03071

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSTGRADO DEL COLEGIO DE CIECIAS Y HUMANIDADES

PROYECTO: MAESTRIA EN EDUCACION MATEMATICA

INTUICIONES PROBABILISTICAS EN ALUMNOS DE 11 A 16 AÑOS EN UNA ESCUELA MEXICANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRIA EN EDUCACION MATEMATICA

P R E S E N T A :

GUADALUPE JOSEFINA GONZALEZ-ORTEGA RIVERA

MEXICO, D. F. 1995

FALLA DE ORIGEN

AGRADECIMIENTOS:

A la M. en C. Asela Carlón Monroy, directora de tesis, por su asesoría para el desarrollo y conclusión del presente trabajo.

Al comité revisor integrado por las siguientes personas:

DR. ARMANDO M. MARTINEZ CRUZ
DR. ENRIQUE RUIZ-VELASCO SANCHEZ
M. EN C. ASELA CARLON MONROY
M. EN C. SERGIO CRUZ CONTRERAS
M. EN C. MANUEL MEDA VIDAL

INDICE

INTRODUCCION

La probabilidad proporciona un modo de medir la incertidumbre que existe en muchos problemas de distinta índole. Los modelos probabilísticos son el fundamento de la mayor parte de la estadística, por lo que no sólo es necesario un conocimiento de la probabilidad en sí, sino también es necesaria esta teoría para una comprensión adecuada de los métodos estadísticos que son hoy en día casi indispensables.

En los programas de enseñanza básica y media superior se han incorporado temas de probabilidad y estadística, pero todavía no se ha resuelto satisfactoriamente el problema didáctico. Existen problemas de orden conceptual, psicológico, sociológico y curricular en torno a la enseñanza y al aprendizaje de la probabilidad. Los alumnos tienen ciertas intuiciones creadas por el ambiente en el cual se desarrollan. Estas intuiciones son elementales y muchas veces erróneas. El objetivo principal de la enseñanza, es ayudar al alumno a eliminar estos errores y adquirir conocimientos claros que le ayuden en su formación personal y le permitan acceder a estudios profesionales. Para lograr este objetivo se necesitan llevar a cabo investigaciones de orden conceptual, psicológico y pedagógico, sobre las teorias probabilísticas y la construcción de los conceptos.

Este trabajo tiene como objetivo principal describir las intuiciones y los conocimientos que parecen tener los alumnos entre 11 y 16 años en una escuela mexicana. De tal modo que en el primer capítulo de este trabajo se plantea los antecedentes, la importancia, el alcance y los limitaciones del problema anterior.

En el segundo capítulo se presenta una breve introducción sobre la probabilidad en la educación y sus distintas teorías, y la enseñanza de la probabilidad en la escuela mexicana escogida para el estudio. Además en este capítulo se resumen las principales investigaciones hechas, sobre la adquisición de conceptos probabilísticos por niños o por alumnos, por Piaget/Inhelder, Fischbein, Kaheman/Tverky/Slovic y Green .

En el tercer capítulo, se hace el estudio de caso, en una escuela mexicana, aplicando primeramente el test de Green sobre conceptos de azar y probabilidad, a alumnos desde la edad de 11 a 16 años. Se hace un análisis de los resultados obtenidos (analisis en porcentaje por pregunta), y se plantean cuatro hipotesis relacionando las variables conocimientos probabilísticos (medido por el test anterior), edad, año escolar, calificación de matemáticas y sexo.

En el cuarto capítulo se enuncian las conclusiones del estudio.

CAPITULO 1. MARCO CONCEPTUAL.

1.1 Antecedentes del problema.

La incertidumbre está presente en nuestra vida diaria social o profesional, y es una característica de la naturaleza. Sin embargo el tema de probabilidad no se incluía sino hasta el último año de la enseñanza medio-superior (tercer año de preparatoria). Con la introducción de la matemática moderna, los temas probabilísticos se fueron incorporando poco a poco, hasta incluirse en la primaria.

Por lo general los libros de texto, introducen al alumno a este tema, en una primera etapa, vía el estudio de permutaciones y combinaciones, que lleva a la resolución de problemas combinatorios, más que al aprendizaje y la enseñanza del concepto de azar y de los fenómenos aleatorios.

En una segunda etapa, la probabilidad es una teoría abstracta que satisface determinados axiomas, obteniendo resultados teóricos mediante deducciones lógicas. Generalmente se establece una separación entre el mundo conceptual y el mundo físico, del cual surgen los axiomas y al cual se aplican los axiomas. Consecuencia de esto es que la gran mayoria de los alumnos no logran reconocer ni entender los fenómenos aleatorios, ni manejar el modelo probabilístico matemático.

Las razones para esta falla del proceso de enseñanza aprendizaje podrían ser entre muchas otras, las siguientes:

- Razones históricas.

Fue Laplace el primero en definir la noción de probabilidad con rigor matemático, según se cita en el libro Ensayo filosófico sobre las probabilidades de 1814, como la proporción del número de casos favorables, al número de casos posibles, siempre que todos los resultados fuesen igualmente probables. De acuerdo a esta definición, el cálculo de la probabilidad de los sucesos se reduce a problemas de análisis combinatorio.

La teoría matemática de Kolmogorov surgió como consecuencia de las restricciones que el concepto clásico anterior impone sobre la equiprobabilidad de los sucesos, y la finitud del espacio muestral correspondiente,(Foundations of Theory of Probability de 1933). Esta teoria no sólo conecta la probabilidad con la corriente matemática moderna, de suma importancia, sino que logra hacer de la probabilidad una teoría unificadora y general. Obviamente esto hace que la materia de estudio se centre en teoría de conjuntos y sea sumamente abstracta para el alumno.

- Razones psicológicas.

Los estudios de Piaget (La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant de 1951) sobre el azar, dan mucha importancia a la noción de probabilidad en su sentido clásico laplaciano, y muestran que es necesario el requisito de sistemas de operaciones y un pensamiento lógico para la adquisición de la noción de probabilidad.

Para Piaget y sus seguidores, la enseñanza de la materia es del tipo formal y debe hacerse hasta el período de las operaciones formales es decir después de los 11 años de edad.

- Razones curriculares.

En la escuela existe una tendencia a relegar el tema de probabilidad. Se dan prioridad en el curriculum a los temas de geometría, álgebra, cálculo y hasta estadística. Así la probabilidad es un tema que se estudia como algo desligado del resto del curriculum de matemáticas.

Es una realidad que en la escuela se le da poca importancia al desarrollo de los aspectos generales e intuitivos del tema de la probabilidad tan necesarios para que el alumno construya apropiadamente un conocimiento probabilístico, es decir que el alumno reconozca y entienda los fenómenos aleatorios.

Ahora bien, estudios más recientes como los de Fischbein (The intuitive sources of probabilistic thinking in children de 1975) han mostrado la capacidad de los niños incluso desde preescolar de procesar información probabilística de un modo significativo y útil, y los efectos positivos de la instrucción sobre este tema.

Las investigaciones llevadas a cabo mediante encuestas, a alumnos universitarios, por Kahneman (Judgement under uncertainty en 1982), muestran que la mayoría de dichos alumnos tienen un conocimiento escaso o nulo sobre las nociones probabilísticas básicas, aún después de haber cursado uno o más cursos sobre el tema. En estos trabajos se ponen de manifiesto, errores sistemáticos profundamente arraigados en su intuición probabilística (representatividad, disponibilidad). Se hace evidente que una mera exposición de la teoría matemática de probabilidad no es suficiente para corregir dichos sesgos y que éstos pueden dificultar la asimilación de conceptos formales.

Mas recientemente Green (Probability Concepts in School Pupils aged 11-16 years en 1982), realizó y aplicó un test de Conceptos de Probabilidad, test de opción múltiple, a casi 3000 alumnos de escuelas inglesas entre 11 y 16 años de edad para muestrear las intuiciones de azar y probabilidad que estos poseen. En la elaboración del test Green retomó los puntos esenciales de los trabajos de Piaget, de Fischbein, de Kanheman y otros. El objetivo del trabajo de Green fue establecer patrones de desarrollo de conceptos de probabilidad y relacionarlos con otros conceptos matemáticos, e investigar las repuestas de los alumnos a los items de probabilidad de otros tests estandarizados.

Los resultados de este trabajo fueron los siguientes:

-las preguntas de probabilidad no son de las más difíciles en matemáticas.
-los niños responden mejor que las niñas a los items de probabilidad.
-a mayor edad se resuelven mejor los items de probabilidad excepto en algunas preguntas.
-los items que requieren de operaciones de conteo son mejor resueltos que los que requieren de operaciones de cociente.
-los problemas que requieren de una comprensión del azar, de estabilidad de frecuencias y de inferencia fueron deficientemente resueltos, con poca evidencia de mejora con la edad.
-fueron muy pocos los alumnos que contestaron el item de combinatoria en su forma más general.
-el uso correcto del lenguaje probabilístico es deficiente.
-la calificación del test sobre conceptos de probabilidad aumenta a mayor la edad y a mejor el nivel intelectual.

Los resultados de este trabajo muestran que hay deficiencias en los conocimientos de los alumnos sobre el tema y hace constar que existe una gran necesidad para una actividad práctica, desde una temprana edad, para lograr construir el bagaje intuitivo, necesario para una comprensión adecuada del tema.

Inspirada en este trabajo mi objetivo fue utilizar el test de Conceptos de Probabilidad de Green para indagar los conocimientos de probabilidad en los alumnos de enseñanza básica y media-superior, de una escuela mexicana.

1.2 Importancia del problema.

Aunque la ciencia hoy en día reconoce la importancia del tema de la probabilidad, y trata de afrontarlo e incorporarlo , parece ser que en el ámbito educativo el problema no está resuelto todavía. En los nuevos programas hay una tendencia a eliminar el tema otra vez de la primaria. Parecería que el problema que se plantea es el de incluir o no el tema de probabilidad en el currículo de matemáticas, cuando el problema debería de ser de orden didáctico, es decir, ¿cómo organizar el correspondiente proceso de enseñanza-aprendizaje, de tal forma que sea posible el desarrollo de intuiciones probabilísticas acertadas en el periodo de enseñanza de 6 a 16 años?

Sabemos que hace falta mucha investigación sobre este tema de las matemáticas, que nos permita dar respuesta a las muchas preguntas que se puede uno plantear, como por ejemplo:
-¿Los temas que se dan actualmente son suficientes para que el alumno adquiera un conocimiento básico que le ayude en su desarrollo personal, profesional, y le dé las bases para estudios superiores y universitarios?

-¿Los alumnos poseen sesgos y creencias erróneas creadas por el ambiente social en el que viven?

-¿Porqué estos sesgos subsisten aun después de tomar varios cursos de probabilidad?

-¿Cómo organizar la enseñanza de la probabilidad?

Obviamente el presente trabajo no pretende dar respuesta a estas preguntas, sino describir el nivel de conocimientos de los alumnos en una escuela mexicana en particular.

1.3 Planteamiento del problema

El objetivo del presente trabajo es describir, los conocimientos, las intuiciones y algunos errores sobre probabilidad, uqe tienen los alumnos de 11 a 16 años de edad, en una escuela mexicana, con un sistema de enseñanza tradicional, con el programa de estudios de la SEP vigente en el año escolar 1992-1993, utilizando el test de Conceptos Probabilísticos elaborado por Green.

1.4 Alcance y limites del problema

El test se aplicó en una escuela voluntaria, que abarca desde el nivel pre-escolar hasta la secundaria, y que sigue los programas de estudio de la SEP. Es una escuela mixta, de tipo tradicional, tri-lingüe (español, francés, inglés). Al finalizar la secundaria los alumnos tienen dos opciones se incriben en cualquier otra preparatoria o se incorporan directamente a la preparatoria del sistema de enseñanza francés siempre y cuando dominen el idioma. En caso contrario se ven obligados a inscribirse en el curso especial, año en el que sólo cursan dos materias francés y matemáticas. Despues de este año escolar, los alumnos cursan los tres años de preparatoria.

Básicamente podemos decir que los alumnos de 5° año de primaria tienen 11 años de edad, los alumnos de 6° año de primaria tienen 12 años de edad y asi sucesivamente. Entonces los alumnos de 3° de secundaria tienen 15 años de edad. Dado que nos interesa cubrir una población de alumnos de 11 a 16 años de edad encuestamos a los alumnos del curso especial los que casi en su mayoria tienen 16 años de edad, pero no son todos los egresados del 3° año de secundaria.

Los programas de estudio vigentes de la SEP, incluyen los temas de probabilidad en sexto de primaria, y en primero, segundo y tercero de secundaria.
Los alumnos de todos los años, excepto los alumnos de sexto, declararon acordarse poco del tema, esto se debe a que el tema de probabilidad en sexto se ve a lo largo del año. En los tres años de secundaria el tema siempre se estudia en la última semana del ciclo escolar. En el curso especial no se estudia explícitamente ningún tema de probabilidad.

La población estudiada fue de 144 alumnos de los cuales tenemos:
- 18 alumnos de 5° de primaria
- 19 alumnos de 6° de primaria
- 35 alumnos de 1° de secundaria
- 27 alumnos de 2° de secundaria
- 29 alumnos de 3° de secundaria
- 16 alumnos de curso especial

de tal forma que fueron:
- 23 alumnos de 11 años
- 16 alumnos de 12 años
- 37 alumnos de 13 años
- 23 alumnos,de 14 años
- 32 alumnos de 15 años
- 13 alumnos de 16 años

de los cuales tenemos:
- 67 mujeres
- 77 hombres

Los 18 alumnos de 5° año de primaria tienen 11 años de edad. De los 16 alumnos del curso especial , dos tienen 17 años de edad y los otros tienen 16 años de edad. En los otros años escolares las edades se mezclan un poco pero básicamente podemos decir que a cada año escolar coresponde una edad (5°-11, 6°-12 , 1°-13 , 2°-14, 3°-15 , C.E.-16), por lo que podemos inferir que a mayor año escolar mayor edad.

El análisis de los resultados del test se presenta en una primera parte, similar al trabajo de Green, es decir, en tablas de respuestas correctas, en porcentajes, por año escolar y por pregunta; luego se hace un análisis estadístico de estos porcentajes para investigar el posible efecto del sexo, de la edad y de la calificación de matemáticas (únicos datos con los que se cuenta).

El estudio se hizo en la primera quincena del mes de junio de 1993, y las calificaciones en matemáticas de los alumnos son las que obtuvieron al final del curso, dado que el año escolar terminó a finales de ese mismo mes.

Es preciso aclarar que el presente trabajo no pretende comparar resultados con los de Green, puesto que las condiciones de la investigación fueron diferentes en muchos aspectos, y no se contó con toda la información que él manejó, ni tampoco generalizar éstos al sistema educativo mexicano, ya que la población que se estudió no es representativa de éste.

El test se aplicó a todos los alumnos de esta escuela. Es decir de 5° de primaria se aplicó el test a todos los alumnos de 11 años, se aplicó el test a todos los alumnos de 6° de primaria, de 1°, de 2°, de 3° de secundaria y a todos los alumnos de un salón del curso especial. Por lo que no tenemos una muestra, sino una población, a la que deseamos describir. En base a los resultados obtenidos sobre esta población en particular, se desea dar respuesta, a las siguientes preguntas:

¿ Los alumnos adquieren los conocimientos probabilísticos básicos necesarios para iniciar una educación matemática en este tema?

¿Tienen los niños un mejor desempeño en este test que las niñas?

¿Está relacionada la calificación en matemáticas con la calificación del test?

¿Qué variables son más significativas con la variable conocimientos probabilísticos, edad, año escolar o calificación en matemáticas?

CAPITULO 2. MARCO TEORICO.

2.1 La probabilidad en la educación.

Cuando se quiere enseñar probabilidad, hay necesidad de estudiar el tema, desde el punto de vista matemático, estadístico, filosófico y pedagógico. Los matemáticos, los estadistas, los filósofos y los pedagogos hacen cosas diferentes con respecto a la teoría de la probabilidad. Los matemáticos desarrollan un cuerpo conceptual, los estadísticos aplican el trabajo de los matemáticos, los filósofos reflexionan sobre el trabajo hecho. Los pedagogos tratan de lograr que el alumno construya apropiadamente un conocimiento sobre el tema, puesto que el objetivo principal de la enseñanza de la probabilidad debe ser lograr que el alumno reconozca y entienda los fenómenos aleatorios,y comprenda y maneje el modelo matemático probabilístico.

Como cualquier otro vocablo importante, la probabilidad tiene muchos matices de significación y admite variedad de usos. Un estudio de los términos utilizados en el lenguaje ordinario, a través de los diccionarios de uso corriente , revela que el azar y la incertidumbre se aprecian como cualidades graduales. Entre lo cierto o lo seguro y lo imposible, está lo probable, término que define M. Moliner (1983) como: "se dice de lo que, en opinión del que habla, es más fácil que ocurra que deje de ocurrir",

.
Para expresar estas tres circunstancias (imposible, probable, seguro), existen una gran variedad de términos. Así, por ejemplo un suceso que es probable (es probable que llueva) se puede expresar con los adjetivos: posible (es posible que llueva), previsible (es previsible que mañana llueva), factible (es factible que llueva). Estos términos funcionan en el lenguaje ordinario como operadores modales, esto es, podemos afirmar un cierto enunciado rotundamente, comprometiéndonos categóricamente con su verdad, o podemos afirmarlo gradualmente. Los enunciados: "lloverá mañana" o "probablemente lloverá mañana" describen la misma realidad. La diferencia estriba en el modo de afirmación: el primero es categórico, incondicional y el segundo es gradual y cauteloso.
El término probabilidad, se puede definir como "cualidad de probable o circunstancia de ser probable una cosa":

"La probabilidad de su hallazgo es cada vez menor".
"Hay probabilidad de encontrarlo".

La mayor o menor probabilidad de ocurrencia de un suceso, puede graduarse de cantidad o número:

"Hay algo de probabilidad que se marche".

"Algo" puede ser sustituido por alguna, muchas, pocas, grandes, ...
Otras veces especialmente en el contexto de apuestas, se estima la probabilidad mediante la comparación de posibilidades a favor y en contra de un resultado:

"El caballo x tiene 3 posibilidades contra 1 de ser ganador".
"Las apuestas son 5 a 1 a favor del equipo x".

También puede la probabilidad ser interpretada como "propiedad" de la persona o cosa a que afecta:

"Tiene algunas probabilidades de colocarse".
"La bala tiene muchas probabilidades de dar en el blanco".

La incertidumbre no sólo afecta a la ocurrencia de sucesos, sino que también puede afectar a la veracidad de las proposiciones o leyes. En castellano, la palabra verosímil (que tiene apariencia de verdadero) se utiliza especialmente con dicha finalidad, aunque también se usa probable en dicho contexto lógico:

"Es probable que lo que dice sea verdad".
"Lo que dice es verosímil".

La variedad y riqueza de términos que puede encontrarse en el diccionario para expresar lo incierto o verosímil, es exponente de la amplitud de contextos, situaciones y matices en que estas características se presentan, y al mismo tiempo de la necesidad de proceder a un análisis más profundo. Los usos formales del término probabilidad en el campo de la ciencia y la filosofía han llevado a definir de un modo cuantitativo y preciso la noción de probabilidad.

Sin embargo estos esfuerzos no han cristalizado en una única teoría, sino que han conducido a la formulación de distintos puntos de vista sobre la naturaleza de la probabilidad y sus conceptos asociados. A continuación revisamos brevemente diferentes teorías que sobre la probabilidad se han planteado, la teoría clasica, las teorías lógicas, la teoría empírica, la teoría subjetiva y la teoría formal.

2.1.1 Teoría clásica de Laplace.

El primer intento de definir con rigor matemático la noción de probabilidad, es debido a Laplace en su obra Théorie Analytique des Probabilités en 1812. Laplace dio la definición que se conoce como clásica de probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como **la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables.**

De acuerdo con ésta definición, el cálculo de la probabilidad de los sucesos se reducía a problemas de análisis combinatorio. Pero incluso en su época, esta definición se encontró inadecuada. Además de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad. Sólo proporcionó un método práctico de cálculo de algunos sucesos sencillos. Laplace, siguiendo a Bernoulli, usó el principio de razón insuficiente, que considera las alternativas como equiprobables en la ausencia de razón conocida para esperar lo contrario. Más recientemente, para justificar la asignación de probabilidades por la regla de Laplace, ha sido formulado el principio de indiferencia, que considera las alternativas como equiprobables cuando hay un balance de evidencia a favor de cada alternativa.

La definición de Laplace supone, en el lenguaje actual de la teoría de conjuntos, que siempre es posible seleccionar, como espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, un conjunto de sucesos elementales que satisfacen las condiciones de simetría que garanticen la equiprobabilidad. Pero la aplicación del principio de indiferencia no es satisfactoria en general, ya que la evidencia nunca es perfectamente simétrica con respecto a un número de alternativas. Es inútil en los casos numerosos en que las posibilidades a analizar no pueden inventariarse en un conjunto de alternativas simétricas. En todo caso, no es apropiado cuando realmente se carece de razones a favor de cada resultado o cuando la variable cuyo valor tiene que determinarse es continua.

La aproximación escolar tradicional hacia la probabilidad es teórica, y a priori, está basada en la noción de sucesos equiprobables. Se les dice a los niños que la probabilidad de obtener un 1 o un 5 en una tirada de dado es 1/6. De hecho, esto entra en conflicto con la experiencia que puedan tener jugando, por ejemplo, al parcasé, cuando a veces han debido de esperar bastante tiempo para comenzar a mover fichas porque no les salía el 5 requerido. Como su experiencia es limitada, pueden tener la impresión de que obtener un 5 es más difícil que obtener otros números. Esta idea puede ser adquirida debido a que los juegos suelen incorporar esta condición para empezar. El razonamiento matemático para superar este error y otros similares no es simple. La aproximación usada a nivel universitario sería tratar el problema a partir de la teoría de la medida de Kolmogorov. Claramente esta aproximación no puede ser utilizada con niños pequeños. Sin embargo, la alternativa de decir al niño que cada número es simplemente equiprobable por definición, difícilmente le proporcionará un fundamento deseable para un trabajo posterior.

Además, para poder asimilar el concepto clásico de probabilidad es necesario una cierta destreza en el manejo de fracciones y en el concepto de razón. Así, para decidir entre dos urnas (una conteniendo 5 bolas rojas y 7 azules, otra 4 rojas y 6 azules), se requiere cierto dominio en la comparación de razones que la mayoría de los niños no adquieren hasta que son mayores de 10 años, aunque para comparar las probabilidades respectivas los niños podrían comparar las posibilidades a favor y en contra de un color determinado en las dos urnas.

2.1.2 Teorías Lógicas.

La teoría clásica no proporciona una guía adecuada para determinar la probabilidad cuando un conjunto de alternativas no son equiprobables y, por tanto, está abierta a una aplicación inconsistente. Keynes (1921), Jeffreys, Kooppman, Carnap y otros autores, desarrollaron las teorías que suelen calificarse de lógicas, (Azar y Probabilidad, Díaz Godino 1987).

Según esta concepción, la probabilidad traduce un grado de creencia racional, esto es, la "tasa de confianza" que conviene conceder a una proposición P a la luz de la información aportada por otra proposición Q. La probabilidad es tratada como un tipo especial de relación entre los dos enunciados ($P(P/Q)$). Los dos casos extremos de ella son la deducibilidad (si P es consecuencia de Q, la proposición Q da a la proposición P la probabilidad 1) y la contradicción (en el caso de que P y Q sean contradictorias, la probabilidad dada por Q a P es 0). Entre estos dos casos extremos se sitúan las otras relaciones de probabilidad.

El dominio formal de una teoría lógica de probabilidad es, generalmente, un conjunto de inferencias entre enunciados o proposiciones en un cierto lenguaje, más que el conjunto de enunciados en sí mismos, siendo diferente del dominio de aplicación de una teoría empírica (conjunto de sucesos o resultados experimentales) y del dominio de una teoría subjetiva (conjunto de creencias de una persona). La probabilidad lógica intenta explicar la inducción, definiendo una relación lógica entre un enunciado evidente y un enunciado hipótesis, que es una generalización de las relaciones de implicación y contradicción disponibles en la lógica deductiva.

En general no parece factible, sin embargo, encontrar situaciones distintas a aquellas en que puede aplicarse la concepción clásica o frecuencial para utilizar este enfoque en la enseñanza elemental.

2.1.3 Probabilidad Frecuencial o Empírica.

Bajo este punto de vista, se considera que la probabilidad se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas de cada uno de los diferentes resultados en pruebas repetidas. El principal elemento en este enfoque es que el concepto de probabilidad debe ser "objetivo", separado de cualquier consideración de factores personales y sujeto a demostración práctica a través de la experimentación.

La teoría frecuencial ha sido defendida en los tiempos modernos por Richard Von Mises, aunque ya en 1888 John Venn defendió explícitamente el cálculo de la probabilidad a partir de las frecuencias relativas de ocurrencias de sucesos y desarrolló sus consecuencias con mucho detalle. También son partidarios de este enfoque Hans Reichenbach y Kolmogorov, según el libro Azar y Probabilidad de Díaz Godino (1987).

El enfoque frecuencial descansa en dos características observables del comportamiento de los resultados de las realizaciones repetidas. En primer lugar, es un hecho que los resultados varían de una repetición a otra de una manera imprevisible. Esto es lo que significa el término "variación aleatoria". En segundo lugar se observa cómo un hecho empírico a corto plazo puede ser desordenado, pero a la larga surge una cierta regularidad. Esta pauta se demuestra de la siguiente forma. Supongamos un suceso particular A que nos interesa, tomamos observaciones repetidas anotando las ocasiones en que A ocurre, entonces la razón entre el número de veces que sucede A, N_A, y el número total de repeticiones N (razón frecuencial o frecuencia relativa de que A ocurra N_A/N) parece tender a un límite cuando N tiende a infinito. En esta aproximación, la idea de probabilidad surge como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa de una secuencia de resultados.

Aunque el planteamiento frecuencial atrae a los estadísticos profesionales y en general es útil siempre que se manejen grandes cantidades de datos, tiene inconvenientes desde los puntos de vista filosófico, conceptual y práctico relacionados con la noción de número infinito de experimentos. No se puede evaluar una probabilidad con precisión, porque el número de ensayos es siempre limitado. Además, existen situaciones donde no es posible conducir ensayos repetidos bajo condiciones experimentales fijas. Incluso con el lanzamiento de un dado es difícil estar razonablemente seguro de que no esta sesgado, examinando y realizando, por ejemplo 1000 ensayos.

Sin embargo, para la enseñanza elemental el enfoque frecuencial es muy adecuado en la asignación de probabilidades de fenómenos, como la distribución de sexos, que tienen una fuerte evidencia experimental. Además, la introducción de la microcomputadora en el aula nos permite abordar en la escuela la probabilidad desde este punto de vista, ya que no resulta costoso ni en esfuerzo ni en tiempo simular un gran número de lanzamientos de un dado, por ejemplo, u otros experimentos similares.

2.1.4 Probabilidad Subjetiva

En esta aproximación, la probabilidad es, en mayor o menor extensión, una expresión de la creencia o percepción personal. Este punto de vista mantiene que la probabilidad mide la confianza que un individuo particular tiene sobre la verdad de una proposición particular y, por tanto, no está unívocamente determinada. Este concepto no descansa en la repetibilidad de ningún proceso, por lo que es posible evaluar la probabilidad de un suceso que puede ocurrir una sola vez, como por ejemplo, la probabilidad de que se descubra un medicamento que cure el cáncer en el próximo año.

Este enfoque tiene afinidades con la aproximación lógica, ya que ambas intentan representar el "grado de creencia" sobre un suceso; pero a diferencia de la idea de probabilidad lógica, en que esta medida se supone única, los subjetivistas consideran que se trata de un grado de creencia "personal" que un individuo sostiene sobre la base de su propia experiencia. Diferentes personas pueden así asignar probabilidades distintas para un mismo suceso.

Aunque esta interpretación fue presentada por primera vez en 1926 por F. P. Ramsey y defendida en 1937 por B. De Finetti, ha sido L. J. Savage quien en los primeros años de la década de los 50 le ha dado un ímpetu considerable, citado en Azar y Probabilidad de Díaz Godino (1987).

En esta concepción, a cualquier entidad aleatoria se le puede atribuir una probabilidad. Esta puede ser asignada de cualquier modo, pero con la condición de que uno esté preparado para aceptar apuestas basadas en dicha asignación. Por ejemplo, si una persona cree que para un cierto dado la probabilidad de obtener un 1 es 0.5, debe estar preparada para pagar 100 pesos si el resultado de una tirada no es un 1 y para ganar 100 pesos si resulta un 1, es decir para esta persona hay tantas posibilidades a favor como en contra del número 1. Este es un criterio plausible intuitivo que De Finetti resume: "Dada una cantidad aleatoria X, debes elegir un valor x sabiendo que, después de hacer esta elección, estás comprometido a aceptar cualquier apuesta con ganancia c(X-x), donde c es arbitraria y elegida por tu oponente."

El segundo criterio que De Finetti postula es la condición de coherencia. En el ejemplo anterior no sería inteligente hacer apuestas con otra persona con la regla de "pagar 100 pesos si sale un número distinto del 2 y ganar 100 pesos si sale el 2". A menos que uno esté seguro de que los números mayores que el 2 no pueden salir nunca, se está abocado a perder sistemáticamente con ese tipo de apuesta. La condición de coherencia es la siguiente: "Se supone que no deseas hacer apuestas que con seguridad conducirán a una pérdida. Un conjunto de probabilidades asignadas por un sujeto son coherentes si entre las combinaciones de apuestas que uno está dispuesto a hacer no hay ninguna en la que la ganancia sea uniformemente negativa".

Se observará que esta condición no da ninguna norma de cómo se puede seleccionar una probabilidad. Sólo indica una forma a seguir para evitar consecuencias indeseables. Sin embargo, a partir de este criterio se pueden derivar las leyes básicas de probabilidad. Por tanto, el criterio de coherencia es bastante notable, proporcionando un fundamento intuitivo pero suficiente para la teoría. La probabilidad subjetiva puede ser un precursor fundamental para la formal enseñada en la universidad. La concepción clásica requiere cierta destreza con las fracciones, mientras que la subjetiva puede depender solamente de comparaciones de verosimilitudes percibidas.

Una forma de estimar las probabilidades de un suceso, especialmente en el terreno de las apuestas, es dar la relación de posibilidades a favor y en contra de ese suceso. Así, cuando decimos que las posibilidades de que el equipo A resulta ganador en un partido son 3 frente a 2, realmente estamos indicando el cociente:

$$\Omega(A) = P(A) / P(A') = 3/2$$

$\Omega(A)$ recibe el nombre de cociente de posibilidades a favor y en contra, y está en correspondencia con la probabilidad del suceso, ya que $P(A')=1-P(A)$, por lo que en el ejemplo se deduce fácilmente que $P(A)=3/5$.

2.1.5 Probabilidad Formal.

Hawkins y Kapadia (1984) hablan de probabilidad formal cuando ésta se calcula con precisión usando las leyes matemáticas de la teoría axiomática correspondiente. Se conoce también como probabilidad objetiva o normativa. La base matemática puede reflejar hipótesis hechas en las concepciones clásica, frecuencial o subjetiva.

La teoría matemática de la probabilidad, tal y como hoy se conoce, es de un origen comparativamente reciente. Fue Kolmogorov quien la axiomatizó en su trabajo fundamental publicado en 1933 y traducido posteriormente al inglés con el título "Foundations of the theory of probability". Según este autor, los sucesos se representan por conjuntos y la probabilidad es una medida normada definida sobre estos conjuntos. Este desarrollo, basado en la teoría de la medida, no sólo proporcionó un fundamento lógico consistente para el Cálculo de Probabilidades, sino que también la conectó con la corriente principal de la matemática moderna.

La teoría axiomática de Kolmogorov surgió como consecuencia de las restricciones que el concepto clásico laplaciano imponía sobre la equiprobabilidad de los sucesos y la finitud del espacio muestral correspondiente. Una primera extensión de la definición de Laplace fue usada para calcular las probabilidades de sucesos con resultados infinitos. La noción de igual verosimilitud de ciertos sucesos desempeñó un papel clave en esta extensión. Según este desarrollo si E es alguna región con una medida conocida (longitud, área, volumen) la probabilidad de que un punto elegido al azar pertenezca a un subconjunto A de E es el cociente entre la medida de A y la medida de E.

Las dificultades conceptuales y de índole matemática que ésta aproximación a la probabilidad comporta, desaconseja su tratamiento en el período de enseñanza obligatoria, de modo que cuando se habla de probabilidad en el bachillerato, sin duda no se debe de hablar de probabilidad bajo un punto de vista formal-axiomático.

2.1.6 La probabilidad en la escuela mexicana

Según el programa de estudios de la SEP vigente en el momento de la investigación la enseñanza de la probabilidad se inicia en quinto año de primaria, y se estudia en los años siguientes, sexto, primero, segundo, y tercero de secundaria. A continuación enunciamos los temas que se tocan en cada uno de los años escolares.

Quinto Primaria
-Lenguaje: más probable, resultados, predicciones
-Diagramas de árbol para encontrar todas las posibles combinaciones
-Juego con dados y con una moneda
-Simulación del lanzamiento de un dado y de una moneda y juego de lotería

Sexto Primaria:
-Azar, fenómenos deterministas y fenómenos azarosos, probabilidad

-Términos de más, menos e igual probable
-Concepto de mayor, menor e igual de probable
-Concepto de evento cierto e imposible, probabilidad del evento cierto, del evento imposible
-Probabilidad de un evento
-Probabilidad como porcentaje
-Promedio y valor esperado
-Inferencia a partir de una muestra

Primero de secundaria:
-El registro y tratamiento en situaciones sencillas, de los resultados de un mismo experimento aleatorio que se repite varias veces
-La exploración y enumeración de los posibles resultados de una experiencia aleatoria
-La estimación y comparación de probabilidades en situaciones diversas, en forma empírica o teórica
-La familiarización con algunas de las situaciones ideales de probabilidad: volados, lanzamientos de dados, rifas, ruletas, extracciones de una urna, ...
-La apropiación gradual del vocabulario empleado en la probabilidad: resultados posibles, casos favorables, ...
-Uso de diagramas de árbol y arreglos rectangulares en la enumeración de los posibles resultados de una experiencia aleatoria (resultados de dos o tres volados consecutivos, lanzamiento de dos dados, ...)
-Expresión de la probabilidad de un evento como una fracción, un decimal y un porcentaje

Segundo de secundaria
-Registro y tratamiento de los resultados de experimentos aleatorios
-Ejemplos para ilustrar el uso de la noción frecuencial de la probabilidad
-Valores de la probabilidad y su significado usual
-Ejemplos de experiencias aleatorias con resultados equiprobables y no equiprobables; ejemplos de experiencias repetidas
-Uso de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de una experiencia aleatoria
-Aplicación de la fórmula clásica de probabilidad
-Elaboración de tablas y gráficas de probabilidades
-Problemas sencillos que pueden resolverse por simulación
-Primeros cálculos con probabilidades, probabilidad de que un evento no ocurra, aplicaciones elementales de la regla de la suma

Tercero de secundaria
-Enriquecimiento y explotación de la noción frecuencial en la solución de problemas de probabilidad
-Aplicaciones diversas de la fórmula clásica de la probabilidad
-Cálculos con probabilidades: probabilidad de que un evento no ocurra, de que ocurra uno de dos eventos, aplicación del principio de la suma
-Uso de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Probabilidades de transición y regla del producto.
-Solución de problemas por simulación; esquema de urnas de Bernoulli

Curso especial
En este año escolar no se llevan explicitamente temas de probabilidad.

Los ejemplos que mas se usan en la enseñanza de todos estos temas son las monedas, los dados, las ruletas, las urnas y las rifas.

El tipo de probabilidad que se aborda es el de la probabilidad clasica Laplaciana, la probabilidad formal con teoria de conjuntos y se intenta usar el enfoque empirico.

En sexto año se aborda el tema de probabilidad a todo lo largo del año. En primero, segundo y tercero de secundaria el tema de probabilidad es el último del temario.

Los temas que se cubren en todos estos años de escuela son sucesos aleatorios, axiomas de probabilidad,análisis combinatorio, probabilidad condicional y esperanza matemática.

Como lo mencionamos anteriormente siempre se introduce al alumno al tema con el lanzamiento muchas veces imaginario de monedas y dados y con problemas combinatorios de rifas, urnas y ruletas. En una segunda etapa se retoman estos mismos problemas expresándolos en conjuntos y de ahí se establecen las fórmulas de calculo de probabilidades. Además la forma de abordarlos es meramente expositiva, con poca simulación real, con manejo de pocos datos reales.

Anticipando podemos decir que de acuerdo con estos contenidos los alumnos deben de estar en condiciones de responder a todos los items del test de Green, es decir que los conceptos probabilísticos incluidos en el test son temas incluidos en el programa de la SEP.

Conclusión:

Se observará que la filosofía de la probabilidad es sumamente controvertida. Existen varias definiciones del término: como una forma de cálculo de sucesos aleatorios, un modo de medir la incertidumbre, o traduce el grado de creencia racional o tasa de confianza que le asignamos a un enunciado, o es el resultado de cierto experimento. Esto implica necesariamente la existencia de varias teorías probabilísticas.

Cuando comparamos los diferentes enfoques expuestos, vemos que cada uno puede ser aplicado con ventaja en alguna circunstancia educativa. Como afirma Hadley (1979), las interpretaciones frecuencial y subjetiva se pueden considerar como los casos límites de un continuo. La teoría frecuencial puede aplicarse cuando los experimentos pueden repetirse indefinidamente, mientras que la subjetiva se puede aplicar a un único suceso irrepetible. Hay circunstancias (física, operaciones de las compañías de seguros, juegos de azar,...) donde es posible registrar un gran número de experimentos. En estos casos las frecuencias relativas serán muy estables y pueden utilizarse para estimar las probabilidades. Pero la mayoría de los casos reales en los que interesa aplicar las nociones probabilísticas quedan entre los dos casos extremos. En general, se dispondrá de alguna información frecuencial pero no será suficiente, por lo que será preciso una cierta dosis de juicio personal. Además, en la práctica suele darse el caso de que la información de frecuencias procedente de registros históricos no pueden considerarse exactamente como repeticiones de un mismo experimento aleatorio, sino pruebas de experimentos aleatorios parecidos, pero no equivalentes. En consecuencia, será preciso aplicar juicios personales coherentes basados en la información

En relación a la enseñanza existe la necesidad de mostrar al alumno una imágen más equilibrada de la realidad y no meramente determinista. El sistema educativo tiende a dar al alumno una impresión de que para cada pregunta existe una sóla respuesta sencilla y clara, que no existe intermedio entre lo verdadero y lo falso. Sin embargo los problemas que encontrará a lo largo de su vida tendrán un carácter menos definido, así pues, parece importante que durante los años de escuela se enseñe a los niños el carácter específico de la lógica probabilística.

No se trata de transmitir teorías matemáticas ni filosóficas. Los objetivos deben orientarse hacia el desarrollo de los aspectos intuitivos de las distintas aproximaciones mediante situaciones de aprendizaje apropiadas. Como afirman Steimbring y von Harten (1982), la formación estocástica (síntesis de la probabilidad y la estadística), en la escuela debe vincular: lo estocástico como la lógica de la incertidumbre, la matemática de los fenómenos de masas, la teoría de la decisión y la estadística como tecnología de la transformación de los datos en información significativa.
Es necesario incorporar a los programas de enseñanza temas referentes al pensamiento probabilístico vinculado a la matemática, a la estadística, todo esto aplicado en situaciones reales.

2.2. Investigaciones sobre la adquisición de conceptos probabilísticos.

De las investigaciones existentes, es posible detectar varias preguntas claves que han captado la atención de los investigadores.

1) ¿Qué concepciones sobre probabilidad tienen los niños?
2) ¿Cómo pueden cambiarse esas concepciones?
3) ¿Cuál es la relación entre concepciones intuitivas y subjetivas, y de éstas concepciones cuáles son mediadas en el aula y cuáles constituyen un conocimiento probabilístico formal?
4) ¿Hay una edad ideal para enseñar al alumno la probabilidad formal?
5) ¿Existen técnicas de enseñanza óptimas que tomen en cuenta las concepciones probabilísticas espontáneas de los niños al mismo tiempo que le ayuden a desarrollar el conocimiento formal?

Muchas veces, a causa de la diferencia de terminología y de metodología usada, las investigaciones han generado debates más que respuestas a las preguntas anteriores.

A continuación resumimos las investigaciones más relevantes sobre el tema que se han llevado a cabo.

1.- Piaget-Inhelder, 1957, " La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant"

2.- Fischbein, 1975, "The intuitive sources of probabilistic thinking in children "

3.- Kahneman-Tversky- Slovic, 1982, "Judgement under uncertainty: Heuristics and biases "

4.- Green, 1982, "Probability Concepts in School Pupils Aged 11-16 years "

2.2.1 Piaget/Inhelder

Es innegable que existe una intuición de la probabilidad en el hombre normal, adulto y civilizado, sin embargo la comprensión del azar y la probabilidad parecen estar más o menos ausentes en la mente primitiva y en la mente del niño pequeño.

La ausencia de la idea de azar es una característica esencial de la mente del hombre primitivo, puesto que ve en todo evento el resultado de causas visibles o invisibles. La idea moderna de azar, es contraria a los dos tipos de causalidad, el determinismo y los milagros. Por un lado, difiere del determinismo puramente mecánico cuyas leyes espaciales y temporales en el estado ideal, son reversibles, porque la probabilidad implica la intervención de fenómenos irreversibles. Por el otro, la probabilidad excluye categóricamente el concepto de milagro, puesto que asume precisamente la existencia de leyes en los hechos casuales, mientras que un milagro es la negación de tales leyes. Aquí la pregunta que cabría es cuando la mente primitiva percibió la posibilidad de una causalidad mecánica.

Es muy natural que el niño no tenga en un principio una idea de azar, porque primero debe de construir un sistema de consecuencias tales como posición y desplazamiento, antes de ser capaz de captar la posibilidad de interferencia de las series causales o de la mezcla de objetos móviles. Este desarrollo de la idea de causalidad y de orden en general, asume una actitud opuesta a la actitud por la cual reconocerá lo contingente y lo fortuito. Entonces la idea de azar y la intuición de probabilidad constituyen, sin lugar a dudas, realidades secundarias y derivadas que dependen precisamente de una búsqueda de orden y de sus causas. Esto se ve cuando examinamos las preguntas que hacen los niños espontáneamente, especialmente las famosas preguntas "por qué" que le dan tantos problemas a los adultos. El "por qué" pregunta por la razón de cosas en los casos en que existe una razón, pero también en los casos en donde esta razón no existe, esto es en los casos donde el fenómeno es fortuito pero el niño ve una causa oculta. Ejemplos de estas preguntas son: ¿por qué el lago de Ginebra se dirige hacia Berna?,¿por qué siendo tan alto tienes pequeñas las orejas?, etc. Todas estas preguntas son pseudopreguntas para nosotros, pues los hechos a explicar son todos debidos a interferencias del azar en biología, geología, y cosas por el estilo, mientras el niño que supone que hay razones para todo, pregunta por ellas en exactamente esos casos donde son menos aparentes. Aún no ha entendido que estos son precisamente los casos donde no existen las razones.

Antes de los 6 años, si observamos superficialmente las cosas podemos tener la impresión de que el niño disocia lo posible de lo necesario. Cuando un niño oye ruido detrás de la puerta de su cuarto, espera sin estar seguro que su madre aparezca. Podríamos pensar que el niño considera este hecho como posible y no como cierto, o hasta como probable. Una interpretación así nos llevaría a creer que el juicio probabilístico aparece en el niño a edades muy tempranas, y aún antes de tener una idea sobre el azar. Pero es lo imprevisto lo que el niño constata por contraste con las regularidades esperadas, a no confundir con lo imprevisible, es decir, con las modificaciones concebidas como irreductibles a la posible deducción. Lo imprevisto se concibe como una expresión del capricho, de la fantasía o de lo arbitrario, y no, desde el punto de vista lógico o físico de lo irreductible. Es decir en los primeros años el niño (periodo preescolar) sólo posee una gama variada de intuiciones de lo real.

Entre los seis y ocho años (periodo de las operaciones concretas), las intuiciones espacio-temporales y lógico-aritméticas, se constituyen en operaciones reversibles que se unen para formar grupos bien definidos. Es a este nivel que la noción de azar adquiere el significado de una realidad irreversible, el azar es reconocido como un hecho. El sujeto es capaz de deducir (hacer deducciones) en base a determinaciones (datos determinados) y esto lo conduce a reconocer la existencia de un dominio aparte, el dominio de los hechos fortuitos, es decir de los hechos imprevisibles en cuanto a que son insuficientemente determinados. Cuando las operaciones lógicas y numéricas (las cuales el niño acaba de descubrir el manejo) son efectuadas en base a datos suficientes, y según un orden lógico, conducen a conclusiones que el niño reconoce como necesarias. Pero cuando las operaciones quedan parcialmente indeterminadas, por falta de datos, o por la intervención de una operación nueva, resulta una indeterminación, es decir la posibilidad de obtener distintos resultados, lo que conduce a considerar la realización de uno de estos resultados como fortuita. Entonces resulta que a partir de la construcción de las operaciones lógico-aritméticas concretas, se introduce una diferenciación fundamental entre dos modalidades: lo necesario (o deducido operatoriamente) y lo posible (o indeterminado). Pero el análisis de lo posible supone una reintroducción de lo operatorio en el plano de lo aleatorio. Después de una fase de oposición entre lo operatorio y lo fortuito se produce una nueva síntesis entre las operaciones y el azar, y es esta síntesis que caracteriza la noción de probabilidad, distinta ésta de la simple toma de conciencia de lo fortuito o indeterminado. Pero el concepto de probabilidad supone el análisis de la totalidad de los casos posibles y no solamente de casos aislados, por lo que sólo una vez resuelto el problema del análisis combinatorio se podrá lograr esta síntesis. Esto sólo se logra en el periodo siguiente, el periodo de las operaciones formales.

Una vez descubierto el azar, la mente busca asimilarlo, solo hay una manera de entenderlo y de explicarlo: "si los casos individuales son indeterminados o imprevisibles, el conjunto total es determinable, y la composición consistirá en relacionar las partes (casos individuales posibles) al todo (conjunto de casos posibles totales). El juicio probabilístico es entonces una síntesis entre el azar y las operaciones". Las operaciones conducen a la determinación del conjunto de casos posibles, aunque cada uno sea indeterminado en cuanto a su realización. La probabilidad consiste en juzgar estos casos individuales en base al conjunto de casos posibles, lo que los determina en parte y les confiere un coeficiente fraccionario de realización.

Las operaciones lógicas y aritméticas constituyen sistemas de acción conectados entre ellos de manera rigurosa y siempre reversible, esta unión hace posible la deducción. Las transformaciones fortuitas no se conectan en forma rigurosa y los sistemas que forman son irreversibles. Entre la deducción operatoria y las transformaciones fortuitas no deducibles está la inducción, es decir el conjunto de pasos que uno sigue, destinados a separar lo que es fortuito y lo que es deducible y a preparar la inducción posterior. **Es por oposición a las operaciones que se descubre el azar, y es por referencia a la estructura de estas operaciones que el azar es comprendido y da entonces lugar a un sistema probabilístico. Por lo que existe una estrecha relación entre la formación de las nociones de azar y de probabilidad y de las diversas operaciones.**

Piaget hace un estudio psicogenético con niños entre 4 y 12 años de edad sobre los siguientes temas probabilísticos: noción de azar, simetría de una distribución, azar en los fenómenos físicos, juegos de azar, cálculo de probabilidades, combinaciones y permutaciones. Para cada uno de estos puntos establece un experimento con preguntas específicas que le permitirán establecer cómo y a qué edad los niños entienden los diferentes conceptos.

Al igual que en sus demás trabajos, Piaget distingue tres estados de desarrollo, el primero antes de los 7 u 8 años de edad (niño de preescolar) que se caracteriza por la ausencia de lo que llama propiamente operaciones, es decir un tipo de composición reversible. El razonamiento usado en este período es prelógico y está regido por un sistema de regulaciones intuitivas, sin anidaciones jerárquicas, sin conservación de totalidades, sin rigor en posibles inferencias. En este periodo el niño ni siquiera sospecha la posibilidad de un sistema que le permita encontrar todas las posibles combinaciones o permutaciones de varios elementos. Esto no es sorprendente puesto que se necesitan operaciones de multiplicación especiales y los niños en esta edad sólo poseen las operaciones de suma y de multiplicación simple.

A partir de 7 u 8 años hasta los 11 años, Piaget marca el segundo período,(período de las operaciones concretas), caracterizado por la construcción de grupos operativos de orden lógico y conjuntos numéricos pero en un plano esencialmente concreto, esto es, relacionándolo con objetos que puedan ser vistos. En este período empieza el desarrollo de la idea del azar. Por un lado, el descubrimiento de una necesidad deductiva u operativa permite al sujeto, por antítesis, concebir el carácter no deducible de las transformaciones fortuitas y aisladas y de esta manera distingue entre lo necesario y lo posible.

Finalmente el tercer período, de los 11 o 12 años de edad en adelante (período de las operaciones formales) caracterizado por un pensamiento formal, esto es la posibilidad de usar varios sistemas de operaciones concretas al mismo tiempo y traducirlos en términos de sus implicaciones hipotético-deductivas. Así también explica la evolución de las operaciones combinatorias. En este período del pensamiento probabilístico se organiza en sus aspectos generales, hay una síntesis entre el azar y las operaciones, lo que permite construir un sistema probabilístico.

A continuación resumiremos los principales experimentos llevados a cabo por Piaget sobre nociones de probabilidad en su libro **"La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant".**

LA INTUICION DEL AZAR

EXPERIMENTO I: NOCION DE MEZCLA ALEATORIA E IRREVERSIBILIDAD.

Cuando un niño se pega con una puerta que una ráfaga de viento cerró, el niño no cree que el viento o la puerta lo trataron de lastimar, ciertamente se da cuenta de la interacción de causas, que lo hicieron estar cerca de la puerta y las causas que hicieron que la puerta se moviera, pero no admite su independencia, y es este hecho lo que impide al niño ver este hecho como fortuito.

El niño tampoco ve que el azar está presente en acontecimientos de la vida diaria (sociales, metereológicos, genéticos, . . .) porque no entiende la interacción de los fenómenos (la relación entre lluvia y el florecer de las plantas por ejemplo).

Las dos causas que impiden al niño construir la idea de azar son: el reconocer la interrelación de causas, pero no reconocer su independencia y el reconocer la independencia de ciertos fenómenos, pero no considerar su interacción.

La combinación (o la mezcla) de un número suficientemente grande de elementos parece promover una situación favorable para estudiar el desarrollo de la intuición de series causales que interactúan y son independientes, dado que no da pié a imaginar que hay algún tipo de relaciones o causas intencionales.

Es bastante probable que la idea de azar surja de la idea de un número creciente de combinaciones de fenómenos irreversibles.

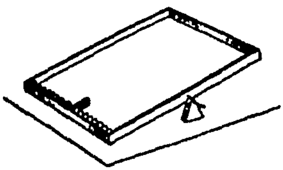
El problema es determinar si el niño, en presencia de una mezcla de objetos materiales, puede percibir ésta como una mezcla cada vez mas desordenada e irreversible o si imagina que los objetos están unidos por lazos invisibles. Este es el objetivo del primer experimento de Piaget.

El experimento consiste en presentar al niño una bandeja con canicas de dos colores, la cual se balancea sobre un soporte.

Antes de balancear la bandeja se le pregunta al niño:
¿Cómo estarán colocadas las canicas cuando la bandeja regrese a su posición inicial?
¿Quedarán las canicas en sus posiciones originales o quedarán mezcladas y qué tan desordenadas quedarán?

Se mueve entonces la bandeja. El niño ve el resultado de este primer movimiento. Se le pide que prediga el resultado de un segundo movimiento de la bandeja, y luego se lleva a cabo. Después de mover la bandeja varias veces se le pregunta al niño que ocurrirá después de mover muchas mas veces la bandeja.

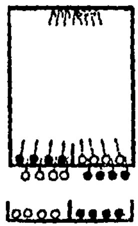
El interés principal de este experimento es ver si el niño espera una mezcla progresiva aleatoria o si cree las canicas volverán a su estado inicial.



El niño de preescolar:

El niño está obligado a aceptar la evidencia del cambio de posición de las canicas debido al movimiento de la bandeja, es decir a aceptar que se mezclan las canicas, pero rehusa ver a la mezcla como fortuita y decide mejor que se debe a irregularidades (de la bandeja o del movimiento).

Los niños predicen que las bolas volverán a su estado original. Dado que ven la mezcla de las canicas algunos niños predicen el cambio de posición de estas, pero en forma regular. Muchos movimientos de la bandeja no incrementarán el desorden en la mezcla, es decir que los niños no tienen la idea de permutaciones.
Para apreciar mejor la idea que tienen los niños, se les pide que dibujen las trayectorias que piensan ellos, seguirán las canicas al balancear la bandeja, es decir su predicción después de un movimiento de la bandeja. A continuación presentamos un dibujo típico, en el cual se aprecia que el alumno no comprende todavía la mezcla aleatoria.



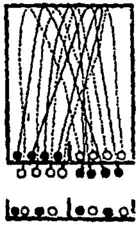
En realidad el no poder entender la irreversibilidad de la mezcla aleatoria se debe a las mismas razones por las cuales el niño no entiende la reversibilidad de las operaciones. En ambos casos el niño hace un juicio sobre las transformaciones percibidas sin ponerse dentro de todo el sistema de posibles transformaciones. En el caso de la irreversibilidad operativa, por ejemplo cuando seis objetos son puestos muy junto y luego separados los niños piensan que el número de objetos es diferente. Las transformaciones implican diferentes configuraciones incluyendo el estado original, pero el niño considera cada configuración sola, independiente de la transformación que le dio origen, es decir solo ve como una configuración reemplaza a la configuración inicial.
Este es el mismo caso en la mezcla aleatoria donde hay falla para entender las posibles transformaciones. Pero tiene un efecto opuesto cuando lo consideramos a la luz de la jerarquía de los estados subsiguientes porque ya no es el estado derivado que destruye el inicial, sino que el estado inicial continua teniendo predominancia sobre los estados siguientes.
De hecho para los ojos del niño, la mezcla no constituye un estado verdadero comparable al orden inicial. Este queda privilegiado y la mezcla es una alteración momentánea.Las posiciones sucesivas de las canicas no se ven como resultados de transformaciones homogéneas. La razón de esta interpretación es que no considera estas transformaciones como provenientes de una fuente común del orden inicial y como los diferentes estados de la mezcla, esto es como diferentes permutaciones.

El periodo de las operaciones concretas:

Es aproximadamente a los siete años que la intuición del azar aparece gracias a la posesión de las primeras operaciones concretas, interrelacionadas y reversibles. Esto se confirma con la predicción correcta por algunos niños de un mezcla creciente.

Pero las operaciones elementales de orden (para establecer un orden de progresión ABC a CBA), no son suficientes para construir un esquema propio de permutaciones.

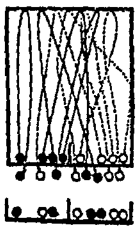
Al igual que anteriormente se le pide a cada niño dibuje su predicción despues de un movimiento de la bandeja. Los dibujos de las trayectorias de las canicas muestran colisiones y no un simple desplazamiento como en el período anterior.En otras palabras principia la idea de aleatoriedad.



El periodo de las operaciones formales:

Es sólo a esta edad, cuando el pensamiento formal aparece, el proceso de mezcla aleatoria es comprendido, los hechos observados son asimilados en un esquema operativo basado en la mecánica de las permutaciones.

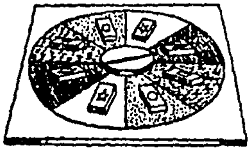
El niño además entiende la ley de los grandes números, todo es posible si aumentamos el número de movimientos de la bandeja pero el orden inicial de las canicas es muy difícil.



EXPERIMENTO III: EL DESCUBRIMIENTO DE UNA RELACION CONSTANTE EN CONFLICTO CON UNA DISTRIBUCION ALEATORIA.

Para analizar la forma en la cual la noción de azar se construye en el mundo diario y físico del niño necesitamos encontrar como en la mente del niño se diferencia lo que es debido al azar y lo que es debido a causas no fortuitas.

Para este experimento se usa el siguiente material, una ruleta dividida en dieciséis secciones de diferentes colores, los colores de secciones opuestas son iguales, en total hay ocho colores diferentes.En lugar de una flecha se tiene un disco de aluminio con una raya negra pintada. Debajo del disco y en forma paralela a la raya hay un alambre de acero que puede ser atraído por un imán. El disco descansa sobre una aguja como pivote. Al girar el disco la raya negra puede apuntar a cualquiera de las dieciséis secciones.



En la segunda parte del experimento ponemos ocho cajas de cerillos idénticas sobre las secciones de colores. En las cajas hay ya sea plomo (peso A), cera con polvo de algún metal ligero (peso B), cera con polvo de metal (peso C), y por último sólo cera (peso D). Hay cuatro cajas de cada tipo A, B, C, D. En dos cajas de peso B se esconden dos imanes en la cera, de tal forma que no haya manera de distinguirlas de las otras dos, excepto obviamente por que harán que la raya negra apunte hacia ellas.

Al niño se le pregunta donde apuntara la raya si se juega muchas veces con la ruleta, primero sin las cajas de cerillos y luego con ellas.

El niño de preescolar:

El niño cree que puede predecir el color al cual apuntara la raya, sin ninguna noción de una distribución global, la cual será mas regular si el número de pruebas se incrementa.
Cuando se ponen las cajas de cerillos y se magnetiza la ruleta no hay mucha diferencia en las predicciones y explicaciones dadas por los niños.

El periodo de las operaciones concretas:

El niño se rehusa a predecir donde se detendrá la raya alegando que puede ser en cualquier lugar si se le pregunta antes de jugar una vez con la ruleta. Varios ensayos con la ruleta le hacen prever una distribución regular, pero esta regularidad no se incrementa al aumentar el número de ensayos con la ruleta sino que corre el riesgo de destruirse.

En el segundo período del experimento, hay una inducción progresiva con algunos inicios de generalización, y la comprensión entre una dispersión fortuita y una regularidad causal.

El periodo de las operaciones formales:

El niño relaciona una distribución uniforme con un número grande de ensayos.

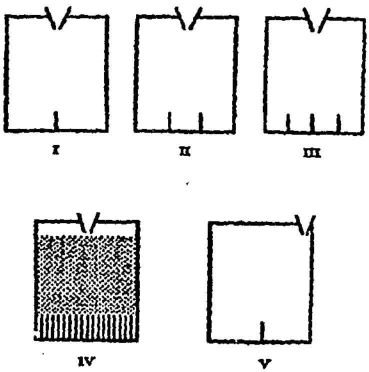
El niño busca y encuentra las causas que hacen que se controle la ruleta. Hay una clara intuición de las probabilidades.

LA INTUICION DE LA FRECUENCIA RELATIVA

EXPERIMENTO II: DISTRIBUCIONES CENTRADAS Y UNIFORMES.

El problema de la mezcla aleatoria nos lleva al problema de la forma de la distribución dado que las posiciones finales de los elementos y de sus trayectorias llevan a algún tipo de distribución. Los dos tipos de distribución que más interesan A Piaget son la distribución normal y la distribución uniforme.

Piaget utiliza el siguiente dispositivo para estudiar la formación de noción de distribución centrada. Cinco cajas sin tapa que mantiene inclinadas, por las cuales va a hacer rodar un cierto número de canicas. La cuarta caja tiene clavos sobre su superficie para lograr mejor la distribución deseada al introducir las canicas. La quinta caja sirve para cuestionar al alumno sobre la relación entre la asimetría de la caja y su efecto sobre la forma de la distibución. En los resultados expuestos en su libro Piaget no menciona las respuestas de los niños a este respecto.



El experimento consiste en mostrar al niño las cajas una por una. En cada caja se introducen canicas por el orificio superior. Cada vez que se introduce una canica se le pide al niño que prediga en donde va a caer esta. Después de introducir varias canicas dándole al niño la oportunidad de ver donde caen, se le plantea el problema de decir cómo o dónde caerán si se introducen todas las canicas restantes (unas 6O).

El niño de preescolar:

Este período se caracteriza por la ausencia de una distribución en conjunto, para las cajas I a la IV. La caja I, por lo general tiende a dar predicciones de un lado sobre el otro, o una compensación, es decir que una canica en un lado y otra canica en el otro lado, pero sin ver la simetría al incrementar el número de canicas. Con la caja II el niño predice la misma cantidad en las tres partes, por compensación, o apuesta en favor de un lado, central o lateral. Con la caja III, el niño apuesta en una de las partes centrales o en una distribución irregular.Con la caja IV el niño apuesta a una distribución irregular y hasta discontinua. No se da la generalización de una caja a la otra.

El período de las operaciones concretas:

Este segundo período se caracteriza por empezar a entender una distribución que el sujeto puede generalizar. Esto se puede ver por el hecho que el sujeto anticipa una desigualdad entre la frecuencia central y las frecuencias laterales. Pero esta distribución queda insuficientemente cuantificada al no entender la ley de los grandes números. Por esta razón, aún cuando el sujeto ve la simetría en conjunto, no ve la equivalencia entre las partes localizadas simétricamente con respecto al centro. En presencia de la caja I, el sujeto espera que un lado sea igual que el otro pero no ve la igualdad progresiva con el numero de canicas. Con la caja II el sujeto anticipa un número mayor de canicas en la parte central pero sin ver la simetría entre loa otros dos lados. Con la caja III, el niño privilegia las partes centrales pero sin una equivalencia entre ellas o entre las partes laterales. En la caja IV se empieza a ver una transferencia de los experimentos previos.

El período de las operaciones formales:

El sujeto cuantifica la distribución en su conjunto, predice la equivalencia en la dispersion entre las partes simétricas, esto se ve claramente de la caja I a la caja III. Con la caja IV inicia el descubrimiento de una curva simétrica en forma de campana. Se entiende el papel de los grandes números en la regularidad de la distribución.

<u>ESTIMACION DE POSIBILIDADES Y LA NOCION DE PROBABILIDAD</u>

EXPERIMENTO IV: AZAR Y MILAGRO EN EL JUEGO DE CARA O CRUZ.

Después de estudiar el desarrollo de ciertas intuiciones de azar como una función de fenómenos físicos, es esencial analizar este desarrollo en los juegos llamados de azar.

El primer experimento consiste en enseñar al niño ocho fichas blancas marcadas con una cruz de un lado y con un círculo del otro lado. El juego de cara o cruz consiste en pedirle al niño que prediga el resultado cuando de 1O a 2O fichas se lanzan de una vez sobre una mesa.

Luego sin que el niño sospeche nada, se sustituyen estas fichas por otras marcadas por una cruz de ambos lados y se repite el experimento (se lanzan las fichas y se pide al niño que prediga cuantas cruces quedaran hacia arriba). Se repite el experimento hasta estar seguros de haber entendido la reacción del niño.

El segundo experimento consiste en sacar canicas, una por una, de una bolsa que tiene canicas rojas y azules. Se le pide al niño que prediga qué va a salir. Se anota lo que sale.
Luego se sustituye la bolsa por otra que contiene sólo canicas azules. Se le pide al niño que prediga el resultado de la extracción, y se anota éste. Se analizan las reacciones del niño.

En los dos experimentos se le muestra el truco al niño, si es que no lo descubre por si sólo.

Por último, sin que el sujeto se dé cuenta sacamos una a una las fichas o las canicas con truco tratando de damos cuenta de cuándo y por qué razonamiento el niño reconoce sin lugar a dudas que estamos usando elementos homogéneos.
Este último experimento es por lo general un indicador seguro del juicio probabilístico del cual el alumno es capaz.

El niño de preescolar:

El niño se sorprende poco por el hecho de que sálen solo cruces (o canicas), y no logra entender la imposibilidad de este hecho desde el punto de vista probabilístico. Aun después de mostrarle el truco piensa (en general) que este mismo milagro se obtendría con fichas normales.

El período de las operaciones concretas:

En este período hay un sentido global de la probabilidad. Pero al tener que decidir si las fichas (o las canicas) son las normales o con truco no muestra aun una cuantificación de las combinaciones.

El período de las operaciones formales:

En este período se logra la cuantificación de las probabilidades.

EXPERIMENTO V: EXTRACCION AL AZAR DE PARES

Se pone en una mesa un conjunto de objetos A (por ejemplo 15 fichas amarillas), un conjunto de objetos B mas chico (1O fichas rojas), otro conjunto C (7 fichas verdes) y por último un conjunto muy chico D (3 fichas azules). Al niño se le da tiempo para ver y por ende recordar cuántas fichas y de qué colores hay.

Ponemos estas fichas en una bolsa y se le pide al niño que saque pares de fichas. Se le pide que prediga qué par es mas probable que vaya a salir. Con los mas pequeños se les pide que predigan por ficha.

El niño de preescolar:

El niño predice basando su razonamiento sobre el número total de fichas (o por algún otro juicio) siempre.

El período de las operaciones concretas:

El niño trata de cuantificar las probabilidades de los pares pero no entiende el porqué hay que volver hacer el razonamiento después de hacer una o dos o varias extracciones.

El período de las operaciones formales:

La probabilidad es cuantificada en función de las fichas que quedan en la bolsa.

OPERACIONES COMBINATORIAS

EXPERIMENTO VII: DESARROLLO DE LA OPERACION COMBINATORIA:

Cada uno de los experimentos anteriores nos lleva a la misma conclusión, que la formación de las ideas de azar y probabilidad dependen en una manera estricta de la evolución de las operaciones combinatorias.

Es de la habilidad para concebir mezclas e interferencias en concordancia con un esquema de permutaciones y combinaciones que el niño llega a la noción de mezcla aleatoria, es decir a la noción de azar.

Esta conexión entre nociones probabilísticas y las operaciones combinatorias es entonces aparentemente lógica. Con esto en mente, después de cuestionar a los niños sobre mezcla aleatoria (experimento I), y sobre extracciones al azar (experimento II) les pedimos que realicen las permutaciones y combinaciones de un conjunto pequeño de elementos, analizando los métodos que usan los niños en estas operaciones. Al establecer los niveles de generalidad de estos métodos, buscamos derivar la relación entre estos niveles y los niveles de formación de las nociones probabilísticas. La correlación es muy clara.

Se le ponen al niño varias pilas de fichas de diferentes colores en una mesa (fichas blancas, rojas, azules). Se le pide entonces que forme tantos pares diferentes como sea posible sin repetir o repitiendo colores.

El niño de preescolar:

El niño llega sólo a un descubrimiento empírico de las combinaciones, sin sistema, simplemente a tientas.

El período de las operaciones concretas:

Hay una búsqueda de un sistema.

El período de las operaciones formales:

El niño logra dar las combinaciones en forma completa por medio de un método.

EXPERIMENTO VIII: LA FORMACION DE LA OPERACION PERMUTACION.

Sabemos que el número de permutaciones de n elementos es n!. Obviamente no se trata que el niño descubra la fórmula matemática, pero no está fuera de su alcance el pedirle que encuentre un sistema para encontrar todas las posibles permutaciones de un número pequeño de objetos.

Le mostramos al niño dos muñecos y le explicamos que caminan juntos, entonces pueden caminar de dos formas AB o BA. Después le mostramos al niño con dos fichas de dos colores como se formarían los pares AB y BA.

Se le dan tres fichas de colores distintos y se le pide que forme las posibles permutaciones ABC, CBA poniendo en fila las fichas.

Si logra encontrar las seis permutaciones, se la da un ficha más de otro color para ver si logra encontrar las veinticuatro permutaciones posibles.

El niño de preescolar:

No tiene un sistema. A algunos les es difícil entender cómo se pueden hacer varias permutaciones con los mismos elementos.

El periodo de las operaciones concretas:

Hay un método parcial. Se entiende la operación y se busca un sistema para tres elementos, el cual no se completa.

El periodo de las operaciones formales:

Método completo no se adquiere (de 20 niños sólo 6 lo lograron). Sólo a los quince años se logra una generalización.

El descubrimiento de las permutaciones se da después de el descubrimiento de las combinaciones pues estas consisten en asociaciones efectuadas de acuerdo a todas las posibilidades mientras que las permutaciones son mas numerosas e implican una habilidad de relacionar los objetos de acuerdo a un sistema móvil de referencia.

CONCLUSIONES:

Para interpretar los diferentes resultados obtenidos en este estudio y llegar a una conclusión, Piaget comenta estos resultados y su relación a los resultados totales dados por sus otros estudios del desarrollo operativo de la inteligencia. El azar se descubre gradualmente y es en constante referencia a las estructuras de las operaciones que el azar se entiende finalmente y lleva a un sistema de probabilidades.

Hay una correlación directa entre la formación de las nociones de probabilidad, y la formación de las diferentes operaciones.

Podemos distinguir tres estados principales de desarrollo:

- Antes de los siete años caracterizado por la ausencia de operaciones, es decir, un tipo de composición reversible. El razonamiento usado en ese período es prelógico y está regido solo por sistemas de regulación intuitivos sin jerarquía, sin conservación de las totalidades, sin rigor en las posibles inferencias.

En este período el niño no distingue lo posible de lo necesario y se mueve en una esfera de acción tan distante del azar como de la operación en si misma. Sus pensamientos oscilan entre lo predecible y lo imprevisto, pero nada es para él ciertamente predecible o absolutamente imprevisto (fortuito). Por lo que no podemos considerar sus anticipaciones como juicios de probabilidad derivados de un mayor o menor grado de certitud subjetiva, porque esta certitud es solamente producto de la falla de distinguir entre nociones practicas de predictibilidad intuitiva y capricho. En esta edad (el niño de preescolar) no hay ni azar ni probabilidad porque falta el sistema de referencia basado en operaciones deductivas.

El niño no tiene la posibilidad de construir un sistema que le permita encontrar, sin olvidar ninguna, todas las combinaciones dos a dos o todas las permutaciones de un número pequeño de elementos: esto es lógico, puesto que el niño necesita usar operaciones multiplicativas especiales y el niño no posee aún las operaciones aditivas y multiplicativas simples.

De los siete u ocho años hasta los once años de edad se construyen los grupos operativos de orden lógico y los conjuntos numéricos, pero en un plano esencialmente concreto, esto es relacionado a objetos que puedan ser tomados o vistos en sus relaciones.

Al aparecer las operaciones aritméticas lógicas comienza el desarrollo de la idea de azar. Por otro lado el descubrimiento de la deductibilidad o la necesidad operativa permite al sujeto concebir el carácter no deducible de las operaciones fortuitas o aisladas, y a diferenciar lo necesario de lo posible.El principio de la estructuración de las relaciones de probabilidad se debe a la posibilidad de concebir grupos de elementos mezclados como totales formados por partes cuantificables. Además la mezcla aleatoria, esto es la más simple expresión del azar empieza a ser concebida como una mezcla real y ya no solamente como un aparente desorden cubriendo un orden.

El niño comprende la posibilidad de sistemas que le permiten encontrar permutaciones y combinaciones, pero esto en forma empírica e incompleta.

De los once años en adelante es el período caracterizado por el pensamiento formal, es decir por la posibilidad de atar uno o mas sistemas de operaciones concretas al mismo tiempo, y trabajar en conjunto con varias operaciones concretas. En este período los principios del pensamiento formal permiten descubrir algunos sistemas combinatorios completos para un número reducido de elementos.En este período es cuando el juicio probabilístico se organiza en sus aspectos generales mediante una especie de rebote de las operaciones hacia el azar.

En la tercera etapa existe una síntesis entre el azar y las operaciones permitiendo las ultimas construir el campo de las distribuciones fortuitas en un sistema de probabilidades por una especie de asimilación análoga de lo fortuito con lo operativo. Para lograr este resultado se unen dos procesos correlativos, por un lado la construcción de sistemas combinatorios (marcados por el descubrimiento de un método que permite construir todas las combinaciones), que llevan al sujeto a concebir mezclas aleatorias como resultado de transformaciones pero ejecutadas sin orden y dándose cuenta solo de una parte del total de posibilidades. El pensamiento formal por otro lado, que permite la construcción de dichos sistemas combinatorios conduce también al descubrimiento de las proporciones. La ley de los grandes números que aplica las relaciones de proporcionalidad a estas operaciones combinatorias conduce al sujeto a concebir la legitimidad de una composición probabilística de las modificaciones fortuitas en el sentido de una distribución que llega a ser proporcionalmente mas regular y consecuentemente, entendible en su totalidad aunque no en los detalles, como una predicción racional.

2.2.2 Fischbein.

El desarrollo intelectual de un individuo, involucra más que la asimilación y la organización de sistemas conceptuales. Además de éstas estructuras cuyas dinámicas están explícitamente determinadas por definiciones y una combinación de reglas, la actividad intelectual involucra modalidades cognitivas y de solución de problemas que son menos explícitas, aunque no necesariamente menos primitivas. Estas son las intuiciones para Fischbein, es decir formas de cognición inmediatas en las cuales los elementos justificadores están implícitos.

En su libro **"Intuition in Science and Mathematics"** Fischbein cita a la intuición como un concepto altamente controvertido en ciencias y en filosofía. Menciona como algunos autores consideran a la intuición como la fuente básica del verdadero conocimiento; otros al contrario piensan que la intuición es engañosa en la búsqueda de la verdad. Pero la intuición, como concepto o como método aparece una y otra vez en muchos campos de la ciencia. Así cita Fischbein en este mismo libro, como según el autor y según el tema en que se utiliza, el término intuición tiene distintos significados. Por ejemplo para:

Descartes: la intuición es referida a una fuente de verdadero (o aparentemente verdadero) conocimiento.

Bergson: la intuición es más bien un método, una especie de estrategia mental que es capaz de alcanzar la esencia del fenómeno.

Piaget: el término intuición es usado para indicar una cierta categoria de cogniciones, es decir, cogniciones que son directamente comprendidas sin necesidad de una justificación o interpretación explícita previa.

Kant: la intuición es simplemente la facultad a través de la cual los objetos son directamente comprendidos a diferencia de la facultad de entender utilizando conocimientos conceptuales.

Algunas veces la intuición es referida como una conjetura global para la cual un individuo no es capaz de dar una clara y completa justificación.

Otras veces la intuición significa una forma de sentido común popular, primitivo de conocimiento, en oposición a concepciones e interpretaciones científicas.

También el valor dado a las intuiciones es distinto según los diferentes autores. Así para:

Poincaré: no es posible una actividad creativa genuina en ciencias y en matemáticas sin intuición.

Hahn: intuición es principalmente una fuente de conceptos erróneos y debería ser eliminada de cualquier método científico serio.

Por último Fischbein cita que en la literatura pedagógica la intuición es muchas veces relacionada con conocimiento sensorial como la primera base necesaria para una posterior educación intelectual.

Lo que complica el campo de la intuición aún más, es que muchos otros términos son usados para referirse a la misma categoría de fenómenos. Algunas veces las personas usan el término ocurrencia para indicar un reordenamiento global y repentino de datos en el campo cognitivo que permite una nueva visión, una nueva interpretación o solución en las condiciones dadas.

Los términos revelación, en un contexto religioso, e inspiración en un contexto artístico, son también usados como sinónimos de intuición.

Otros términos, como sentido común, razonamiento ingenuo, interpretación empírica, son usados en referencia a formas de conocimiento que también pueden ser considerados como conocimiento intuitivo.

¿Como es posible que el concepto de intuición tenga tantas, tan diferentes y hasta tan contradictorias connotaciones?. ¿Tienen estos fenómenos llamados intuiciones, algunas características comunes, las cuales puedan justificar la aceptación de intuición como un concepto que se pueda definir? Por lo que Fischbein entonces define explícitamente a la intuición.

"No se puede encontrar una definición si partimos del concepto en sí mismo. Tantos atributos diferentes no podrían ser organizados espontáneamente dentro de un concepto. Las cosas se vuelven más claras si uno admite que el concepto de intuición, aunque aparentemente vago e inconsistente,

<u>expresa una tendencia fundamental y muy consistente de la mente humana: la búsqueda de la certeza</u>. Al evaluar oportunidades, al predecir resultados, al tomar decisiones, uno tiende naturalmente a producir representaciones (conceptuales o pictóricas) que ofrecen un alto nivel de franca credibilidad. Si uno admite que aunque la intuición no es una fuente perfectamente confiable de conocimiento absoluto, si es, sin embargo, una expresión de nuestra necesidad fundamental de pautas absolutas, intrínsecas y confiables en un intento de razonamiento.
En el presente trabajo el término intuición será usado generalmente como un equivalente de conocimiento inmediato; en otros términos, no como una fuente, no como un método, más bien como un tipo de cognición. Uno admite intuitivamente que la distancia más corta entre dos puntos se mide sobre una línea recta, que todo número natural tiene un sucesor, que el todo es más grande que cada una de sus partes, que un cuerpo debe caer si no está sostenido.... todas estas afirmaciones son aceptadas inmediatamente como autoevidentes sin sentir la necesidad de una prueba formal o empírica. Autoevidencia es una característica general del conocimiento intuitivo. En contraste la afirmación: la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, no es autoevidente, no es aceptada intuitivamente."

Para Fischbein la cognición intuitiva es caracterizada por:
- la autoevidencia
- la certeza intrínseca
- la perseverancia
- la coercitividad
- el estatus teórico
- la extrapolabilidad
- la globalidad
- ser implícita

Autoevidencia

Esta es una característica fundamental de las intuiciones. Una cognición intuitiva es auto consistente, auto justificable, o auto explicable. Si afirmamos que el todo es más grande que cada una de sus partes, sentimos que esta afirmación es verdadera sin la necesidad de ninguna justificación.

Certeza intrínseca

La segunda característica fundamental de las cogniciones intuitivas, es que son aceptadas como ciertas. La autoevidencia y la certeza están altamente correlacionadas, pero no se puede reducir una a otra. Uno puede estar totalmente convencido de que una afirmación es verdadera sin ningún sentimiento de autoevidencia. Estamos convencidos que los teoremas matemáticos aprendidos en la escuela son ciertos pero muchos de ellos no son autoevidentes.

Perseverancia

Las intuiciones, una vez establecidas, son muy fuertes, son adquisiciones estables, resistentes a otras interpretaciones alternativas.

Coercitividad

Las intuiciones ejercen un efecto coercitivo en los modos de razonamiento del individuo. Las intuiciones se imponen subjetivamente en el individuo como absolutas y únicas representaciones o interpretaciones. Generalmente otras alternativas se excluyen como inaceptables.

Estatus teórico

Una intuición es una teoría (o una mini teoría), nunca una mera habilidad o una mera percepción de un hecho dado. Una intuición no es entonces una teoría pura, es una teoría expresada con una representación particular usando un modelo, un paradigma, una analogía, un diagrama, etc.

Extrapolación

Una intuición siempre excede la información que se tiene a mano. Es esta particular combinación de información incompleta y de certitud intrínseca lo que mejor caracteriza una intuición.
La extrapolación no siempre es evidente, porque la aparente obviedad de las intuiciones esconde lo incompleto de la información en la que se basan.

Globalidad

La globalidad de las intuiciones generalmente se expresa como un proceso de selección que tiende a eliminar los puntos discordantes y organizar los otros datos de tal forma que se presente un significado conciso y unitario. Es este tipo de coherencia lo que explica también la resistencia al cambio, la fortaleza de las intuiciones establecidas.

Implicidad

Aunque aparentemente autoevidentes, las intuiciones se basan de hecho en mecanismos complejos de selección, globalización e inferencia. Pero esta actividad es generalmente inconsciente y el individuo esta consciente solo del producto final, las aparentemente autoevidentes intrínsecamente consistentes cogniciones. El carácter tácito de las elaboraciones intuitivas explica la dificultad de controlarlas e influenciarlas.

Si usted se prepara a cruzar la calle, mira de un lado a otro para observar los carros que se aproximan. De un vistazo global ve los carros, evalúa su velocidad, percibe la distancia decreciente que los separa de usted. Obtiene una imagen global, pero perfectamente estructurada, no sólo de lo que pasó sino de lo que está pasando, y también de lo que se espera pase en el futuro cercano. Como una consecuencia usted adapta su comportamiento de una manera casi refleja en base a toda la información. Hay tantas cosas que no sabe: no conoce por ejemplo la velocidad exacta de los vehículos, no conoce con certeza que pasará en el momento siguiente, ni cuales son las intenciones de los conductores. Sin embargo mezcla todos estos eventos pasados, presentes y futuros en una imagen global que casi automáticamente le dicta a uno su comportamiento inmediato.
La analogía de este ejemplo con una cognición intuitiva es impactante. En una cognición intuitiva lo "dado" y lo "plausible" se mezclan en una idea global, aparentemente autoconsistente, autoevidente y cierta, que inspira y guía la estrategia a seguir en la siguiente etapa mental.
Pero nuestra teoría es que tenemos aquí mas que una simple metáfora. **La intuición realiza, a un nivel intelectual, la función realizada por la percepción a un nivel sensorial. La intuición es el preludio directo y cognitivo de la acción (mental o práctica). Organiza la información en una estructura intrínsecamente creíble y significativa.**

Una de las varias clasificaciones que da Fishbein de las intuiciones es la siguiente:
-Intuiciones primarias
-intuiciones secundarias

Intuiciones primarias: son aquellas intuiciones que existen antes e independientemente de cualquier instrucción sistemática e intencional. Aquellas que se derivan de la experiencia del individuo en su vida diaria.

Intuiciones secundarias: son aquellas intuiciones que se adquieren por intervención de un aprendizaje (debido a una educación científica) en la escuela. Muchas veces son inconsistentes con las intuiciones primarias relacionadas con los mismos conceptos.

La revolución francesa fue en 1789. El coeficiente de dilatación de los gases es de 1/273. La relación entre la circunferencia y el diámetro es π. Estos son ejemplos de información adquirida y habilidades mentales pero no de intuiciones. Las intuiciones secundarias, necesitan grandes áreas de actividad intelectual, y representan síntesis verticales de elementos motores, imaginativos y conceptuales. Presupone además mucha práctica y gran familiaridad.
"Si una moneda es lanzada tres veces y el resultado es cara cada vez, ¿cuál será el resultado del próximo lanzamiento?"
La respuesta puede ser "cruz es más probable en el cuarto lanzamiento". Esta es una intuición incorrecta pero intuición.
En el lanzamiento de cuatro veces una moneda, la probabilidad de obtener cuatro caras es menos probable que la de obtener tres caras y menos que la de obtener dos caras. Esta jerarquía es intuitivamente asimilada de la experiencia sin razonamiento explícito, y por eso se llega a conclusiones erróneas como la anterior. La probabilidad de obtener cuatro veces una cara es menos probable que la de obtener tres caras y una cruz mientras que no se pongan restricciones de orden, así CCCC y CCCX son igualmente probables (0.0625). La comprensión de este razonamiento involucra un cuerpo de conocimientos y habilidades de cálculo con amplias repercusiones en el proceso individual de razonamiento.
La consolidación de estas adquisiciones, de su integración dentro de las formas comunes de razonamiento toma tiempo. Es en este sentido que hablamos de intuiciones secundarias. Explicaciones teóricas no son suficientes para convertir la información en adquisiciones establecidas que involucren los elementos básicos de la intuición. El uso de la información en acciones es necesario durante los períodos de desarrollo intelectual.

Las intuiciones se generan con la experiencia, es decir en situaciones prácticas en las cuales el individuo se involucra sistemáticamente y requiere representaciones y evaluaciones bien estructuradas, globales y anticipatorias.

Las intuiciones son parte integral del comportamiento inteligente. Son adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en acciones prácticas y mentales. Las intuiciones representan fuerzas poderosas y coercitivas de actividad mental. Actúan algunas veces de una manera abierta, pero muchas veces de manera implícita. Pueden representar una fuente de importantes ideas productivas pero frecuentemente distorcionan o esconden las estrategias mentales del individuo.
Aparecen conflictos entre las interpretaciones intuitivas y las interpretaciones formales (adquiridas por la instrucción). En los niños, estas interpretaciones contradictorias pueden coexistir. Pero muchas veces la representación intuitiva es más fuerte y tiende a anular la concepción formal, (los alumnos fácilmente olvidan que el peso presupone fuerzas gravitacionales.....).

El problema en educación no consiste en eliminar las representaciones e interpretaciones intuitivas. Desde nuestro punto de vista, esto sería imposible, y ciertamente no deseable. <u>El problema en educación consiste en desarrollar la capacidad del alumno de analizar y mantener bajo control sus concepciones intuitivas, y de construir nuevas intuiciones consistentes con los requerimientos formales científicos</u>.

La experiencia juega un papel fundamental en darle forma a las intuiciones. En condiciones relativamente constantes la experiencia produce, en el largo plazo, sistemas estables de representación que implican programas y expectativas estructuradas de acción. Al mismo tiempo la experiencia tiende a influenciar nuestras interpretaciones intuitivas primarias debido a sus inminentes restricciones: las condiciones mundanas (generales y especificas), y la naturaleza práctica y concreta de cualquier actividad significativa del comportamiento (finitud, concretez, imposibilidad de ubicuidad).

En nuestra opinión, las nuevas actitudes intuitivas nunca pueden ser producidas por una enseñanza verbal. Las explicaciones verbales pueden enriquecer las ideas del niño. Le pueden ayudar a entender y a justificar lógicamente afirmaciones enseñadas durante el período escolar. Pero la clase de creencia específica, de aceptación subjetiva de ideas y representaciones válidas intrínsecamente, que caracterizan las intuiciones, sólo puede ser alcanzada como un efecto de la participación experimental directa del sujeto en una actividad práctica o mental.

Es importante profundizar la comprensión intuitiva del alumno en los diferentes conceptos y afirmaciones. Esto solamente puede ser logrado mediante la creación de situaciones didácticas que requieran una participación personal, experimental de la actividad mental productiva de los alumnos en el campo respectivo. Consideramos, por ejemplo, que una enseñanza exitosa de la estadística y de la probabilidad no puede ser obtenida enseñando solamente teoremas y procedimientos de solución. El alumno debe experimentar primero prácticamente con dados, monedas y canicas para ver, registrar y establecer los diferentes conjuntos de resultados.

El área de la probabilidad es particularmente apropiada para el estudio de las intuiciones, ya que la complejidad de las situaciones cotidianas nos induce a adoptar continuamente un comportamiento probabilístico, porque la necesidad de tomar decisiones nos obliga a hacer estimaciones intuitivas de posibilidades, y porque el cálculo de las probabilidades está muy relacionado con la acción.

El objetivo de las investigaciones de Fischbein en esta área en particular ha sido, la de estudiar las intuiciones correspondientes a ciertos conceptos y métodos fundamentales de la teoría de probabilidad: azar, frecuencia relativa, estimación de posibilidades, noción de probabilidad y operaciones combinatorias. Así Fischbein explora los fundamentos intuitivos y precursores del conocimiento probabilístico buscando la existencia de conceptos parcialmente formados.

Además se preocupa de analizar el efecto de la instrucción en el proceso de aprendizaje. Su preocupación principal es como él mismo la menciona: "la construcción sistemática de un nuevo sistema conceptual no debe olvidar la dote intuitiva del niño. Un sistema conceptual no debe de ser construido en el vacío, sino debe hacer uso de las tendencias intuitivas existentes. Un curriculum en probabilidad debe tomar en cuenta este substrato primario intuitivo y preocuparse por mejorarlo y por encontrar métodos para construir nuevas intuiciones que sean compatibles con él."

Resumimos a continuación los resultados de su libro **"The Intuitive sources of Probabilistic Thinking in Children".**

LA INTUICION DEL AZAR

El niño de preescolar.

La intuición primaria del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista sin instrucción previa, está presente en la conducta diaria de cada niño, incluso antes de los siete años, contrariamente a lo que opina Piaget, el azar es equivalente a impredecibilidad y cuando el número de posibilidades, y por consiguiente el número de combinaciones posibles, es pequeño, el niño de preescolar razona correctamente, y a veces, como se ha puesto de manifiesto en algunas investigaciones, más correctamente que el niño que ha alcanzado la etapa de las operaciones formales.

El período de las operaciones concretas.

A través de esquemas espacio-temporales, y lógico-matemáticos, el niño adquiere la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, incluso al nivel conceptual. Es consciente de que por ejemplo, al lanzar 15 monedas es muy difícil obtener 15 cruces. Ciertamente este proceso no se completa durante este período puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto. No obstante la representación del azar, que no es sino una intuición primaria en el niño de preescolar, se convierte en una estructura conceptual distinta y organizada después de los siete años. El azar, en el sentido de lo no determinado, se comprende explícitamente como oposición a lo deducible. El niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios.

El período de las operaciones formales.

El adolescente agrupa, según Piaget e Inhelder, las relaciones no determinadas de fenómenos aleatorios según esquemas operacionales. Una vez que se presenta una situación aleatoria, por medio del uso de éstos esquemas, se hace inteligible, y la síntesis entre el azar y lo operacional conduce al adolescente al concepto de probabilidad.

Fischbein sostiene que las cosas son más complicadas de lo que sugiere ésta explicación. La síntesis entre el azar y lo deducible, no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales. En experimentos donde se le pide al sujeto reconocer probabilidades iguales en diferentes condiciones experimentales, es el adolescente quien evita lo impredecible y busca dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias.

La estructura operacional del pensamiento formal por sí sola no puede hacer inteligible al azar, incluso aunque pueda proporcionar los esquemas que son necesarios para esto, o sea, capacidad combinatoria, proporcionalidad e implicación. La explicación para esta deficiencia es que las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas, según las cuales los sucesos aleatorios caen fuera de los límites de lo racional y científico. La enseñanza en la escuela lleva implícita que la ambigüedad y la incertidumbre no son aceptables en el razonamiento científico, y que toda explicación consiste en identificar una causa. El resultado es que la intuición del azar se hace irreconciliable con la estructura del pensamiento lógico, y es relegada a una clase inferior, como un método inadecuado de interpretación que no cumple los requisitos científicos.

LA INTUICION DE LA FRECUENCIA RELATIVA

El niño de Preescolar.

Otros investigadores han llevado a cabo experimentos de aprendizaje probabilístico, en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa. Un ejemplo de esta clase de experimentos consiste en presentar al alumno dos luces de color diferente (puede ser rojo y verde) que se irán encendiendo intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo el 70 y el 30 porciento respectivamente.

El alumno debe predecir cual de las dos luces se encenderá la próxima vez. El termino aprendizaje probabilístico, se refiere a la tendencia del sujeto a ajustar sus predicciones a las frecuencias reales de los sucesos; en otras palabras, la probabilidad de una respuesta dada tiende a igualar a la probabilidad del estímulo correspondiente. Los resultados obtenidos en este tipo de experimentos apoyan fuertemente la conclusión de que el niño de preescolar adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo, aunque sus respuestas no llegan a coincidir totalmente con la frecuencia de los mismos. El hecho de que esta conducta puede obtenerse sin que se estimule al niño mediante una recompensa cuando acierta, muestra que este fenómeno no es un mero condicionamiento de tipo motor, sino una formación cognitiva mental, esto es un programa de acción relativamente automatizado y polivalente que comparte las características de todos los procesos cognitivos.

El periodo de las operaciones concretas.

La mayoría de los investigadores han encontrado que la intuición de la frecuencia relativa de sucesos, puesta de manifiesto a través de experimentos de aprendizaje probabilístico, mejora con la edad. Si la intuición se ve como el resultado cognitivamente fijado de experiencias acumuladas, parece razonable que la intuición de la frecuencia relativa se desarrolle de un modo natural como resultado de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en los cuales las respuestas deben expresar una estimación correcta de las frecuencias relativas de los fenómenos.

El periodo de las operaciones formales.

Las investigaciones que se han realizado a diferentes niveles de edad han demostrado que el adolescente ha hecho progresos en comparación a los niños más pequeños en lo que se refiere a la intuición de la frecuencia relativa, particularmente en casos donde las predicciones tienen algún resultado práctico. La estrategia óptima ante decisiones en condiciones aleatorias muestra los efectos favorables del desarrollo de la inteligencia sobre las predicciones en ciertas condiciones experimentales.

LA ESTIMACION DE POSIBILIDADES Y LA NOCION DE PROBABILIDAD.

El niño de Preescolar.

Distintos autores han afirmado que el niño de preescolar es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, basándose en que el niño de esta edad no posee los recursos necesarios:

- la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible sobre la base de procedimientos operacionales.
- el concepto de proporción o, en términos más generales la comparación por cociente.
- Los procedimientos combinatorios por medio de los cuales es posible realizar un inventario de todos los resultados posibles en una situación dada.

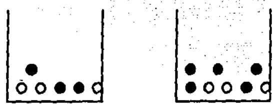
Ninguno de estos recursos específicos aparece hasta el nivel de las operaciones formales (aunque pueden estar presentes en forma incipiente, estrechamente ligados a lo concreto, durante el período de las operaciones concretas).

Sin embargo para Fischbein estas carencias no impiden al niño hacer juicios probabilísticos en el sentido de una estimación intuitiva de posibilidades a favor de algún suceso. Un experimento que pone de manifiesto esta capacidad, consiste en presentar a los alumnos cinco conjuntos de canales por los que una bola puede rodar recorriendo distintas trayectorias. A los niños se les plantean preguntas como:

- Si lanzo una bola por cada canal, ¿en cual de ellos es más probable que salga la bola por el orificio 1?
- Si lanzo la bola muchas veces seguidas, ¿crees que saldrá por 1 con más frecuencia que por otros?

Otro experimento consiste en la elección, por parte del alumno entre dos urnas o cajas con diferente contenido, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola de un color determinado.

Se le plantea al alumno:
Debes sacar una bola de una de las cajas con los ojos cerrados. Ganas si obtienes una bola blanca. De qué caja prefieres hacer la extracción:



Si se realiza un adecuado control experimental (posición de los objetos en el espacio, preferencia de color, ...) y las operaciones auxiliares de comparación y cálculo requeridas son simples, el niño de preescolar es capaz de hacer apuestas basadas en una estimación probabilística.

El período de las operaciones concretas.

Si no han recibido una instrucción apropiada, los niños de nueve y diez años, pueden resolver problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso A en dos experimentos diferentes sólo en situaciones donde bien el número de casos favorables o el número de casos no favorables a A son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Para este tipo de problemas, el porcentaje de respuestas correctas es mayor en niños de nueve y diez años que en niños de preescolar. En situaciones que no pueden ser reducidas a comparaciones binarias, el número de respuestas correctas no es significativamente distinto.
Para situaciones que implican igualdad de probabilidades, se han usado dos tipos de paradigmas experimentales ya descritos anteriormente: extracción de bolas y bifurcaciones por canales. En problemas donde las posibilidades son referidas a proporciones de elementos discretos (bolas en un recipiente), las respuestas de los niños de nueve y diez años no son mejores que las que se obtendrían por una respuesta al azar, y no son significativamente mejores que las respuestas de los niños de preescolar, excepto en el caso citado anteriormente. En problemas donde las posibilidades tienen que ser determinadas a partir de una configuración geométrica (canales bifurcados por donde unas bolas pueden circular de un modo aleatorio), el porcentaje de respuestas correctas decrece incluso con la edad.

El período de las operaciones formales.

El logro de los adolescentes estimando posibilidades a favor o en contra de un resultado, es superior al de los niños pequeños. Cuando el material experimental consiste en un recipiente con bolas, los niños de 12 años dan respuestas correctas desde el principio, incluso en casos en que tiene que comparar cocientes con términos desiguales. Tal descubrimiento es previsto por la teoría de Piaget. Lo que Fischbein añade a esto, es el hecho de que incluso niños de 9 y 10 años, pueden responder correctamente a tales situaciones, si tienen la instrucción adecuada.

OPERACIONES COMBINATORIAS

El niño de Preescolar

Piaget e Inhelder han probado que el niño de preescolar sólo puede hacer algunas combinaciones, permutaciones y variaciones de una manera empírica, y no intentan encontrar un método de realizar un inventario exhaustivo.

El periodo de las operaciones concretas

Durante el periodo de las operaciones concretas, los niños buscan modos de realizar inventarios de todas las permutaciones, variaciones y combinaciones posibles en un conjunto dado con un número pequeño de elementos, y llegan a procedimientos rudimentarios de cálculo mediante ensayo y error.

Los experimentos de Fischbein han demostrado que al final de este periodo (10-11 años), los niños pueden, con la ayuda de instrucción, asimilar los procedimientos enumerativos usados en la construcción de diagramas de árbol.

El periodo de las operaciones formales.

Piaget e Inhelder afirman que, durante la etapa de las operaciones formales, el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos.

La investigación de Fischbein ha demostrado, sin embargo, que esto es sólo una potencialidad para la mayoría de los sujetos. Bajo su punto de vista sería más preciso afirmar que estos niños son capaces de asimilar procedimientos combinatorios con la ayuda de la instrucción, y que esto es también cierto para los niños de 10 años. Aunque hay diferencias en la realización entre estos dos niveles de edad, estas diferencias son bastante pequeñas.

EL EFECTO DE LA INSTRUCCION SOBRE CADA UNA DE ESTAS FACETAS.

El niño de Preescolar.

Usando un procedimiento de instrucción elemental, Fischbein y sus colaboradores han intentado mejorar las respuestas de los niños a cuestiones que implican la comparación de posibilidades en situaciones donde los cocientes no tenían iguales términos (1970). Este intento no tuvo éxito. Es posible, a esta edad, que los niños no puedan asimilar un esquema que implique una comparación doble.

El periodo de las operaciones concretas.

Con la instrucción, las respuestas de los niños de 9 y 10 años, pueden mejorar significativamente en problemas que no pueden ser reducidos a comparaciones binarias. Este descubrimiento es importante, puesto que debe arrojar dudas sobre la afirmación de Piaget e Inhelder de que el establecimiento de la proporcionalidad es una característica de las operaciones formales. Fischbein ha demostrado que, por medio del uso de procedimientos figurativos, pueden ser construidos, al nivel de las operaciones concretas, esquemas considerados por Piaget e Inhelder como accesibles solo al nivel de operaciones formales. Al menos se ha demostrado que la ausencia de proporcionalidad no es un obstáculo para aprender el concepto de probabilidad. Incluso antes de la edad de 10 años, el niño es capaz de asimilar este esquema con la ayuda de instrucción elemental.

El periodo de las operaciones formales.

Las lecciones experimentales realizadas por Fischbein y sus colaboradores, se hicieron con niños de 12 a 14 años. Dichas lecciones trataron los siguientes conceptos y procedimientos: suceso,

espacio muestral, suceso elemental y compuesto, probabilidad como medida del azar, frecuencia relativa, y análisis combinatorio.
Los resultados de la instrucción revelaron un mayor interés y receptividad de los adolescentes en lo que se refiere a las ideas de probabilidad y estadística. Estos sujetos son capaces de comprender y aplicar correctamente los conceptos enseñados, que deben como mínimo implicar el conocimiento de una reestructuración de la base intuitiva. Para este autor, los modelos generativos (diagramas de árbol en el caso de las operaciones combinatorias) son los mejores dispositivos de enseñanza para la construcción de intuiciones secundarias.

La conclusión general del trabajo de Fischbein es que **"la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. La intuición probabilística no se desarrolla espontáneamente, excepto dentro de unos límites muy estrechos. La comprensión, interpretación, evaluación y predicción de fenómenos probabilísticos, no pueden ser confiadas a intuiciones primarias que han sido despreciadas, olvidadas y abandonadas en un estado rudimentario de desarrollo bajo la presión de esquemas operacionales que no pueden articularse con ellas.**
Pero con el fin de que sean satisfechos los requisitos para una cultura científica eficiente, es necesario entrenar, desde los primeros niveles, la base intuitiva relevante al pensamiento probabilístico, de este modo se puede lograr un balance genuino y constructivo entre lo posible y lo indeterminado en el trabajo de la inteligencia."

Es difícil sintetizar el trabajo de Piaget y el trabajo de Fischbein pues se basan en modelos cognitivos de desarrollo sustancialmente diferentes y usan diferente terminología. Mientras que el trabajo de Piaget se enfoca a los estados de desarrollo conceptual, la hipótesis principal de Fischbein es que la cognición es unitaria, es decir del mismo tipo sin importar el nivel de aplicación. Piaget se centra en puntos muy específicos en su trabajo (análisis combinatorio), y Fischbein ve los conceptos probabilísticos en forma más general. Piaget estudia el desarrollo espontáneo de los conceptos en los niños, mientras que Fischbein toma en cuenta la mediación social en el proceso de desarrollo de los conceptos probabilísticos

2.2.3 Kaheman,Tversky,Slovic.

Autores como Kahneman, Slovic, y Tversky, han puesto de manifiesto la existencia de errores sistemáticos y conductas estereotipadas persistentes en la toma de decisiones por parte de los individuos ante situaciones de tipo probabilístico. Algunos de estos errores son de tipo psicológico, y una mera exposición de las leyes teóricas puede no ser suficiente para superarlos. Incluso la existencia en el alumno de estos sesgos puede dificultar la asimilación de los conceptos formales.

Los autores antes mencionados (1982), han identificado dos tipos de estrategias erróneas que denominan representatividad y disponibilidad. La persistencia de estos errores proporciona una razón crucial para la temprana introducción del pensamiento probabilístico en la matemática básica. Resultados de encuestas llevadas a cabo, muestran que la mayoría de los alumnos entran en la universidad con un conocimiento escaso o nulo de las nociones probabilísticas y con sesgos en su intuición profundamente arraigados. Puesto que en los cursos universitarios la probabilidad se introduce según el modelo abstracto de Kolmogorov (conjuntos, espacios muestrales, variables aleatorias), es bastante probable que este tipo de enseñanza no ayude al alumno a superar estos errores, siendo precisa una metodología experimental y heurística para tener éxito en la superación de los prejuicios probabilísticos.

"La valuación de la probabilidad de un evento incierto, o la predicción de una cantidad desconocida es un proceso complejo, que comprende interpretar el problema, buscar la información relevante y elegir una respuesta adecuada. Para resolver este tipo de problemas, la gente usa un número limitado de principios heurísticos que les permite simplificar este proceso, reduciéndolo a unas operaciones de juicio que son más sencillas. Los recursos más importantes son la representatividad y la disponibilidad."

Representatividad

La representatividad es la medida en que un evento es similar en propiedades esenciales a la población de la que proviene y refleja los rasgos más característicos del proceso que la genero.
La gente suele usar la representatividad como una heurística cuando se enfrenta con preguntas probabilísticas del tipo siguiente:

Juan es muy tímido e introvertido, siempre se presta a ayudar, pero se interesa poco en la gente o en el mundo de la realidad. Es un espíritu humilde y pulcro, necesita orden y estructura y tiene una pasión por los detalles.
Cuando se le pregunta a la gente qué ocupación probablemente tiene Juan de entre las de una lista, resulta que, por ejemplo la de bibliotecario es favorecida. De hecho ocurre que cuando se le pide a la gente que ordene las ocupaciones desde un punto de vista probabilístico y desde uno de similaridad, los resultados son muy parecidos.

Algunos ejemplos de preguntas en las cuáles es común que la gente use la representatividad para contestarlas, son:

1.- La probabilidad de que nazca un varón es 1/2. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable que aparezca en una serie de nacimientos?
a) H M M H M H
b) H H H H M H
c) Tienen la misma probabilidad
La respuesta correcta es c), sin embargo la mayoría de las personas escogen a) porque representa el conjunto de familias con tres hijos y tres hijas que es más representativo que b).

2.- Se tira al aire una moneda, después de una larga serie de caras,
a) es más probable que salga cara la próxima vez
b) es más probable que salga cruz la próxima vez
c) es igual de probable que salga cara o cruz

La respuesta correcta es c), sin embargo la mayoría de las personas escogen b) pues frecuentemente consideran al azar como un proceso autocorrectivo en que una desviación en una dirección induce una desviación en la dirección contraria. De hecho las desviaciones no se corrigen sino que se diluyen cuando el proceso aleatorio se lleva a cabo.

Disponibilidad

La disponibilidad consiste en la tendencia a hacer predicciones sobre la probabilidad de un suceso, basándose en la mayor o menor facilidad con la cual es posible o recordar, o construir ejemplos de ese suceso. La disponibilidad origina un sesgo sistemático en las estimaciones probabilísticas porque la gente tiende a pensar que los resultados que pueden recordarse fácilmente son más probables. Ejemplos en los cuales es común que se use la disponibilidad para responder son los siguientes:

1.- Considera los siguientes cuadros:

```
XXXXXXXX          XX
XXXXXXXX          XX
XXXXXXXX          XX
                  XX
   (1)            XX
                  XX
                  XX
                  XX
                  XX
                  (2)
```

¿En cuál de los cuadros hay más formas posibles para pasar de la primera a la última fila?
a) en el cuadro 1
b) en el cuadro 2
c) el mismo número en ambos cuadros
La respuesta correcta es c), sin embargo la mayoría de las personas responden a) ya que son más evidentes las rutas para pasar de la primera a la última fila.

2.- Un individuo debe seleccionar comités a partir de un grupo de 10 personas,
a) hay más comités distintos formados por 8 personas
b) hay más comités distintos formados por 2 personas
c) hay el mismo número de comités de 8 que de 2 personas
La respuesta correcta es c), sin embargo la mayoría de las personas escogen b).

Además de los errores de representatividad y disponibilidad descritos anteriormente, podemos citar otros dos tipos:

- No considerar la información proporcionada por los experimentos aleatorios en sí.
- Dependencia de modelos deterministas y sistemas de creencias arraigadas y por lo tanto no aprecian el carácter específico del azar.

Estos errores se ponen de manifiesto en las respuestas al clásico problema bayesiano siguiente: En una ciudad hay dos compañías de taxis, una con sus coches pintados de verde y la otra de azul. El 85% de los taxis en la ciudad son verdes y el 15% azules. Un taxi se ve implicado en un accidente y un testigo declara que el taxi en cuestión era azul. Datos anteriores sobre la veracidad de la identificación hecha por testigos, indican que en el 80% de los casos estas identificaciones de color son correctas, pero el 20% son incorrectas. ¿Cual es la probabilidad de que el taxi que participó en el accidente sea de color azul?

La respuesta correcta es 0.15, sin embargo las personas en general, toman en consideración el porcentaje de veracidad en las identificaciones para calcular esta probabilidad, aunque en realidad no depende de este porcentaje.

2.2.4 Green.

El trabajo desarrollado por R. Green en Inglaterra, en 1981, titulado "Conceptos de Probabilidad en Alumnos de 11 a 16 Años", tiene como primer objetivo el muestrear las intuiciones de azar y los conceptos de probabilidad que poseen los alumnos de las escuelas inglesas de la región de East Midlands. Para lograr este objetivo, durante un lapso de dos años, desarrolló una prueba especial de conceptos de probabilidad, iniciando con 6 experimentos piloto cuyo resultado final fue una prueba de 26 preguntas. El análisis de las respuestas a esta prueba se realizó haciendo énfasis en las diferencias por sexo, por edad, por habilidad intelectual y con respecto a otros tests estandarizados.
Cada pregunta de esta prueba, fue clasificada de acuerdo a las siguientes 3 categorías: verbal, combinatoria, y probabilística, siendo una prueba lo suficientemente amplia para medir las concepciones básicas que deben tener los alumnos al finalizar su enseñanza medio superior.

Los resultados principales fueron:

- Casi todos los items de la prueba son mejor resueltos a mayor edad.

- A menudo los años 11 y 12 muestran patrones de respuesta muy similares, con un aumento sustancial en el desempeño en las edades 13, 14 y 15 años.

- Los items que requieren simplemente de operaciones de conteo, son bien resueltos a cabo en todos los años.

- Los items que requieren la operación de cociente son muy pobremente resueltos particularmente antes de los 14 años.

- Los items que requieren una apreciación de aleatoriedad, de estabilidad de frecuencias, y de inferencia, fueron pobremente resueltos, con poca evidencia de mejora con la edad.

- No obstante que la mayoría de los alumnos resolvió bien la pregunta de combinatoria a un primer nivel , fueron pocos los que pudieron proceder a generalizar.

- La habilidad verbal de los alumnos es en muchos casos inadecuada para describir con exactitud situaciones probabilísticas.

- Los niños tuvieron mejores resultados que las niñas en el resultado total de la prueba.

Este trabajo tiene el mérito de basarse en una muestra muy grande. El trabajo de Green evalúa conceptos de probabilidad clásica más que concepciones de probabilidad subjetiva, al igual que el trabajo de Piaget, sin embargo el hecho de aplicar un test de papel y lápiz a casi 3000 alumnos da información más precisa que el trabajo de Piaget.

Todas las investigaciones resumidas tienen diferentes metodologías de trabajo. El trabajo de Piaget está basado en la observación de un número reducido de niños, el trabajo de Fishbein está basado en la observación de niños en edad escolar, el trabajo de Kaheman está basado en encuesta a profesionistas, y Green elabora una encuesta escrita con algunas entrevistas para alumnos en el aula.

Además son trabajos con diferentes aproximaciones es decir, el trabajo de Piaget es de orden psicogenético, el trabajo de Fischbein es de orden psicológico,el trabajo de Kahneman es de orden sociológico, el trabajo de Green es de orden educativo.

Muchos de estos trabajos se basan en predicciones de "bolas en urnas", originado esto por el trabajo de Piaget. Sin embargo este tipo de experimentos implica dificultades en cuanto a qué se está evaluando: frecuencia relativa, fracciones, números, volúmenes, preferencias,... Casi todos los trabajos se centran en probabilidad formal olvidando la probabilidad subjetiva.

Falta mucho trabajo por hacer para poder responder a las preguntas inicialmente expuestas. Es difícil aceptar las ideas de Piaget de que los conceptos probabilísticos se desarrollan hasta después de la edad de 10 años, parece mejor la noción de Fischbein de que los niños más chicos muestran habilidades y conocimiento del razonamiento probabilístico. La alternativa de Fischbein trae consigo que las intuiciones probabilísticas de los niños pueden ser modificadas y desarrolladas. Esto trae implicaciones muy serias de cómo y cuándo enseñar probabilidad.

CAPITULO 3. MARCO METODOLOGICO

Intuiciones probabilísticas en alumnos de 11 a 16 años en una escuela mexicana

3.1 Aspectos generales

El objetivo del presente trabajo es describir las intuiciones y los conocimientos probabilísticos que tienen los alumnos entre 11 y 16 años de edad en una escuela mexicana, mediante el test que Green elaboró.

La traducción al español del test fue hecha por Diaz Godino, el cual me la proporciono personalmente. Diaz Godino habia aplicado el test previamente con sus alumnos.

No hice ninguna prueba piloto del test confiando en las pruebas piloto hechas por Green (26 en total), en la experiencia personal de Diaz Godino al aplicar personalmente el test con sus alumnos y por falta de experiencia personal en investigaciones de este tipo.

El test se aplicó en la escuela personalmente, en la última quincena del año escolar Se tuvo acceso a los 144 alumnos, repartidos de la siguiente manera:

18 alumnos en 5º de primaria, (todos los alumnos de 11años de 5º de primaria de la escuela)
19 alumnos en 6º de primaria, (todos los alumnos de 6º de primaria de la escuela)
35 alumnos en 1º de secundaria, (todos los alumnos de 1º de secundaria de la escuela)
27 alumnos en 2º de secundaria, (todos los alumnos de 2º de secundaria de la escuela)
29 alumnos en 3º de secundaria, (todos los alumnos de 3º de secundaria de la escuela)
16 alumnos en el curso especial, (todos los alumnos de uno de los 3 salones de curso especial)
de tal forma que fueron:
23 alumnos de 11 años.
16 alumnos de 12 años.
37 alumnos de 13 años.
23 alumnos de 14 años.
32 alumnos de 15 años.
11 alumnos de 16 años.
2 alumnos de 17 años
de los cuales tenemos:
67 mujeres.
77 hombres.
por lo que prácticamente contamos con la población total de esta escuela y nuestro trabajo será descriptivo.

La aplicación del test duró una hora, el mismo tiempo otorgado por Green y por Diaz Godino, tiempo fue suficiente para que los alumnos lo contestaran.

Antes de que los alumnos respondieran al test, se dio una breve introducción explicando el objetivo del trabajo.

El trabajo de lectura fue individual, aún para los niños pequeños, pues todos los alumnos declararon entender bien las preguntas.

Los datos obtenidos se procesaron en Lotus al igual que las tablas de porcentajes y las gráficas. El análisis estadístico se hizo en mediante el paquete estadístico Statgraf.

3.2 Test

Green desarrolló el test en base a un examen de las diversas investigaciones hechas sobre el tema, y en base al estudio hecho del contenido de los libros de texto. Ademas tomó las preguntas más significativas hechas por Piaget, Fischbein y Kahneman, y puso los preguntas más típicas de un curso de probabilidad.

El test contiene 26 preguntas con 53 variables, que abarcan temas probabilísticos, comprensión de términos y combinatoria.

Green usó el formato de opción múltiple para acortar el tiempo de duración del test y facilitar las respuestas de los alumnos, que muchas veces no dominan la redacción de respuestas, ni conocen los términos probabilísticos.

A continuación damos las preguntas del test y las razones de Green para la inclusión de cada una de ellas.

Pregunta 1:
- Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene mas posibilidades de salir?, o ¿piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos?

Señala la respuesta correcta:
(A) La cara roja tiene mas posibilidades
(B) La cara verde tiene mas posibilidades
(C) No hay ninguna diferencia
(D) No lo sé

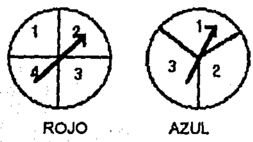
El propósito de este ítem es empezar el test con una pregunta sencilla de la situación probabilística mas simple, el lanzamiento de una moneda. La razón por la cual no se planteo la pregunta en forma tradicional fue precisamente para evitar la respuesta de libro " no hay diferencia ".

Pregunta 2:
- Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:
(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña

(D) No lo sé

El propósito de este ítem fue de muestrear una situación simple donde no existe simetría pero donde es suficiente para contestarla una comparación entre números.

Pregunta 3:
-La figura muestra dos discos (o ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es mas fácil obtener un 3?
Señala la respuesta correcta:



(A) Es más fácil obtener un 3 en el disco rojo
(B) Es más fácil obtener un 3 en el disco azul
(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener un 3
(D) No lo sé
¿Por qué eliges esa respuesta? ______________________________
____
____

Se necesitaba una pregunta de comparación de fracciones (1 a 3, 1 a 4) y una representación visual pareció apropiada.

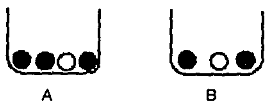
Pregunta 4:
- Cuando se lanza un dado, ¿qué número o números son mas difíciles de obtener? ,o ¿son todos iguales?
Respuesta:____
____

El uso común de dados por los niños en los juegos de mesa, y en temas introductorios de probabilidad sugirió que se investigara la percepción que tienen ellos de cual es la probabilidad de obtener un número en específico, en este caso se escogió el número seis.

Pregunta 5:
- Una moneda se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. Señala la frase que consideres correcta:
(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA
(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ
(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ
(D) No lo sé

Este ítem es para muestrear el conocimiento del alumno sobre el concepto de fenómeno frecuencial.

Pregunta 6:
(a)- En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo).
Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?



(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha

negra
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad
(D) No lo sé

Por qué?____

(b).-Otras dos cajas tienen en su interior algunas fichas negras y algunas fichas blancas.

Caja C: 5 negras y 2 blancas

D

Caja D: 5 negras y 3 blancas

¿Qué caja (la C o la D) da mas posibilidades de sacar una ficha negra? O por el contrario, ¿dan las dos la misma posibilidad?

(A) Caja C
(B) Caja D
(C) La misma posibilidad
(D) No lo sé

Por qué?____

(c).- Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:

E F

Caja E: 2 negras y 2 blancas
Caja F: 4 negras y 4 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?
(A) Caja E
(B) Caja F
(C) La misma posibilidad
(D) No lo sé

Por qué?____

(d).- Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:

Caja G: 12 negras y 4 blancas
Caja H: 20 negras y 10 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de sacar una ficha negra?
(A) La misma posibilidad
(B) Caja G
(C) Caja H
(D) No lo sé

Por qué?____

(e).- Otras dos cajas distintas de las anteriores tienen fichas negras y blancas.

Caja J: 3 negras y 1 blanca.
Caja K: 6 negras y 2 blancas.

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?
(A) La misma posibilidad
(B) Caja J
(C) Caja K
(D)No lo sé

Por qué?____

Este item involucra la comparación de probabilidades basado en el método de conteo, y es esencial.

Pregunta 7:
(a).- Lee las siguientes cinco frases:

1) No puede ocurrir.
2) No ocurre muy a menudo.
3) Ocurre con frecuencia.
4) Ocurre casi siempre.
5) Siempre ocurre.

Para las preguntas siguientes debes poner un número en cada uno de los cuatro recuadros. Puedes usar el mismo número mas de una vez si lo deseas.

(A) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Muy probable"?
(B) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Improbable"?
(C) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Probable"?
(D) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Poco probable"?

(b).- Escribe una palabra o una frase que signifique lo mismo que lo siguiente:

(A) Imposible____

(B) Posible ____

(C) Igual posibilidad__________________________________

(D) Poca posibilidad__________________________________

(E) Muy probable_____________________________________

Desde las entrevistas y encuestas piloto se detecto que había problemas en el manejo de los términos probabilístico, (la habilidad verbal). Para tener constancia de ello se introdujeron varios ítems relacionados con este aspecto.

Pregunta 8:
- En un experimento se lanzan al aire 12 monedas juntas y caen sobre la mesa. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuáles de los siguientes resultados ocurren mas a menudo?

(A) 2 caras y 10 cruces
(B) 5 caras y 7 cruces
(C) 6 caras y 6 cruces
(D) 7 caras y 5 cruces
(E) Todas tienen la misma posibilidad

Este ítem fue puesto para examinar la incidencia de "representatividad" descrita por Kahneman.

Pregunta 9:
-María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 peso si el dado sale 2 o 3 o 4 o 5 o 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuanto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo?

Respuesta:______________ pesos.

Este ítem evalúa el concepto de esperanza matemática.

Pregunta 10:

-Una moneda de 2 pesos y otra de 10 pesos se lanzan juntas al aire. En la tabla de abajo se ha anotado uno de los resultados posibles: cara en la moneda de 2 pesos y cruz en la de 10 pesos. Se ha indicado con una C para cara y X para cruz. Completa la tabla con todos los resultados posibles.

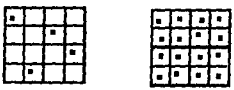
2 pesos	10 pesos
C	X

La ocurrencia común de problemas con monedas en el estudio introductorio de probabilidad obligó la inclusión de este ítem.

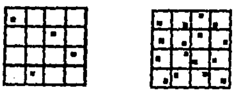
Pregunta 11:

- El tejado de una casa tiene 16 secciones cuadradas. Comienza a granizar. Al principio solo caen unos pocos granizos, después aumenta la granizada. En los siguientes dibujos se representan tres conjuntos de dos posibles formas en las cuales podría haber caído los granizos. El primer dibujo de cada grupo, A, B, C muestra una forma de distribuirse los 4 primeros granizos; el segundo 16 granizos.

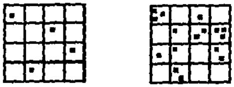
CONJUNTO A



CONJUNTO B



CONJUNTO C



Pregunta: ¿Cuál de los modelos anteriores esperarías tu ver como más realista a medida que el granizo cae?

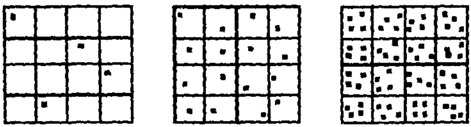
Conjunto A:
Conjunto B:
Conjunto C:
Conjuntos B y C:
Cada tipo de modelo es igualmente probable:

Un concepto importante en probabilidad es el de fenómeno aleatorio. Piaget considero la caída de gotas de lluvia para investigar la comprensión del concepto de aleatorio en los niños. Esta es la razón de incluir este ítem.

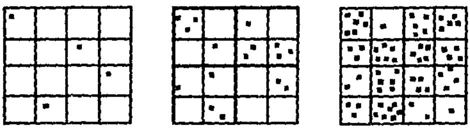
Pregunta 12:

- Esta pregunta se refiere también a la caída de los granizos sobre un tejado. También se dibujan tres posibles modelos en tres momentos distintos: los 4 primeros granizos, después 16 granizos y por último 64.

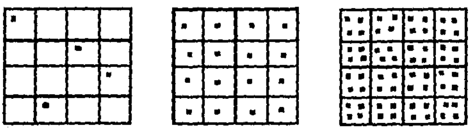
CONJUNTO A



CONJUNTO B



CONJUNTO C



Pregunta: ¿Cuál de los modelos anteriores esperarías tu ver como más realista a medida que el granizo cae?

Conjunto A:
Conjunto B:
Conjunto C:
Conjuntos B y C:
Cada tipo de modelo es igualmente probable:

La razón para este ítem es la misma que para la pregunta anterior.

Pregunta 13:

- Escribe una frase que comience:
"Es muy probable que el Rey...........", usando tus propias palabras para acabarla.

Es muy probable que el Rey______________________________
____
____

Pregunta 14:

- Escribe una frase que comience:
"Es improbable que el Rey..........", usando tus propias palabras para acabarla.

Es improbable que el Rey ______________________________
____
____

Pregunta 15:

- Escribe una frase que termine:
".......es algo que sucede al azar", usando tus propias palabras para comenzarla.

____
____
__________________________ es algo que sucede al azar.

Pregunta 16:

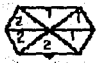
- Para las siguientes frases señala todas las que pienses que significan exactamente lo mismo que "tiene un cincuenta por ciento de posibilidades de ocurrir".

(A) Puede ocurrir o no.
(B) Tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso.
(C) Sucederá 50 veces de cada 50.
(D) Puede suceder algunas veces.
(E) Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir.
(F) Es muy improbable que suceda.

A partir de las pruebas piloto Green sintió la necesidad de investigar la comprensión de los términos probabilístico por parte de los alumnos. Esta es la razón por la cual incluyo las siguientes preguntas 13, 14, 15, y 16.

Pregunta 17:
- Dos pirinolas de seis lados están marcados con unos y doses, como se indica en el diagrama:

AMARILLO



ROJO

¿Qué pirinola te da mejor oportunidad de obtener un 2 cuando se lanza? o ¿dan la misma posibilidad?

(A) La amarilla es mejor para obtener un 2.
(B) La roja es mejor para obtener un 2.
(C) Ambas pirinolas dan la misma posibilidad.
(D) No lo sé.

Por qué?____

Una buena indicación de cuando un alumno ha desarrollado una apreciación del azar esta dada por el item anterior.

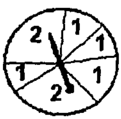
Pregunta 18:
-En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es mas probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad.
(B) El azul tiene mayor probabilidad.
(C) El verde tiene mayor probabilidad.
(D)Todos los colores tienen la misma probabilidad.
(E) No lo sé.

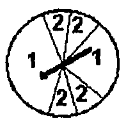
Por qué?____

Este item investiga la comprensión de la probabilidad condicional y del espacio muéstral.

Pregunta 19:
-Dos discos, uno naranja y otro cafe, están marcados con números.



CAFE



NARANJA

Cada disco tiene una aguja que gira. Si se quiere obtener un 1, ¿es uno de los discos mejor que el otro , o ambos dan la misma posibilidad ?

(A) El café es mejor para sacar un 1
(B) El naranja es mejor para sacar un 1
(C) Ambos discos dan la misma posibilidad
(D) No se puede decir

Por qué? ____
____
____

Es posible que los alumnos hayan contestado correctamente las preguntas 3 y 17, concernientes a ruletas, sin entender realmente el significado de area relativa que es lo que determina en forma correcta las probabilidades.

Pregunta 2O:

- El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una, una moneda muchas veces, y que apuntaran cada vez si salía cara o cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara:	0101100110010101101101000111000110110101011001000 1 010100111001101011001011001011001001011101100110 11 010100101100101011000100110101100111011101011000 11
Luisa:	100111011110100111001001110010001110111111010101 01 111000000100010100100000100011000101000000000011001 000000011111000011010100100100111111010011000110 00

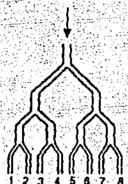
Una de las chicas lanzó la moneda correctamente; pero la otra hizo trampa y lo fingió.

(A) Qué niña ha hecho trampa? Respuesta:__________
(B) Cómo lo sabes? Respuesta:______________
____
____

Este ítem esta basado en el trabajo de Halmos, 1975, e investiga el conocimiento estocástico del alumno.

Pregunta 21:

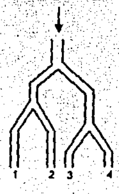
(a)- Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:



Señala la frase que mejor descriiba dónde esperas tu que vayan las bolas.

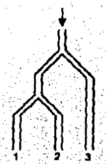
(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas
(B) Por 1 y 8 pasarán más bolas
(C) Por 3, 4, 5 y 6 pasarán más bolas
(D) Por 1, 3, 5 y 7 pasarán más bolas
(E) Ninguna de éstas

(b)- Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



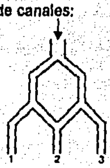
(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas
(B) Por 1 y 2 pasarán más
(C) Por 3 y 4 pasarán más
(D) Por 1 y 4 pasarán más
(E) Ninguna de éstas

(c)- Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas
(B) Por 2 pasarán más bolas
(C) Por 3 pasarán más bolas
(D) Por 1 y 2 pasarán muchas bolas y por 3 pocas
(E) Ninguna de éstas

(d)-Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:

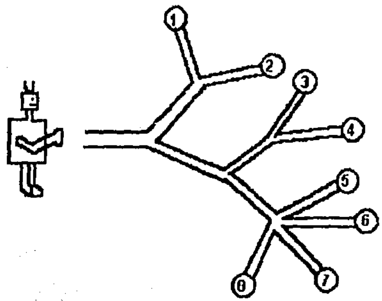


(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas
(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 o 3
(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3

(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 y unas pocas por 3
(E) Ninguna de éstas

Este ítem fue incluido dado que este tipo de preguntas y de configuración, fueron utilizadas por Piaget y por Fischbein en sus trabajos. Se muestrea aquí la comprensión del alumno de la estabilidad de la frecuencia.

Pregunta 22:
- Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino como por otro (pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 trampas al final de los 8 caminos (ver el dibujo). ¿En que trampa o trampas tiene el robot más probabilidades de acabar?, ¿o todas las trampas son igualmente probables?



Respuesta:____
____
____

Este ítem trata de examinar la habilidad o el conocimiento de los alumnos para leer diagramas de árbol, y examinar el concepto de multiplicación de probabilidades.

Pregunta 23:
- El profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinches. Algunas caen con la punta para arriba y otras caen hacia abajo .
El resultado fue: ARRIBA = 68 ; ABAJO = 32
Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento.

De la lista siguiente, elige el resultado que tu crees obtendrá la niña:

(A) ARRIBA = 36 ; ABAJO = 64
(B) ARRIBA = 63 ; ABAJO = 37
(C) ARRIBA = 51 ; ABAJO = 49
(D) ARRIBA = 84 ; ABAJO = 16
(E) Todos los resultados tienen la misma probabilidad

Un ítem probabilístico donde no existiera un modelo sino que solo la experiencia empírica se pudiera utilizar para estimar la probabilidad se considero importante de introducir.

Pregunta 24:
- ¿Cuál de los dos siguientes resultados es más probable?

(1) Obtener 7 o más varones de los 10 primeros bebés nacidos en un nuevo hospital.
(2) Obtener 70 o más niños de los 100 primeros bebés nacidos en un nuevo hospital.

(A) Son igualmente probables
(B) 7 o más de 10 es más probable
(C) 70 o más de 100 es más probable
(D) No se puede decir

En estadística la estabilidad de frecuencia es fundamental para la teoría y debe ser un concepto que debe conocer el alumno. Este ítem se basa en el trabajo de Kahneman sobre representatividad.

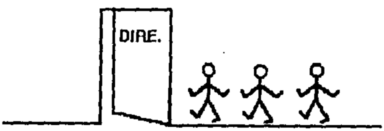
Pregunta 25:
- Una bolsa contiene en su interior algunas bolas blancas y algunas bolas negras. Un niño extrae una bola, anota su color y la vuelve a introducir. A continuación remueve las bolas para que se mezclen bien. El chico repite esta operación 4 veces y siempre obtiene una bola negra.

A continuación extrae una quinta bola. ¿De que color piensas que será con más probabilidad?

(A) La negra es más probable de nuevo
(B) La negra y la blanca son igualmente probables
(C) La blanca es más probable esta vez

Este ítem muestrea si el alumno tiene conocimiento sobre inferencia a partir de una muestra.

Pregunta 26:
- Tres chicos son enviados al director por alborotar. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho del director. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego!



(a) Supongamos que los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (los notaremos A, B y C). Queremos escribir abajo todos los posibles órdenes en que podrían alinearse.

Por ejemplo: para el orden A en primero, B en segundo y C en tercero escribiremos ABC

Respuesta: ABC/........./........./........./........./........./...../........./........./........./........./......./........../........

Anota ahora las demás formas diferentes de ordenarse.
(b) ¿Cuántas formas diferentes hay en total? Respuesta__________
Ahora haz el resto de la pregunta:
(c) Si cuatro niños (A, B, C, D) tienen que alinearse, ¿Cuántas formas diferentes hay? Respuesta___________
(d) Y si hay cinco niños, ¿Cuántas maneras hay? (No intentes escribirlas todas!) Respuesta____________

Por último, era imprescindible una pregunta sobre análisis combinatorio (permutaciones). Por razones de tiempo y dado que son laboriosos los cálculos sólo se puso este ítem.

3.3 Resultados de la aplicación del test

Los resultados en esta primera etapa se analizaron en base al año escolar, y para hacer más fácil las comparaciones se dieron en porcentajes. La base de datos y las tablas se procesaron en LOTUS.

1.- Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene mas posibilidades de salir? ,o ¿piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos?

Señala la respuesta correcta:

(A) La cara roja tiene más posibilidades (____)
(B) La cara verde tiene más posibilidades (____)
(C) No hay ninguna diferencia (____)
(D) No lo sé (____)

Como se mencionó anteriormente, esta pregunta corresponde a una situación probabilística simple: "la probabilidad de que salga cara o cruz, en el lanzamiento de una moneda no cargada es igual a 0.5".
Para no plantear la pregunta en forma tradicional, se redactó haciendo énfasis en la posición inicial de la moneda al lanzarla.

Los resultados fueron los siguientes:

preg 1

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	16.67	27.78	55.56	0.00
PRIMARIA 6o	15.79	21.05	47.37	15.79
SECUNDARIA 1o	8.57	17.14	71.43	2.86
SECUNDARIA 2o	14.81	7.41	70.37	7.41
SECUNDARIA 3o	17.24	0.00	82.76	0.00
CURSO ESPECIAL	18.75	6.25	75.00	0.00

En los años quinto y sexto de primaria, el porcentaje de respuesta correctas es aproximadamente del 50%. Este porcentaje aumenta hasta el 80% en los últimos años. Cabría esperar que este porcentaje fuera más alto después de 6 años de estudios.

Esta pregunta corresponde a la situación probabilística con la cual casi siempre se inicia un curso de probabilidad, desde los primeros años. Vemos que existe un porcentaje de alumnos, 20%, que cree que la posición inicial influye en el resultado, lo que implica que el concepto de equiprobabilidad no esta plenamente asimilado, o se percibe una creencia errónea sobre el lanzamiento de la moneda.

2.- Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña (____)
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño (____)
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña (____)
(D) No lo sé (____)

Como lo menciona Green, este ítem se refiere a una situación probabilística simple, donde no existe simetría. Este problema se toca frecuentemente en los cursos de probabilidad, podriamos decir que es una situación común para los alumnos. Esta pregunta está planteada en forma tradicional.

Los resultados son los siguientes:

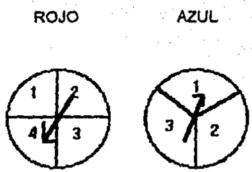
preg 2

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	0.00	83.33	16.67	0.00
PRIMARIA 6o	5.26	84.21	10.53	0.00
SECUNDARIA 1o	2.86	65.71	28.57	2.86
SECUNDARIA 2o	11.11	81.48	7.41	0.00
SECUNDARIA 3o	6.90	82.76	10.34	0.00
CURSO ESPECIAL	6.25	87.50	6.25	0.00

El porcentaje de respuestas correctas es mayor que en la pregunta anterior, desde los primeros años, 80%. Este porcentaje se mantiene casi constante (excepto en primero de secundaria, ¿por qué ?), es decir que no hay mejoría significativa con la edad. No se alcanzó un 100% de respuestas correctas en el último año escolar como podría esperarse.

Los alumnos optan en mayor porcentaje por la opción C (es igual de probable), es decir, que no toman en cuenta que hay más niñas que niños. Aquí podría deberse a dos razones:
- porque consideran que la diferencia de tres niños es mínima.
- porque interpretan en forma diferente el enunciado, "es igual de probable que sea una niña que un niño", sería igual para el alumno que "puede salir tanto un niño como una niña". Este resultado es mencionado por Green en su tesis.

3.-La figura muestra dos discos (o ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3?
Señala la respuesta correcta:



(A) Es más fácil obtener un 3 en el disco rojo (____)
(B) Es más fácil obtener un 3 en el disco azul (____)
(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener un 3 (____)
(D) No lo sé (____)
¿Por qué eliges esa respuesta? ______________________________
____
____

Los resultados fueron los siguientes;

preg 3

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	22.22	72.22	5.56	0.00
PRIMARIA 6o	10.53	73.68	15.79	0.00
SECUNDARIA 1o	5.71	77.14	17.14	0.00
SECUNDARIA 2o	0.00	100.00	0.00	0.00
SECUNDARIA 3o	3.45	93.10	3.45	0.00
CURSO ESPECIAL	0.00	100.00	0.00	0.00

Es sorprendente que este item resultara más facil. que los anteriores (72% a 100%). Esto puede atribuirse a la representación gráfica de la situación probabilística.

Hay un incremento de facilidad con la edad , además se aprecia como en segundo de secundaria se da un brinco, se pasa del 77% al 100%.

4.- Cuando se lanza un dado, ¿qué número o números son mas difíciles de obtener? o ¿son todos iguales?
Respuesta:____
____

En cualquier curso de probabilidad, los problemas donde se lanza un dado son frecuentes, además que el uso de éstos en los juegos de mesa es común para los alumnos. De ahí el interés de incluir este item en la prueba como lo menciona Green.

Como en el caso de la pregunta 1 si el uso de monedas y dados es tan común en situaciones probabilísticas, se esperaría que un alto porcentaje de los alumnos contestara correctamente. Cabe mencionar que la pregunta está redactada sin poner énfasis en ninguna situación en particular que puediera distraer al alumno como en la primera pregunta.

Los resultados fueron los siguientes:

preg 4

AÑO ESCOLAR	1	2	3	4	5	6	IGUAL	OTRA
PRIMARIA 5o	5.00	0.00	0.00	0.00	10.00	20.00	55.00	10.00
PRIMARIA 6o	8.70	0.00	8.70	4.35	4.35	17.39	47.83	8.70
SECUNDARIA 1o	5.71	0.00	0.00	0.00	5.71	5.71	82.86	0.00
SECUNDARIA 2o	3.70	0.00	0.00	0.00	0.00	7.41	88.89	0.00
SECUNDARIA 3o	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	96.55	3.45
CURSO ESPECIAL	0.00	0.00	0.00	0.00	5.88	11.76	70.59	11.76

En los primeros años, solo el 50% de los alumnos piensa que todos los números tienen la misma probabilidad de salir. Este porcentaje aumenta al 96% en tercero de secundaria, pero disminuye al 70% en el curso especial (¿por qué?).

En todos los años el porcentaje de alumnos que piensan que el número 6 es el número más difícil de obtener, es igual o mayor que los otros porcentajes. Esto es otro ejemplo de una creencia errónea arraigada que persiste aun después de recibir instrucción.

5.- Una moneda se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. Señala la frase que consideres correcta:

(A) La próxima vez es mas probable que otra vez salga CARA (____)
(B) La próxima vez es mas probable que salga CRUZ (____)
(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ (____)
(D) No lo sé (____)

Esta pregunta trata sobre un fenómeno frecuencial y esta incluida para muestrear la tendencia de los alumnos a lo que se llama "falacia del jugador o positive/negative recency". Si la ocurrencia de un evento se ha dado repetidas veces, el sujeto o alumno tiende a pensar que la próxima vez debe de ocurrir lo contrario. En este caso el alumno optaría por la opción B. Si el alumno piensa que la moneda está "cargada" (positive recency), entonces optaría por la opción A.
El alumno debe optar por la opción C, es decir, comprender que la historia pasada no se toma en cuenta.

Los resultados fueron los siguientes:

preg 5

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	11.11	11.11	77.78	0.00
PRIMARIA 6o	26.32	21.05	52.63	0.00
SECUNDARIA 1o	11.43	11.43	74.29	2.86
SECUNDARIA 2o	3.70	11.11	81.48	3.70
SECUNDARIA 3o	3.45	6.90	86.21	3.45
CURSO ESPECIAL	18.75	0.00	81.25	0.00

El porcentaje de respuestas correctas fué más alto que para la pregunta uno en todos los años. Tenemos desde un 50% hasta un 86%.

Los porcentajes para las opciones A o B, están balanceados. No hay tendencia clara hacia cualquiera de los dos errores antes mencionados.

La comparación entre el número de bolas para decidir cuál bolsa o urna escoger es el procedimiento utilizado por los investigadores para comprobar si el alumno tiene un cierto dominio de la probabilidad.

En los siguientes cinco incisos de la pregunta siguiente, las estrategias usadas por los alumnos para escoger entre las urnas son las siguientes:
E1- Escoger aquella urna que contenga el mayor número de bolas negras (estrategia de superioridad de bolas negras).
E2-Escoger la urna que contiene el menor número de bolas blancas (estrategia de inferioridad de bolas blancas).
E3-Escoger la urna con más bolas (estrategia de complejidad).
E4-Escoger la urna con menos bolas (estrategia de simplicidad).
E5-Escoger la urna con una diferencia mayor entre bolas blancas y negras (estrategia de diferencia dentro de la urna).
E6-Comparar el número de bolas blancas y bolas negras de las dos urnas y escoger aquella con más diferencia (diferencia entre urnas).
E7-Calcular la razón blancas a negras (o negras a blancas) y escoger la urna con razón mas grande (razón en las urnas).
E8-Comparar el cociente negras urna 1 entre negras urna 2 y blancas urna 1 entre blancas urna 2 y escoger la urna con superávit de negras o con deficit de negras (razón entre urnas).
E9-Escoger la urna con un arreglo de bolas mas favorable (posicional).

6(a).- En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo).
Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegiriás para hacer la extracción?

A B

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ( )
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ( )
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad ( )
(D) No lo sé ( )

Por qué?____
____
____

Los resultados fueron los siguientes:

preg 6a

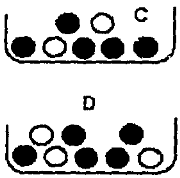
AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	83.33	11.11	5.56	0.00
PRIMARIA 6o	100.00	0.00	0.00	0.00
SECUNDARIA 1o	94.29	2.86	2.86	0.00
SECUNDARIA 2o	88.89	0.00	11.11	0.00
SECUNDARIA 3o	89.66	3.45	6.90	0.00
CURSO ESPECIAL	93.75	0.00	6.25	0.00

Los porcentajes de respuesta correctas son altos (83% a 93%), es de notar que se obtiene un 100% de respuestas correctas en sexto.

La estrategia más utilizada fue la comparacion de bolas negras, se escogió la urna con el mayor número de bolas negras (la estrategia es E1 antes citada).

6(b).-Otras dos cajas tienen en su interior algunas fichas negras y algunas fichas blancas.

C



D

Caja C: 5 negras y 2 blancas

Caja D: 5 negras y 3 blancas

¿Qué caja (la C o la D) da más posibilidades de sacar una ficha negra? O por el contrario, ¿dan las dos la misma posibilidad?

(A) Caja C (____)
(B) Caja D (____)
(C) La misma posibilidad (____)
(D) No lo sé (____)

Por qué?____
____
____

Los resultados fueron los sigientes:

preg 6b

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	55.56	0.00	44.44	0.00
PRIMARIA 6o	47.37	10.53	42.11	0.00
SECUNDARIA 1o	48.57	22.86	28.57	0.00
SECUNDARIA 2o	62.96	3.70	33.33	0.00
SECUNDARIA 3o	82.76	6.90	6.90	3.45
CURSO ESPECIAL	93.75	6.25	0.00	0.00

Los porcentajes de repuestas correctas bajaron en todos los años con respecto a la pregunta anterior (a la mitad en sexto) excepto en el curso especial. Esto es porque la estrategia utilizada anteriormente (E1) falla y lleva a la opción C (con una alto porcentaje), y porque el número de bolas es mayor en las dos urnas y el examen visual ya no es tan facil.

En esta pregunta se hace patente el uso de la estrategia posicional (E9) que lleva a escoger la opción B.

6(c).- Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:

Caja E: 2 negras y 2 blancas
Caja F: 4 negras y 4 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) Caja E ( )
(B) Caja F ( )
(C) La misma posibilidad ( )
(D) No lo sé ( )

Por qué?____
____
____

Los resultados fueron los siguientes:

preg 6c

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	16.67	27.78	50.00	5.56
PRIMARIA 6o	15.79	21.05	57.89	5.26
SECUNDARIA 1o	22.86	14.29	62.86	0.00
SECUNDARIA 2o	11.11	22.22	66.67	0.00
SECUNDARIA 3o	10.34	6.90	82.76	0.00
CURSO ESPECIAL	6.25	0.00	93.75	0.00

Los porcentajes de respuestas correctas son más bajos que en la primera pregunta y similares a la pregunta anterior. Las estrategias mas comunes, usadas anteriormente, aquí fallan. La estrategia de superioridad (E1) y de complejidad (E3) llevan a la opción B, las estrategias de inferioridad (E2) y de simplicidad (E4) llevan a la opción A, ambas incorrectas.

El porcentaje de respuestas correctas es mayor con el año escolar.

6(d).- Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:

Caja G: 12 negras y 4 blancas
Caja H: 20 negras y 10 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de sacar una ficha negra?

(A) La misma posibilidad ( )
(B) Caja G ( )
(C) Caja H ( )
(D) No lo sé ( )

Por qué?____
____
____

Los resultados fueron los siguientes:

preg 6d

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	16.67	33.33	50.00	0.00
PRIMARIA 6o	0.00	68.42	26.32	5.26
SECUNDARIA 1o	17.14	48.57	34.29	0.00
SECUNDARIA 2o	7.41	55.56	33.33	3.70
SECUNDARIA 3o	13.79	58.62	27.59	0.00
CURSO ESPECIAL	12.50	81.25	6.25	0.00

Este item es más difícil que los otros, los porcentajes bajan y no se obtiene el 93% enterior en el curso especial. Esto se debe a que ya no se cuenta con la representación visual, ya no se puede usar la estrategia posicional. Las estrategias E1(lleva a la opción C), y las estrategias E5, E6 tampoco llevan a la opción correcta.

6(e).- Otras dos cajas distintas de las anteriores tienen fichas negras y blancas.

Caja J: 3 negras y 1 blanca.
Caja K: 6 negras y 2 blancas.

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?
(A) La misma posibilidad ( )
(B) Caja J ( )
(C) Caja K ( )
(D)No lo sé ( )

Por qué?____

Los resultados fueron los sigientes:

preg 6e

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	22.22	11.11	61.11	5.56
PRIMARIA 6o	31.58	10.53	57.89	0.00
SECUNDARIA 1o	22.86	22.86	54.29	0.00
SECUNDARIA 2o	44.44	14.81	40.74	0.00
SECUNDARIA 3o	51.72	6.90	37.93	3.45
CURSO ESPECIAL	56.25	12.50	31.25	0.00

Esta fue la pregunta más difícil y los porcentajes son significativamente más bajos (22% a 56%).

Las estrategias más usadas son la de superioridad (E1), la estrategia de complejidad (E3), y la estrategia de razón entre las urnas (E7).

Es claro la debilidad del manejo del concepto de probabilidad (cociente entre número de casos favorables entre casos totales) en todos los años.

7(a).- Lee las siguientes cinco frases:

1) No puede ocurrir.
2) No ocurre muy a menudo.
3) Ocurre con frecuencia.
4) Ocurre casi siempre.
5) Siempre ocurre.

Para las preguntas siguientes debes poner un número en cada uno de los cuatro recuadros. Puedes usar el mismo número mas de una vez si lo deseas.

(A) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Muy probable"?
(____)
(B) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Improbable"?
(____)
(C) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Probable"?
(____)
(D) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Poco probable"?
(____)

Esta pregunta intenta detectar si existen problemas en la habilidad verbal de los alumnos.

¿Qué entienden los alumnos por "Muy probable"?

preg 7a (muy probable)

AÑO ESCOLAR	1	2	3	4	5
PRIMARIA 5o	5.56	0.00	27.78	50.00	16.67
PRIMARIA 6o	0.00	10.00	10.00	65.00	15.00
SECUNDARIA 1o	2.94	17.65	23.53	35.29	20.59
SECUNDARIA 2o	0.00	3.70	11.11	59.26	25.93
SECUNDARIA 3o	0.00	0.00	10.34	62.07	27.59
CURSO ESPECIAL	0.00	0.00	18.75	75.00	6.25

Este término es bien entendido por los alumnos, tenemos desde un 35% hasta un 75%, considerando solamente la opción 4 como correcta, si consideramos como correcta también la opción 3, este porcentaje sube de un 59% a un 93%.

Pero tenemos un porcentaje significativo de alumnos que confunden muy probable con siempre ocurre (6% hasta 27%).

¿Qué entienden los alumnos por "Improbable"?

preg 7a (improbable)

AÑO ESCOLAR	1	2	3	4	5
PRIMARIA 5o	83.33	11.11	0.00	0.00	5.56
PRIMARIA 6o	85.00	15.00	0.00	0.00	0.00
SECUNDARIA 1o	85.29	14.71	0.00	0.00	0.00
SECUNDARIA 2o	85.19	14.81	0.00	0.00	0.00
SECUNDARIA 3o	96.55	0.00	0.00	3.45	0.00
CURSO ESPECIAL	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00

El porcentaje de alumnos que escogen la opción correcta número 2, es muy bajo (del 15% y llega a ser del 0% en los últimos dos años).

Los alumnos escogen como opción correcta, "No puede ocurrir", esto en un altísimo porcentaje (del 80% al 100%). La confusión de términos es innegable.

¿Qué entienden los alumnos por "Probable"?

preg 7a (probable)

AÑO ESCOLAR	1	2	3	4	5
PRIMARIA 5o	0.00	15.79	42.11	21.05	21.05
PRIMARIA 6o	0.00	5.00	40.00	25.00	30.00
SECUNDARIA 1o	2.94	8.82	38.24	35.29	14.71
SECUNDARIA 2o	0.00	11.11	62.96	11.11	14.81
SECUNDARIA 3o	0.00	6.90	79.31	10.34	3.45
CURSO ESPECIAL	0.00	6.25	87.50	6.25	0.00

Este término es bien entendido considerando como opciones correctas la número 3 y 4.

Pero tenemos que un porcentaje significativo de alumnos consideran como sinónimo de probable, siempre ocurre.

Qué entienden los alumnos por "Poco probable"?

preg 7a (poco probable)

AÑO ESCOLAR	1	2	3	4	5
PRIMARIA 5o	27.78	55.56	0.00	16.67	0.00
PRIMARIA 6o	15.00	55.00	20.00	10.00	0.00
SECUNDARIA 1o	5.88	64.71	20.59	8.82	0.00
SECUNDARIA 2o	14.81	81.48	0.00	3.70	0.00
SECUNDARIA 3o	0.00	93.10	3.45	3.45	0.00
CURSO ESPECIAL	0.00	100.00	0.00	0.00	0.00

Por los porcentajes encontrados este término se entiende mejor con la edad (del 55% al 100%).

Lo que habría que hacer notar es que en los primeros años parece haber gran confusión entre los términos "no puede ocurrir", "ocurre casi siempre", y "poco probable", siendo términos de significados muy diferentes.

7(b).- Escribe una palabra o una frase que signifique lo mismo que lo siguiente:

(A) Imposible ______________________________

(B) Posible ______________________________

(C) Igual posibilidad______________________________

(D) Poca posibilidad______________________________

(E) Muy probable______________________________

Este ítem igual que el anterior, se centra en estudiar la habilidad verbal del alumno.

Los resultados fueron los siguientes:

preg 7b (% de resp. correctas)

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E
PRIMARIA 5o	83.33	50.00	38.89	50.00	44.44
PRIMARIA 6o	75.00	55.00	65.00	50.00	45.00
SECUNDARIA 1o	91.18	58.82	41.18	61.76	55.88
SECUNDARIA 2o	88.89	70.37	40.74	66.67	51.85
SECUNDARIA 3o	89.66	72.41	68.97	62.07	62.07
CURSO ESPECIAL	93.75	87.50	93.75	87.50	81.25

Examinando los resultados de la tabla, podríamos decir que hay un incremento del porcentaje de respuestas correctas con la edad.
Términos como "imposible" e "igual posibilidad" son bien comprendidos (94%), el porcentaje baja para los términos "posible" o "poca posibilidad" (87%), el término con más confusión es "muy probable".

Sin embargo es difícil captar si el significado de los términos se posee realmente. Excepto para el término imposible que no causa confusión, los términos que los alumnos usan como sinónimos de posible, igual posibilidad, poca posibilidad y muy probable, son ambiguos. Ejemplo:
(C) Igual posibilidad igual probabilidad.
(D) Poca posibilidad poco probable.

8.- En un experimento se lanzan al aire 12 monedas juntas y caen sobre la mesa. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuáles de los siguientes resultados ocurren más a menudo?

(A) 2 caras y 10 cruces (____)
(B) 5 caras y 7 cruces (____)
(C) 6 caras y 6 cruces (____)
(D) 7 caras y 5 cruces (____)
(E) Todas tienen la misma posibilidad (____)

Esta pregunta trata con el concepto de distribución central. Fué incluido por Green para examinar qué porcentaje de alumnos comete el error de "representatividad" mencionado por Kahneman.

Los resultados fueron los siguientes:

preg 8

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E
PRIMARIA 5o	5.56	5.56	16.67	5.56	66.67
PRIMARIA 6o	0.00	10.53	10.53	10.53	68.42
SECUNDARIA 1o	5.71	0.00	11.43	5.71	77.14
SECUNDARIA 2o	0.00	3.70	0.00	0.00	96.30
SECUNDARIA 3o	0.00	3.45	6.90	0.00	89.66
CURSO ESPECIAL	0.00	0.00	6.25	0.00	93.75

Los alumnos en un alto porcentaje (67% al 93%) consideran que cualquier opción de las que se le presentan son igual de probables (E).
El porcentaje de respuestas correctas disminuye con la edad (de un 16% a un 6%). Parecería que los alumnos más chicos razonan mejor.

Los alumnos parecen confundir "todos tienen la misma posibilidad con todos tienen alguna posibilidad de suceder" (pregunta 2), esto lo menciona Green en su tesis después de entrevistar a algunos alumnos.

Los resultados muestran, a mi juicio, más bien un error de comprensión de la pregunta, o de falta de comprensión del concepto de estabilidad de frecuencias, que el error de representatividad.

9.- María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 peso si el dado sale 2 o 3 o 4 o 5 o 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo?

Respuesta:______________ pesos.

Este ítem muestrea el concepto de espacio muestral y de esperanza matemática. Es un tema que los alumnos deben entender porque la vida social incluye muchos juegos de azar. Además de ser un tema importante en la enseñanza de la probabilidad a un nivel superior.
En caso de no tener el concepto anterior, este problema se puede resolver correctamente mediante un razonamiento proporcional.

Los resultados fueron los siguientes:

preg 9

AÑO ESCOLAR	1	2	3	4	5	6	OMITIO	OTRA
PRIMARIA 5o	27.78	11.11	0.00	0.00	16.67	0.00	33.33	11.11
PRIMARIA 6o	21.05	5.26	0.00	0.00	26.32	0.00	31.58	15.79
SECUNDARIA 1o	5.41	2.70	5.41	45.95	5.41	16.22	10.81	8.11
SECUNDARIA 2o	22.22	0.00	0.00	0.00	48.15	11.11	7.41	11.11
SECUNDARIA 3o	18.18	0.00	0.00	9.09	18.18	18.18	18.18	18.18
CURSO ESPECIAL	0.00	0.00	0.00	0.00	87.50	6.25	0.00	6.25

Hay años, primero y tercero de secundaria, en que los porcentajes de respuestas correctas son muy bajos (5% y 18%).
Sólo en el último año se resolvio correctamente el problema en un alto porcentaje (el 87%).

No parece que exista una tendencia de mejor respuesta con la edad, excepto en el último año.

10.-Una moneda de 2 pesos y otra de 10 pesos se lanzan juntas al aire. En la tabla de abajo se ha anotado uno de los resultados posibles: cara en la moneda de 2 pesos y cruz en la de 10 pesos. Se ha indicado con una C para cara y X para cruz. Completa la tabla con todos los resultados posibles.

2 pesos	10 pesos
C	X

Este item se refiere al problema de combinatoria más simple.

Los resultados fueron los siguientes:

preg 10

AÑO ESCOLAR	CORRECTO	CORRECTO CON REPETICIONES	INCOMPLETO	INCORRECTO	OMITIO
PRIMARIA 5o	11.11	16.67	0.00	16.67	55.56
PRIMARIA 6o	40.00	35.00	10.00	15.00	0.00
SECUNDARIA 1o	29.41	14.71	47.06	0.00	8.82
SECUNDARIA 2o	66.67	18.52	7.41	3.70	3.70
SECUNDARIA 3o	75.86	10.34	3.45	10.34	0.00
CURSO ESPECIAL	87.50	6.25	6.25	0.00	0.00

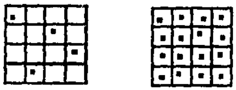
El porcentaje de respuestas correctas se incrementa con la edad. El salto que se logra entre los tres primeros años y los últimos años es significativo.

Con la edad hay una mejoría. En esta pregunta se esperaría un 100% de respuestas correctas en los últimos años, cosa que no se logra.

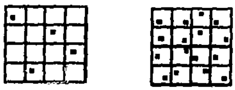
Las dos preguntas siguientes, muestrean la percepción en forma gráfica de un fenómeno aleatorio.

11.- El tejado de una casa tiene 16 secciones cuadradas. Comienza a granizar. Al principio sólo caen unos pocos granizos, después aumenta la granizada. En los siguientes dibujos se representan tres conjuntos de tres posibles formas en las cuales podría haber caído los granizos. El primer dibujo de cada grupo, A, B, C muestra una forma de distribuirse los 4 primeros granizos; el segundo 16 granizos.

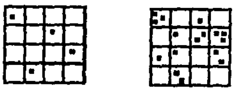
CONJUNTO A



CONJUNTO B



CONJUNTO C



Pregunta: ¿Cuál de los modelos anteriores esperarías tu ver como más realista a medida que el granizo cae?

Conjunto A: ( )
Conjunto B: ( )
Conjunto C: ( )
Conjuntos B y C: ( )
Cada tipo de modelo es igualmente probable: ( )

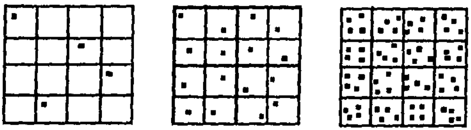
Los resultados fueron los siguientes:

preg 11

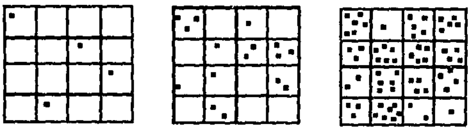
AÑO ESCOLAR	A	B	C	B y C	TODAS
PRIMARIA 5o	11.76	29.41	11.76	17.65	29.41
PRIMARIA 6o	0.00	26.32	21.05	31.58	21.05
SECUNDARIA 1o	5.71	34.29	17.14	22.86	20.00
SECUNDARIA 2o	0.00	25.93	22.22	25.93	25.93
SECUNDARIA 3o	3.45	31.03	24.14	24.14	17.24
CURSO ESPECIAL	0.00	31.25	18.75	18.75	31.25

12.- Esta pregunta se refiere tambien a la caida de los granizos sobre un tejado. También se dibujan tres posibles modelos en tres momentos distintos: los 4 primeros granizos, despues 16 granizos y por último 64.

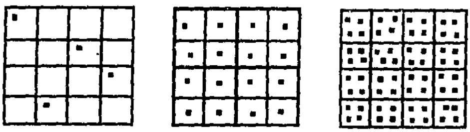
CONJUNTO A



CONJUNTO B



CONJUNTO C



Pregunta: ¿Cuál de los modelos anteriores esperarías tu ver como mas realista a medida que el granizo cae?

Conjunto A: (____)
Conjunto B: (____)
Conjunto C: (____)
Conjuntos B y C: (____)
Cada tipo de modelo es igualmente probable: (____)

Los resultados fueron los siguientes:

preg 12

AÑO ESCOLAR	A	B	C	B y C	TODAS
PRIMARIA 5o	31.25	25.00	12.50	12.50	18.75
PRIMARIA 6o	21.05	57.89	10.53	0.00	10.53
SECUNDARIA 1o	22.86	45.71	5.71	5.71	20.00
SECUNDARIA 2o	27.59	41.38	3.45	3.45	24.14
SECUNDARIA 3o	31.03	44.83	0.00	6.90	17.24
CURSO ESPECIAL	12.50	56.25	0.00	0.00	31.25

En la pregunta 11, el dibujo que se escogió en mayor proporción fue el conjunto B (30%). Los conjuntos B o B y C, todos tienen un porcentaje similar sin ninguna mejoría con la edad.
Siendo congruentes con las respuestas de esta pregunta, la opción que se debería de escoger en la pregunta 12 sería el conjunto A. Sin embargo, aunque el porcentaje de elección de la opción A es alto, 30%, hay una tendencia a escoger la opción correcta B (25% a 56%), con un incremento con la edad.

Aunque el alumno no posee un criterio firme para discriminar entre los conjuntos A y B, si descarta la simetría perfecta.

Aquí los resultados son contrarios de los encontrados por Green. Sus porcentajes de respuestas correctas decrecen con la edad y cita: "lo asombroso acerca de este par de ítems es que el desempeño declina con la edad, ...".

Los ítems 13, 14, 15 y 16, forman parte del conjunto de preguntas sobre adquisición del lenguaje.

Esta pregunta y la siguiente, causaron muchos problemas de comprensión en los alumnos. Hubo muchas preguntas de cómo había que contestarlas, y causó confusión el inicio de la frase ".....que el Rey ". Supongo que el tema "Rey" es más común en Inglaterra y es realmente ajeno en México. Por lo mismo las respuestas fueron ambigüas y difícil de juzgar si eran o no correctas.

13.- Escribe una frase que comience:
"Es muy probable que el Rey...........", usando tus propias palabras para acabarla.

Es muy probable que el Rey______________________________

____

____

Los resultados fueron los siguientes:

preg 13

AÑO ESCOLAR	CORRECTO	AMBIGUA	INCORRECTO	OMITIO
PRIMARIA 5o	50.00	27.78	5.56	16.67
PRIMARIA 6o	50.00	40.00	10.00	0.00
SECUNDARIA 1o	35.29	47.06	17.65	0.00
SECUNDARIA 2o	18.52	51.85	22.22	7.41
SECUNDARIA 3o	44.83	34.48	17.24	3.45
CURSO ESPECIAL	50.00	43.75	0.00	6.25

14.- Escribe una frase que comience:
"Es improbable que el Rey..........", usando tus propias palabras para acabarla.

Es improbable que el Rey____
____
____

Los resultados fueron los siguientes:

preg 14

AÑO ESCOLAR	CORRECTO	AMBIGUA	INCORRECTO	OMITIO
PRIMARIA 5o	22.22	44.44	5.56	27.78
PRIMARIA 6o	25.00	50.00	25.00	0.00
SECUNDARIA 1o	29.41	50.00	20.59	0.00
SECUNDARIA 2o	22.22	48.15	22.22	7.41
SECUNDARIA 3o	24.14	17.24	55.17	3.45
CURSO ESPECIAL	56.25	31.25	6.25	6.25

Los porcentajes de respuestas correctas son bajos.

En congruencia con las respuestas de la pregunta 7, se aprecia gran confusión de términos.

Se confunden los términos "muy probable", "seguro", "probable", "puede pasar" y el término "improbable" con "imposible".

15.- Escribe una frase que termine:
"........es algo que sucede al azar", usando tus propias palabras para comenzarla.

____
____
____ es algo que sucede al azar.

Los resultados fueron los siguientes:

preg 15

AÑO ESCOLAR	CORRECTO	AMBIGUA	INCORRECTO	OMITIO
PRIMARIA 5o	44.44	5.56	0.00	50.00
PRIMARIA 6o	75.00	10.00	15.00	0.00
SECUNDARIA 1o	88.24	2.94	8.82	0.00
SECUNDARIA 2o	81.48	11.11	7.41	0.00
SECUNDARIA 3o	73.33	3.33	13.33	10.00
CURSO ESPECIAL	62.50	25.00	0.00	12.50

Los porcentajes de respuestas correctas son más altos. Los porcentajes de incorrecto u omitió son bajos, excepto en quinto de primaria donde la mitad contestó bien y la otra mitad omitió (en este año no se incluye en el temario el concepto de azar).

Casi todas las frases redactadas se referían a un juego sencillo de azar (lanzar una moneda, lanzar un dado, ...). Muy poca gente se refirió a alguna otra situación aleatoria. Esto se intentó hacer más en el curso especial (6 alumnos de los 16), pero hubo un porcentaje más alto de ambigüedad.
ejemplos: Nacer en determinada familia es algo que sucede al azar.
El descubrimiento de una buena receta es algo que sucede al azar.

Aunque hay muchos fenómenos aleatorios en la vida diaria de los alumnos, se hace patente que la educación probabilística en la escuela hace poco por mostrarlos y hacerlos explícitos y comprensibles a los alumnos. El alumno no ve situaciones probabilísticas mas que en juegos de monedas, dados, ...

16.- Para las siguientes frases señala todas las que pienses que significan exactamente lo mismo que "tiene un cincuenta por ciento de posibilidades de ocurrir".

(A) Puede ocurrir o no. (   )
(B) Tiene tantas posibilidades de exito como de fracaso. (   )
(C) Sucedera 50 veces de cada 50. (   )
(D) Puede suceder algunas veces. (   )
(E) Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir. (   )
(F) Es muy improbable que suceda. (   )

Los resultados fueron los siguientes:

preg 16

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E	F
PRIMARIA 5o	27.78	27.78	16.67	16.67	61.11	0.00
PRIMARIA 6o	50.00	60.00	25.00	35.00	65.00	0.00
SECUNDARIA 1o	35.29	73.53	17.65	23.53	55.88	11.76
SECUNDARIA 2o	62.96	70.37	22.22	14.81	85.19	3.70
SECUNDARIA 3o	82.76	93.10	3.45	3.45	96.55	0.00
CURSO ESPECIAL	87.50	93.75	6.25	0.00	93.75	0.00

Las frases B y E, respuestas correctas, son apuntadas como las correctas con una mejora con la edad (del 27% al 93% y del 61% al 93%).

Los distractores C y D, confunden a los alumnos más chicos (sexto), pero con la edad este porcentaje baja considerablemente.

Lo que si es notorio es el alto porcentaje, que aumenta con la edad, de elección de la opción A (27% al 87%). Existe una confusión entre "tiene un 50% de posibilidades" con "puede ocurrir o no", es decir los alumnos no son capaces de apreciar que cualquier evento cuya probabilidad está entre 0 y 1 puede pasar o no.

17.- Dos pirinolas de seis lados estan marcados con unos y doses, como se indica en el diagrama:

AMARILLO

ROJO

¿Qué pirinola te da mejor oportunidad de obtener un 2 cuando se lanza? o ¿dan la misma posibilidad?

(A) La amarilla es mejor para obtener un 2. (____)
(B) La roja es mejor para obtener un 2. (____)
(C) Ambas pirinolas dan la misma posibilidad. (____)
(D) No lo sé. (____)

Por qué?____

Los resultados fueron los siguientes:

preg 17

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	33.33	5.56	61.11	0.00
PRIMARIA 6o	26.32	31.58	36.84	5.26
SECUNDARIA 1o	17.14	28.57	54.29	0.00
SECUNDARIA 2o	11.11	7.41	77.78	3.70
SECUNDARIA 3o	34.48	17.24	48.28	0.00
CURSO ESPECIAL	29.41	5.88	64.71	0.00

Esta pregunta parecia más fácil de lo que realmente resultó (65% de facilidad como maximo). Las dos estrategias mas usadas son comparar el número de unos y el número de doces, que lleva a escoger la opción correcta C, y al comparar la posición de los números uno y dos lleva a escoger las opciones A o B incorrectas ambas incorectas.

18.-En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad. (____)
(B) El azul tiene mayor probabilidad. (____)
(C) El verde tiene mayor probabilidad. (____)
(D)Todos los colores tienen la misma probabilidad. (____)

(E) No lo sé. (____)

Por qué?____

____

____

Esta pregunta muestrea el concepto de probabilidad condicional.

Los resultados fueron los siguientes:

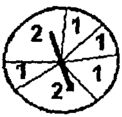
Preg 18

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E
PRIMARIA 5o	17.65	41.18	5.88	23.53	11.76
PRIMARIA 6o	9.52	66.67	14.29	9.52	0.00
SECUNDARIA 1o	10.26	51.28	2.56	25.64	10.26
SECUNDARIA 2o	11.11	51.85	11.11	25.93	0.00
SECUNDARIA 3o	7.14	78.57	0.00	14.29	0.00
CURSO ESPECIAL	6.25	87.50	0.00	6.25	0.00

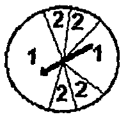
Los porcentajes de respuestas correctas aumentan con la edad (41% a 87%). El alumno calcula las bolas que quedan en la urna y escoge las azules por ser mayor su número.

El alto porcentaje de alumnos que escogen la opcion D es debido a una confusión entre "tener alguna posibilidad" y " tener cierta posibilidad".

19.-Dos discos, uno naranja y otro cafe, están marcados con números.



CAFE



NARANJA

Cada disco tiene una aguja que gira. Si se quiere obtener un 1, ¿es uno de los discos mejor que el otro , o ambos dan la misma posibilidad ?

(A) El café es mejor para sacar un 1 (____)
(B) El naranja es mejor para sacar un 1 (____)
(C) Ambos discos dan la misma posibilidad (____)
(D) No se puede decir (____)

Por qué? ____

____

____

preg 19

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	66.67	26.67	6.67	0.00
PRIMARIA 6o	47.37	42.11	0.00	10.53
SECUNDARIA 1o	37.14	37.14	20.00	5.71
SECUNDARIA 2o	25.93	55.56	18.52	0.00
SECUNDARIA 3o	20.69	55.17	24.14	0.00
CURSO ESPECIAL	12.50	68.75	18.75	0.00

Esta pregunta es similar a la pregunta 3, por involucrar el concepto de área para el cálculo de probabilidades, y a la pregunta 17 por la contigüedad de los numeros 1 y 2. Los porcentajes son más bajos que en la pregunta 3 y que en la pregunta 17.

La estrategia de conteo de unos o de doces lleva a la opción A o C respectivamente.

20.- El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una una moneda muchas veces, y que apuntaran cada vez si salía cara o cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
01010011100110101100101100101100100101110110011011
01010010110010101100010011010110011101110101100011

Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
11100000010001010010000010001100010100000000011001
00000001111100001101010010010011111101001100011000

Una de las chicas lanzó la moneda correctamente; pero la otra hizo trampa y lo fingió.

(A) Qué niña ha hecho trampa? Respuesta:_______________

(B) Cómo lo sabes? Respuesta:_______________

____

____

Los resultados fueron los siguientes:

preg 20

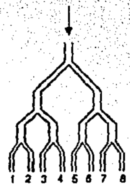
AÑO ESCOLAR	CLARA	LUISA	OMITIO	CORRECTO
PRIMARIA 5o	22.22	27.78	50.00	0
PRIMARIA 6o	26.32	52.63	21.05	5.26
SECUNDARIA 1o	34.29	42.86	22.86	0
SECUNDARIA 2o	37.04	33.33	29.63	3.7
SECUNDARIA 3o	13.79	10.34	75.86	3.45
CURSO ESPECIAL	18.75	56.25	25.00	0

Los porcentajes son muy bajos sin mejoria con la edad. Los porcentajes mas altos son en la opcion OMITIO.

Este tema de rachas aparece en los textos de 5°, 6°, 1°, aunque en clase no se trabaja lo suficiente, y los alumnos no saben cual es el patron de lanzamiento de una moneda. Creen que debe de haber una regularidad (error de compensación) en la aparición de caras y cruces.

Esta pregunta muestrea el concepto de distribución. Los dibujos de canales corresponden a los usados por Piaget y Fischbein.

21(a).- Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:



Señala la frase que mejor describa dónde esperas tu que vayan las bolas.

(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ( )
(B) Por 1 y 8 pasarán más bolas ( )
(C) Por 3, 4, 5 y 6 pasarán más bolas ( )
(D) Por 1, 3, 5 y 7 pasarán más bolas ( )
(E) Ninguna de éstas ( )

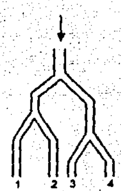
Los resultados fueron los siguientes:

preg 21(a)

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E
PRIMARIA 5o	58.82	17.65	5.88	0.00	17.65
PRIMARIA 6o	58.62	6.90	3.45	6.90	24.14
SECUNDARIA 1o	41.38	24.14	6.90	13.79	13.79
SECUNDARIA 2o	54.29	8.57	17.14	11.43	8.57
SECUNDARIA 3o	15.79	15.79	31.58	31.58	5.26
CURSO ESPECIAL	40.00	20.00	20.00	20.00	0.00

El porcentaje de respuestas correctas "parece" que decrece con la edad y que el distractor C cobra más fuerza.

21(b).- Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ( )
(B) Por 1 y 2 pasarán más ( )
(C) Por 3 y 4 pasarán más ( )
(D) Por 1 y 4 pasarán más ( )
(E) Ninguna de éstas ( )

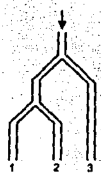
Los resultados fueron los siguientes:

preg 21(b)

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E
PRIMARIA 5o	47.06	5.88	17.65	5.88	23.53
PRIMARIA 6o	53.33	3.33	13.33	13.33	16.67
SECUNDARIA 1o	46.43	3.57	10.71	21.43	17.86
SECUNDARIA 2o	28.57	8.57	28.57	31.43	2.86
SECUNDARIA 3o	31.58	10.53	10.53	36.84	10.53
CURSO ESPECIAL	20.00	26.67	13.33	26.67	13.33

La aparente falta de simetría en el dibujo cambia los porcentajes, estos bajan significativamente. Aquí igual que en la pregunta anterior el porcentaje de respuestas correctas decrece con la edad.

21(c).- Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ( )
(B) Por 2 pasarán más bolas ( )

(C) Por 3 pasarán más bolas (____)
(D) Por 1 y 2 pasarán muchas bolas y por 3 pocas (____)
(E) Ninguna de éstas (____)

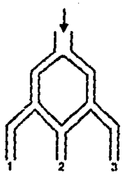
Los resultados fueron los siguientes:

preg 21(c)

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E
PRIMARIA 5o	17.65	0.00	70.59	0.00	11.76
PRIMARIA 6o	10.34	0.00	62.07	13.79	13.79
SECUNDARIA 1o	10.71	0.00	64.29	10.71	14.29
SECUNDARIA 2o	20.00	5.71	62.86	8.57	2.86
SECUNDARIA 3o	10.00	20.00	50.00	20.00	0.00
CURSO ESPECIAL	13.33	13.33	60.00	13.33	0.00

Esta pregunta resultó más fácil que las anteriores. El porcentaje de respuestas correctas es más alto que en los casos anteriores y se mantiene "constante" con la edad (60%).

21(d) Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas (____)
(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 o 3 (____)
(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 (____)
(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 y unas pocas por 3 (____)
(E) Ninguna de éstas (____)

Los resultados fueron los siguientes:

preg 21(d)

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E
PRIMARIA 5o	11.76	58.82	5.88	17.65	5.88
PRIMARIA 6o	27.59	41.38	6.90	6.90	17.24
SECUNDARIA 1o	33.33	30.00	6.67	13.33	16.67
SECUNDARIA 2o	35.29	38.24	17.65	5.88	2.94
SECUNDARIA 3o	20.00	45.00	10.00	25.00	0.00
CURSO ESPECIAL	26.67	40.00	26.67	0.00	6.67

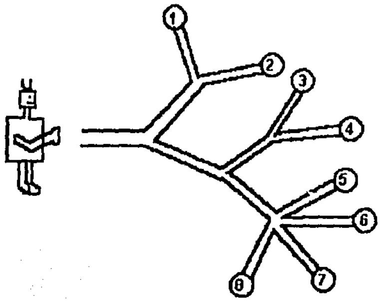
Si consideramos a B como la única opción correcta, los porcentajes de acierto son del 38% al 45%, ahora si consideramos también a D como correcta, estos porcentajes suben del 43% al 78%.

El distractor más fuerte es A, y el porcentaje de elección de esta opción aumenta con la edad. También aumenta el porcentaje de elección de la opción C.

Parecería que, en lo que se refiere a esta pregunta en particular, los alumnos más chicos razonan mejor.
A mi parecer, el concepto de distribución es poco tratado en los cursos de probabilidad en la escuela. Los alumnos resuelven el problema por intuición y parece ser que esta es mejor en los primeros años.

Esta pregunta muestrea la habilidad de los alumnos para el manejo de los diagramas de árbol y el concepto de multiplicación de probabilidad.

22.- Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino que por otro (pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 trampas al final de los 8 caminos (ver el dibujo). ¿En qué trampa o trampas tiene el robot más probabilidades de acabar?, ¿o todas las trampas son igualmente probables?



Respuesta:____

Los resultados fueron los siguientes:

preg 22

AÑO ESCOLAR	1	2	3	4	5	6	7	8	IGUAL	NO SE
PRIMARIA 5o	3.57	3.57	0.00	0.00	10.71	10.71	21.43	14.29	14.29	21.43
PRIMARIA 6o	6.45	9.68	0.00	0.00	9.68	12.90	19.35	22.58	19.35	0.00
SECUNDARIA 1o	4.88	9.76	4.88	2.44	2.44	4.88	12.20	4.88	34.15	19.51
SECUNDARIA 2o	15.63	6.25	0.00	0.00	3.13	6.25	15.63	3.13	46.88	3.13
SECUNDARIA 3o	5.13	5.13	2.56	2.56	5.13	5.13	23.08	5.13	35.90	10.26
CURSO ESPECIAL	18.52	18.52	3.70	3.70	3.70	3.70	14.81	7.41	25.93	0.00

El porcentaje de respuestas correctas es muy bajo (3.5% a 18.5%). Este porcentaje se incrementa con la edad.

El porcentaje de respuestas IGUAL es mucho más alto desde los primeros años (14% al 25%). La técnica del diagrama de árbol y el concepto de multiplicación de probabilidades no es manejado por los alumnos en ningún año escolar.

23.- El profesor vacia sobre la mesa un paquete de 100 chinches. Algunas caen con la punta para arriba y otras caen hacia abajo
El resultado fué: ARRIBA = 68 ; ABAJO = 32
Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento.

De la lista siguiente, elige el resultado que tu crees obtendrá la niña:

(A) ARRIBA = 36 ; ABAJO = 64 (____)
(B) ARRIBA = 63 ; ABAJO = 37 (____)
(C) ARRIBA = 51 ; ABAJO = 49 (____)
(D) ARRIBA = 84 ; ABAJO = 16 (____)
(E) Todos los resultados tienen la misma probabilidad (____)

Los resultados fueron los siguientes:

preg 23

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D	E
PRIMARIA 5o	6.67	33.33	6.67	20.00	33.33
PRIMARIA 6o	16.67	16.67	16.67	16.67	33.33
SECUNDARIA 1o	2.86	17.14	5.71	8.57	65.71
SECUNDARIA 2o	3.70	11.11	0.00	7.41	77.78
SECUNDARIA 3o	6.90	13.79	0.00	6.90	72.41
CURSO ESPECIAL	0.00	31.25	0.00	0.00	68.75

Los porcentajes son muy bajos, en forma extraña los mayores porcentajes son en quinto año y en el curso especial, pero éste no es muy alto. No pertece haber una mejor respuesta con la edad.

Los alumnos escogen en mayor porcentaje la opcion C es decir " todos tienen la misma probabilidad", y este porcentaje se incrementa con la edad.

24.- ¿Cuál de los dos siguientes resultados es más probable?

(1) Obtener 7 o más varones de los 10 primeros bebés nacidos en un nuevo hospital.
(2) Obtener 70 o más niños de los 100 primeros bebés nacidos en un nuevo hospital.

(A) Son igualmente probables (____)
(B) 7 o más de 10 es más probable (____)
(C) 70 o más de 100 es más probable (____)
(D) No se puede decir (____)

Los resultados fueron los siguientes:

preg 24

AÑO ESCOLAR	A	B	C	D
PRIMARIA 5o	40.00	13.33	20.00	26.67
PRIMARIA 6o	47.37	10.53	5.26	36.84
SECUNDARIA 1o	54.29	17.14	5.71	22.86
SECUNDARIA 2o	48.15	3.70	3.70	44.44
SECUNDARIA 3o	62.07	0.00	6.90	31.03
CURSO ESPECIAL	73.33	0.00	0.00	26.67

El porcentaje de respuestas correctas decrece con la edad (13% al 0%). Las opciones más escogidas son A: son igualmente probables y D: no se puede decir.

Según mi interpretación, al igual que en la pregunta 8, parece más un error de comprensión del concepto de estabilidad de frecuencia, o de lenguaje que un error de representatividad. Lo curioso es que los alumnos más chicos responden mejor que los grandes, igual que en la pregunta 8.
Falta el concepto de tamaño de muestra.

En esta pregunta no se conoce el número de bolas que hay en la bolsa, y se necesita un razonamiento de inferencia estadística, un conocimiento sobre muestreo para resolverla.

25.- Una bolsa contiene en su interior algunas bolas blancas y algunas bolas negras. Un niño extrae una bola, anota su color y la vuelve a introducir. A continuación remueve las bolas para que se mezclen bien. El chico repite esta operación 4 veces y siempre obtiene una bola negra.

A continuación extrae una quinta bola. ¿De que color piensas que será con más probabilidad?

(A) La negra es más probable de nuevo (____)
(B) La negra y la blanca son igualmente probables (____)
(C) La blanca es más probable esta vez (____)

Los resultados fueron los siguientes:

preg 25

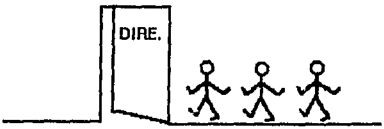
AÑO ESCOLAR	A	B	C
PRIMARIA 5o	13.33	80.00	6.67
PRIMARIA 6o	15.79	47.37	36.84
SECUNDARIA 1o	17.14	71.43	11.43
SECUNDARIA 2o	37.04	59.26	3.70
SECUNDARIA 3o	31.03	58.62	10.34
CURSO ESPECIAL	31.25	68.75	0.00

El porcentaje de respuestas correctas es bajo (13% al 30%), este porcentaje se incrementa con la edad.

El alumno escoge en mayor proporción "la bola blanca y la bola negra son igualmente probables" como respuesta correcta, como sinónimo de "cualquier bola negra o blanca puede salir". Falta el concepto de inferencia a partir de una muestra.

Esta es una pregunta de combinatorio, que trata de medir qué tan capaces son los alumnos de generalizar una técnica de conteo.

26.- Tres chicos son enviados al director por alborotar. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho del director. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego!



(a) Supongamos que los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (los notaremos A, B y C). Queremos escribir abajo todos los posibles órdenes en que podrían alinearse.

Por ejemplo: para el orden A B C escribiremos ABC
1o 2o 3o

Respuesta:
ABC/......../........./........./........./........./........./........./........./........./........../......./........../........

Anota ahora las demás formas diferentes de ordenarse.

(b) ¿Cuántas formas diferentes hay en total? Respuesta__________

Ahora haz el resto de la pregunta:

(c) Si cuatro niños (A, B, C, D) tienen que alinearse, ¿Cuántas formas diferentes hay?
Respuesta__________

(d) Y si hay cinco niños, ¿Cuántas maneras hay? (No intentes escribirlas todas!)

Respuesta____________

Los resultados fueron los siguientes:

preg 26

AÑO ESCOLAR	6	OMITIO	24	OMITIO	120	OMITIO
PRIMARIA 5o	22.22	44.44	0.00	50.00	0.00	66.67
PRIMARIA 6o	55.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SECUNDARIA 1o	44.12	0.00	0.00	2.94	0.00	2.94
SECUNDARIA 2o	70.37	0.00	3.70	0.00	0.00	7.41
SECUNDARIA 3o	93.10	0.00	6.90	3.45	6.90	3.45
CURSO ESPECIAL	75.00	0.00	25.00	6.25	18.75	6.25

Hay un incremento en el porcentaje de respuestas correctas con la edad, sobre todo para 6. Pero la habilidad para generalizar este procedimiento es muy baja. La habilidad para encontrar una fórmula general, 120, es todavia más baja, solo se logra en el último año y en un bajo porcentaje (20%).

En cierto modo esto contradice la hipotesis de Piaget que sostiene que con la edad se logra la generalizacion de los métodos de conteo.

Esto también contradice los resultados de Fischbein que afirma que el alumno logra la generalizacion si se le muestra el procedimiento aún antes de llegar a la edad propuesta por Piaget. Obviamente después de seis años de estudio los alumnos no sólo tienen una edad en la que se esperaria pudieran generalizar el resultado, sino que se les ha enseñado tecnicas de conteo. pero parece ser que esto se olvida muy rápido.

De estas tablas podemos concluir:

- Hay claras deficiencias en el manejo del lenguaje y en la comprensión de las preguntas.
Deficiencias que no sólo se hacen patentes en las preguntas sobre el lenguaje (7, 13, 14, 15 y 16), sino en otras preguntas en las que parece que el alumno no entiende correctamente el significado probabilístico de lo que se le pregunta.

- El test en general se resuelve mejor a mayor año escolar.

- Las preguntas que requieren de operaciones de conteo, de comparación de números y de cociente son bastante bien resueltas.

- Las preguntas que requieren de apreciación del azar, de estabilidad de frecuencias, de inferencia son pobremente resueltas.

- La mayoría de los alumnos resolvió bien la pregunta de análisis combinatorio en su nivel mas simple permutaciones de 2 y de 3 elementos, pero muy pocos pudieron generalizar el resultado para 4 y 5 elementos.

- Hay preguntas que se resuelven mejor a menor edad.
Este es el caso de la pregunta 21 sobre estabilidad de frecuencias, y de las preguntas 8 y 24 sobre representatividad.

- Hay preguntas que no muestran mejoría con la edad.
Este es el caso de las preguntas 20 sobre simulación y la pregunta 23 acerca de la inferencia sobre una muestra empírica.

- Hay indicios de creencias erróneas arraigadas en los alumnos.
Esto se hace patente en las preguntas 1 sobre el lanzamiento de una moneda, 4 sobre el lanzamiento de un dado, y en la pregunta 20 sobre varios lanzamientos de una moneda.

CONCLUSION:

A manera de conclusión, después de analizar los porcentajes anteriores, nos podemos plantar la siguiente pregunta:
¿Adquieren los alumnos los conocimientos básicos para empezar una educacion formal en probabilidad?

Considerando que:
- hay deficiencias en el manejo del lenguaje
- el alumno no maneja los conceptos principales de la teoría de probabilidad (fenómeno aleatorio, estabilidad de frecuencias, equiprobabilidad)
- y no domina el análisis combinatorio

podemos pensar, el bagaje intuitivo es deficiente para iniciar una educacion formal sobre probabilidad, es decir que costará trabajo el lograr un entendimiento completo de la teoria matemática de probabilidad.

3.4 Análisis estadístico de los resultados del test

En un principio se plantearon las siguientes preguntas de interés:
¿Estos alumnos adquieren los conocimientos básicos en probabilidad para una educación formal en probabilidad?
¿Los niños tienen una mejor calificación el test que las niñas? ¿Si están relacionadas la calificación de matemáticas y los calificación del test de conceptos probabilísticos? y por último ¿Qué variable, o qué variables, edad, año escolar, sexo, calificación en matemáticas, influye o influyen más con la calificación del test?

La primera pregunta fue analizada anteriormente en base a las tablas de porcentajes. Ahora bien las otras preguntas se analisaran estadisticamente.

Hipótesis 1: ¿Tienen los niños una mejor calificación en el test que las niñas?

Hipótesis 2: ¿Existe una relación entre la calificación en matemáticas y la calificación del test?

Hipótesis 3:¿Qué variables influyen más en la calificación del test, la edad, el año escolar, el sexo, o la calificación de matemáticas?

HIPOTESIS 1:
¿ Tienen los niños una mejor calificación en el test que las niñas?

Mediante un análisis de los porcentajes totales calculados a partir del test que aparecen en la tabla siguiente, vemos que no podemos concluir que los niños tengan una mejor calificación en el test que las niñas.

	I. PROBABILIDAD		I. VERBAL		I. COMBINATORIA		TOTAL	
AÑO ESC.	HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
5	38.4	37	43.8	51.9	12	7.4	36.97	38.08
6	42.33	39.42	55.76	56.04	21.66	22.85	43.99	42.52
1	43.55	45.41	49.57	63.34	18.88	29.41	42.5	49.24
2	43.42	51.07	56.59	59.76	34.28	43.07	46.34	52.77
3	60.47	42	68.51	62.17	55.29	46.68	61.69	48.64
CE	60.57	56	71.38	67.52	85.71	53.33	64.45	59.17

Mediante una prueba de hipótesis estadística llegamos al mismo resultado.

HIPOTESIS DE INVESTIGACION
¿La calificación promedio del test de los niños es mayor que la calificación promedio de las niñas esto por año escolar?

A partir de la tabla anterior de los datos finales, se hace una prueba sobre dos medias con muestras por pares,entre niños y niñas.
Supongamos que las variables aleatorias calificaciones en el test de niños y niñas se distribuyen normalmente con la misma desviación estándar por año escolar, y que en cada año podemos comparar una a una las medias.

HIPOTESIS ESTADISTICAS

$$H_0: m_h = m_m$$

$$H_1: m_h > m_m$$

Prueba sobre dos medias con muestras por pares, prueba t de Student con cinco grados de libertad a partir de los datos siguientes, y escogiendo un nivel de significancia de 0.05.

HOMBRES	MUJERES	DIFERENCIAS
36.97	38.08	-1.11
43.99	42.52	1.47
42.5	49.24	-6.74
46.34	52.77	-6.43
61.69	48.64	13.05
64.45	59.17	5.28

Estadístico: T = 0.299399

Región de rechazo: $T_{0.95} = 2.015$

HIPOTESIS 1:
¿ Tienen los niños una mejor calificación en el test que las niñas?

Mediante un análisis de los porcentajes totales calculados a partir del test que aparecen en la tabla siguiente, vemos que no podemos concluir que los niños tengan una mejor calificación en el test que las niñas.

	I. PROBABILIDAD		I. VERBAL		I. COMBINATORIA		TOTAL	
AÑO ESC.	HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
5	38.4	37	43.8	51.9	12	7.4	36.97	38.08
6	42.33	39.42	55.76	56.04	21.66	22.85	43.99	42.52
1	43.55	45.41	49.57	63.34	18.88	29.41	42.5	49.24
2	43.42	51.07	56.59	59.76	34.28	43.07	46.34	52.77
3	60.47	42	66.51	62.17	55.29	46.66	61.69	48.64
CE	60.57	56	71.38	67.52	65.71	53.33	64.45	59.17

Mediante una prueba de hipótesis estadística llegamos al mismo resultado.

HIPOTESIS DE INVESTIGACION
¿La calificación promedio del test de los niños es mayor que la calificación promedio de las niñas esto por año escolar?

A partir de la tabla anterior de los datos finales, se hace una prueba sobre dos medias con muestras por pares,entre niños y niñas.
Suponemos que las variables aleatorias calificaciones en el test de niños y niñas se distribuyen normalmente con la misma desviación estándar por año escolar, y que en cada año podemos comparar una a una las medias.

HIPOTESIS ESTADISTICAS

$$H_0: m_h = m_m$$

$$H_1: m_h > m_m$$

Prueba sobre dos medias con muestras por pares, prueba t de Student con cinco grados de libertad a partir de los datos siguientes, y escogiendo un nivel de significancia de 0.05.

HOMBRES	MUJERES	DIFERENCIAS
36.97	38.08	-1.11
43.99	42.52	1.47
42.5	49.24	-6.74
46.34	52.77	-6.43
61.69	48.64	13.05
64.45	59.17	5.28

Estadístico: T = 0.289399

Región de rechazo: $T_{0.95} = 2.015$

One-Sample Analysis Results

		-1.11 1.47 -6.74 -6.43 13.05 5.28	
Sample Statistics:	Number of Obs.	6	
	Average	0.92	
	Variance	56.6536	
	Std. Deviation	7.52686	
	Median	0.18	
Confidence Interval for Mean:		95 Percent	
	Sample 1	-6.9815 8.8215	5 D.F.
Confidence Interval for Variance:		95 Percent	
	Sample 1	22.0743 340.883	5 D.F.

Hypothesis Test for H0: Mean = 0 — Computed t statistic = 0.299399
vs Alt: GT — Sig. Level = 0.388341
at Alpha = 0.05 — so do not reject H0.

No hay suficiente información para rechazar H_0

La calificación promedio al test de Green es igual en niños que en niñas. Para esta escuela en particular no podemos concluir que exista una diferencia significativa en las calificaciones en el test de conceptos de probabilidad entre niños y niñas.

En los porcentajes presentados por Green en su tesis, se aprecia que los porcentajes en niños son siempre superiores a los de las niñas. Dado esto y el tamaño de su muestra, Green afirma que los niños tienen un desempeño mejor.

HIPOTESIS 2:
¿Existe una relación entre la calificación en matemáticas del curso y la calificación del test de conceptos probabilísticos?

Si hacemos un análisis estadístico entre la calificación del test y la calificación de matemáticas (regresión lineal simple), parece ser que no existe una relación entre las dos variables, es decir no se da que a mayor calificación de matemáticas mayor calificación en el test de probabilidad.

De un análisis de las gráficas subsiguientes, por año escolar, observamos que para una misma calificación en matemáticas tenemos calificaciones al test muy diferentes, esto es en todas las gráficas.

HIPOTESIS DE INVESTIGACION:

¿A mejor calificación en matemáticas mejor calificación en el test, por año escolar?
¿La calificación de matemáticas está correlacionada con la calificación del test, por año escolar?

Haciendo una regresión lineal entre las variables calificación del test y calificación en matemáticas, obtenemos el resultado siguiente:

Regression Analysis - Linear model: Y = a+bX

Dependent variable: GREEN.TEST__43_ Independent variable: GREEN.CAL__MAT_

Parameter	Estimate	Standard Error	T Value	Prob. Level
Intercept	15.3205	2.68111	5.71424	.00000
Slope	0.791923	0.364066	2.17522	.03127

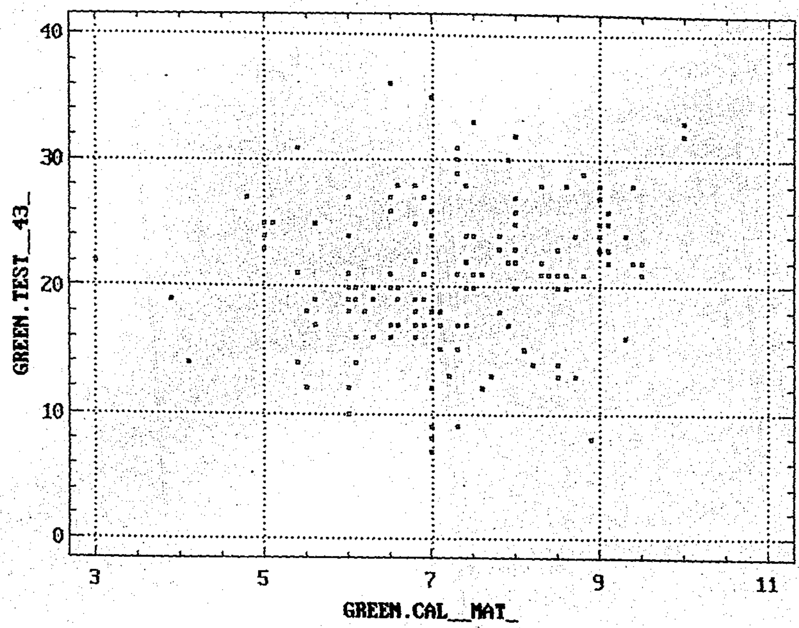
Analysis of Variance

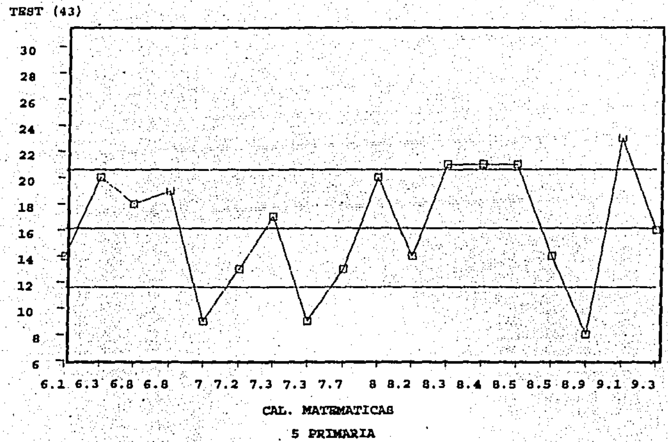
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	Prob. Level
Model	150.02485	1	150.02485	4.7316	.03127
Error	4502.4126	142	31.7071		
Total (Corr.)	4652.4375	143			

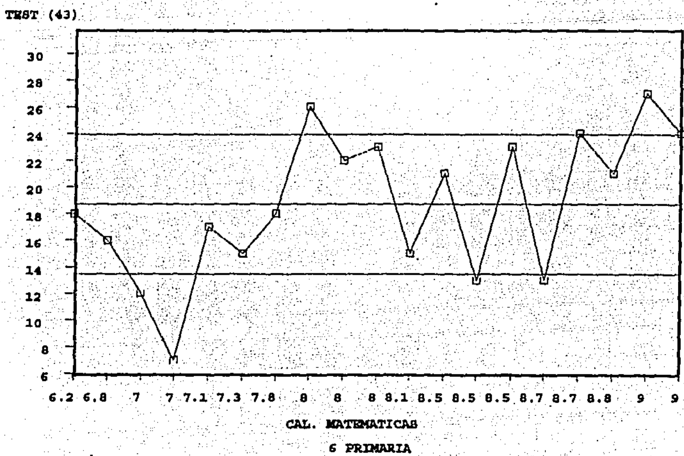
Correlation Coefficient = 0.179573 R-squared = 3.22 percent
Stnd. Error of Est. = 5.63091

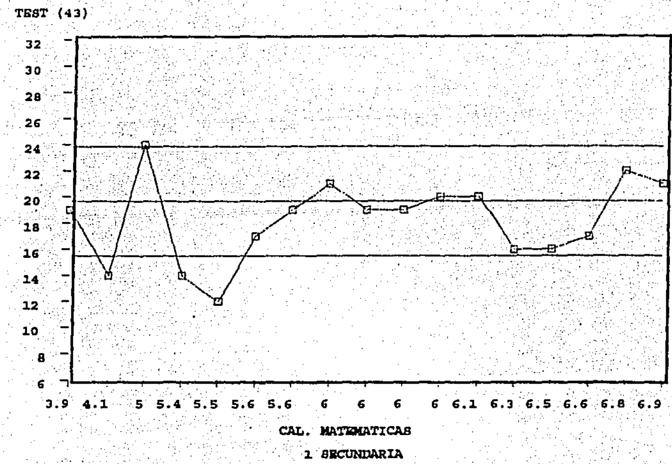
El coeficiente de correlación es de 0.1795, muy bajo , lo que nos lleva a concluir que no hay correlación entre las dos variables.
Sin embargo no podemos concluir que no haya relación entre los conocimientos en matemáticas y los conocimientos en probabilidad, sino simplemente que no hay relación entre las dos calificaciones. Quizas esto se deba a que la calificación esté midiendo mas una operatividad matemática que un razonamiento o cierta habilidad en matemáticas o que ésta esté inflada por el mismo sistema educativo de la escuela en estudio.
Aqui quedan las preguntas que podrian ser temas de otras investigaciones: ¿ Por qué no se da esta relación?, ¿ Es que la calificacón de matemáticas no mide habilidades matematicas?, o en caso contrario ¿Se necesita otro tipo de habilidades, de intuición para trabajar en probabilidad?

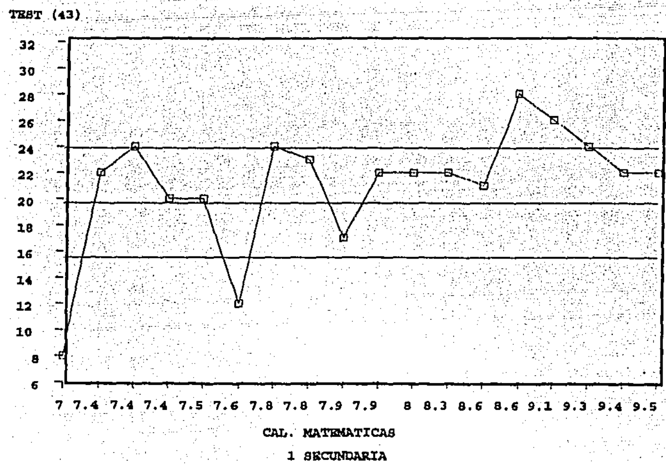
Plot of GREEN.TEST__43_ vs GREEN.CAL__MAT_

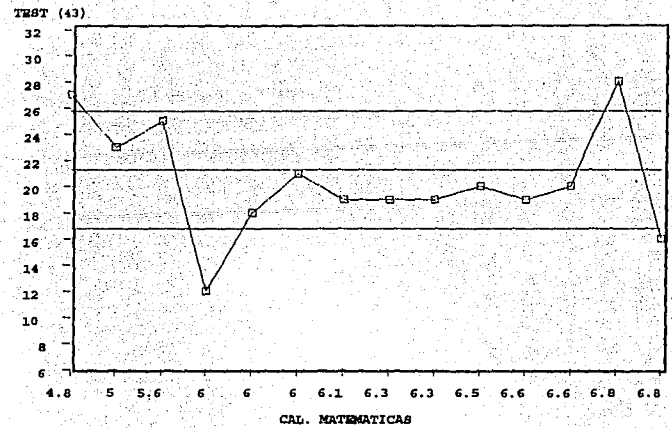



TEST (43)
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
6.1 6.3 6.8 6.8 7 7.2 7.3 7.3 7.7 8 8.2 8.3 8.4 8.5 8.5 8.9 9.1 9.3
CAL. MATEMATICAS
5 PRIMARIA

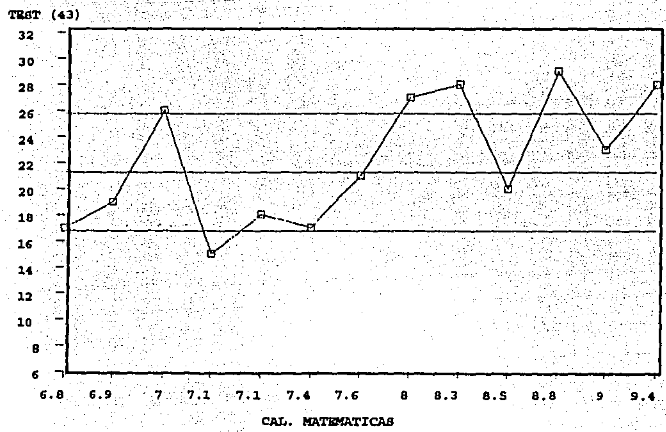

TEST (43)
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
6.2 6.8 7 7 7.1 7.3 7.8 8 8 8 8.1 8.5 8.5 8.5 8.7 8.7 8.8 9 9
CAL. MATEMATICAS
6 PRIMARIA


TEST (43)
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
3.9 4.1 5 5.4 5.5 5.6 5.6 6 6 6 6 6.1 6.3 6.5 6.6 6.8 6.9
CAL. MATEMATICAS
1 SECUNDARIA

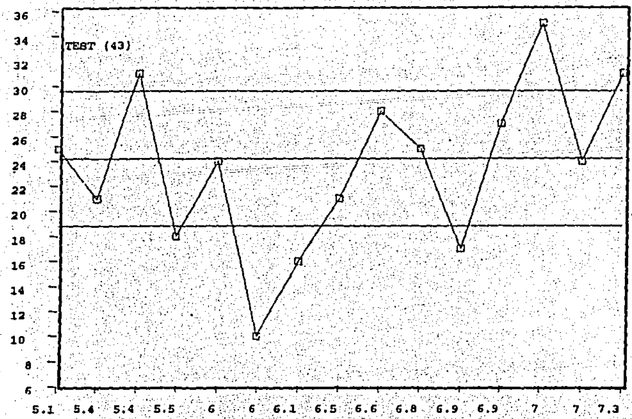

TEST (43)
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
7 7.4 7.4 7.4 7.5 7.6 7.8 7.8 7.9 7.9 8 8.3 8.6 8.6 9.1 9.3 9.4 9.5
CAL. MATEMATICAS
1 SECUNDARIA



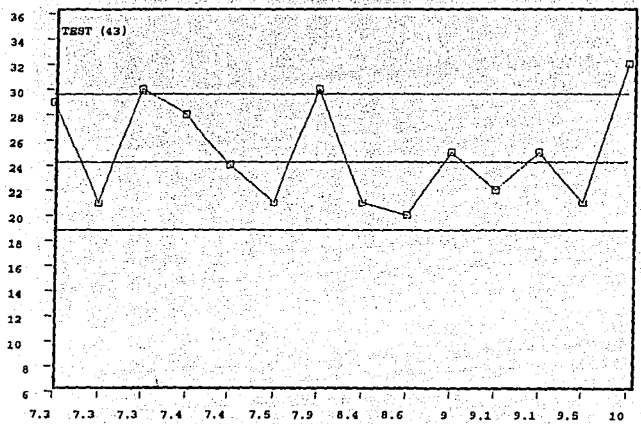
2 SECUNDARIA



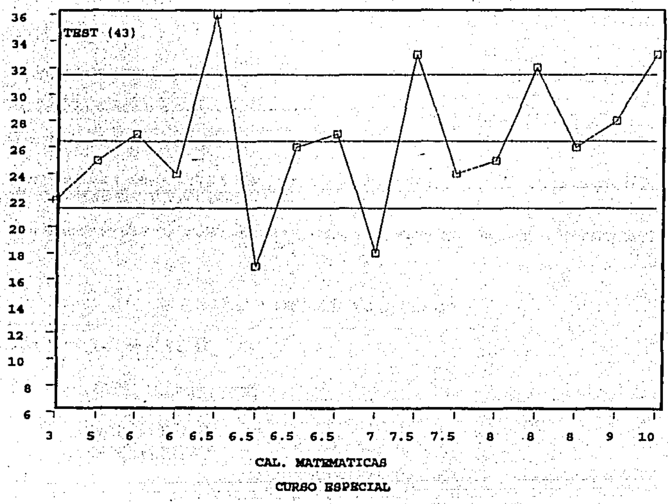
2 SECUNDARIA



CAL. MATEMATICAS
3 SECUNDARIA



CAL. MATEMATICAS
3 SECUNDARIA


TEST (43)
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
3
5
6
6
6.5
6.5
6.5
6.5
7
7.5
7.5
8
8
8
9
10
CAL. MATEMATICAS
CURSO ESPECIAL

HIPOTESIS 3:

¿Qué variables influyen en la calificación del test, edad, año escolar, sexo, calificación en matemáticas?

Para dar respuesta a esta pregunta se necesita hacer un análisis de regresión múltiple.

HIPOTESIS DE INVESTIGACION:

¿Qué variables, edad, año escolar, sexo, calificación de matemáticas, están correlacionadas con la calificación del test, por año escolar?

Este análisis se hará por medio de una regresión lineal múltiple por el método Stepwise de Selección.

Stepwise Variable Selection

Dep. var.: GREEN.TEST__43_

Ind. vars.: GREEN.CAL__MAT_
GREEN.ANO
GREEN.EDAD
GREEN.SEXO

Weights:

Constant: Yes Vertical bars: No Conf. level: 95 Method: Forward
F-enter: 4 F-remove: 4 Max. steps: 500 Control: Manual

Stepwise Selection for GREEN.TEST__43_

Selection: Forward Maximum steps: 500 F-to-enter: 4.00
Control: Manual Step: 0 F-to-remove: 4.00

R-squared: .00000 Adjusted: .00000 MSE: 32.5345 d.f.: 143

Variables in Model	Coeff.	F-Remove	Variables Not in Model	P.Corr.	F-Enter
			1. GREEN.CAL__MAT_	.1796	4.7316
			2. GREEN.ANO	.5354	57.0545
			3. GREEN.EDAD	.4389	33.8894
			4. GREEN.SEXO	.0095	.0128

Stepwise Selection for GREEN.TEST__43_

Selection: Forward		Maximum steps: 500		F-to-enter: 4.00	
Control: Manual		Step: 1		F-to-remove: 4.00	
R-squared: .28663		Adjusted: .28160	MSE: 23.3727		d.f.: 142

Variables in Model	Coeff.	F-Remove	Variables Not in Model	P.Corr.	F-Enter
2. GREEN.ANO	1.99293	57.0545	1. GREEN.CAL__MAT_	.3423	18.7093
			3. GREEN.EDAD	.1377	2.7244
			4. GREEN.SEXO	.0191	.0517

Stepwise Selection for GREEN.TEST__43_

Selection: Forward		Maximum steps: 500		F-to-enter: 4.00	
Control: Manual		Step: 2		F-to-remove: 4.00	
R-squared: .37020		Adjusted: .36126	MSE: 20.781		d.f.: 141

Variables in Model	Coeff.	F-Remove	Variables Not in Model	P.Corr.	F-Enter
1. GREEN.CAL__MAT_	1.29962	18.7093	3. GREEN.EDAD	.0583	.4779
2. GREEN.ANO	2.20603	75.6599	4. GREEN.SEXO	.0152	.0324

Aqui las variables que el método incluye en el modelo son año escolar y calificación en matemáticas. Una vez mas se comprueba que el sexo no es un factor significativo. La variable año escolar es mas importante que edad, parece que influye mas la educación que la madurez. La tésis que está apoyando estos resultados es la de Fischbein que dice que con la instrucción, las respuestas de los niños mejoran significativamente.

CAPITULO 4. CONCLUSIONES

La enseñanza de la probabilidad en esta escuela está orientada hacia una teoría matemática que a grandes rasgos consta de sucesos aleatorios, axiomas de probabilidad, análisis combinatorio, probabilidad condicional y distribuciones de probabilidad.

El tema de probabilidad esta relegado con respecto a los otros temas de matemáticas, excepto en sexto de primaria donde los temas probabilísticos se estudian todo el año conjuntamente con otros temas de matemáticas.

El test de Green incluye estos conceptos en las 26 preguntas en forma sencilla y real. El resultado en esta escuela encuestada es poco halagador:

AÑO ESCOLAR	CALIFICACION DEL TEST (%)
5	37.46
6	43.45
1	45.78
2	49.44
3	56.29
CE	61.48

Así al finalizar la secundaria y antes de una educación pre-universitaria, los alumnos adquieren sólo un 60% de los conocimientos básicos de probabilidad.

El significado que los alumnos dan a ciertos términos probabilísticos (improbable, alguna probabilidad, ...) no es el adecuado, además que se percibe deficiencias en la comprensión del lenguaje probabilístico.

Las preguntas sobre permutaciones, sobre fenómenos aleatorios, sobre inferencia y sobre distibuciones son mal resueltas.

Se percibe que conviven intuiciones erróneas creadas por el ambiente y conocimientos probabilísticos aprendidos en la escuela muchos de ellos contrarios.

No encontramos diferencias de desempeño entre hombres y mujeres.

La variable más correlacionada con la "calificación del test de Green" es el "año escolar".

La variable "calificación en matemáticas" no parece estar correlacionada significativamente con la variable "calificación del test de Green".

En base a los resultados obtenidos, parecería que la comprensión de la probabilidad no solo está estrechamente correlacionada con la formación de las diferentes operaciones matemáticas y del pensamiento lógico, tesis que Piaget maneja a lo largo de su obra "La genèse de l' idée de hasard chez l' enfant", sino que hay algo más. Es innegable que la adquisición de los distintos sistemas operativos es indispensable para la adquisición de un sistema probabilístico, pero esto no es suficiente. Estaríamos más de acuerdo con lo expuesto por Fischbein en " Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions" de 1984, de que la síntesis entre el azar y lo deducible no se realiza espontáneamente ni completamente, la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las posibilidades de un conjunto de elementos, es sólo una potencialidad para la mayoría de los sujetos y que subsisten juntas intuiciones primarias, algunas erróneas, e intuiciones secundarias adquiridas por la enseñanza que entran en conflicto.

Los conceptos de probabilidad presentan un alto nivel de abstracción y complejidad, de modo que no es posible un enfoque orientado hacia la adquisición formal (basada en teoría de conjuntos) de dichos conceptos en la enseñanza básica. Es preciso tener en cuenta que hay distintos niveles de comprensión adecuados a distintas edades y capacidades. Así los objetivos de la educación deben orientarse al desarrollo de los aspectos intuitivos, a que el alumno construya apropiadamente un conocimiento sobre el tema, es decir que el alumno reconozca y entienda los fenómenos aleatorios y maneje la lógica probabilística.

Para superar de la mejor forma los errores que en este trabajo se ponen de manifiesto, es necesario promover el desarrollo de la intuición probabilística en los alumnos durante todo el periodo de enseñanza media es decir de la secundaria, y tomar en cuenta ciertos criterios de índole metodológico, para el diseño de situaciones didácticas en la introducción de la probabilidad en la escuela.

Entre estos criterios metodológicos y sugerencias para un proceso de enseñanza, podemos destacar los siguientes expuestos todos ellos en el libro Azar y Probabilidad de Diaz Godino (1987).

Los principios dados por el School Council Project on Statistical Education de la Universidad de Sheffield, para la introducción de la Estadística y Probabilidad, en los niveles de enseñanza obligatoria en Inglaterra de 1975, con los que estoy plenamente identificada:

- los conceptos y técnicas serán desarrollados en un contexto práctico, vinculando las probabilidades al mundo del alumno.
- las técnicas no tienen que ser completamente desarrolladas en la primera ocasión que se tratan, muchas de las ideas deben volverse a tratar en años posteriores.
- la justificación teórica completa de todos los temas no es necesaria ni deseable. Algunos elementos sólo se tratan en el contexto de un problema; otros conceptos serán cubiertos únicamente por medio de experimentos y no se justifican teóricamente.
- se pondrá de manifiesto el carácter interdiciplinario de la Estadística y de la Probabilidad, relacionándolas con el mundo biológico, político, social y físico.
- el método de trabajo individual del alumno solo es recomendable para aprender algunas técnicas estadísticas específicas, pero no para los objetivos referentes a la interpretación de datos y obteción de inferencias. En este caso, el trabajo en grupos y la técnica de experimentación, ensayo y error, son recomendables.

Glayman y Varga (1975) recomiendan un proceso de enseñanza en tres etapas: la experimentación , razonamiento elemental y la medida de probabilidad.

Bruni y Silverman (1986) sugieren un prroceso de enseñanza de la probabilidad basado en cuatro pasos, usando materiales manipulativos e integrándolo con otras ideas como fracciones, razones, proporciones y porcentajes, así como relacionándolo con el proceso de resolución de problemas. Cada experiencia conducirá a:

- una discusión para introducir el vocabulario
- una trascripción de las experiencias a tablas, diagramas y gráficas como un modo de organizar las experiencias
- identificar posibles modelos, resumir la información y plantear nuevas cuestiones
-exploración de las actividades relacionadas que pretenden reforzar y extender los conceptos introducidos.

Por último, las propuestas curriculares, que propone Diaz Godino en su libro ya citado, son excelentes para la enseñanza de la probabilidad, a través de situaciones didácticas variadas. Diaz Godino presenta una colección de unidades de aprendizaje que de modo secuencial, introducen las nociones básicas sobre probabilidad a alumnos de 11 a 16 años, sexto de primaria y secundaria en nuestro sistema educativo.

Podemos destacar, por último, que la probabilidad puede ser aplicada a la realidad facilmente, por sus múltiples aplicaciones la probabilidad proporciona una excelente oportunidad de mostrar al alumno cómo aplicar la matemática para resolver problemas reales.

BIBLIOGRAFIA

1.- Alatorre Frenk, Silvia
Los contextos, las creencias y las intuiciones: Acerca de Cobb, Tversky y Kahneman
Educación Matemática Vol. 3 - Nº. 1 Abril 1991, pp 40 - 57

2.- Díaz Godino, Batanero Bernabeú, Cañizares Castellano (1987)
Azar y Probabilidad
Editorial Síntesis

3.- Fischbein, Efraín (1987)
Intuition in Science and Mathematics
Mathematics Education Library

4.- Fischbein, Efraín (1975)
The intuitive sources of Probabilistic thinking in children
D. Reidel Dordrecht: Holland

5.- Fischbein E. y Gazit A.
Does the teaching of Probability improve probabilistic intuitions?
Educational Studies in Mathematics, 15, 1984, pp 1-24

6.- Green, R. (1982)
Probability Concepts in School Pupils Aged 11 - 16 years
Tésis doctoral no publicada, Loughborough University of Technology, England

7.- Hawkin A. y Kapadia R.
Children's Conceptions of Probability
(a psycological and pedagogical review)
Educational Studies in Mathematics 15, 1984, pp 349-377

8.- Kahneman, D. & Tversky, A. (1982)
Judgement under uncertainty: Heuristics and biases
Part II: Representativeness, Sudjective probability: A judgement of representativeness, pp 32-47
Part IV: Availability, Availability: A heuristic for judging frequency and probability, pp 163-178
Cambridge University Press

9.- Laplace P.
Ensayo filosófico sobre las probabilidades
Alianza Editorial edición 1985

10.- Piaget, J. e Inhelder, B.
La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant
Presses Universitaires de France, 1974

NOMBRE:..

EDAD:........años ; FECHA DE NACIMIENTO:.. HOMBRE......

AÑO ESCOLAR:......................................; FECHA DE HOY:............................ MUJER........

COLEGIO:..

****

1.- Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ,o ¿piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos?

Señala la respuesta correcta:

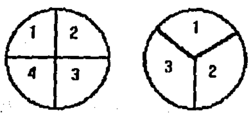
(A) La cara roja tiene más posibilidades (_____)
(B) La cara verde tiene más posibilidades (_____)
(C) No hay ninguna diferencia (_____)
(D) No lo sé (_____)

2.- Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña (_____)
(B) Es probable que el nombre sea de una niña que de un niño (_____)
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña (_____)
(D) No lo sé (_____)

3.-La figura muestra dos discos (o ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3?

Señala la respuesta correcta:



ROJO AZUL

(A) Es más fácil obtener un 3 en el disco rojo (_____)
(B) Es más fácil obtener un 3 en el disco azul (_____)
(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener un 3 (_____)
(D) No lo sé (_____)
¿Por qué eliges esa respuesta?________________________________
____
____

4.- Cuando se lanza un dado, ¿qué número o números son más difíciles de obtener? ,o ¿son todos iguales?
Respuesta:____
____

5.- Una moneda se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. Señala la frase que consideres correcta:
(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA (_____)
(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ (_____)
(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ (_____)
(D) No lo sé (_____)

6(a).- En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo).
Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra (_____)
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra (_____)
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad (_____)
(D) No lo sé (_____)

Por qué?____

____

____

6(b).-Otras dos cajas tienen en su interior algunas fichas negras y algunas fichas blancas.

Caja C: 5 negras y 2 blancas


C

D

Caja D: 5 negras y 3 blancas

¿Qué caja (la C o la D) da más posibilidades de sacar una ficha negra? O por el contrario, ¿dan las dos la misma posibilidad?

(A) Caja C (_____)
(B) Caja D (_____)
(C) La misma posibilidad (_____)
(D) No lo sé (_____)

Por qué?____

____

____

6(c).- Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:


E


F

Caja E: 2 negras y 2 blancas
Caja F: 4 negras y 4 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) Caja E (_____)
(B) Caja F (_____)
(C) La misma posibilidad (_____)
(D) No lo sé (_____)

Por qué?____

6(d).- Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:

Caja G: 12 negras y 4 blancas
Caja H: 20 negras y 10 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de sacar una ficha negra?

(A) La misma posibilidad (_____)
(B) Caja G (_____)
(C) Caja H (_____)
(D) No lo sé (_____)

Por qué?____

6(e).- Otras dos cajas distintas de las anteriores tienen fichas negras y blancas.

Caja J: 3 negras y 1 blanca.
Caja K: 6 negras y 2 blancas.

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) La misma posibilidad (_____)
(B) Caja J (_____)
(C) Caja K (_____)
(D)No lo sé (_____)

Por qué?____

7(a).- Lee las siguientes cinco frases:

1) No puede ocurrir.
2) No ocurre muy a menudo.
3) Ocurre con frecuencia.
4) Ocurre casi siempre.
5) Siempre ocurre.

Para las preguntas siguientes debes poner un número en cada uno de los cuatro recuadros. Puedes usar el mismo número más de una vez si lo deseas.

(A) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Muy probable"? (_____)

(B) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Improbable"? (_____)

(C) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Probable"? (_____)

(D) Cuál de las frases anteriores significa lo mismo que "Poco probable"? (_____)

7(b).- Escribe una palabra o una frase que signifique lo mismo que lo siguiente:

(A) Imposible ______________________________

(B) Posible ______________________________

(C) Igual posibilidad______________________________

(D) Poca posibilidad______________________________

(E) Muy probable______________________________

8.- En un experimento se lanzan al aire 12 monedas juntas y caen sobre la mesa. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuáles de los siguientes resultados ocurren más a menudo?

(A) 2 caras y 10 cruces (_____)
(B) 5 caras y 7 cruces (_____)
(C) 6 caras y 6 cruces (_____)
(D) 7 caras y 5 cruces (_____)
(E) Todas tienen la misma posibilidad (_____)

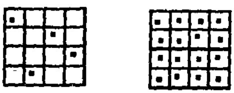
9.- Maria y Esteban juegan a los dados. Maria gana 1 peso si el dado sale 2 o 3 o 4 o 5 o 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo?

Respuesta:_______________ pesos.

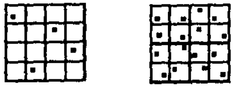
10.-Una moneda de 2 pesos y otra de 10 pesos se lanzan juntas al aire. En la tabla de abajo se ha anotado uno de los resultados posibles: cara en la moneda de 2 pesos y cruz en la de 10 pesos. Se ha indicado con una C para cara y X para cruz. Completa la tabla con todos los resultados posibles.

2 pesos	10 pesos
C	X

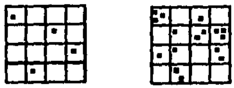
11.- El tejado de una casa tiene 16 secciones cuadradas. Comienza a granizar. Al principio solo caen unos pocos granizos, después aumenta la granizada. En los siguientes dibujos se representan tres conjuntos de dos posibles formas en las cuales podria haber caido los granizos. El primer dibujo de cada grupo, A, B, C muestra una forma de distribuirse los 4 primeros granizos; el segundo 16 granizos.



CONJUNTO A



CONJUNTO B

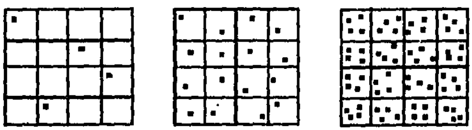


CONJUNTO C

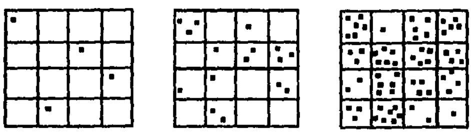
Pregunta: ¿Cuál de los modelos anteriores esperarías tu ver como más realista a medida que el granizo cae?

Conjunto A: (_____)
Conjunto B: (_____)
Conjunto C: (_____)
Conjuntos B y C: (_____)
Cada tipo de modelo es igualmente probable: (_____)

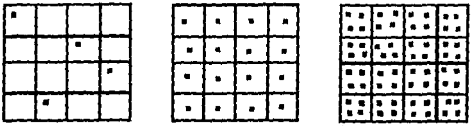
12.- Esta pregunta se refiere tambien a la caida de los granizos sobre un tejado. También se dibujan tres posibles modelos en tres momentos distintos: los 4 primeros granizos, despues 16 granizos y por último 64.



CONJUNTO A



CONJUNTO B



C O N J U N T O   C

Pregunta: ¿Cuál de los modelos anteriores esperarías tu ver como mas realista a medida que el granizo cae?

Conjunto A: (_____)
Conjunto B: (_____)
Conjunto C: (_____)
Conjuntos B y C: (_____)
Cada tipo de modelo es igualmente probable: (_____)

13.- Escribe una frase que comience:
"Es muy probable que el Rey...........", usando tus propias palabras para acabarla.

Es muy probable que el Rey____
____
____

14.- Escribe una frase que comience:
"Es improbable que el Rey..........", usando tus propias palabras para acabarla.

Es improbable que el Rey____
____
____

15.- Escribe una frase que termine:
"........es algo que sucede al azar", usando tus propias palabras para comenzarla.

____
____
____________________________________ es algo que sucede al azar.

16.- Para las siguientes frases señala todas las que pienses que significan exactamente lo mismo que "tiene un cincuenta por ciento de posibilidades de ocurrir".

(A) Puede ocurrir o no. (_____)
(B) Tiene tantas posibilidades de exito como de fracaso. (_____)
(C) Sucederá 50 veces de cada 50. (_____)
(D) Puede suceder algunas veces. (_____)
(E) Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir. (_____)
(F) Es muy improbable que suceda. (_____)

17.- Dos pirinolas de seis lados estan marcados con unos y doses, como se indica en el diagrama:

AMARILLO

ROJO

¿Qué pirinola te da mejor oportunidad de obtener un 2 cuando se lanza? o ¿dan la misma posibilidad?

(A) La amarilla es mejor para obtener un 2. (_____)
(B) La roja es mejor para obtener un 2. (_____)
(C) Ambas pirinolas dan la misma posibilidad. (_____)
(D) No lo sé. (_____)

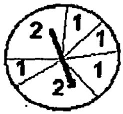
Por qué?____
____
____

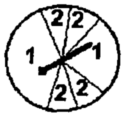
18.-En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad. (_____)
(B) El azul tiene mayor probabilidad. (_____)
(C) El verde tiene mayor probabilidad. (_____)
(D)Todos los colores tienen la misma probabilidad. (_____)
(E) No lo sé. (_____)

Por qué?____
____
____

19.-Dos discos, uno naranja y otro cafe, están marcados con números.





CAFE NARANJA

Cada disco tiene una aguja que gira. Si se quiere obtener un 1, ¿es uno de los discos mejor que el otro , o ambos dan la misma posibilidad ?

(A) El café es mejor para sacar un 1 (_____)
(B) El naranja es mejor para sacar un 1 (_____)
(C) Ambos discos dan la misma posibilidad (_____)
(D) No se puede decir (_____)

Por qué? ____
____
____

20.- El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una una moneda muchas veces, y que apuntaran cada vez si salía cara o cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0.
Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
01010011100110101100101100101100100101110110011011
01010010110010101100010011010110011101110101100011

Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
11100000010001010010000010001100010100000000011001
00000001111100001101010010010011111101001100011000

Una de las chicas lanzó la moneda correctamente; pero la otra hizo trampa y lo fingió.

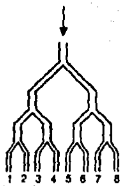
(A) Qué niña ha hecho trampa? Respuesta:______________

(B) Cómo lo sabes? Respuesta:______________

____

____

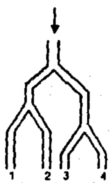
21(a).- Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:



Señala la frase que mejor describa dónde esperas tu que vayan las bolas.

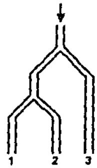
(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas (_____)
(B) Por 1 y 8 pasarán más bolas (_____)
(C) Por 3, 4, 5 y 6 pasarán más bolas (_____)
(D) Por 1, 3, 5 y 7 pasarán más bolas (_____)
(E) Ninguna de éstas (_____)

21(b).- Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



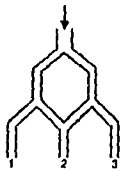
(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas (_____)
(B) Por 1 y 2 pasarán más (_____)
(C) Por 3 y 4 pasarán más (_____)
(D) Por 1 y 4 pasarán más (_____)
(E) Ninguna de éstas (_____)

21(c).- Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



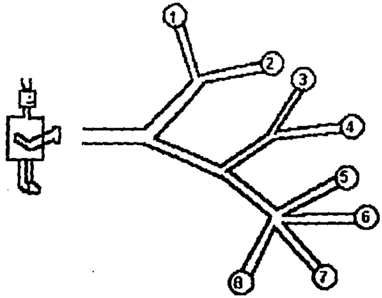
(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas (_____)
(B) Por 2 pasarán más bolas (_____)
(C) Por 3 pasarán más bolas (_____)
(D) Por 1 y 2 pasarán muchas bolas y por 3 pocas (_____)
(E) Ninguna de éstas (_____)

21(d) Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:



(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas (_____)
(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 o 3 (_____)
(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 (_____)
(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 y unas pocas por 3 (_____)
(E) Ninguna de éstas (_____)

22.- Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino que por otro (pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 trampas al final de los 8 caminos (ver el dibujo). ¿En qué trampa o trampas tiene el robot más probabilidades de acabar?, ¿o todas las trampas son igualmente probables?



Respuesta:____

____

____

23.- El profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinches. Algunas caen con la punta para arriba y otras caen hacia abajo
El resultado fué: ARRIBA = 68 ; ABAJO = 32
Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento.

De la lista siguiente, elige el resultado que tu crees obtendrá la niña:

(A) ARRIBA = 36 ; ABAJO = 64 (_____)
(B) ARRIBA = 63 ; ABAJO = 37 (_____)
(C) ARRIBA = 51 ; ABAJO = 49 (_____)
(D) ARRIBA = 84 ; ABAJO = 16 (_____)
(E) Todos los resultados tienen la misma probabilidad (_____)

24.- ¿Cuál de los dos siguientes resultados es más probable?

(1) Obtener 7 o más varones de los 10 primeros bebés nacidos en un nuevo hospital.
(2) Obtener 70 o más niños de los 100 primeros bebés nacidos en un nuevo hospital.

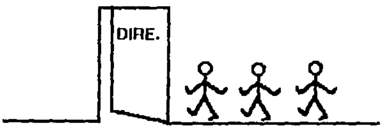
(A) Son igualmente probables (_____)
(B) 7 o más de 10 es más probable (_____)
(C) 70 o más de 100 es más probable (_____)
(D) No se puede decir (_____)

25.- Una bolsa contiene en su interior algunas bolas blancas y algunas bolas negras. Un niño extrae una bola, anota su color y la vuelve a introducir. A continuación remueve las bolas para que se mezclen bien. El chico repite esta operación 4 veces y siempre obtiene una bola negra.

A continuación extrae una quinta bola. ¿De qué color piensas que será con más probabilidad?

(A) La negra es más probable de nuevo (_____)
(B) La negra y la blanca son igualmente probables (_____)
(C) La blanca es más probable esta vez (_____)

26.- Tres chicos son enviados al director por alborotar. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho del director. Ninguno quiere ser el primero, desde luego!



(a) Supongamos que los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (los notaremos A, B y C). Queremos escribir abajo todos los posibles órdenes en que podrían alinearse.

Por ejemplo: para el orden A B C escribiremos ABC
1º 2º 3º

Respuesta:
ABC/......../........./........./........./........./........./........./........./........./........./......./..
......../........

Anota ahora las demás formas diferentes de ordenarse.

(b) ¿Cuántas formas diferentes hay en total? Respuesta___________

Ahora haz el resto de la pregunta:

(c) Si cuatro niños (A, B, C, D) tienen que alinearse, ¿Cuántas formas diferentes hay? Respuesta____________

(d) Y si hay cinco niños, ¿Cuántas maneras hay? (No intentes escribirlas todas!)

Respuesta_____________