODUCCION.

En muchas regiones geográficas el mayor riesgo de daños y fallas en las estructuras civiles lo representan los sismos. A pesar de que existen regiones en que la ocurrencia de algún sismo es poco probable, debe tomarse en cuenta el riesgo de que algún temblor intenso se presente durante la vida útil de las estructuras que se construyan.

La **Ingeniería Antisísmica** es una rama de la ingeniería civil que tiene como función el desarrollo de teorías y métodos de análisis y diseño de estructuras resistentes a la acción de los sismos.

Basándose principalmente en los conocimientos de la Sismología, de la Dinámica Estructural, del Análisis y el Diseño Estructural, la Ingeniería Antisísmica ha desarrollado el **Diseño Sismo-resistente** de las estructuras civiles.

El **Diseño Sismo-resistente** implica a grandes rasgos las siguientes etapas^[ref. 7]:

a) *La definición de la acción sísmica de diseño.*- Dependiendo de la región en donde se construirá la estructura, el reglamento de construcciones local define el nivel de la acción sísmica que debe usarse en el análisis y diseño de la estructura en cuestión.

b) *La selección de la estructuración adecuada.*- La selección de un sistema estructural óptimo para la absorción y disipación de los efectos sísmicos (labor que se conoce como estructuración), reviste gran importancia en virtud de que dichos efectos dependerán grandemente de las propiedades de la estructura.

c) *El cálculo de las respuestas estructurales.*- Los modelos de análisis de las estructuras civiles varían en su grado de refinamiento, desde los muy simples hasta los extraordinariamente complejos. Asimismo los métodos de análisis sísmico varían desde la consideración del efecto de una serie de fuerzas estáticas equivalentes a las dinámicas hasta el análisis dinámico por pasos ante la excitación de movimientos en la base de las estructuras.

d) *El dimensionamiento y detallado de la estructura.*- Los detalles de los elementos estructurales como el dimensionamiento, uniones, materiales, etc. deben ser cuidadosamente indicados y especificados en los planos de construcción en concordancia con las suposiciones teóricas adoptadas en el análisis y diseño, pues de dichos detalles depende que se

construyan estructuras dúctiles capaces de incur-sionar en etapas inelásticas ante sismos excep-cionalmente intensos o ante el sismo de diseño, siendo capaces de disipar la energía y evitando las fallas frágiles y por ende el colapso de la estruc-tura.

Los conceptos fundamentales de Sismología y de Dinámica Estructural fueron tratados en los temas anteriores, mientras que los requisitos de dimensionamiento y detallado de los elementos estructurales son materia de otros cursos como los de Diseño Estructural, Estructuras de Concreto Reforzado, Estructuras Metálicas, Concreto Presforzado, etc.

A lo largo de este tema se hace énfasis en la presentación de los Métodos de Análisis Sísmico usados en la práctica del diseño sismorresistente, con base en las recomendaciones del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal RCDF-93 y sus Normas Técnicas Complementarias^[ref. 3], asimismo se estudian los aspectos principales de la configuración de las estructuras sismorresistentes.

Al efectuar la estructuración de un inmueble, frecuentemente se hace uso de la combinación de elementos estructurales tales como trabes, colum-nas y muros, con ellos se forman sistemas estruc-turales como son: marcos con o sin contravientos, muros y/o sistemas muro-marco, es decir, marcos rellenos con muros o combinaciones de marcos y muros.

Las características de dichos sistemas se es-tudian en el siguiente inciso.

4.2- RIGIDEZ LATERAL DE MARCOS, MUROS Y SISTEMAS MURO-MARCO.

En la evaluación de las respuestas sísmicas es fundamental el cálculo previo de la rigidez ante cargas laterales de los sistemas estructurales. En incisos anteriores se estudiaron métodos refinados para la obtención de la rigidez lateral y de entrepiso de los sistemas formados a base de marcos con o sin contravientos, por lo que ahora se presentarán sólo algunos comentarios adicionales y un método aproximado para el cálculo de la rigidez de entrepiso de marcos planos. También se estudiarán diversos métodos para la obtención de la rigidez lateral en estruc-turas formadas por muros o por marcos en combinación con muros de concreto o de mampostería.

4.2.1.- RIGIDEZ LATERAL DE MARCOS

La rigidez lateral de los marcos, que son sis-temas estructurales compuestos por la combinación de trabes, columnas y contravientos, puede obtenerse de una manera exacta por el Método Directo de las Rigideces con las con-sideraciones estudiadas en los incisos 3.3.1.3, a 3.3.1.5. del Tema III.

Si se dispone de una computadora y de un programa de cómputo con la automatización del Método Directo de las Rigideces, el cálculo de la rigidez lateral puede ser efectuado con un alto grado de refinamiento por ejemplo al considerar 12 grados de libertad (G.L.) por elemento y deformaciones por flexión, cortante, axiales, y por torsión. Esta forma de proceder es la más frecuentemente usada en la actualidad debido a la existencia de paquetes de programas de cómputo que son ampliamente usados en los despachos de cálculo.

Si los cálculos son efectuados con calculadoras de bolsillo con capacidad programable, la rigidez lateral puede ser calculada con gran exactitud con los métodos matriciales presentados en los incisos citados del tema III.

La gran mayoría de las estructuras reticulares pueden modelarse como sistemas oscilatorios simplemente acoplados o de resortes mediante el concepto de rigidez de entrepiso, y obtener resultados con precisión aceptable cuando los cálculos se efectúan solamente con calculadora, lápiz y papel. Los sistemas simplemente acoplados o de resortes también son conocidos como **Estructuras de Cortante**^[ref. 8].

Para saber si un sistema estructural en particular puede ser modelado como Estructura de Cortante o sistema simplemente acoplado, John A. Blume^[ref. 2], sugiere el empleo de la siguiente expresión

$$\rho = \Sigma (I/L)_v / \Sigma (I/L)_c \quad \dots (4.1)$$

ρ -índice de rotación nodal

$\Sigma(I/L)$ -Suma de rigidez de los elementos estructurales, donde los subíndices indican

v-Todas las vigas del piso en cuestión

c-Todas las columnas del entrepiso en cuestión

I-momento de inercia

L-longitud

Si $\rho > 0.1$ el sistema es una Estructura de Cortante y puede modelarse como un sistema oscilatorio simplemente acoplado o de resortes empleando el concepto de rigidez de entrepiso; en caso contrario la rigidez de entrepiso pierde significado y la estructura debe ser analizada con métodos matriciales.

La rigidez de entrepiso puede ser obtenida a partir de la matriz de rigidez lateral, no obstante para marcos ordinarios que cumplen ciertas condiciones es común al efectuar análisis no automatizados, emplear métodos más simples como el presentado a continuación.

4.2.1.1.- FORMULAS DE WILBUR

Las siguientes fórmulas para la obtención de la rigidez de entrepiso, son aplicables a marcos regulares no contraventeados formados por elementos estructurales de momento de inercia constante. Están basadas en las siguientes hipótesis^[ref. 2]:

a) Los giros en todos los nodos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales, excepto

en el nivel de desplante, en donde puede suponerse empotramiento o articulación según el caso.

b) Las fuerzas cortantes en los dos entrepisos adyacentes al que interesa son iguales a la de éste.

● Primer entrepiso:

Columnas empotradas en la cimentación

$$R_1 = 48E/\{h_1[4h_1/\Sigma k_{c1} + (h_1 + h_2)/(\Sigma k_{t1} + \Sigma k_{c1}/12)]\} \quad \dots(4.2)$$

Columnas articuladas en la cimentación

$$R_1 = 24E/\{h_1[8h_1/\Sigma k_{c1} + (2h_1 + h_2)/\Sigma k_{t1}]\} \quad \dots(4.3)$$

● Segundo entrepiso:

Columnas empotradas en la cimentación

$$R_2 = 48E/\{h_2[4h_2/\Sigma k_{c2} + (h_1 + h_2)/(\Sigma k_{t1} + \Sigma k_{c1}/12) + (h_2 + h_3)/\Sigma k_{t2}]\} \quad \dots(4.4)$$

Columnas articuladas en la cimentación

$$R_2 = 48E/\{h_2[4h_2/\Sigma k_{c2} + (h_2 + h_3)/\Sigma k_{t2} + (2h_1 + h_2)/\Sigma k_{t1}]\} \quad \dots(4.5)$$

● Entrepisos intermedios:

$$R_n = 48E/\{h_n[4h_n/\Sigma k_{cn} + (h_m + h_n)/\Sigma k_{tm} + (h_n + h_o)/\Sigma k_{tn}]\} \quad \dots(4.6)$$

● Entrepiso superior:

Suponiendo que la fuerza cortante del penúltimo piso es el doble que la del último

$$R_n = 48E/\{h_n[4h_n/\Sigma k_{cn} + (2h_m + h_n)/\Sigma k_{tm} + h_n/\Sigma k_{tn}]\} \quad \dots(4.7)$$

R_n -rigidez del entrepiso en cuestión

k_m -rigidez ($/L$) de las vigas del nivel sobre el entrepiso n

k_n -rigidez ($/L$) de las columnas del entrepiso n

m, n, o -índices que identifican tres niveles consecutivos de abajo hacia arriba

h_n -altura del entrepiso n

k_s -rigidez del último entrepiso

4.2.2.- RIGIDEZ LATERAL DE MUROS

Algunas estructuras de edificios son construidas a base de muros de mampostería reforzada, es decir muros formados por piezas prefabricadas como tabiques de barro recocido, bloques de concreto, tabicón, etc., unidas con mortero y reforzadas por medio de dalas y castillos de concreto reforzado formando muros confinados o formando muros con refuerzo interior.

Para muros en cantiliver empotrados en su base y sujetos a la acción de una carga lateral P en su extremo superior como se muestra en la figura 4.1, puede demostrarse aplicando el principio del trabajo virtual, que su rigidez esta dada por^[ref.9]

$$k_m = [h^3/(3EI) + h/(GA_c)]^{-1} \quad \dots(4.8)$$

con

$$A = bL \quad \dots(4.9)$$

$$A_c = A/k' \quad \dots(4.10)$$

$$G = E/[2(1 + \nu)] \quad \dots(4.11)$$

k_m -rigidez lateral del muro
 h -altura

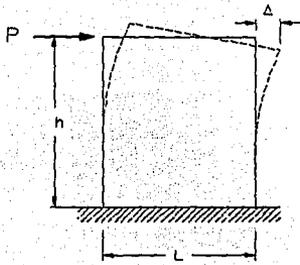


Figura 4.1. Desplazamiento lateral de un muro.

L-longitud

E-módulo de elasticidad

A_c -área de cortante

G-módulo de cortante

I-momento de inercia

A-área de la sección transversal

K-constante en función de la forma geométrica

ν -módulo de Poisson

b-espesor del muro

Los sistemas estructurales a base de muros de carga de mampostería han sido los más frecuentemente usados en la construcción de edificios de unidades habitacionales o departamentales y en ocasiones para algunos hospitales, en los que cumplen también la función de subdividir los espacios interiores en áreas pequeñas. Este tipo de construcciones es usual para edificios de hasta 6 niveles, puesto que para alturas mayores requerirían de una alta densidad de muros con espesores considerables^[ref. 7].

4.2.3.- RIGIDEZ LATERAL DE SISTEMAS MURO-MARCO.

En zonas geográficas de alto riesgo sísmico al diseñar estructuras reticulares de pocos pisos, o en zonas de bajo riesgo sísmico al diseñar estructuras reticulares de altura considerable y muchos pisos, existe el problema de rigidizar los marcos para disminuir los desplazamientos de entrepiso y mejorar el comportamiento sísmico.

El marco es una estructura reticular que resiste cargas laterales esencialmente por flexión de sus elementos, lo que lo hace poco rígido y en las condiciones mencionadas lo imposibilita para cumplir con los estados límite de servicio estipulados en los reglamentos de construcción.

Frecuentemente se rigidizan los marcos colocando en algunas de sus crujeías **muros de rigidez**, que pueden ser de mampostería o de concreto.

Este tipo de estructuración se conoce como **sistemas muro-marco**; si los muros son de mampostería y se ligan a las trabes y columnas que los confinan se denominan **muros diafragma**^[ref. 10] y su función principal es absorber las fuerzas cortantes, si los muros son de concreto reforzado se denominan **muros de cortante** y tienen la función de absorber además de la fuerza cortante las cargas axiales y de flexión.

En sistemas muro-marco en los que la relación altura a longitud del muro es pequeña,

éste absorbe prácticamente la totalidad de las cargas laterales mientras que el marco trabajará principalmente resistiendo la carga vertical. Cuando la relación aumenta, la rigidez del sistema disminuye, esto sucede frecuentemente en estructuras con altura considerable (mayores a 10 pisos en zonas de alto riesgo sísmico y de 20 pisos en zonas poco expuestas a sismos^[ref. 7]).

La manera en que se deforman los marcos de muchos pisos es sustancialmente diferente a la manera en que lo hacen los muros de rigidez de alturas similares. Con referencia a la figura 4.2, la deformación de entrepiso de un marco es proporcional a la fuerza cortante actuante en el entrepiso, y por lo tanto los pisos inferiores tienen mayores deformaciones que los pisos superiores, en un muro de rigidez esbelto las deformaciones de entrepiso son mayores en los pisos superiores que en los inferiores pues las deformaciones por flexión son las más significativas.

En un sistema muro-marco de muchos pisos la alta rigidez del muro restringe los desplazamientos de los marcos en los pisos inferiores lo cual es muy eficiente, sin embargo en los pisos superiores, la presencia del muro que por si solo presenta grandes deflexiones, tiende a aumentar las deformaciones que tendría el marco si soportará el solo toda la carga lateral actuante en dichos niveles. Para evitar este fenómeno existen varias opciones de estructuración para rigidizar adecuadamente las estructuras reticulares de altura considerable, entre las cuales destacan:

- a) Colocar muros de rigidez de momento de inercia variable que disminuya con la altura, tal como se muestra en la figura 4.3^[ref. 6].
- b) Unir dos o más muros de rigidez colineales mediante traveses peraltados en cada nivel como se indica en la figura 4.4, que restrinjan los giros de los muros y los hagan trabajar como una unidad,

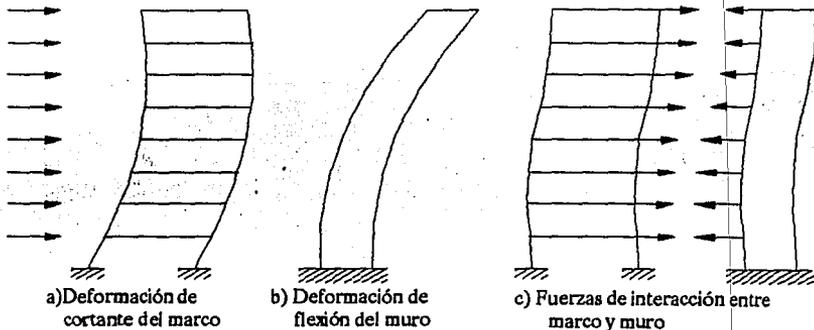


Figura 4.2. Interacción entre marco y muro en un sistema muro-marco sometido a carga lateral^[ref. 7].

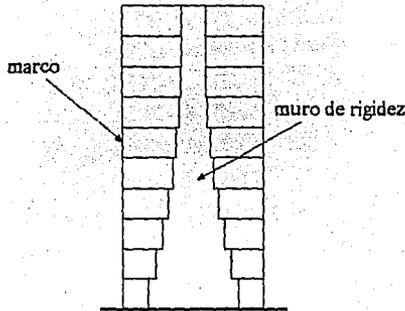


Figura 4.3 Muro de rigidez con propiedades que se reducen con la altura.

a este sistema de estructuración se le conoce como **muros acoplados**^[ref. 2].

c) Acoplar dos o más muros colineales mediante vigas diafragma, es decir vigas de gran peralte cuya relación claro a peralte (L/h) es del orden de tres o menor^[ref. 11], colocadas solo en algunos niveles como se observa en la figura 4.5. Este sistema de estructuración es denominado **macro-marcos**, ya que los muros se deforman como marcos de uno o más niveles según el

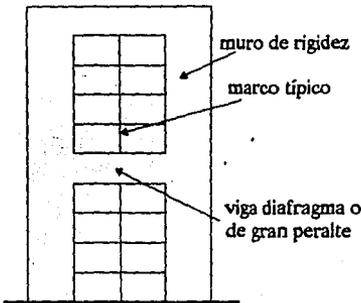


Figura 4.5. Macromarco de dos niveles.

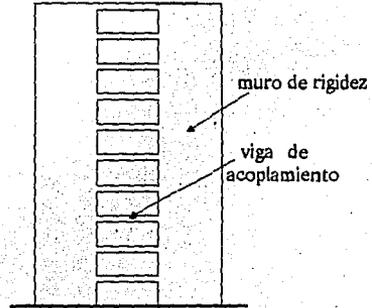


Figura 4.4. Muros acoplados con vigas muy rígidas.

número de vigas de acoplamiento que se coloquen^[ref. 7].

d) Colocar pocas o solo una gran **viga rigidizante** en la parte superior de un solo muro de rigidez conectándolo con las columnas del marco como se ilustra en la figura 4.6. Al tratar de flexionarse el muro de este sistema, introduce cargas axiales en las columnas que tienden a equilibrar el momento flexionante en cada piso incrementando por tanto la rigidez del conjunto.

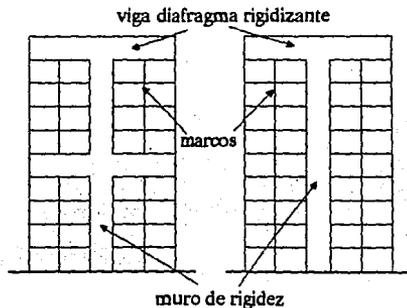


Figura 4.6. Muros con vigas rigidizantes.

Para calcular la rigidez lateral de un sistema muro-marco existen diferentes métodos que van desde los que pueden considerarse exactos, como el método de los elementos finitos que ya ha sido incorporado a algunos programas de cómputo para el análisis de estructuras, hasta los relativamente aproximados como el método de McLeod, Khan y Sbarounis y otros presentados en la referencia [2]. A continuación se presentan dos métodos que se usan frecuentemente para calcular la rigidez lateral de sistemas muro-marco con muy buena precisión.

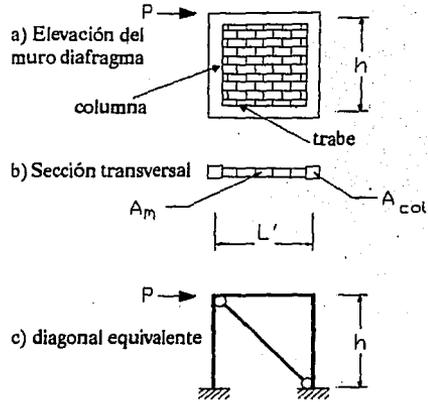


Figura 4.7. Diagonal equivalente en muros diafragma.

4.2.3.1.- METODO DEL ELEMENTO A COMPRESION

Para un muro diafragma que está sujeto a la acción de una carga lateral aplicada en su extremo superior, como se muestra en la figura 4.7, el sistema muro-marco trabaja inicialmente como una sola unidad, sin embargo para cargas laterales relativamente pequeñas el marco se apoya sobre el muro en esquinas opuestas, produciendo fuerzas axiales, momentos y cortantes en vigas y columnas. Los momentos son despreciables por desarrollarse en la proximidad de los nudos^[ref. 2].

Para el cálculo de la rigidez lateral y de los elementos mecánicos en marco y muro, es posible simular el muro como una diagonal equivalente en compresión y tratarla como marco contraventado.

La diagonal o elemento a compresión debe suponerse de igual espesor y módulo de elasticidad que el muro, pero su ancho será:

$$w_o = (0.35 + 0.022 \lambda)h \quad \dots(4.12)$$

para que el método sea aplicable se deben cumplir las siguientes condiciones

$$0.9 \leq \lambda \leq 11.0 \quad \dots(4.13)$$

$$0.75 \leq \zeta \leq 2.5 \quad \dots(4.14)$$

donde

$$\zeta = L'/h \quad \dots(4.15)$$

$$\lambda = E_o A_{col} / (G_m A_m) \quad \dots(4.16)$$

$$A = w_o t \quad \dots(4.17)$$

$$G_m = 0.4 E_m \quad \dots(4.18)$$

h -altura del tablero entre ejes de vigas

ζ -relación de aspecto

L -longitud entre ejes de columnas

E_c -módulo de elasticidad del marco

w_0 -ancho del elemento a compresión equivalente

t -espesor del muro =espesor del elemento a compresión

E_m -módulo elástico del muro =módulo elástico del elemento a compresión

A_{col} -área de la columna

A -área del elemento a compresión equivalente

4.2.3.2.- METODO DE LA COLUMNA ANCHA.

Para cualquier tipo de sistemas de muros o sistemas muro-marco, las deformaciones en el sentido lateral de los muros, se pueden calcular con muy buena precisión con los procedimientos de trabajo virtual^[ref. 9], tomando en cuenta las deformaciones debidas a flexión y a cortante. En las columnas normales, a diferencia de los muros, solo son importantes las deformaciones por flexión.

COLUMNA ANCHA.- Es un muro idealizado de tal forma que puede ser representado por un elemento recto con las

propiedades del muro en el que se tomen en cuenta las deformaciones por flexión y cortante.

Para analizar sistemas de muros y muro-marco como por ejemplo el que se observa en las figuras 4.8a y 4.8b, se considera cada muro como una columna ancha con sus propiedades concentradas en su eje centroidal y se supone que las zonas de las vigas que se encuentran dentro de los muros son infinitamente rígidas a flexión. De esta manera el sistema se puede idealizar como estructura reticular y emplear el método de rigideces para calcular los desplazamientos, modificando previamente la matriz de rigidez de cada elemento y expresarla como se indica en las ecuaciones (4.19) a (4.23).

Debido a la exactitud de los resultados obtenidos, este método puede ser utilizado en programas de cómputo para análisis de estructuras como el de la referencia 12, haciendo uso de la opción de zonas rígidas en las vigas o representándolas por tramos con propiedades estructurales grandes en comparación con los de las

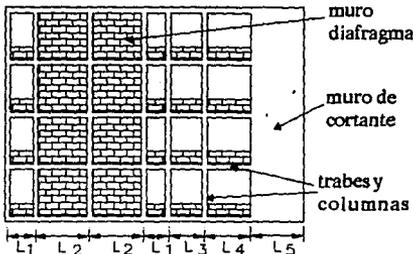


Figura 4.8a. Sistema estructural muro marco.

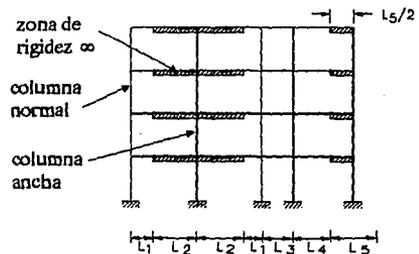


Figura 4.8b. Marco con columnas anchas equivalente al sistema de la figura 4.8a.

vigas y columnas del conjunto. También existen programas muy populares como el mencionado en la referencia 13, que incluyen implícitamente el uso de este método, las deformaciones por cortante y las zonas rígidas.

exacta por el método de elementos finitos y contra experimentos en modelos a escala de muros elásticos^[ref. 2], encontrándose diferencias entre los resultados de estos métodos menores del dos por ciento.

La precisión del método de la columna ancha basó comprobada contra la obtenida de manera

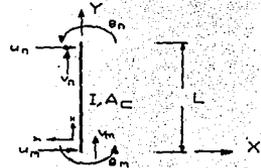
(4.19).... $K_{ca} =$

u_m	v_m	θ_m	u_n	v_n	θ_n	
$12EI/[(1+\alpha)L^3]$	0	$-6EI/[(1+\alpha)L^2]$	$-12EI/[(1+\alpha)L^3]$	0	$-6EI/[(1+\alpha)L^2]$	u_m
0	EA/L	0	0	$-EA/L$	0	v_m
$-6EI/[(1+\alpha)L^2]$	0	$(4+\alpha)EI/[(1+\alpha)L]$	$6EI/[(1+\alpha)L^2]$	0	$(2-\alpha)EI/[(1+\alpha)L]$	θ_m
$-12EI/[(1+\alpha)L^3]$	0	$6EI/[(1+\alpha)L^2]$	$12EI/[(1+\alpha)L^3]$	0	$6EI/[(1+\alpha)L^2]$	u_n
0	$-EA/L$	0	0	EA/L	0	v_n
$-6EI/[(1+\alpha)L^2]$	0	$(2-\alpha)EI/[(1+\alpha)L]$	$6EI/[(1+\alpha)L^2]$	0	$(4+\alpha)EI/[(1+\alpha)L]$	θ_n

$\alpha = 12EI / (L^2GA_c) \dots (4.20)$

K_{ca} -Matriz de rigidez global de la columna ancha

grados de libertad en columnas anchas



(4.21).... $K_{va} =$

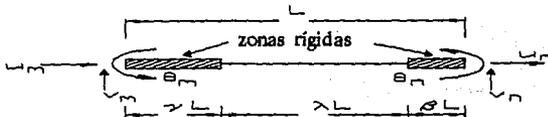
u_m	v_m	θ_m	u_n	v_n	θ_n	
EA/L						
0	$12R/(\lambda^2 L^2)$					
0	$6R(1+2\gamma/\lambda)/(\lambda L)$	$(4+12\gamma(1+\gamma/\lambda)/\lambda)R$				
$-EA/L$	0	0	EA/L			
0	$-12R/(\lambda^2 L^2)$	$-6R(1+2\gamma/\lambda)/(\lambda L)$	0	$12R/(\lambda^2 L^2)$		
0	$6R(1+2\beta/\lambda)/(\lambda L)$	$(2+6(\gamma+\beta)\lambda+12\gamma\beta/\lambda^2)R$	$-6R(1+2\beta/\lambda)/(\lambda L)$	$(4+12\beta(1+\beta/\lambda)/\lambda)R$		

Simétrica

K_{va} -Matriz de rigidez global de las vigas con zonas rígidas

$R = EI/\lambda L \dots (4.22)$

$\gamma + \lambda + \beta = 1 \dots (4.23)$



grados de libertad de las vigas con zonas rígidas

Para formar la matriz de rigidez de muros diafragma modelados como columnas anchas, se debe considerar que el momento de inercia y el módulo de elasticidad provienen exclusivamente de la rigidez a flexión de las columnas del marco, mientras que el área a cortante y el módulo de cortante corresponden a los del muro^[ref. 2]. Las propiedades estructurales del muro diafragma así idealizado pueden calcularse con las siguientes expresiones:

Para marcos con columnas de diferente sección transversal, se tiene para cada una de ellas

$$I = A_{col}(L'/2)^2 + \bar{I}_{col} \quad \dots(4.24)$$

En marcos con columnas de secciones transversales iguales

$$I \approx A_{col}L'^2/2 \quad \dots(4.25)$$

I -momento de inercia de la columna ancha

L' -longitud entre ejes de columnas

A_{col} -área de cada columna del marco

\bar{I}_{col} -momento de inercia centroidal de la columna

Debe adoptarse la siguiente área a cortante reducida del muro

$$A_{cr} = (0.37 - 0.12\xi + 0.023\lambda)(A_m + 2A_{col}) \dots(4.26)$$

A_{cr} -área de cortante reducida

A_m -área de la sección transversal del muro

A_{col} -área de cada columna del marco

Como resultado del análisis estructural con columnas anchas en muros diafragma, se obtienen momentos flexionantes y a partir de estos pueden obtenerse las cargas axiales en las columnas del marco con

$$T = M/(zL') \quad \dots(4.27)$$

$$C = M/(zL') \quad \dots(4.28)$$

$$z = 1.15 - 0.2\xi < 1.0 \quad \dots(4.29)$$

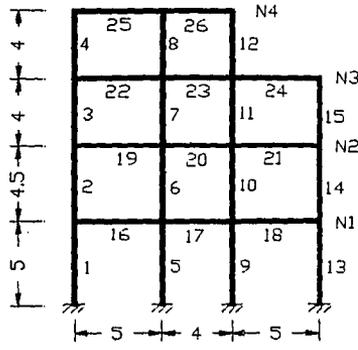
T, C -cargas axiales de tensión y compresión en columnas

La fuerza cortante máxima que debe resistir cada columna y trabe será del 25% de la obtenida en la columna ancha^[ref. 10]. Esta aproximación está limitada a los intervalos de ξ y λ indicados por las ecuaciones (4.13) y (4.14).

4.2.4.- PROBLEMAS RESUELTOS

I.- Obtener la rigidez de entrepiso empleando las fórmulas de Wilbur para el marco mostrado en la figura 4.9. La dimensión mayor de los elementos estructurales es paralela al plano del marco.

Cálculo del momento de inercia y de la rigidez relativa de los elementos estructurales



COLUMNAS	
Elemento	Sección [m]
1,2,13,14	0.45 x 0.70
5,6,9,10	0.5 x 0.5
3 y 15	0.35 x 0.5
7 y 11	0.4 x 0.4
4	0.3 x 0.4
8 y 12	0.3 x 0.3
TRABES	
Nivel	Sección [m]
1	0.3 x 0.6
2,3, y 4	0.25 x 0.5
Concreto $f_c = 250$ [kg/cm ²]	
P.V. = 2400 [kg/m ³]	
Acotación en [m]	

Figura 4.9. Marco estructural plano.

Elemento	I [m ⁴]	I/L [m ³]
1 y 13	0.0128625	0.002573
5 y 9	0.0052083	0.001042
2 y 14	0.0128625	0.002858
6 y 10	0.0052083	0.0011574
3 y 15	0.0036458	9.1145(10 ⁻⁴)
7 y 11	0.0021333	5.33325(10 ⁻⁴)
4	0.0016	4(10 ⁻⁴)
8 y 12	6.75(10 ⁻⁴)	1.6875(10 ⁻⁴)
16 y 18	0.0054	0.00108
17	0.0054	0.00135
19,21,22,24,25	0.0026042	5.2084(10 ⁻⁴)
20,23 y 26	0.0026042	6.5105(10 ⁻⁴)

El RCDF-93, en sus Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto [ref. 15], indica estimar el módulo de elasticidad para concreto de peso normal y $f_c > 250$ [kg/cm²] como

$$E = 14000(f_c)^{0.5} = 221359.4 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 2213594 \text{ [t/m}^2\text{]}$$

● Índices de rotación nodal

De la ecuación (4.1) se tiene para cada entrepiso:

Entrepiso 1

$$\rho = [0.00108(2) + 0.00135] / [0.002573(2) + 0.001042(2)] = 0.485 > 0.1$$

Entrepiso 2

$$\text{vigas superiores: } \rho = [5.2084(10^{-4})(2) + 6.5105(10^{-4})] / [0.002858(2) + 0.0011574(2)] = 0.211 > 0.1$$

$$\text{vigas inferiores: } \rho = [0.00108(2) + 0.00135] / [0.002858(2) + 0.0011574(2)] = 0.437 > 0.1$$

Entrepiso 3

$$\text{vigas superiores: } \rho = [5.2084(10^{-4})(2) + 6.5105(10^{-4})] / [9.1145(10^{-4})(2) + 5.33325(10^{-4})(2)] = 0.586 > 0.1$$

$$\text{vigas inferiores: } \rho = 0.586 > 0.1$$

Entrepiso 4

$$\text{vigas superiores: } \rho = [5.2084(10^{-4}) + 6.5105(10^{-4})] / [4(10^{-4}) + 1.6875(10^{-4})(2)] = 1.59 > 0.1$$

$$\text{vigas inferiores: } \rho = [5.2084(10^{-4})(2) + 6.5105(10^{-4})] / [4(10^{-4}) + 1.6875(10^{-4})(2)] = 2.295 > 0.1$$

Como se cumple que en todos los entrepisos $\rho > 0.1$, el marco puede ser modelado como estructura de cortante y las rigideces de entrepiso pueden obtenerse aproximadamente con las fórmulas de Wilbur.

● Rigideces de Entrepiso

Entrepiso 1 (ecuación 4.2)

$$\Sigma k_{c1} = 0.002573(2) + 0.001042(2) = 0.00723 [m^3]$$

$$\Sigma k_{t1} = 0.00108(2) + 0.00135 = 0.00351 [m^3]$$

$$R_1 = 106252512 / \{5[2766.251729 + 2310.030395]\} = 4186.23 \approx 4186 [t/m]$$

Entrepiso 2 (ecuación 4.4)

$$\Sigma k_{c2} = 0.002858(2) + 0.0011574(2) = 0.0080308 [m^3]$$

$$\Sigma k_{t2} = 5.2084(10^{-4})(2) + 6.5105(10^{-4}) = 0.00169273 [m^3]$$

$$R_2 = 106252512 / \{4.5[2241.370723 + 2310.030395 + 5021.474187]\} = 2486.50 \approx 2487 [t/m]$$

Entrepiso 3 (ecuación 4.6)

$$\Sigma k_{c3} = 9.1145(10^{-4})(2) + 5.33325(10^{-4})(2) = 0.00288955 [m^3]$$

$$\Sigma k_{t3} = 5.2084(10^{-4})(2) + 6.5105(10^{-4}) = 0.00169273 [m^3]$$

$$R_3 = 106252512 / \{4[5537.194373 + 5021.474187 + 4726.093352]\} = 1737.883 \approx 1734 [t/m]$$

Entrepiso 4 (ecuación 4.7)

$$\Sigma k_{e4} = 4(10^{-4}) + 1.6875(10^{-4})(2) = 7.375(10^{-4})$$

$$\Sigma k_{t4} = 5.2084(10^{-4}) + 6.5105(10^{-4}) = 0.00117189$$

$$R_4 = 106252512/[4(21694.91525 + 7089.140028 + 3413.289643)] = 825 [t/m]$$

II.- Empleando el método del elemento a compresión, obtener la matriz de rigidez lateral y las rigideces de entrepiso del muro diafragma mostrado en la figura 4.10. La dimensión mayor de los elementos estructurales es paralela al plano del marco.

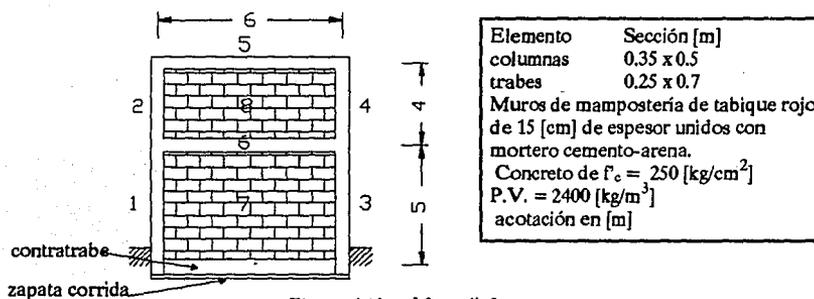


Figura 4.10. Muro diafragma.

El RCDF-93, en sus Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de mampostería^[ref. 10], para muros de tabique rojo confinados especifica las siguientes propiedades

$$f^*_m = 15 \text{ [kg/cm}^2\text{]} + 4 = 19 \text{ [kg/cm}^2\text{]} \quad \dots(a)$$

f^*_m = resistencia a la compresión de la mampostería

$$E_m = 800f^*_m = 11400 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 114000 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(b) \text{cargas de corta duración}$$

$$\text{de la ecuación (4.18) } G_m = 0.4E_m = 0.4(114000) = 45600 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(c)$$

Elemento a compresión equivalente al muro # 7

$$\text{De la ecuación (4.15) } \zeta = 6/5 = 1.2 \quad \dots(d)$$

el área de las columnas es

$$A_{col} = 0.35(0.5) = 0.175 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(e)$$

El RCDF-93 en sus normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto [ref. 15], indica estimar el módulo de elasticidad para concreto tipo 1 como

$$E_c = 14000 [f'_{c1}]^{0.5} = 221359.4 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 2213594 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(f)$$

el área transversal del muro es

$$A_m = 0.15(6 - 0.5) = 0.825 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(g)$$

de la ecuación (4.16), (e), (g) y (d)

$$\lambda = 2213594(0.175) / [45600(0.825)] = 10.3 \quad \dots(h)$$

de (c) y (h) se cumple que $0.9 < 10.3 < 11$ y $0.75 < 1.2 < 2.5$

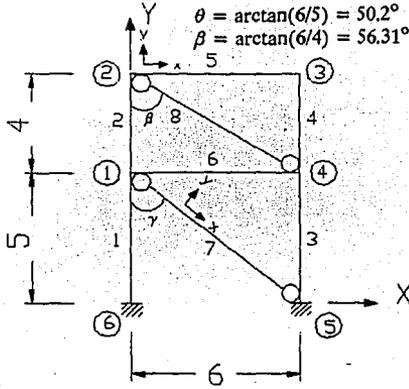


Figura 4.11. Marco con elementos a compresión equivalentes a los muros diafragma de la figura 4.10.

de la ecuación (4.12) $w_o = (0.35 + 0.022(10.3))5 = 2.883 \text{ [m]} \quad \dots(i)$

de la ecuación (4.17) $A = 2.883(0.15) = 0.432 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(j)$

Elemento a compresión equivalente al muro # 8

de la ecuación (4.15) $\zeta = 6/4 = 1.5 \quad \dots(k)$ se cumple que $0.75 < 1.5 < 2.5$

de la ecuación (4.12) $w_o = (0.35 + 0.022(10.3))4 = 2.306 \text{ [m]} \quad \dots(l)$

de la ecuación (4.17) $A = 2.306(0.15) = 0.346 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(m)$

por tanto para obtener la matriz de rigidez se analizará, despreciando las deformaciones axiales, el marco equivalente mostrado en la figura 4.11. El procedimiento de análisis es el mismo estudiado en el inciso 3.3 del tema III.

Tabla 4.1 de propiedades de elementos estructurales

BARRA	α	β	γ	δ^2	ϵ^2	$\zeta\epsilon$	L	A	I	AE/L	EI/L	EI/L ²	EI/L ³
# m-n							[m]	[m ²]	[m ⁴]	[t/m]	[t-m]	[t]	[t/m]
1 1-6	270	0	-1	0	1	0	5	0.175	0.00365	77475.79	1615.92	323.18	64.64
2 2-1	270	0	-1	0	1	0	4	0.175	0.00365	96844.74	2019.91	504.98	126.24
3 4-5	270	0	-1	0	1	0	5	0.175	0.00365	77475.79	1615.92	323.18	64.64
4 3-4	270	0	-1	0	1	0	4	0.175	0.00365	96844.74	2019.91	504.98	126.24
5 2-3	0	1	0	1	0	0	6	0.175	0.00715	64563.16	2637.87	439.64	73.27
6 1-4	0	1	0	1	0	0	6	0.175	0.00715	64563.16	2637.87	439.64	73.27
7 1-5	320.2	0.7683	-0.64	0.59	0.410	-0.492	7.81	0.432		6305.76			
8 2-4	326.31	0.8321	-0.555	0.692	0.308	-0.462	7.21	0.346		5470.74			

de las ecuaciones (3.89), (3.90) y (3.91) y la tabla 4.1, se obtienen las siguientes matrices globales de los elementos estructurales

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \begin{matrix} \text{UN1} & \theta_1 \\ \begin{bmatrix} 775.68 & 1939.08 \\ 1939.08 & 6463.68 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{UN1} \\ \theta_1 \end{matrix} \end{matrix} & \quad & k_3 = \begin{matrix} \text{UN1} & \theta_4 \\ \begin{bmatrix} 775.68 & 1939.08 \\ 1939.08 & 6463.68 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{UN1} \\ \theta_4 \end{matrix} \end{matrix} \\
 k_5 &= \begin{matrix} \theta_2 & \theta_3 \\ \begin{bmatrix} 10551.48 & 5275.74 \\ 5275.74 & 10551.48 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix} \end{matrix} & \quad & k_1 = \begin{matrix} \theta_1 & \theta_4 \\ \begin{bmatrix} 10551.48 & 5275.74 \\ 5275.74 & 10551.48 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_4 \end{matrix} \end{matrix} \\
 k_8 &= \begin{matrix} \text{UN2} & \text{UN1} \\ \begin{bmatrix} 3785.75 & -3785.75 \\ -3785.75 & 3785.75 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{UN2} \\ \text{UN1} \end{matrix} \end{matrix} & \quad & k_2 = \begin{matrix} \text{UN2} & \theta_2 & \text{UN1} & \theta_1 \\ \begin{bmatrix} 1514.88 & 3029.88 & -1514.88 & 3029.88 \\ 3029.88 & 8079.64 & -3029.88 & 4039.82 \\ -1514.88 & -3029.88 & 1514.88 & -3029.88 \\ 3029.88 & 4039.82 & -3029.88 & 8079.64 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{UN2} \\ \theta_2 \\ \text{UN1} \\ \theta_1 \end{matrix} \end{matrix} \\
 k_2 &= \begin{matrix} \text{UN2} & \theta_2 & \text{UN1} & \theta_1 \\ \begin{bmatrix} 1514.88 & 3029.88 & -1514.88 & 3029.88 \\ 3029.88 & 8079.64 & -3029.88 & 4039.82 \\ -1514.88 & -3029.88 & 1514.88 & -3029.88 \\ 3029.88 & 4039.82 & -3029.88 & 8079.64 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{UN2} \\ \theta_2 \\ \text{UN1} \\ \theta_1 \end{matrix} \end{matrix} & \quad & k_7 = \begin{matrix} \text{UN1} \\ \begin{bmatrix} 3720 \end{bmatrix} & \text{UN1} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

A partir de las matrices anteriores se ensambla la matriz de rigidez de la estructura K_e

	UN1	UN2	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	
UN1	12087.27	-6813.75	-1090.8	-3029.88	-3029.88	-1090.8	= K_e
UN2	-6813.75	6815.51	3029.88	3029.88	3029.88	3029.88	
θ_1	-1090.8	3029.88	25094.8	4039.82	0	5275.74	
θ_2	-3029.88	3029.88	4039.82	18631.12	5275.74	0	
θ_3	-3029.88	3029.88	0	5275.74	18631.12	4039.82	
θ_4	-1090.8	3029.88	5275.74	0	4039.82	25094.8	

Con referencia a la condensación estática expresada por la ecuación (3.97) y empleando los programas de calculadora de bolsillo codificados en el inciso 3.3 del tema III, se obtiene:

$$[K_{zz}]^{-1} = \begin{bmatrix} 4.372784326E-5 & -1.097860387E-5 & 5.286665057E-6 & -1.004406917E-5 \\ -1.097860387E-5 & 6.129352248E-5 & -1.850269138E-5 & 5.286665057E-6 \\ 5.286665057E-6 & -1.850269138E-5 & 6.129352248E-5 & -1.097860387E-5 \\ -1.004406917E-5 & 5.286665057E-6 & -1.097860387E-5 & 4.372784326E-5 \end{bmatrix}$$

$$[k_{zz}]^{-1}k_{z1} = \begin{bmatrix} -0.01949636921 & 0.08481190187 \\ -0.1234423165 & 0.1124051918 \\ -0.1234423165 & 0.1124051918 \\ -0.01949636921 & 0.08481190187 \end{bmatrix}$$

$$-k_{12}[k_{zz}]^{-1}k_{z1} = \begin{bmatrix} -790.5640909 & 866.1741302 \\ 866.1741301 & -1195.088256 \end{bmatrix}$$

de donde la matriz de rigidez lateral k^* es

$$k^* = \begin{bmatrix} & U_{N1} & & & & \\ & & U_{N2} & & & \\ \begin{bmatrix} 11296.70591 & -5947.57587 \\ -5947.57587 & 5620.421744 \end{bmatrix} & & & U_{N1} & & \\ & & & & U_{N2} & \\ & & & & & \dots(n) \end{bmatrix}$$

de la ecuación (3.96) $U = [K^*]^{-1}F$

invirtiendo la matriz de rigidez lateral se obtiene de (n)

$$\begin{bmatrix} U_{N1} \\ U_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.998827531E-4 & 2.115175504E-4 \\ 2.115175504E-4 & 4.017521783E-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{N1} \\ F_{N2} \end{bmatrix}$$

Rigidez del entrepiso 1

al aplicar una fuerza unitaria de 1 [ton] en el nivel 1, se calcula

$$U_{N1} = \Delta_{e1} = 1.99883(10^{-4}) [m] \quad \dots(o)$$

de la ecuación (3.98)

$$k_{e1} = 1/1.99883(10^{-4}) = 5002.93 \approx 5003 [t/m] = 50 [t/cm] \quad \dots(p)$$

Rigidez del entrepiso 2

aplicando una fuerza unitaria de 1 [ton] al nivel 2 se calcula con las ecuaciones (3.98), (3.99) y (n)

$$\Delta_{e2} = 4.017521783(10^{-4}) - 2.115175504(10^{-4}) = 1.903346(10^{-4}) \quad \dots(q)$$

$$k_{e2} = 1/\Delta_{e2} = 5256.67 \approx 5257 [t/m] = 52.57 [t/cm] \quad \dots(r)$$

III.- Usando el método de la columna ancha, obtener la matriz de rigidez lateral y la rigidez de entrepiso del sistema muro-marco mostrado en la figura 4.12a. La dimensión mayor de los elementos estructurales es paralela al plano del marco.

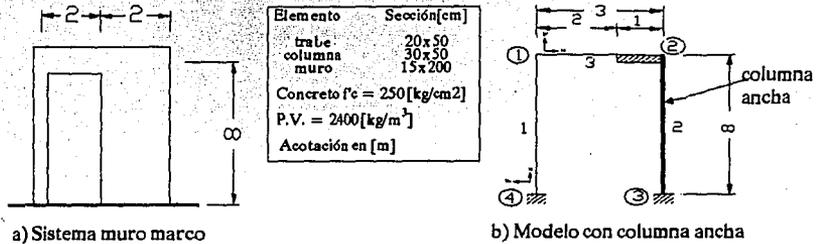


Figura 4.12. Sistema muro-marco modelado con columna ancha.

De las Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto^[ref. 15], el RCDF-93 indica estimar para concreto tipo 1 las siguientes propiedades

$$E = 14000(f'_c)^{0.5} = 221359.4 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 2213594 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(a)$$

$$G = 0.4E = 885438 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(b)$$

El muro de concreto y sus propiedades estructurales se pueden representar mediante la columna # 2 mostrada en la figura 4.12b localizada en el centroide del muro, la trabe tiene una zona de rigidez infinita dentro de la zona del muro de concreto. Las propiedades del sistema muro-marco así idealizado son

Columna ancha:

$$A = 2(0.15) = 0.3 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(c)$$

de la ecuación (4.10) con $k' = 1.5$ ^[ref. 19]

$$A_0 = A/k' = A/1.5 = 0.2 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(d)$$

$$I = 0.15(2)^3/12 = 0.1 \text{ [m}^4\text{]} \quad \dots(e)$$

$$L = 8 \text{ [m]} \quad \dots(f)$$

$$\text{de la ecuación (4.20)} \quad \alpha = 12EI/(GA_0L^2) = 0.234375 \quad \dots(g)$$

columna normal:

$$A = 0.3^2 = 0.09 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots(h)$$

$$I = 0.3^4/12 = 6.75(10^{-4}) \text{ [m}^4\text{]} \quad \dots(i)$$

$$L = 8 \text{ [m]} \quad \dots (j)$$

trabe con zona rígida:

$$A = 0.2(0.5) = 0.1 \text{ [m}^2\text{]} \quad \dots (k)$$

$$I = 0.5^3(0.2)/12 = 0.002083 \text{ [m}^4\text{]} \quad \dots (l)$$

$$L = 3 \text{ [m]} \quad \dots (m)$$

de la figura mostrada en la ecuación (4.21)

$$\gamma = 0 \quad \beta = 0.3333 \quad \lambda = 1 - \beta = 0.6667$$

de las ecuaciones (3.82), (4.19), (4.21) y (4.22) se calculan las siguientes matrices globales de los elementos estructurales (el procedimiento fue estudiado en el inciso 3.3 del Tema III)

	u_1	v_1	θ_1		u_2	v_2	θ_2	
u_1	35.02	0	140.08	$= k_1$	u_2	4203.03	0	16812.11
v_1	0	24902.93	0		v_2	0	83009.775	0
θ_1	140.08	0	747.09		θ_2	16812.11	0	94918.35

	u_1	v_1	θ_1	u_2	v_2	θ_2	
u_1	73786.47	0	0	-73786.47	0	0	$= k_3$
v_1	0	6915.34	6915.68	0	-6915.34	13830.33	
θ_1	0	6915.68	9221.37	0	-6915.68	11525.68	
u_2	-73786.47	0	0	73786.47	0	0	
v_2	0	-6915.34	-6915.68	0	6915.34	-13830.33	
θ_2	0	13830.33	11525.68	0	-13830.33	29965.31	

a partir de las matrices anteriores se ensambla la matriz de rigidez de la estructura K_e

	u_1	u_2	v_1	v_2	θ_1	θ_2	
u_1	73821.47	-73786.47	0	0	140.08	0	$= k_e$
u_2	-73786.47	77989.5	0	0	0	16812.11	
v_1	0	0	31818.27	-6915.34	6915.68	13830.33	
v_2	0	0	-6915.34	89925.12	-6915.68	-13830.33	
θ_1	140.08	0	6915.68	-6915.68	9968.46	11525.68	
θ_2	0	16812.11	13830.33	-13830.33	11525.68	124883.66	

efectuando la condensación estática indicada en la ecuación (3.97) se tiene

$$[K_{22}]^{-1} = \begin{bmatrix} 3.748600732E-5 & 8.009728941E-7 & -2.323217408E-5 & -1.918581887E-6 \\ 8.009728941E-7 & 1.180648145E-5 & 6.969651104E-6 & 5.755744737E-7 \\ -2.323217408E-5 & 6.969651103E-6 & 1.314261854E-4 & -8.784775752E-6 \\ -1.918581887E-6 & 5.755744736E-7 & -8.784775752E-6 & 9.094428524E-6 \end{bmatrix}$$

$$[k_{22}]^{-1}k_{21} = \begin{bmatrix} -0.003254362945 & -0.03225540973 \\ 9.763087266E-4 & 0.009676621365 \\ 0.01841018005 & -0.1476906163 \\ -0.001230571387 & 0.1528965327 \end{bmatrix}$$

$$-k_{12}[k_{22}]^{-1}k_{21} = \begin{bmatrix} -2.578898021 & 20.68850153 \\ 20.68850152 & -2570.513326 \end{bmatrix}$$

de donde la matriz de rigidez lateral K^* es

$$k^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 73818.8911 & -73765.7815 \\ -73765.7815 & 75418.98667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

de la ecuación (3.96)

$$U = [k^*]^{-1}F \quad \dots (n)$$

invirtiendo la matriz de rigidez se obtiene de (n)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.987751266E-4 & 5.856498093E-4 \\ 5.856498093E-4 & 5.860714631E-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

aplicando una fuerza unitaria de 1 [ton] al nodo 1 se obtiene el máximo desplazamiento lateral

$$\Delta_{e1} = 5.987751266(10^{-4}) \quad \dots (o)$$

y de la ecuación (3.98)

$$k_{e1} = 1/5.987751266(10^{-4}) = 1670.1 [t/m] = 16.7 [t/cm] \quad \dots (p)$$

IV.- Empleando el método de la columna ancha, obtener la matriz de rigidez lateral y las rigideces de entrespo del sistema muro-marco de concreto reforzado mostrado en la figura 4.13a. La dimensión mayor de los elementos estructurales es paralela al plano del marco, siendo las columnas de sección transversal de 40 x 40 [cm] y las trabes de 25 x 70 [cm].

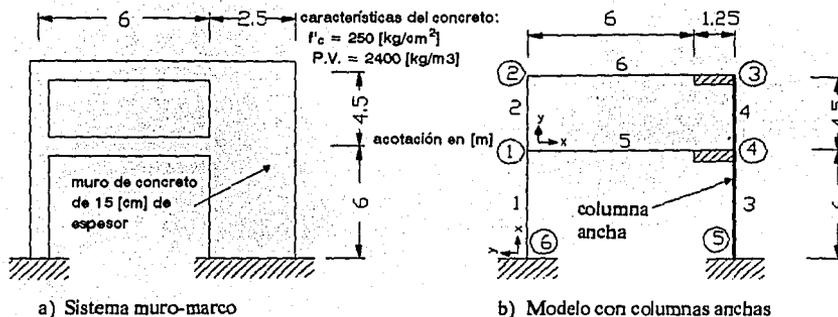


Figura 4.13. Sistema muro-marco modelado con columnas anchas.

El RCDF-93 en sus Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto^[ref. 15], especifica las siguientes propiedades para concreto clase 1

$$E = 14000[f'c]^{0.5} = 221359.4 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 2213594 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(a)$$

$$G = 0.4E = 885438 \text{ [t/m]} \quad \dots(b)$$

Las propiedades estructurales del muro de concreto se pueden representar mediante columnas anchas y traveses con zonas de rigidez infinita, modelando el sistema muro-marco original mediante la estructura reticular mostrada en la figura 4.13b.

para la columna ancha # 3, de la ecuación 4.20:

$$\alpha_3 = (12)(2213594)(0.1953) / [(885438)(0.25)(20.25)] = 0.651 \quad \dots(c)$$

similarmente para la columna ancha # 4:

$$\alpha_4 = (12)(2213594)(0.1953) / [(885438)(0.25)(20.25)] = 1.1573 \quad \dots(d)$$

para las traveses con zona rígida y en base a la figura mostrada en la ecuación (4.21) se tiene

$$L = 7.25 \text{ [m]} \quad \dots(e)$$

$$\gamma = 0 \quad \dots(f)$$

$$\beta = 0.1724 \quad \dots(g)$$

$$\lambda = 0.8276 \quad \dots(h)$$

Las propiedades de los elementos así idealizados se tabulan en la tabla 4.2

Tabla 4.2 de propiedades de elementos estructurales

BARRA		α	β	γ	δ^2	ϵ^2	$\zeta\epsilon$	L	A	I	AE/L	EI/L	EI/L ²	EI/L ³
#	m-n							[m]	[m ²]	[m ⁴]	[t/m]	[t-m]	[t]	[t/m]
1	6-1	90	0	1	0	1	0	6	0.16	0.00213	59029	785.83	130.97	21.83
2	1-2	90	0	1	0	1	0	4.5	0.16	0.00213	78706	1047.77	232.84	51.74
3	5-4	90	0	1	0	1	0	6	0.375	0.1953	138349.6	72052.5	12008.75	2001.46
4	4-3	90	0	1	0	1	0	4.5	0.375	0.1953	184466.2	96070	21348.88	4744.2
5	1-4	0	1	0	1	0	0	7.25	0.175	0.00715	53431.6	2183		
6	2-3	0	1	0	1	0	0	7.25	0.175	0.00715	53431.6	2183		

de las ecuaciones (3.82), (4.19), (4.21) y (4.22) se calculan las siguientes matrices globales de los elementos estructurales (el procedimiento fue estudiado en el inciso 3.3 del Tema III)

Columnas 1 y 2

$$\begin{matrix}
 & u_1 & v_1 & \theta_1 \\
 u_1 & \boxed{261.96} & 0 & 785.82 \\
 v_1 & 0 & \boxed{59029} & 0 \\
 \theta_1 & 785.82 & 0 & \boxed{3143.32}
 \end{matrix} = k_1$$

$$\begin{matrix}
 & u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\
 u_1 & \boxed{620.88} & 0 & -1397.04 & -620.88 & 0 & -1397.04 \\
 v_1 & 0 & \boxed{78706} & 0 & 0 & -78706 & 0 \\
 \theta_1 & -1397.04 & 0 & \boxed{4191.08} & 1397.04 & 0 & 2095.54 \\
 u_2 & -620.88 & 0 & 1397.04 & \boxed{620.88} & 0 & 1397.04 \\
 v_2 & 0 & -78706 & 0 & 0 & \boxed{78706} & 0 \\
 \theta_2 & -1397.04 & 0 & 2095.54 & 1397.04 & 0 & \boxed{4191.08}
 \end{matrix} = k_2$$

Columnas anchas 3 y 4

$$\begin{matrix}
 & u_4 & v_4 & \theta_4 \\
 u_4 & \boxed{14547.26} & 0 & 43641.73 \\
 v_4 & 0 & \boxed{138349.6} & 0 \\
 \theta_4 & 43641.73 & 0 & \boxed{202977.7}
 \end{matrix} = k_3$$

	u4	v4	θ_4	u3	v3	θ_3	
u4	26389.66	0	-59376.67	-26389.66	0	-59376.67	= k4
v4	0	184466.2	0	0	-184466.2	0	
θ_4	-59376.67	0	229667.55	59376.67	0	37527.55	
u3	-26389.66	0	59376.67	26389.66	0	59376.67	
v3	0	-184466.2	0	0	184466.2	0	
θ_3	-59376.67	0	37527.55	59376.67	0	229667.55	

Vigas con zonas rígidas

	u1	v1	θ_1	u4	v4	θ_4	
u1	53431.6	0	0	-53431.6	0	0	= k5
v1	0	879.22	2637.7	0	-879.22	3736.64	
θ_1	0	2637.7	10551	0	-2637.7	8572.36	
u4	-53431.6	0	0	53431.6	0	0	
v4	0	-879.22	-2637.7	0	879.22	-3736.64	
θ_4	0	3736.64	8572.36	0	-3736.64	18518.28	

	u2	v2	θ_2	u3	v3	θ_3	
u2	53431.6	0	0	-53431.6	0	0	= k6
v2	0	879.22	2637.7	0	-879.22	3736.64	
θ_2	0	2637.7	10551	0	-2637.7	8572.36	
u3	-53431.6	0	0	53431.6	0	0	
v3	0	-879.22	-2637.7	0	879.22	-3736.64	
θ_3	0	3736.64	8572.36	0	-3736.64	18518.28	

a partir de las matrices anteriores se ensambla la siguiente matriz de rigidez de la estructura K_e

	u1	u2	u3	u4	v1	v2	v3	v4	θ_1	θ_2
u1	54314.44	-620.88	0	-53431.6	0	0	0	0	-611.22	-1397.04
u2	-620.88	54052.48	-53431.6	0	0	0	0	0	1397.04	1397.04
u3	0	-53431.6	79821.26	-26389.66	0	0	0	0	0	0
u4	-53431.6	0	-26389.66	94368.52	0	0	0	0	0	0
v1	0	0	0	0	138614.22	-78706	0	-879.22	2637.7	0
v2	0	0	0	0	-78706	79585.22	-879.22	0	0	2637.7
v3	0	0	0	0	0	-879.22	185345.42	-184466.2	0	-2637.7
v4	0	0	0	0	-879.22	0	-184466.2	323695	-2637.7	0
θ_1	-611.22	1397.04	0	0	2637.7	0	0	-2637.7	17885.4	2095.54
θ_2	-1397.04	1397.04	0	0	0	2637.7	-2637.7	0	2095.54	14742.08
θ_3	0	0	59376.67	-59376.67	0	3736.64	-3736.64	0	0	8572.36
θ_4	0	0	59376.67	-15734.94	3736.64	0	0	-3736.64	8572.36	0

efectuando la condensación estática indicada en la ecuación (3.97) se tiene

	θ_3	θ_4
u1	0	0
u2	0	0
u3	59376.67	59376.67
u4	-59376.67	-15734.94
v1	0	3736.64
v2	3736.64	0
v3	-3736.64	0
v4	0	-3736.64
θ_1	0	8572.36
θ_2	8572.36	0
θ_3	248185.83	37527.55
θ_4	37527.55	451163.53

= K_e

$[K_{22}]^{-1} =$

1.667226233E-5	1.658133375E-5
1.658133375E-5	2.913574808E-5
1.533831378E-7	2.17851365E-7
1.145867382E-7	1.533828288E-7
-2.101708097E-6	-1.826319565E-6
-2.555571867E-6	-4.764009808E-6
-1.462079331E-7	-2.587615036E-7
-8.503934033E-8	-7.983531934E-8

1.533831378E-7	1.145867382E-7	-2.101708097E-6	-2.555571867E-6	-1.462079331E-7	-8.503934033E-8
2.17851365E-7	1.533828288E-7	-1.826319565E-6	-4.764009808E-6	-2.587615036E-7	-7.983531934E-8
1.255616419E-5	7.162623456E-6	7.792267104E-7	2.032646382E-6	1.104050024E-7	3.406296296E-8
7.162623456E-6	7.179176543E-6	8.967264464E-7	1.090374483E-6	6.238188858E-8	3.628335713E-8
7.792267104E-7	8.967264464E-7	5.782938433E-5	-8.036265611E-6	4.852959877E-7	-1.114323669E-6
2.032646382E-6	1.090374483E-6	-8.036265611E-6	7.160392734E-5	-2.429082426E-6	3.849399419E-7
1.104050024E-7	6.238188858E-8	4.852959877E-7	-2.429082426E-6	4.172307368E-6	-3.545436845E-7
3.406296296E-8	3.628335713E-8	-1.114323669E-6	3.849399419E-7	-3.545436845E-7	2.268159571E-6

$[k_{22}]^{-1} k_{21} =$

0.004854842144	-0.006506406401	-0.01373069304	0.01001942911
0.007771795306	-0.009206953746	-0.02010475182	0.01662060036
-0.003315967251	0.003928299185	0.008578026703	-0.00709146007
-0.002071393906	0.002776059482	0.005858413735	-0.00427494526
-0.02411949178	0.06956297857	-0.03734956905	-0.01128144364
-0.09512162438	0.08880656614	-0.1213743737	0.1381738187
0.003096902699	-0.002715547406	0.2266860944	-0.2421589941
1.433204165E-4	-0.001018978242	0.113624139	-0.01463773141

$-k_{12}[k_{22}]^{-1} k_{21} =$

-147.6310299	166.5846089	-192.3936587	186.1389077
166.5846089	-221.2485887	221.743697	-177.2737237
-192.3936587	221.743697	-20206.48843	15247.73443
186.1389077	-177.2737237	15247.73443	-14608.91851

de donde la matriz de rigidez lateral K^* es

$$k^* = \begin{bmatrix} 54166.80897 & -454.2953911 & -192.3936587 & -53245.46109 \\ -454.2953911 & 53831.23141 & -53209.8563 & -177.2737237 \\ -192.3936587 & -53209.8563 & 59614.77157 & -11141.92557 \\ -53245.46109 & -177.2737237 & -11141.92557 & 79759.60149 \end{bmatrix}$$

de la ecuación (3.96)

$$U = [k^*]^{-1} F \quad \dots (i)$$

sustituyendo la inversa de la matriz de rigidez en (i)

	u1	u2	u3	u4	
U ₁	1.611861998E-4	2.430773536E-4	2.440659094E-4	1.422385361E-4	F ₁
U ₂	2.430773536E-4	5.658108785E-4	5.50748323E-4	2.404659206E-4	F ₂
U ₃	2.440659094E-4	5.50748323E-4	5.542912043E-4	2.415872957E-4	F ₃
U ₄	1.422385361E-4	2.404659206E-4	2.415872957E-4	1.417751867E-4	F ₄

aplicando una fuerza unitaria de 1 [ton] al nodo 1 se obtiene el máximo desplazamiento lateral

$$\Delta_{e1} = 1.611861998(10^{-4}) \quad \dots (j)$$

y de la ecuación (3.98)

$$k_{e1} = 1/\Delta_{e1} = 6204 \text{ [t/m]} = 62.04 \text{ [t/cm]} \quad \dots (k)$$

aplicando una fuerza unitaria de 1 [ton] al nodo 2 se obtiene el desplazamiento máximo según la ecuación (3.99)

$$\Delta_{e2} = \text{nodo 2} - \text{nodo 1} = 5.658108785(10^{-4}) - 2.430773536(10^{-4}) = 3.227335249(10^{-4}) \quad \dots (l)$$

y de la ecuación (3.98)

$$k_{e2} = 1/\Delta_{e2} = 3088.5 \approx 3089 \text{ [t/m]} = 31 \text{ [t/cm]} \quad \dots (m)$$

4.2.5.- PROBLEMAS PROPUESTOS.

I.- Empleando las fórmulas de Wilbur obtener la rigidez de entrepiso del marco plano mostrado en la figura 4.14. La dimensión menor de las columnas y la dimensión mayor de las trabes es paralela al plano del marco.

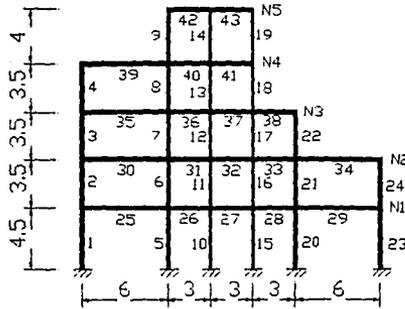


Figura 4.14. Marco estructural plano.

COLUMNAS	
Elemento	Sección [cm]
1,2,20,21,23,24	30 x 50
5,6,10,11,15,16	50 x 80
3,4,22	30 x 40
7,8,12,13,17,18	40 x 70
9,14,19	30 x 60
TRABES	
Nivel	Sección [cm]
1 y 2	30 x 70
3,4,5	30 x 55
Concreto $f'_c = 200$ [kg/cm ²]	
P.V. = 2440 [kg/m ³]	
acotación en [m]	

Solución: $K_{e1} = 34.26$ [t/cm], $K_{e2} = 51.59$ [t/cm], $K_{e3} = 26.65$ [t/cm], $K_{e4} = 20.25$ [t/cm], $K_{e5} = 6.65$ [t/cm].

II.- Empleando el método del elemento a compresión obtener las rigideces de entrepiso del sistema muro-marco mostrada en la figura 4.15. La dimensión mayor de las trabes y la dimensión menor de las columnas son paralelas al plano del marco.

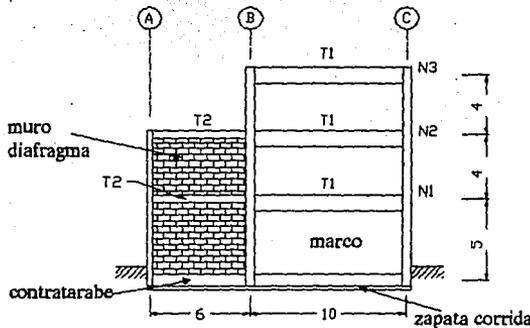


Figura 4.15. Sistema muro-marco con muros diafragma

Elemento	Sección [cm]
trabe T1	30 x 100
trabe T2	25 x 50
columna eje A	35 x 50
columna ejes B y C	50 x 80
muros de mampostería de tabicón de concreto de 15 [cm] de espesor unidos con mortero cemento-arena y con $f'_m = 24$ [kg/cm ²], $E_m = 800f'_m$ (muros confinados)	
concreto de $f'_c = 250$ [kg/cm ²]	
acotaciones en [m]	

Solución: Usando 3 G.L. por nodo se tiene $K_{e1} = 76.8$ [t/cm], $K_{e2} = 79$ [t/cm], $K_{e3} = 35.5$ [t/cm].

III.- Usando el método de la columna ancha obtener la rigidez de entrepiso del muro diafragma del problema II del inciso 4.2.4, figura 4.10.

Solución: $K_{e1} = 48.18$ [t/cm], $K_{e2} = 50.87$ [t/cm]

IV.- Mediante el método de la columna ancha obtener las rigideces de entrepiso del sistema muro-marco mostrado en la figura 4.16. La dimensión mayor de los elementos estructurales es paralela al plano del marco.

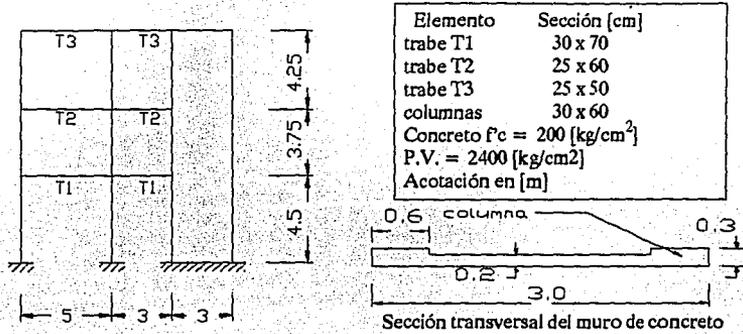


Figura 4.16. Sistema estructural muro-marco.

Solución: $k_{e1} = 123.9 \text{ [t/cm]}$, $k_{e2} = 69.27 \text{ [t/cm]}$, $k_{e3} = 34.22 \text{ [t/cm]}$.

4.3.- METODOS DE ANALISIS SISMICO.

En el análisis estructural se calculan los valores de las respuestas estructurales, es decir, se cuantifican los efectos que las acciones o fuerzas externas producen en las estructuras.

Dichas respuestas están constituidas por los elementos mecánicos, flechas y deformaciones que sufren los elementos estructurales.

El análisis sísmico constituye una parte integral del análisis estructural, pues cuantifica las respuestas de la estructura producidas por el movimiento del suelo de cimentación causado por los sismos.

En la actualidad el análisis estructural y por ende el análisis sísmico de las estructuras ha experimentado un sorprendente refinamiento, debido principalmente al desarrollo tecnológico de las computadoras tanto en la ingeniería de circuitos eléctricos (hardware) como en la ingeniería de programación (software), así como a la implementación de los métodos numéricos iterativos, y métodos matriciales existentes para el análisis dinámico estructural, que tienen la particularidad de adaptarse perfectamente a la manera natural de efectuar los cálculos por una computadora.

Haciendo uso de estas herramientas puede analizarse cualquier tipo de estructura, por más

compleja que sea, efectuando en poco tiempo el enorme número de operaciones numéricas implicadas.

El método más poderoso y versátil para formular y resolver las ecuaciones de equilibrio de las estructuras, es el método de las rigideces o de los desplazamientos, que es usado para analizar los elementos rectos de estructuras reticulares (marcos), y el método de los elementos finitos en su formulación de los desplazamientos, para el caso de análisis de elementos sólidos bidimensionales (muros, losas, cascarones, etc.).

La elección de un modelo analítico que represente fielmente el sistema estructural en estudio es el paso más importante del análisis estructural y del análisis sísmico, ya que por muy preciso que sea el método de análisis sísmico usado, los resultados obtenidos serán representativos de la respuesta real, solo en la medida en que el modelo analizado represente fielmente las propiedades de la estructura.

El modelo de análisis que se elija debe estar integrado por los siguientes conceptos^[ref. 2]:

a) *Geometría o Topología*.- Se representa la topología o arreglo geométrico representativo de la forma de la estructura compuesto por elementos estructurales tales como trabes, columnas, muros, cascarones, etc., y definiendo sus propiedades geométricas equivalentes como son momento de inercia, área axial, área a cortante,

etc., en base a los tipos de materiales usados en su construcción.

b) *Condiciones de continuidad en las fronteras.*- Debe identificarse la forma de apoyo de la estructura sobre la cimentación (empotramiento, articulación, apoyo deslizando, etc.), y la interacción entre ésta y el suelo, así como el tipo de conexión existente entre los diversos elementos estructurales (nodos rígidos, articulaciones, apoyos deslizantes, etc.).

c) *Comportamiento de los materiales estructurales.*- Usualmente se hace la suposición de comportamiento lineal de los materiales estructurales; pero con las limitaciones establecidas por los reglamentos de construcción y sus normas técnicas complementarias.

d) *Representación de las acciones o fuerzas actuantes.*- Generalmente las fuerzas actuantes sobre las estructuras se agrupan en tres clases: cargas muertas, cargas vivas y cargas accidentales; las cargas muertas pueden cuantificarse con gran precisión de acuerdo al material a utilizar y las dimensiones de los elementos estructurales, mientras que los valores mínimos y combinaciones de los otros tipos de cargas son especificadas en los reglamentos de construcción y sus normas técnicas complementarias. Las acciones actuantes se representan por conjuntos de cargas o de deformaciones impuestas.

Tomando en cuenta las condiciones descritas, los modelos de análisis estructural más comunes se pueden clasificar en los siguientes^[ref. 14]:

Modelo con sistemas de marcos tridimensionales.- Es un modelo de análisis integrado exclusivamente por elementos rectos como vigas, columnas, etc. y se muestra en la figura 4.17.

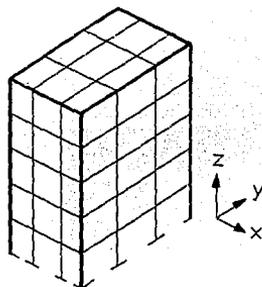


Figura 4.17. Modelo de análisis formado con sistemas de marcos tridimensionales.

Modelo con sistemas de muros tridimensionales.- Es un modelo de análisis compuesto por muros, placas planas y cascarones, se ilustra en la figura 4.18.

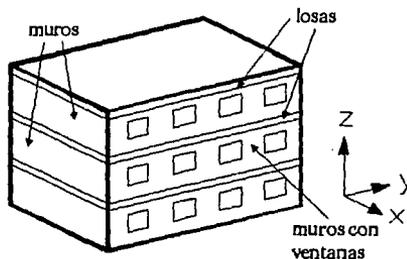


Figura 4.18. Modelo de análisis formado con sistemas de muros tridimensionales.

Modelo con sistemas de muro-marcos tridimensionales.- Como se observa en la figura 4.19 este modelo de análisis es una combinación de los dos casos anteriores. Es representativo de la mayoría de las estructuras existentes.

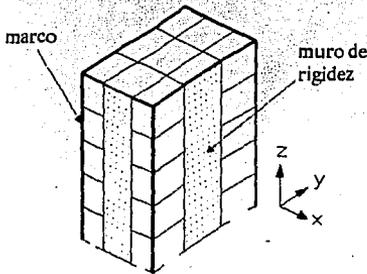


Figura 4.19. Modelo de análisis formado por sistemas muro-marco tridimensionales.

Modelo con sistemas de marcos planos.- Es una caso particular de los marcos tridimensionales y se obtiene mediante el ensamble de elementos rectos contenidos en un plano, se observa en la figura 4.14 del inciso 4.2.5.

Modelo con sistemas de muros planos.- Este modelo es un caso particular de los muros tridimensionales y solo considera muros contenidos en un plano, se ilustra en la figura 4.10 del inciso 4.2.4.

Modelo con sistemas de muro-marcos planos.- Este modelo de análisis es una combinación de marcos planos y muros planos, se ilustra en la figura 4.15 del inciso 4.2.5.

Modelo con sistemas simplemente acoplados o de resortes (estructuras de cortante).- Este modelo sirve para simplificar aún más el análisis estructural de marcos planos y de muro-marcos planos ante fuerzas laterales utilizando el concepto estudiado de rigidez de entrepiso.

Los elementos estructurales de los modelos analíticos anteriores están unidos por los sistemas de piso que se utilizarán en la construcción de la estructura. Los sistemas de piso se representan por medio de **diafragmas** horizontales que pueden ser de dos tipos:

Diafragmas rígidos.- Representan sistemas de piso que experimentan deformaciones en su plano que pueden considerarse nulas, por lo que los nodos de unión con las columnas y vigas que lo soportan tendrán todos desplazamientos horizontales relativos despreciables. Con referencia a la figura 4.20, este tipo de diafragma tiene solo tres grados de libertad: dos lineales y un angular.

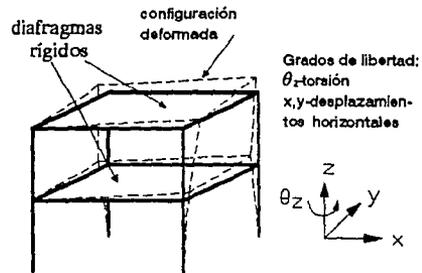


Figura 4.20. Grados de libertad dinámicos de un diafragma rígido (adaptado de la ref. 7).

Diafragmas flexibles.- Representan sistemas de piso cuyas columnas de soporte sufren desplazamientos horizontales relativos. Este tipo de diafragma tiene seis grados de libertad por cada nodo contenido en su plano: tres lineales y tres angulares.

Ejemplos de diafragmas rígidos los constituyen las losas macizas perimetralmente apoyadas en tableros poco alargados o cuadrados, losas reticulares o encasetonadas, losas planas macizas con espesor mayor de 20 [cm] y áreas tributarias poco alargadas, etc., mientras que ejemplos de diafragmas flexibles los constituyen las losas macizas perimetralmente apoyadas formando tableros muy alargados, losas precoladas libremente apoyadas, losas planas con áreas grandes y poco espesor, etc.

Existen algunas construcciones que se modelan fácilmente para su análisis estructural, porque prácticamente toda la construcción está constituida por la estructura misma, como es el caso de puentes peatonales o carreteros; pero casi siempre la mayoría de las construcciones requieren plantear modelos más refinados y complejos sobre todo cuando se debe reproducir el comportamiento dinámico de las estructuras. En este caso se encuentran la gran mayoría de las edificaciones, en las cuales se debe diferenciar claramente los elementos no estructurales de los elementos estructurales.

Todo elemento que interfiere con la deformación de una estructura bajo la influencia de una carga y toma por consiguiente esfuerzos, influye en la respuesta y debería considerarse como estructural.

Si la rigidez de dichos elementos es muy pequeña en comparación con la de los elementos estructurales principales, es usual despreciar su influencia e ignorar por tanto elementos tales como plafones, cancelos, muros divisorios, ventanería, etc. Otros componentes cuya contribución a la respuesta estructural usualmente se desprecia son los pretilos de concreto o mampostería de las fachadas, el firme de mortero de los pisos, las losas inclinadas de escaleras, etc., esto es así debido a que se construyen sin control de calidad estructural^[ref. 7].

En el caso común de pretilos, muros divisorios y muros de relleno no estructurales, para que no interfieran en las deformaciones de la estructura se deben desligar al proveer holguras entre ellos y los elementos estructurales, ya que de no cumplirse esto se tendrá que tomar en cuenta su influencia en el modelo de análisis al considerar columnas cortas y muros de rigidez, respectivamente.

En el análisis estructural es común la práctica de no considerar las losas del sistema de piso en el modelo analítico como parte de los elementos estructurales y solo tomar su influencia como diafragma rígido o flexible, lo cual es conservador,

sin embargo es recomendable para obtener una modelación más refinada que las vigas del modelo analítico tengan propiedades equivalentes que tomen en cuenta la contribución de la losa a la rigidez a flexión del sistema de piso.

Los criterios para modelar vigas equivalentes del sistema de piso varían notablemente de un reglamento de diseño a otro, por ejemplo el RCDF-93^[ref. 3] y sus Normas Técnicas para diseño y construcción de estructuras de concreto^[ref. 15], recomienda tomar una porción de la losa como patín de una viga T equivalente, y el código ACI^[ref. 16] recomienda usar una viga equivalente más compleja. En particular al representar mediante un modelo de análisis a una estructura con sistema de piso a base de losas planas reticulares o de losas planas macizas, es decir un sistema de piso sin trabes, ambos reglamentos emplean el criterio denominado **estructura equivalente**, con el cual representan la contribución a la rigidez del sistema de piso mediante vigas equivalentes para así poder analizarlo como un sistema de marcos. Este método es tema integral de los cursos de Estructuras de Concreto (ver por ejemplo la referencia [17]).

Los modelos de análisis tridimensional descritos anteriormente son excesivamente complejos y su solución involucra necesariamente el uso de programas de cómputo como los de las referencias [12] y [13]. Si el arreglo de los elemen-

tos principales de la estructura y la distribución de cargas no son muy irregulares las estructuras pueden descomponerse en sistemas bidimensionales o planos y analizarlos en forma independiente mediante modelos de marcos, muros o muro-marcos planos, que para estructuras comunes se deben resolver también con el uso de programas de cómputo debido al enorme número de cálculos que es necesario efectuar para su solución. Al idealizar una estructura real con modelos estructurales planos independientes se pierden los efectos de interacción entre ellos debidos a la rigidez torsional de los elementos estructurales, que pueden ser significativos si las rigideces de los marcos son muy diferentes^[ref. 7].

Antes de la aparición comercial de las computadoras y de los programas de cómputo el modelo analítico de rigideces de entrepiso o de resortes, que es el modelo más simple de los antes citados, era el de uso más común para facilitar el análisis de marcos planos ante fuerzas dinámicas, por lo que muchos de los conceptos usados en él siguen siendo utilizados por el RCDF-93^[ref. 3]. En la actualidad este modelo está cayendo en desuso^[ref. 14] debido a la proliferación de los programas de cómputo con los que puede efectuarse en horas y con mayor precisión el trabajo analítico que antes se hacía en meses, es sin embargo útil para resolver problemas cuando solo se cuenta con calculadora, lápiz y papel.

Por supuesto que a medida en que la representación de una construcción se hace más elemental mediante un modelo de análisis estructural más simple, la pérdida de precisión de los resultados obtenidos es lógicamente mayor.

En relación a las condiciones de continuidad en las estructuras, es usual modelar los apoyos en la cimentación con una de las condiciones extremas: empotramiento o articulación. En la realidad las condiciones de apoyo serán intermedias y en modelos analíticos sofisticados se suelen representar por medio de resortes que representan las propiedades de rigidez de la cimentación y del suelo de cimentación, concepto que se denomina interacción suelo-cimentación-estructura [ref. 7], no obstante este tipo de análisis sólo se justifica en el diseño de estructuras muy importantes o cuando se producen desplazamientos importantes del suelo que pueden modificar las solicitaciones. La variación con respecto al tiempo y las incertidumbres de las propiedades del suelo, hacen que cambien de manera poco predecible las características de los resortes, y justifican considerar las condiciones extremas como más representativas.

En cuanto a las condiciones de continuidad en las conexiones de los elementos estructurales, las suposiciones que se hagan en el modelo analítico deben corresponder con el tipo que se especifique en los planos de construcción.

Los sismos intensos que en base a estudios probabilísticos se espera se presenten durante la vida útil de las construcciones reciben el nombre de **sismos de diseño**. Existen diversos métodos para cuantificar las fuerzas que los sismos producen en las estructuras, los métodos que considera el RCDF.93 [ref. 3], pueden agruparse en dos tipos: 1) *Los dinámicos* y 2) *Los estáticos*.

1) En los métodos de análisis sísmico de tipo dinámico se calculan las respuestas máximas dinámicas de las estructuras tratadas como sistemas oscilatorios. Se aceptan como métodos de análisis dinámicos:

a) *Los Métodos Dinámicos por Pasos de Respuestas ante Sismos Específicos*

b) *El Método Dinámico Modal Espectral*

2) En los métodos de análisis sísmico de tipo estático se aplica a la estructura un sistema de cargas laterales equivalentes a las fuerzas máximas inducidas por la excitación dinámica. Se consideran como métodos de análisis estáticos:

a) *El Método Estático de Análisis*

b) *El Método Simplificado de Análisis*

Más adelante se tratará en detalle la aplicación de cada uno de estos métodos para la obtención de las respuestas estructurales.

La gran mayoría de los análisis estructurales que se efectúan se hacen bajo la hipótesis de un comportamiento lineal de las estructuras. En el caso del diseño sismorresistente los sismos intensos obligan a las estructuras a incursionar en etapas inelásticas, este comportamiento es tomado en cuenta introduciendo los diversos factores que se mencionan en incisos posteriores.

Cuando el análisis sísmico se efectúa sin recurrir a acelerogramas de sismos específicos, los reglamentos de construcción estipulan el nivel de la acción sísmica de diseño generalmente recurriendo al uso de espectros de diseño.

4.3.1.- ESPECTROS DE RESPUESTA.

Para un acelerograma dado aplicado a un sistema simple de 1 G.L., con un período de oscilación y un porcentaje de amortiguamiento determinados, es posible obtener el valor de la respuesta máxima, ya sea de desplazamientos, velocidad o aceleración, aplicando para ello los métodos presentados en 3.2.3. y 3.2.4. del tema III. Si este proceso se repite haciendo variar primero el período de oscilación desde cero hasta un valor alto comparado con los períodos de las estructuras comunes, y después variando el porcentaje de amortiguamiento, se obtienen valores que al ser graficados para un mismo amortiguamiento

constituyen los **espectros de respuestas** para el sismo con el acelerograma especificado.

El proceso descrito se ejemplificó en el problema resuelto V del inciso 3.2.3.1. del tema III, para un caso teórico muy simple que sin embargo sirve para ilustrar el procedimiento.

Los espectros de respuesta de temblores específicos como el mostrado en la figura 4.21, se elaboran tomando como abscisas los períodos del sistema y como ordenadas las respuestas máximas.

De el estudio de diversos espectros de respuesta se ha observado que, en general, un sismo de magnitud mediana registrado cerca de su epicentro, tiene períodos dominantes muy cortos y producirá mayores efectos en estructuras con período de oscilación fundamental corto, es decir, estructuras muy rígidas^[ref. 7]. Un sismo de magnitud grande a distancias intermedias tiene períodos dominantes en un amplio rango y por lo tanto afectará mayoritariamente a las estructuras relativamente rígidas tanto como a las flexibles. Un sismo a gran distancia en terreno blando tendrá mayores efectos en estructuras altas y flexibles.

Los espectros de respuestas correspondientes a sistemas con comportamiento lineal presentan las siguientes características^[ref. 1]:

SISMO: GRO-MICH		REGISTRO: AZIH850919AL.T		CORRECCIÓN	
DATOS:	IOEL	ESTA:	AZIH	MÉTODO:	CAL TECH.
FECHA:	850919	INST:	D3-106-	FILTRO:	0:120 0:130 45.0 47.0
HORA:	13:17:49-	COMP:	500W	ΔI:	0.010
EPIC:	18.140 102.716	HORA:	13:17:49	MÁX ACEL:	89.59 -101.31
M:	8.1	DUR:	71.75	MÁX VEL:	15.86 -15.02
H:	16	DIST:	149	MÁX DESP:	5.77 -5.96

ESPECTRO DE RESPUESTA AMORT (%) 0.2.5.10.20

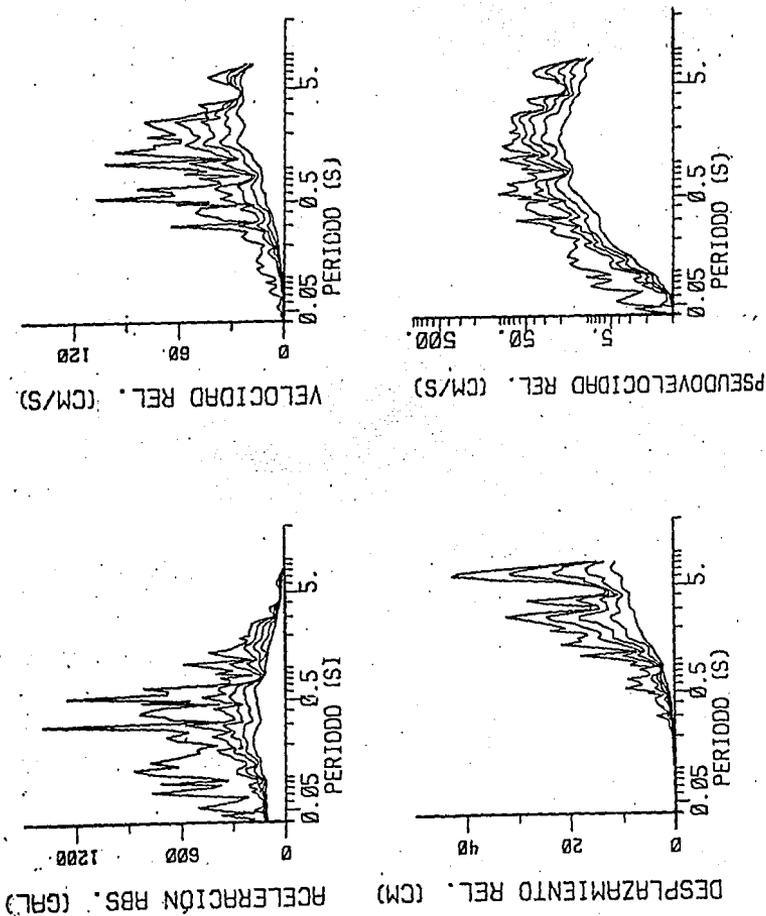


Figura 4.21. Espectros de respuesta con diferentes porcentajes de amortiguamiento crítico, para el sismo del 19 de septiembre de 1985 registrado en las costas de Guerrero [ref. 21].

1.- El espectro para amortiguamiento nulo muestra numerosas oscilaciones con máximos irregulares agudos.

2.- Las oscilaciones disminuyen al aumentar el amortiguamiento

3.- Para amortiguamientos comprendidos entre 0.05 y 0.1 del crítico, las máximas respuestas de desplazamiento, velocidad y aceleración son 1, 1.5 y 2 veces las correspondientes al terreno, respectivamente.

Los espectros de respuestas de sistemas con comportamiento inelástico o no lineal pueden obtenerse con buena aproximación a partir de los correspondientes a un sistema elástico del mismo período y porcentaje de amortiguamiento crítico^[ref. 1].

Las estructuras no se deben diseñar para resistir un solo sismo, sino un conjunto de sismos de diseño que tienen cierta probabilidad de afectarse durante su vida útil. En el diseño sísmo-resistente se diseñan contra las ordenadas de una curva probabilística de espectros de respuesta que corresponden a diferentes temblores con períodos de recurrencia determinados por el riesgo sísmico de la región en que se desplantará la construcción.

4.3.2.- ESPECTROS DE DISEÑO.

ESPECTRO DE DISEÑO.- Es una gráfica probabilística basada en los espectros de respues-

ta de sismos que se espera ocurran durante la vida útil de las estructuras en una región específica.

Existen reglas empíricas para construir espectros de diseño, consistentes en multiplicar la aceleración, velocidad y desplazamiento máximos del terreno por constantes que dependen del grado de amortiguamiento del sistema en estudio. Estas constantes se han obtenido del análisis de un gran número de espectros de respuesta de sismos reales^[ref. 7]. La mayoría de los códigos y normas de diseño especifican espectros de diseño basados en considerar un porcentaje de amortiguamiento crítico promedio de las estructuras del 5%, que resulta de considerar fricciones internas en el material estructural y fricción entre la estructura y los elementos no estructurales.

Las reglas originales usadas para la construcción de espectros de diseño son debidas a Newmark^[ref. 7], y fueron modificadas para considerar los efectos del tipo de suelo en el que se desplantan las estructuras. De acuerdo a esto, el espectro de diseño considerando amortiguamiento del 5% del crítico puede construirse con la siguiente ecuación

$$S_A/g = 0.016V_S/T^{(2/3)} < 2.5 A/g \quad \dots(4.30)$$

S_A/g -ordenada espectral expresada como fracción de la gravedad

V_S -velocidad máxima del terreno [cm/seg]

A -aceleración máxima del terreno [cm/seg²]

T -período de oscilación del sistema [seg]

S -factor que depende del tipo de suelo

- S = 1 para roca o terreno firme sobre roca
- S = 1.2 para suelos granulares o suelos cohesivos compactos
- S = 1.5 para suelos de mediana o alta compresibilidad

Si una onda de esfuerzos se propaga de un medio de módulo elástico alto hacia otro de módulo bajo, los desplazamientos y aceleraciones se amplifican, por lo que en terrenos compresibles se tiene una amplificación de las componentes del movimiento del terreno. Por este motivo el factor S es un coeficiente de incremento de respuestas para suelos menos rígidos.

Los parámetros del suelo A_t y V_t se determinan en base a estudios de riesgo sísmico de las regiones geográficas, es decir estudios estadísticos de la ocurrencia de sismos en esas regiones y de sus períodos de recurrencia, tomando en cuenta las máximas velocidades y aceleraciones del terreno que se han presentado.

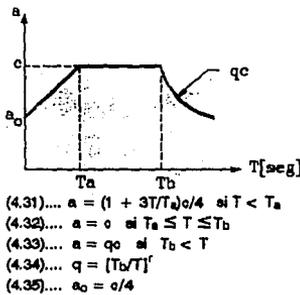
El RCDF-93^[ref. 3] toma en cuenta todos los aspectos mencionados y propone el espectro de

diseño que se describe en el siguiente inciso para estructuras que se construyan en el área del Distrito Federal.

4.3.2.1.- ESPECTRO DE DISEÑO DEL REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL.

El RCDF-93^[ref. 3], y sus Normas Técnicas Complementarias para diseño por sismo^[ref. 5], recomiendan el espectro de diseño que se muestra en la figura 4.22, en el que las ordenadas espectrales que se indican tienen ya implícitamente en cuenta los efectos del amortiguamiento de los sistemas estructurales, así como el efecto del tipo de suelo o zona estratigráfica en el que se desplanten.

Debe recordarse según se indicó en 2.5.3. del tema II, que el valle de México se delimita, para fines de ingeniería, en tres zonas estratigráficas con las extensiones mostradas en la figura 2.22.



ESTRUCTURAS DEL GRUPO B (Método Estático y Dinámico Modal)				
Tipo de suelo	*c	T _a	T _b	r
I (terreno firme, lomas)	0.16	0.2	0.6	1/2
II (transición no sombreada)	0.32	0.3	1.5	2/3
III (terreno compresible y zona II sombreada)	0.40	0.6	3.9	1

a-ordenada del espectro del diseño
 T-período fundamental de la estructura
 T_a, T_b-períodos característicos del espectro
 c-coeficiente sísmico
 r-exponente en función de la zona
 a₀-ordenada para T = 0

*NOTA: Para estructuras del grupo A incrementar c en 50%.

Figura 4.22. Espectro de diseño sísmico del RCDF-93^[ref. 3].

4.3.3.- DUCTILIDAD.

DUCTILIDAD.- Es la capacidad de una estructura para sufrir deformaciones por encima del límite elástico, sin llegar a la falla^[ref. 1].

Una estructura que se comporta de una manera dúctil ofrece un buen mecanismo para disipar parte de la energía que el sismo le inyecta. Las estructuras dúctiles al ser sometidas a grandes esfuerzos, producen redistribuciones internas de momentos mediante la aparición de articulaciones plásticas que al permitir giros y desplazamientos en la estructura, absorben grandes cantidades de energía.

Las deformaciones plásticas son permanentes y notorias y por tanto no deseables en una estructura; pero si se diseña para que el comportamiento dúctil se produzca bajo grandes esfuerzos producto de sismos excepcionales, se tendrá una solución óptima entre costo y seguridad, pues el diseño sismorresistente de una estructura que se comporte elásticamente aun bajo las más intensas sollicitaciones tendría un costo sumamente alto.

4.3.3.1.- FACTOR DE DUCTILIDAD.

FACTOR DE DUCTILIDAD.- Es la relación entre la deformación máxima que sufre la estructura y la deformación correspondiente al límite de fluencia^[ref. 1]. Esto es ilustrado en la figura 4.23, para el caso más común de un sistema con comportamiento elastoplástico.

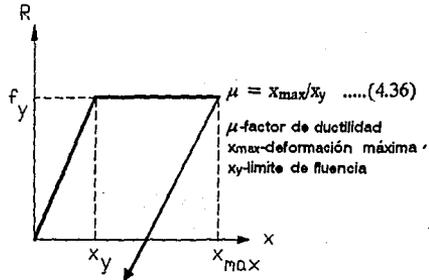
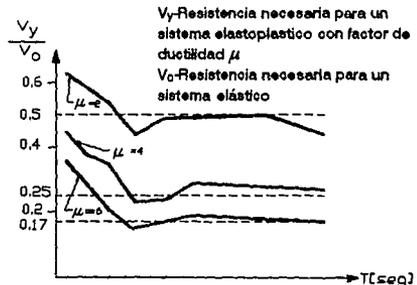


Figura 4.23 Curva elastoplástica carga-desplazamiento.

Mediante la comparación de análisis sísmicos ante acelerogramas diversos, efectuados a sistemas simples o de 1 G.L. no lineales contra los efectuados a sistemas simples lineales de igual período y amortiguamiento, es posible establecer la relación entre la capacidad de ambos tipos de sistemas para diversos factores de ductilidad μ de los sistemas inelásticos. Esta relación se muestra



Las gráficas corresponden al promedio de las obtenidas para cuatro sismos registrados en terreno firme en México

Figura 4.24. Relaciones entre las resistencias necesarias para sistemas elastoplásticos y las necesarias para sistemas elásticos con mismas propiedades iniciales, para resistir un mismo grupo de sismos (tomado de la referencia [7]).

gráficamente en la figura 4.24, en donde se observa que la capacidad necesaria para resistir el sismo por parte del sistema no lineal es μ veces menor que la requerida por el sistema lineal, excepto en sistemas de período muy corto en los que la reducción se hace cada vez menor hasta llegar a uno cuando el período es cero.

De lo anterior se concluye que un sistema no lineal que puede desarrollar un factor de ductilidad μ , puede diseñarse para que tenga una resistencia obtenida dividiendo entre μ la ordenada espectral de un sistema lineal con igual período y amortiguamiento^[ref. 7].

Como se muestra en la figura 4.25 los espectros de diseño para sistemas elastoplásticos pueden obtenerse para distintos factores de ductilidad, a partir del espectro de diseño de sistemas elásticos. De esta manera se puede tomar en cuenta el comportamiento no lineal de las estructuras.

El RCDF-93, en sus Normas Técnicas Complementarias para diseño por sismo^[ref. 5], toma en cuenta la ductilidad y el comportamiento no lineal de las estructuras mediante el uso de dos factores denominados factor de comportamiento sísmico y factor reductivo de fuerzas sísmicas.

4.3.3.2.- RCDF-93: FACTOR DE COMPORTAMIENTO SÍSMICO (Q).

El RCDF-93 recomienda los valores para el factor de comportamiento sísmico indicados en la

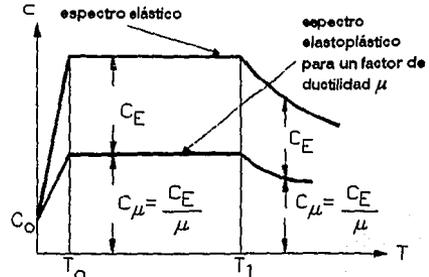


Figura 4.25. Espectros elásticos e inelásticos de diseño (tomado de la referencia 7).

tabla 4.3, para las estructuras que cumplan con las condiciones que se indican.

4.3.3.3.- RCDF-93: FACTOR REDUCTIVO DE FUERZAS SÍSMICAS (Q').

Los valores especificados para este factor se indican en la tabla 4.4 y se basan en el tipo de configuración geométrica de las estructuras, clasificándolas en dos tipos: a) Estructuras con configuración regular, y b) Estructuras con configuración irregular.

4.3.4.- RCDF-93: DISEÑO POR SISMO.

Estructuras con ductilidad excesiva y poca resistencia, ocasionarán frecuentes y costosas reparaciones pudiendo quedar inutilizadas permanentemente con temblores frecuentes de mediana magnitud. El criterio de diseño racional denominado **Diseño Sismorresistente** se basa en la idea de que una estructura ha de soportar

Tabla 4.3. Requisitos para la asignación de los factores de comportamiento sísmico Q según el RCDP-93.

● I. $Q = 4$

1. La resistencia de entrepisos es suministrada exclusivamente por marcos no contraventados de acero o concreto reforzado, o bien por marcos contraventados o con muros de concreto reforzado en los que en cada entrepiso los marcos son capaces de resistir, sin contar muros ni contraventos, cuando menos 50 % de la fuerza sísmica actuante. 2. Si hay muros ligados a la estructura en la forma especificada en el caso I del artículo 204 del Reglamento, éstos se deben tener en cuenta en el análisis, pero su contribución a la capacidad ante fuerzas laterales sólo se tomará en cuenta si estos muros son de piezas macizas, y los marcos sean o no contraventados, y los muros de concreto reforzado son capaces de resistir al menos 80 % de las fuerzas laterales totales sin la contribución de los muros de mampostería. 3. El mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiere en más de 35 % del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos. Para verificar el cumplimiento de este requisito, se calculará la capacidad resistente de cada entrepiso teniendo en cuenta todos los elementos que puedan contribuir a la resistencia, en particular los muros que se hallen en el caso I a que se refiere el artículo 204 del Reglamento. 4. Los marcos y muros de concreto reforzado cumplen con los requisitos que fijan las normas complementarias correspondientes para marcos y muros dúctiles. 5. Los marcos rígidos de acero satisfacen los requisitos para marcos dúctiles que fijan las normas complementarias correspondientes.

● II. $Q = 3$

Se satisfacen las condiciones 2, 4, y 5 del caso I y en cualquier entrepiso dejan de satisfacerse las condiciones 1 o 3 especificadas para el caso I pero la resistencia en todos los entrepisos es suministrada por columnas de acero o de concreto reforzado con losas planas, por marcos rígidos de acero, por marcos de concreto reforzado, por muros de este material, por combinaciones de éstos y marcos o por diafragmas de madera contrachapada. Las estructuras con losas planas deberán además satisfacer los requisitos que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

● III. $Q = 2$

La resistencia a fuerzas laterales es suministrada por losas planas con columnas de acero o de concreto reforzado, por marcos de acero o de concreto reforzado, contraventados o no, o muros o columnas de concreto reforzado, que no cumplen en algún entrepiso lo especificado por los casos I y II de esta sección, o por muros de mampostería de piezas macizas confinados por castillos, dadas, columnas o traveses de concreto reforzado o de acero que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, o diafragmas construidos con duelas inclinadas o por sistemas de muros formados por duelas de madera horizontales o verticales combinados con elementos diagonales de madera maciza. También se usará $Q = 2$ cuando la resistencia es suministrada por elementos de concreto prefabricado o preforzado, con las excepciones que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

● IV. $Q = 1.5$

La resistencia a fuerzas laterales es suministrada en todos los entrepisos por muros de mampostería de piezas huecas, confinados o con refuerzo interior, que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, o por combinaciones de dichos muros con elementos como los descritos para los casos II y III, o por marcos y armaduras de madera.

● V. $Q = 1$

La resistencia a fuerzas laterales es suministrada al menos parcialmente por elementos o materiales diferentes de los arriba especificados, a menos que se haga un estudio que demuestre a satisfacción del Departamento, que se puede emplear un valor más alto que el que aquí se especifica.

En todos los casos se usará para toda la estructura en la dirección de análisis el valor mínimo de Q que corresponde a los diversos entrepisos de la estructura en dicha dirección. El factor Q puede diferir en las dos direcciones ortogonales en que se analiza la estructura, según sean las propiedades de ésta en dichas direcciones.

Tabla 4.4. Valores del factor reductor de fuerzas sísmicas Q' en base al tipo de configuración de la estructura según el RCD-93.

a) Configuración Regular.- Requisito: 1.- Planta sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales, por que toca a masas, así como a muros y otros elementos resistentes. 2.- Relación de su altura a la dimensión menor de su base no pasa de 2.5. 3.- Relación de largo a ancho de la base no excede de 2.5. 4.- En planta no tiene entrantes ni salientes cuya dimensión exceda de 20 % de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección que se considera de la entrante o saliente. 5.- En cada nivel tiene un sistema de techo o piso rígido y resistente. 6.- No tiene aberturas en sus sistemas de techo o piso cuya dimensión exceda de 20 % de la dimensión en planta medida paralelamente a la dimensión que se considere de la abertura, las áreas huecas no ocasionan asimetrías significativas ni difieren en posición de un piso a otro y el área total de aberturas no excede en ningún nivel de 20 % del área de la planta. 7.- El peso de cada nivel, incluyendo la carga viva que debe considerarse para diseño sísmico, no es mayor que el del piso inmediato inferior ni, excepción hecha del último nivel de la construcción, es menor que 70 % de dicho peso. 8.- Ningún piso tiene un área, delimitada por los paños exteriores de sus elementos resistentes verticales, mayor que la del piso inmediato inferior ni menor que 70 % de ésta. Se exime de este último requisito únicamente al último piso de la construcción. 9.- Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en dos direcciones ortogonales por diafragmas horizontales y por trabes o losas planas. 10.- La rigidez al corte de ningún entrepiso excede en más de 100 % a la del entrepiso inmediatamente inferior. 11.- En ningún entrepiso la excentricidad torsional calculada estáticamente, es, excede del 10 % de la dimensión en planta de ese entrepiso medida paralelamente a la excentricidad mencionada.

Para este tipo de estructuras se tiene:

$$\text{si se desconoce } T \text{ o si } T \geq T_a \text{ entonces } Q' = Q \dots (4.37)$$

$$\text{si } T < T_a \text{ entonces } Q' = 1 + (T/T_a)(Q-1) \dots (4.38)$$

b) Configuración Irregular.- Cuando no se cumple algún requisito del inciso a) se tiene este tipo de estructura, para la cual:

$$Q = \text{ecuaciones (4.37) ó (4.38)} \times 0.8 \dots (4.39)$$

Las deformaciones se calcularán multiplicando por Q las causadas por las fuerzas sísmicas reducidas.

elásticamente los sismos de ocurrencia más probable y tener una reserva de ductilidad suficiente para absorber la energía adicional de aquellos terremotos fuertes que se puedan presentar^[ref. 4].

Para evitar una inversión económica excesiva en la estructura debe aceptarse una probabilidad mayor de ocurrencia de daños ante sismos excepcionales. El diseño sismorresistente permite a las estructuras, mediante una combinación óptima de propiedades como resistencia, rigidez y ductilidad, responder a sismos frecuentes y moderados sin sufrir daños y a sismos intensos

excepcionales sin poner en peligro su propia estabilidad, su contenido y a sus ocupantes.

Si se diseña una estructura para resistir un conjunto de fuerzas laterales reducidas μ veces con respecto a las que corresponden al espectro elástico del sismo de diseño, al presentarse éste, se alcanzarán las fuerzas internas para las que se diseñó la estructura y después se presentarán deformaciones inelásticas hasta alcanzar desplazamientos μ veces superiores a los calculados en el análisis con las fuerzas reducidas^[ref. 7].

Para evitar el pánico de los ocupantes y daños a los elementos no estructurales durante sismos frecuentes y moderados, deberá también revisarse que los desplazamientos laterales mencionados sean pequeños.

El RCDF-93^[ref. 3], toma en cuenta los aspectos anteriores y establece las bases y requisitos mínimos del diseño sísmorresistente en los artículos del capítulo VI titulado Diseño por Sismo. En la tabla 4.5. se citan las fracciones fundamentales de los artículos más importantes.

4.3.5.- ANALISIS DINAMICOS POR PASOS DE RESPUESTAS ANTE SISMOS ESPECIFICOS.

Los métodos dinámicos por pasos de respuestas ante sismos específicos existentes pueden agruparse en dos tipos^[ref. 14]

- 1) *Métodos Directos de Integración*
- 2) *Método Directo de Superposición Modal*

Los métodos directos de integración más utilizados son el Método de Newmark y el Método de Integración por Pasos de Aceleración Lineal. Estos métodos son usados para obtener las respuestas dinámicas de sistemas oscilatorios de varios grados de libertad y pueden incluir el comportamiento no lineal de los materiales, el **Método de Integración por Pasos de Aceleración Lineal** fue estudiado en 3.5.1. del tema III aplicado a

sistemas simples de 1 G.L. con comportamiento no lineal, sin embargo para poder ser aplicado a sistemas de múltiples grados de libertad no lineales, es necesario construir la matriz de amortiguamiento proporcional e introducir una modificación conocida como^[ref. 18] Wilson- θ , tendiente a asegurar la estabilidad numérica del proceso de solución.

En la actualidad existen programas con los que es posible efectuar un análisis no lineal tridimensional paso a paso, pero como no se cuenta con conocimientos suficientes sobre las leyes que rigen el comportamiento de elementos estructurales ante cargas histeréticas o cíclicas en tres direcciones no es posible desarrollar modelos analíticos confiables^[ref. 2]. Aun con modelos analíticos no lineales de estructuras planas, es todavía impráctico usar este tipo de análisis para fines de diseño.

El cálculo paso a paso de respuestas ante temblores específicos también puede ser modal, pero está restringido a sistemas con comportamiento lineal debido a que se vale del principio de superposición para el cálculo de las respuestas. **El Método Directo paso a paso de Superposición Modal** fue estudiado y presentado ampliamente en 3.3.1.1., y 3.3.3.1., del Tema III. En los problemas prácticos correspondientes, al tratar de aplicar paso a paso los aspectos operativos del método se presentaron únicamente los que se pueden desarrollar sin un número exagerado de

operaciones con calculadora, lápiz y papel, utilizando por tanto acelerogramas con gráficas muy simples o de corta duración.

El proceso de solución aplicando acelerogramas reales es similar al abí efectuado, siendo necesario el uso de un sistema de cómputo con la programación del método cuya codificación fue indicada en 3.2.4, del tema III.

El RCDF-93 en sus Normas Técnicas para diseño por sismo^[ref. 5], permite calcular las respuestas usando sólo los modos con períodos mayores o iguales a 0.4 [seg], tomando en cuenta no menos de los tres primeros modos de vibrar; los acelerogramas de los sismos de diseño a usarse se estipulan en la sección 9.2. de dichas normas.

Tabla 4.5. Fracciones fundamentales de los artículos más importantes del Capítulo VI de Diseño por Sismo del RCDF-93.

Art. 203. - Las estructuras se analizarán bajo la acción de dos componentes horizontales ortogonales no simultáneas del movimiento del terreno. Según sean las características de la estructura de que se trate, ésta podrá analizarse por sismo mediante el método simplificado, el método estático o uno de los dinámicos que describan las Normas Técnicas Complementarias. En el análisis se tendrá en cuenta la rigidez de todo elemento, estructural o no, que sea significativa. Con las salvedades que corresponden al método simplificado de análisis, se calcularán las fuerzas sísmicas, deformaciones y desplazamientos laterales de la estructura, incluyendo sus giros por torsión y teniendo en cuenta los efectos de flexión de sus elementos y, cuando sean significativos, los de fuerza cortante, fuerza axial y torsión de los elementos, así como los efectos de segundo orden, entendidos éstos como los de las fuerzas gravitacionales actuando en la estructura deformada ante la acción tanto de dichas fuerzas como de las laterales. Se verificará que la estructura y su cimentación no alcancen ningún estado límite de falla o de servicio.

Art. 204. - Muros divisorios de fachada y de colindancia.

I.- Los que contribuyan a resistir fuerzas laterales, se ligarán adecuadamente a los marcos estructurales en todo el perímetro del muro, su rigidez se tomará en cuenta en el análisis sísmico y se verificará su resistencia de acuerdo con las normas correspondientes. Se verificará que las vigas, losas y columnas resistan la fuerza cortante, el momento flexionante, las fuerzas axiales y las torsiones que en ellas induzcan los muros. Se verificará que las uniones entre elementos estructurales resistan dichas acciones.

II.- Cuando no contribuyan a resistir fuerzas laterales, se sujetarán a la estructura de manera que no restrinjan su deformación en el plano del muro. Preferentemente estos muros serán de materiales flexibles o débiles.

Art. 206. - El coeficiente sísmico s , es el cociente de la fuerza cortante horizontal que actúa en la base de la estructura por efecto del sismo, entre el peso de ésta sobre dicho nivel. La base de la estructura se toma como el nivel a partir del cual los desplazamientos con respecto al terreno circundante comienzan a ser significativos.

Art. 207. - Cuando se aplique el método estático o dinámico, podrán reducirse las fuerzas sísmicas empleando los criterios que fijen las Normas Complementarias. Los desplazamientos así calculados deben multiplicarse por el factor de comportamiento sísmico que marquen dichas normas.

Art. 209. - Las diferencias entre los desplazamientos laterales de pisos consecutivos debidos a fuerzas cortantes horizontales no excederán a 0.006 veces la diferencia de elevaciones correspondientes. Si los elementos incapaces de soportar deformaciones, como los muros de mampostería, están separados de la estructura principal, de manera que no sufran daños, el límite antes mencionado será de 0.012.

4.3.6.- ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL.

El método dinámico más frecuentemente usado es el denominado Método de Análisis Modal Espectral y se basa en el uso de espectros de diseño para la determinación de las respuestas máximas, ya sea de desplazamientos, velocidad o aceleración que corresponde a cada forma del modo de vibración de una estructura.

Algunas ventajas del análisis modal espectral respecto al análisis por pasos son: a) determinación inmediata de la respuesta máxima de cada forma del modo de vibrar, b) Sólo es necesario tomar en cuenta las respuestas de algunas de las primeras formas modales, c) Los tiempos de ejecución de los cálculos necesarios en el análisis sísmico son pequeños.

Con referencia al espectro de diseño propuesto por el RCDF-93, que aparece en la figura 4.22 del inciso 4.3.2., se usa el coeficiente sísmico c , como índice de la máxima respuesta de aceleración que puede tener cada forma modal dependiendo de su período de oscilación.

Se admiten reducciones de las ordenadas de aceleración espectral mediante el uso de los factores de comportamiento sísmico Q y reductivo de fuerzas sísmicas Q' . El espectro así construido es de tipo elastoplástico.

Como se demostró cualquier configuración de desplazamientos laterales de un sistema oscilatorio puede ser expresada como la suma de las formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes denominados coeficientes de participación o influencia, que toman en cuenta la contribución de cada una de las formas modales. Debido a esto el desplazamiento de una cualquiera de las masas en un instante dado puede calcularse como

$$u_i(t) = \sum_j \phi_j(t) c_j z_j \quad \dots(4.40)$$

Los subíndices indican:
i-masa o nivel,
j-modo considerado

$u_i(t)$ -desplazamiento de la masa i relativo a la base en el instante t

c_j -coeficiente de participación del modo j

$\phi_j(t)$ -ordenada del espectro de desplazamientos para el período de oscilación del modo j (desplazamiento máximo del modo j)

z_j -componente del vector modal, representa las coordenadas relativas de la masa i (respecto a una de ellas), en el modo j

Σ_j -sumatoria sobre todos las formas modales de vibrar.

Si el espectro de diseño es un espectro de aceleraciones como el propuesto por el RCDF-93 se tiene que

$$A_j = \phi_j(t) \omega_j^2 = a_j g \quad \dots(4.41)$$

A_j -aceleración espectral para el modo j

a_j -ordenada espectral para el modo j

g -aceleración de la gravedad

sustituyendo ϕ_j dada por la ecuación (4.41) en (4.40), se tiene para cada modo j

$$u_{ij} = A_j c_j z_{ij} / \omega_j^2 = A_j f_j z_{ij} \quad \dots (4.42)$$

con

$$f_j = c_j / \omega_j^2 \quad \dots (4.43)$$

u_{ij} - desplazamiento de la masa i respecto a la base, para el modo j

ω_j^2 - valor característico del modo j

f_j - coeficiente de influencia del modo j

En forma matricial la ecuación (4.42) puede expresarse como

$$\{u\}_j = A_j f_j \{z\}_j \quad \dots (4.44)$$

$\{u\}_j$ - vector de desplazamientos respecto a la base, para el modo j

$\{z\}_j$ - vector de la forma modal j

Mediante la expresión siguiente se puede conocer el porcentaje con que cada forma modal contribuye a la respuesta de desplazamientos total

$$I_{Fj} = (f_j / \sum f_j) \times 100 \quad \dots (4.45)$$

I_{Fj} - porcentaje de influencia del modo j

4.3.6.1.- COEFICIENTES DE PARTICIPACION

El coeficiente de participación α_j , determina la manera en que cada forma del modo de vibración participa en la respuesta total.

Como se demostró este coeficiente es calculado para el caso de aceleración en la base con la ecuación (3.131) y (3.74), expresados en forma matricial en este caso en que las aceleraciones espectrales son siempre positivas como

$$c_j = \{z\}_j^T \{M\{1\}\} / \{z\}_j^T \{M\{z\}_j\} \quad \dots (4.46)$$

M - matriz de masas

$\{1\}$ - vector unitario

Si el cálculo no es matricial la expresión es

$$\alpha_j = \sum_i m_i z_{ij} / \sum_i m_i (z_{ij})^2 \quad \dots (4.47)$$

También se demostró que los máximos de las respuestas de cada forma modal no ocurren simultáneamente, debido a que sus frecuencias son diferentes. Por tanto deben ser usadas las ecuaciones (3.126a) y (3.126b) para obtener la máxima respuesta posible o la máxima respuesta probable de la estructura, entendiendo por respuesta tanto los desplazamientos como los elementos mecánicos.

Estas ecuaciones se pueden escribir para este caso como

$$R_{abs} = \sum_i |R_i| \quad \dots (4.48)$$

$$R_{prob} = [\sum_i R_i^2]^{0.5} \quad \dots (4.49)$$

R_{Abs} -respuesta máxima posible

$|R_j|$ -respuesta absoluta máxima en el modo j

R_{RMS} -respuesta máxima probable

Cuando los valores de los períodos de oscilación de un sistema de varios G.L. son muy cercanos entre sí, es decir difieren en menos del 10 % unos de otros^[ref. 5], o cuando se emplea un modelo de análisis tridimensional que considere los giros por torsión de la estructura como un grado de libertad, las respuestas máximas deben obtenerse con el criterio denominado **combinación cuadrática completa (CQC)**^[ref. 2 y 14], con la siguiente expresión

$$R_{CQC} = \left[\sum_i \sum_j R_i \rho_{ij} R_j \right]^{0.5} \quad \dots(4.50)$$

con

$$\rho_{ij} = 8[\xi_i \xi_j w_i w_j]^{0.5} (\xi_i w_i + \xi_j w_j) w_i w_j / S \quad \dots(4.51)$$

$$S = (w_1^2 - w_j^2)^2 + 4\xi_i \xi_j w_i w_j (w_1^2 + w_j^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2) w_1^2 w_j^2 \quad \dots(4.52)$$

R_{CQC} -respuesta cuadrática completa

ξ_i, ξ_j -porcentajes de amortiguamiento crítico del modo i , modo j , etc.

Para el caso en que los porcentajes de amortiguamiento sean iguales para todos los modos

$$\rho_{ij} = 8\xi^2(1+r)r^{1.5} / [(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r(1+r)^2] \quad \dots(4.53)$$

$$r = w_j/w_i \quad \dots(4.54)$$

A menos que se especifique otro valor mediante estudios de vibraciones libres o forzadas, se recomienda usar un porcentaje de amortiguamiento del 5 % constante para todos los modos de vibración^[ref. 2].

4.3.6.2.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Un edificio destinado para su uso como oficinas, tendrá una estructuración a base de marcos y muro-marcos de concreto reforzado y mampostería, con las características indicadas en las plantas estructurales de las figuras 4.26, 4.27 y 4.28.

El inmueble tendrá tres niveles con los sistemas de piso cuyas secciones transversales se observan en la figura 4.30, con alturas a ejes de 5, 4 y 4 [m] para los entrepisos 1, 2 y 3, respectivamente. Las dimensiones de los elementos estructurales se muestran en la figura 4.29, los pretiles y faldones indicados están desligados de las columnas mediante holguras de 5 [cm]. La estructura estará desplantada en la zona III o zona del lago del Distrito Federal y se debe diseñar para desarrollar un factor de comportamiento sísmico de $Q = 2$ en ambas direcciones.

NOTAS:

- 1.- Concreto: $F_c = 250$ [kg/cm²]; $P.V. = 2400$ [kg/m³]
 $E_c = 2213594$ [t/m²]; $G_c = 885438$ [t/m²]
- 2.- Muro de tabique rojo M2: $E_m = 114000$ [t/m²]
 $G_m = 45600$ [t/m²]; $t = 15$ [cm]
- 3.- Muro de tabloón de concreto M1: $E_m = 192000$ [t/m²]
 $G_m = 76800$ [t/m²]; $t = 15$ [cm]
- 4.- Acotación en [cm]

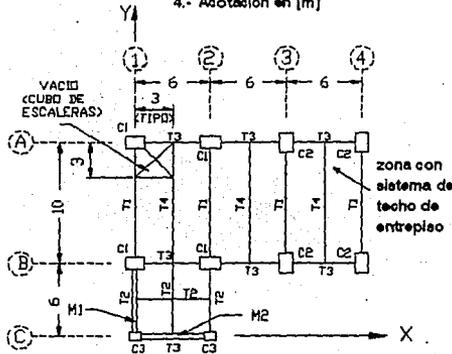


Figura 4.26. Planta estructural del nivel 1.

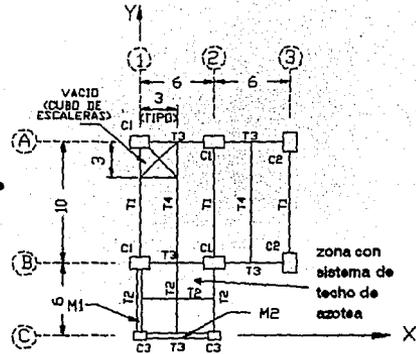


Figura 4.27. Planta estructural del nivel 2.

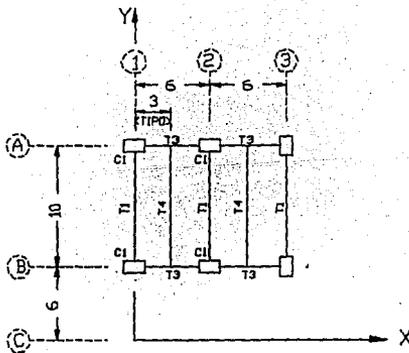


Figura 4.28. Planta estructural del nivel 3.

NOTAS:

- 1.- Pretiles y faldones están desligados de las columnas por holguras de 5 [cm].
- 2.- Acotaciones en [cm]

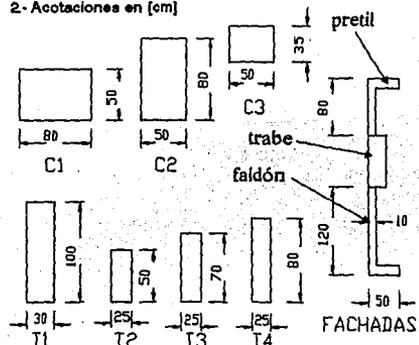


Figura 4.29. Dimensiones de los elementos estructurales del edificio de oficinas cuyas plantas aparecen en las figuras 4.26 a 4.28.

Mediante el método sísmico de análisis modal espectral, obtener las fuerzas sísmicas y los desplazamientos laterales de los niveles y entrepisos de la estructura empleando el criterio de respuesta máxima probable, y un modelo de análisis con rigideces de entrepiso (sistema simplemente acoplado).

I - EVALUACION DE CARGAS

● CARGAMUERTA

SISTEMA DE PISO DE AZOTEA (figura 4.30)	[kg/m ²]	
1.- Impermeabilizante	10	
2.- Enladrillado (esp. 2 cm)	30	
(0.02 m) (1500 kg/m ³)		
3.- Mortero cemento:arena (esp. 2 cm)	42	
(0.02 m) (2100 kg/m ³)		
4.- Relleno de tezónule para dar pendiente (esp.prom. 15cm)	188	
(0.15 m) (1250 kg/m ³)		
5.- Losa de concreto (esp. 10 cm)	240	
(0.1 m) (2400 kg/m ³)		
6.- Falso plafond de yeso (placas de esp. 2 cm)	30	
(0.02 m) (1500 kg/m ³)		
7.- Instalaciones	40	
8.- RCD _F ^[reL3] (art. 197)	40	
Total	610 [kg/m²]	...(a)
SISTEMA DE PISO EN NIVELES 1 Y 2 (figura 4.30)	[kg/m ²]	
1.- Recubrimiento de piso con loseta vinílica	8	
2.- Aplanado de cemento y arena (esp. 2 cm)	42	
(0.02 m) (2100 kg/m ³)		
3.- Losa de concreto (esp. 10 cm)	240	
(0.1 m) (2400 kg/m ³)		
4.- Falso plafond de yeso (placas de esp. 2 cm)	30	
(0.02 m) (1500 kg/m ³)		
5.- Instalaciones	40	
6.- Muros divisorios de tablaroca	50	
7.- RCD _F ^[reL3] (art. 197)	40	
Total	450 [kg/m²]	...(b)
ESCALERAS	[kg/m ²]	
1.- Losa de concreto (esp. 10 cm)	240	
(0.1 m) (2400 kg/m ³)		
2.- Instalaciones	20	
3.- Escaleras y pretilas	20	
4.- RCD _F ^[reL3] (art. 197)	20	
Total	300 [kg/m²]	...(c)

TRABES

- T1: $w = (0.3m)(1m)(2400kg/m^3) = 720 [kg/m]$... (d)
- T2: $w = (0.25m)(0.5m)(2400kg/m^3) = 300 [kg/m]$... (e)
- T3: $w = (0.25m)(0.7m)(2400kg/m^3) = 420 [kg/m]$... (f)
- T4: $w = (0.25m)(0.8m)(2400kg/m^3) = 480 [kg/m]$... (g)

COLUMNAS

- C1 y C2: $w = (0.8m)(0.5m)(2400kg/m^3) = 960 [kg/m]$... (h)
- C3: $w = (0.5m)(0.35m)(2400kg/m^3) = 420 [kg/m]$... (i)

PRETILES Y FALDONES

- PRETIL: $w = (0.8 + 0.4)m(0.1m)(2400kg/m^3) = 288 [kg/m]$... (j)
- FALDON: $w = (1.2 + 0.4)m(0.1m)(2400kg/m^3) = 384 [kg/m]$... (k)

MUROS

TABIQUE ROJO

- 1.- Tabique rojo (esp. 15 cm)
(0.15 m)(1500 kg/m³)
- 2.- Repellado de mortero en 1 cara (esp. 1.5 cm)
(0.015 m)(2100 kg/m³)
- 3.- Aplanado de yeso en 1 cara (esp. 1.5 cm)
(0.015 m)(1500 kg/m³)

[kg/m²]
225

32

23

Total: 280 [kg/m²] ... (l)

TABICON DE CONCRETO

- 1.- Tabicon de concreto (esp. 15 cm)
(0.15 m)(1800 kg/m³)
- 2.- Repellado de mortero en 1 cara (esp. 1.5 cm)
(0.015 m)(2100 kg/m³)
- 3.- Aplanado de yeso en 1 cara (esp. 1.5 cm)
(0.015 m)(1500 kg/m³)

[kg/m²]
270

32

23

Total: 325 [kg/m²] ... (m)

VENTANERIA EN FACHADAS

15 [kg/m²] ... (n)

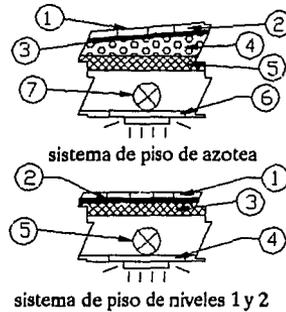


Figura 4.30. Detalles de los sistemas de piso del edificio de oficinas de las figuras 4.26 a 4.28.

● CARGA VIVA

RCDF-93 [ref. 3].

NIVEL	[kg/m ²]	
Nivel 3 (Azotea)	CV _{sis} = 70	... (o)
Nivel 1 y 2	CV _{sis} = 180	... (p)
Escaleras	CV _{sis} = 150	... (q)

II.- MASA DEL SISTEMA.

Empleando el criterio de discretización de masas indicado en el inciso 3.3.1.6. del tema III, se tiene de (a) hasta (q) y las figuras que se indican:

NIVEL 3 (AZOTEA) (figura 4.28)

$$W_{\text{losa}} = (10m)(12m)(610 + 70)\text{kg/m}^2 = 81600 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{trabes}} = 3T1 + 4T3 + 2T4 = (3)(720\text{kg/m})(10m) + 4(420\text{kg/m})(6m) + 2(480\text{kg/m})(10m) = 41280 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{col}} = 6(4m)(960\text{kg/m})/2 = 11520 \text{ [kg] (mitades)}$$

$$W_{\text{pared}} = (10m + 10m + 12m + 12m)(288 + 384)\text{kg/m} = 29568 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{vent}} \approx (20m + 24m)(4m)(15\text{kg/m}^2)/2 = 1320 \text{ [kg] (mitades)}$$

$$W_{N3} = 81600 + 41280 + 11520 + 29568 + 1320 = 165288 \text{ [kg]} = 165.288 \text{ [ton]}$$

$$m_3 = W/g = 165.288 \text{ [ton]} / 980.665 \text{ [cm/s}^2\text{]} = 0.16855 \text{ [t-s}^2\text{/cm]} \quad \dots (u)$$

NIVEL 2 (figura 4.27)

$$W_{\text{losa}} = [9m(10m) + 7m(3m)](450 + 180)\text{kg/m}^2 = 69930 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{losa}} = 6m(6m)(610 + 70)\text{kg/m}^2 = 24480 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{so}} = 3m(3m)(300 + 150)\text{kg/m}^2 = 4050 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{trabes}} = 3T1 + 2T4 + 5T2 + 5T3 = (3)(720\text{kg/m})(10m) + 2(480\text{kg/m})(10m) + (3m + 4(6m))(300\text{kg/m}) + 5(6m)(420\text{kg/m}) = 51900 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{col}} = 6(4 + 4m)(960\text{kg/m})/2 + 2(420\text{kg/m})(4m)/2 = 24720 \text{ [kg] (mitades)}$$

$$w_{pretil} = (44m)(288 + 384)kg/m = 29568 [kg]$$

$$w_{vent} \approx (1/2)EN3 + (1/2)EN2 = (20m + 18m)(4m + 4m)(15kg/m^2)/2 + 6m(4m)(15kg/m^2)/2 = 2460 [kg]$$

$$w_{muro} = (4m)(6m)(280kg/m^2)/2 + 4m(6m)(325kg/m^2)/2 = 7260 [kg]$$

$$W_{N2} = 69930 + 24480 + 4050 + 51900 + 24720 + 29568 + 2460 + 7260 = 214368 [kg] = 214.368 [ton]$$

$$m_2 = W/g = 214.368/980.665 = 0.2186 [t \cdot s^2/cm] \quad \dots(v)$$

NIVEL 1 (figura 4.26)

$$w_{loea} = [15m(10m) + 7m(3m) + 6m(6m)](450 + 180)kg/m^2 = 130410 [kg]$$

$$w_{esc} = 4050 [kg] \text{ (igual a nivel 2)}$$

$$w_{trabes} = 4T1 + 3T4 + 7T3 + 5T2 = (4)(720kg/m)(10m) + 3(480kg/m)(10m) + (7)(6m)(420kg/m) + [3m + 4(6m)](300kg/m) = 68940 [kg]$$

$$w_{col} = 6(5 + 4)m(960kg/m)/2 + 2(420kg/m)(5m + 4m)/2 + 2(960kg/m)(5m)/2 = 34500 [kg] \text{ (mitades)}$$

$$w_{pretil} = (18 + 18 + 20)m(288 + 384)kg/m = 37632 [kg]$$

$$w_{vent} \approx (12m + 12m + 10m)(5m + 4m)(15kg/m^2)/2 + (12m + 10m)(5m)(15kg/m^2)/2 + 10m(4m)(15kg/m^2)/2 = 3420 [kg]$$

$$w_{muro} = (5m + 4m)(6m)(280kg/m^2)/2 + (5m + 4m)(6m)(325kg/m^2)/2 = 16335 [kg]$$

$$W_{N1} = 130410 + 4050 + 68940 + 34500 + 37632 + 3420 + 16335 = 295287 [kg] = 295.287 [ton]$$

$$m_1 = W/g = 295.287/980.665 = 0.301109 [t \cdot s^2/cm] \quad \dots(w)$$

III.- RIGIDEZ DE ENTREPISO DEL SISTEMA.

Separando el edificio en marcos planos y empleando los métodos matriciales presentados en el inciso 3.3 del tema III, e inciso 4.2 del presente tema, se calculó la rigidez de entrepiso mostrada en las siguientes figuras. Los cálculos se efectuaron considerando 3 G.L. por nodo.

● DIRECCION X

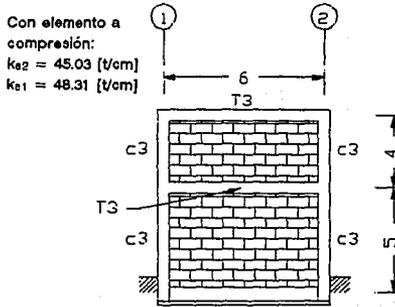


Figura 4.31. Marco C.

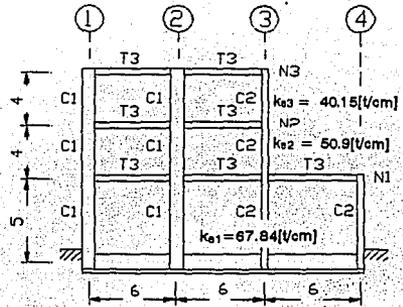


Figura 4.32. Marcos A y B.

● DIRECCION Y

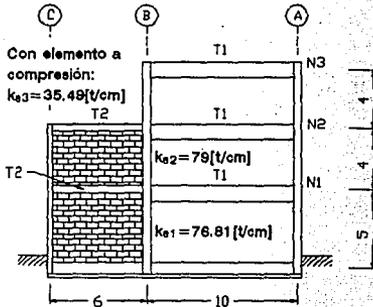


Figura 4.33. Marco 1.

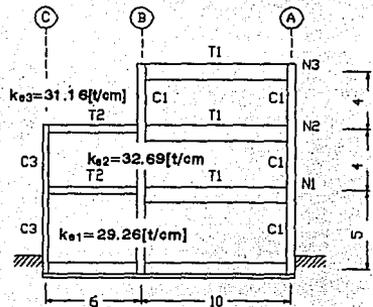


Figura 4.34. Marco 2.

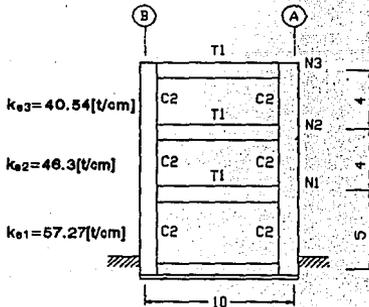


Figura 4.35. Marco 3.

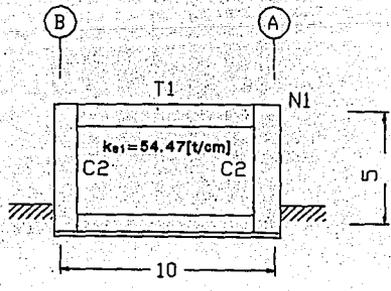


Figura 4.36. Marco 4.

En las figuras 4.37, 4.38 y 4.39 se muestran las rigideces de entrepiso de los marcos y muro-marcos por planta o nivel.

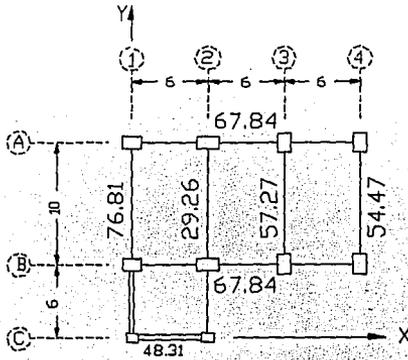


Figura 4.37. Rigideces del entrepiso 1 en [t/cm].

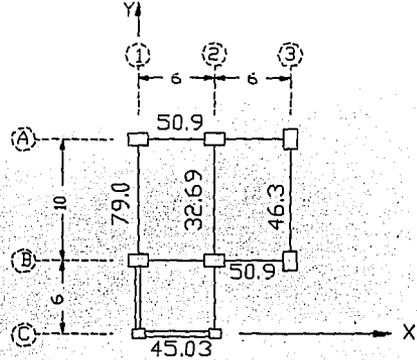


Figura 4.38. Rigideces del entrepiso 2 en [t/cm].

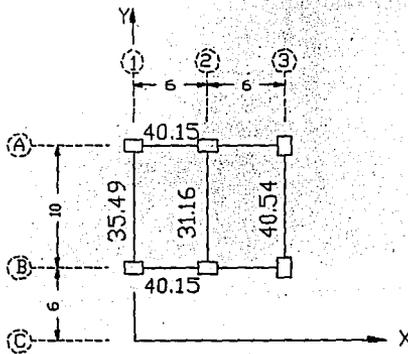


Figura 4.39. Rigideces del entrepiso 3 en [t/cm].

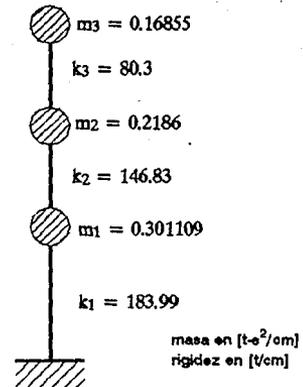


Figura 4.40. Sistema oscilatorio simplemente acoplado para análisis en dirección X.

IV - ANALISIS DINAMICO MODAL ESPECTRAL.

El edificio puede modelarse para efectos dinámicos en cada dirección de análisis mediante el sistema oscilatorio simplemente acoplado de 3 G.L. mostrado en la figuras 4.40 y 4.41, en donde

las rigideces están dadas por la suma de rigideces de entrapiso de todos los marcos paralelos a la dirección considerada.

•DIRECCION X

$$k_{1x} = \Sigma k_{e1} = 67.84(2) + 48.31 = 183.99 \text{ [t/cm]}$$

$$k_{2x} = \Sigma k_{e2} = 50.9(2) + 45.03 = 146.83 \text{ [t/cm]}$$

$$k_{3x} = \Sigma k_{e3} = 40.15(2) = 80.3 \text{ [t/cm]}$$

Empleando el Método de Newmark y Holzer estudiado en 3.3.2. del tema III, se obtiene (con $T = 2\pi/w$)

	modos		
niv	1	2	3
N1	1.0	1.0	1.0
N2	1.9403	0.71883	-1.26055
N3	2.854	-1.25932	0.48551
$(w_j)^2$	152.524	748.148	1713.354
T_j	0.509	0.2297	0.1518

Con referencia a la figura 4.22, para la zona III (zonal del lago) y estructura Grupo B:

$$c = 0.4 \quad T_a = 0.6 \text{ [seg]} \quad T_b = 3.9 \text{ [seg]} \quad r = 1$$

Según la tabla 4.4., la configuración de la estructura es irregular y como todos los períodos naturales resultan menores que T_a , se tiene de las ecuaciones (4.31), (4.38) y (4.39), para cada forma modal ($g = 980.665 \text{ [cm/s}^2\text{]}$)

modo	T	Q'	a	Aj	(Aj/Q')*
	[s]			[cm/s ²]	[cm/s ²]
1	0.509	1.479	0.3545	347.646	235.055
2	0.2297	1.1063	0.2149	210.745	190.495
3	0.1518	1.0024	0.1759	172.499	172.086

* aceleraciones reducidas o elastoplásticas

Coefficientes de participación (c_i)

de la ecuación (4.47)

$$c_1 = [(0.301109)(1.0) + (0.2186)(1.9403) + (0.16855)(2.854)] / [(0.301109)(1)^2 + (0.2186)(1.9403)^2 + (0.16855)(2.854)^2] = 0.4831$$

$$c_2 = \{[(0.301109)(1.0) + (0.2186)(0.71883) + (0.16855)(-1.25932)] / [(0.301109)(1)^2 + (0.2186)(0.71883)^2 + (0.16855)(-1.25932)^2]\} = 0.361$$

$$c_3 = \{[(0.301109)(1.0) + (0.2186)(-1.26055) + (0.16855)(0.48551)] / [(0.301109)(1)^2 + (0.2186)(-1.26055)^2 + (0.16855)(0.48551)^2]\} = 0.156$$

Coefficientes y porcentajes de influencia

de las ecuaciones (4.43) y (4.45) se calcula

modo	$(w_j)^2$ [r^2/s^2]	c_j	I_j	I_{Fj} [%]
1	152.524	0.4831	0.003167	84.66
2	748.148	0.361	0.000483	12.91
3	1713.354	0.156	0.000091	2.43
			$\Sigma = 0.003741$	100

Puede observarse que la influencia del 3er. modo es despreciable

Desplazamientos respecto a la base

De la ecuación (4.42) con las aceleraciones reducidas se calculan los desplazamientos respecto a la base como

$$u_{11} = A_1 I_1 z_{11} = 347.646(0.003167)(1) = 1.101$$

$$u_{21} = A_1 I_1 z_{21} = 347.646(0.003167)(1.9403) = 2.136, \text{ etc.}$$

de tal forma que la matriz de desplazamientos respecto a la base es

niv	modos			QX_{serr} [cm]
	1	2	3	
N1	0.7444	0.09201	0.01566	1.500
N2	1.4444	0.06614	-0.01974	2.892
N3	2.1246	-0.11587	0.00760	4.256

donde los desplazamientos respecto a la base máximos probables X_{serr} son según la ecuación (4.49) (los períodos difieren en más del 10% entre sí)

$$X_{serr} = [\Sigma |u_{ij}|^2]^{0.5}$$

Desplazamientos de entrepiso

La matriz de desplazamientos relativos es para cada modo, según la ecuación (3.99)

niv	modos			h _i [cm]	QΔ _{eisrs} [cm]	Δ _{per} = 0.006h _i [cm]
	1	2	3			
EN1	0.7444	0.09201	0.01566	400	1.500	2.4
EN2	0.7000	-0.02587	-0.0354	400	1.403	2.4
EN3	0.6802	-0.18201	0.02734	500	1.409	3.0

los desplazamientos de entrepiso máximos probables se calcularon con la ecuación (4.49) como $\Delta_{eisrs} = [\sum_j \Delta_{eij}^2]^{0.5}$, y cumplen con ser menores que los máximos permitidos por el RCDF-93.

Fuerzas cortantes en los entrepisos

De la ecuación (3.98) $V_{ij} = K_{eij}\Delta_{eij}$, por lo que la matriz de fuerzas cortantes es

niv	modos			V _{isrs} [ton]
	1	2	3	
EN1	136.96	16.93	2.88	138.03
EN2	102.78	-3.799	-5.20	102.98
EN3	54.62	-14.62	2.20	56.59

donde nuevamente la ecuación (4.49) da las fuerzas cortantes máximas probables como $V_{isrs} = [\sum_j V_{ij}^2]^{0.5}$

Fuerzas sísmicas en los pisos

La matriz de fuerzas sísmicas se forma para cada modo a partir de las fuerzas cortantes al idealizar el edificio como una viga en cantilever. Por tanto se tiene la ecuación:

$F_{ij} = V_{ij} - V_{i+1} \dots (4.55)$, a partir de la cual se calcula:

niv	modos			F _{isrs} [ton]
	1	2	3	
N1	34.18	20.73	8.08	40.78
N2	48.16	10.82	-7.40	49.91
N3	54.62	-14.62	2.20	56.59

donde según la ecuación (4.49) $F_{isrs} = [\sum_j F_{ij}^2]^{0.5}$

•DIRECCION Y

Análogamente se tiene para la otra dirección, ver figura 4.41

$$k_{1y} = 76.81 + 29.26 + 57.27 + 54.47 = 217.81 [t/cm]$$

$$k_{2y} = 79 + 32.69 + 46.3 = 157.99 [t/cm]$$

$$k_{3y} = 35.49 + 31.16 + 40.54 = 107.19 [t/cm]$$

niv	modos		
	1	2	3
N1	1.0	1.0	1.0
N2	2.0396	0.5717	-1.3781
N3	2.8318	-1.1649	0.6564
$(w_j)^2$	177.913	948.07	1971.106
T_j	0.471	0.204	0.142

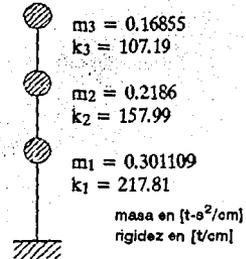


Figura 4.41. Sistema oscilatorio simplemente acoplado para análisis en dirección Y.

Nuevamente en todos los modos $T_j < T_a$ y de la ecuación (4.39), (4.38), (4.31) y (4.41)

modo	T	Q'	a	A _j	(A _j /Q')*
	[s]			[cm/s²]	[cm/s²]
1	0.471	1.428	0.3355	329.013	230.401
2	0.204	1.072	0.2020	198.094	184.790
3	0.142	0.989	0.1710	167.694	169.559

*aceleraciones reducidas o elásticas

Coefficientes de participación (c_j) de la ecuación (4.47)

$$c_1 = [(0.301109)(1.0) + (0.2186)(2.0396) + (0.16855)(2.8318)] / [(0.301109)(1)^2 + (0.2186)(2.0396)^2 + (0.16855)(2.8318)^2] = 0.4778$$

$$c_2 = [(0.301109)(1.0) + (0.2186)(0.5717) + (0.16855)(-1.1649)] / [(0.301109)(1)^2 + (0.2186)(0.5717)^2 + (0.16855)(-1.1649)^2] = 0.3821$$

$$c_3 = [(0.301109)(1.0) + (0.2186)(-1.3781) + (0.16855)(0.6564)] / [(0.301109)(1)^2 + (0.2186)(-1.3781)^2 + (0.16855)(0.6564)^2] = 0.1401$$

Coefficientes y porcentajes de influencia de las ecuaciones (4.43) y (4.45) se calcula

modo	$(w_j)^2$	c _j	I _j	I _{Fj}
	[t²/s²]			[%]
1	177.913	0.4778	0.002686	85
2	948.070	0.3821	0.000403	12.75
3	1971.106	0.1401	0.000071	2.25
			Σ = 0.00316	100

Desplazamientos respecto a la base
 De la ecuación (4.42) con las aceleraciones reducidas

niv	modos			QX _{srs} [cm]
	1	2	3	
N1	0.6189	0.0745	0.01204	1.247
N2	1.2622	0.0426	-0.01659	2.526
N3	1.7525	-0.0868	0.0079	3.509

con $X_{srs} = [\sum_j U_{ij}^2]^{0.5}$

Desplazamientos de entrepiso
 La matriz de desplazamientos relativos es para cada modo, según la ecuación (3.99)

niv	modos			h _i [cm]	QΔ _{eisrs} [cm]	Δ _{per} = 0.006h _i [cm]
	1	2	3			
EN1	0.6189	0.0745	0.01204	400	1.247	2.4
EN2	0.6433	-0.0319	-0.02863	400	1.2895	2.4
EN3	0.4903	-0.1294	0.02449	500	1.0154	3.0

con $\Delta_{eisrs} = [\sum_j \Delta_{eij}^2]^{0.5}$

Fuerzas cortantes en los entrepisos
 De la ecuación (3.98) $V_{ij} = K_{eij}\Delta_{eij}$

niv	modos			V _{srs} [ton]
	1	2	3	
EN1	134.80	16.23	2.62	135.80
EN2	101.63	-5.04	-4.52	101.9
EN3	52.56	-13.87	2.63	54.4

con $V_{srs} = [\sum_j V_{ij}^2]^{0.5}$

Fuerzas sísmicas en los pisos
 De la ecuación (4.55) se tiene $F_{ij} = V_{ij} - V_{ij+1}$

niv	modos			F _{srs} [ton]
	1	2	3	
N1	33.17	21.27	7.14	40.05
N2	49.07	8.83	-7.15	50.37
N3	52.56	-13.87	2.63	54.42

con $F_{srs} = [\sum_j F_{ij}^2]^{0.5}$

NOTA.- Como se estudiará en los incisos posteriores deben ser adicionadas las fuerzas generadas por efectos de torsión de la estructura.

II.- Determinar las fuerzas sísmicas en los pisos y los desplazamientos de entrepiso, del edificio habitacional de tres niveles cuya planta estructural tipo se muestra en la figura 4.42.

La estructuración del inmueble es a base de muros de carga de mampostería de 13 [cm] de espesor constituida por piezas de tabique con huecos verticales. La mampostería está reforzada interiormente y cumple con lo especificado en las Normas Técnicas para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería^[ref. 10] del RCDP-93, de tal manera que su resistencia a la compresión es de $f_m^c = 47$ [kg/cm²]. Las alturas en todos los entrepisos son de 2.50 [m], medidas a ejes.

Los sistemas de piso están constituidos por losas macizas de concreto reforzado de 10 [cm] de espesor con un peso de 360 [kg/m²] y de 400 [kg/m²], incluyendo firmes y acabados, para niveles inferiores y azotea, respectivamente. Estas losas se apoyan sobre los muros mediante dalas de concreto de 15 x 20 [cm] de sección transversal. En todas las ventanas exteriores de los niveles 1 y 2, así como en todo el perímetro de la azotea existe un pretil con una altura de 90 [cm].

NOTAS:

- 1- Concreto $f_c = 200$ [kg/cm²]
en losas y dalas
- 2- Acotación en [m]

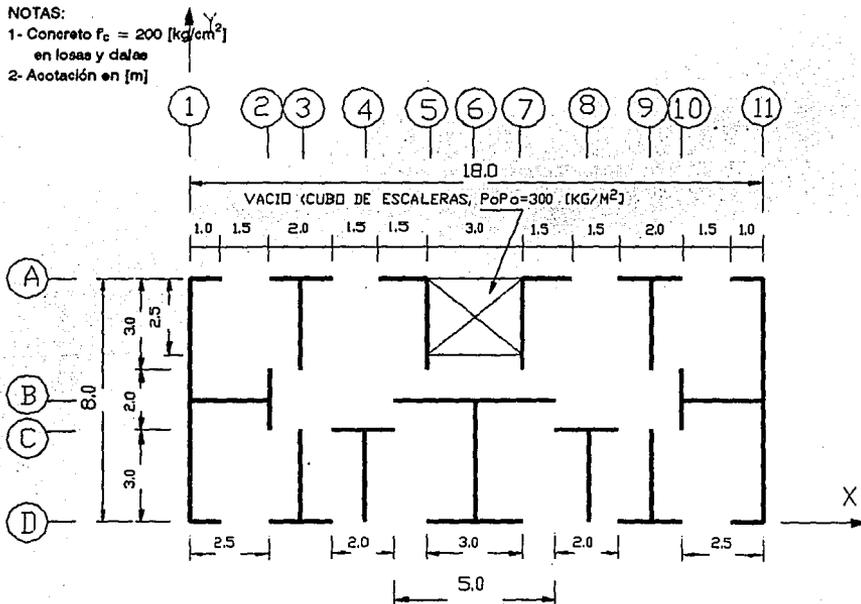


Figura 4.42. Planta estructural tipo de un edificio de vivienda familiar de tres niveles.

La edificación se encuentra desplantada en la zona I (zona de lomas) del Distrito Federal. Emplear el Método de Análisis Modal Espectral y el método de la columna ancha para el análisis sísmico y el cálculo de rigideces de entrepiso, respectivamente, usando un modelo de análisis simplemente acoplado.

El RCDF-93 en las normas técnicas mencionadas, indica estimar las siguientes propiedades para mampostería de piezas de barro

$$E_m = 600f'_m = 600(47) = 28200 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 282000 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(a)$$

$$G_m = 0.3E_m = 84600 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(b)$$

Para concreto tipo II las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, especifica estimar

$$E_c = 8000[f'_c]^{0.5} = 8000[200]^{0.5} = 113137 \text{ [kg/cm}^2\text{]} = 1131370 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad \dots(c)$$

I - EVALUACION DE CARGAS

● CARGAMUERTA

SISTEMAS DE PISO

NIVEL	CM [kg/m ²]	CV [kg/m ²] (sismo)	
1,2	360	90	
3 (azotea)	400	70	
escaleras	300	150	RCDF-93 Art. 199

PRETILES Y MUROS (acabado tabique aparente)

$$CM = (0.13m)(1200 \text{ kg/m}^3) = 156 \text{ [kg/m}^2\text{]}$$

II - MASA DEL SISTEMA

Empleando el criterio de discretización de masas indicado en el inciso 3.3.1.6. del tema III, se tiene, ver figura 4.42:

NIVEL 3 (AZOTEA)

$$W_{\text{azoa}} = [(18m)(8m) - 3(2.5)]m^2(400 + 70) \text{ kg/m}^2 = 64155 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{esc}} = (3m)(2.5m)(300 + 150) \text{ kg/m}^2 = 3375 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{muro}} = (9 + 10 + 4 + 9 + 16 + 4 + 12 + 6 + 6 + 4)(2.5m)(156 \text{ kg/m}^2)/2 = 15600 \text{ [kg] (mitades)}$$

$$W_{\text{pretel}} = [(18)(2) + (8)(2)]m(0.9m)(156) \text{ kg/m}^2 = 7301 \text{ [kg]}$$

$$W_{N3} = 64155 + 3375 + 15600 + 7301 = 90431 \text{ [kg]} = 90.431 \text{ [ton]}$$

$$m_3 = W/g = 90.431 \text{ [ton]} / 980.665 \text{ [cm/s}^2\text{]} = 0.092214 \text{ [t-s}^2\text{/cm]} \quad \dots (d)$$

NIVEL 1 Y 2

$$W_{\text{losa}} = [(18m)(8m) - 3(2.5)]m^2(360 + 90)kg/m^2 = 61425 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{esc}} = (3m)(2.5m)(300 + 150)kg/m^2 = 3375 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{muro}} = (9 + 10 + 4 + 9 + 16 + 4 + 12 + 6 + 6 + 4)(2.5m)(156kg/m^2) = 31200 \text{ [kg]}$$

$$W_{\text{pretil}} = [9m + 9m](0.9m)(156)kg/m^2 = 2527 \text{ [kg]}$$

$$W_{N1} = W_{N2} = 61425 + 3375 + 31200 + 2527 = 98527 \text{ [kg]} = 98.527 \text{ [ton]}$$

$$m_1 = m_2 = W/g = 98.527 / 980.665 = 0.10047 \text{ [t-s}^2\text{/cm]} \quad \dots (e)$$

III.- RIGIDEZ DE ENTREPISO DEL SISTEMA

Separando el inmueble en muros planos y analizándolo con el método de la columna ancha estudiado en el inciso 4.2.3. del presente tema, se tiene:

MURO A, ver figura 4.43

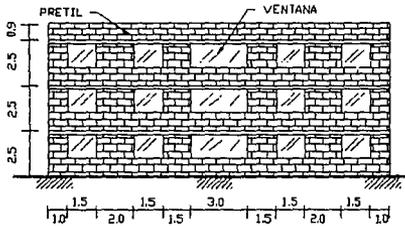


Figura 4.43. Muro A.

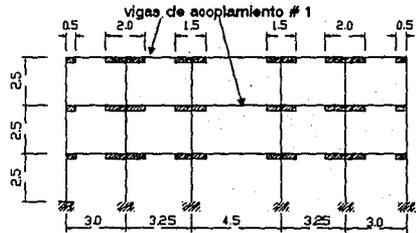


Figura 4.44. Marco con columna anchas equivalente al Muro A

Las vigas de acoplamiento deben tomar en cuenta los efectos rigidizantes de los pretiles y de parte del sistema de piso. En la referencia 20 se recomienda tomar un ancho de 4 veces el espesor de la losa a cada lado de la dala de coronamiento.

Para los marcos de ejes A y D la viga de acoplamiento en la zona de ventanas es la mostrada en la figura 4.45.

Las propiedades de las vigas de acoplamiento se calculan empleando la sección transformada. La relación de módulos es de (a) y (c)

$$n = E_m/E_c = 0.25 \quad \dots (f)$$

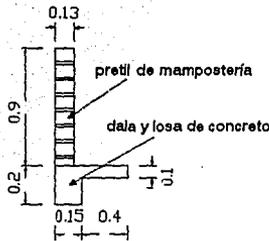


Figura 4.45. Viga de acoplamiento # 1.

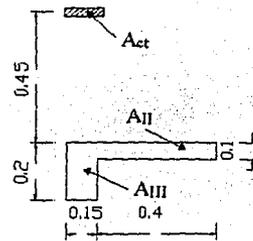


Figura 4.46. Propiedades de la viga de acoplamiento # 1.

Como se observa en la figura 4.46, se transforma el área del pretil de mampostería a concreto y se concentra en su centroide. El área del pretil vale

$$A_p = 0.13(0.9) = 0.117 \text{ [m}^2\text{]}$$

el área transformada a concreto es

$$A_{ct} = (0.117)n = 0.02925 \text{ [m}^2\text{]}$$

con referencia a la figura mencionada

$$A_{II} = 0.1(0.4) = 0.04 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_{III} = 0.15(0.2) = 0.03 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= [0.02925(0.65) + 0.04(0.15) + 0.03(0.1)] / (0.02925 + 0.04 + 0.03) = \\ &= 0.282 \text{ [m]} \end{aligned}$$

momento de inercia (teorema de ejes paralelos)

$$\begin{aligned} I &= (0.2^3)(0.15)/12 + 0.03(0.282 - 0.1)^2 + (0.1^3)(0.4)/12 + (0.04)(0.282 - 0.15)^2 \\ &\quad + 0.02925(0.65 - 0.282)^2 = 0.0058 \text{ [m}^4\text{]} \end{aligned}$$

$$\text{área axial } A = 0.02925 + 0.03 + 0.04 = 0.09925 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$E = 1131370 \text{ [t/m}^2\text{]}$$

Procediendo al análisis del marco con columnas anchas mostrado en la figura 4.44 en forma análoga a como se hizo en el citado inciso 4.2.3., se calculan las siguientes rigideces de entrepiso

$$k_{e1} = 102.07 \text{ [t/cm]} \quad k_{e2} = 96.5 \text{ [t/cm]} \quad k_{e3} = 84.18 \text{ [t/cm]}$$

MURO D, ver figura 4.47.

Este muro se analiza mediante el marco equivalente con columnas anchas de la figura 4.48.

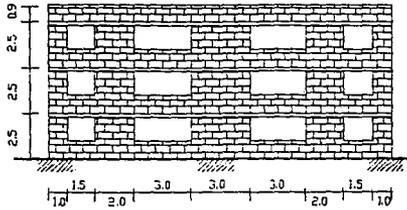


Figura 4.47. Muro D.

Las rigideces de entrepiso resultan de

$$k_{e1} = 105.12 [t/cm] \quad k_{e2} = 97.78 [t/cm] \quad k_{e3} = 85.69 [t/cm]$$

MURO B, ver figura 4.49.

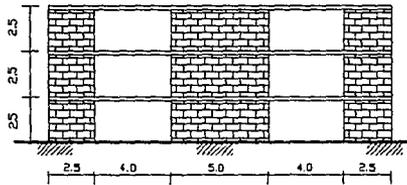


Figura 4.49. Muro B.

El marco equivalente de la figura 4.50 representa con columnas anchas a este muro. La viga de acoplamiento empleada es la misma para todos los marcos interiores y se puede observar en la figura 4.51, de donde se calcula

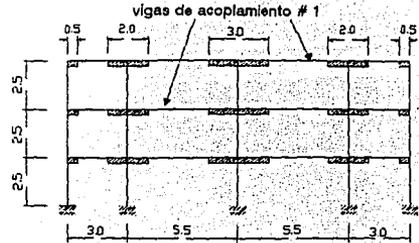


Figura 4.48. Marco con columnas anchas equivalente al Muro D.

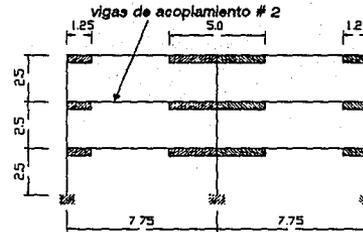


Figura 4.50. Marco con columnas anchas equivalente al Muro B.

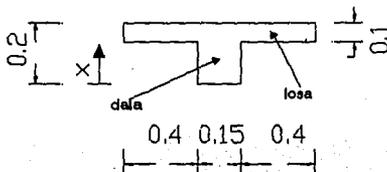


Figura 4.51. Viga de acoplamiento # 2.

$$\text{Area} = A = 0.95(0.1) + 0.1(0.15) = 0.11 [m^2]$$

centroide y momento de inercia

$$\bar{x} = [0.95(0.1)(0.15) + (0.15)(0.1)(0.05)] / 0.11 = 0.136 [m]$$

$$I = (0.1)^3(0.95)/12 + 0.95(0.1)(0.15 - 0.136)^2 + (0.1)^3(0.15)/12 + 0.15(0.1)(0.136 - 0.05)^2 = 2.21(10^{-4}) [m^4]$$

$$E = 1131370 \text{ [t/m}^2\text{]}$$

Las rigideces de entrepiso obtenidas de esta forma son

$$k_{e1} = 136.71 \text{ [t/cm]} \quad k_{e2} = 84.1 \text{ [t/cm]} \quad k_{e3} = 48.71 \text{ [t/cm]}$$

MURO C, ver figura 4.52.

Del análisis del muro representado por el marco de columnas anchas se obtiene

$$k_{e1} = 52 \text{ [t/cm]} \\ k_{e2} = 17.5 \text{ [t/cm]} \\ k_{e3} = 8.59 \text{ [t/cm]}$$

MURO 3 Y 9, ver figura 4.53.

Del análisis del marco equivalente se obtiene

$$k_{e1} = 110.57 \text{ [t/cm]} \quad k_{e2} = 55.31 \text{ [t/cm]} \quad k_{e3} = 31.85 \text{ [t/cm]}$$

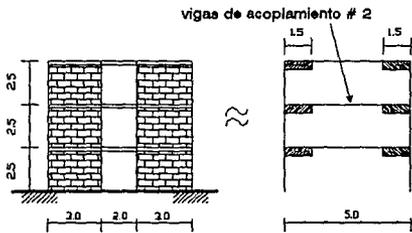


Figura 4.53 Muros 3 y 9 y marco equivalente con columnas anchas.

MUROS 1 Y 11, ver figura 4.54.

Para este muro de longitud $L = 8 \text{ [m]}$ se obtiene de un análisis con columnas anchas

$$k_{e1} = 217.63 \text{ [t/cm]} \quad k_{e2} = 164.06 \text{ [t/cm]} \quad k_{e3} = 116.41 \text{ [t/cm]}$$

MUROS 2 Y 10, observar la figura 4.54.

Con $L = 2 \text{ [m]}$ se calculan las siguientes rigideces de entrepiso

$$k_{e1} = 26.1 \text{ [t/cm]} \quad k_{e2} = 7.47 \text{ [t/cm]} \quad k_{e3} = 3.41 \text{ [t/cm]}$$

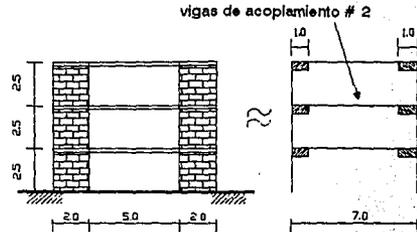


Figura 4.52. Muro C y marco equivalente con columnas anchas.

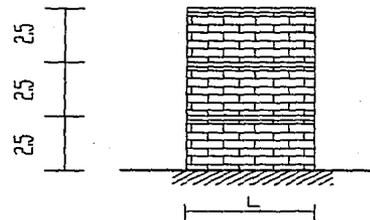


Figura 4.54 Muros 1, 11, 2, 10, 4, 5, 7, 8, y 6.

MUROS 4, 5, 7 y 8, ver figura 4.54.

Para este muro de longitud $L = 3 \text{ [m]}$ se calcula

$$k_{e1} = 56.56 \text{ [t/cm]} \quad k_{e2} = 21.69 \text{ [t/cm]} \quad k_{e3} = 10.70 \text{ [t/cm]}$$

MURO 6, observar la figura 4.54

Con $L = 4 \text{ [m]}$, del análisis con columnas anchas se tiene

$$k_{e1} = 90 \text{ [t/cm]} \quad k_{e2} = 43.29 \text{ [t/cm]} \quad k_{e3} = 23.21 \text{ [t/cm]}$$

En la figura 4.55 se muestra un resumen de los valores de las rigideces de entrespiso obtenidas para cada sistema de muros.

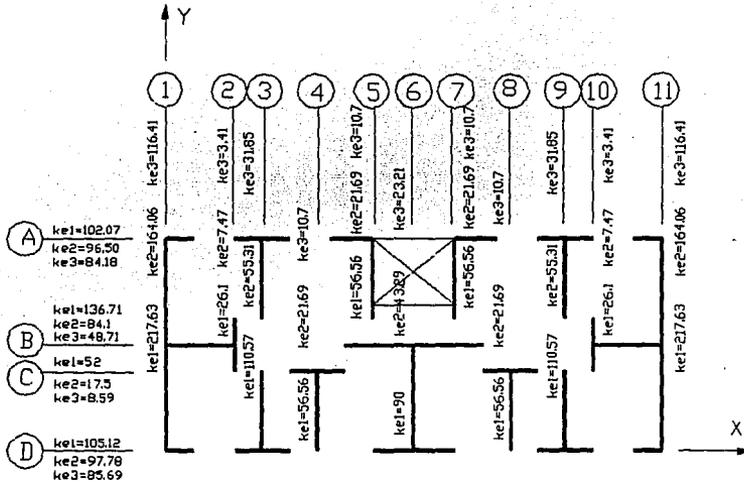


Figura 4.55. Resumen de rigideces de entrespiso de cada sistema de muros por nivel en el edificio de mampostería de la figura 4.42.

IV- ANALISIS MODAL ESPECTRAL

El edificio puede modelarse para efectos dinámicos en cada dirección de análisis, mediante el sistema oscilatorio simplemente acoplado de 3 G.L., mostrado en las figuras 200 y 201, en donde las rigideces están dadas por la suma de rigideces de entrespiso de cada sistema de muros en la dirección considerada.

• DIRECCION X, con referencia a la figura 4.56, se tiene

$$k_{1x} = \Sigma k_{e1} = 395.90 \text{ [t/cm]}$$

$$k_{2x} = \Sigma k_{e2} = 295.88 \text{ [t/cm]}$$

$$k_{3x} = \Sigma k_{e3} = 227.17 \text{ [t/cm]}$$

Empleando el Método de Newmark y Holzer estudiado en 3.3.2. del tema III, se obtiene (con $T = 2\pi/w$)

	modos		
niv	1	2	3
N1	1.0	1.0	1.0
N2	2.10654	0.82708	-0.86182
N3	2.91259	-1.02582	0.30504
$(w_j)^2$	681.769	4449.737	9423.471
T_j	0.2406	0.0942	0.0647

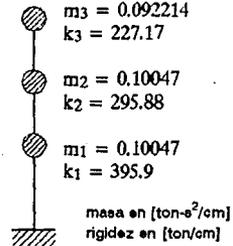


Figura 4.56. Sistema oscilatorio simplemente acoplado para análisis en dirección X.

Con referencia a la figura 4.22, para la zona I (zonal de lomas) y estructura Grupo B:

$$c = 0.16 \quad T_a = 0.2 \text{ [seg]} \quad T_b = 0.6 \text{ [seg]} \quad r = 0.5$$

Según la tabla 4.3., como se trata de una estructura de mampostería de piezas huecas con refuerzo interior

$$Q = 1.5$$

De la tabla 4.4 la estructura es irregular pues no cumple con el punto 6 (el hueco para escaleras excede del 20 % de la dimensión corta del inmueble $2.5 \text{ [m]} > \{0.2(8) = 1.6 \text{ [m]}\}$). Por tanto, de las ecuaciones (4.37), (4.38), (4.39) y (4.31) a (4.35), se tiene para cada forma modal ($g = 980.665 \text{ [cm/s}^2\text{]})$

modo	T	Q'	a	A _j	(A _j /Q')*
	[s]			[cm/s ²]	[cm/s ²]
1	0.2406	1.2	0.16	156.91	130.76
2	0.0942	0.9884	0.097	95.13	96.25
3	0.0647	0.9294	0.079	77.47	83.36

* aceleraciones reducidas o elastoplásticas

Coefficientes de participación (c_j)

de la ecuación (4.47)

$$c_1 = [(0.10047)(1.0) + (0.10047)(2.10654) + (0.092214)(2.91259)] / [(0.10047)(1)^2 + (0.10047)(2.10654)^2 + (0.092214)(2.91259)^2] = 0.4371$$

$$c_2 = [(0.10047)(1.0) + (0.10047)(0.82708) - (0.092214)(1.02582)] / [(0.10047)(1)^2 + (0.10047)(0.82708)^2 + (0.092214)(1.02582)^2] = 0.3342$$

$$c_3 = [(0.10047)(1.0) - (0.10047)(0.86182) + (0.092214)(0.30504)] / [(0.10047)(1)^2 + (0.10047)(0.86182)^2 + (0.092214)(0.31504)^2] = 0.2287$$

Coefficientes y porcentajes de influencia de las ecuaciones (4.43) y (4.45) se calcula

modo	$(w_j)^2$ [r^2/s^2]	c_j	I_j	$[F_j$ [%]
1	681.769	0.4371	0.000641	86.62
2	4449.737	0.3342	0.000075	10.14
3	9423.471	0.2287	0.000024	3.24
			$\Sigma = 0.00074$	100

Desplazamientos respecto a la base

De la ecuación (4.42) con las aceleraciones reducidas se calculan los desplazamientos respecto a la base como

$$u_{11} = A_1 I_1 z_{11}; u_{21} = A_1 I_2 z_{21}; \text{etc.}$$

de tal forma que la matriz de desplazamientos respecto a la base es

niv	modos			$QX_{srrs}[\text{cm}]$
	1	2	3	
N1	0.0838	0.0072	0.002	0.1262
N2	0.1766	0.006	-0.0017	0.2651
N3	0.2441	-0.0074	0.0006	0.3663

los desplazamientos respecto a la base máximos probables X_{srrs} son según la ecuación (4.49) (los periodos difieren en más del 10% entre sí)

$$X_{srrs} = [\Sigma_i u_{ij}^2]^{0.5}$$

Desplazamientos de entrepiso

La matriz de desplazamientos relativos es para cada modo, según la ecuación (3.99)

niv	modos			$h_i[\text{cm}]$	$Q\Delta_{eiarss}[\text{cm}]$	$\Delta_{per} = 0.006h_i[\text{cm}]$
	1	2	3			
EN1	0.0838	0.0072	0.0020	250	0.1262	1.5
EN2	0.0928	-0.0012	-0.0037	250	0.1393	1.5
EN3	0.0675	-0.0134	0.0023	250	0.1033	1.5

los desplazamientos de entrepiso máximos probables se calcularon con la ecuación (4.49) como $\Delta_{eirsrs} = [\sum_j \Delta_{eij}]^{2 \cdot 0.5}$, y cumplen con ser menores que los máximos permitidos por el RCDF-93.

Fuerzas cortantes en los entrepisos

De la ecuación (3.98) $V_{ij} = K_{ei} \Delta_{eij}$, por lo que la matriz de fuerzas cortantes es

	modos			
nív	1	2	3	V_{srs} [ton]
EN1	33.18	2.85	0.79	33.31
EN2	27.46	-0.36	-1.09	27.48
EN3	15.33	-3.04	0.52	15.64

donde nuevamente la ecuación (4.49) da las fuerzas cortantes máximas probables como $V_{srs} = [\sum_j V_{ij}]^{2 \cdot 0.5}$

Fuerzas sísmicas en los pisos

La matriz de fuerzas sísmicas se forma para cada modo a partir de la ecuación (4.55)

	modos			
nív	1	2	3	F_{srs} [ton]
N1	5.72	3.21	1.88	6.82
N2	12.13	2.68	-1.61	12.53
N3	15.33	-3.04	0.52	15.64

donde según la ecuación (4.49) $F_{srs} = [\sum_j F_{ij}]^{2 \cdot 0.5}$

● DIRECCION Y

Análogamente para esta dirección se tiene de la figura 4.57

Método Newmark-Holzer

$$k_{1y} = \Sigma k_{e1} = 1024.84 \text{ [t/cm]}$$

$$k_{2y} = \Sigma k_{e2} = 583.73 \text{ [t/cm]}$$

$$k_{3y} = \Sigma k_{e3} = 369.35 \text{ [t/cm]}$$

	modos		
nív	1	2	3
N1	1.0	1.0	1.0
N2	2.50835	1.30979	-0.62893
N3	3.91172	-1.19362	0.16087
$(w_j)^2$	1436.963	8400.556	19664.503
T_j	0.1658	0.0686	0.0448

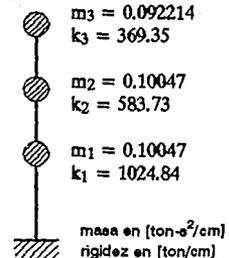


Figura 4.57. Sistema oscilatorio simplemente acoplado para análisis en dirección Y.

Todos los períodos son menores que $T_a = 0.2$ [seg]; $c = 0.16$; $Q = 1.5$ (muros de mampostería hueca). De las ecuaciones (4.38), (4.39) y (4.31) a (4.35) con $g = 980.665$ [cm/s²]

modo	T [s]	Q'	a	A _j [cm/s ²]	(A _j /Q')* [cm/s ²]
1	0.1658	1.1316	0.13948	136.78	120.88
2	0.0686	0.9372	0.08116	79.59	84.92
3	0.0448	0.8896	0.06688	65.59	73.73

* aceleraciones reducidas o elásticas

Coefficientes de participación (c_j)
de la ecuación (4.47):

$$c_1 = [(0.10047)(1.0) + (0.10047)(2.50835) + (0.092214)(3.91172)] / [(0.10047)(1)^2 + (0.10047)(2.50835)^2 + (0.092214)(3.91172)^2] = 0.3327$$

$$c_2 = [(0.10047)(1.0) + (0.10047)(1.30979) - (0.092214)(1.19362)] / [(0.10047)(1)^2 + (0.10047)(1.30979)^2 + (0.092214)(1.19362)^2] = 0.3018$$

$$c_3 = [(0.10047)(1.0) - (0.10047)(0.62893) + (0.092214)(0.16087)] / [(0.10047)(1)^2 + (0.10047)(0.62893)^2 + (0.092214)(0.16087)^2] = 0.3655$$

Coefficientes y porcentajes de influencia
de las ecuaciones (4.43) y (4.45) se calcula

modo	(w _j) ² [r ² /s ²]	c _j	I _j	I _{Fj} [%]
1	1436.963	0.3327	0.000232	80.84
2	8400.556	0.3018	0.000036	12.54
3	19664.503	0.3655	0.000019	6.62
			Σ = 0.000287	100

Desplazamientos respecto a la base

De la ecuación (4.42) con las aceleraciones reducidas se calculan los desplazamientos respecto a la base

niv	modos			QX _{grs} [cm]
	1	2	3	
N1	0.028044	0.003057	0.001400	0.042
N2	0.070345	0.004004	-0.000881	0.106
N3	0.109701	-0.003649	0.000225	0.165

con $X_{\text{errts}} = [\sum_i u_i]^2^{0.5}$

Desplazamientos de entrepiso

La matriz de desplazamientos relativos es para cada modo, según la ecuación (3.99)

niv	modos			h _i [cm]	QΔ _{eisrzs} [cm]	Δ _{per} = 0.006h _i [cm]
	1	2	3			
EN1	0.028044	0.003057	0.001400	250	0.042	1.5
EN2	0.042301	0.000947	-0.002281	250	0.064	1.5
EN3	0.039356	-0.007653	0.001106	250	0.060	1.5

con $\Delta_{eierzs} = [\sum_i \Delta_{eij}]^2^{0.5}$

Fuerzas cortantes en los entrepisos

De la ecuación (3.98) $V_{ij} = K_e \Delta_{eij}$, por lo que la matriz de fuerzas cortantes es

niv	modos			V _{rzs} [ton]
	1	2	3	
EN1	28.74	3.13	1.44	28.95
EN2	24.69	0.55	-1.33	24.73
EN3	14.54	-2.83	0.41	14.82

con $V_{\text{errts}} = [\sum_i V_i]^2^{0.5}$

Fuerzas sísmicas en los pisos

La matriz de fuerzas sísmicas se forma para cada modo a partir de la ecuación (4.55)

niv	modos			F _{rzs} [ton]
	1	2	3	
N1	4.05	2.58	2.77	5.54
N2	10.15	3.38	-1.74	10.84
N3	14.54	-2.83	0.41	14.82

con $F_{\text{errts}} = [\sum_i F_i]^2^{0.5}$

NOTA.- Como se verá en los incisos posteriores falta superponer aun los efectos debidos a torsión.

4.3.6.3.- PROBLEMAS PROPUESTOS.

I.- El edificio de oficinas cuya planta estructural se muestra en la figura 4.58, está formado por sistemas de marcos y muro-marcos de concreto reforzado y mampostería, con los elementos estructurales cuyas dimensiones se muestran en la figura 4.59. Posee tres niveles con igual estructuración cuyos sistemas de piso tienen un peso por carga muerta de $650 \text{ [kg/m}^2\text{]}$ y $550 \text{ [kg/m}^2\text{]}$ para la azotea y pisos inferiores, respectivamente, y de $300 \text{ [kg/m}^2\text{]}$ en la zona de escaleras; tiene pretilas y faldones desligados de las columnas mediante holguras de 5 [cm], con alturas de 0.9 y 1 [m], respectivamente, éstos elementos existen en todo el perímetro de los tres niveles y tienen un peso de 400 [kg/m] , el peso de ventanería es de $15 \text{ [kg/m}^2\text{]}$ en fachadas. Las alturas de entrepiso (a ejes) son de 4.5, 3.75 y 4.25 [m] para los entrepisos 1, 2 y 3, respectivamente.

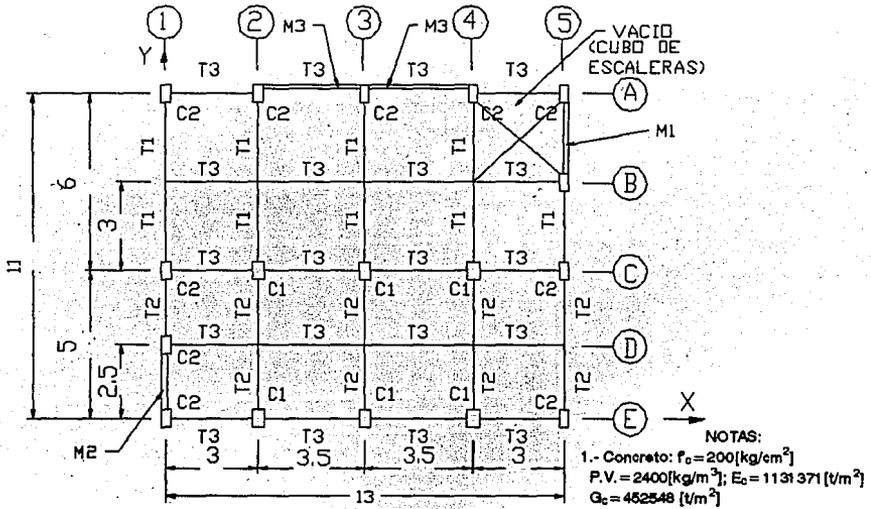


Figura 4.58. Planta estructural tipo de los niveles 1 a 3 de un edificio para oficinas.

El inmueble se localizará en la zona III (zona del lago) del Distrito Federal y debe desarrollar un factor de comportamiento sísmico de $Q = 2$ en ambas direcciones.

Obtener las fuerzas sísmicas en los pisos y los desplazamientos laterales de entrepiso sin considerar efectos de torsión, emplear el método de análisis modal espectral, el método de la columna ancha y un modelo de análisis como sistema simplemente acoplado. Usar el criterio de las respuestas máximas probables.

Solución: DIRECCION X: $\Delta_{e1eros} = 4.037$ [cm]; $\Delta_{e2eros} = 3.012$ [cm]; $\Delta_{e3eros} = 2.028$ [cm]; $F_{1eros} = 32.20$ [ton]; $F_{2eros} = 50.95$ [ton]; $F_{3eros} = 58.90$ [ton]; DIRECCION Y: $\Delta_{e1eros} = 0.733$ [cm]; $\Delta_{e2eros} = 0.858$ [cm]; $\Delta_{e3eros} = 0.855$ [cm]; $F_{1eros} = 24.26$ [ton]; $F_{2eros} = 42.84$ [ton]; $F_{3eros} = 56.09$ [ton].

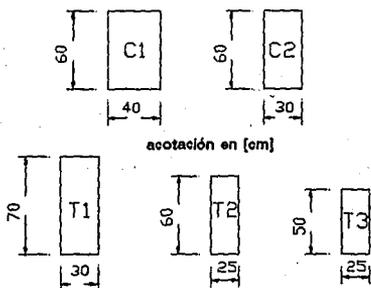


Figura 4.59. Dimensiones de los elementos estructurales del edificio de la figura 4.58.

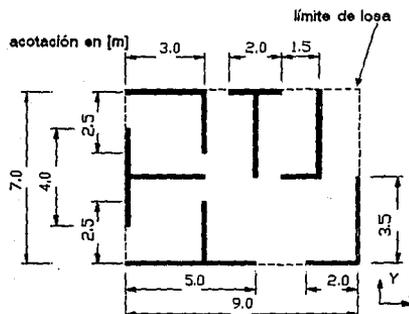


Figura 4.60. Planta estructural tipo de un edificio de vivienda familiar de 3 niveles.

II.- Determinar los desplazamientos de entrepiso y las fuerzas sísmicas en los pisos del edificio habitacional de tres niveles cuya planta estructural tipo se muestra en la figura 4.60.

El inmueble está estructurado a base de muros de carga de mampostería de 15 [cm] de espesor constituida por piezas de tabicón de concreto. La mampostería está confinada por dalas y castillos que cumplen con las especificaciones del RCDF-93 y sus Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería^[ref. 10], de tal forma que su resistencia a la compresión es de $f'_m = 19$ [kg/cm²] (considerar $E_m = 800f'_m$ para sismo). Las alturas de cada uno de los entrepisos son de 2.8 [m].

Los sistemas de piso están constituidos por losas macizas de concreto reforzado de 10 [cm] de espesor con un peso de 380 [kg/m²] y 420 [kg/m²], incluyendo firmes y acabados, para niveles inferiores y azotea, respectivamente. Las losas se apoyan sobre los muros mediante dalas de concreto de $f'_c = 200$ [kg/cm²] de 15 x 30 [cm] de sección transversal.

En todas las ventanas exteriores de los niveles 1 y 2, así como en todo el perímetro de la azotea, existen pretiles de 1 [m] de altura. El peso de muros y pretiles incluyendo acabados es de 325 [kg/m²].

La edificación se encuentra desplantada en la zona III (zona del lago) del Distrito Federal. Emplear el método de análisis modal espectral y el método de la columna ancha para efectuar el análisis sísmico y el cálculo de rigideces de entrepiso, respectivamente, usando un modelo de análisis simplemente acoplado sin considerar efectos de torsión. Usar el criterio de las respuestas máximas probables.

Solución: DIRECCION X: $\Delta_{e1erss} = 0.318$ [cm]; $\Delta_{e2erss} = 0.376$ [cm]; $\Delta_{e3erss} = 0.296$ [cm]; $F_{1erss} = 5.86$ [ton]; $F_{2erss} = 10.58$ [ton]; $F_{3erss} = 12.74$ [ton]; DIRECCION Y: $\Delta_{e1erss} = 0.261$ [cm]; $\Delta_{e2erss} = 0.466$ [cm]; $\Delta_{e3erss} = 0.502$ [cm]; $F_{1erss} = 5.50$ [ton]; $F_{2erss} = 10.02$ [ton]; $F_{3erss} = 13.35$ [ton].

4.3.7. - METODO ESTATICO DE ANALISIS SISMICO.

Mediante la observación del comportamiento de estructuras regulares diversas, se ha llegado a proponer una distribución de fuerzas laterales tal que su efecto en cada piso es aproximadamente equivalente a los efectos dinámicos de un sismo.

Las fuerzas equivalentes consideradas no tienen relación directa con el comportamiento ante un sismo, sino que el objetivo perseguido es obtener una estructura capaz de resistir un movimiento sísmico sin sufrir daños estructurales importantes^[ref. 1]. Es un diseño conservador para edificios regulares sin cambios bruscos en su geometría en planta, en elevación, o en la distribución de masas, rigideces, etc. y proporciona valores adecuados de cortantes en el caso de estructuras en las que la contribución de la forma modal fundamental de vibración representa un porcentaje elevado de la respuesta máxima de todos los pisos.

Este método se basa en la determinación de la fuerza lateral total denominada cortante basal o cortante en la base, efectuada a partir de la fuerza de inercia que se induce en un sistema equivalente simple o de 1 G.L.^[ref. 7], distribuyendo posteriormente este cortante en fuerzas concentradas a diversas alturas de la estructura bajo la hipótesis de vibración en su forma modal fundamental.

La fuerza actuante donde se concentra una masa i es igual al peso de la misma por un coeficiente proporcional a la altura sobre el nivel del suelo^[ref. 2].

El RCDF-93 en sus normas técnicas complementarias para diseño por sismo^[ref. 5], permite valuar las fuerzas laterales mencionadas para estructuras con alturas menores de 60 [m], mediante las dos opciones que se indican en los siguientes incisos.

4.3.7.1.- VALUACION DE FUERZAS SISMICAS SIN ESTIMAR EL PERIODO FUNDAMENTAL DE LA ESTRUCTURA.

De acuerdo con lo especificado por el RCDF-93, si no se calcula el período fundamental de la estructura, la fuerza cortante basal, es decir, la fuerza cortante sísmica que actúa en la base de una estructura, se calcula como:

$$V_0 = cW_0/Q' \quad \text{.....(4.56)}$$

V_0 -fuerza cortante basal [ton]

c -coeficiente sísmico tomado de la figura 166

W_0 -peso total de la estructura [ton]

Q' -factor reductivo de fuerzas sísmicas

Esta fuerza cortante debe descomponerse en un sistema de fuerzas laterales aplicadas en las masas de la estructura, para lo cual el RCDF-93 propone una distribución de aceleraciones lineal, que varía desde cero en la base hasta un máximo de "a" en la parte superior de la misma, tal como se muestra en la figura 4.61.

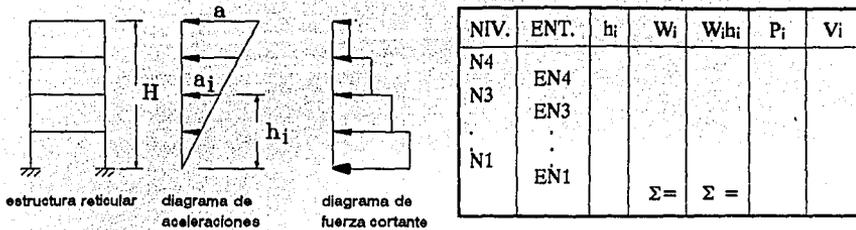


Figura 4.61. Distribución lineal de fuerzas laterales según el Método estático.

De acuerdo a esta figura la fuerza lateral en cada piso vale

$$P_i = W_i a_i / g \quad \dots(a)$$

g -aceleración de la gravedad
 a -ordenada espectral

por triángulos semejantes

$$a_i / a = h_i / H \quad \dots(b)$$

sustituyendo (b) en (a)

$$P_i = W_i h_i a / (gH) = W_i h_i [a / (gH)] \quad \dots(c)$$

la fuerza cortante en la base vale

$$V_o = \Sigma P_i = [a / (gH)] \Sigma W_i h_i \quad \dots(d)$$

de donde

$$[a / (gH)] = V_o / \Sigma W_i h_i \quad \dots(e)$$

finalmente sustituyendo (e) en (c) se obtiene

$$P_i = W_i h_i V_o / (\Sigma W_i h_i) \quad \dots(4.57)$$

P_i -fuerza horizontal en el piso i

W_i -peso del piso i

h_i -altura de la masa o piso i sobre el nivel de desplante

a -aceleración espectral (ecuaciones 4.31 a 4.35)

Empleando la tabla que aparece en la figura 4.61, pueden efectuarse los cálculos de las fuerzas laterales correspondientes de una manera más eficaz.

4.3.7.2 - VALUACION DE FUERZAS SISMICAS ESTIMANDO EL PERIODO FUNDAMENTAL DE LA ESTRUCTURA.

El cálculo de las fuerzas sísmicas laterales empleando el método anterior produce resultados muy conservadores. De acuerdo con el espectro de diseño del RCDF-93 que aparece en la figura 4.22, cuando el período de la estructura se encuentra fuera del intervalo de validez de la ecuación (4.32), pueden hacerse reducciones importantes en el valor de las aceleraciones espectrales.

El RCDF-93 en sus Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo^[ref. 5], propone las siguientes fórmulas para el cálculo aproximado del período fundamental de las estructuras y en base a éste el de las fuerzas laterales

$$T = 2\pi [\Sigma W_i \chi_i^2 / (g \Sigma P_i \chi_i)]^{0.5} \quad \dots(4.58)$$

x_i -desplazamiento respecto a la base por causa y en la dirección de P_i

a) si $T \leq T_b$ se aplica la ecuación (4.57) con

$$V_o = aW_o/Q' \quad \dots(4.59)$$

b) si $T > T_b$ aplicar

$$P_i = W_i(k_1 h_i + k_2 h_i^2) a/Q' \quad \dots(4.60)$$

en esta última ecuación:

$$a \geq c/4 \quad \dots(4.61)$$

$$k_1 = q(1 - r(1 - q)\Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i)) \quad \dots(4.62)$$

$$k_2 = 1.5rq(1 - q)\Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i^2) \quad \dots(4.63)$$

r -exponente en función de la zona de suelo (figura 4.22)

q -constante dada por la ecuación (4.34)

4.3.7.3.- ESTRUCTURAS CON APÉNDICES.

Para valuar las fuerzas sísmicas que obran en los apéndices de las estructuras, entendiéndose como apéndice elementos tales como tanques, parapetos, pretilas, anuncios, ornamentos, ventanales, revestimientos, y elementos cuya estructuración difiera radicalmente de la del resto del edificio, se supondrá que actúa sobre ellos la distribución de aceleraciones que le correspondería, si se apoyara directamente en el terreno, multiplicada por

$$1 + 4c'_i/c \quad \dots(4.64)$$

c'_i -factor por el que se multiplican los pesos a la altura de desplante del elemento, cuando se valúan las fuerzas laterales sobre la construcción

Lo anterior es con el fin de tomar aproximadamente en cuenta problemas de amplificación dinámica concentrada.

Como se expresó en el inciso 4.3.7, las fuerzas sísmicas en los pisos de una estructura son proporcionales a los productos de los pesos por las alturas correspondientes, multiplicadas también por una constante de proporcionalidad, es decir

$$P_i = \alpha W_i/h_i \quad \dots(4.65)$$

P_i -fuerza en el piso i

α -constante de proporcionalidad en función de h_i

La fuerza sísmica en cada apéndice se calcula como

$$P_{api} = cW_{api}/Q' \quad \dots(4.66)$$

W_{api} -peso del apéndice i

P_{api} -fuerza sobre el apéndice i si estuviera en el suelo

c -coeficiente sísmico

$$P_{api} = P_{api}(1 + 4c'_i/c) \quad \dots(4.67)$$

a nivel real de desplante

con

$$c'_i = \alpha h_i \quad \dots(4.68)$$

P_{api} -fuerza sobre el apéndice i a la altura real

Empleando la condición de que la suma de las fuerzas laterales entre la suma de los pesos debe ser igual a las ordenadas espectrales [ref. 2], se tiene

$$[\Sigma P_i + \Sigma P_{api}] / [\Sigma W_i + \Sigma W_{api}] = c/Q' \quad \dots(4.69)$$

Al analizar una estructura con apéndices, en un principio hay que obtener con las ecuaciones anteriores el valor de α y el de las fuerzas en los apéndices P_{api} , posteriormente se debe estimar el período fundamental con la ecuación (4.58) ignorando las fuerzas y pesos de

los apéndices^[ref. 2]. Una vez conocido el período se deben obtener las fuerzas reducidas en los pisos de la estructura sin tomar en cuenta los apéndices, ya que las fuerzas en ellos no deben reducirse por causa de conocer el período.

4.3.7.4.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Resolver el problema I del inciso 4.3.6.2., aplicando el Método estático de análisis sísmico sin estimar el período de oscilación.

En el problema citado se calcularon los pesos de los niveles del edificio y los siguientes datos

$W_3 = 165.288 \text{ [ton]} \dots(a)$ $W_2 = 214.368 \text{ [ton]} \dots(b)$

$W_1 = 295.287 \text{ [ton]} \dots(c)$

$c = 0.4 \dots(d)$

de la ecuación (4.39) y (4.37)

$Q' = 0.8Q = 0.8(2) = 1.6 \dots(e)$

el peso total es

$W_o = W_1 + W_2 + W_3 = 674.943 \text{ [ton]} \dots(f)$

el cortante basal sin tomar en cuenta el período fundamental de oscilación es según la ecuación (4.56), (f), (d) y (e)

$V_o = 0.4(674.943)/1.6 = 168.74 \text{ [ton]} \dots(g)$

con la ecuación (4.57) se procede a llenar la tabla 4.6

Tabla 4.6

NIV.	ENT.	h_i [m]	W_i [ton]	Wh_i [t-m]	P_i [ton]	V_i [ton]
N3	EN3	13	165.288	2148.744	65.28	65.28
N2		9	214.368	1929.312	58.61	
N1	EN2	5	295.287	1476.435	44.85	123.89
	EN1					168.74
$\Sigma =$			674.943	5554.491	168.74	

Los resultados son iguales para ambas direcciones de análisis por tener los mismos factores de comportamiento sísmico Q. Puede comprobarse que los resultados son conservadores con respecto a los obtenidos con el análisis dinámico del problema I del inciso 4.3.6.2.

II.- Resolver el problema I del inciso 4.3.6.2., aplicando el Método estático de análisis sísmico. Estimar el período fundamental de oscilación de manera aproximada con la fórmula propuesta por el RCDF-93.

En el problema mencionado se calcularon los siguientes datos

Sentido X:

$$K_{e1} = 183.99 \text{ [t/cm]} \dots (a) \quad K_{e2} = 146.83 \text{ [t/cm]} \quad \dots (b)$$

$$K_{e3} = 80.3 \text{ [t/cm]} \quad \dots (c)$$

Sentido Y:

$$K_{e1} = 217.81 \text{ [t/cm]} \dots (d) \quad K_{e2} = 157.99 \text{ [t/cm]} \quad \dots (e)$$

$$K_{e3} = 107.19 \text{ [t/cm]} \quad \dots (f)$$

● ANALISIS EN DIRECCION X

Para poder aplicar la fórmula(4.58) y calcular el período fundamental, primero se calculan las fuerzas y desplazamientos sin tomar en cuenta dicho período. Esto se efectuó en el problema anterior y los desplazamientos se calculan en la tabla 4.7 usando la ecuación (3.98) expresada como

$$\Delta_{ei} = V_i / K_{ei} \quad \dots (g)$$

y con $x_i = x_{i-1} + \Delta_{ei} \quad \dots (h)$

NIV.	ENT.	V_i [ton]	K_{ei} [t/cm]	Δ_{ei} [cm]	x_i [cm]	W_i [ton]	P_i [ton]	Wx_i^2 [t-cm ²]	Px_i [t-cm]
N3					2574	165.288	65.28	1095.112	168.031
	EN3	65.28	80.3	0.813					
N2					1.761	214.368	58.61	664.781	103.212
	EN2	123.89	146.83	0.844					
N1					0.917	295.287	44.85	248.304	41.128
	EN1	168.74	183.99	0.917					
$\Sigma =$						674.943		2008.197	312.371

Tabla 4.7

x_i -desplazamiento respecto a la base

de la ecuación (4.58)

$$T_x = 2\pi \{2008.197 / [312.371(980.665)]\}^{0.5} = 0.509 \text{ [seg]} \quad \dots (i)$$

Puede observarse que el valor de este período es igual al del período fundamental calculado mediante el análisis dinámico [problema I del inciso 4.3.6.2].

Para la zona III, de la figura 4.22 se tiene

$$T_a = 0.6[s]$$

$T_x < T_a$, y de las ecuaciones (4.31), (4.38) y (4.39)

$$a = (1 + 3T_x/T_a)c/4 = [1 + 3(0.509)/0.6]0.1 = 0.3545 \quad \dots (j)$$

$$Q' = 0.8[1 + (T_x/T_a)(Q-1)] = 0.8[1 + (0.509/0.6)(1)] = 1.479 \quad \dots (k)$$

Las fuerzas reducidas se calculan con las ecuaciones (4.57) y (4.59) con los resultados indicados en la tabla 4.8, en donde

$$V_o = (0.3545)(674.943)/1.479 = 161.78 \text{ [ton]} \quad \dots (l)$$

Tabla 4.8

NIV.	ENT.	h_i [m]	W_i [ton]	$W_i h_i$ [t-m]	P_i [ton]	V_i [ton]
N3		13	165.288	2148.744	62.58	
	EN3					62.58
N2		9	214.368	1929.312	56.19	
	EN2					118.77
N1		5	295.287	1476.435	43.00	
	EN1					161.77
$\Sigma =$			674.943	5554.491	161.77	

● ANALISIS EN DIRECCION Y

Análogamente para este caso se tiene del problema I anterior y de (d), (e) y (f) la tabla 4.9

NIV.	ENT.	V_i [ton]	k_{ci} [t/cm]	Δ_{ci} [cm]	x_i [cm]	W_i [ton]	P_i [ton]	$W_i x_i^2$ [t-cm ²]	$P_i x_i$ [t-cm]
N3					2168	165.288	62.28	776.891	141.527
	EN3	62.28	107.19	0.609					
N2					1.559	214.368	58.61	521.017	91.373
	EN2	123.89	157.99	0.784					
N1					0.775	295.287	44.85	177.357	34.759
	EN1	168.74	217.81	0.775					
$\Sigma =$						674.943		1475.265	267.659

Tabla 4.9

de la ecuación (4.58)

$$T_y = 2\pi\{1475.265/[980.665(267.659)]\}^{0.5} = 0.471 \text{ [seg]} \quad \dots (m)$$

nuevamente es notoria la buena exactitud de la fórmula para el cálculo del período fundamental, al comparar el valor obtenido con el encontrado con el método dinámico [problema I, inciso 4.3.6.2.].

Como $T_y < T_a$ se tiene de las ecuaciones (4.31), (4.38), (4.39) y (4.59)

$$a = (1 + 3T_y/T_a)c/4 = [1 + 3(0.471)/0.6]0.1 = 0.3355 \quad \dots(n)$$

$$Q' = 0.8[1 + (T_y/T_a)(Q - 1)] = 0.8[1 + 0.471/0.6] = 1.428 \quad \dots(o)$$

$$V_o = aW_o/Q' = 0.3355(674.943)/1.428 = 158.57 \text{ [ton]} \quad \dots(p)$$

con las ecuaciones (4.57) y (p) se calculan las fuerzas reducidas de la tabla 4.10

Tabla 4.10

NIV.	ENT.	h_i [m]	W_i [ton]	$W_i h_i$ [t-m]	P_i [ton]	V_i [ton]
N3		13	165.288	2148.744	61.34	
	EN3					61.34
N2		9	214.368	1929.312	55.08	
	EN2					116.42
N1		5	295.287	1476.435	42.15	
	EN1					158.57
$\Sigma =$			674.943	5554.491	158.57	

III.- Resolver el problema I del inciso 4.3.6.2., si existen en los niveles 1 y 3 tanques de almacenaje con pesos de 7 y 14 [ton], respectivamente. Aplicar el Método estático de análisis sísmico estimando el período de oscilación con la fórmula propuesta por el RCDF-93.

En el problema citado se calcularon las siguientes características

$$W_3 = 165.288 \text{ [ton]} \quad \dots(a)$$

$$W_2 = 214.368 \text{ [ton]} \quad \dots(b)$$

$$W_1 = 295.287 \text{ [ton]} \quad \dots(c)$$

$$c = 0.4 \quad \dots(d)$$

$$h_1 = 5 \text{ [m]} \quad \dots(f)$$

$$h_2 = 9 \text{ [m]} \quad \dots(g)$$

$$h_3 = 13 \text{ [m]} \quad \dots(h)$$

$$Q'_x = Q'_y = 0.8Q = 0.8(2) = 1.6 \text{ (se supone que se desconoce } T) \quad \dots(e)$$

● DIRECCION X y Y

Como se mencionó en 4.3.7., las fuerzas sísmicas en los pisos 1 a 3 son iguales a los productos de los pesos por las alturas y por una constante de proporcionalidad.

De la ecuación (4.65) se tiene para cada piso

$$P_1 = \alpha W_1 h_1 = \alpha(295.287)(5) = 1476.435\alpha \quad \dots(i)$$

$$P_2 = \alpha W_2 h_2 = \alpha(214.368)(9) = 1929.312\alpha \quad \dots(ii)$$

$$P_3 = \alpha W_3 h_3 = \alpha(165.288)(13) = 2148.744\alpha \quad \dots(k)$$

de la ecuación (4.66) para cada apéndice la fuerza sísmica a nivel del suelo es

$$P_{ap1} = cW_{api}/Q' = 0.4(7)/1.6 = 1.75 \text{ [ton]} \quad \dots(l)$$

$$P_{ap3} = 0.4(14)/1.6 = 3.5 \text{ [ton]} \quad \dots(m)$$

de la ecuación (4.68) y (4.67)

$$c'_1 = 5\alpha \quad \dots(n)$$

$$c'_3 = 13\alpha \quad \dots(o)$$

$$P_{ap1} = 1.75(1 + 4(5)\alpha/0.4) = 1.75 + 87.5\alpha \quad \dots(p)$$

$$P_{ap3} = 3.5(1 + 4(13)\alpha/0.4) = 3.5 + 455\alpha \quad \dots(q)$$

el valor de la constante de proporcionalidad α , se determina con las ecuaciones (4.69), (i), (j), (k), (p) y (q)

$$\begin{aligned} \Sigma P_1 + \Sigma P_{api} &= 1476.435\alpha + 1929.312\alpha + 2148.744\alpha + 1.75 + 87.5\alpha + 3.5 + 455\alpha = \\ &= 5.25 + 6096.991\alpha \end{aligned} \quad \dots(r)$$

$$\Sigma W_1 + \Sigma W_{api} = 165.288 + 214.368 + 295.287 + 7 + 14 = 695.943 \text{ [ton]} \quad \dots(s)$$

$$c/Q' = 0.4/1.6 = 0.25 \quad \dots(t)$$

$$5.25 + 6096.991\alpha = 0.25(695.943) = 173.98575$$

de donde

$$\alpha = 0.02767525451 \quad \dots(u)$$

sustituyendo (u) en (i), (j), (k), (p) y (q) se obtienen las siguientes fuerzas no reducidas por causa del período de oscilación.

$$P_1 = 40.86 \text{ [ton]}$$

$$P_2 = 53.39 \text{ [ton]}$$

$$P_3 = 59.47 \text{ [ton]}$$

$$P_{ap1} = 4.17 \text{ [ton]}$$

... (v)

$$P_{ap3} = 16.1 \text{ [ton]}$$

... (w)

cortante basal $V_o = 173.99 \text{ [ton]}$

comprobación $V_o/W_o = 173.99/695.943 = 0.25 = c/Q'$ (correcto)

Reducción de las fuerzas sísmicas en los pisos por estimación del período de oscilación:

• DIRECCION X

Procediendo de forma análoga a lo efectuado en el problema II, se calcula la tabla 4.11, con

$$\Delta_{ei} = V_i/K_{ei}$$

Tabla 4.11

NIV.	ENT.	P_i [ton]	V_i [ton]	k_{ei} [t/cm]	Δ_{ei} [cm]	x_i [cm]	W_i [ton]	Wx_i^2 [t-cm ²]	P_{xi} [t-cm]
N3		59.47				2.35	165.288	912.803	139.755
	EN3		59.47	80.3	0.74				
N2		53.39				1.61	214.368	555.663	85.958
	EN2		112.86	146.83	0.77				
N1		40.86				0.84	295.287	208.355	34.322
	EN1		153.72	183.99	0.840				
$\Sigma =$							674.943	1676.821	260.035

de la ecuación (4.58) $T_x = 2\pi\{1676.821/[980.665(260.035)]\}^{0.5} = 0.509 \text{ [seg]}$

Este período es el mismo que el calculado en el problema II anterior, y por tanto se demuestra que el método conduce a las mismas fuerzas en los pisos obtenidas en dicho problema.

• DIRECCION Y

Para esta dirección y en base a las fuerzas obtenidas considerando apéndices, se tiene la tabla 4.12

Tabla 4.12

NIV.	ENT.	P_i [ton]	V_i [ton]	k_{ei} [t/cm]	Δ_{ei} [cm]	x_i [cm]	W_i [ton]	Wx_i^2 [t-cm ²]	P_{xi} [t-cm]
N3		59.47				1.98	165.288	647.995	117.751
	EN3		59.47	107.19	0.56				
N2		53.39				1.42	214.368	432.252	75.814
	EN2		112.86	157.99	0.71				
N1		40.86				0.71	295.287	148.854	29.011
	EN1		153.72	217.81	0.71				
$\Sigma =$							674.943	1229.101	222.576

de la ecuación (4.58)

$$T_y = 2\pi\{1229.101/[980.665(222.576)]\}^{0.5} = 0.471 \text{ [seg]}$$

Nuevamente coincide el período de oscilación con el calculado en el problema mencionado, y las fuerzas sísmicas en los pisos serán las ahí encontradas.

Un resumen de las fuerzas actuantes es

Dirección X

$$\begin{aligned} P_{3x} &= 62.58 \text{ [ton]} & P_{2x} &= 56.18 \text{ [ton]} & P_{1x} &= 43 \text{ [ton]} \\ P_{ap1x} &= 4.17 \text{ [ton]} & P_{ap3x} &= 16.1 \text{ [ton]} \end{aligned}$$

Dirección Y

$$\begin{aligned} P_{3y} &= 61.34 \text{ [ton]} & P_{2y} &= 55.08 \text{ [ton]} & P_{1y} &= 42.15 \text{ [ton]} \\ P_{ap1y} &= 4.17 \text{ [ton]} & P_{ap3y} &= 16.1 \text{ [ton]} \end{aligned}$$

4.3.7.5.- PROBLEMAS PROPUESTOS.

I.- Resolver el problema I del inciso 4.3.6.3, aplicando el Método estático de análisis sísmico, sin estimar el Período de oscilación.

Solución: DIRECCION X y Y: $P_1 = 28.47 \text{ [ton]}$; $P_2 = 51.80 \text{ [ton]}$; $P_3 = 70.03 \text{ [ton]}$; $V_{en1} = 150.30 \text{ [ton]}$; $V_{en2} = 121.83 \text{ [ton]}$; $V_{en3} = 70.03 \text{ [ton]}$.

II.- Resolver el problema I del inciso 4.3.6.3, aplicando el Método estático de análisis sísmico, estimando de manera aproximada el período de oscilación con la fórmula propuesta por el RCDF-93.

Solución: DIRECCION X: $P_1 = 28.47 \text{ [ton]}$; $P_2 = 51.80 \text{ [ton]}$; $P_3 = 70.03 \text{ [ton]}$; $V_{en1} = 150.30 \text{ [ton]}$; $V_{en2} = 121.83 \text{ [ton]}$; $V_{en3} = 70.03 \text{ [ton]}$; DIRECCION Y: $P_1 = 25.74 \text{ [ton]}$; $P_2 = 48.82 \text{ [ton]}$; $P_3 = 63.30 \text{ [ton]}$; $V_{en1} = 135.86 \text{ [ton]}$; $V_{en2} = 110.12 \text{ [ton]}$; $V_{en3} = 63.30 \text{ [ton]}$.

III.- Si en los niveles 2 y 3 del edificio del problema I del inciso 4.3.6.3, se construirán tanques de almacenamiento de agua con un peso total de 6.5 y 9 [ton], respectivamente, determinar las fuerzas sísmicas actuantes en dichos apéndices.

Solución: DIRECCION X y Y: $P_{ap2} = 5.243 \text{ [ton]}$; $P_{ap3} = 9.840 \text{ [ton]}$.

4.3.8.- EFECTOS DE LA CONFIGURACION DE LA ESTRUCTURA.

CONFIGURACION ESTRUCTURAL.- La configuración estructural de una construcción, está constituida por su tamaño y su forma geométrica incluyendo el tipo y arreglo de los distintos elementos estructurales, la distribución de las masas, así como la naturaleza y situación de los elementos arquitectónicos que puedan influir en el comportamiento estructural.

Una construcción que posea una configuración sísmicamente mal estructurada, no puede comportarse de manera satisfactoria ante las solicitaciones inducidas por un sismo, y en estas condiciones lo único que puede hacer el ingeniero civil es mejorar lo más posible una solución básicamente deficiente.

Tradicionalmente el ingeniero civil en su labor de proyectista estructural tenía poca o nula influencia en la selección de la configuración de las construcciones, siendo el arquitecto el que determinaba dichos aspectos e implícitamente tomaba, sin saberlo, decisiones de gran importancia para los análisis posteriores de ingeniería, por lo que se presentaba la situación descrita.

En la actualidad el diseño sismorresistente constituye una responsabilidad arquitectónica y de ingeniería compartida^[ref. 6]. Las lecciones aprendidas en varios temblores demuestran que la simetría, sencillez y regularidad de las construc-

ciones contribuyen a reducir en gran medida los riesgos de un mal comportamiento. Por tanto, es deseable que se trate de influir lo más posible desde las etapas iniciales de un proyecto, para que la configuración cumpla con estas características, evitando a la vez entrar en conflicto con los requisitos esenciales estéticos y de funcionamiento.

Desde el inicio de un proyecto, el proyectista estructural debe hacer consciente al proyectista general y al propietario de las consecuencias que implica el no observar las recomendaciones básicas de estructuración sísmica, pero no debe impedir la originalidad y la funcionalidad del proyecto^[ref. 7], sino que trabajando conjuntamente el ingeniero estructural debe proporcionar soluciones seguras de formas variadas acordes con la filosofía del diseño sismorresistente.

A continuación se indican las recomendaciones básicas de diseño, que evalúan la influencia de una configuración adecuada en las respuestas de la estructura desde el punto de vista sísmico.

4.3.8.1.- INFLUENCIA DE LA CONFIGURACION.

Al estructurar construcciones que estarán desplantadas en zonas con elevado o considerable riesgo sísmico, se debe procurar tomar en cuenta en lo posible los siguientes aspectos o recomendaciones básicos que conducen a configuraciones

estructurales idóneas para la realización de un buen diseño sismorresistente^[ref. 7]:

a) La sencillez en la configuración de la estructura permite comprender de forma clara la manera en que se podrán resistir y disipar las cargas laterales.

b) Deben existir sistemas estructurales que proporcionen rigidez y resistencia en dos direcciones ortogonales.

c) La existencia de simetría en la disposición de rigideces permitirá reducir los efectos de torsiones y evitará que se incrementen las sollicitaciones en los elementos estructurales.

d) La forma geométrica en planta de la estructura debe ser lo más regular posible, evitando formas excesivamente alargadas o irregulares (como formas en L, C y T), debido a que éstas producen pérdidas en la rigidez de los diafragmas de piso e incrementos en las fuerzas actuantes de los elementos estructurales.

e) La forma geométrica en elevación de la estructura debe ser regular. El evitar escalonamientos crecientes o decrecientes en función de la altura, contribuye a reducir efectos locales de amplificación dinámica por cambios bruscos de rigidez y masa.

f) Se debe procurar que haya uniformidad en la distribución de resistencia, rigidez y ductilidad en la estructura. Esto se puede lograr haciendo

que los elementos verticales de soporte (columnas y muros), sean continuos desde la cimentación hasta el último piso, que vigas y columnas estén en el mismo plano y que sus ejes se intersecten, que no existan cambios bruscos de dimensiones ni de refuerzos en los elementos estructurales, y que ningún entrepiso tenga una resistencia y rigidez muy inferior a la de los otros entrepisos.

g) Los sistemas de piso y techo deben ser suficientemente rígidos y resistentes para poder distribuir las fuerzas que se originan en su plano entre los elementos verticales (columnas y muros).

h) La cimentación deberá proporcionar empotramiento a los elementos verticales cuando así se haya considerado en el análisis, y deberá poder transmitir la fuerza cortante al suelo mediante la suficiente profundidad de desplante o mediante pilotes.

En las figuras 4.62 y 4.63, se observan ejemplos de configuraciones sísmicamente recomendables y no recomendables.

4.3.8.2.- EFECTOS DE TORSION EN LA ESTRUCTURA.

La torsión en las estructuras se produce debido a que la resultante de las fuerzas sísmicas que actúa en el centro de masas de los pisos o niveles, no coincide con el punto en donde actúa la resultante de las rigideces de los sistemas estructurales de los entrepisos. Si dichos centros

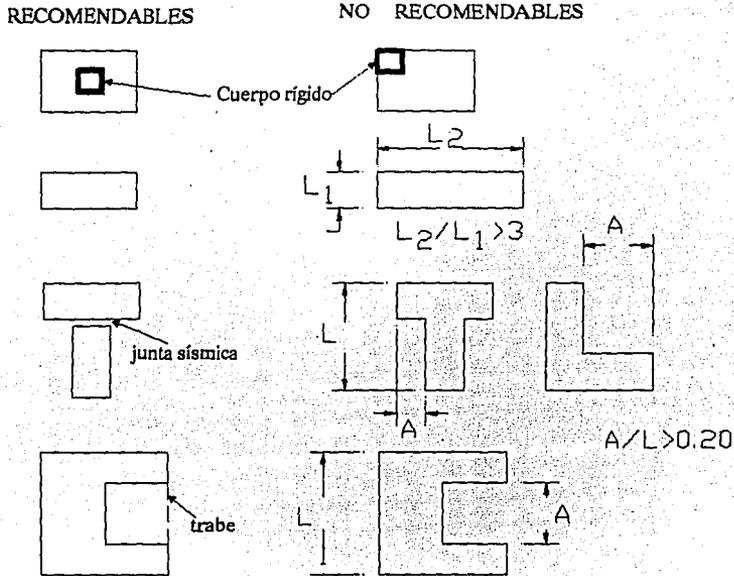


Figura 4.62. Recomendaciones para la geometría de la planta de las estructuras para edificaciones (tomada de la referencia[7]).

coinciden entonces habrá solo desplazamientos por traslación en dirección X o Y.

CENTRO DE TORSION O CENTRO DE RIGIDEZ (CT).- Es el punto por donde pasa la resultante de las fuerzas resistentes actuantes en los entrepisos de la estructura^[ref. 1].

CENTRO DE MASAS (CM).- Es el punto por donde pasa la resultante de las fuerzas de inercia actuantes en los pisos o niveles de la estructura.

CENTRO DE CORTANTES (CV).- Es el punto por donde pasa la resultante de las fuerzas cortantes actuantes en los entrepisos de una estructura.

Con referencia a la figura 4.64, que muestra la configuración estructural de un edificio con sistemas resistentes ortogonales, la posición del centro de torsión (CT), puede calcularse por equilibrio estático con las siguientes expresiones

$$X_t = \frac{\sum(k_{iy}X_j)}{\sum k_{iy}} \quad \dots(4.70)$$

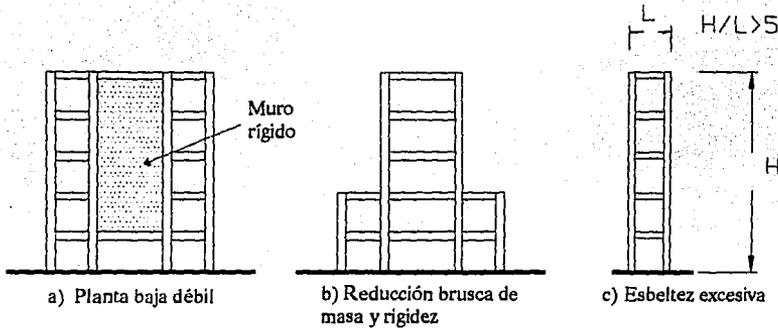


Figura 4.63. Configuraciones poco convenientes en elevación para edificios (tomado de la referencia 7).

$$Y_t = \Sigma(k_{ix}Y_i)/\Sigma k_{ix} \quad \dots (4.71)$$

X_i, Y_i -coordenadas de los elementos resistentes del entrespiso (sistemas de marcos, muro-marcos, etc.)

k_{ix}, k_{iy} -rigideces de los elementos resistentes o rigideces de entrespiso de los sistemas estructurales en la dirección considerada

x_i, y_i -coordenadas del centro de torsión (CT)

La posición del centro de cortantes de cada entrespiso se calcula por equilibrio estático como

$$X_v = (P_{iy}\bar{x})_{ec}/V_{iy} \quad \dots (4.72)$$

$$Y_v = (P_{ix}\bar{y})_{ec}/V_{ix} \quad \dots (4.73)$$

P_{ix}, P_{iy} -fuerza sísmica actuante en el nivel i y en la dirección considerada

$(P_{iy}\bar{x})_{ec}, (P_{ix}\bar{y})_{ec}$ -producto acumulado de la fuerza por la distancia centroidal

\bar{x}, \bar{y} -coordenadas del centro de masas (CM)

V_{ix}, V_{iy} -fuerza cortante total actuante en el entrespiso i en la dirección considerada

x_v, y_v -coordenadas del centro de cortantes (CV)

Las coordenadas de los centros de torsión y de cortante pueden calcularse de forma más eficaz con la ayuda de las tablas mostradas en las figuras 4.65 y 4.66.

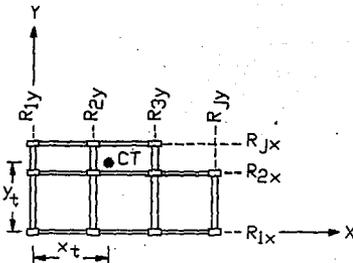


Figura 4.64. Estructura con sistemas resistentes ortogonales.

La torsión producida en las estructuras tiene como consecuencia el aumento de las fuerzas cortantes sísmicas actuantes en los sistemas resistentes. En los análisis sísmicos dinámicos y estáticos efectuados hasta ahora se han considerado únicamente las **fuerzas cortantes directas** actuantes en los entrespisos, es decir, se ha supuesto que sólo existen movimientos laterales de traslación. En la realidad las estructuras presentan siempre movimientos de rotación y por lo tanto las fuerzas

NIV.	ENT.	P_{ix}	P_{iy}	\bar{x}	\bar{y}	V_{ix}	V_{iy}	$P_{ix}\bar{y}$	$P_{iy}\bar{x}$	$P_{ix}\bar{y}_{ac}$	$P_{iy}\bar{x}_{ac}$	X_v	Y_v

Figura 4.65. Tabla para el cálculo del centro de cortantes (CV).

EJE	k_{ix}	Y_j	Centro de torsión						Efectos V_{ix}			Efectos V_{iy}	
			$k_{ix}Y_j$	Y_{jt}	$k_{ix}V_{jt}^2$	e_{sy}	b	e_{Dy}	M_{ix}	dir	tor	tot	tor
										V_{ix}	F_{xt}	V_{ix}	F_{yt}

EJE	$Q\Delta e_i$	Δ_{per}	$V_{ix} + 0.3V_{iy}$	$0.3V_{ix} + V_{iy}$	$100X + 30Y$	$30X + 100Y$
					P_{Ni}	P_{Ni}

Figura 4.66. Tabla para la superposición de los efectos de torsión.

cortantes por torsión deben ser superpuestas a las fuerzas cortantes directas citadas.

Como puede observarse en la figura 4.67, la presencia de un diafragma de piso rígido en cuyo centro de masas actúa la fuerza sísmica, ocasiona que los efectos de la torsión sean más desfavorables para los sistemas resistentes más alejados del centro de torsión, mientras que para los de otros ejes son menos desfavorables o incluso de signo contrario.

El diafragma de piso rígido tiene como función distribuir la fuerza sísmica actuante en su centro de masas entre todos los sistemas resistentes, en proporción a la rigidez y al nivel del efecto

de torsión que le corresponda. La cuantificación del valor de la fuerza sísmica que toma cada sistema resistente (marcos, muro-marcos, muros, etc.) en cada nivel, puede calcularse con el procedimiento descrito en el siguiente inciso.

4.3.9.- DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS SISMICAS ENTRE LOS ELEMENTOS RESISTENTES DE LA ESTRUCTURA.

El contar con un sistema de piso rígido en su plano, tiene la ventaja de garantizar que los sistemas resistentes que integran una estructura responderán como un conjunto y no de manera aislada ante los efectos de un sismo. Cada uno de

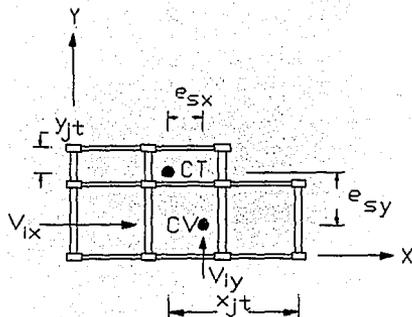


Figura 4.67. Excentricidades de los centros de torsión y cortante en una estructura.

dichos sistemas resistentes tomará parte de la fuerza sísmica que está aplicada en el centro de masas del diafragma, en proporción a su rigidez, ver figura 4.67. Esta fuerza puede calcularse como

$$V_{ix} = V_{ix}k_{ix}/\Sigma k_{ix} \quad \dots (4.74)$$

$$V_{iy} = V_{iy}k_{iy}/\Sigma k_{iy} \quad \dots (4.75)$$

V_{ix} , V_{iy} fuerza cortante directa en el entrepiso i en la dirección considerada

Como ya se mencionó, al no coincidir el centro de torsión (CT) con el centro de cortantes (CV), se produce un par de torsión cuya magnitud es igual al producto de la fuerza cortante total del entrepiso por la distancia o **excentricidad** entre el centro de cortantes y el centro de torsión. En la figura 4.67 se ilustra la excentricidad existente en ambas direcciones de una estructura reticular; puede observarse que una excentricidad en una dirección determinada produce cortantes tanto en los sistemas resistentes orientados en dirección X como en los orientados en dirección Y.

Un análisis dinámico que incluya los efectos de torsión considerándolos como un grado de libertad adicional en cada piso, resulta excesivamente complicado para ser resuelto tan solo con calculadora, lápiz y papel, y usualmente es solo efectuado en programas de computadora para análisis de estructuras como los de las referencias 12 y 13. Cuando se trabaja con rigideces de entrepiso y sistemas oscilatorios simplemente acoplados, los efectos de torsión son **superpuestos estáticamente** y adicionados a las fuerzas cortantes directas obtenidas de un análisis dinámico que considera solo desplazamientos de traslación.

Sin embargo debido a los efectos dinámicos producidos por un sismo en las estructuras tridimensionales, puede verse amplificado el momento torsionante que actúa en cada entrepiso y ser la excentricidad efectiva mayor que la calculada estáticamente en los análisis bidimensionales o planos.

Por otro lado, debido a que la rigidez de los elementos estructurales se ve afectada durante un sismo por agrietamientos locales o por la interferencia de elementos no estructurales en el movimiento, el cálculo del centro de torsión solo puede ser efectuado con poca aproximación.

El RCDF-93 en sus Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo^[ref. 5], toma en cuenta lo anterior y especifica que el momento torsionante de diseño se determine con una ex-

centricidad total calculada como la más desfavorable de las siguientes

$$e_D = 1.5e_s + 0.1b \quad \dots(4.76)$$

$$e_D = e_s - 0.1b \quad \dots(4.77)$$

e_s = excentricidad calculada teóricamente (distancia entre CV y CT)

b = la mayor dimensión en planta del entrepiso medida perpendicularmente a la dirección del sismo

e_D = excentricidad de diseño (igual a el valor más desfavorable)

El factor de 1.5 cubre la amplificación dinámica de los efectos de torsión^[ref. 7]. Si la torsión es considerada como un grado de libertad dinámico en el análisis, este factor toma un valor unitario.

El factor del 10 % del ancho del edificio toma en cuenta la alteración de la rigidez durante el sismo.

El momento torsionante y la fuerza cortante por torsión que toma cada sistema resistente se calcula como, ver figura 4.67

$$M_{tx} = V_{ix}e_{Dy} \quad \dots(4.78)$$

$$M_{ty} = V_{iy}e_{Dx} \quad \dots(4.79)$$

$$F_{xt} = M_{tx}k_{ix}Y_{ij}/R \quad \dots(4.80)$$

$$F_{yt} = M_{ty}k_{iy}X_{ij}/R \quad \dots(4.81)$$

con

$$R = \sum k_{ix}(Y_{ij})^2 + \sum k_{iy}(X_{ij})^2 \quad \dots(4.82)$$

M_{tx} , M_{ty} = momento torsionante en el entrepiso i y en la dirección considerada

e_{Dx} , e_{Dy} = excentricidad de diseño en la dirección considerada

F_{xt} , F_{yt} = fuerza cortante por torsión en el entrepiso de un sistema resistente en la dirección considerada

Y_{ij} , X_{ij} = distancia de los sistemas resistentes al centro de torsión CT del entrepiso i en la dirección analizada

La fuerza cortante total en cada sistema resistente es entonces

$$V_{tx} = V_{ix} + F_{xt} \quad \dots(4.83)$$

$$V_{ty} = V_{iy} + F_{yt} \quad \dots(4.84)$$

V_{tx} , V_{ty} = fuerza cortante total (directa más torsión) en el sistema resistente considerado

A partir de la fuerza cortante total, es decir incluidos los efectos directos y por torsión del sismo, pueden obtenerse las fuerzas actuantes en cada nivel de los marcos planos y efectuar su análisis estructural.

La tabla que aparece en la figura 4.66 sirve de ayuda para el cálculo de todas las fuerzas mencionadas.

En la referencia [5] se indican entre otras, las siguientes especificaciones adicionales:

Efectos bidireccionales

Las estructuras deben revisarse para la acción de dos componentes independientes, horizontales y ortogonales del movimiento del terreno. Los efectos de ambos componentes se combinarán tomando, en cada dirección que se analice la estructura, el 100 % de los efectos del componente que obra en esa dirección y el 30 % de los efectos del que obra perpendicularmente a ella.

Efectos de Torsión

La excentricidad de diseño en cada sentido no se tomará menor que la mitad del máximo valor de e_s calculado para los entrepisos que se hallan abajo del

que se considera, ni se tomará el momento torsionante de ese entrepiso menor que la mitad del máximo calculado para los entrepisos que están arriba del considerado.

4.3.9.1.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Completar el análisis sísmico dinámico del edificio tratado en el problema I del inciso 4.3.6.2, superponiendo los efectos de torsión.

En la sección 9.3 de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo^[ref. 5], se pide que en los casos de análisis dinámicos, el cortante basal dinámico sea mayor o igual al 80 % de aW_0/Q'

De los valores calculados en los problemas I del inciso 4.3.6.2 y II del inciso 4.3.7.4, se comprueba que:

Dirección X: $V_{odinx} = 138.03 > [0.8(161.77) = 129.416]$ (cumple)

Dirección Y: $V_{odiny} = 135.8 > [0.8(158.57) = 126.86]$ (cumple)

● CENTRO DE MASAS

NIVEL 1.- Se tomarán momentos respecto a los ejes globales X,Y de la figura 4.26:

En el problema citado se calculó: $W_{N1} = 295287$ [kg]

$$\bar{y} = \{(6m)(6m)(450 + 180)kg/m^2(3m) + (3m)(7m)(450 + 180)kg/m^2(9.5m) + (15m)(10m)(450 + 180)kg/m^2(11m) + (3m)(3m)(300 + 150)kg/m^2(14.5m) + (1/2)(4)(960kg/m)(5 + 4)m(16m) + 4(960kg/m)(5 + 4)m(6m)/2 + (720kg/m)((10m)4(11m) + (3)(10m)(480kg/m)(11m) + (4)(300kg/m)(6m)(3m) + (300kg/m)(3m)(13m) + (3)(6m)(420kg/m)(16m) + (3)(6m)(420kg/m)((6m) + (18m)(288 + 384)kg/m(16m) + (12m)(288 + 384)kg/m(6m) + (6m)(288 + 384)kg/m(3m) + (20m)(288 + 384)kg/m(11m) + (12m)(5 + 4)m(15kg/m^2)(11m)/2 + (6m)(5 + 4)m(15kg/m^2)(6m)/2 + (6m)(5 + 4)m(15kg/m^2)(3m)/2 + (10m)(5 + 4)m(15kg/m^2)(11m)/2 + (6m)(15kg/m^2)(5m)(16m)/2 + (6m)(15kg/m^2)(5m)/2 + (6m)(5 + 4)m(325kg/m^2)(3m)/2\}/295287kg = 9.49 [m]$$

$$\bar{x} = \{(16m)(6m)(450 + 180)kg/m^2(3m) + (3m)(7m)(450 + 180)kg/m^2(1.5m) + (15m)(10m)(450 + 180)kg/m^2(10.5m) + (3m)(3m)(300 + 150)kg/m^2(1.5m) + 2(960kg/m)(5 + 4)m(18m)/2 + 2(960kg/m)(5 + 4)m(12m)/2 + [2(960kg/m) + 420kg/m](5 + 4)m(6m)/2 + (720kg/m)(10m)(18 + 12 + 6)m + (480kg/m)(10m)(15 + 9 + 3)m + (300kg/m)(6m)(6 + 3 + 3)m + (300kg/m)(3m)(1.5m) + 2(420kg/m)(18m)(9m) + (6m)(420kg/m)(3m) + (288 + 384)kg/m[(18m)(9m) + (12m)(12m) + (6m)(6m) + (10m)(18m)] + (15kg/m^2)[(12m)(5 + 4)m(6m)/2 + (6m)(5 + 4)m(9m)/2 + (6m)(5 + 4)m(6m)/2 + (12m)(5m)(15m)/2 + (10m)(5m)(18m)/2 + (6m)(280kg/m^2(5 + 4)m(3m)/2]\}/295287kg = 8.00 [m]$$

NIVEL 2.- Se tomarán momentos respecto a los ejes globales X,Y de la figura 4.27:

En el problema citado se calculó: $W_{N2} = 214368 \text{ [kg]}$

$$\bar{y} = \{(6m)(6m)(610 + 70)kg/m^2(3m) + (3m)(7m)(450 + 180)kg/m^2(9.5m) + (9m)(10m)(450 + 180)kg/m^2(11m) + (3m)(3m)(300 + 150)kg/m^2(14.5m) + (1/2)(3)(960kg/m)(4 + 4)m(16m) + 3(960kg/m)(4 + 4)m(6m)/2 + (420kg/m)((12m)(16m) + (12m)(420kg/m)(6m) + (3)(720kg/m)(10m)(11m) + (480kg/m)(10m)(11m) + (3m)(13m)(300kg/m) + (4)(6m)(300kg/m)(3m) + (288 + 384)kg/m[(12m)(16m) + (20m)(11m) + (6m)(6m) + (6m)(3m)] + (15kg/m^2)[(12m)(16m) + (6m)(6m) + (20m)(11m)](4 + 4)m/2 + (15kg/m^2)(6m)(3m)(4m)/2 + (6m)(325kg/m^2)(3m)(4m)/2\}/214368kg = 9.21 \text{ [m]}$$

$$\bar{x} = \{(6m)(6m)(610 + 70)kg/m^2(3m) + (3m)(7m)(450 + 180)kg/m^2(1.5m) + (9m)(10m)(450 + 180)kg/m^2(7.5m) + (3m)(3m)(300 + 150)kg/m^2(1.5m) + 2(960kg/m)(4 + 4)m[12 + 6m]/2 + (420kg/m)(4 + 4)m(6m)/2 + 2(12m)(420kg/m)(6m) + (6m)(420kg/m)(3m) + (720kg/m)(10m)(12 + 6m) + (480kg/m)(10m)(9 + 3)m + (300kg/m)(6m)(6 + 3 + 3)m + (300kg/m)(3m)(1.5m) + (288 + 384)kg/m[(12m)(6m) + (6m)(9m) + (6m)(6m) + (10m)(12m)] + (15kg/m^2)[(12m)(6m) + (6m)(9m) + (10m)(12m)](4 + 4)m/2 + (15kg/m^2)(6m)(6m)(4 + 4)m/2 + (6m)(280kg/m^2)(4 + 4)m(3m)/2\}/214368kg = 5.49 \text{ [m]}$$

NIVEL 3, ver figura 4.28

No hay sobrecargas importantes y las masas son simétricas, por tanto el centro de masas coincide con el centro geométrico

$$\bar{x} = 6 \text{ [m]} \qquad \bar{y} = 11 \text{ [m]}$$

●CENTRO DE CORTANTES

Con los datos calculados en el problema I del inciso 4.3.6.2, se procede a calcular los valores que aparecen en la tabla 4.13, donde X_v e Y_v están dados por las ecuaciones (4.72) y (4.73)

Tabla 4.13

NIV.	ENT.	P_x [ton]	P_y [ton]	\bar{x} [m]	\bar{y} [m]	V_x [ton]	V_y [ton]	$P_x \bar{y}$ [t-m]	$P_y \bar{x}$ [t-m]	$P_y \bar{x}$ [t-m]	$P_x \bar{y}$ [t-m]	X_v [m]	Y_v [m]
N3		56.59	54.42	6.0	11.0			622.49	622.49	326.52	326.52		
	EN3					56.59	54.42					6.0	11.0
N2		49.91	50.37	5.49	9.21			459.6711	1082.1611	276.5313	603.0513		
	EN2					106.5	104.79					5.76	10.16
N1		40.78	40.05	8.0	9.49			387.0022	1469.1633	320.4	923.4513		
	EN1					147.28	144.84					6.38	9.98

●FUERZAS SISMICAS

Con las ecuaciones (4.74) a (4.84) y las figuras 4.68, 4.69 y 4.70 en donde se observan las posiciones de los centros de torsión y de cortante, se calculan los datos mostrados en las tablas de las hojas siguientes para cada nivel y dirección. La excentricidad de diseño más desfavorable para cada sistema resistente, se calcula observando las figuras mencionadas.

Tabla 4.14. NIVEL 3: DIRECCION X (figura 4.68)

EJE	k_x [t/cm]	Y_j [cm]	$k_x Y_j$ [ton]	Centro Y_{jt} [cm]	de $k_x Y_{jt}^2$ [t-cm]	torsión e_{xy} [cm]	0.1b [cm]	eD_y [cm]	M_{ix} [t-cm]	Efectos directo V_{ix} [ton]	de torsión F_{ix} [ton]	V_{ix} total V_{ix} [ton]	Efectos Vix torsión F_{ix} [ton]	$Q\Delta_{ei}$ [cm]
B	40.15	600	24090	-500	10037500	0	100	-126.7*	-7170	28.295	4.216	32.511	5.20	1.7
A	40.15	1600	64240	500	10037500	0	100	126.7*	7170	28.295	4.216	32.511	5.20	1.7
$\Sigma =$					20075000					56.59				

ecuación (4.71) $Y_t = 88330/80.3 = 1100$ [cm]

ecuación (4.82) $R = 20075000 + 14067754.43 = 34142754.43$

* $eD_y = 100$ [cm] < [$e_{ymax}/2$ (piso 2) = 253.35/2 = 126.7 [cm]] $\Rightarrow eD_y = 126.7$ [cm]

EJE	$V_{ix} + 0.3V_{ty}$	$0.3V_{ix} + V_{ty}$
B	34.071	14.95
A	34.071	14.95

Tabla 4.15. NIVEL 3: DIRECCION Y (figura 4.68)

EJE	k_y [t/cm]	X_j [cm]	$k_y X_j$ [ton]	Centro X_{jt} [cm]	de $k_y X_{jt}^2$ [t-cm]	torsión e_{xy} [cm]	0.1b [cm]	eD_x [cm]	M_{iy} [t-cm]	Efectos directo V_{iy} [ton]	de torsión F_{iy} [ton]	V_{iy} total V_{iy} [ton]	Efectos Vix torsión F_{ix} [ton]	$Q\Delta_{ei}$ [cm]
1	35.49	0	0	-628.27	791331.2586	28.27	120	162.41	8838.35	18.02	5.77	23.79	4.68	1.42
2	31.16	600	18696	-28.27	24902.85076	28.27	120	162.41	8838.35	15.82	0.23	16.05	0.19	1.03
3	40.54	1200	48648	571.73	13251520.32	28.27	120	-93.41*	-5083.37	20.58	3.45	24.03	4.87	1.26
$\Sigma =$					14067754.43					54.42				

ecuación (4.70) $X_t = 67344/107.19 = 628.27$ [cm]

* $eD_x = 91.73$ [cm] < [$e_{xmax}/2$ (piso 1) = 186.82/2 = 93.41 [cm]] $\Rightarrow eD_x = 93.41$ [cm]

EJE	$V_{ix} + 0.3V_{ty}$	$0.3V_{ix} + V_{ty}$
1	25.19	11.82
2	16.11	5.00
3	25.49	12.08

Tabla 4.16. NIVEL 2: DIRECCION X (figura 4.69)

EJE	k_{jk} [t/cm]	Y_j [cm]	$k_{jk}Y_j$ [ton]	Centro de torsión		e_{xy} [cm]	01b [cm]	eDy [cm]	M_{ix} [t-cm]	Efectos de torsión		V_{ix} [ton]	Efectos V_{iy} torsión		$Q\Delta_{ci}$ [cm]
				Y_{jt} [cm]	$k_{jk}Y_{jt}^2$ [t-cm]					directo	torsión		F_{xt} [ton]	F_{yt} [ton]	
A	50.9	1600	81440	837.35	35688790.65	253.35	160	540.025	57512.7	36.92	23.15	60.07	11.4	2.5	2.5
B	50.9	600	30540	-162.65	1346560.645	253.35	160	93.35	9941.8	36.92	-0.78	36.14	2.21	1.5	1.5
C	45.03	0	0	-762.65	26191025.06	253.35	160	93.35	9941.8	32.66	-3.22	29.44	9.19	1.4	1.4
$\Sigma =$					63226376.36					106.5					

ecuación (4.71) $Y_t = 111980/146.83 = 762.65$ [cm]

ecuación (4.82) $R = 63226376.36 + 42671488.83 = 105897865.2$

$F_{Ni} = V_{ci} - V_{ci+1}$

$\Delta_{ci} = V_{ci} / k_{ci}$

EJE	$V_{ix} + 0.3V_{ty}$ [ton]	$0.3V_{ix} + V_{ty}$ [ton]	$100x + 30y$ [ton]	$30x + 100y$ [ton]
A	29.419	14.47	29.419	14.47
B	2.73	-1.9	2.73	-1.9
C	32.20	18.02	32.2	18.02

Tabla 4.17. NIVEL 2: DIRECCION Y (figura 4.69)

EJE	k_{jk} [t/cm]	X_j [cm]	$k_{jk}X_j$ [ton]	Centro de torsión		e_{xy} [cm]	01b [cm]	eDx [cm]	M_{iy} [t-cm]	Efectos de torsión		V_{iy} [ton]	Efectos V_{ix} torsión		$Q\Delta_{ci}$ [cm]
				X_{jt} [cm]	$k_{jk}X_{jt}^2$ [t-cm]					directo	torsión		F_{yt} [ton]	F_{xt} [ton]	
1	79	0	0	-475.82	17885969.12	100.18	120	-93.41*	9788.4	52.4	3.48	55.88	20.42	1.57	1.57
2	32.69	600	19614	124.18	504101.7808	100.18	120	270.27	28321.6	21.68	1.09	22.77	2.20	1.43	1.43
3	46.3	1200	55560	724.18	24281417.93	100.18	120	270.27	28321.6	30.71	8.97	39.68	18.21	1.95	1.95
$\Sigma =$					42671488.83					104.79					

ecuación (4.70) $X_t = 75174/157.99 = 475.82$ [cm]

* $eD_x = 19.82$ [cm] < [$e_{\text{max}}/2$ (piso 1) = 186.82/2 = 93.41 [cm]] $\Rightarrow eD_x = 93.41$ [cm]

$F_{Ni} = V_{ci} - V_{ci+1}$

$\Delta_{ci} = V_{ci} / k_{ci}$

EJE	$V_{ix} + 0.3V_{ty}$ [ton]	$0.3V_{ix} + V_{ty}$ [ton]	$100y + 30x$ [ton]	$30y + 100x$ [ton]
1	62.01	37.18	36.82	25.36
2	23.43	9.03	7.32	4.03
3	45.14	30.11	19.65	18.03

Tabla 4.18. NIVEL 1 : DIRECCION X (figura 4.70)

EJE	k_{jx}	Y_j	$k_{jx}Y_j$	Centro Y_{jt}	de $k_{jx}Y_{jt}^2$	torsión e_{xy}	01b	e_{dy}	M_{ix}	Efectos directo V_{jx}	de torsión F_{ix}	V_{ix} total	Efectos torsión F_{yi}	$Q\Delta_{ei}$
	[t/cm]	[cm]	[ton]	[cm]	[t-cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[t-cm]	[ton]	[ton]	[ton]	[ton]	[cm]
A	67.84	1600	108544	788.82	42212557.56	208.27	160	472.41	69576.5	54.3	19.54	73.84	18.7	2.34
B	67.84	600	40704	-211.18	3025459.964	208.27	160	48.27	7109.2	54.3	-0.54	53.76	5.0	1.64
C	48.31	0	0	-811.18	31788607.66	208.27	160	48.27	7109.2	38.68	-1.46	37.22	13.7	1.72
$\Sigma =$					77026625.18					147.28				

ecuación (4.71) $Y_t = 149248/183.99 = 811.18$ [cm]

ecuación (4.82) $R = 77026625.18 + 113495694.1 = 190522319.3$

$F_{Ni} = V_{ci} - V_{ci+1}$

$\Delta_{ei} = V_{ci} / k_{ei}$

EJE	$V_{ix} + 0.3V_{iy}$	$0.3V_{ix} + V_{iy}$	$100x + 30y$ F_{N1}	$30x + 100y$ F_{N1}
	[ton]	[ton]	[ton]	[ton]
A	79.45	40.85	15.96	11.43
B	55.25	21.13	18.46	8.08
C	41.33	24.87	9.13	6.85

Tabla 4.19. NIVEL 1 : DIRECCION Y (figura 4.70)

EJE	k_{jy}	X_j	$k_{jy}X_j$	Centro X_{jt}	de $k_{jy}X_{jt}^2$	torsión e_{xy}	01b	e_{dx}	M_{iy}	Efectos directo V_{jy}	de torsión F_{iy}	V_{iy} total	Efectos torsión F_{xi}	$Q\Delta_{ei}$
	[t/cm]	[cm]	[ton]	[cm]	[t-cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[t-cm]	[ton]	[ton]	[ton]	[ton]	[cm]
1	76.81	0	0	-846.27	55009241.44	186.82	180	6.82	987.8	51.08	-0.34	50.74	23.7	1.51
2	29.26	600	17556	-246.27	1774587.191	186.82	180	6.82	987.8	19.46	-0.04	19.42	2.6	1.38
3	57.27	1200	68724	353.73	7165903.762	186.82	180	460.23	66659.7	38.08	7.09	45.17	7.4	1.66
4	54.47	1800	98046	953.73	49545961.73	186.82	180	460.23	66659.7	36.22	18.18	54.4	19.0	2.21
$\Sigma =$					113495694.1					144.84				

ecuación (4.70) $X_t = 184326/217.81 = 846.27$ [cm]

$F_{Ni} = V_{ci} - V_{ci+1}$

$\Delta_{ei} = V_{ci} / k_{ei}$

EJE	$V_{iy} + 0.3V_{ix}$	$0.3V_{iy} + V_{ix}$	$100y + 30x$ F_{N1}	$30y + 100x$ F_{N1}
	[ton]	[ton]	[ton]	[ton]
1	57.85	38.92	-4.16	1.74
2	20.20	8.43	-3.23	-0.60
3	47.39	20.95	2.25	-9.16
4	60.10	35.32	60.1	35.32

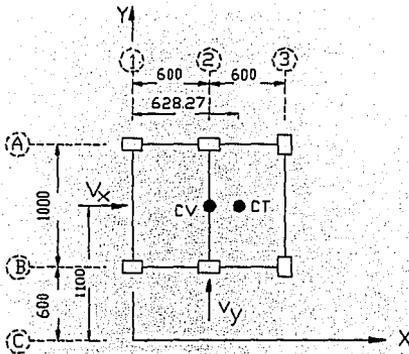


Figura 4.68. Centros de torsión y cortante del piso 3 del edificio tratado en el problema I del inciso 4.3.6.2.

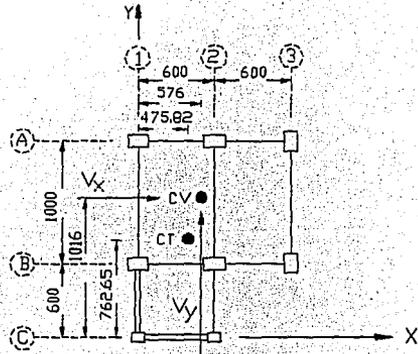


Figura 4.69. Centros de torsión y cortante del piso 2 del edificio tratado en el problema I del inciso 4.3.6.2.

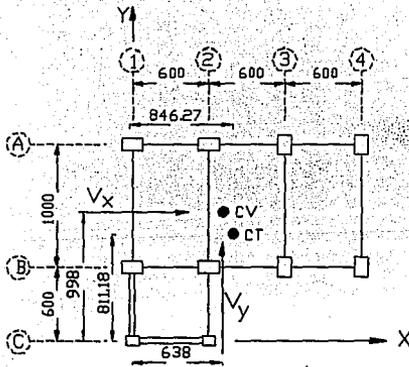


Figura 4.70. Centros de torsión y cortante en el piso 1 del edificio tratado en el problema I del inciso 4.3.6.2.

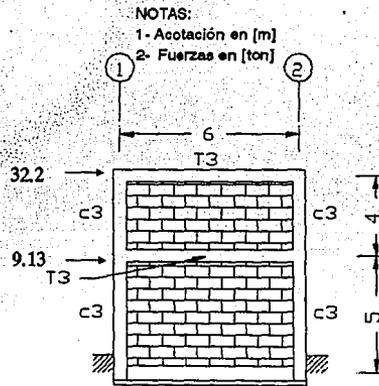


Figura 4.71. Fuerzas sísmicas en el marco C del edificio de la figura 4.70 (100% X + 30% Y).

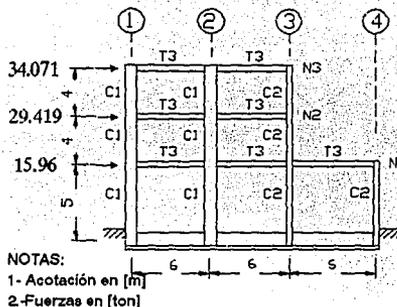


Figura 4.72. Fuerzas sísmicas en el marco A del edificio de la figura 4.70 (100%X+30%Y).

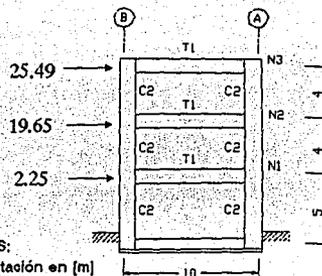


Figura 4.73. Fuerzas sísmicas en el marco 3 del edificio de la figura 4.70 (100%X+30%Y).

Finalmente, algunos ejemplos de las fuerzas sísmicas que actúan en los marcos planos del edificio, se observan en las figuras 4.71, 4.72 y 4.73, para la condición de análisis que considera actuando 100 % de las fuerzas en X más 30 % de las fuerzas en Y.

Del análisis estructural de estos marcos se pueden obtener los elementos mecánicos actuantes por causa de las fuerzas sísmicas. Estos elementos mecánicos deben adicionarse a los producidos por las cargas muertas y vivas de acuerdo a las combinaciones recomendadas por el RCDF-93 y determinar si los elementos estructurales son capaces de resistirlos.

4.3.9.2.- PROBLEMAS PROPUESTOS.

I.- Completar el análisis sísmico dinámico del edificio tratado en el problema I del inciso 4.3.6.3, superponiendo los efectos de torsión.

Solución: 100%X + 30%Y: (NIVEL 3), 32.28(eje A), 14.52(eje C), 17.42(eje E), 17.36(eje 1), 3.96(eje 2), 2.0(eje 3), 3.38(eje 4), 20.26(eje 5); (NIVEL 2), 55.28(ejeA), 28.72(eje C), 32.76(eje E), 33.59(eje 1), 5.72(eje 2), 2.84(eje 3), 4.97(eje 4), 37.13(eje 5); (NIVEL 1), 73.57(eje A), 35.46(eje C), 39.14(eje E), 50.12(eje 1), 5.94(eje 2), 2.76(eje 3), 5.39(eje 4), 52.77(eje 5).

100%Y + 30%X: (NIVEL 3), 11.60(eje A), 4.81(eje C), 6.68(eje E), 23.88(eje 1), 6.83(eje 2), 5.77(eje 3), 6.71(eje 4), 30.82(eje 5); (NIVEL 2), 18.71(ejeA), 9.06(ejeC), 11.51(eje E), 47.23(eje 1), 10.08(eje 2), 8.42(eje 3), 9.72(eje 4), 55.86(eje 5); (NIVEL 1), 23.76(ejeA), 11.00(ejeC), 13.06(eje E), 66.65(eje 1), 10.10(eje 2), 8.30(eje 3), 9.78(eje 4), 73.07(eje 5).

4.3.10.- ANALISIS SISMICO SIMPLIFICADO.

Este método es propuesto por el RCDF-93 en sus Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo^[ref. 5], para el análisis sísmico de edificios que cumplan con los siguientes requisitos:

I. En cada planta al menos el 75 % de las cargas verticales están soportadas por muros ligados entre sí mediante losas monolíticas u otros sistemas de piso suficientemente resistentes y rígidos al corte. Dichos muros tendrán distribución sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales y deberán satisfacer las condiciones que establecen las normas complementarias correspondientes. Puede haber cierta asimetría en la distribución de los muros siempre que existan en todos los pisos dos muros de carga perimetrales y paralelos, cada uno con una longitud igual a la mitad de la dimensión mayor en planta del edificio.

II. La relación entre longitud y anchura de la planta del edificio no excederá de 2.0.

III. La relación entre la altura y la dimensión mínima de la base del edificio no excederá de 1.5. La altura del edificio no será mayor de 13 [m].

La fuerza cortante es determinada sin necesidad de conocer el período fundamental de oscilación ni el factor de comportamiento sísmico. El método evita la consideración de torsiones

mediante el cumplimiento de los requisitos antes mencionados.

El procedimiento para obtener las fuerzas cortantes sísmicas en los entrepisos del edificio es el mismo que se usó en el método estático sin estimar el período de oscilación; pero con la diferencia de que las ordenadas espectrales son las especificadas en la tabla 4.20. Los coeficientes de esta tabla ya tienen en cuenta las reducciones por ductilidad y fueron obtenidos a partir del período fundamental estimado en función de la altura de la estructura^[ref. 7].

La fuerza sísmica actuante en cada entrepiso en la dirección analizada, se distribuye uniformemente entre cada muro alineado en dicha dirección, y por tanto debe compararse contra la fuerza cortante resistente del entrepiso, dada por la suma de las contribuciones individuales de los citados muros.

La fuerza cortante resistente V_r de cada muro se calcula según el RCDF-93 en sus Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería^[ref. 10], como la menor de las siguientes

$$V_{r1} = F_r(0.5V^*A_T + 0.3P) \quad \dots(4.85)$$

$$V_{r2} = 1.5F_rV^*A_T \quad \dots(4.86)$$

$$V_r = V_{r1} \leq V_{r2} \quad \dots(4.87)$$

V_{r1}, V_{r2} - fuerza cortante resistente

F_r - factor de reducción (0.7 para muros reforzados)

Tabla 4.20. Coeficientes sísmicos reducidos por ductilidad para el Método simplificado, según el RCDF-93^[ref. 3]

ESTRUCTURAS GRUPO B *						
MUROS DE PIEZAS MACIZAS O DIAFRAGMAS DE MADERA CONTRACHAPADA				MUROS DE PIEZAS HUECAS O DIAFRAGMAS DE DUELAS DE MADERA		
ZONA	ALTURA DE LA CONSTRUCCION			ALTURA DE LA CONSTRUCCION		
	<4[m]	4 a 7[m]	7 a 13[m]	<4[m]	4 a 7[m]	7 a 13[m]
I	0.07	0.08	0.08	0.10	0.11	0.11
II,III	0.13	0.16	0.19	0.15	0.19	0.23

* Estructuras grupo A multiplicar por 1.5.

A=área de la sección transversal del muro

P=carga axial del muro

v=esfuerzo cortante medio nominal de la mampostería

En muros cuya relación altura a longitud sea mayor que 1.33 la resistencia a fuerza cortante

debe ser afectada por el factor $(1.33L/h)^2$, que toma en cuenta su poca rigidez y la influencia de la flexión.

L=longitud del muro

h=altura del muro

4.3.10.1.- PROBLEMAS RESUELTOS.

I.- Aplicando el Método simplificado de análisis sísmico al edificio del problema II del inciso 4.3.6.3 (figura 4.60), determinar si es adecuado para resistir fuerzas sísmicas.

Se cumplen las condiciones para la aplicación del método simplificado, ya que: más del 75% de las cargas verticales están soportadas por muros ligados entre sí por las losas; existen muros perimetrales paralelos cuyas longitudes exceden más del 50% de la longitud mayor en planta del edificio; la altura (H = 8.4 [m]), es menor que 13 [m]; en planta la longitud entre el ancho es menor que dos; y en elevación la altura entre la dimensión mínima en planta es menor que 1.5. (8.4/7 = 1.2).

De la tabla 4.20, para construcción tipo B; zona III (zona del lago), altura de la construcción comprendida entre 7 y 13 [m] y muros de carga de piezas macizas, se tiene

$$c/Q' = 0.19 \quad \dots(a)$$

Al resolver el problema II del inciso 4.3.6.3, se obtienen los siguientes pesos de los niveles

$$W_{N3} = 57.65 \text{ [ton]} \quad \dots(b)$$

$$W_{N2} = W_{N1} = 66.433 \text{ [ton]}$$

...(c)

Empleando las ecuaciones (4.56) y (4.57) se procede a llenar la tabla 4.21

•DIRECCION X e Y

NIV.	ENT	h _i [m]	W _i [ton]	W _i h _i [t-m]	P _i [ton]	V _i [ton]	V _{ui} [ton]
N3		8.4	57.65	484.26	16.82		
	EN3					16.82	18.50
N2		5.6	66.433	372.0248	12.92		
	EN2					29.74	32.72
N1		2.8	66.433	186.0124	6.46		
	EN1					36.20	39.82
Σ=			190.516	1042.2972			

Tabla 4.21

con

$$V_o = cW_o/Q' = (0.19)(190.516) = 36.2 \text{ [ton]}$$

...(d)

$$V_{ui} = V_i(FC) = 1.1V_i$$

...(e)

FC-factor de carga = 1.1. para sismo[ref. 3]

Se revisará la resistencia del entrepiso 1 donde actúa la fuerza cortante más desfavorable. En la tabla 4.22 se tabulan los cálculos efectuados en base a las ecuaciones (4.85), (4.86) y (4.87), la carga axial P que obra en cada muro se calcula en base a su área tributaria A_t, la cual se muestra para cada muro en la figura 4.74.

Tabla 4.22

DIRECCION Y										
Muro	L [m]	A _t [m ²]	P _{N1} (*) [kg]	P _{N2} (*) [kg]	P _{N1} (*) [kg]	P [kg]	h/L	V _{R1} [kg]	V _{R2} [kg]	V _R [kg]
1	4.0	5.44	6306	6197	6197	18700	0.70	8127	12600	8127
2	2.5	5.38	4911	4804	4804	14519	1.12	5674	7875	5674
3	2.5	5.25	4848	4743	4743	14334	1.12	5635	7875	5635
4	3.5	9.34	7762	7575	7575	15337	0.80	6896	11025	6896
5	3.5	8.34	7272	7105	7105	21482	0.80	8186	11025	8196
6	3.5	3.06	4684	4623	4623	13930	0.80	6600	11025	6600
Σ=	19.5	36.81								41128
DIRECCION X										
7	3.0	2.53	3970	3919	3919	11808	0.93	5630	9450	5630
8	3.0	6.00	5670	5550	5550	16770	0.93	6672	9450	6672

DIRECCION X										
Muro	L [m]	A _t [m ²]	PN ₁ ^(*) [kg]	PN ₂ ^(*) [kg]	PN ₃ ^(*) [kg]	P [kg]	h/L	VR ₁ [kg]	VR ₂ [kg]	VR [kg]
9	5.0	5.20	7098	6994	6994	21086	0.56	9678	15750	9678
10	2.0	2.16	2878	2835	2835	8548	1.40	3895	6300	3515
11	1.5	5.25	3938	3833	3833	11604	1.87	4012	4725	2030
12	2.0	5.05	4295	4194	4194	12683	1.40	4764	6300	4300
Σ =	16.5	26.19								31825

Tabla 4.22 (continuación)

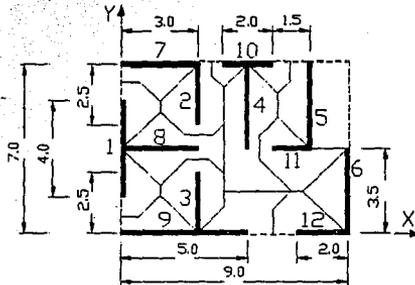


Figura 4.74. Áreas tributarias tipo de los muros de carga del edificio de la figura 4.60 (niveles 1, 2 y 3).

$$*P = A_t(CM + CV) + Lw_{muro} \quad \dots(f)$$

$$P = PN_1 + PN_2 + PN_3 \quad \dots(g)$$

$$h = 2.8 [m] \quad \dots(h)$$

Por tanto en la dirección Y la estructura es adecuada ($V_r > V_u$); pero en la dirección X la resistencia a cargas laterales no es suficiente ($V_r < V_u$).

4.3.10.2.- PROBLEMAS PROPUESTOS.

I.- Mediante un análisis sísmico simplificado, determinar si es adecuado en su resistencia a cargas laterales, el edificio de tres niveles cuya planta estructural tipo se muestra en la figura 4.75.

El inmueble está estructurado a base de muros de carga de mampostería de 15 [cm] de espesor, formados por piezas de bloque de concreto hueco con refuerzo interior. La mampostería cumple con las especificaciones para mampostería reforzada del RCDF-93 y sus Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de mampostería^[ref. 10], de tal forma que su resistencia al esfuerzo cortante es de $v^* = 2.5 [kg/cm^2]$. Las alturas de todos los entrepisos son de 3 [m].

Los sistemas de piso formados por losas macizas de concreto reforzado tienen un peso, incluyendo firmes y acabados, de 350 y 430 [kg/m²], para niveles inferiores y azotea, respectivamente. Cuenta con pretilas de 90 [cm] de altura en la zona de ventanas y en el perímetro de la azotea. El peso de los muros

y pretiles incluyendo acabados es de $340 \text{ [kg/m}^2\text{]}$. La edificación se encuentra desplantada en la zona III (zona del lago), del Distrito Federal.

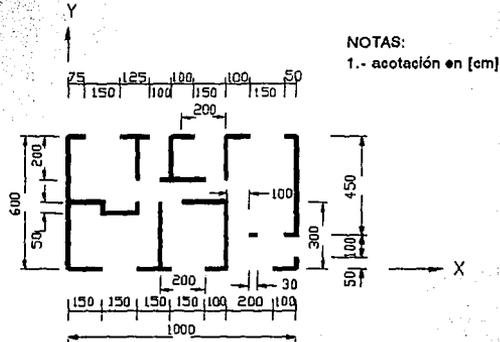


Figura 4.75. Edificio de vivienda familiar con muros de carga de bloques de concreto.

Solución: ENTREPISO 1: Dirección X: $[V_r = 16580 \text{ kg}] < [V_u = 51550 \text{ kg}]$; Dirección Y: $[V_r = 49017 \text{ kg}] < [V_u = 51550 \text{ kg}]$, la estructura no es adecuada.

BIBLIOGRAFIA.**1.- APUNTES DE DISEÑO ESTRUCTURAL.**

De Buen y López de Heredia O., et al.,
Facultad de Ingeniería, UNAM, México 1985.

2.- MANUAL DE DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS,

Meli Piralla Roberto y Bazán Zurita Enrique.,
Ed.Limusa, S.A. de C.V., México 1987.

3.- REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL (RCDF-93),

Diario Oficial de la Federación., 2 de agosto., México 1993.

4.- ESTRUCTURAS ANTISISMICAS,

Estrada Uribe Gabriel,
Cia.Editorial Continental, S.A. de C.V., México 1984.

5.- NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS PARA DISEÑO POR SISMO,

Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal.,
México 1987.

6.- CONFIGURACION Y DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS,

Arnold Christopher y Reitherman Robert,
Ed.Limusa, S.A. de C.V., México 1987.

7.- DISEÑO ESTRUCTURAL,

Meli Roberto,
Ed.Limusa, S.A. de C.V., México 1989.

8.- CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA., METODOS DE STODOLLA-VIANELLO-NEWMARK,

Del Valle C. Enrique,
Facultad de Ingeniería UNAM., División de Educación Continua., México 1992

9.- ANALISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS,

Kinney J.Sterling,
Ed.CECSA, México 1981.

10.-NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS PARA DISEÑO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA,

Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal.,
México 1987.

11.- DISEÑO DE CONCRETO ARMADO,

Everard Noel J. y Tanner III John L.,
Serie Schaum., Libros McGraw-Hill de México, S.A. de C.V., México 1981.

12.- SAP IV-80: A STRUCTURAL ANALYSIS PROGRAM FOR STATIC AND DYNAMIC RESPONSE OF LINEAR SYSTEMS,

Wilson K.J., et al.,
Earthquake Engineering Research Center., Universidad de California, USA 1980.

13.- THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF BUILDING SYSTEMS (EXTENDED VERSION) - ETABS,

Wilson K.J., et al.,
Earthquake Engineering Research Center., Universidad de California, USA 1980.

14.- CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA, ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS CON FUNDAMENTO EN EL RCDF-87,

Cervantes Beltrán Ramón,
Facultad de Ingeniería UNAM., División de Educación Continua., México 1992.

**15.- NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS
PARA DISEÑO Y CONSTRUCCION DE
ESTRUCTURAS DE CONCRETO,**

Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal,
México 1987.

**16.- (ACI 318-83) REGLAMENTO DE LAS CON-
STRUCCIONES DE CONCRETO REFORZADO Y
COMENTARIOS,**

American Concrete Institute., Ed.Limusa, S.A., México
1990.

**17.- ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL CON-
CRETO REFORZADO,**

González Cuevas Oscar M. y Robles Fernández Francisco,
Ed.Limusa, S.A., México 1990.

**18.- MICROCOMPUTER-AIDED ENGINNER-
ING, STRUCTURAL DYNAMICS,**

Paz Merio,

Ed.Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, USA
1988.

19.- DISEÑO DE ACERO ESTRUCTURAL,

Bowles Joseph E.,

Ed.Limusa S.A., México 1984.

**20.- COMENTARIOS Y EJEMPLOS DE LAS
NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS
PARA DISEÑO Y CONSTRUCCION DE
ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA, DDF.,**

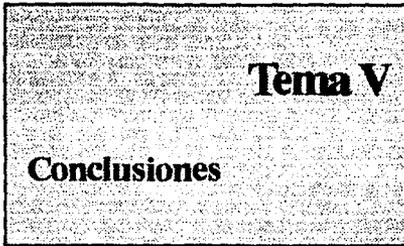
Meli Roberto,

Series del Instituto de Ingeniería UNAM., México 1992.

**21.- CATALOGO DE ACELEROGRAMAS
PROCESADOS DEL SISMO DEL 19 DE SEP-
TIEMBRE DE 1985,**

Alcantara Leonardo, et al.,

Series del Instituto de Ingeniería UNAM., México 1990.



Tema V

Conclusiones

De acuerdo con los objetivos mencionados en el tema I considero que el material presentado a lo largo de este trabajo de tesis, cubre los conceptos fundamentales que son de importancia primordial en la aplicación práctica de la Ingeniería Sísmica.

Debido al énfasis puesto en los aspectos prácticos mediante el desarrollo de los problemas resueltos y propuestos que se presentaron, el volumen de esta tesis resultó extenso y puede darse el caso de que no haya tiempo suficiente para estudiar todos ellos en su totalidad durante el tiempo oficial asignado a la materia en un semestre, sin embargo estos problemas pueden servir como referencia y consulta posterior una vez iniciada la trayectoria laboral profesional del Ingeniero Civil.

Debido a que el alcance de este trabajo se enfoca a los conceptos básicos de la Ingeniería Sísmica, algunos temas fueron estudiados sólo superficialmente aunque haciendo énfasis en las características prácticas. El tratamiento en profundidad de tales temas es materia de cursos

de postgrado y especialización contemplados en los planes de estudios de maestría y doctorado de la Universidad Nacional Autónoma de México; tal es el caso de los sistemas no lineales y los sistemas continuos, así como de las investigaciones que actualmente se realizan sobre el análisis paso a paso de sistemas no lineales tridimensionales, de la interacción suelo estructura, y principalmente en el desarrollo de mecanismos de aislamiento y disipación de la energía sísmica.

A lo largo de los tópicos tratados en esta tesis, se presentaron las codificaciones en lenguaje basic de varios programas para calculadora de bolsillo, esto se hizo así con el objetivo de que el estudiante del noveno semestre de Ingeniería Civil que cursa la asignatura de Ingeniería Sísmica vaya conociendo de una forma sencilla y fácil de comprender, la manera en que operan los programas de análisis sísmico de estructuras, que en la actualidad son ampliamente usados en los despachos de diseño, además de que se intenta así introducirlo en el uso de la computación, herramienta sin la cual no es posible desarrollarse profesionalmente como ingeniero proyectista estructural.

Los programas fueron desarrollados expresamente para calculadoras de bolsillo, que son relativamente accesibles en cuanto al aspecto económico, pues en estas fechas es difícil que el estudiante tenga acceso sin limitaciones de tiem-

po a microcomputadoras o computadoras personales, además de que la calculadora de bolsillo, aun con sus limitaciones, tiene la ventaja de poder llevarse fácilmente a cualquier lugar.

De esta manera se pretende influir en el estudiante para que reconozca adecuadamente la función que tienen los programas de análisis y

diseño estructural en la continua búsqueda de mejores diseños sismorresistentes.

Solo resta decir que aunque durante el proceso de titulación los problemas propuestos y resueltos fueron revisados por varios profesores y sinodales, los errores que pudieran llegar a encontrarse en los cálculos son enteramente responsabilidad del autor de este trabajo.