



01162
10
205

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

**ESTIMACION DE AVENIDAS DE DISEÑO
EN REDES DE RIOS**

ALDO IVAN RAMIREZ OROZCO

T E S I S

**PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS
DE POSGRADO DE LA**

**Facultad de Ingeniería
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA**

Hidraulica

MEXICO, D. F., 1995



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Violeta y Bárbara Andrea, por su apoyo y comprensión.

A mis padres y hermanos

*Mi agradecimiento a los profesores de la DEPTI
Campus Morelos, en especial al Dr. Alvaro A.
Aldama Rodríguez y al Dr. Fco. Javier Aparicio
Mijares por su guía y comentarios a este trabajo y al
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua por el apoyo
recibido.*

"No debo buscar mi dignidad en el espacio, sino en el gobierno de mi pensamiento. No tendré más aunque posea mundos. Si fuera por el espacio, el universo me rodearía y me tragaría como un átomo, pero por el pensamiento yo abrazo el mundo".

Blaise Pascal

PENSÉES

CONTENIDO

I.- INTRODUCCIÓN

Conceptos generales	1
Objetivo del trabajo	4
Descripción general	7

II.- FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA

Conceptos básicos de probabilidad	8
Distribuciones de probabilidad	16
Funciones de distribución conjunta	18
Distribuciones condicionales	23
Funciones de distribución multivariadas	26
Función normal	26
Función Log-normal	29
Funciones de Valores Extremos	31

III.- ESTIMACIÓN DE AVENIDAS DE DISEÑO PARA OBRAS PARTICULARES EN REDES DE RÍOS.

Análisis de frecuencias en redes de ríos	45
Distribuciones conjuntas en redes de ríos	50
Período de retorno conjunto	55

Estimación de avenidas	63
El caso de total independencia entre eventos	67
El caso de total dependencia entre eventos	70
Homogeneidad hidrológica de los datos	75
Proceso de cálculo	80

IV.- EJEMPLO DE APLICACIÓN (RED HIDROGRÁFICA PAPALOAPAN)

Antecedentes y estudios preliminares	83
Adaptaciones y simplificaciones al modelo PAPAL	86
Avenidas máximas históricas	92
Prueba de homogeneidad hidrológica	96
Aplicación de la metodología a una obra específica	101
Definición de la obra propuesta	101
Ajuste de datos a la función de distribución trivariada	109
Proceso de cálculo	114
Resultados finales para el caso de dependencia parcial	125
El caso de dependencia total	138

V.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

VI.- BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

"No nos preguntemos que propósito útil hay en el canto de los pájaros, cantar es su deseo desde que fueron creados para cantar. Del mismo modo no debemos preguntarnos por qué la mente humana se preocupa por penetrar en los secretos de los cielos ...

La diversidad de los fenómenos de la naturaleza es tan grande y los tesoros que encierran los cielos tan ricos, precisamente para que la mente del hombre nunca se encuentre carente de su alimento básico".

Johannes Kepler
Mysterium Cosmographicum

"La esencia de la filosofía parece consistir en esto: de los fenómenos de movimiento, investigar las fuerzas de la naturaleza y de estas fuerzas demostrar los otros fenómenos".

Isaac Newton
Principia Philosophiae

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

El agua es un elemento esencial para la supervivencia de cualquier ser vivo sobre la Tierra. Este hecho ha sido reconocido por el hombre desde sus inicios y es la razón por la cual las cuatro civilizaciones más grandes de la antigua historia humana y algunas más contemporáneas se han desarrollado en cercana dependencia de grandes cuerpos de agua y de los suelos fértiles y fácilmente laborables de las llanuras de inundación de los ríos. Estas son la civilización egipcia en el valle del Nilo, desde 5000 A.C., dependientes del río Nilo, que tiene una longitud aproximada de 6650 Km desde Burundi hasta el Mediterráneo, de los cuales 3200 Km son navegables; los sumerios en el sur de Mesopotamia ahora Iraq, desde 3500 A.C., en las cercanías de los ríos Eufrates y Tigris con 2735 Km de longitud y que desembocan en el Golfo Pérsico; los harappans o civilización india desde 2700 A.C. sobre el río Indo en Pakistán, el cual tiene 2900 Km de longitud desde el Tíbet hasta el Mar Árabe y los chinos desde 6000 A.C., en el Huang-Ho o río amarillo, que nace en el alto Tíbet y desemboca en el Mar Amarillo en el norte de China, a través de 4830 Km y el Yang-Tzé también desde el Tíbet hasta el Mar Este de China con cerca de 6000 Km. de longitud. Ya en la época contemporánea podemos citar el caso de los aztecas, en América del norte, los cuales a partir del siglo XII, emigraron de la misteriosa Aztlán al valle de Tenochtitlán, en el cual lograron su desarrollo [17].

Como resultado de la dependencia natural del suministro de agua, el hombre tuvo que afrontar los extremos de la naturaleza en cuanto al vital líquido se refiere; sequías e inundaciones.

Una inundación es la acumulación de agua en tierras normalmente secas, resultado de la elevación o el vertido de cuerpos de agua, ocasionado principalmente por precipitaciones extraordinarias.

A veces la abundancia se recibía con júbilo y alegría, como en el río Nilo, en donde se asociaba con prosperidad en lugar de destrucción y muerte. Tal era el beneficio, que los faraones egipcios ante esa situación elevaban los impuestos después de las inundaciones [17]. Sin embargo en otras ocasiones las consecuencias han sido devastadoras, como se puede observar en la tabla 1.1.

Se ha encontrado evidencia de que inundaciones intermitentes y de consecuencias desastrosas deterioraron a tal grado la ciudad de Mohenjo-Daro, que causaron la rápida declinación de la civilización harappan en la India cerca de 1750 A.C. [17].

Los efectos de las inundaciones han servido de base para creencias religiosas, místicas y por supuesto de estudios científicos. La inundación histórica más familiar es la que aparece descrita en el libro de Génesis. El evento en el cual está basado el Antiguo Testamento, pudo haber ocurrido cerca de 3000 A.C., cuando el río Eufrates inundó gran superficie en Mesopotamia. De acuerdo a la Biblia, la inundación fue el resultado de 40 días de lluvia continua, produciendo acumulaciones de agua que duraron 150 días y tirantes de agua en exceso de más de 7 m. [17].

La evidencia arqueológica indica que el hombre ha intentado regular el flujo del agua en ríos y corrientes para propósitos benéficos por cerca de 6000 años. Esta evidencia consiste generalmente en los hallazgos de presas y sistemas de riego y drenaje. Por otro lado, el hombre también reconoció que ante un desastre inminente no quedaba más que salvar su vida. El conocimiento del nilómetro, un incipiente dispositivo que advertía a la población en casos de emergencia, es una muestra convincente.

Las mayores Inundaciones registradas

Año	Localidad	Causas y consecuencias
1900	Galveston, Texas	Un huracán produjo inundaciones que dejaron un saldo de 6,000 muertes.
1938	Norte de China	Los chinos dinamitan un dique en el Huang-Ho para impedir el avance japonés, provocando más de un millón de muertes.
1970	Pakistán (Hoy Bangladesh)	Un ciclón inunda zonas costeras dejando 200,000 pérdidas humanas.
1971	Orissa State, India	Un ciclón incide en la costa. La inundación produjo 10,000 muertes.
1979	Morvi, India	Lluvias monzónicas causan el colapso de una presa, con 100,000 decesos.
1985	Norte de Brasil	Inundaciones a causa de lluvias extraordinarias dejan a un millón de personas sin hogar.
1988	Bangladesh	Inundaciones monzónicas dejan a 28 millones de damnificados.
1988	Sudán	Lluvias torrenciales inundan el valle del Nilo. 1.5 millones de personas quedan sin hogar y el número de muertes es desconocido.
1991	Bangladesh	Un ciclón inunda la región del delta, provocando tirantes de 5 a 6 m. 125,000 personas pierden la vida.

Tabla 1.1

Las inundaciones pueden tener muy diversas causas entre las que se destacan las acciones humanas y el desborde de ríos. Entre las acciones humanas el caso más obvio es cuando estas resultan de la falla de estructuras artificiales, como las presas por ejemplo. Las inundaciones por el desborde de ríos pueden tener sus causas en la lluvia o el deshielo. Como se sabe la proporción en la cual el suelo absorbe el agua decrece con el tiempo, por lo cual entre mayor sea la duración o intensidad de una tormenta, mayor será también el porcentaje de agua que fluirá por el terreno como escurrimiento.

Las inundaciones periódicas de las zonas adyacentes a los ríos originan las llamadas llanuras de inundación, las cuales proveen tierras agrícolas muy ricas, por lo cual constituyen regiones altamente pobladas en todo el mundo. Su mayor desventaja consiste, sin embargo, en el peligro de inundaciones, a veces a escala catastrófica. Las llanuras tienen comúnmente un drenaje muy pobre debido a su poca pendiente.

El medio más obvio de reducir los daños producidos por las inundaciones es la alerta a tiempo. Esto permite a la gente evacuar el área en peligro. Otro medio de reducción de daños, es la planeación anticipada basada en la probabilidad de ocurrencia de los eventos. Así se puede evitar que desarrollos urbanos o industriales se localicen en zonas de alto riesgo de inundación las cuales podrán utilizarse para otras actividades como la recreación, agricultura, etc.

Una avenida extraordinaria es el producto del escurrimiento por lluvia y/o deshielo, en cantidades tan grandes como para impedir su acomodo en los cauces de aguas bajas de las corrientes fluviales [35].

El diseño de una obra con características de protección contra inundaciones, reducción del escurrimiento, derivación de aguas, rectificación de cauces y todas las relacionadas con aspectos hidrológicos deben basarse en una "avenida de diseño". La selección de esta debe realizarse analizando el riesgo involucrado y el costo de la falla. El factor más importante es precisamente el costo de la vida humana, la cual debe considerarse de un valor infinito, de tal forma que su riesgo es intolerable.

El desarrollo de los métodos para determinar la avenida de diseño depende de encontrar relaciones teóricas y observadas entre el período de retorno y la magnitud de las avenidas extraordinarias y de la determinación del período de retorno óptimo a utilizar en el diseño. Una de los procedimientos más utilizados en la estimación de avenidas es el llamado análisis de frecuencias.

El análisis de frecuencias es una de las técnicas estadísticas aplicada en hidrología para tratar de estimar las probabilidades asociadas con eventos de diseño. Estos métodos pueden criticarse pero el hecho persiste en que son mejores que otros métodos no probabilísticos. Las técnicas de análisis de frecuencias se desarrollaron al inicio de este siglo y desde entonces han tenido poco avance. Se han implementado varios medios para este estudio como por ejemplo, series anuales y parciales, análisis regional, técnicas univariadas y multivariadas, paramétricas y no paramétricas, etc. [46].

En muchas ocasiones las zonas de interés no corresponden a una sola corriente, sino a una verdadera red de ríos. Este caso es muy usual en las llanuras de inundación de los ríos importantes. De acuerdo a lo anterior es necesario implementar un procedimiento de análisis de frecuencias aplicable a tales redes hidrográficas. En nuestro país, una de las zonas con mayor incidencia de inundaciones, es precisamente la llanura de inundación del bajo Papaloapan, en la cual es necesario implementar medidas tanto de protección como de alerta.

En este trabajo se describe primeramente la técnica del análisis de frecuencias en redes de ríos, la cual consiste en modelar el análisis de gastos máximos o alguna otra variable aleatoria en algún punto de la red hidrográfica. La metodología planteada establece la relación entre la probabilidad de ocurrencia y/o período de retorno de la avenida de diseño aplicable a una obra dentro de la red de ríos y la probabilidad de ocurrencia y/o período de retorno de eventos presentados en las corrientes individuales en base a la consideración de aplicación de distribuciones de probabilidad de valores extremos univariadas y multivariadas.

En la actualidad es muy común realizar el análisis de redes de ríos, con fines de estimación de avenidas de diseño o algún otro estudio hidrológico, basados en la consideración de total dependencia de los eventos en las corrientes individuales o bien en la consideración de independencia total [35]. Cabe adicionar que en estas metodologías no se introduce ningún proceso de optimización como parte de la solución del problema.

La metodología expuesta en este trabajo propone considerar que los eventos en las corrientes individuales mantienen una dependencia parcial, la cual es tomada en cuenta a través del coeficiente de correlación múltiple o alguna función de este, dentro del ajuste de las distribuciones multivariadas.

Como ilustración del procedimiento de cálculo y los conceptos de la metodología expuesta en este trabajo, se presenta una solución al problema real de inundaciones en la red hidrográfica del río Papaloapan, en el sureste de la República Mexicana.

La metodología presentada, pretende ser un elemento más en la toma de decisiones en las situaciones de emergencia ocasionadas por avenidas extraordinarias y un auxiliar en el diseño eficiente de las diversas obras hidráulicas.

Además, mediante la metodología presentada, es posible encontrar la condición más desfavorable para una obra en particular y para un período de retorno previamente dado, de tal forma que se puede tener más confianza en que el diseño de la obra en cuestión cumplirá con los factores de riesgo aceptados al inicio del mismo.

En forma práctica, es posible dimensionar una obra aguas abajo de la confluencia de dos ríos o más para un período de retorno de diseño dado y no mediante la proposición de períodos de retorno de diseño asignados en las corrientes individuales, los cuales, en esta metodología son igualmente calculados como parte de su aplicación.

Descripción del trabajo.

El trabajo se encuentra organizado en la forma detallada a continuación.

Se presenta inicialmente un repaso de los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, así como de las funciones de densidad y funciones de distribución de probabilidad acumulada tanto en el caso univariado como en el caso multivariado. Se consignan explícitamente las propiedades de las distribuciones conjuntas y se introducen los conceptos de distribuciones condicionales. Se presenta también, la teoría de las funciones de distribución multivariadas, en la cual se incluye las características y propiedades de la función normal, log-normal y de valores extremos. Esta última es tratada en forma amplia, ya que es la que se eligió como aplicable a la metodología introducida en el trabajo.

En el capítulo III, se presenta la aplicación de los conceptos de probabilidad conjunta al caso del análisis de frecuencia en redes de ríos y se introduce la metodología propuesta para la estimación de avenidas de diseño para obras particulares en dichas redes hidrográficas.

En el capítulo IV se incluye el ejemplo de aplicación de la metodología presentada. La red hidrográfica del Río Papaloapan se toma como aplicación real y se determinan las características para el diseño de una obra en particular, bordos de protección en este caso.

Finalmente, se establecen las conclusiones y recomendaciones del trabajo en donde se detallan tanto las ventajas del método, así como las posibles desventajas y por supuesto las recomendaciones para su utilización. También se establecen aquí las líneas a seguir en la investigación de este campo de la hidrología.

"Decir que cada especie de cosa está dotada de una cualidad específica oculta por la cual actúa y produce efectos manifiestos, equivale a no decir nada, pero deducir de los fenómenos dos o tres principios generales de movimiento, y acto seguido explicar de que modo se deducen de estos principios manifiestos las propiedades y las acciones de todas las cosas corpóreas, sería dar un gran paso".

Isaac Newton
Óptica

CAPITULO II

FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA

Conceptos Básicos de Probabilidad.

Algunas definiciones importantes son:

Experimento.-

Se denomina así a toda acción que se realiza con el fin de observar su resultado. Un experimento se llama "determinista" si se puede predecir con certeza su resultado antes que éste se presente. Un experimento se denomina "aleatorio", si no es posible asegurar el resultado que se va a presentar al realizarlo. El conocer el volumen de escurrimiento que tendrá un río durante la próxima temporada de lluvias es un experimento aleatorio. Por definición, cualquier resultado simple de un experimento es representado por uno, y solo un evento simple.

Evento.-

Un "evento" es todo resultado posible de un experimento aleatorio, como por ejemplo, el que el volumen anual escurrido en un río sea mayor de 2000 millones de m^3 .

Un evento elemental es el resultado más simple que se puede tener en el experimento y su característica fundamental consiste en no poderlo descomponer en otros resultados aún más simples.

El espacio de eventos de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los eventos elementales de un experimento, el cual se denomina *Universo* y usualmente se representa por la letra *S*.

Si al realizar un experimento no existen factores que favorezcan la presencia de alguno o algunos eventos elementales se dice que sus eventos elementales son igualmente posibles, como por ejemplo los eventos posibles en el tiro de un dado homogéneo (no cargado).

Si se conoce con certeza algún resultado antes de su ocurrencia en un experimento, se dice que ese resultado es un "evento seguro".

Si se conoce con certeza, que un evento no ocurrirá al realizar un experimento, se dice que es un "evento imposible".

Se llama "complemento" del evento A, representado por A' , al conjunto de eventos elementales del espacio S que no pertenecen a A.

Si se tiene un espacio muestral S arbitrario, pero fijo y A y B son conjuntos de eventos elementales, se pueden establecer relaciones entre dichos eventos A y B.

Unión de Eventos.-

La unión de los eventos A y B del espacio S se representa por $A \cup B$ e identifica al evento que está formado por los eventos elementales que están en A o en B.

Intersección de Eventos.-

La intersección de dos eventos A y B del espacio S se representa por $A \cap B$ e identifica al evento que está formado por los eventos elementales que están simultáneamente en A y en B.

Su representación generalizada para n eventos es:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i \quad (2.1)$$

Es decir que con cualquiera de los dos eventos, A y B podemos asociar dos nuevos eventos definidos por las condiciones "tanto A como B ocurren" y "o bien A, o bien B, o bien ambos ocurren". En el primer caso el nuevo evento contiene todos los eventos elementales que son comunes a A y B y lo llamamos intersección de eventos; en el segundo caso el nuevo evento contiene todos los puntos muestrales, con la excepción de los que no pertenecen a A ni a B y lo llamamos unión de eventos.

Dos eventos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente, es decir que se cumple $A \cap B = \emptyset$.

Probabilidad.-

El concepto de probabilidad se apoya en las siguientes hipótesis:

- 1.- El espacio de eventos S es finito.
- 2.- Los eventos elementales del espacio S son igualmente posibles.

La probabilidad de que un evento A ocurra se denota por $P(A)$ y se define como el número de eventos elementales en A (favorables) entre el número de eventos elementales en el espacio S.

La probabilidad de que un evento A no ocurra se denota por $P(A')$. A' significa "No A", es decir que no ocurra el evento A.

De aquí se desprenden los axiomas básicos de la probabilidad.

Primer Axioma.-

La probabilidad de que ocurra un cierto evento es:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{2.2}$$

Segundo Axioma.-

La probabilidad de un evento seguro es 1 y la probabilidad de un evento imposible es 0.

Cuando la probabilidad de ocurrencia de un evento es cercana a la unidad, se dice que éste tiene alta probabilidad de ocurrir y si es cercana a cero se puede decir que es improbable que el evento ocurra (probabilidad baja).

Tercer Axioma.-

Ley de Adición de Probabilidades.

Sabemos que la probabilidad $P(A)$ de cualquier evento es la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales en él. Entonces para calcular la probabilidad de la unión de dos eventos A y B , es decir de que o bien A , o bien B o bien ambos ocurran, tenemos que sumar las probabilidades de todos los puntos muestrales contenidos en A o en B , pero cada punto debe contarse solo una vez. Por lo tanto, tenemos

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad (2.3)$$

Ahora bien si E es cualquier punto contenido tanto en A como en B entonces $P(E)$ ocurre dos veces en el miembro de la derecha, pero solo una en el de la izquierda. Por lo tanto el miembro de la derecha excede al de la izquierda en la cantidad $P(A \cap B)$ y se tiene entonces que la probabilidad de que al menos uno de dos eventos A y B ocurra es la suma de las probabilidades de cada uno, menos la probabilidad de la ocurrencia simultánea de ambos, es decir que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (2.4)$$

Para el caso de tres eventos A, B, C se tendrá en forma análoga que para el cálculo de la probabilidad se deben sumar las probabilidades de todos los puntos muestrales contenidos en A , o en B o en C , pero contar sólo una vez cada punto.

Entonces:

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C) \quad (2.5)$$

Nuevamente, si E es un punto contenido tanto en A como en B , entonces $P(E)$ ocurre dos veces en el miembro derecho y sólo una en el izquierdo, por lo cual el miembro de la derecha excede al de la izquierda en la cantidad $P(A \cap B)$. Este razonamiento es válido también para el caso de las intersecciones $A \cap C$ y $B \cap C$. Ahora bien si restamos dichas cantidades en exceso del miembro de la derecha, estaremos restando dos veces la cantidad correspondiente a las probabilidades de los puntos contenidos en la intersección de los tres eventos A , B y C . Por lo tanto, la ley de adición de probabilidades para tres eventos queda expresada por:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \quad (2.6)$$

Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cap B) = 0$, por lo que podemos escribir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2.7)$$

Y también:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \quad (2.8)$$

Si A' es el complemento de A en el espacio S , se tiene entonces que:

$$P(A) + P(A') = 1 \quad (2.9)$$

O bien:

$$P(A') = 1 - P(A) \quad (2.10)$$

La cual es precisamente la probabilidad de que ocurra el complemento de A, o lo que es lo mismo, la probabilidad de que no ocurra A.

La fórmula de la adición de probabilidades, puede ser fácilmente generalizada al caso de n eventos. Esta generalización ha sido referida como la fórmula de inclusión - exclusión en algunos textos [6][32][40].

Sean C_1, C_2, \dots, C_n , n eventos arbitrarios. Entonces la fórmula de inclusión - exclusión resulta [6]:

$$\begin{aligned}
 P(\bigcup_{i=1}^n C_i) = & \sum_{i=1}^n P(C_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(C_{i_1} \cap C_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}) - \dots + \\
 & + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_n}) \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Y recordando que:

$$P(\bigcup_{i=1}^n C_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^n C_i') \quad (2.12)$$

Se puede expresar también que:

$$P(\bigcap_{i=1}^n C_i') = 1 - P(\bigcup_{i=1}^n C_i) \quad (2.13)$$

Probabilidad Condicional.-

Si la probabilidad de un evento B depende de la ocurrencia de un evento A entonces se escribe $P(B | A)$ y se dice probabilidad de B dado que A haya ocurrido. La probabilidad $P(B | A)$ es una probabilidad condicional. Es decir que la probabilidad $P(B)$ está condicionada al hecho de que A haya ocurrido.

La probabilidad condicional se calcula como:

$$P(\mathbf{B} | \mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{A})} \quad (2.14)$$

por lo que:

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) P(\mathbf{B} | \mathbf{A}) \quad (2.15)$$

Para el caso de 3 eventos, podemos expresar que:

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = P(\mathbf{A}) P(\mathbf{B} | \mathbf{A}) P(\mathbf{C} | \mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \quad (2.16)$$

Independencia Estadística.-

Si dos eventos físicos no están relacionados de ninguna manera no se alteraría la medición de la probabilidad de uno aún cuando sepamos que el otro haya ocurrido. Esta noción intuitiva lleva a la definición de independencia estadística o estocástica. Dos eventos **A** y **B** son independientes si y sólo si:

$$P(\mathbf{B} | \mathbf{A}) = P(\mathbf{B}) \quad (2.17)$$

De esta definición la independencia de los eventos **A** y **B** implica que:

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) P(\mathbf{B}) \quad (2.18)$$

Ley de Multiplicación de Probabilidades.

Esta es una extensión del concepto de independencia y se expresa por la ec. (2.15):

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) P(\mathbf{B} | \mathbf{A})$$

La generalización de la ley de multiplicación de probabilidades para n eventos denominados C_i , está dada por la siguiente expresión, válida para $n \geq 2$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n C_i\right) = \prod_{i=1}^n P(C_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} C_j) \quad (2.19)$$

Esta expresión indica la probabilidad de que los eventos C_i ocurran simultáneamente.

Si los eventos son independientes, se cumple la ecuación (2.18):

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

para el caso de tres eventos independientes:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$$

Y en general para el caso de n eventos independientes C_i , $i=1,2,\dots,n$ se cumple:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n C_i\right) = \prod_{i=1}^n P(C_i) \quad (2.20)$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Sea E un experimento aleatorio y E_1, E_2, \dots , eventos mutuamente excluyentes y conjuntamente exhaustivos del espacio de eventos. Si x es una variable aleatoria discreta con valores x_1, x_2, \dots , asociados a los eventos E_1, E_2, \dots , respectivamente, y de cada uno de ellos se conoce la probabilidad de ocurrencia p_1, p_2, \dots , al conjunto de parejas (x_i, p_i) , $i=1, 2, \dots$, se le llama "función masa de probabilidad discreta" de la variable aleatoria x . Se cumple que:

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$\sum p_i = 1$$

Esta distribución se representa a través de una función real $p(x)$ tal que el valor de la función, en una cierta $x=x$ es igual a la probabilidad de que ocurra ese valor, o sea que ocurra el evento E_i . Es decir que $p(x)=p_i$. La función $p(x)$ está definida algebraicamente y se llama función de probabilidad.

Si x es una variable aleatoria continua, la función masa de probabilidad puede definirse analíticamente en algunos casos y es usual llamarla "función de densidad de probabilidad" de la variable aleatoria x y representarla por $f(x)$.

Se cumple que:

$$p(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (2.21)$$

Y se tiene además de los axiomas básicos que:

$$f(x) \geq 0 \quad (2.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.23)$$

Por lo tanto la probabilidad de que x tome un valor exacto, digamos x , es nula, por lo que $f(x)$ no representa una probabilidad, sino solo una medida de la "intensidad" de ésta en el punto x .

La "*distribución de probabilidad acumulada*" o simplemente "*función de distribución*" se representa por $F(x)$ y es la probabilidad del evento en el cual la variable aleatoria x tome cualquier valor igual o menor que x . Es decir, para una variable aleatoria continua se tendrá:

$$F(x) = p(x \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (2.24)$$

Se cumple para el caso de la variable aleatoria continua que :

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad (2.25)$$

Con esto, la probabilidad de que x se encuentre en el intervalo $[a,b]$ será:

$$p(a \leq x \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2.26)$$

De los axiomas básicos de la probabilidad [9], se desprende que $F(x)$ es monótonicamente no decreciente y se cumple que:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad (2.27)$$

FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA.

En situaciones reales, frecuentemente es necesario conocer el comportamiento simultáneo de dos o más variables aleatorias.

En el caso bidimensional, consideremos dos variables aleatorias $[x, y]$ definidas en el mismo espacio y llamemos $F_x(x)$ y $F_y(y)$ a las distribuciones de probabilidad correspondientes.

El conjunto de puntos que satisface por ejemplo las condiciones $[x \leq x]$ y $[y \leq y]$ constituye un evento cuya probabilidad es:

$$p(x \leq x, y \leq y) \quad (2.28)$$

Es práctica común introducir la notación:

$$p(x \leq x, y \leq y) = F(x, y) \quad (2.29)$$

En donde $F(x, y)$ es la función de distribución acumulada, mientras que a su correspondiente función de densidad de probabilidad conjunta se le denota por $f(x, y)$.

Se tiene que:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) \quad (2.30)$$

Entonces:

$$F(x, y) = p(x \leq x, y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dy dx \quad (2.31)$$

Frecuentemente se requiere conocer las "distribuciones marginales". Para eliminar las consideraciones de Y en el comportamiento de X, se necesita integrar la función de densidad conjunta sobre todos los valores posibles de Y y determinar la función de densidad marginal de X; es decir:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \quad (2.32)$$

La función de distribución acumulada de X, $F_X(x)$ es consecuentemente:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = F_{X,Y}(x, \infty) \quad (2.33)$$

Por lo que entonces podemos resumir que:

$F(x, \infty)$ es una distribución univariada denominada distribución marginal de x.

Esto implica que:

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X,Y}(x, \infty) \quad (2.34)$$

Resultados análogos son válidos para la distribución marginal de Y.

Se tiene entonces que:

$$F_X(x) = p(x \leq x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx \quad (2.35)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy \quad (2.36)$$

Se cumple que:

$$0 \leq F(x,y) \leq 1 \quad (2.37)$$

Y además:

$$F(\infty, \infty) = 1 \quad F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(-\infty, y) = 0 \quad F(x, -\infty) = 0$$

Si $[x, y]$ son variables estadísticamente independientes se cumple que:

$$f_{x|y}(x,y) = f(x)$$

$$f_{y|x}(x,y) = f(y)$$

$$f(x,y) = f(x) f(y)$$

$$F_{x|y}(x,y) = F(x)$$

$$F_{y|x}(x,y) = F(y)$$

$$F(x,y) = F(x) F(y)$$

(2.38)

En la práctica, la independencia estadística de las variables aleatorias es una propiedad que puede ser atribuida por el ingeniero al suponer que estas no se encuentran relacionadas de ninguna manera [4].

El concepto de independencia es usualmente muy importante para aplicar con éxito la teoría de las probabilidades. Desde un punto de vista práctico el análisis de muchos modelos probabilísticos sería muy complejo si el ingeniero no adoptase el supuesto de independencia de ciertas variables aleatorias en situaciones claves.

GENERALIZACIÓN AL CASO DE n DIMENSIONES.

Consideremos ahora que se tienen n variables aleatorias de interés en el mismo espacio. Entonces la probabilidad de un evento tal que $X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n$ se denota por:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

Y la función:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.39)$$

es la distribución de probabilidades conjunta multivariada.

La función:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

es la función de densidad de probabilidad para la distribución conjunta o multivariada.

A $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le corresponde una cierta función de distribución acumulada que denotamos con $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, la cual está definida de una manera única y es monótonicamente no decreciente en cada x_i .

Las funciones de densidad y de distribución acumulada están relacionadas por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.40)$$

Podemos entonces expresar que:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.41)$$

Cuando todas las variables excepto x_i tienden a un límite infinito, F tenderá a un límite $F_i(x_i)$, que es precisamente la distribución marginal de x_i es decir:

$$F_i(x_i) = F(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty) \quad (2.42)$$

Si $n-k$ variables aleatorias tienden al infinito, el límite de F define una distribución marginal k -dimensional de las restantes k variables.

Evidentemente una distribución conjunta n -variada debe cumplir con los axiomas básicos de la probabilidad, es decir:

$$0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1 \quad (2.43)$$

$$F(\infty, \infty, \dots, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad (2.44)$$

$$F(x_1, -\infty, \dots, x_n) = F(-\infty, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, -\infty) = 0 \quad (2.45)$$

Y por la ley de multiplicación de probabilidades tiene que las n variables aleatorias son estadísticamente independientes si su función de distribución de probabilidad cumple con:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \quad (2.46)$$

Donde $F_i(x_i)$ es la distribución marginal de x_i .

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES.

La distribución de una variable con restricciones o condiciones en una segunda variable se llama distribución condicional [4].

La distribución condicional se obtiene utilizando razonamientos análogos de probabilidad condicional.

Supongamos que se intenta obtener la distribución de x dada que y esté en alguna región R .

El espacio muestral de y es entonces R y ya que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_R f_y(s) ds \quad (2.47)$$

Entonces:

$$\frac{\int_{\mathbf{R}} f(x,s) \cdot ds}{\int_{\mathbf{R}} f_y(s) ds}$$

es una función de densidad de probabilidad de x dado que y está en \mathbf{R} . Esta función se denota por $f(x|y$ en \mathbf{R}).

En forma simplificada se puede expresar que:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} \quad (2.48)$$

O también:

$$f_{x,y}(x,y) = f_{x|y}(x|y) f_y(y) \quad (2.49)$$

Esto quiere decir que la función de densidad conjunta se puede obtener mediante la multiplicación de la densidad condicional por la marginal.

Una vez revisados los conceptos fundamentales de la teoría de la probabilidad, es oportuno recordar en este momento el concepto de período de retorno (T), básico para la mayoría de los análisis hidrológicos.

El período de retorno se define como el tiempo transcurrido promedio entre ocurrencias de un evento de una magnitud dada o un evento de una magnitud mayor [24].

Por ejemplo, un gasto máximo con período de retorno de 25 años es un gasto que es igualado o excedido en promedio una vez cada 25 años durante un lapso de tiempo muy largo. Esto no quiere decir que cada 25 años ocurra un gasto igual o mayor, sino que el tiempo promedio entre estos sucesos (igualación o excedencia del evento) es de 25 años.

En ocasiones se refiere al tiempo real entre estas excedencias como "*intervalo de recurrencia*". Entonces el intervalo de recurrencia promedio para un evento dado es igual al período de retorno de ese evento.

El concepto de período de retorno puede aplicarse a un evento mayor que un valor dado o a un evento menor que un valor dado y puede relacionarse a una probabilidad de excedencia o de no excedencia. Si una igualación o excedencia ocurre en promedio una vez cada 25 años, entonces la probabilidad de que ocurra el evento en un año cualquiera está dada según la definición por:

$$p = 1 / 25 = 0.04$$

Es decir el 4 %.

Entonces el período de retorno y la probabilidad están ligados por:

$$T = \frac{1}{P(X \geq x)} = \frac{1}{P} \quad (2.50)$$

la cual puede considerarse como una definición de período de retorno.

Es común expresar también que:

$$T = \frac{1}{1 - P(X \leq x)} = \frac{1}{1 - F(x)} \quad (2.51)$$

Esta expresión establece la relación entre período de retorno y función de distribución de probabilidad.

Para el caso de dos o más variables, el concepto de período de retorno puede extenderse con base en la definición , ya que según ésta el período de retorno es el inverso de la probabilidad de excedencia. Por ejemplo para el caso de dos variables aleatorias $\{x, y\}$ se tendrá:

$$T = \frac{1}{P(X \geq x, Y \geq y)} \quad (2.52)$$

FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD MULTIVARIADAS

A continuación se presenta un resumen acerca de las propiedades de algunas funciones de densidad y de distribución multivariadas.

La Función Normal Multivariada.

Un vector aleatorio k -dimensional $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ tiene una distribución normal multivariada si y solo si cada combinación lineal no trivial de las k componentes de \bar{x} tiene una distribución normal univariada. La distribución de \bar{x} se denota por $Np(\mu, \Sigma)$ donde μ es un vector medio de $(k \times 1)$ con elementos $\mu_i = E(x_i)$ (medias) y Σ es una matriz de covarianza de $(k \times k)$ cuya elemento i, j es $Cov(x_i, x_j)$.

Si la matriz Σ es singular, entonces la distribución de \bar{x} está confinada a un subespacio en R^k con probabilidad 1.

Si la matriz Σ tiene rango completo, entonces la función de densidad de \bar{x} existe y es [30]:

$$f(\bar{x}) = (2\pi)^{-k/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{\mu})^T \Sigma^{-1}(\bar{x} - \bar{\mu})\right] \quad (2.53)$$

en R^k dimensiones.

Si $|\Sigma| = 0$ la distribución de \bar{x} se llama distribución normal singular o degenerada y la densidad no existe [27].

Para dos variables aleatorias $[x, y]$, con un coeficiente de correlación simple $\rho(x,y)$ de componentes $[x, y]$, la función de densidad de probabilidad normal bivariada es [57]:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{Q}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (2.54)$$

Donde:

$$Q = \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \quad (2.55)$$

μ_x = Media de los datos x

μ_y = Media de los datos y

σ_x = Desviación estándar de los datos x

σ_y = Desviación estándar de los datos y

ρ = Coeficiente de correlación simple entre datos $[x, y]$.

Se cumple además que:

$$\sigma_x > 0 \quad \sigma_y > 0 \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

Las distribuciones marginales de x, y se obtienen integrando con respecto a y de $-\infty$ a ∞ para la distribución en x, y con respecto a x de $-\infty$ a ∞ para la distribución en y.

Las distribuciones marginales resultan también normales:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \quad (2.56)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right\} \quad (2.57)$$

Como podemos observar si las variables $[x, y]$ son independientes, entonces se tendrá que $\rho = 0$, lo que sustituido en la ecuación (2.54), nos permite factorizarla conduciendo a que es posible expresar simplemente:

$$f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$$

Cabe mencionar que para que se cumpla la independencia de las variables no es suficiente que $f(x, y)$ pueda factorizarse, sino que además los factores resultantes deben ser iguales a las funciones de densidad marginales de las propias variables.

Si aplicamos los conceptos de distribuciones condicionales a la función normal bivariada, resulta que:

$$f(y|x) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{y - \mu_y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}} \right]^2 \right\}}{\sqrt{2\pi} \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}} \quad (2.58)$$

Puesto que $[x]$ tiene un valor fijo, $[y]$ es la única variable aleatoria y la ecuación anterior muestra que $[y]$ posee una distribución normal con media:

$$\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$$

y desviación estándar:

$$\sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}$$

Resultados análogos se obtienen para la distribución condicional de x , luego entonces, las distribuciones condicionales de una distribución normal de dos variables son también normales.

La Función Log-Normal Multivariada.

Hagamos $y_i = \log x_i$ y tomemos $y' \equiv (y_1, \dots, y_k)$ y, además de definir el vector logarítmico como sigue:

$$\overline{\log x} \equiv \begin{bmatrix} \log x_1 \\ \vdots \\ \log x_k \end{bmatrix}, \quad x'^T \equiv (x_1, \dots, x_k)$$

Si $y : k \times 1$ sigue la ley de distribución normal $N[\mu, \Sigma]$ entonces \bar{x} se dice que sigue una distribución multivariada log - normal cuya densidad es [27]:

$$f(\bar{x}) = (2\pi)^{-k/2} |\Sigma|^{-1/2} \prod_{i=1}^k x_i \exp \left[-\frac{1}{2} (\log \bar{x} - \bar{\mu})^T \Sigma^{-1} (\log \bar{x} - \bar{\mu}) \right] \quad (2.59)$$

para $x_i > 0, i=1, \dots, k$ y $f(x) = 0$ en todos los demás casos.

De esta forma, para el caso de dos variables aleatorias $[x, y]$, la función de densidad queda expresada explícitamente por [57]:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi xy \sigma_n(x) \sigma_n(y) \sqrt{1-\rho_n^2}} \exp \left\{ -\frac{Q_n}{2(1-\rho_n^2)} \right\} \quad (2.60)$$

Donde:

$$Q_n = \frac{(\text{Ln}x - \mu_n(x))^2}{\sigma_n(x)^2} + \frac{(\text{Lny} - \mu_n(y))^2}{\sigma_n(y)^2} - 2\rho_n \frac{(\text{Ln}x - \mu_n(x))(\text{Lny} - \mu_n(y))}{\sigma_n(x)\sigma_n(y)} \quad (2.61)$$

Siendo:

$\mu_n(x)$ = Media de los logaritmos de X.

$\mu_n(y)$ = Media de los logaritmos de Y.

$\sigma_n(x)$ = Desviación estándar de los logaritmos de X.

$\sigma_n(y)$ = Desviación estándar de los logaritmos de Y.

ρ_n = Coeficiente de correlación simple entre los logaritmos de x y los logaritmos de y.

De la misma forma que para la distribución normal bivariada, a partir de las definiciones se pueden determinar las expresiones correspondientes a las distribuciones marginales y las distribuciones condicionales.

Las distribuciones marginales resultantes, $f_x(x)$ y $f_y(y)$ son ambas log-normales.

Funciones Multivariadas de Valores Extremos.

En general, las distribuciones de valores extremos han sido ampliamente utilizadas para el ajuste de la distribución de eventos hidrológicos extremos, como por ejemplo los gastos máximos de un río, desde su introducción en este campo por Gumbel [21].

Sea $\bar{X} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})$ un vector aleatorio k-dimensional con función de distribución:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(X^{(j)} < x_j, 1 \leq j \leq k) \quad (2.62)$$

Es decir:

$$F(\bar{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(x^{(1)} < x_1, x^{(2)} < x_2, \dots, x^{(k)} < x_k) \quad (2.62')$$

Sean también $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ copias independientes de \bar{x} .

Tomando además:

$$Z_n^{(j)} = \max(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)}) \quad (2.63)$$

Es posible introducir la notación:

$$\bar{Z}_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, \dots, Z_n^{(k)}) \quad (2.64)$$

El vector dado en la expresión (2.64) es el correspondiente a los máximos valores de los vectores aleatorios.

Supongamos que existen secuencias $\bar{a}_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(k)})$ y $\bar{b}_n = (b_n^{(1)}, b_n^{(2)}, \dots, b_n^{(k)})$ de vectores (no aleatorios) tales que para cada j , $1 \leq j \leq k$, $b_n^{(j)} > 0$, y que la función de distribución $F^n(a_n^{(1)} + b_n^{(1)}Z_1, \dots, a_n^{(k)} + b_n^{(k)}Z_k)$ del vector normalizado $(\bar{Z}_n - \bar{a}_n)/\bar{b}_n$, en el entendido que cada operación se lleva a cabo componente a componente, converge débilmente a una función de distribución $H(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$, cuyas marginales univariadas $H_j(Z_j)$, $1 \leq j \leq k$ son no degeneradas.

Tal función de distribución multivariada $H(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ se llama función de distribución de valores extremos (para máximos en este caso) [16].

Lo antes expuesto recibe el nombre de "*Postulado de Estabilidad*" dentro de la teoría de los valores extremos [16].

Se tiene además que para que una distribución multivariada sea de valores extremos es necesario pero no suficiente que las marginales sean de valores extremos [16].

Lo expresado en los párrafos anteriores es una extensión del teorema del límite central dentro de la teoría de los valores extremos. Este teorema fue establecido primeramente por Fisher y Tippett en 1928 [13] y probado después en forma general por Gnedenko en 1943 [26].

Dentro de los hallazgos principales en la teoría de los valores extremos se ha encontrado que para que se cumplan las suposiciones anteriores, con respecto a los vectores a_n y b_n , las marginales univariadas deben ser alguna de los siguientes tipos [21]:

Tipo I. Distribución Gumbel o Doble exponencial

$$F_1(x) = \exp(-\exp(-x)) \quad -\infty < x < \infty \quad (2.65)$$

Tipo II. Distribución Fréchet

$$F_2(x) = 0 \quad x \leq 0 \quad (2.66a)$$

$$F_2(x) = \exp(-x^{-\alpha}) \quad x > 0, \alpha > 0 \quad (2.66b)$$

Tipo III. Distribución Weibull

$$F_3(x) = 1 \quad x > 0 \quad (2.67a)$$

$$F_3(x) = \exp[-(-x)^\alpha] \quad x \leq 0, \alpha > 0 \quad (2.67b)$$

Estos tres tipos, que usualmente se designan por nombres diferentes, son también referidos como las distribuciones de la primera, segunda y tercera asíntota o tipo respectivamente.

De estas se ha encontrado que la distribución Weibull o de valores extremos Tipo III es aplicable a problemas de valores mínimos más que máximos de las variables aleatorias [25].

Por otro lado, también es frecuente que la distribución Gumbel o Tipo I represente en forma convincente la distribución de gastos máximos en inundaciones y otros fenómenos meteorológicos extremos [16].

Algunas distribuciones univariadas se han desarrollado a partir de soluciones particulares del postulado de estabilidad, el cual debe satisfacerse en cualquier distribución de extremos.

Jenkinson en 1955 [28], obtuvo la solución general de la ecuación funcional que deben satisfacer los valores extremos (postulado de estabilidad), como habían establecido Fisher y Tippett en 1928. La solución resultante fue designada por autores posteriores a él como Distribución General de Valores Extremos o (GVE), la cual representa directamente las distribuciones de valores extremos Tipos II y III. La distribución Tipo I resulta una condición límite de la distribución GVE.

Cada tipo de distribución está caracterizado por el valor del parámetro de forma como sigue:

- a) La distribución Gumbel o de valores extremos Tipo I, con un parámetro de forma igual a cero.
- b) La distribución Fréchet o de valores extremos Tipo II, cuyo parámetro de forma es negativo.
- c) La distribución Weibull o de valores extremos Tipo III, con un parámetro de forma positivo.

La distribución general de valores extremos o GVE para una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución acumulada:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left[1 - \frac{(x-u)}{\alpha} k \right]^{1/k} \right\} \quad (2.68)$$

donde:

u = parámetro de ubicación

α = parámetro de escala, ($\alpha > 0$)

k = parámetro de forma

Propiedades básicas de las distribuciones multivariadas de valores extremos.

Sea $\bar{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)})$ un vector aleatorio y $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ un punto arbitrario del espacio k -dimensional. La función de distribución $F(\bar{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ se define como:

$$F(\bar{x}) = P(X^{(1)} < x_1, X^{(2)} < x_2, \dots, X^{(k)} < x_k) \quad (2.69)$$

De las propiedades elementales se tiene que $F(\bar{x})$ es no decreciente en cada una de las variables x_j , $1 \leq j \leq k$. Más aún, si $x_j \rightarrow -\infty$ para una j , entonces $F(\bar{x}) \rightarrow 0$.

Por otro lado, si $x_j \rightarrow \infty$, entonces $F(\bar{x})$ tiende a una distribución $(k-1)$ dimensional, que es la función de distribución del vector obtenido a partir de \bar{X} quitando esa componente j -ésima. Este proceso se puede repetir hasta obtener la distribución marginal para cada variable $F_j(x)$ de $X^{(j)}$.

Como consecuencia particular de esto, se obtiene que $F(\bar{x})$ determina en forma única a todas las marginales. Sin embargo lo contrario no es verdadero, ya que existen varias posibilidades de $F(\bar{x})$ para marginales dadas $F_j(x)$, $1 \leq j \leq k$, aunque no existe una completa libertad en la elección de $F(\bar{x})$. El teorema siguiente muestra que las distribuciones $F_j(x)$, $1 \leq j \leq k$ imponen restricciones en $F(\bar{x})$. [16]

Teorema. - Fronteras de Fréchet.

Sea $F(\bar{x})$ una función de distribución k -dimensional con marginales $F_j(x)$, $1 \leq j \leq k$. Entonces, para todas las x_1, x_2, \dots, x_k , se cumple que:

$$\max\left(0, \sum_{j=1}^k F_j(x_j) - k + 1\right) \leq F(x_1, \dots, x_k) \leq \min(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)) \quad (2.70)$$

Aunque para k grandes, la frontera inferior tiende a ser trivial, en el caso bivariado ($k=2$) es una guía útil en la construcción de distribuciones bivariadas con marginales dadas [16].

Otra propiedad interesante de las distribuciones multivariadas de valores extremos es la presentada por Galambos [15] y que fue introducida previamente por Tiago de Oliveira [54], consiste en la desigualdad siguiente:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_k(x_k) \quad (2.71)$$

La expresión anterior implica que las componentes de un vector aleatorio con función de distribución $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ (de valores extremos) están correlacionadas positivamente.

Algunos autores han estudiado el caso especial de las distribuciones bivariadas de valores extremos y han extendido sus postulados a funciones multivariadas, como por ejemplo Tiago de Oliveira [54], Gumbel [18], Marshall y Olkin y Mardia [16].

Ya que existen muchas distribuciones para un grupo dado de marginales, se han propuesto varios modelos entre los que destacan, la distribución Morgenstern, la Gumbel I y II [18], la Marshall y Olkin y la Mardia [46].

Gumbel [20] ha mostrado que existen esencialmente tres posibles funciones para distribuciones bivariadas de valores extremos para máximos, a saber:

- 1.- Tipo Bigumbel, en donde las dos marginales son Gumbel.
- 2.- Tipo Gumbel-GVE, en donde una de las marginales es Gumbel y la otra es general de valores extremos.
- 3.- Tipo Bigeneral de valores extremos, en donde ambas marginales son tipo GVE.

Para estas distribuciones existen básicamente dos clases de modelos, los diferenciables y los no diferenciables [46]. Entre los primeros se encuentran el logístico y el mixto, presentados a continuación y entre los segundos el biextremo, el natural y el Gumbel.

Los resultados obtenidos por Tiago de Oliveira [54] y Gumbel y Mustafi [23] consideran explícitamente para el caso biviado dos posibles funciones de distribución de probabilidades diferenciables:

El modelo mixto:

$$F_{XY}(x_1, x_2) = F_X(x_1) F_Y(x_2) \exp \left\{ \alpha \left[\frac{1}{-\ln F_X(x_1)} + \frac{1}{-\ln F_Y(x_2)} \right]^{-1} \right\} \quad (2.72)$$

Y el modelo logístico:

$$F_{XY}(x_1, x_2) = \exp \left(- \left\{ \left[-\ln F_X(x_1) \right]^m + \left[-\ln F_Y(x_2) \right]^m \right\}^{\frac{1}{m}} \right) \quad (2.73)$$

Donde:

$F_X(x_1)$ y $F_Y(x_2)$ ($X, Y = 1, 2, 3$) son las tres posibles distribuciones marginales mencionadas anteriormente en las ecuaciones (2.65) a (2.67).

El segundo recibe tal nombre ya que la diferencia entre dos marginales Gumbel reducidas sigue la distribución logística, mientras que el modelo mixto tiene la función de dependencia resultante de una mezcla de funciones para los casos de independencia y completa dependencia cuando las marginales son Gumbel.

En las expresiones anteriores x es una variable estandarizada y α y m son parámetros de asociación restringidos a:

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{y} \quad m \geq 1 \quad (2.74)$$

Los casos con $\alpha=0$ o $m=1$ corresponden al hecho de que $[x, y]$ sean estadísticamente independientes, de tal forma que las expresiones se simplifican solamente al producto de las marginales.

De todos los modelos, el logístico parece ser el más apropiado para la aplicación en problemas de análisis de frecuencias debido a su mayor flexibilidad y más amplia aplicabilidad [46], razón por la cual se mencionan características y detalles adicionales acerca de éste.

La extensión multivariada del modelo logístico ha sido establecida por Gumbel [19] como:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots; m) = \exp\left(-\left\{\left[-\ln F_1(x_1)\right]^m \cdot \left[-\ln F_2(x_2)\right]^m \cdot \left[-\ln F_3(x_3)\right]^m \cdot \dots\right\}^{\frac{1}{m}}\right) \quad (2.75)$$

donde:

$F_i(x_i)$ es la distribución marginal de x_i

m es un parámetro de asociación ($m \geq 1$)

Si se toma la ecuación (2.73), se puede escribir para el caso bivariado en forma simplificada que:

$$F(x_1, x_2) = \exp\left\{-\left[\left(-\ln F_X(x_1)\right)^m + \left(-\ln F_Y(x_2)\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}\right\} \quad (2.73)$$

La cual es la forma general del modelo de esta distribución según Gumbel [18] y es conocida como distribución bivariada Gumbel tipo II.

En la ecuación (2.73):

$F(x_1, x_2)$ es la distribución acumulada bivariada de x_1, x_2 .

m es el parámetro de asociación que cumple con $m \geq 1$.

$F_1(x_1)$ es la distribución marginal de x_1 .

$F_2(x_2)$ es la distribución marginal de x_2 .

El parámetro de asociación m guarda estrecha relación con el coeficiente de correlación lineal ρ de la forma siguiente [23]:

$$\rho = \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.76)$$

El coeficiente de correlación lineal está definido como [55]:

$$\rho = \frac{\text{Cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} \quad (2.77)$$

donde:

$\text{Cov}(x_1, x_2)$ = Covarianza entre x_1, x_2 .

σ_u = desviación estándar de u .

Esto implica que para este modelo se cumple que $0 \leq \rho \leq 1$.

En forma general se tiene que si $m = 1$ se tiene el caso independiente, el cual resulta simplemente:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k; 1) = F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_k(x_k) \quad (2.78)$$

Si $\rho = 1, m = \infty$, la función de distribución multivariada es:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k; \infty) = \min[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_k(x_k)] \quad (2.79)$$

el cual es el caso diagonal y ha sido demostrado por Johnson y Kotz [31].

En el modelo mixto, cuando $\alpha = 0$ se tiene el caso independiente y cuando $\alpha = 1$ se presenta completa dependencia, pero no es el caso diagonal [54].

La expresión analítica que relaciona el parámetro de asociación α con el coeficiente de correlación fue obtenida para el caso bivariado por Tiago de Oliveira y resulta [47]:

$$\rho = \frac{6}{\pi^2} \left[\arccos \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2 \quad (2.80)$$

Cuando las distribuciones marginales tienen una distribución de valores extremos como la de la ecuación (2.65), es decir tipo I (Gumbel), el modelo logístico general proporciona la distribución bivariada de valores extremos Bigumbel, que en forma explícita es [46]:

$$F(x_1, x_2) = \exp \left\{ - \left[\exp \left(-m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \right]^{1/m} \right\} \quad (2.81)$$

Cuya función de densidad es:

$$\exp(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2})^{(1/m)-2} \{ m - 1 + [\exp(-m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1}) + \exp(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2})]^{1/m} \}$$

Donde:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \exp(-m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1}) \exp(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2}) [\exp(-m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1}) + \exp(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2})]^{1/m} \quad (2.82)$$

$u_1, u_2, \alpha_1, \alpha_2$ son los parámetros de ubicación y escala del modelo bivariado.

Extensiones a los casos de más de dos variables pueden efectuarse en forma prácticamente inmediata.

Es preciso mencionar que se recomienda la utilización de la metodología de la máxima verosimilitud para la estimación de los parámetros de la distribución bivariada Bigumbel debido a sus características de consistencia en la estimación de parámetros de funciones de densidad complejas. Esta característica no se encuentra fácilmente en otros métodos de estimación de parámetros. Los detalles sobre la aplicación se pueden encontrar en [46]. A continuación se presentan brevemente los conceptos en los que está basada la metodología.

La función de verosimilitud de n variables aleatorias está definida como la densidad conjunta de las n variables y es una función de los parámetros.

Si $(x_{11}, x_{21}), \dots, (x_{1n}, x_{2n})$ es una muestra aleatoria de una densidad bivariada, la función de verosimilitud correspondiente es [40]:

$$L(x_1, x_2; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_{1i}, x_{2i}; \theta) \quad (2.83)$$

donde:

θ es el vector de los parámetros

$f(\cdot)$ es la función de densidad bivariada de (\cdot)

El máximo de $L(x_1, x_2; \theta)$ ocurre en el mismo punto que el máximo de $LL(x_1, x_2; \theta)$, la función logarítmica de verosimilitud, la cual es más fácil de manejar que la anterior.

La función general logarítmica de verosimilitud se puede escribir como:

$$LL(x_1, x_2; \theta) = \sum_{i=1}^n Lf(x_{1i}, x_{2i}; \theta) \quad (2.84)$$

Para la distribución Bigumbel (caso en el cual las marginales son ambas distribuciones Gumbel) la función logarítmica de verosimilitud resulta [46]:

$$LL(x_1, x_2, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, m) = -n(\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2) + \sum_{i=1}^n -m \left(\frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1} \right) - m \left(\frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2} \right) +$$

$$\ln \left(\exp \left(-m \left(\frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left(-m \left(\frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2} \right) \right) \right)^{\frac{1}{m} - 2} +$$

$$\ln \left[m - 1 + \left(\exp \left(-m \left(\frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left(-m \left(\frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2} \right) \right) \right)^{\frac{1}{m}} \right] -$$

$$\left(\exp \left(-m \left(\frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left(-m \left(\frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2} \right) \right) \right)^{\frac{1}{m}} \quad (2.85)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la distribución biviada de valores extremos Bigumbel, son aquellos valores para los cuales la ec.(2.85) es maximizada.

El modelo logístico para la distribución de valores extremos con marginales Gumbel, para el caso de tres variables aleatorias es:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \exp \left\{ \left[\exp \left(-m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) + \exp \left(-m \frac{x_3 - u_3}{\alpha_3} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (2.86)$$

Con función de densidad es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{-1} e^{1/m} e^c}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \exp(-E^{1/m}) \{ (2m^2 - 3m + 1) E^{1/m-3} + (3m-3) E^{2/m-3} + E^{3/m-3} \} \quad (2.87)$$

donde:

$$A = -m \left(\frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \quad B = -m \left(\frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \quad C = -m \left(\frac{x_3 - u_3}{\alpha_3} \right) \quad (2.88)$$

$$E = \exp A + \exp B + \exp C \quad (2.89)$$

Es recomendable también en este caso, utilizar el método de la máxima verosimilitud en la estimación de los parámetros de la función de distribución trivariada de valores extremos Gumbel.

Recordemos que la función de verosimilitud de k variables aleatorias se define como la densidad conjunta de ellas.

Si $(x_{11}, x_{21}, x_{31}), \dots, (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$ es una muestra aleatoria de una densidad trivariada, la correspondiente función de verosimilitud es:

$$L(x_1, x_2, x_3; \theta) = \prod_{i=1}^k f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}; \theta) \quad (2.90)$$

donde:

θ denota el grupo de parámetros que maximizan la función de verosimilitud L .

$f(\cdot)$ es la función de densidad trivariada.

El objetivo es encontrar los parámetros que maximizan la función L .

Nuevamente, la función logarítmica de verosimilitud es más fácil de manejar que la propia función de verosimilitud L .

Entonces se tendrá que:

$$LL(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \theta) = \sum_{i=1}^k \text{Ln } f(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \theta) \quad (2.91)$$

En forma explícita, la función logarítmica de verosimilitud resulta:

$$LL(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \theta) = -[\text{Ln}\alpha_1 + \text{Ln}\alpha_2 + \text{Ln}\alpha_3] \sum_{i=1}^k ABC(-E^{1/m}) \text{Ln}\{(2m^2 - 3m + 1)E^{1/m-3} + (3m-3)E^{2/m-3} + E^{3/m-3}\} \quad (2.92)$$

donde A, B, C y E son las expresiones descritas anteriormente en las ecs. (2.88) y (2.89).

Para el caso en que las muestras tengan diferentes longitudes de registro, el procedimiento de estimación de los parámetros por máxima verosimilitud presenta algunas variantes. Los detalles de estas metodologías pueden consultarse en la referencia [44] para el caso bivariado y en [12] para el caso trivariado.

"Se ha observado que las soluciones aproximadas de los problemas en las ramas ordinarias de la filosofía natural pueden obtenerse por una especie de abstracción, o más bien una limitación de los datos, esto nos permite resolver fácilmente la forma modificada de preguntar, mientras estemos seguros que las circunstancias modificadas afectan al resultado solamente de una manera superficial".

W. Thompson y P. G. Tait
Treatise on Natural Philosophy

CAPÍTULO III

ESTIMACIÓN DE AVENIDAS DE DISEÑO PARA OBRAS PARTICULARES EN REDES DE RÍOS

ANÁLISIS DE FRECUENCIAS EN REDES DE RÍOS.

La naturaleza aleatoria de las variables hidrológicas, tales como el escurrimiento o la precipitación ha sido reconocido desde hace siglos. El campo de la hidrología fue de las primeras áreas de la ingeniería en utilizar conceptos de estadística en un esfuerzo por analizar los fenómenos naturales.

El análisis de frecuencias es una de las técnicas estadísticas aplicadas en la hidrología para tratar de estimar las probabilidades asociadas con eventos futuros, generalmente de diseño.

Las primeras aplicaciones de este tipo de análisis fueron enfocadas al área de la estimación de avenidas. Sin embargo, en la actualidad casi cualquier fase de la hidrología está sujeta al análisis de frecuencias.

Como regla general, el análisis de frecuencia debería evitarse cuando se trabaja con registros menores a 10 años [55].

El ajuste de distribuciones de probabilidad a series de datos es un método de análisis de frecuencias. Sin embargo este análisis puede o no realizarse con hipótesis de distribución. Cuando no se utilizan, el investigador solo grafica los datos observados y utiliza su buen juicio para determinar la magnitud de eventos futuros con distintos periodos de retorno. Si se hacen hipótesis de distribución, la magnitud de dichos eventos se selecciona a partir de la línea de mejor ajuste según la distribución tomada. Es recomendable de cualquier manera, graficar los datos para tener una idea de que tan bien se ajustan éstos a la distribución considerada.

Una ecuación general para el análisis de frecuencias en hidrología fue propuesta por Chow [7]:

$$X_T = \bar{X} + KS \quad (3.1)$$

Dónde:

X_T = Gasto con un período de retorno T.

\bar{X} = Media de la serie de gastos pico.

S = Desviación estándar de la serie.

K = Factor de frecuencia que depende de la distribución de probabilidad considerada.

Es una función del nivel de probabilidad asignado a X_T .

En un análisis de frecuencias convencional, a partir de los gastos máximos anuales registrados en las estaciones de estudio, se obtiene el gasto pico de la avenida de diseño. Ya que en muy pocas ocasiones la muestra de datos es lo suficientemente grande, se procede a ajustar a esta una función de distribución de probabilidad, a partir de la cual se pueden obtener gastos con períodos de retorno mayores que el registrado. Una vez obtenido el gasto pico para el período de retorno de interés, se construye la avenida de diseño mediante algún procedimiento de mayoración.

Podemos entonces resumir que:

El análisis de frecuencias se utiliza principalmente para determinar la magnitud de un evento futuro con un determinado período de retorno. Aunque también puede utilizarse en forma inversa, es decir, a partir de un evento dado, ya sea pasado o futuro, determinar la probabilidad de su ocurrencia o su período de retorno.

En el caso de las redes de ríos, el análisis de frecuencias no está plenamente desarrollado, por lo que en este trabajo se presenta una metodología para su tratamiento. El punto básico de la metodología es precisamente tener en cuenta la combinación más desfavorable de los hidrogramas en los ríos individuales, según los efectos que estos ocasionan sobre la obra específica por diseñar, de tal forma que las características de la obra se hacen participar en la estimación de su propio evento de diseño.

El problema del análisis de frecuencias en redes de ríos puede plantearse de la siguiente manera:

Considérese una red de ríos, como la mostrada en la figura 3.1, en la cual la formación de las corrientes individuales mantienen una topología definida, de tal forma que en algún punto se tiene la confluencia de todas éstas.

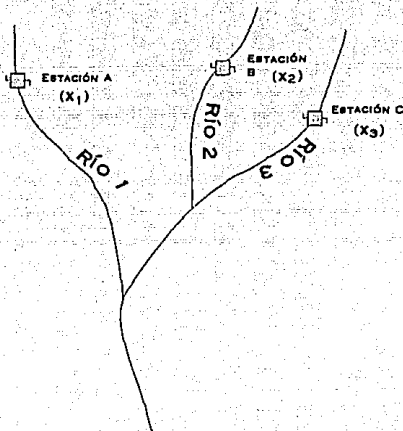


Figura 3.1

Llamemos A, B y C a las estaciones hidrométricas localizadas sobre los ríos 1, 2 y 3 respectivamente, y asociemos los gastos X_1 , X_2 y X_3 a esas mismas corrientes.

Supongamos que se tiene proyectada una obra hidráulica o varias de ellas en uno o más puntos dados o tramos de río definidos. Esta obra puede consistir por ejemplo en un bordo longitudinal de protección, un bordo perimetral, un vertedor lateral de excedencias o alivio o incluso una obra de gran magnitud, como una presa.

Consideremos como ejemplo. las obras mostradas en la figura 3.2.

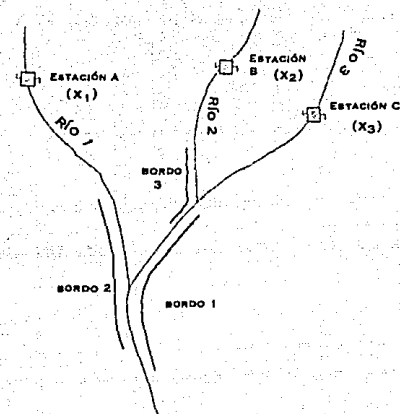


Figura 3.2

La obra de la figura 3.2 corresponde a la construcción de bordos de protección longitudinales en ciertos tramos de río, los cuales son históricamente propensos al desborde.

Como se sabe, uno de los datos básicos para el diseño de ésta o cualquier otra obra hidráulica, es contar precisamente con la avenida de diseño correspondiente al periodo de retorno elegido previamente.

Para el diseño de esta obra en particular, es necesario conocer las características de elevaciones máximas de la superficie del agua en los tramos a proteger, dado un riesgo predeterminado, asociado al periodo de retorno de la avenida de diseño utilizada en el dimensionamiento de la misma.

La selección de un período de retorno de 500 años por ejemplo, corresponde en forma aproximada a aceptar que existe una probabilidad del 5% de que el evento con período de retorno de 500 años sea igualado o excedido durante los primeros 25 años, que puede ser por ejemplo, la vida esperada de la obra. Estos datos resultan de aplicar la expresión siguiente [35]:

$$J = 1 - (1 - p)^N \quad (3.2)$$

donde:

p = Probabilidad de la avenida con periodo de retorno T . ($p = 1/T$)

J = Probabilidad de que la avenida sea igualada o excedida.

N = Periodo o vida esperada del proyecto en años.

La pregunta obligada en el diseño de una obra hidráulica en una red de ríos es: Con referencia en la figura 3.2 ¿Cuales deben ser las características de los eventos presentados en los sitios correspondientes a las estaciones hidrométricas, tales que éstos arrojen el periodo de retorno de diseño requerido en el sitio de la obra?. O bien, dicho de otra manera, ¿ Como se relaciona el periodo de retorno del evento de diseño en el sitio de la obra, con los períodos de retorno de los eventos correspondientes a los sitios en los cuales se dispone de datos medidos ?

Resulta evidente, que si se dispone de estaciones de medición en el sitio exacto de la obra, se requerirá solamente de efectuar un análisis de frecuencias convencional univariado, digamos de gastos máximos anuales o alguna otra variable de interés, para después extrapolar los registros al periodo de retorno requerido (el correspondiente al diseño de la obra). Sin embargo, en el caso más general, no se dispone de tales estaciones, por lo cual debe plantearse una metodología para el tratamiento de este tipo de problemas.

Esta metodología pretende dar respuesta a la pregunta que muchos hidrólogos se plantean en el caso del diseño de una obra dentro de una red hidrográfica y que básicamente consiste en: Si se fija el período de retorno de diseño de la obra ¿Cuáles serán los períodos de retorno de los eventos en los sitios de las estaciones?.

La solución a esta cuestión se plantea de la forma descrita a continuación:

Consideremos que en las estaciones hidrométricas A, B y C se dispone de los registros correspondientes a los gastos máximos anuales. Aquí se hace referencia a una red de tres corrientes, sin embargo, los conceptos pueden ser extendidos a redes de un mayor orden en forma prácticamente inmediata.

Como se había mencionado, es recomendable que los registros no tengan en ningún caso una longitud menor a los 10 años para la aplicación de cualquier tipo de análisis de frecuencias.

El problema a resolver consiste fundamentalmente en que se desea conocer la avenida de diseño para una obra dada y para un período de retorno de diseño previamente elegido. Dicha avenida de diseño puede ser obtenida en el caso tratado en este trabajo, mediante un proceso de mayoración, a partir del gasto de diseño obtenido en la metodología.

Si se toma como el espacio total muestral a toda la red hidrográfica, entonces se puede escribir que la probabilidad de que se presenten simultáneamente los eventos $x_1 < X_1$, $x_2 < X_2$, $x_3 < X_3$, . . . , $x_k < X_k$, donde k es el número de variables aleatorias consideradas que es igual al número de corrientes individuales que forman la red y en las cuales se dispone de un registro de datos aceptable, estará dada por la expresión:

$$P(x_1 < X_1, x_2 < X_2, \dots, x_k < X_k) = F(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad (3.3)$$

donde:

$F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ es una función de distribución conjunta multivariada en k dimensiones.

El problema específico de como modelar análisis de gastos máximos aguas abajo de la confluencia de dos o más ríos, cuando hay información disponible aguas arriba de la confluencia ha sido estudiado [35] suponiendo la completa dependencia o la completa independencia como únicas opciones entre gastos máximos medidos en los sitios disponibles, pero sin realizar ningún proceso de optimización de la solución.

De los conceptos básicos de la probabilidad y las extensiones multivariadas resumidas en el capítulo II, se puede establecer la metodología para el tratamiento del caso en el cual los eventos en las corrientes individuales guardan cierta dependencia.

Debido a la naturaleza de las variables aleatorias tratadas en este caso (gastos máximos anuales) se ha considerado pertinente, para la realización de este trabajo, la utilización de las funciones de distribución multivariadas de valores extremos, las cuales han sido introducidas en el capítulo II de este mismo trabajo.

Entonces, se tiene que si $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ es una función de distribución multivariada de valores extremos, son válidas ciertas propiedades características, las cuales han sido establecidas en el capítulo anterior:

1.- Fronteras de Fréchet, dadas en la ecuación (2.70):

$$\max\left(0, \sum_{j=1}^k F_j(x_j) - k + 1\right) \leq F(x_1, \dots, x_k) \leq \min(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k))$$

2.- Desigualdad para valores extremos [15], según la ecuación (2.71):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_k(x_k)$$

Introduzcamos la notación siguiente, con el fin de simplificar la misma en el análisis de las propiedades anteriores:

$$\bar{z}_k = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) \tag{3.4}$$

De tal forma que se puede simplificar la notación en las expresiones (2.70) y (2.71), en el miembro correspondiente a la función de distribución multivariada en k dimensiones.

Con efecto del análisis de los períodos de retorno asociados a los eventos, dentro de dichas expresiones, será necesario primeramente hacer una transformación en las funciones de distribución. Tales funciones de distribución son funciones de no excedencia, ya que están definidas para el caso del evento $(x_1 < X_1, x_2 < X_2, \dots, x_k < X_k)$, de tal forma que para la aplicación del concepto de período de retorno, el cual está definido como el recíproco de la probabilidad de excedencia (ecuación 2.52), se debe tomar en cuenta el complemento del evento, es decir $(x_1 \geq X_1, x_2 \geq X_2, \dots, x_k \geq X_k)$.

Con apoyo en la siguiente figura es posible demostrar este hecho para el caso bidimensional y posteriormente extenderlo al caso k-dimensional.

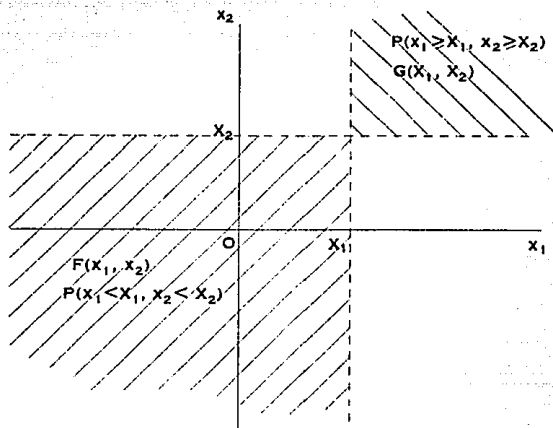


Figura 3.3

En la figura 3.3 se puede observar que el evento complementario puede inferirse mediante los axiomas básicos de la probabilidad en la forma mostrada a continuación.

Se tiene, ya que la suma de todas las probabilidades debe ser la unidad, que:

$$P(x_1 < X_1) + P(x_2 < X_2) - P(x_1 < X_1, x_2 < X_2) + P(x_1 \geq X_1, x_2 \geq X_2) = 1 \quad (3.5)$$

Por lo que entonces es también válido:

$$F_1(X_1) + F_2(X_2) - F_{12}(X_1, X_2) + P(x_1 \geq X_1, x_2 \geq X_2) = 1 \quad (3.6)$$

De donde se obtiene que:

$$P(x_1 \geq X_1, x_2 \geq X_2) = 1 - F_1(X_1) - F_2(X_2) + F_{12}(X_1, X_2) \quad (3.7)$$

Y por definición se tiene que:

$$T_{12} = \frac{1}{P(x_1 \geq X_1, x_2 \geq X_2)} = \frac{1}{1 - F_1(X_1) - F_2(X_2) + F_{12}(X_1, X_2)} \quad (3.8)$$

Es decir que la relación entre $F(X_1, X_2)$ y la probabilidad del evento complementario no es inmediata por el complemento a la unidad, sino a través de la ecuación (3.8).

Notemos ahora, que $P(x_1 \geq X_1, x_2 \geq X_2)$ es precisamente la intersección de los eventos $P(x_1 \geq X_1)$ y $P(x_2 \geq X_2)$, por lo que la expresión (3.8) se puede extender al caso k -dimensional mediante la aplicación de la fórmula de inclusión - exclusión presentada en la expresión (2.13) del capítulo anterior y que es precisamente la generalización al caso de la intersección de k eventos simples.

Esta fórmula indica que:

$$P(\bigcap_{i=1}^k C_i') = 1 - P(\bigcup_{i=1}^k C_i) \quad (3.9)$$

donde la probabilidad de la unión de los eventos está dada por la ecuación (2.10).

$$P(\bigcup_{i=1}^k C_i) = \sum_{i=1}^k P(C_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P(C_{i_1} \cap C_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}) - \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_k}) \quad (3.10)$$

y además:

C_i , ($i = 1, 2, \dots, k$) son los eventos simples arbitrarios.

Si tomamos que los eventos sean tales que:

$$C_i = [x_i < X_i] \quad (3.11)$$

Entonces se tendrá:

$$C_i' = [x_i \geq X_i] \quad (3.12)$$

La fórmula (3.9) será aplicable tal cual y de esta forma el recíproco de $P(\bigcap_{i=1}^k [x_i \geq X_i])$ será el período de retorno conjunto de todos los eventos $x_i \geq X_i$, es decir que se cumplirá que:

$$T_{1,2,\dots,k} = \frac{1}{P(\bigcap_{i=1}^k [x_i \geq X_i])} = \frac{1}{P[x_1 \geq X_1, x_2 \geq X_2, \dots, x_k \geq X_k]} \quad (3.13)$$

O bien, se puede expresar también:

$$T_{1,2,\dots,k} = \frac{1}{1 - P\left(\bigcup_{i=1}^k [X_i < X_i]\right)} \quad (3.14)$$

De donde:

$$T_{1,2,\dots,k} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^k P(X_i < X_i) + \sum_{i < j} P(X_i < X_i \cap X_j < X_j) - \dots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} P(X_{i_1} < X_{i_1} \cap X_{i_2} < X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_k} < X_{i_k})} \quad (3.15)$$

Y se tiene que basados en la figura 3.3:

$$P(X_i < X_i) = F(X_i) \quad (3.16)$$

$$P(X_{i_1} < X_{i_1} \cap X_{i_2} < X_{i_2}) = F(X_{i_1}, X_{i_2}) \quad (3.17)$$

Por lo que incluyendo funciones de distribución de probabilidad, la expresión 3.15 resulta:

$$T_{1,2,\dots,k} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^k F(X_i) + \sum_{i < j} F_{i,j}(X_i, X_j) - \dots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} F_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})} \quad (3.18)$$

Analizamos ahora las desigualdades proporcionadas por las propiedades de las funciones de distribución multivariadas de valores extremos, estableciendo las relaciones de los resultados con el concepto de periodo de retorno.

Estudiemos primeramente la frontera inferior de Fréchet, de acuerdo con la cual se debe cumplir:

$$\max\left(0, \sum_{j=1}^k F_j(x_j) - k + 1\right) \leq F(x_1, \dots, x_k) \quad (3.19)$$

Observemos lo que sucede explícitamente en el caso de $k = 2$, es decir, de una función biviada.

$$\max(0, F_1(x_1) + F_2(x_2) - 2 + 1) \leq F(x_1, x_2)$$

$$\max(0, F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1) \leq F(x_1, x_2)$$

Notamos que no solo en el caso biviado, sino en general en el caso k -dimensional, el valor mínimo que puede tomar $F(x_1, x_2)$ es cero, con lo cual se cumple la frontera inferior del axioma básico de la probabilidad, $0 \leq p \leq 1$.

Ahora bien, supongamos que x_1 y x_2 son tales que $F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 > 0$, entonces se tendrá que:

$$F(x_1, x_2) \geq F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1$$

O bien:

$$F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 - F(x_1, x_2) \leq 0$$

y entonces:

$$1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2) \geq 0$$

Recordando que para el caso bidimensional se cumple la expresión (3.8):

$$T_{12} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2)}$$

La expresión anterior indica que el período de retorno tendrá un rango de 0 a ∞ , es decir será siempre positivo.

Por otro lado, esta desigualdad es útil en la construcción de distribuciones multivariadas cuando se tienen las marginales dadas, ya que las distribuciones marginales imponen ciertas condiciones en la distribución multivariada, como se estableció en el capítulo II.

A partir de la frontera superior de Fréchet, la cual nos indica que:

$$F(x_1, \dots, x_k) \leq \min(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)) \quad (3.20)$$

Podemos efectuar el análisis siguiente:

La expresión anterior indica que la función de distribución conjunta multivariada debe ser menor o igual que la menor de las funciones de distribución univariadas marginales.

El signo de igualdad se cumple de hecho, cuando todas las variables aleatorias, excepto x_1 , por ejemplo, tienden a un límite infinito, es decir:

$$x_2 = x_3 = \dots = x_k \rightarrow \infty$$

entonces:

$$F_2(x_2) = F_3(x_3) = \dots = F_k(x_k) \rightarrow 1$$

La menor de las funciones de distribución marginales será sin duda alguna $F_1(x_1)$. Por otro lado, en este límite, la función conjunta es también igual a la marginal $F_1(x_1)$, por lo que la igualdad se cumple.

Con relación al período de retorno, podemos indicar lo siguiente.

Consideremos explícitamente el caso bivariado. Para este se cumple la ecuación (3.8):

$$T_{12} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_{12}(x_1, x_2)}$$

Si por ejemplo se tiene que $x_2 \rightarrow \infty$, entonces $F_2(x_2) \rightarrow 1$ y también $F_{12}(x_1, x_2) \rightarrow F_1(x_1)$, por lo cual en el límite el período de retorno será:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} T_{12} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - 1 + F_1(x_1)} = \infty$$

Por otro lado si $x_1 \rightarrow 0$, se tendrá que $F_1(x_1) \rightarrow 0$ y también $F_{12}(x_1, x_2) \rightarrow 0$ y en el límite se tendrá que:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} T_{12} = \frac{1}{1 - F_2(x_2)} = T_2$$

Lo mismo se tendrá cuando x_2 sea muy grande, sin llegar al infinito, ya que $F_{12}(x_1, x_2) \rightarrow F_1(x_1)$ y la igualdad se logra precisamente en $x_2 = \infty$.

Supongamos que se cumple que $F_1(x_1) < F_2(x_2)$, entonces, por la frontera superior de Fréchet, se tendrá que:

$$F_{12}(x_1, x_2) \leq F_1(x_1)$$

y por lo tanto:

$$0 \leq F_1(x_1) - F_{12}(x_1, x_2) \leq 1$$

entonces:

$$0 \leq F_1(x_1) - F_{12}(x_1, x_2) + F_2(x_2) \leq 1$$

y como el período de retorno está dado por la ecuación (3.8):

$$T_{12} = \frac{1}{1 - [F_1(x_1) + F_2(x_2) - F_{12}(x_1, x_2)]}$$

Está entonces garantizado que el período de retorno sea siempre positivo y mayor o igual a 1.

Se pueden asociar períodos de retorno individuales a las variables aleatorias x_1 y x_2 , calculados a partir de sus funciones de distribución marginales univariadas $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$ y llamarlos T_1 y T_2 , respectivamente.

$$T_1 = \frac{1}{1 - F_1(x_1)} \quad T_2 = \frac{1}{1 - F_2(x_2)} \quad (3.21)$$

De esta forma la frontera superior de Fréchet nos indica que el período de retorno conjunto será siempre positivo, mayor que la unidad y además mayor o igual que cualquiera de los períodos de retorno asociados a las funciones marginales univariadas T_1 y T_2 . Este último comentario se observa claramente en el siguiente análisis.

Supongamos que x_1 es muy pequeña, de tal forma que se cumpla $F_1(x_1) < F_2(x_2)$. Entonces también se cumplirá que $F_{12}(x_1, x_2) < F_1(x_1)$, por lo cual el período de retorno será según la ecuación (3.8):

$$T_{12} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_{12}(x_1, x_2)}$$

Si llamamos $[a]$ a la cantidad $[-F_1(x_1) + F_{12}(x_1, x_2)]$, se tendrá:

$$T_{12} = \frac{1}{1 - F_2(x_2) + a} = \frac{T_2}{a}$$

y ya que $[a]$ es un número entre cero y uno, a la vez que representa una probabilidad, se cumplirá que el período de retorno T_{12} será mayor o igual al período de retorno T_2 calculado a partir de la función marginal univariada correspondientes a x_2 .

La desigualdad presentada por Galambos [15], ecuación (2.71), indica que:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_k(x_k)$$

Observamos aquí que el miembro de la izquierda de la ecuación anterior puede escribirse, según la expresión (3.4), simplemente como $F(\bar{z}_k)$ y es una función de distribución multivariada de valores extremos en k dimensiones.

Por otro lado, el miembro de la derecha, es la misma función de distribución $F(\bar{z}_k)$, pero bajo la consideración de que las variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_k son estadísticamente independientes entre sí. Llamemos a este miembro $F^*(\bar{z}_k)$, donde el asterisco denota la condición de independencia estadística entre las variables y examinemos los períodos de retorno asociados a estas funciones.

De acuerdo a la ecuación (2.71), podemos expresar:

$$F(\bar{z}_k) \geq F^*(\bar{z}_k) \quad (3.22)$$

Por lo que de acuerdo a las relaciones entre funciones de distribución y períodos de retorno presentadas en el capítulo II de este mismo trabajo, se tiene explícitamente para el caso bivariado que según la ecuación (3.8):

$$T_{12} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_{12}(x_1, x_2)} \quad (3.23)$$

y también:

$$T^*_{12} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_1(x_1)F_2(x_2)} \quad (3.24)$$

ya que $F(x_1, x_2) \geq F(x_1)F(x_2)$ entonces se cumplirá:

$$1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2) \geq 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1)F(x_2)$$

por lo cual:

$$T_{12} \leq T^*_{12} \quad (3.25)$$

Entonces podemos decir que la condición de dependencia entre las variables aleatorias resulta más desfavorable que la correspondiente a la independencia completa de las mismas, dentro de la aplicación al análisis de frecuencias en redes de ríos con efecto de la estimación de las avenidas de diseño.

Este resultado puede extenderse mediante la aplicación de la fórmula de inclusión - exclusión a través de la ecuación (3.15), teniéndose que para tres variables aleatorias se cumple también que:

$$T_{123} \leq T^*_{123} \quad (3.26)$$

recordemos que el asterisco representa asociación con la independencia estadística.

Es posible entonces establecer la expresión general, la cual resulta ser:

$$T_{12\dots k} \leq T^*_{12\dots k} \quad (3.27)$$

Entonces en resumen, la condición de dependencia entre los gastos resulta más desfavorable que el caso en que los eventos se consideren como completamente independientes.

Regresemos ahora al planteamiento original del problema, representado gráficamente en la figura 3.2.

Sabemos que la ocurrencia conjunta de los eventos $x_1 < X_1, x_2 < X_2, \dots, x_k < X_k$, en donde X_i corresponde al gasto presentado en el río i , está dada por $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ y que se dispone también de la relación de esta función de distribución conjunta multivariada con el periodo de retorno asociado a la misma ocurrencia conjunta de los eventos, representada por la ecuación (3.22).

Para el caso de la figura 3.2 en la cual se tienen 3 corrientes individuales, el problema estará descrito por una función de distribución conjunta trivariada y de valores extremos, como se había establecido previamente. Por lo tanto en este caso se tendrá que el periodo de retorno conjunto está dado por la ecuación (3.18):

$$T_{1,2,\dots,k} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^k F_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} F_{i,j}(X_i, X_j) - \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} F_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})}$$

El resultado de esta expresión para el caso trivariado es:

$$T_{123} = \frac{1}{1 - F_1(X_1) - F_2(X_2) - F_3(X_3) + F_{12}(X_1, X_2) + F_{13}(X_1, X_3) + F_{23}(X_2, X_3) - F_{123}(X_1, X_2, X_3)} \quad (3.28)$$

la cual establece la expresión para el periodo de retorno conjunto en función de las funciones de distribución multivariadas.

En la ecuación (3.28), se tiene que $F_i(X_i)$, $i = 1, 2, 3$ y $F_{ij}(X_i, X_j)$, $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; i \neq j$ pueden calcularse a partir de la función trivariada $F_{123}(X_1, X_2, X_3)$ haciendo tender al infinito las variables aleatorias pertinentes, de acuerdo a lo siguiente:

$$F_1(X_1) = F(X_1, \infty, \infty) \quad (3.29)$$

$$F_2(X_2) = F(\infty, X_2, \infty) \quad (3.30)$$

$$F_3(X_3) = F(\infty, \infty, X_3) \quad (3.31)$$

$$F_{12}(X_1, X_2) = F(X_1, X_2, \infty) \quad (3.32)$$

$$F_{13}(X_1, X_3) = F(X_1, \infty, X_3) \quad (3.43)$$

$$F_{23}(X_2, X_3) = F(\infty, X_2, X_3) \quad (3.34)$$

Ahora bien, existen una infinidad de juegos de valores, representados por el vector (X_1, X_2, X_3) , los cuales satisfacen la ecuación (3.28) para un período de retorno T_{123} dado, el período de retorno de diseño precisamente.

Cada vector solución puede ser traducido a hidrogramas en las corrientes individuales a partir de procesos de mayoración representativos de la avenida de diseño.

Dichos hidrogramas, transitados por el modelo del problema, la red de ríos en este caso, producirán efectos distintos sobre el o los sitios de las obras.

Para el caso de diseño de bordos de protección longitudinales, una característica importante será sin duda, la elevación máxima de la superficie libre del agua en los sitios de la obra. Entonces cada combinación de gastos en los ríos, representada por el vector solución (X_1, X_2, X_3) tratada, arrojará un grupo de resultados de las variables de interés en los sitios bajo estudio, para un período de retorno T_{123} dado.

Resulta evidente que se tendrá en general, un vector solución para los gastos (X_1, X_2, X_3), tal que el efecto que los hidrogramas correspondientes producen sobre la obra a diseñar sea el más desfavorable, para el caso de los bordos de protección por ejemplo, tal vector solución será el que arroje una mayor elevación en la superficie libre del agua, para la cual se requerirá una cierta elevación en el bordo.

Con efecto de poder comparar las soluciones y elegir entre éstas la que resulte más desfavorable, se plantea el uso de una función Φ , la cual se ha definido de la forma siguiente:

$$\Phi_i = \int_{L_i} A_i [h(s)] ds \quad (3.35)$$

Donde:

Φ_i = Función característica de la solución para el bordo i

L_i = Coordenada curvilínea a lo largo del bordo i

A = Área de la sección transversal del bordo i , como función de $h(s)$

$h(s)$ = Elevación de la superficie libre del agua

s = Variable de integración, coordenada coincidente con el eje del bordo

i = Bordo en cuestión.

De esta manera, la función característica toma en cuenta el volumen de material requerido para la formación de los bordos, el cual mantiene una relación estrecha con el costo de los mismos.

Se considera para el caso de bordos de protección la siguiente sección genérica:

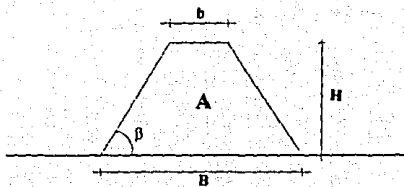


Figura 3.4

Así, el problema general queda planteado en la forma siguiente:

Para un período de retorno de diseño T (años) dado, una red de k ríos individuales e i bordos de protección:

$$\text{máx } \Phi_i = \int_{L_i} A_i [h(s)] ds \quad (3.36)$$

Sujeto a:

$$X_j > 0, \quad 1 \leq j \leq k \quad (3.37)$$

$$T_{1,2,\dots,k} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^k F_i(X_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} F_{i_1, i_2}(X_{i_1}, X_{i_2}) - \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 < \dots < i_k \leq k} F_{i_1, i_2, \dots, i_k}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})} \quad (3.38)$$

Casos particulares de la solución general son los correspondientes a la total independencia y a la total dependencia de los eventos en las corrientes individuales. Estos serán tratados a continuación, con efecto de establecer puntos de comparación entre todas las posibles soluciones.

El caso de total independencia.

Se ha demostrado ya (ec. 3.27) que la condición de dependencia entre los eventos es más desfavorable que la correspondiente a la total independencia entre estos, para el caso de la utilización de funciones de distribución multivariadas de valores extremos. De cualquier manera, esta condición de independencia total puede analizarse mediante la aplicación de la metodología general, estableciendo previamente algunos puntos importantes.

Entre las funciones de distribución de valores extremos se ha establecido que los modelos diferenciables y específicamente el modelo logístico propuesto por Gumbel [19] describe con buena aproximación el fenómeno. La extensión del modelo logístico esta dada por la expresión (2.75) como:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots; m) = \exp\left(-\left\{[-\text{Ln } F_1(x_1)]^m + [-\text{Ln } F_2(x_2)]^m + [-\text{Ln } F_3(x_3)]^m + \dots\right\}^{\frac{1}{m}}\right) \quad (2.75)$$

donde m es el parámetro de asociación que cumple con $m \geq 1$, el cual está ligado estrechamente con el coeficiente de correlación lineal múltiple.

En el capítulo II se ha establecido también que cuando $m = 1$, se tiene el caso de total independencia entre los eventos, lo cual equivale a tener un coeficiente de correlación nulo. Aplicando esta condición a la ecuación (2.75) se tiene:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots; 1) = \exp\{\text{Ln } F_1(x_1) + \text{Ln } F_2(x_2) + \text{Ln } F_3(x_3) + \dots\} \quad (3.39)$$

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots; 1) = F_1(x_1) F_2(x_2) F_3(x_3) + \dots \quad (3.39a)$$

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots; 1) = \prod_{i=1}^k F_i(x_i) \quad (3.40)$$

donde k es el número de dimensiones de la distribución (el número de corrientes individuales en la red hidrográfica).

Si sustituimos esta expresión en la ecuación (3.18), correspondiente al período de retorno, se tiene:

$$T_{1,2,\dots,k} = \frac{1}{1 - \prod_{i=1}^k F_i(x_i) + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} F_{i_1}(x_{i_1}) F_{i_2}(x_{i_2}) - \dots + (-1)^{k+1} \prod_{i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_k} F_{i_1}(x_{i_1}) F_{i_2}(x_{i_2}) \dots F_{i_k}(x_{i_k})} \quad (3.41)$$

De tal forma que para el caso bidimensional se tendrá que esta expresión general resulta:

$$T_{12} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_1(x_1) F_2(x_2)} \quad (3.42)$$

De acuerdo a la definición de período de retorno se puede escribir:

$$F_i(x_i) = \frac{T_i - 1}{T_i} \quad (3.43)$$

Lo que sustituido en la expresión (3.42) resulta en:

$$T_{12} = T_1 T_2 \quad (3.44)$$

Para el caso de tres variables aleatorias se tendrá, a partir de la ecuación (3.18):

$$T_{123} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) - F_3(x_3) + F_1(x_1)F_2(x_2) + F_1(x_1)F_3(x_3) + F_2(x_2)F_3(x_3) - F_1(x_1)F_2(x_2)F_3(x_3)} \quad (3.45)$$

Si sustituimos en esta expresión la relación entre período de retorno y función de distribución de probabilidad dada por la expresión (3.43):

$$F_i(x_i) = \frac{T_i - 1}{T_i}$$

Se obtiene:

$$T_{123} = T_1 T_2 T_3 \quad (3.46)$$

Para cuatro variables aleatorias se cumple de la misma forma que:

$$T_{1234} = T_1 T_2 T_3 T_4 \quad (3.47)$$

Por lo que la extensión al caso de k variables aleatorias puede realizarse por inducción, resultando:

$$T_{123\dots k} = T_1 T_2 T_3 \dots T_k \quad (3.48)$$

Hay que recordar de cualquier forma, que se ha demostrado que esta condición de independencia completa entre las variables resulta menos desfavorable que la condición de dependencia.

El caso de total dependencia.

Consideremos nuevamente la extensión multivariada del modelo logístico de valores extremos dado por la expresión (2.75):

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, m) = \exp\left\{-\left\{[-\ln F_1(x_1)]^m + [-\ln F_2(x_2)]^m + [-\ln F_3(x_3)]^m + \dots\right\}^{\frac{1}{m}}\right\}$$

En el caso en el que el coeficiente de correlación lineal múltiple tenga un valor muy cercano a la unidad, lo cual corresponde casi a la dependencia total, se tiene que el parámetro de asociación tenderá al infinito. En el límite se cumple que para $\rho = 1$, se tiene $m = \infty$.

Este caso, como se mencionó antes, fue analizado por Johnson y Kotz [28], los cuales encontraron que en este punto se presenta el caso diagonal, demostrando que se cumple la (ec. 2.79):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k; \infty) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_k(x_k)\}$$

la cual corresponde precisamente al límite de la frontera superior de Fréchet.

Se tiene además que se debe cumplir la ecuación (3.18) correspondiente al período de retorno:

$$T_{1,2,\dots,k} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^k F_i(X_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} F_{i_1 i_2}(X_{i_1}, X_{i_2}) - \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 < \dots < i_k \leq k} F_{i_1 i_2 \dots i_k}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})}$$

Planteemos aquí explícitamente el caso bivariado, en donde se cumpla que $F_1(x_1) < F_2(x_2)$. De acuerdo a la expresión (2.79) se tendrá también que:

$$F_{12}(x_1, x_2) = F_1(x_1) \tag{3.49}$$

Entonces, el período de retorno conjunto, de la ecuación (3.18) será:

$$T_{12} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_1(x_1)} \quad (3.50)$$

De donde se cumple que:

$$T_{12} = \frac{1}{1 - F_2(x_2)} = T_2 \quad (3.51)$$

Resulta entonces que el período de retorno conjunto T_{12} es igual al período de retorno asociado a la mayor de las funciones de distribución, T_2 en este caso.

En el caso tridimensional, el período de retorno conjunto está dado por la ec (3.28):

$$T_{123} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) - F_3(x_3) + F_{12}(x_1, x_2) + F_{13}(x_1, x_3) + F_{23}(x_2, x_3) - F_{123}(x_1, x_2, x_3)}$$

De donde si se cumple que $F_1(x_1) < F_2(x_2) < F_3(x_3)$, se tendrá por la expresión (2.79) que:

$$T_{123} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) - F_3(x_3) + F_1(x_1) + F_1(x_1) + F_2(x_2) - F_1(x_1)} \quad (3.52)$$

de donde se obtiene:

$$T_{123} = \frac{1}{1 - F_3(x_3)} = T_3 \quad (3.53)$$

Nuevamente, el período de retorno conjunto es igual al período de retorno asociado a la variable aleatoria que tiene la mayor función de distribución de probabilidad.

Se observa, que en el caso general, correspondiente a k dimensiones, las funciones de distribución siempre aparecen por pares de signos contrarios, de acuerdo a la expresión (3.18), con excepción de la máxima función de distribución, por lo cual se cumple en general que:

$$T_{123\dots k} = \frac{1}{1 - F_M(x_M)} \quad (3.54)$$

donde:

$$F_M(x_M) = \text{Máx} [F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_k(x_k)] \quad (3.55)$$

Esto quiere decir que la combinación de variables aleatorias, tales que $F_M(x_M)$ sea la mayor función de distribución, corresponde a un evento con un período de retorno T_M calculado a partir de ésta, y el cual es mayor que el obtenido bajo la consideración de dependencia parcial. Esto resulta del hecho de que a mayores funciones de distribución corresponden mayores períodos de retorno.

Entonces la dependencia total representa un evento con un período de retorno mayor y por lo tanto más desfavorable para la estimación de la avenida de diseño de la obra.

Ahora bien, cuando los eventos son completamente dependientes, es decir que uno no puede ocurrir sin la ocurrencia de los otros eventos, se tiene que la probabilidad de ocurrencia conjunta es igual a la probabilidad de ocurrencia de uno cualquiera de los eventos [34], ya que todas éstas probabilidades tendrán el mismo valor, por lo que se cumple:

$$F_1(x_1) = F_2(x_2) = \dots = F_k(x_k)$$

Entonces se tiene:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_1(x_1) = F_2(x_2) = \dots = F_k(x_k) \quad (3.56)$$

lo que sustituido en la ecuación 4.11, resulta en:

$$T_{12\dots k} = \frac{1}{1 - F_i(x_i)}$$

donde:

$$i = 1, 2, \dots, k$$

De la definición de período de retorno se tiene:

$$T_i = \frac{1}{1 - F_i(x_i)} \quad (3.57)$$

por lo que resulta que:

$$T_{12\dots k} = T_i \quad (3.58)$$

donde $i = 1, 2, \dots, k$

Es decir que se cumple para el caso k-dimensional que:

$$T_{12\dots k} = T_1 = T_2 = \dots = T_k \quad (3.59)$$

Entonces, el período de ocurrencia conjunta será igual a los períodos de retorno en las corrientes individuales.

De esta manera, para un período de diseño de una obra en particular previamente establecido mediante un análisis de riesgo, bastará obtener los eventos correspondiente a ese mismo período de retorno en las corrientes individuales. La ocurrencia simultánea de esos eventos generará la condición más desfavorable en la estimación de la avenida de diseño a utilizar en la obra.

Se puede entonces resumir que la condición de dependencia total entre las variables aleatorias es la más desfavorable en la estimación de avenidas de diseño en redes de ríos. Sin embargo, el aplicar la condición de total dependencia a todos los diseños significará sobrediseñar sistemáticamente las obras, con el consecuente aumento en el costo de las mismas. Por otro lado, existe evidencia que en el caso más general no se presenta total dependencia entre los eventos registrados en las corrientes individuales de una red de ríos, a menos que se trate de una cuenca muy pequeña con características fisiográficas homogéneas y ubicada en una zona con características climatológicas también homogéneas.

Cabe hacer mención que para el caso de total dependencia entre las variables aleatorias, el cual está descrito por $m = \infty$, se presenta un problema en el ajuste de los parámetros de la distribución, ya que este caso tanto en la función de distribución como en la función de densidad resultan indeterminaciones. En este sentido habrá que buscar alguna transformación adecuada.

Ante esta situación, se dispone de la metodología que toma en cuenta la dependencia parcial que pudiera observarse entre las variables aleatorias.

En el caso de análisis estadísticos multivariados aplicados a la hidrología es recomendable que las estaciones en las cuales se hacen las mediciones de los datos tengan un comportamiento de frecuencias de avenidas homogéneo.

Esta característica es básica en los métodos de análisis regional de frecuencias en hidrología, los cuales son utilizados para estimar la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos dentro de una cierta región basado en datos registrados en distintas estaciones hidrométricas.

En el análisis regional se explota dicha homogeneidad para producir estimaciones de eventos, que en la mayoría de los casos son más confiables que las obtenidas al utilizar únicamente los datos de una sola estación hidrométrica.

Es recomendable entonces, que los datos correspondientes a las estaciones que van a considerarse en el análisis multivariado, el ajuste de funciones de distribución conjunta en este caso, cumplan con alguna prueba de homogeneidad hidrológica regional. En el análisis regional es muy común aplicar la prueba de Langbein, el cual fue propuesto en la metodología de Dalrymple para este tipo de análisis hidrológico [10]. Los detalles de aplicación de esta prueba se describen en los párrafos siguientes.

Prueba de homogeneidad hidrológica regional.

Esta prueba se utiliza para verificar si las muestras de datos corresponden a una región hidrológica homogénea y está basado en conceptos estadísticos, como se muestra a continuación:

Si el error estándar de estimación de la variable reducida definida por [33]:

$$y = -\text{Ln}\left(-\text{Ln}\left(\frac{T-1}{T}\right)\right)$$

en la distribución de valores extremos tipo I está dado por:

$$\sigma_y = \frac{e^y}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{T-1}} \quad (3.60)$$

donde:

σ_y = desviación estándar de la muestra

T = período de retorno

n = longitud del registro

entonces, al adoptar una distribución normal para los estimados, el 95 % de éstos caerán dentro del rango $[\pm 2\sigma_y]$ del valor más probable.

Si el período de retorno de la estimación se toma como T = 10 años, entonces:

$$2\sigma_y = \frac{0.666 e^y}{\sqrt{n}} \quad (3.61)$$

Ya que para T = 10 años, la variable reducida en una distribución de valores extremos tipo I, según la expresión (3.60) es:

$$y = -\text{Ln}\left(-\text{Ln}\left(\frac{9}{10}\right)\right) = 2.2504 \quad (3.62)$$

por lo que

$$2\sigma_y = \frac{6.33}{\sqrt{n}}$$

y entonces los límites de confianza están dados por:

$$2.2504 \pm \frac{6.33}{\sqrt{n}} \quad (3.63)$$

Dalrymple proporciona una tabla [33] en la que se dan los límites de confianza inferior y superior en función de los períodos de retorno y para varias longitudes de la muestra. Estos datos se reproducen en la tabla 3.1. Con las expresiones (3.60) a (3.63) es posible calcular los valores precisos para cualquier valor de la longitud del registro [n].

Tabla 3.1 Límites de confianza para la prueba de homogeneidad hidrológica regional

Tamaño de la muestra	Límite Inferior $y - 2 \sigma_y$	Límite Inferior T_1 (años)	Límite Superior $y + 2 \sigma_y$	Límite Superior T_s (años)
5	-0.59	1.2	5.09	160
10	0.25	1.8	4.25	70
20	0.83	2.8	3.67	40
50	1.35	4.4	3.15	24
100	1.62	5.6	2.88	18
200	1.80	6.5	2.70	15
500	1.97	7.7	2.53	13
1000	2.05	8.3	2.45	12

El procedimiento utilizado para esta prueba consiste primero en graficar los periodos de retorno correspondientes a los límites inferior y superior de la tabla 3.1 contra la longitud del registro [n] en papel con escala de probabilidad o logarítmica. Esta gráfica se presenta en la figura 3.5.

Posteriormente, para cada estación de la región a probar se calcula la relación del evento para un periodo de retorno $T = 10$ años con el evento medio anual, y con estos resultados se calcula una relación promedio para toda la región.

El evento medio anual se toma como el evento con un período de retorno de 2.33 años. El valor de este evento es mucho más estable que la media aritmética, ya que esta estimación da un mayor peso a las avenidas medias que a las extremas, cuyos errores de medición son muy grandes, y por esta razón no está influenciado por un cambio en la inclusión o exclusión de una gran avenida, como la media aritmética [10].

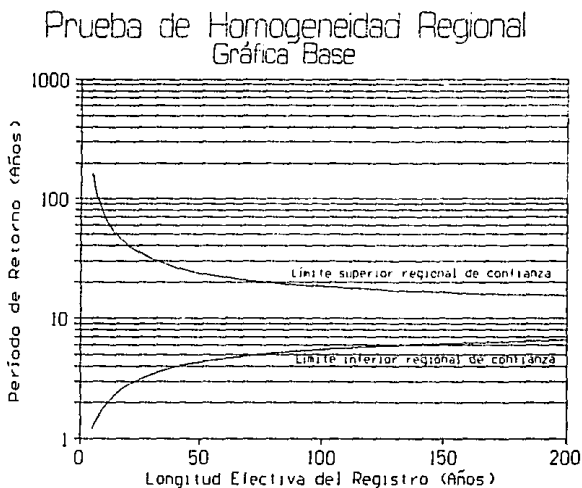


Figura 3.5

Después, la relación promedio para la región se multiplica por el evento medio anual para cada estación, lo cual proporciona un evento modificado con período de retorno original de 10 años. Los períodos de retorno correspondientes a estos eventos modificados, denominados T_m se calculan a partir de la muestra de datos o su función de distribución.

El período de registro de cada estación con medición, denominado n_m , se determina como el número de eventos anuales registrados más la mitad de los eventos inferidos o estimados para la estación (por correlación por ejemplo). Si no se han estimado eventos, la longitud del registro será el mismo período de medición.

Por último, los pares coordenados $[T_m, n_m]$ para cada estación se dibujan en la gráfica de prueba conteniendo a las curvas de T_1 y T_s (Figura 3.5). Cualquier estación para la cual su correspondiente punto graficado quede fuera de los límites de confianza se excluye de la región homogénea.

Con todos los antecedentes planteados hasta el momento es posible expresar el problema a resolver para el caso de de tres corrientes individuales, que es el caso tratado en este trabajo, de la siguiente manera:

Para un período de retorno de diseño T (años) dado.

$$\text{máx } \Phi_1 = \int_{t_1} A_1[h(s)] ds$$

sujeta a:

$$X_1 > 0$$

$$X_2 > 0$$

$$X_3 > 0$$

$$T_{123} = \frac{1}{1 - F(X_1) - F(X_2) - F(X_3) + F(X_1, X_2) + F(X_1, X_3) + F(X_2, X_3) - F(X_1, X_2, X_3)} \quad (3.47)$$

Ya que no se tiene explícitamente la función a maximizar, no es posible aplicar ninguna técnica de optimización en este caso y será necesario proceder mediante algún método iterativo a base de prueba y error. En el caso en el que la función objetivo sea explícita, es posible aplicar algún proceso establecido en la optimización.

El vector solución elegido (X_1, X_2, X_3) , el cual produce el mayor valor en las funciones Φ , dará origen por un proceso de mayoración por ejemplo, a la avenida de diseño para la obra particular tratada.

Con lo establecido anteriormente en este capítulo, es posible indicar que para un período de retorno previamente elegido (el de diseño), T_{123} aplicado a una obra hidráulica dada se pueden establecer los pasos de cálculo mencionados a continuación, para el caso del problema planteado en la figura 3.1.

1.- A partir de los registros de gastos máximos anuales en las estaciones A, B y C de la figura 3.1 y una vez aplicada la prueba de homogeneidad hidrológica, es posible ajustar una función de distribución de probabilidad conjunta multivariada de valores extremos denotada por $F(X_1, X_2, X_3)$ a los datos homogéneos.

2.- Se elige un vector solución de gastos, (X_1, X_2, X_3) tal que satisfaga la ecuación (3.28).

$$T_{123} = \frac{1}{1 - F(X_1) - F(X_2) - F(X_3) + F(X_1, X_2) + F(X_1, X_3) + F(X_2, X_3) - F(X_1, X_2, X_3)}$$

3.- Contando con las avenidas máximas históricas registradas en las estaciones hidrométricas A, B y C, es posible construir las avenidas cuyos gastos pico son precisamente los correspondientes al vector solución, mediante un proceso de mayoración.

4.- Los hidrogramas de las avenidas obtenidas en el punto anterior, se proporcionan como dato de entrada al modelo de tránsito de avenidas de la red hidrográfica y/o al modelo de funcionamiento de la obra por diseñar y a partir de este se obtienen los resultados de interés. Para el caso de bordos de protección, la elevación máxima de la superficie libre del agua, denotada por d , a lo largo del tramo o tramos en estudio, es decir el limnograma, será el resultado importante. A partir de estos datos se calcula el valor de las funciones Φ .

5.- Se elige otro vector solución (X_1, X_2, X_3) , de tal forma que siga cumpliendo con la ecuación (3.28) y se repiten los pasos 3 y 4.

6.- Se repite el proceso, tantas veces como sea necesario, de tal manera de encontrar la condición más desfavorable para el período de retorno elegido. El plan de variación de (X_1, X_2, X_3) deberá ser implementado por el diseñador a fin de encontrar dicha condición (máximización o minimización según el caso) en el menor número de cálculos.

Los resultados de los cálculos pueden resumirse en una gráfica como la mostrada en la figura 3.6.

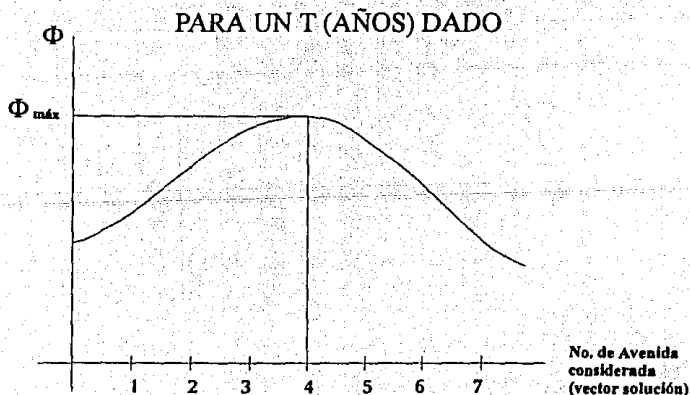


Figura 3.6

De esta forma, se garantiza que se está considerando la condición más desfavorable para la obra específica y para el período de retorno elegido, y en forma implícita se habrá obtenido al final del proceso el o los hidrogramas correspondientes a la avenida de diseño utilizada para tal fin. Con estos resultados, es posible proceder con plena seguridad y confianza al diseño definitivo y al proyecto ejecutivo de la obra hidráulica.

"Cuando se obtiene un resultado simple por medio de cálculos complicados, debe existir el método más directo de obtener el resultado; las simplificaciones que ocurren y los términos que desaparecen durante el curso de los cálculos son indicaciones de que existe un método para el cual esas simplificaciones se han hecho ya y en el cual los términos no aparecen".

M. Lamé
Théorie de L'elasticité

CAPITULO IV

EJEMPLO DE APLICACIÓN (RED HIDROGRÁFICA PAPALOAPAN)

Antecedentes y estudios preliminares.

El río Papaloapan y la cuenca a la que da nombre, forman parte de la región hidrológica No. 28, ubicada en el sureste de la República Mexicana.

El río Papaloapan es tributario del océano Atlántico. La cuenca alta del río comprende parte de los estados de Puebla y Oaxaca y tiene su curso inferior en el estado de Veracruz. Tiene su origen en la Sierra Madre y el nudo mixteco, aunque algunos consideran que se forma de la unión de los ríos Salado y Grande y que en su curso medio recibe el nombre de Santo Domingo. Pasa la Sierra Madre encajonado, para después penetrar en la llanura litoral, en donde recibe sus principales afluentes, el río Tonto por la izquierda y los ríos Tesechoacán y San Juan por la derecha. El río Papaloapan desemboca finalmente en la laguna de Alvarado, en el golfo de México. La longitud aproximada del río es de 314 km. La cuenca correspondiente cubre una superficie cercana a los 47 000 km².

En la última parte de su recorrido, el río Papaloapan atraviesa la planicie costera formando un amplio sistema de lagunas y llanuras de inundación. Esta región se ve afectada con frecuencia por fenómenos meteorológicos diversos que producen precipitaciones intensas, generando avenidas extraordinarias del río que tienen su origen en la parte alta de la cuenca. Al propagarse hacia aguas abajo, el río incrementa sus caudales por la adición de los afluentes. En ocasiones sobrepasan la capacidad de los cauces, produciendo desbordamientos e inundaciones en las zonas adyacentes.

Este proceso ha dado origen a la formación de llanuras, creadas usualmente a base de depósitos aluviales.

En las llanuras se tiene generalmente poca pendiente, y por consiguiente poca capacidad de conducción en los cauces, por lo cual el río cambia constantemente, mediante la formación y abandono de meandros, constituyendo en ocasiones, complejas redes de cauces y llanuras por donde deben transitar las avenidas.

Si se supera la capacidad de los cauces, el río se desborda inundando la áreas contiguas, provocando daños tanto a las poblaciones ahí asentadas como a las industrias y las tierras cultivadas.

Este problema se ha convertido en una amenaza latente para los habitantes de la cercanías del río Papaloapan y sus afluentes, es por esto que se han implementado diversos estudios a fin de prevenir desastres, ya sea mediante la estimación de eventos extraordinarios y el diseño de obras de protección o mediante el pronóstico adecuado y a tiempo de tales eventos para la preparación y la eventual evacuación del área en peligro.

Desde 1977, la Comisión del Plan Nacional Hidráulico, empezó a implementar un modelo matemático de simulación del tránsito de avenidas por las llanuras de inundación de los ríos Papaloapan y Pánuco [49]. El modelo fue recientemente retomado por el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, en donde se reprogramó, calibró y puso en operación.

Este modelo fue desarrollado para facilitar el estudio de las obras de protección y otras acciones que sirvan para el control de avenidas en los ríos Papaloapan y Pánuco. Se pensó también que el modelo fuera utilizado para la predicción de avenidas y el pronóstico a tiempo real de gastos y niveles en diversos sitios significativos para la toma de decisiones en el control y la defensa contra inundaciones.

A continuación se describen en forma breve los conceptos en que está basado el modelo, cuyo código en FORTRAN ha sido designado con el nombre de PAPAL.

El modelo está formado por elementos de dos tipos esenciales:

- a) Tramos de ríos con sección y pendiente definidos, en donde se considera flujo unidimensional.
- b) Llanuras de inundación, cuyo efecto principal es el almacenamiento. Estas pueden ser confinadas; en cuyo caso el efecto de almacenamiento es considerado mediante una función capacidad-elevación, o bien no confinadas en las cuales se considera adicionalmente el efecto de tránsito de la avenida.

Las transferencias entre elementos se hacen a través de funciones del tipo vertedor de cresta ancha.

Los volúmenes almacenados en las lagunas y los escurrimientos en el cauce al principio de la avenida constituyen las condiciones iniciales, mientras que la evolución de la marea en la descarga y los hidrogramas de entrada al río constituyen las condiciones de frontera. Con lo anterior se han definido tres tipos de condiciones:

- a) Frontera de gasto conocido.
- b) Frontera de tirante conocido.
- c) Frontera del tipo vertedor.

Para la simulación del fenómeno, se divide la región de inundación en volúmenes de control, en los que se plantean las ecuaciones de conservación, tanto de cantidad de movimiento como de masa.

Los volúmenes de control son precisamente los elementos que forman el modelo mencionados anteriormente.

Para efectuar la integración del flujo en todos sus elementos y obtener la evolución del fenómeno en el tiempo, las ecuaciones se han expresado en incrementos finitos. El sistema está linealizado, eligiendo el mayor número de variables que mantengan esa característica de linealidad y tomando para las variables restantes los valores obtenidos en el tiempo anterior. Se utiliza un esquema explícito en el planteamiento y el sistema se resuelve por el método de doble barrido.

El programa PAPAL realiza entonces la simulación del tránsito de avenidas por las llanuras de inundación en la zona baja del río Papaloapan. La información de entrada requerida es la referente a los hidrogramas registrados en la frontera aguas arriba del modelo, correspondientes a las estaciones hidrométricas siguientes:

- Tuxtepec, sobre el río Papaloapan
- Lauchapan, sobre el río del mismo nombre
- Amapa, sobre el río del mismo nombre
- Cuatotolapan, sobre el río San Juan
- Azueta, sobre el río Tesechoacán
- Obispo, sobre el río del mismo nombre
- Temascal, sobre el río Tonto (aguas abajo de la descarga de la presa Presidente Alemán).

Se requieren también como datos de entrada, el mareograma ocurrido o pronosticado en la desembocadura del río; las fronteras aguas abajo de los cauces, tramo inicial y final de cada tramo; información de conexión de la red de ríos; la simulación del flujo en la laguna de Alvarado y las características del canal de conexión entre ésta y el mar.

También se requieren los volúmenes inicial y máximo del almacenamiento de las lagunas de inundación.

Dentro del programa se inicializan otras variables con valores fijos, las cuales son los parámetros de calibración del modelo y no deben cambiarse.

Los resultados del programa son los limnogramas simulados en puntos asociados a los tramos, en los que previamente se han dividido los ríos y lagunas.

Con efecto de aplicar este modelo al ejemplo de aplicación de este trabajo, es necesario realizar algunas adaptaciones menores al programa PAPAL, las cuales se describen en las siguientes líneas.

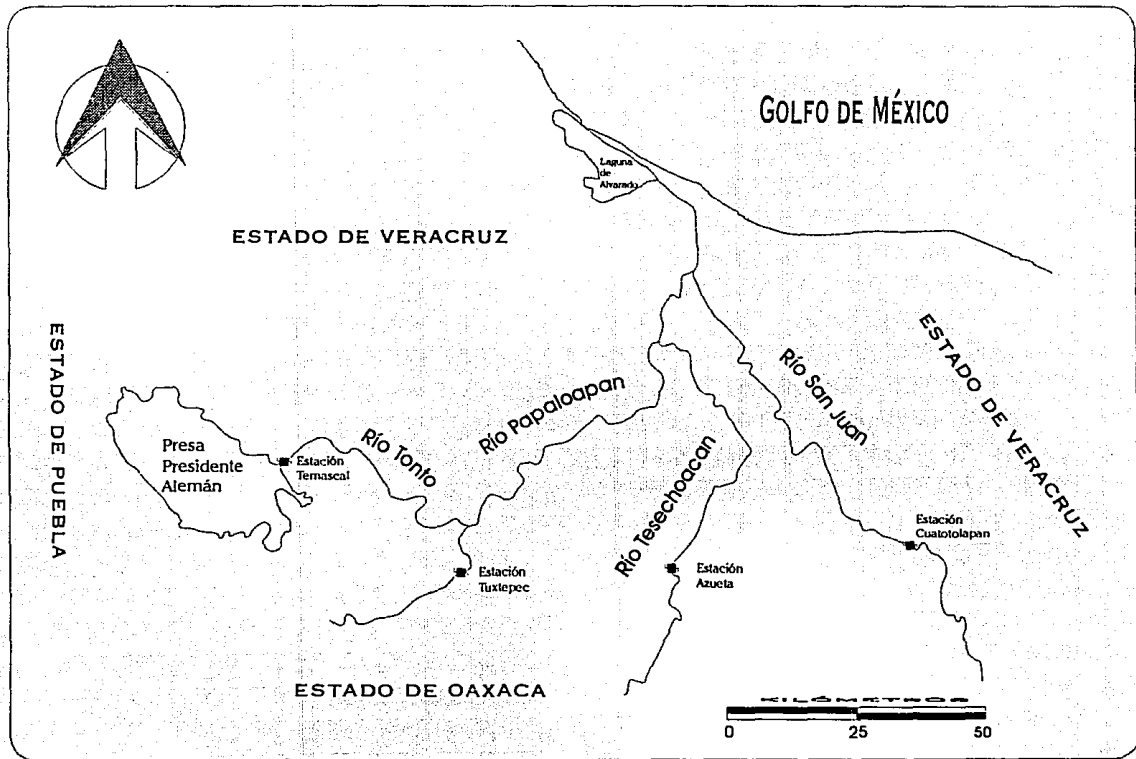
Adaptaciones y simplificaciones al programa PAPAL.

La modificación se llevó al cabo en el programa fuente en FORTRAN y el nuevo programa se volvió a compilar con FORTRAN 5.0 de Microsoft con el nombre de PAPAL2.

Mediante el análisis de la información hidrométrica de la 7 estaciones, cuyos hidrogramas se requieren como dato, se puede llegar a las siguientes conclusiones, a fin de simplificar la red hidrográfica en estudio.

- 1.- Los principales afluentes del Papaloapan son el río San Juan, el río Tesechoacán y el río Tonto.
- 2.- El río Lauchapan, aporta en promedio menos del 3% del gasto en el río PAPALOAPAN aguas abajo de las confluencias, por lo cual se ha excluido de la red hidrográfica al considerar que sus efectos son de muy poca magnitud.
- 3.- El río Amapa conserva una situación muy parecida al río Lauchapan, por lo cual también fue excluido del modelo simplificado.
- 4.- El río Obispo corresponde a una corriente de muy poco orden, ya que según los registros hidrométricos, contribuye con menos de un 3% en el gasto del río Papaloapan. Por esta razón este río se excluyó de la red de ríos simplificada.
- 5.- Después de la construcción de la Presa Presidente Alemán, el río Tonto modificó su régimen de escurrimientos. A partir de la puesta en operación de la presa el escurrimiento en el río Tonto se encuentra prácticamente controlado, ya que corresponde precisamente al volumen descargado por la presa, tanto por el vertedor como por la planta hidroeléctrica. De esta manera, se decidió simplificar la red considerando que el gasto en el río Tonto es constante e igual al promedio descargado por el vertedor y la planta, que según el análisis de los datos hidrométricos, alcanza los 300 m³/s.

De acuerdo a las simplificaciones anteriores la red hidrográfica Papaloapan queda de la forma mostrada en la figura No. 4.1



Red Hidrográfica Simplificada Papaloapan

Figura 4.1

El archivo de datos se modificó, de tal manera que se correspondiera con la morfología y nomenclatura señalada en la tabla 4.1.

No. de Rfo	Estación	Rfo	Tramos
1	Tuxtepec	Papaloapan	1 - 30
2	Azuela	Tesechoacán	44 - 55
3	Cuatotolapan	San Juan	31 - 43
4	Temascal	Tonto	64 - 69

Tabla 4.1 - Nomenclatura de la Red

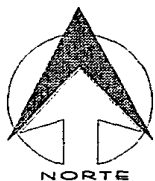
Las conexiones sobre el río Papaloapan están realizadas como sigue:

- En el tramo 3 se conecta el río Tonto.
- En el tramo 22 se conecta el río Tesechoacán.
- En el tramo 25 se conecta el río San Juan.

La información correspondiente a las lagunas de inundación y el mareograma no se modificó.

El modelo de la red hidrográfica Papaloapan resulta entonces, según la nomenclatura del programa PAPAL2, como se muestra en la figura 4.2.

La información general de las estaciones hidrométricas de la red de ríos en cuestión se da a continuación.



Nomenclatura de Tramos

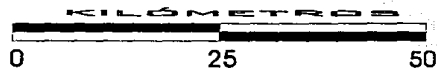
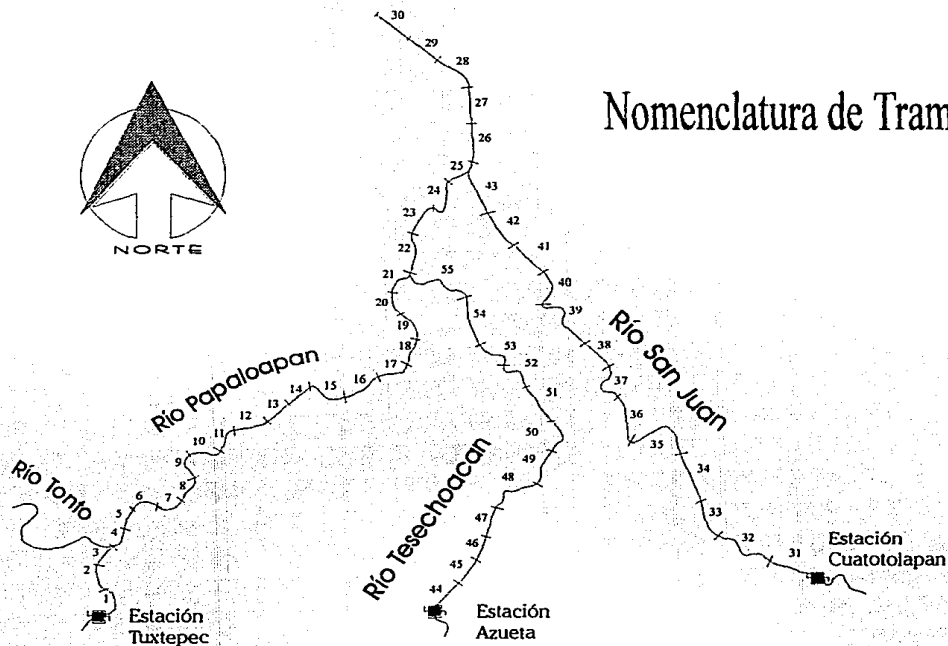


Figura 4.2

La estación Tuxtepec está situada a orillas de la población de Tuxtepec, Oax., a 17 km. de Cd. Alemán, Ver. Se afora desde el puente de la carretera Cd. Alemán - Oaxaca sobre el río Papaloapan, cuyo claro libre entre estribos en este punto es de 216.22 m.

La estación Azueta está situada en un punto muy cercano a la población de Villa Azueta, Ver., a unos 60 km. de Cd. Alemán, Ver. Para aforar se utiliza la estructura del puente del ferrocarril Veracruz - Istmo, el cual tiene en el punto de medición una longitud de 148.60 m.

La estación Cuatotolapan se encuentra muy cercana a la población de Cuatotolapan, Ver., la cual dista unos 110 km. de Cd. Alemán, Ver. y se afora desde el puente del ferrocarril Rodríguez Clara - San Andrés Tuxtla, que salva en ese punto al río San Juan con un claro de 192.35 m.

En todos los casos, la escala es de mosaico, referida a un banco de nivel con cota sobre el nivel del mar.

Antes del planteamiento de la obra específica por diseñar, es conveniente como parte del análisis preliminar, relacionar la información existente dentro de la red hidrográfica y efectuar el proceso de la misma, que posteriormente será requerido dentro de la aplicación de la metodología propuesta.

Se realizó la consulta de los datos hidrométricos correspondiente a las estaciones Tuxtepec, Azueta y Cuatotolapan, que son las involucradas en la red bajo estudio, de acuerdo a las simplificaciones mencionadas anteriormente.

Los datos hidrométricos completos existentes corresponden a los períodos siguientes:

Estación Tuxtepec	De 1961 a 1981
Estación Azueta	De 1948 a 1991
Estación Cuatotolapan	De 1948 a 1984

Nota: La estación Tuxtepec empezó a operar en el año de 1961.

De esta forma tenemos que el período coincidente en las estaciones es de los años 1961 a 1981, es decir que se cuenta con un registro común de 21 años de longitud.

A partir de los registros hidrométricos en cada estación es posible encontrar el hidrograma correspondiente a la avenida máxima histórica. Este proceso se llevó a cabo, con los resultados mostrados en la tabla 4.2. Se ha considerado un período de tiempo para las avenidas de 720 h., tomando completo el mes en que se presenta la avenida.

Dichas avenidas están representadas por gastos medios diarios, tal y como se pueden obtener de los boletines hidrométricos, por lo cual no coincide el pico de estas con el gasto máximo anual registrado.

Los datos contenidos en la tabla 4.2 servirán para armar los hidrogramas de la avenidas con otros gastos pico, mediante un proceso de mayoración.

Por otro lado, a partir de los mismo registros, es posible obtener la muestra correspondiente a los gastos máximos anuales en cada una de las estaciones. Esta se resume en la tabla 4.3.

Tabla 4.2 a. Avenidas Máximas Históricas

Tiempo (h)	Gastos Medios Diarios (m ³ /s)		
	Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan
0	987	174	1082
24	911	158	1018
48	923	149	1003
72	757	144	997
96	714	146	1043
120	660	142	1237
144	760	129	1499
168	931	122	1604

Tiempo (h)	Gastos Medios Diarios (m ³ /s)		
	Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan
192	1732	115	1794
216	4208	110	2080
240	5184	116	2380
264	4502	115	3295
288	3819	104	4015
312	4768	129	2764
336	5451	258	1703
360	4478	318	1260
384	2642	302	1085
408	1807	263	1008
432	1413	253	896
456	1185	425	765
480	1042	1099	660
504	969	1936	606
528	981	1321	548
552	825	889	535
576	714	767	548
600	639	721	529
624	588	703	528
648	553	548	560
672	529	440	567
696	503	490	545
720	454	756	525

Tabla 4.2b Avenidas Máximas Históricas

Tabla 4.3a. Gastos Máximos Anuales

Año	Gastos Máximos Anuales (m ³ /s)		
	Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan
1948		630	519
1949		702	641
1950		750	652
1951		974	763
1952		1320	854
1953		942	598
1954		1240	678
1955		915	990
1956		947	738
1957		705	710
1958		1023	943
1959		725	610
1960		1270	1190
1961	4235	975	875
1962	2750	735	681
1963	2562	750	1232
1964	3340	741	626
1965	3015	770	693
1966	3263	722	1188
1967	2780	733	608
1968	3002	1320	1224
1969	4669	1404	4165
1970	3038	906	1000
1971	2535	960	773

Año	Gastos Máximos Anuales (m ³ /s)		
	Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan
1972	3310	970	723
1973	5220	1593	2100
1974	4830	2093	2076
1975	5120	1952	1907
1976	3060	1480	795
1977	1700	740	553
1978	2810	1560	2184
1979	4450	986	784
1980	3339	1805	1709
1981	6145	1738	1326
1982		1367	856
1983		1321	1400
1984		1202	1443
1985		1090	-
1986		1198	-
1987		1594	-
1988		1905	1714
1989		1697	1804
1990		1072	-
1991		2088	1158
1992			1616

Tabla 4.3 b Gastos Máximos Anuales

Se tiene para este caso un período de datos común de 1961 a 1981 (21 años).

Los datos correspondientes a este período son los que se utilizan en este trabajo. El tratamiento de muestras de diferente longitud en el ajuste de funciones de distribución en el caso de dos variables aleatorias puede consultarse en [45], mientras que para el caso de tres variables aleatorias se dispone de los procedimientos establecidos en [12] y [47].

En este momento, se está en posibilidades de aplicar la prueba denominada *test de Langbein*, propuesto como prueba de homogeneidad hidrológica regional por Dalrymple [10], el cual se presentó en el capítulo II de este trabajo.

Se pretende determinar si los datos de las estaciones hidrométricas Tuxtepec, Azueta y Cuatotolapan pertenecen a una muestra homogénea. Las longitudes de los registros disponibles son:

Estación Tuxtepec:	21 años
Estación Azueta:	44 años
Estación Cuatotolapan:	37 años

Se tiene un registro común de 21 años de longitud.

Según la metodología propuesta por Dalrymple [10], se utiliza para los cálculos el registro común de los datos.

Se presentan a continuación los cálculos para cada estación de medición siguiendo el procedimiento detallado en el capítulo II de este mismo trabajo.

Estación Tuxtepec:

Orden m	Qmáx (m ³ /s)	T = (n+1)/m (años)	Orden (m)	Qmáx (m ³ /s)	T = (n+1)/m (años)
1	6145	22.00	12	3060	1.83
2	5220	11.00	13	3038	1.69
3	5120	7.33	14	3015	1.57
4	4830	5.50	15	3002	1.47
5	4669	4.40	16	2810	1.38
6	4450	3.67	17	2780	1.29
7	4235	3.14	18	2750	1.22
8	3340	2.75	19	2562	1.16
9	3339	2.44	20	2535	1.10
10	3310	2.20	21	1700	1.05
11	3263	2.00			

Tabla 4.4a

De aquí se obtiene que el evento correspondiente a un periodo de retorno de 2.33 años, considerado el evento medio anual es $Q_{2.33} = 3326 \text{ m}^3/\text{s}$.

El evento para un periodo de retorno de 10 años resulta $Q_{10} = 5193 \text{ m}^3/\text{s}$, por lo que la relación entre eventos será:

$$R_1 = \frac{Q_{10}}{Q_{2.33}} = \frac{5193}{3326} = 1.5613$$

Estación Azueta:

Orden m	Q _{máx} (m ³ /s)	T = (n+1)/m (años)	Orden (m)	Q _{máx} (m ³ /s)	T = (n+1)/m (años)
1	2093	22.00	12	970	1.83
2	1952	11.00	13	960	1.69
3	1805	7.33	14	906	1.57
4	1738	5.50	15	770	1.47
5	1593	4.40	16	750	1.38
6	1560	3.67	17	741	1.29
7	1480	3.14	18	740	1.22
8	1404	2.75	19	735	1.16
9	1320	2.44	20	733	1.10
10	986	2.20	21	722	1.05
11	975	2.00			

Tabla 4.4b

De los datos se obtiene que el evento correspondiente a un periodo de retorno de 2.33 años, considerado el evento medio anual es: $Q_{2.33} = 1304 \text{ m}^3/\text{s}$.

El evento para un periodo de retorno de 10 años resulta $Q_{10} = 1912 \text{ m}^3/\text{s}$, por lo que la relación entre eventos es:

$$R_2 = \frac{Q_{10}}{Q_{2.33}} = \frac{1912}{1304} = 1.46626$$

Estación Cuatotolapan:

Orden m	Qmáx (m ³ /s)	T = (n+1)/m (años)	Orden (m)	Qmáx (m ³ /s)	T = (n+1)/m (años)
1	4165	22.00	12	875	1.83
2	2184	11.00	13	795	1.69
3	2100	7.33	14	784	1.57
4	2076	5.50	15	773	1.47
5	1907	4.40	16	723	1.38
6	1709	3.67	17	693	1.29
7	1326	3.14	18	681	1.22
8	1232	2.75	19	626	1.16
9	1224	2.44	20	608	1.10
10	1188	2.20	21	553	1.05
11	1000	2.00			

Tabla 4.4c

De aquí se obtiene que el evento correspondiente a un periodo de retorno de 2.33 años, considerado el evento medio anual es $Q_{2.33} = 1207 \text{ m}^3/\text{s}$.

El evento para un periodo de retorno de 10 años resulta $Q_{10} = 2161 \text{ m}^3/\text{s}$, por lo que la relación entre eventos será:

$$R_3 = \frac{Q_{10}}{Q_{2.33}} = \frac{2161}{1207} = 1.79039$$

La relación promedio para toda la región será:

$$R = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} = \frac{1.5613 + 1.4663 + 1.7904}{3} = 1.606$$

Con esto, los eventos modificados para un periodo de retorno de 10 años son:

Estación Tuxtepec:

$$Q_{10} = R Q_{2.33}^T = 1.606 (3326) = 5341.50$$

Estación Azueta:

$$Q_{10} = R Q_{2.33}^A = 1.606 (1304) = 2094.20$$

Estación Cuatotolapan:

$$Q_{10} = R Q_{2.33}^C = 1.606 (1207) = 1938.40$$

Los periodos de retorno asociados a estos eventos son:

Tuxtepec: $T = 12.44$ años

Azueta: $T = 22.00$ años

Cuatotolapan: $T = 4.60$ años

Al dibujar los pares coordenados, T_i, n_i en la gráfica con los intervalos de confianza se tiene que las tres estaciones corresponden a una región hidrológicamente homogénea (Figura 4.3), y se continua el análisis.

Prueba de Homogeneidad Regional Tuxtepec, Azueta y Cuatrotolapan

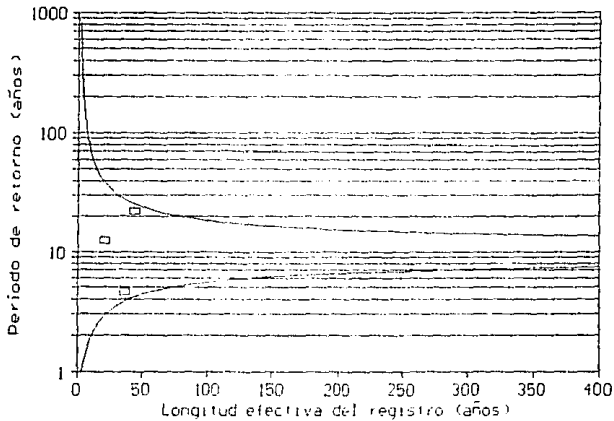


Figura 4.3

Aplicación de la metodología a una obra en particular.

El problema específico aquí planteado para la ilustración de la metodología, y esperando que ésta sea una base para el diseño no solo de esta obra hidráulica, sino en general de todas las obras proyectadas dentro de la influencia de una red de ríos, es el mostrado en la figura 4.4.

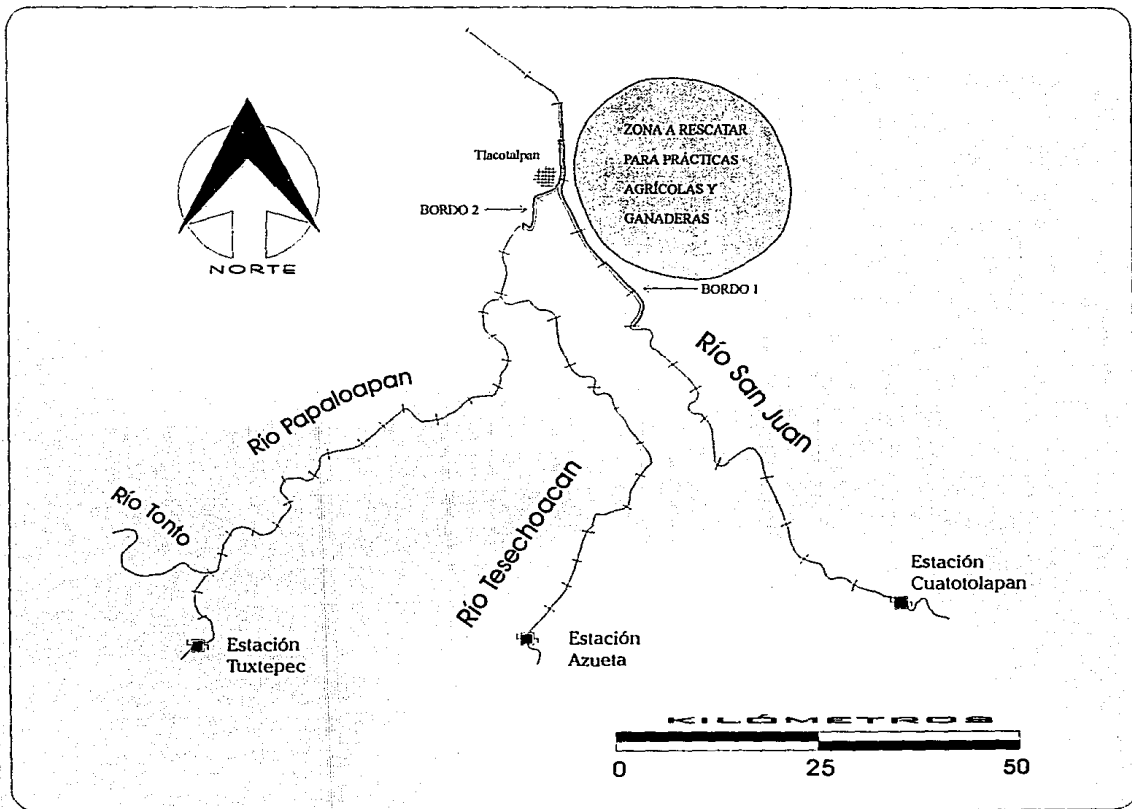


Figura 4.4

Por un lado, se pretende rescatar una amplia zona al este de los ríos San Juan y Papaloapan, la cual podrá ser destinada a la ganadería extensiva y a las prácticas agrícolas propias de las región. Se ha determinado diseñar para este efecto un bordo longitudinal de protección, el cual llamamos Bordo 1, tal y como se indica en la figura 4.3. El bordo se extenderá por la margen derecha de parte de los ríos San Juan y Papaloapan.

Por otra parte, se tiene que la población de Tlacotalpan, la cual se encuentra precisamente aguas abajo de la confluencia de los ríos Papaloapan y San Juan, los dos mayores de la red en descarga y longitud, se ve frecuentemente afectada por las inundaciones debidas en forma principal al desborde de tales ríos con los consecuentes daños que estas ocasionan. Por esta razón, la segunda parte de la obra propuesta consiste en el diseño y la construcción de un bordo longitudinal de protección sobre la margen izquierda del río Papaloapan, para el beneficio de los habitantes de la citada población. Esta obra se ha designado Bordo 2 y se encuentra representada en la figura 4.3.

Según la nomenclatura de tramos del programa PAPAL2, el Bordo 1 se extiende por la margen derecha de los tramos 25, 26 y 27 del río Papaloapan y 40, 41, 42 y 43 del río San Juan, mientras que el Bordo 2 se extiende sobre la margen izquierda de los tramos 24, 25 y 26 del río Papaloapan.

Con la construcción de esta obra, se lograrán los objetivos del rescate y protección de estas zonas, logrando su incorporación efectiva a la productividad nacional.

La elección del período de retorno a utilizar en el diseño de la obra puede obtenerse a partir de un análisis de riesgo, basado en la fórmula (3.2) de este trabajo, la cual nos indica que:

$$J = 1 - (1 - p)^N \quad (4.1)$$

donde:

p = probabilidad de la avenida con un período de retorno T ($1/T$)

J = probabilidad de ocurrencia o exceso de la avenida de diseño.

N = período de tiempo (vida útil del proyecto) (años).

En base a esto y si fijamos que la vida útil de la obra sea de 30 años aproximadamente y además nos planteamos el hecho de aceptar un riesgo del 25 % de que la avenida de diseño sea igualada o excedida en ese lapso, se tiene que:

$$J = 0.25 \quad p = 1/T \quad N = 30 \text{ años}$$

y además se puede expresar a partir de la ecuación (4.1) que:

$$p = 1 - (1 - J)^{\frac{1}{N}} \quad (4.2)$$

Sustituyendo se obtiene que $T = 104$ años.

De esta forma, el período de retorno a utilizar en el diseño de la obra será de $T = 100$ años.

Con estas bases y los datos establecidos en las secciones anteriores, se está en posibilidades de iniciar la estimación de la avenida de diseño para el proyecto de la obra en cuestión.

Por supuesto que la situación buscada en la solución del problema es precisamente maximizar la elevación de la superficie libre del agua, designada como h y por consiguiente la elevación requerida en los bordos de protección, la cual se ha designado como H , de tal forma que se contemple la situación más desfavorable para el período de retorno elegido. Este concepto va íntimamente ligado con el concerniente a la minimización del costo de los bordos.

Debido a la naturaleza de la obra hidráulica por diseñar, el parámetro de mayor importancia consiste entonces, en el tirante presentado en los tramos de los ríos en estudio, de tal forma que a partir de éstos se pueda construir el limnograma resultante en dichos tramos.

Una vez obtenido el limnograma para la avenida de diseño, es posible en forma prácticamente inmediata, conocer las características de elevación requerida en el bordo de protección, simplemente proporcionando un bordo libre para el mismo.

Ya que en el caso del ejemplo de aplicación aquí expuesto, la obra consiste de hecho en dos partes, denominadas previamente Bordo 1 y Bordo 2, se ha considerado pertinente tratar éstos por separado en el diseño, de tal manera de encontrar la condición más desfavorable para cada bordo también en forma separada, lo cual nos conduce sin dudas a un diseño general más conservador.

Para efectos de comparación entre soluciones, recordemos que se ha introducido la función Φ_i , dada por:

$$\Phi_i = \int_{L_i} A_i [h(s)] ds \quad (4.3)$$

donde:

- Φ_i = Función característica de la solución del bordo i
- L_i = Coordenada curvilínea a lo largo del bordo i
- A_i = Área de la sección transversal del bordo i
- $h(s)$ = Elevación de la superficie libre del agua
- s = Variable de integración, coincidente con el eje del bordo.
- i = bordo en estudio ($i = 1, 2$)

Entonces la solución para el bordo i será la que proporcione el mayor valor de la función Φ_i .

Es posible en un análisis posterior, relacionar esta función característica con el costo de la obra. Esta relación se deberá plantear para cada caso en particular.

Para el caso tratado en este trabajo, consideremos que los bordos de protección tienen una sección transversal fija, dada previamente, como la siguiente:

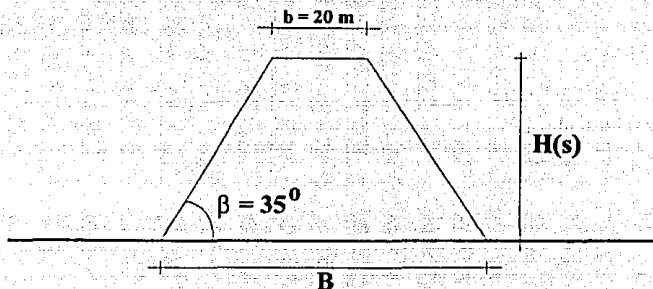


Figura 4.5

donde:

$$H(s) = h(s) + BL$$

Si planteamos el uso de un bordo libre $BL = 0.50 \text{ m}$, se tendrá:

$$H(s) = h(s) + 0.50$$

De la figura 4.4 se observa que

$$\tan \beta = \frac{H(S)}{\frac{B-20}{2}}$$

de donde se obtiene

$$B = 2 \left[\frac{H(s)}{\tan \beta} + 10 \right]$$

o bien sustituyendo $\beta = 35^\circ$ y $H(s) = h(s) + 0.50$ se llega a la expresión

$$B = 2.856 h(s) + 21.43 \quad (4.4)$$

por lo que el área de la sección transversal del bordo será:

$$A[h(s)] = \frac{[2.856 h(s) + 21.43] + 20}{2} [h(s) + 0.50]$$

O bien en forma reducida como

$$A[h(s)] = 1.428 [h(s)]^2 + 21.43 [h(s)] + 10.36 \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) proporciona el área de la sección transversal del bordo de protección en estudio, en función de la elevación de la superficie libre.

Cabe mencionar que en este caso se ha considerado que el ancho de la corona y los taludes del bordo son constantes, sin embargo en general, éstos pueden variar a lo largo del bordo debido a las características del suelo y del material con el que formarán tales bordos, además del uso que se pretenda dar a la corona de mismo, como caminos de acceso a alguna población, camino de inspección, etc.

Para el análisis del problema se puede indicar que es conveniente incluir el escurrimiento en todos los ríos en la determinación de las características de cada uno de los bordos, ya que para el caso general de las redes hidrográficas, los efectos de remanso cerca de las confluencias pueden ser de importancia.

Esta consideración resulta pertinente aún en el caso en el cual se observe en forma más o menos clara que una corriente no interviene en la obra hidráulica por diseñar, ya que proporcionará una solución más general y real. Por supuesto, la decisión final acerca de esta consideración debe tomarla el ingeniero o diseñador a cargo del proyecto.

Otra situación a comentar, consiste en el hecho de que los hidrogramas de las avenidas analizadas se consideran de ocurrencia simultánea, ya que para este caso en base a un análisis de la información existente para esta red de ríos, los gastos máximos se presentan en forma general en la misma época (mes y día) del año. En otras condiciones, es posible adicionar a la metodología, un proceso de transferencia de información del sitio de las estaciones hidrométricas a los sitios de las obras en proyecto, pensando que la condición más desfavorable puede presentarse por ejemplo, cuando los gastos máximos se presenten simultáneamente en el sitio de la o las obras.

Se ha considerado también que los registros correspondientes a los gastos máximos anuales pertenecen a una sola población, ya que al contar con registros de corta longitud, esta identificación es difícil y porque es precisamente la función de distribución multivariada de valores extremos con marginales Gumbel la que se ha estudiado a fondo en este trabajo. El caso de distribuciones multivariadas con marginales Gumbel de dos poblaciones ha sido estudiado recientemente por Escalante [11].

Ajuste de datos a la función de distribución conjunta trivariada.

Como se había indicado con anterioridad, el caso tratado en este trabajo corresponde a la consideración de que las funciones de distribución multivariadas de valores extremos son una buena aproximación a la distribución real.

Con esta base, se realiza entonces, el ajuste de los datos correspondientes a los gastos máximos anuales registrados en las estaciones hidrométricas a dicha función de distribución conjunta.

La función de distribución conjunta trivariada está dada por la ecuación (2.86) como:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \exp \left\{ - \left[\exp \left(-m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) + \exp \left(-m \frac{x_3 - u_3}{\alpha_3} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (4.6)$$

cuya función de densidad está dada por la expresión (2.87) como:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{-A} e^{-B} e^{-C}}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \exp(-E^{1/m}) \{ (2m^2 - 3m + 1) E^{1/m-3} + (3m-3) E^{2/m-3} + E^{3/m-3} \} \quad (4.7)$$

donde:

$$A = -m \left(\frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \quad B = -m \left(\frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \quad C = -m \left(\frac{x_3 - u_3}{\alpha_3} \right) \quad (4.8)$$

$$E = \exp A + \exp B + \exp C \quad (4.9)$$

y además:

u_1, u_2, u_3 son los parámetros de ubicación del modelo.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son los parámetros de escala del modelo trivariado.

m es el parámetro de asociación.

Según lo mencionado en el capítulo II de este trabajo, el método de máxima verosimilitud resulta ser una de las técnicas más apropiadas en la estimación de los parámetros. De acuerdo a lo establecido, los valores más convenientes de estos, son aquellos para los cuales se maximiza la función de verosimilitud o también la función logarítmica de verosimilitud.

Para el caso trivariado, ésta última está dada por la expresión (2.92) como :

$$LL(x, y, z, \theta) = -[L\alpha_1 + L\alpha_2 + L\alpha_3] \sum_{i=1}^k ABC(-E^{1/m}) \ln\{(2m^2 - 3m + 1) E^{1/m-3} + (3m-3)E^{2/m-3} + E^{3/m-3}\} \quad (4.10)$$

El parámetro de asociación m guarda cierta relación con el coeficiente de correlación lineal ρ , como se ha establecido anteriormente [23] y [47], por lo cual puede ser calculado a partir de la muestra de datos y considerado como una constante en las expresiones (4.6) a (4.10). Sin embargo, ya que para el caso en estudio, el registro común de datos en las tres estaciones es de una longitud corta (21 años) se ha considerado adecuado, a fin de obtener el diseño más conservador, incluir el valor de dicho parámetro de asociación m en el proceso de optimización de la función de verosimilitud. De esta manera se está tomando en cuenta la corta longitud del registro y los posibles errores en la medición de los gastos máximos anuales. Resulta adecuado, por otro lado, en los casos en los cuales se disponga de registros de datos muy largos y confiables, considerar el valor de m como fijo, calculado a partir de la muestra de datos. Hay que recordar que se debe cumplir $m \geq 1$, lo cual incluye una nueva restricción al planteamiento original del problema de maximización.

Las técnicas o procedimientos de ajuste buscan optimizar el valor de la función objetivo (FO), la expresión (4.8) en este caso, por medio de prueba y error en los cuales se alteran los valores de los parámetros. En el caso de la maximización, son tanteos exitosos los que originan un aumento en el valor de la FO. Debido a que los procedimientos de ajuste buscan el mejor valor de la FO y la correspondiente serie de valores óptimos de los parámetros, son denominados "métodos de optimización".

Cuando la FO a maximizar, dependiente de los parámetros (x_i) es tal que sus derivadas parciales con respecto a x_i no pueden ser obtenidas analíticamente, la optimización se puede efectuar por medio del algoritmo de Rosenbrock (1960) [36], el cual consiste en una búsqueda en el espacio vectorial de k dimensiones, formado por los i ejes ortogonales de los parámetros; ejes que pueden estar restringidos a los límites de los parámetros, si tales límites existen.

El algoritmo de Rosenbrock es un método recursivo que realiza la búsqueda en una serie repetitiva de etapas y que es ampliamente conocido en los campos científicos y de ingeniería.

Para su aplicación en este caso se desarrolló un programa de computación, con el algoritmo de Rosenbrock para múltiples variables restringidas, aplicado a la función objetivo dada por la ecuación (4.8), la función logarítmica de verosimilitud precisamente, en el cual la parte correspondiente al algoritmo es una adaptación de las subrutinas ROSENB y HILL presentadas por Kuester y Mize [34] en lenguaje FORTRAN.

Si llamamos x_1 a los gastos presentados en la estación Tuxtepec, x_2 a los correspondientes a la estación Azueta y x_3 a los registrados en la estación Cuatotolapan se tiene que los valores de los parámetros de la función de distribución trivariada de valores extremos con marginales Gumbel, que aquí llamamos TRIGUMBEL, que según los datos de la tabla 4.3, maximizan la función logarítmica de verosimilitud, expresión (4.8) y que constituyen por lo tanto el mejor ajuste resultan ser, después de la aplicación del programa:

Parámetros de ubicación:

$$u_1 = 6107.5626$$

$$u_2 = 1951.1353$$

$$u_3 = 612.5296$$

Parámetros de escala:

$$\alpha_1 = 2090.7369$$

$$\alpha_2 = 854.0398$$

$$\alpha_3 = 1599.4781$$

Parámetro de asociación:

$$m = 1.3926$$

Una vez determinada la función de distribución trivariada que mejor ajusta a la muestra de datos, es posible iniciar el análisis del problema.

Recordemos que para el caso de tres variables aleatorias es válida la expresión (3.45):

$$T_{123} = \frac{1}{1 - F(x_1) - F(x_2) - F(x_3) + F(x_1, x_2) + F(x_1, x_3) + F(x_2, x_3) - F(x_1, x_2, x_3)} \quad (4.11)$$

en donde, según las expresiones 3.29 a 3.34 del capítulo III, se tiene que:

$$F(x_1) = F(x_1, \infty, \infty) \quad (4.12)$$

$$F(x_2) = F(\infty, x_2, \infty) \quad (4.13)$$

$$F(x_3) = F(\infty, \infty, x_3) \quad (4.14)$$

$$F(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty) \quad (4.15)$$

$$F(x_1, x_3) = F(x_1, \infty, x_3) \quad (4.16)$$

$$F(x_2, x_3) = F(\infty, x_2, x_3) \quad (4.17)$$

Es decir que se pueden escribir que:

$$F(x_1) = \exp \left\{ -\exp \left(-\frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \right\} \quad (4.18)$$

$$F(x_2) = \exp \left\{ -\exp \left(-\frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \right\} \quad (4.19)$$

$$F(x_3) = \exp \left\{ -\exp \left(-\frac{x_3 - u_3}{\alpha_3} \right) \right\} \quad (4.20)$$

$$F(x_1, x_2) = \exp \left\{ -\left[\exp \left(-m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (4.21)$$

$$F(x_1, x_3) = \exp \left\{ -\left[\exp \left(-m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left(-m \frac{x_3 - u_3}{\alpha_3} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (4.22)$$

$$F(x_2, x_3) = \exp \left\{ - \left[\exp \left(-m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) + \exp \left(-m \frac{x_3 - u_3}{\alpha_3} \right) \right] \frac{1}{m} \right\} \quad (4.23)$$

A partir de la expresión (4.9) podemos deducir que existen una infinidad de combinaciones de los gastos en los ríos individuales, que la satisfacen, los cuales llamaremos vectores solución.

Cada uno de estos, traducido a hidrogramas producirá diferentes efectos sobre la obra por diseñar.

A partir de este momento, comienza el proceso de obtención de la avenida de diseño, en una forma iterativa, ya que no se conoce explícitamente la función objetivo a optimizar.

Podemos ahora, con las bases anteriores, plantear la siguiente secuela de cálculo, para la resolución del problema.

- 1.- Se elige un vector solución de los gastos (x_1, x_2, x_3) tal que satisfaga la ecuación (4.11), para el T_{123} dado. En este caso se tiene que $T_{123} = 100$ años.
- 2.- Con el vector solución de gastos máximos (x_1, x_2, x_3) se construyen los hidrogramas de las avenidas de los ríos 1, 2 y 3 en los sitios correspondientes a las estaciones hidrométricas A, B y C respectivamente, mediante un proceso de mayoración, a partir de los datos de las avenidas máximas históricas de la tabla 4.2.
- 3.- Los hidrogramas de la avenida mayorada, se proporcionan como dato de entrada al modelo de tránsito de avenidas de la red de ríos Papaloapan (Modelo PAPAN2) y se obtienen de este los limnogramas en los tramos de interés.

4.- Se calcula la función Φ , dada por la ecuación (4.3) para cada bordo (Φ_i , $i=1,2$).

5.- Se elige otro vector solución (x_1, x_2, x_3) , de tal forma que se siga cumpliendo con la expresión (4.11).

6.- Se repiten los pasos 2 a 5 tantas veces como sea necesario a fin de encontrar el máximo de las funciones Φ_i para cada bordo. Cabe señalar que los valores máximos de Φ_i en cada bordo i , pueden ocurrir para vectores solución distintos. Esto simplemente significa que se está considerando la solución más desfavorable para cada bordo por separado.

La avenida encontrada a partir del vector de gastos para el cual se maximiza la función Φ_i representa la avenida de diseño del bordo i .

Con este proceso, se ha encontrado ya el limnograma de diseño y por consiguiente la elevación requerida en los bordos de protección en toda su longitud.

El plan para la proposición de los vectores solución analizados en los pasos 2 a 5 del proceso de cálculo descrito con anterioridad y el cual se ha utilizado en este problema es el indicado a continuación:

Ya que para cumplir analíticamente la ecuación 4.11 se debe tener una sola incógnita, se han propuesto valores de (x_1, x_2) y se ha determinado el valor de x_3 (que será entonces la única incógnita), con el cual se satisface la ecuación.

Para este ejemplo se ha elegido un incremento en los gastos propuestos (x_1, x_2) de 500 m³/s, de tal forma de no tener un número excesivo de cálculos en la búsqueda de la solución más desfavorable. Se ha tomado este incremento teniendo en consideración la diferencia presentada entre los limnogramas correspondientes a dos cálculos consecutivos, la cual se ha encontrado muy pequeña.

Las tablas 4.4 muestran las combinaciones (vectores solución) obtenidos y las cuales son las tratadas en los análisis posteriores.

TABLA 4.4b VECTORES SOLUCION

Comda	G A S T O S			MARGINALES					T (Años)		
	X1 (m3/s)	X2 (m3/s)	X3 (m3/s)	F(X1)	F(X2)	F(X3)	F(X1, X2)	F(X1, X3)		F(X2, X3)	F(X1, X2, X3)
	3500	5000	8404 00	0 03079	0 97223	0 97359	0 030696	0 030702	0 955830	0 030609	100 0
	3500	5500	4781 00	0 03079	0 98444	0 92798	0 030748	0 030426	0 922422	0 030385	100 0
	3500	5858	0 00	0 03079	0 98974	0 23071	0 030766	0 014959	0 230482	0 014948	100 0
	4000	0	7982 00	0 06455	0 00005	0 98995	0 000017	0 064503	0 000054	0 000017	100 0
12	4000	500	7982 00	0 06455	0 00421	0 98995	0 001008	0 064503	0 004212	0 001008	100 0
	4000	1000	7957 00	0 06455	0 04757	0 98992	0 008553	0 064502	0 047532	0 006548	100 0
	4000	1500	7936 00	0 06455	0 18343	0 98978	0 025000	0 064501	0 183245	0 024990	100 0
	4000	2000	7888 00	0 06455	0 38892	0 98947	0 041854	0 064499	0 388410	0 041820	100 0
	4000	2500	7810 00	0 06455	0 59103	0 98695	0 053126	0 064485	0 589995	0 053079	100 0
	4000	3000	7703 00	0 06455	0 74614	0 98819	0 056183	0 064469	0 744336	0 059125	100 0
	4000	3500	7557 00	0 06455	0 84953	0 98707	0 062112	0 064481	0 846506	0 064341	100 0
	4000	4000	7350 00	0 06455	0 91319	0 98530	0 063460	0 014466	0 908492	0 063374	100 0
	4000	4500	7022 00	0 06455	0 95069	0 98198	0 064068	0 064437	0 942673	0 063951	100 0
13	4000	5000	6404 00	0 06455	0 97223	0 97359	0 064339	0 064353	0 955830	0 064138	100 0
	4000	5500	4781 00	0 06455	0 98444	0 92798	0 064459	0 063718	0 922422	0 063824	100 0
	4000	5857	0 00	0 06455	0 98973	0 23071	0 064501	0 029521	0 230481	0 029499	100 1
14	4500	0	7954 00	0 11563	0 00005	0 98990	0 000023	0 115524	0 000054	0 000023	100 0
15	4500	500	7954 00	0 11563	0 00421	0 98990	0 001493	0 115524	0 004212	0 001492	100 0
	4500	1000	7949 00	0 11563	0 04757	0 98987	0 013515	0 115524	0 047532	0 013508	100 0
	4500	1500	7930 00	0 11563	0 18343	0 98975	0 041657	0 115522	0 183244	0 041625	100 0
	4500	2000	7884 00	0 11563	0 38892	0 98945	0 072199	0 115518	0 388409	0 072135	100 0
	4500	2500	7808 00	0 11563	0 59103	0 98894	0 093452	0 115510	0 589993	0 093381	100 0
	4500	3000	7701 00	0 11563	0 74614	0 98818	0 105128	0 115499	0 744333	0 105013	100 0
	4500	3500	7557 00	0 11563	0 84953	0 98707	0 110635	0 115482	0 846606	0 110697	100 0
	4500	4000	7349 00	0 11563	0 91319	0 98529	0 113477	0 115453	0 904888	0 113307	100 0
	4500	4500	7022 00	0 11563	0 95069	0 98198	0 114670	0 115396	0 942673	0 114441	100 0
	4500	5000	6404 00	0 11563	0 97223	0 97359	0 115202	0 115231	0 955830	0 114808	100 0
	4500	5500	4780 00	0 11563	0 98444	0 92793	0 115439	0 113982	0 923280	0 113797	100 0
	4500	5854	0 00	0 11563	0 98999	0 23071	0 115521	0 049687	0 230460	0 049647	100 1
16	5000	0	7941 00	0 18296	0 00005	0 98982	0 000030	0 182776	0 000054	0 000030	100 0
17	5000	500	7941 00	0 18296	0 00421	0 98982	0 001989	0 182776	0 004212	0 001988	100 0
	5000	1000	7937 00	0 18296	0 04757	0 98979	0 016988	0 182778	0 047531	0 016974	100 0
	5000	1500	7920 00	0 18296	0 18343	0 98968	0 061304	0 182773	0 183242	0 061253	100 0
	5000	2000	7877 00	0 18296	0 38892	0 98940	0 109850	0 182766	0 388406	0 109747	100 0
	5000	2500	7804 00	0 18296	0 59103	0 98891	0 145039	0 182754	0 589990	0 144885	100 0
	5000	3000	7699 00	0 18296	0 74614	0 98816	0 164850	0 182734	0 744330	0 164653	100 0
	5000	3500	7555 00	0 18296	0 84953	0 98705	0 174659	0 182704	0 846601	0 174420	100 0
	5000	4000	7349 00	0 18296	0 91319	0 98529	0 179227	0 182655	0 904889	0 178932	100 0
	5000	4500	7021 00	0 18296	0 95069	0 98197	0 181295	0 182655	0 942687	0 180697	100 0
18	5000	5000	6403 00	0 18296	0 97223	0 97359	0 182219	0 182269	0 955817	0 181534	100 0
	5000	5500	4758 00	0 18296	0 98444	0 92785	0 182630	0 180096	0 922296	0 179776	100 0
19	5000	5849	0 00	0 18296	0 98993	0 23071	0 182772	0 073826	0 230458	0 073763	100 0
	5500	0	7925 00	0 26257	0 00005	0 98971	0 000035	0 262284	0 000054	0 000035	100 0
20	5500	500	7924 00	0 26257	0 00421	0 98971	0 002451	0 262284	0 004212	0 002449	100 0
	5500	1000	7921 00	0 26257	0 04757	0 98969	0 024401	0 262283	0 047531	0 024383	100 0
	5500	1500	7906 00	0 26257	0 18343	0 98959	0 081952	0 262279	0 183240	0 081680	100 0
	5500	2000	7867 00	0 26257	0 38892	0 98934	0 151442	0 262260	0 388401	0 151289	100 0
	5500	2500	7798 00	0 26257	0 59103	0 98847	0 203933	0 262251	0 589994	0 203869	100 0
	5500	3000	7696 00	0 26257	0 74614	0 98814	0 234291	0 262221	0 744325	0 233986	100 0
	5500	3500	7553 00	0 26257	0 84953	0 98704	0 249547	0 262174	0 846596	0 249173	100 0
	5500	4000	7347 00	0 26257	0 91319	0 98527	0 258703	0 262088	0 904880	0 258240	100 0
	5500	4500	7021 00	0 26257	0 95069	0 98197	0 259955	0 261930	0 942687	0 259329	100 0
21	5500	5000	6402 00	0 26257	0 97223	0 97358	0 261410	0 261488	0 955804	0 260331	100 0
	5500	5500	4754 00	0 26257	0 98444	0 92787	0 262058	0 258054	0 922128	0 262550	100 0
	5500	5842	0 00	0 26257	0 98955	0 23071	0 262278	0 009548	0 230455	0 009458	100 0
22	6000	0	7903 00	0 34896	0 00005	0 98957	0 000040	0 348532	0 000054	0 000040	100 0
23	6000	500	7902 00	0 34896	0 00421	0 98957	0 002852	0 348531	0 004212	0 002850	100 0
	6000	1000	7900 00	0 34896	0 04757	0 98955	0 029330	0 348531	0 047530	0 029307	100 0
	6000	1500	7887 00	0 34896	0 18343	0 98947	0 101756	0 348526	0 183237	0 101682	100 0
	6000	2000	7852 00	0 34896	0 38892	0 98924	0 193278	0 348512	0 388394	0 193069	100 0
	6000	2500	7788 00	0 34896	0 59103	0 98860	0 265273	0 348487	0 589975	0 265423	100 0
	6000	3000	7690 00	0 34896	0 74614	0 98810	0 308135	0 348444	0 744316	0 307898	100 0
	6000	3500	7550 00	0 34896	0 84953	0 98701	0 330045	0 348377	0 846588	0 329504	100 0
	6000	4000	7348 00	0 34896	0 91319	0 98526	0 340413	0 348264	0 908478	0 339739	100 0

TABLE 4.4c VECTORES SOLUCION

Comda	GASTOS			MARGINALES						T (Años)	
	X1 (m3/s)	X2 (m3/s)	X3 (m3/s)	F(X1)	F(X2)	F(X3)	F(X1, X2)	F(X1, X3)	F(X2, X3)		F(X1, X2, X3)
24	6000	4500	7019 00	0.34896	0.95069	0.98195	0.345143	0.348035	0.942653	0.344230	100.0
	6000	5000	6400 00	0.34896	0.97223	0.97353	0.347285	0.347375	0.955778	0.345680	100.0
	6000	5500	4750 00	0.34896	0.98444	0.97250	0.348209	0.342354	0.921969	0.341621	100.0
	6000	5832	0 00	0.34896	0.99943	0.23071	0.348523	0.124532	0.230451	0.124413	100.0
	6050	0	7900 00	0.35775	0.00005	0.98955	0.000040	0.357306	0.000054	0.000040	100.0
	6500	0	7878 00	0.36555	0.00005	0.98940	0.000043	0.435942	0.000054	0.000043	100.0
	8500	500	7878 00	0.43655	0.00421	0.98940	0.003182	0.435942	0.004212	0.003180	100.0
25	8500	1000	7874 00	0.43655	0.04757	0.98938	0.033542	0.435941	0.047529	0.033515	100.0
	8500	1500	7863 00	0.43655	0.18343	0.98931	0.119436	0.435935	0.183233	0.119320	100.0
	8500	2000	7833 00	0.43655	0.38892	0.98911	0.232304	0.435919	0.388386	0.232037	100.0
	8500	2500	7775 00	0.43655	0.59103	0.98871	0.324575	0.435886	0.589963	0.324140	100.0
	8500	3000	7682 00	0.43655	0.74614	0.98804	0.381207	0.435831	0.744303	0.380616	100.0
	8500	3500	7545 00	0.43655	0.84953	0.98697	0.410721	0.435740	0.846576	0.409983	100.0
	8500	4000	7343 00	0.43655	0.91319	0.98523	0.424835	0.435569	0.908464	0.423911	100.0
	8500	4500	7017 00	0.43655	0.95069	0.98192	0.431306	0.435271	0.942640	0.430053	100.0
26	8500	5000	6399 00	0.43655	0.97223	0.97351	0.434216	0.434395	0.955765	0.432052	100.0
	8500	5500	4741 00	0.43655	0.98444	0.27211	0.435513	0.427418	0.271560	0.426416	100.0
	8500	5820	0 00	0.43655	0.98928	0.23071	0.435933	0.147088	0.230448	0.146939	100.0
	7000	0	7845 00	0.52071	0.00005	0.98919	0.000046	0.519898	0.000054	0.000046	100.0
27	7000	500	7844 00	0.52071	0.00421	0.98918	0.003444	0.519897	0.004212	0.003441	100.0
	7000	1000	7843 00	0.52071	0.04757	0.98918	0.036976	0.519897	0.047528	0.036945	100.0
28	7000	1500	7834 00	0.52071	0.18343	0.98911	0.134367	0.519890	0.183228	0.134230	100.0
	7000	2000	7809 00	0.52071	0.38892	0.98894	0.266573	0.519872	0.388374	0.266247	100.0
	7000	2500	7757 00	0.52071	0.59103	0.98858	0.378527	0.519833	0.589946	0.377981	100.0
	7000	3000	7671 00	0.52071	0.74614	0.98795	0.449402	0.519765	0.744286	0.448648	100.0
	7000	3500	7539 00	0.52071	0.84953	0.98692	0.487148	0.519650	0.846560	0.486192	100.0
	7000	4000	7339 00	0.52071	0.91319	0.98520	0.505424	0.519440	0.908468	0.504220	100.0
	7000	4500	7014 00	0.52071	0.95069	0.98189	0.513857	0.519037	0.842619	0.512218	100.0
	7000	5000	6325 00	0.52071	0.97223	0.97345	0.517660	0.517846	0.955712	0.514822	100.0
	7000	5500	4730 00	0.52071	0.98444	0.26262	0.519358	0.506673	0.261113	0.507369	100.0
	7000	5805	0 00	0.52071	0.98909	0.23071	0.519888	0.166319	0.230440	0.166142	100.0
	7500	0	7808 00	0.59824	0.00005	0.98994	0.000048	0.597184	0.000054	0.000048	100.0
31	7500	500	7808 00	0.59824	0.00421	0.98984	0.003645	0.597184	0.004211	0.003643	100.0
	7500	1000	7807 00	0.59824	0.04757	0.98983	0.030660	0.597183	0.047527	0.030645	100.0
	7500	1500	7800 00	0.59824	0.18343	0.98986	0.146451	0.597176	0.183222	0.148296	100.0
	7500	2000	7779 00	0.59824	0.38892	0.98874	0.295249	0.597157	0.388360	0.294967	100.0
	7500	2500	7735 00	0.59824	0.59103	0.98842	0.425229	0.597114	0.589926	0.425472	100.0
	7500	3000	7656 00	0.59824	0.74614	0.98784	0.510060	0.597034	0.744261	0.509132	100.0
	7500	3500	7529 00	0.59824	0.84953	0.98664	0.556315	0.596893	0.846534	0.555123	100.0
	7500	4000	7333 00	0.59824	0.91319	0.98514	0.579043	0.596642	0.908423	0.577530	100.0
	7500	4500	7010 00	0.59824	0.95069	0.98185	0.589612	0.596124	0.842592	0.587548	100.0
	7500	5000	6391 00	0.59824	0.97223	0.97338	0.594307	0.594618	0.955660	0.590813	100.0
32	7500	5500	4711 00	0.59824	0.98444	0.26278	0.596536	0.582862	0.262099	0.581231	100.0
	7500	5787	0 00	0.59824	0.98886	0.23071	0.597173	0.182007	0.230432	0.181804	100.0
	8000	0	7800 00	0.61277	0.00005	0.98986	0.000049	0.611656	0.000054	0.000049	100.0
	8000	0	7767 00	0.66732	0.00005	0.98965	0.000050	0.665979	0.000054	0.000050	100.0
	8000	500	7767 00	0.66732	0.00421	0.98965	0.003798	0.665979	0.004211	0.003795	100.0
	8000	1000	7760 00	0.66732	0.04757	0.98964	0.041754	0.665978	0.047525	0.041716	100.0
	8000	1500	7761 00	0.66732	0.18343	0.98961	0.155923	0.665972	0.183215	0.155749	100.0
33	8000	2000	7744 00	0.66732	0.38892	0.98949	0.318353	0.665952	0.388343	0.317817	100.0
	8000	2500	7706 00	0.66732	0.59103	0.98921	0.464041	0.665906	0.589897	0.463273	100.0
	8000	3000	7635 00	0.66732	0.74614	0.98766	0.561899	0.665815	0.744227	0.560793	100.0
	8000	3500	7516 00	0.66732	0.84953	0.98674	0.616603	0.665651	0.846501	0.615162	100.0
	8000	4000	7325 00	0.66732	0.91319	0.98507	0.643943	0.665349	0.908390	0.642099	100.0
	8000	4500	7004 00	0.66732	0.95069	0.98178	0.658778	0.664715	0.942551	0.654249	100.0
	8000	5000	6385 00	0.66732	0.97223	0.97328	0.662617	0.662864	0.955581	0.658219	100.0
	8000	5500	4688 00	0.66732	0.98444	0.24274	0.665233	0.648202	0.241930	0.646226	100.0
	8000	5787	0 00	0.66732	0.98860	0.23071	0.665969	0.194381	0.230423	0.194153	100.0
34	8500	0	7721 00	0.72728	0.00005	0.98832	0.000051	0.725604	0.000054	0.000051	100.0
	8500	500	7721 00	0.72728	0.00421	0.98832	0.003911	0.725604	0.004211	0.003908	100.0
	8500	1000	7721 00	0.72728	0.04757	0.98832	0.043315	0.725604	0.047524	0.043275	100.0
	8500	1500	7716 00	0.72728	0.18343	0.98829	0.163170	0.725596	0.183208	0.162979	100.0
	8500	2000	7703 00	0.72728	0.38892	0.98819	0.336425	0.725577	0.388322	0.335939	100.0
	8500	2500	7671 00	0.72728	0.59103	0.98795	0.495241	0.725529	0.589862	0.494367	100.0

TABLA 4.4i VECTORES SOLUCION

Comda	GASTOS			MARGINALES			DISTRIBUCIONES CONJUNTAS				T (Años)
	X1 (m ³ /s)	X2 (m ³ /s)	X3 (m ³ /s)	F(X1)	F(X2)	F(X3)	F(X1, X2)	F(X1, X3)	F(X2, X3)	F(X1, X2, X3)	
37	8500	3000	7800	0.72728	0.74814	0.98748	0.804741	0.725433	0.744183	0.803457	100.0
37	8500	3500	7498	0.72728	0.84953	0.98650	0.667525	0.725248	0.846453	0.665825	100.0
37	8500	4000	7313	0.72728	0.91319	0.98406	0.895500	0.724892	0.906341	0.807314	100.0
37	8500	4500	6998	0.72728	0.95089	0.98160	0.714701	0.724137	0.942496	0.711877	100.0
37	8500	5000	6378	0.72728	0.97223	0.97313	0.721853	0.721907	0.955462	0.716372	100.0
37	8500	5500	4650	0.72728	0.98444	0.92301	0.724777	0.703799	0.917821	0.701459	100.0
37	8500	5743	0	0.72728	0.98827	0.23071	0.725594	0.203895	0.230411	0.203643	100.0
38	9000	0	7669	0.77825	0.00005	0.98794	0.000052	0.778189	0.000054	0.000052	100.0
39	9000	500	7669	0.77825	0.00421	0.98794	0.003995	0.778189	0.004211	0.003991	100.0
39	9000	1000	7669	0.77825	0.04757	0.98794	0.044475	0.778189	0.047522	0.044431	100.0
39	9000	1500	7665	0.77825	0.18343	0.98791	0.188617	0.778182	0.183196	0.188410	100.0
39	9000	2000	7655	0.77825	0.38897	0.98763	0.350246	0.778184	0.388297	0.349711	100.0
39	9000	2500	7629	0.77825	0.59103	0.98764	0.519659	0.778116	0.580819	0.518681	100.0
39	9000	3000	7575	0.77825	0.74814	0.98721	0.639182	0.778014	0.741125	0.637899	100.0
39	9000	3500	7474	0.77825	0.84953	0.98639	0.709399	0.775810	0.848388	0.707433	100.0
39	9000	4000	7296	0.77825	0.91319	0.98480	0.745637	0.775403	0.908269	0.743371	100.0
39	9000	4500	6983	0.77825	0.95089	0.98154	0.783535	0.774517	0.942406	0.759978	100.0
39	9000	5000	6363	0.77825	0.97223	0.97292	0.771650	0.771876	0.955288	0.785412	100.0
39	9000	5500	4594	0.77825	0.98444	0.92038	0.775310	0.749582	0.915075	0.746903	100.0
40	9000	5716	0	0.77825	0.98790	0.23071	0.776179	0.211073	0.230398	0.210798	100.0
41	9170	0	7650	0.79363	0.00005	0.98780	0.000052	0.791432	0.000054	0.000052	100.0
42	9500	0	7810	0.82088	0.00005	0.98749	0.000053	0.818368	0.000054	0.000053	100.0
43	9500	500	7811	0.82088	0.00421	0.98750	0.004056	0.818370	0.004211	0.004052	100.0
43	9500	1000	7810	0.82088	0.04757	0.98749	0.045328	0.818368	0.047519	0.045281	100.0
43	9500	1500	7808	0.82088	0.18343	0.98747	0.172659	0.818363	0.183185	0.172434	100.0
43	9500	2000	7699	0.82088	0.38892	0.98740	0.360636	0.818344	0.388266	0.360050	100.0
43	9500	2500	7578	0.82088	0.59103	0.98724	0.538366	0.818297	0.589784	0.537283	100.0
43	9500	3000	7328	0.82088	0.74814	0.98687	0.686187	0.818192	0.744048	0.684523	100.0
43	9500	3500	7441	0.82088	0.84953	0.98610	0.743044	0.817972	0.846297	0.740802	100.0
43	9500	4000	7273	0.82088	0.91319	0.98458	0.783927	0.817518	0.908171	0.780671	100.0
43	9500	4500	6995	0.82088	0.95089	0.98133	0.803938	0.816449	0.942280	0.799909	100.0
43	9500	5000	6344	0.82088	0.97223	0.97260	0.813254	0.813393	0.995031	0.805970	100.0
43	9500	5500	4506	0.82088	0.98444	0.91607	0.817477	0.785591	0.910888	0.782582	100.0
43	9500	5885	0	0.82088	0.98745	0.23071	0.818358	0.216413	0.230382	0.218115	100.0
44	10000	0	7544	0.85607	0.00005	0.98697	0.000053	0.850306	0.000054	0.000053	100.0
44	10000	500	7543	0.85607	0.00421	0.98696	0.004100	0.850303	0.004211	0.004099	100.0
44	10000	1000	7543	0.85607	0.04757	0.98696	0.045950	0.850303	0.047518	0.045899	100.0
44	10000	1500	7541	0.85607	0.18343	0.98694	0.175828	0.850308	0.183170	0.175385	100.0
44	10000	2000	7534	0.85607	0.38892	0.98688	0.368347	0.850309	0.388228	0.367709	100.0
44	10000	2500	7517	0.85607	0.59103	0.98674	0.552460	0.850296	0.589895	0.551269	100.0
44	10000	3000	7479	0.85607	0.74814	0.98643	0.688938	0.852860	0.743949	0.685108	100.0
44	10000	3500	7398	0.85607	0.84953	0.98573	0.789534	0.852627	0.848175	0.787003	100.0
44	10000	4000	7240	0.85607	0.91319	0.98426	0.814445	0.852123	0.908027	0.811009	100.0
44	10000	4500	6940	0.85607	0.95089	0.98104	0.839832	0.850956	0.942101	0.832064	100.0
44	10000	5000	6315	0.85607	0.97223	0.97211	0.847377	0.847300	0.854632	0.838917	100.0
44	10000	5500	4848	0.85607	0.98444	0.90864	0.852187	0.811473	0.903682	0.808187	100.0
44	10000	5650	0	0.85607	0.98693	0.23071	0.853025	0.220345	0.230363	0.220023	100.0
47	10285	0	7500	0.87319	0.00005	0.98660	0.000053	0.869803	0.000054	0.000053	100.0
47	10500	500	7468	0.88484	0.00421	0.98632	0.004132	0.881161	0.004211	0.004128	100.0
48	10500	1000	7485	0.88484	0.04757	0.98631	0.046402	0.881158	0.047512	0.046347	100.0
49	10500	1500	7405	0.88484	0.18343	0.98631	0.177795	0.881158	0.183153	0.177331	100.0
50	10500	2000	7412	0.88484	0.38892	0.98585	0.362658	0.880895	0.388181	0.362285	100.0
50	10500	2500	7272	0.88484	0.59103	0.98573	0.537021	0.874589	0.584025	0.536502	100.0
51	10500	3000	7029	0.88484	0.74814	0.98529	0.681152	0.873219	0.743810	0.682868	100.0
51	11000	0	7375	0.90817	0.00005	0.98552	0.000054	0.903695	0.000054	0.000054	100.0
52	11000	500	7375	0.90817	0.00421	0.98552	0.004155	0.903695	0.004210	0.004151	100.0
53	11000	1000	7374	0.90817	0.04757	0.98551	0.046730	0.903691	0.047508	0.046670	100.0
54	11000	1500	7373	0.90817	0.18343	0.98551	0.179389	0.903687	0.183130	0.179080	100.0
55	11000	2000	7370	0.90817	0.38892	0.98548	0.378154	0.903676	0.388122	0.377390	100.0
56	11000	2500	7358	0.90817	0.59103	0.98537	0.570664	0.903629	0.589497	0.569220	100.0
57	11000	3000	7331	0.90817	0.74814	0.98512	0.714400	0.903522	0.743849	0.712141	100.0
58	11000	3500	7288	0.90817	0.84953	0.98453	0.805830	0.903264	0.845775	0.802435	100.0
59	11000	4000	7133	0.90817	0.91319	0.98318	0.857324	0.902661	0.907530	0.852970	100.0

TABLE 4.4e VECTORES SOLUCION

Corrida	G A S T O S			M A R G I N A L E S			D I S T R I B U C I O N E S C O N J U N T A S					T (Años)
	X1 (m3/a)	X2 (m3/a)	X3 (m3/a)	F(X1)	F(X2)	F(X3)	F(X1, X2)	F(X1, X3)	F(X2, X3)	F(X1, X2, X3)		
80	11000	4500	8850	0.90817	0.95069	0.97998	0.884152	0.901150	0.941427	0.877915	100.0	
81	11000	5000	8208	0.90817	0.97223	0.97020	0.897178	0.896008	0.953085	0.885710	100.0	
	11000	5000	8208	0.90817	0.97223	0.97017	0.897170	0.896008	0.953055	0.885691	100.0	
	11000	5500	3600	0.90817	0.98444	0.85687	0.903226	0.811838	0.852974	0.808547	100.0	
82	11000	11000	0	0.90817	0.88551	0.23071	0.903668	0.225308	0.230310	0.224924	100.0	
	11500	500	7266	0.92697	0.00421	0.88451	0.004172	0.921482	0.004210	0.004167	100.0	
83	11500	1000	7267	0.92697	0.04757	0.88452	0.046966	0.921487	0.047502	0.046899	100.0	
84	11500	1500	7285	0.92697	0.18343	0.88450	0.180507	0.921478	0.183100	0.180167	100.0	
85	11500	3000	7228	0.92697	0.74614	0.98414	0.723081	0.921301	0.743417	0.720544	100.0	
	11500	5000	8112	0.92697	0.97223	0.98839	0.914756	0.912405	0.951591	0.901161	100.0	
	11500	5000	0	0.92697	0.98450	0.23071	0.921478	0.226821	0.230271	0.226395	100.0	
86	12000	0	7133	0.94204	0.00095	0.98318	0.000054	0.935225	0.000054	0.000054	100.0	
87	12000	500	7133	0.94204	0.00421	0.98316	0.004184	0.935225	0.004209	0.004179	100.0	
	12000	5000	5960	0.94204	0.97223	0.96529	0.926574	0.923882	0.949004	0.911890	100.0	
	12000	5432	0	0.94204	0.98316	0.23071	0.935217	0.227913	0.230218	0.227432	100.0	
88	12410	0	7000	0.95211	0.00095	0.98173	0.000054	0.943846	0.000054	0.000054	100.0	
	12500	500	6960	0.95408	0.00421	0.98134	0.004192	0.945432	0.004208	0.004186	100.0	
	12500	5000	5817	0.95408	0.97223	0.95904	0.939332	0.929891	0.944095	0.917457	100.0	
	12500	5343	0	0.95408	0.98133	0.23071	0.945424	0.228699	0.230141	0.228142	100.0	
89	13000	0	6750	0.96367	0.00005	0.97868	0.000054	0.952346	0.000054	0.000054	100.0	
90	13000	500	6750	0.96367	0.00421	0.97868	0.004199	0.952346	0.004207	0.004191	100.0	
	13000	5000	5252	0.96367	0.97223	0.94650	0.947629	0.926599	0.932587	0.914412	100.0	
91	13000	5228	0	0.96367	0.97867	0.23071	0.952342	0.229265	0.230025	0.228591	100.0	
72	13435	0	6500	0.97039	0.00005	0.97511	0.000054	0.955503	0.000054	0.000054	100.0	
73	13500	500	6456	0.97129	0.00421	0.97443	0.004193	0.955711	0.004205	0.004194	100.0	
74	13500	3500	6375	0.97129	0.84953	0.97312	0.848651	0.954673	0.841428	0.832818	100.0	
75	13500	5000	4000	0.97129	0.97223	0.89666	0.953967	0.876291	0.876761	0.868834	100.0	
	13500	5070	0	0.97129	0.97439	0.23071	0.955481	0.224942	0.228926	0.228798	100.0	
76	14000	0	6028	0.97732	0.00095	0.96672	0.000054	0.954041	0.000054	0.000054	100.0	
77	14000	500	6030	0.97732	0.00421	0.96672	0.004206	0.954041	0.004201	0.004192	100.0	
	14000	1000	6028	0.97732	0.04757	0.96672	0.047454	0.954041	0.047372	0.047258	100.0	
	14000	2000	6023	0.97732	0.18910	0.96661	0.187432	0.953952	0.186356	0.184888	100.0	
	14000	2500	6015	0.97732	0.39103	0.96645	0.388196	0.953910	0.386117	0.383324	100.0	
78	14000	3000	5993	0.97732	0.74614	0.95603	0.741650	0.953358	0.738203	0.733822	100.0	
79	14000	3500	5200	0.97732	0.84953	0.95459	0.843135	0.952109	0.837611	0.831500	100.0	
80	14000	4000	5747	0.97732	0.91319	0.95405	0.904842	0.848538	0.849499	0.847126	100.0	
81	14000	4500	5150	0.97732	0.95609	0.94307	0.939747	0.832752	0.914029	0.905438	100.0	
82	14000	4842	0	0.97732	0.96669	0.23071	0.954017	0.229964	0.229431	0.228695	100.0	
83	14027	0	6000	0.97761	0.00005	0.96614	0.000054	0.953750	0.000054	0.000054	100.0	
	14415	0	5500	0.98137	0.00005	0.95400	0.000054	0.945370	0.000054	0.000054	100.0	
84	14500	500	5360	0.98210	0.00421	0.94990	0.004209	0.942008	0.004190	0.004184	100.0	
85	14500	3500	5170	0.98210	0.84953	0.94376	0.844930	0.936244	0.827036	0.828211	100.0	
	14500	4200	4410	0.98210	0.93667	0.91111	0.923816	0.805012	0.872753	0.867609	100.0	
86	14500	4485	0	0.98210	0.94984	0.23071	0.941952	0.230174	0.228431	0.227906	100.0	
	14800	0	5000	0.98364	0.00005	0.93766	0.000054	0.931302	0.000054	0.000054	100.0	
87	14807	0	4500	0.98510	0.00005	0.91576	0.000054	0.910938	0.000054	0.000054	100.0	
88	15000	0	4190	0.98588	0.00005	0.89669	0.000054	0.894578	0.000054	0.000054	100.0	
89	15000	500	4190	0.98588	0.00421	0.89669	0.004210	0.894578	0.004146	0.004142	100.0	
	15000	3500	3450	0.98588	0.84953	0.84396	0.846225	0.840722	0.760572	0.758149	100.0	
90	15000	3858	0	0.98588	0.89669	0.23071	0.893991	0.230024	0.224433	0.224065	100.0	
	15058	0	4000	0.98627	0.00005	0.89666	0.000054	0.882932	0.000053	0.000053	100.0	
	15190	0	3500	0.99710	0.00005	0.84838	0.000054	0.845473	0.000053	0.000053	100.0	
	15298	0	3000	0.84775	0.00005	0.79870	0.000054	0.796443	0.000052	0.000052	100.0	
91	15390	0	2500	0.98827	0.00005	0.73548	0.000054	0.733730	0.000051	0.000051	100.0	
	15470	0	2000	0.98871	0.00005	0.65703	0.000054	0.655738	0.000050	0.000050	100.0	
	15500	500	1780	0.98887	0.00421	0.61758	0.004211	0.616444	0.003691	0.003668	100.0	
	15500	2500	1000	0.98887	0.59103	0.25215	0.589984	0.251845	0.196351	0.196127	100.0	
92	15500	2510	0	0.98887	0.59466	0.23071	0.593602	0.230432	0.181324	0.181122	100.0	
	15536	0	1500	0.98906	0.00005	0.50318	0.000054	0.562238	0.000047	0.000047	100.0	
	15593	0	1000	0.98935	0.00005	0.45618	0.000054	0.455534	0.000044	0.000044	100.0	
93	15640	0	500	0.98959	0.00005	0.34202	0.000054	0.341602	0.000039	0.000039	100.0	
94	15670	500	60	0.98973	0.00421	0.24351	0.004212	0.243244	0.002350	0.002348	100.0	
	15870	1000	0	0.98973	0.04757	0.23071	0.047531	0.230461	0.022349	0.022333	100.0	
95	15875	0	0	0.98978	0.00005	0.23071	0.000054	0.230482	0.000033	0.000033	100.0	

A continuación se presenta una iteración calculada explícitamente, de tal manera de poder ilustrar en forma clara la metodología propuesta.

Tomemos el vector solución designado como corrida 18 en la tabla 4.4, el cual corresponde a:

$$x_1 = 5000 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_2 = 5000 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_3 = 6403 \text{ m}^3/\text{s}$$

Estos valores satisfacen plenamente la ecuación (4.11) y han sido obtenidos estableciendo x_1 y x_2 como constantes y determinado el valor de x_3 que logre la satisfacción de la igualdad.

Para este vector solución se tienen los siguientes datos:

$$F(x_1) = 0.18296$$

$$F(x_2) = 0.97223$$

$$F(x_3) = 0.97358$$

$$F(x_1, x_2) = 0.182219$$

$$F(x_1, x_3) = 0.182269$$

$$F(x_2, x_3) = 0.955817$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.181534$$

$$T_{123} = 100 \text{ años}$$

Se puede observar de estos resultados que se cumplen tanto con las desigualdades de las fronteras de Fréchet como la desigualdad para valores de extremos propuesta por Tiago de Oliveira y registrada en [15], así como con el postulado de estabilidad.

Con los valores de (x_1, x_2, x_3) obtenidos se construyen los hidrogramas mayorándolos según los datos registrados en la tabla 4.2. Los hidrogramas resultantes son los detallados en la tabla 4.5.

Tabla 4.5a Hidrogramas Mayorados

Tiempo (h)	Gastos (m ³ /s)		
	Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan
0	905	449	1726
24	836	408	1623
48	847	385	1600
72	694	372	1590
96	655	377	1663
120	605	367	1973
144	828	364	2383
168	697	333	2391
192	1589	297	2861
216	3860	284	3317
240	4755	300	3796
264	4130	297	5255
288	3503	269	6403
312	4374	333	4408
336	5000	666	2716
360	4108	821	2009
384	1657	679	1608
408	1657	679	1608
432	1296	653	1429
456	1087	1098	1220
480	956	2838	1053
504	889	5000	966
528	900	3412	874
552	757	2296	853

Tiempo (h)	Gastos (m ³ /s)		
	Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan
576	586	1862	844
600	586	1862	844
624	539	1816	842
648	507	1415	893
672	485	1136	904
696	461	1265	869
720	416	1952	837

Tabla 4.5b Hidrogramas Mayorados

Estos hidrogramas mayorados son ahora proporcionados como dato de entrada al modelo de simulación del tránsito de avenidas para la red hidrográfica Papaloapan adaptado para este ejemplo (PAPAL2), a través del archivo de datos correspondiente, el cual también ha sido adaptado de tal forma que en los tramos en los cuales se ubicará la obra de protección proyecto, se considere ya el efecto de los bordos. Esto se logra introduciendo en el archivo de datos elevaciones de los bordos naturales muy grandes (más grandes que el mayor tirante de agua presentado).

Los resultados arrojados por el programa son los presentados en la tabla 4.6. Se presenta solo el tirante medio máximo registrado en cada uno de los tramos de interés.

Tramo	Tirante Medio Máximo (msnm)
24	3.89
25	3.77
26	3.02
27	2.18
40	8.51
41	7.93
42	6.84
43	4.34

Tabla 4.6

A partir de la morfología de la red y las convenciones y armado del modelo de simulación se tienen las longitudes de los bordos mostradas en la tabla 4.7.

Además se sabe que los bordos se extienden en la forma siguiente :

Bordo	Extensión (Tramos)
1	25, 26, 27, 40, 41, 42, 43
2	24, 25, 26

Tramo	Longitud (m)
24	5145
25	5145
26	5145
27	5145
40	9650
41	9650
42	9650
43	9650

Tabla 4.7

Es posible entonces, obtener el valor explícito de las funciones Φ , utilizadas para la comparación de resultados, tal y como fueron planteadas en la expresión (4.3), para cada uno de los bordos, las cuales resultan:

Bordo	Función $\Phi \times 10^6$ (m ² .msnm)
1	10.24
2	1.62

Estos valores son precisamente los que habrá que confrontar con los obtenidos en el análisis de los otros vectores solución tratados.

En este momento es necesario elegir otra combinación de gastos (x_1, x_2, x_3), vector solución y repetir todos los pasos antes descritos, hasta la obtención de las funciones representativas Φ_1 y Φ_2 .

Para el caso tratado aquí, se han obtenido las combinaciones que presentan los mayores valores de las funciones Φ_1 y Φ_2 que corresponden precisamente a las condiciones más desfavorables para el diseño de cada bordo, bajo la suposición de dependencia parcial.

Estas combinaciones y resultados son:

Para el Bordo 1 (Corrida 57):

$$x_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_2 = 3000 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_3 = 7331 \text{ m}^3/\text{s}$$

Esta combinación produce una función $\Phi_1 = 11.36 \times 10^6 \text{ m}^2 \cdot \text{msnm}$

De acuerdo a las expresiones (4.18) a (4.20), esta combinación corresponde a los siguientes periodos de retorno en las corrientes individuales:

$$T_1 = 10.89 \text{ Años}$$

$$T_2 = 3.94 \text{ Años}$$

$$T_3 = 67.20 \text{ Años}$$

En las estaciones Tuxtepec (Río Papaloapan), Azueta (Río Tesechoacán) y Cuatrotolapan (Río San Juan) respectivamente.

Las elevaciones medias máximas por tramo son las mostradas en la tabla 4.8.

Para el Bordo 2 (Corrida 80):

$$x_1 = 14000 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_2 = 4000 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_3 = 5747 \text{ m}^3/\text{s}$$

Combinaciones que arrojan un resultado $\Phi_2 = 2.15 \times 10^6 \text{ m}^2 \cdot \text{msnm}$

De acuerdo a las expresiones (4.18) a (4.20), esta combinación corresponde a los siguientes períodos de retorno en las corrientes individuales:

$$T_1 = 44.09 \text{ Años}$$

$$T_2 = 11.52 \text{ Años}$$

$$T_3 = 25.28 \text{ Años}$$

En los ríos Papaloapan, Tesechoacán y San Juan respectivamente.

Las elevaciones medias máximas para este caso se muestran en la tabla 4.9.

Tramo	Tirante Medio Máximo (msnm)
24	4.86
25	4.68
26	3.86
27	2.88
40	8.86
41	8.28
42	7.25
43	5.12

Tabla 4.8 Elevaciones Medias Máximas para el Bordo 1

Tramo	Tirante Medio Máximo (msnm)
24	5.03
25	4.78
26	3.97
27	2.98
40	8.36
41	7.82
42	6.85
43	5.06

Tabla 4.9 Elevaciones Medias Máxima para el Bordo 2

Al final del proceso, se ha obtenido entonces, el limnograma más desfavorable para cada obra por separado, de tal forma que es posible conocer la altura requerida en cada bordo de protección (simplemente adicionando una altura de bordo libre, si este es económicamente factible) y proceder al diseño completo de la obra hidráulica.

Cabe señalar que la combinación más desfavorable de los gastos que resulte, será una función de la obra por diseñar y por supuesto de la red hidrográfica en estudio en cuanto a su morfología en general.

Los limnogramas obtenidos en todas las combinaciones de gastos probadas se presentan resumidas en las tablas 4.10. En éstas también se registra el valor de las funciones Φ representativas de la solución.

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	1	2	3	4	5	6	7	8
24	3.47	2.34	2.41	2.44	2.46	2.48	2.51	2.47
25	3.42	2.33	2.40	2.43	2.45	2.46	2.49	2.45
26	2.69	1.82	1.87	1.90	1.91	1.92	1.94	1.91
27	1.94	1.35	1.39	1.40	1.41	1.41	1.42	1.41
40	9.00	8.95	8.95	8.93	8.91	8.83	8.76	8.65
41	8.39	8.33	8.32	8.31	8.28	8.21	8.14	8.03
42	7.24	7.11	7.11	7.10	7.07	7.00	6.94	6.83
43	4.24	3.53	3.56	3.58	3.58	3.55	3.54	3.46
$\Phi_1(10^6)$	10.64	9.95	9.97	9.97	9.94	9.84	9.76	9.59
$\Phi_2(10^6)$	1.44	0.98	1.01	1.02	1.03	1.03	1.04	1.03

Tabla 4.10a

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	9	10	11	12	13	14	15	16
24	2.04	1.64	3.64	3.80	3.78	3.84	3.86	3.90
25	2.01	1.44	3.58	3.72	3.67	3.76	3.77	3.81
26	1.57	1.16	2.84	2.97	2.93	3.00	3.02	3.05
27	1.18	0.90	2.05	2.15	2.12	2.17	2.18	2.21
40	7.82	1.91	9.00	9.01	8.51	9.01	9.01	9.00
41	7.22	1.8	8.40	8.40	7.92	8.40	8.41	8.40
42	5.98	1.62	7.26	7.28	6.83	7.28	7.28	7.28
43	2.85	1.48	4.36	4.47	4.26	4.49	4.50	4.52
$\Phi_1(10^6)$	8.24	2.55	10.76	10.86	10.16	10.88	10.90	10.91
$\Phi_2(10^6)$	0.86	0.67	1.52	1.59	1.57	1.61	1.62	1.63

Tabla 4.10b

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	17	18	19	20	21	22	23	24
24	3.91	3.89	2.94	3.96	3.95	4.01	4.02	4.07
25	3.82	3.77	2.61	3.87	3.82	3.91	3.92	3.88
26	2.97	3.02	2.05	3.11	3.06	3.14	3.15	3.12
27	2.15	2.18	1.49	2.25	2.22	2.28	2.29	2.28
40	9.01	8.51	3.03	9.00	8.51	9.00	9.00	8.51
41	8.40	7.93	2.93	8.40	7.93	8.40	8.40	7.94
42	7.28	6.84	2.77	7.29	6.85	7.29	7.29	6.86
43	4.47	4.34	2.63	4.57	4.37	4.59	4.60	4.41
$\Phi_1 (10^\circ)$	10.88	10.24	4.13	10.96	10.27	10.98	10.99	10.32
$\Phi_2 (10^\circ)$	1.62	1.62	1.14	1.66	1.64	1.68	1.69	1.68

Tabla 4.10c

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	25	26	27	28	29	30	31	32
24	4.09	4.19	4.23	4.21	4.31	3.45	4.33	4.42
25	3.98	3.98	4.09	4.06	4.1	3.08	4.15	4.21
26	3.21	3.22	3.31	3.28	3.32	2.44	3.37	3.42
27	2.33	2.36	2.42	2.39	2.44	1.77	2.47	2.52
40	8.99	8.52	8.98	8.98	8.52	3.46	8.97	8.52
41	8.39	7.94	8.39	8.38	7.94	3.37	8.38	7.95
42	7.29	6.86	7.29	7.28	6.87	3.23	7.28	6.88
43	4.64	4.45	4.72	4.67	4.51	3.10	4.72	4.57
$\Phi_1 (10^\circ)$	11.02	10.38	11.09	11.05	10.45	4.82	11.10	10.53
$\Phi_2 (10^\circ)$	1.72	1.74	1.78	1.76	1.79	1.35	1.81	1.85

Tabla 4.10d

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	33	34	35	36	37	38	39	40
24	4.33	4.42	4.51	4.50	4.59	4.54	4.57	4.65
25	4.15	4.24	4.30	4.33	4.37	4.38	4.40	4.43
26	3.37	3.45	3.51	3.52	3.58	3.58	3.59	3.64
27	2.47	2.54	2.59	2.60	2.67	2.63	2.65	2.70
40	8.97	8.96	8.52	8.95	8.52	8.94	8.94	8.52
41	8.38	8.37	7.95	8.36	7.96	8.35	8.35	7.96
42	7.28	7.28	6.89	7.28	6.91	7.27	7.28	6.92
43	4.72	4.78	4.65	4.83	4.72	4.88	4.89	4.79
$\Phi_1 (10^6)$	11.10	11.15	10.60	11.19	10.67	11.22	11.24	10.72
$\Phi_2 (10^6)$	1.81	1.86	1.89	1.90	1.93	1.92	1.94	1.96

Tabla 4.10e

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	41	42	43	44	45	46	47	48
24	3.77	4.57	4.63	4.71	4.68	4.76	4.69	4.75
25	3.38	4.40	4.46	4.49	4.51	4.53	4.52	4.58
26	2.70	3.60	3.65	3.69	3.70	3.73	3.71	3.76
27	1.96	2.65	2.70	2.74	2.74	2.77	2.75	2.79
40	3.73	8.93	8.93	8.52	8.91	8.52	8.90	8.89
41	3.64	8.35	8.34	7.96	8.33	7.96	8.32	8.31
42	3.51	7.27	7.27	6.93	7.27	6.93	7.26	7.26
43	3.39	4.90	4.94	4.85	4.99	4.90	5.00	5.04
$\Phi_1 (10^6)$	5.27	11.23	11.27	10.77	11.29	10.81	11.29	11.32
$\Phi_2 (10^6)$	1.49	1.94	1.97	1.99	1.99	2.01	2.00	2.03

Tabla 4.10f

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	49	50	51	52	53	54	55	56
24	4.77	4.83	3.95	4.77	4.79	4.81	4.83	4.85
25	4.60	4.64	3.55	4.59	4.61	4.63	4.65	4.66
26	3.78	3.83	2.83	3.78	3.80	3.82	3.83	3.85
27	2.81	2.85	2.07	2.81	2.82	2.84	2.85	2.87
40	8.89	8.88	3.88	8.86	8.86	8.86	8.86	8.86
41	8.31	8.30	3.79	8.29	8.29	8.29	8.29	8.29
42	7.26	7.26	3.66	7.24	7.25	7.25	7.25	7.25
43	5.05	5.09	3.56	5.05	5.06	5.08	5.09	5.11
$\Phi_1 (10^6)$	11.33	11.36	5.52	11.30	11.32	11.33	11.34	11.36
$\Phi_2 (10^6)$	2.04	2.06	1.56	2.04	2.05	2.06	2.07	2.07

Tabla 4.10g

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	57	58	59	60	61	62	63	64
24	4.86	4.88	4.88	4.88	4.84	4.00	4.82	4.84
25	4.68	4.69	4.69	4.67	4.61	3.59	4.64	4.66
26	3.86	3.87	3.87	3.86	3.80	2.88	3.83	3.84
27	2.88	2.89	2.89	2.87	2.84	2.10	2.85	2.86
40	8.86	8.84	8.79	8.70	8.49	3.92	8.83	8.83
41	8.28	8.27	8.23	8.14	7.94	3.83	8.26	8.26
42	7.25	7.23	7.20	7.12	6.93	3.71	7.23	7.23
43	5.12	5.12	5.11	5.07	4.97	3.61	5.08	5.10
$\Phi_1 (10^6)$	11.36	11.35	11.29	11.16	10.86	5.59	11.30	11.32
$\Phi_2 (10^6)$	2.08	2.09	2.09	2.08	2.06	1.59	2.06	2.07

Tabla 4.10h

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	65	66	67	68	69	70	71	72
24	4.90	4.81	4.83	4.83	4.86	4.89	4.19	4.88
25	4.71	4.63	4.65	4.65	4.66	4.68	3.78	4.66
26	3.89	3.82	3.83	3.83	3.85	3.86	3.04	3.85
27	2.90	2.84	2.85	2.85	2.87	2.88	2.23	2.87
40	8.83	8.79	8.79	8.75	8.67	8.68	4.08	8.59
41	8.26	8.22	8.22	8.19	8.11	8.12	4.00	8.04
42	7.23	7.19	7.19	7.16	7.10	7.10	3.88	7.03
43	5.13	5.07	5.08	5.07	5.06	5.07	3.79	5.04
$\Phi_1 (10^6)$	11.35	11.24	11.25	11.21	11.12	11.14	5.88	11.02
$\Phi_2 (10^6)$	2.10	2.06	2.07	2.07	2.08	2.09	1.68	2.08

Tabla 4.10i

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	73	74	75	76	77	78	79	80
24	4.90	5.02	4.89	4.89	4.91	5.01	5.03	5.03
25	4.68	4.78	4.61	4.65	4.67	4.76	4.77	4.78
26	3.86	3.96	3.81	3.84	3.86	3.95	3.96	3.97
27	2.89	2.98	2.85	2.87	2.89	2.97	2.98	2.98
40	8.58	8.56	7.72	8.44	8.45	8.44	8.42	8.36
41	8.03	8.01	7.22	7.89	7.90	7.89	7.87	7.82
42	7.02	7.02	6.31	6.90	6.91	6.91	6.90	6.85
43	5.05	5.12	4.80	4.99	5.01	5.07	5.07	5.06
$\Phi_1 (10^6)$	11.02	11.07	9.92	10.81	10.84	10.90	10.88	10.82
$\Phi_2 (10^6)$	2.09	2.15	2.07	2.08	2.09	2.14	2.15	2.15

Tabla 4.10j

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	81	82	83	84	85	86	87	88
24	5.00	4.28	4.89	4.90	5.01	4.31	4.84	4.82
25	4.74	3.86	4.65	4.65	4.75	3.90	4.58	4.56
26	3.93	3.12	3.84	3.85	3.94	3.15	3.78	3.76
27	2.95	2.28	2.87	2.88	2.96	2.31	2.82	2.80
40	8.16	4.15	8.43	8.22	8.16	4.18	7.91	7.79
41	7.63	4.07	7.88	7.68	7.64	4.10	7.39	7.28
42	6.68	3.96	6.89	6.71	6.69	3.99	6.45	6.35
43	4.98	3.87	4.99	4.93	4.99	3.90	4.80	4.76
$\Phi_1 (10^6)$	10.54	6.01	10.80	10.54	10.55	6.06	10.11	9.95
$\Phi_2 (10^6)$	2.13	1.72	2.08	2.08	2.13	1.73	2.05	2.04

Tabla 4.10k

Tramo	Elevaciones Máximas (msnm)							
	CORRIDAS							
	89	90	91	92	93	94	95	-
24	4.85	4.34	4.70	4.32	4.38	4.23	4.22	-
25	4.59	3.92	4.42	3.90	4.01	3.82	3.82	-
26	3.78	3.17	3.63	3.15	3.26	3.08	3.08	-
27	2.83	2.32	2.69	2.31	2.39	2.25	2.25	-
40	7.79	4.20	7.06	4.18	5.22	4.13	4.17	-
41	7.28	4.12	6.59	4.11	4.92	4.04	4.08	-
42	6.36	4.01	5.75	4.00	4.45	3.93	3.94	-
43	4.78	3.93	4.57	3.91	4.06	3.83	3.83	-
$\Phi_1 (10^6)$	9.97	6.10	9.02	6.07	6.93	5.95	5.98	-
$\Phi_2 (10^6)$	2.05	1.75	1.97	1.74	1.78	1.70	1.69	-

Tabla 4.10l

Todos los resultados de las tablas 4.10, quedan también resumidos convenientemente en la figura 4.6.

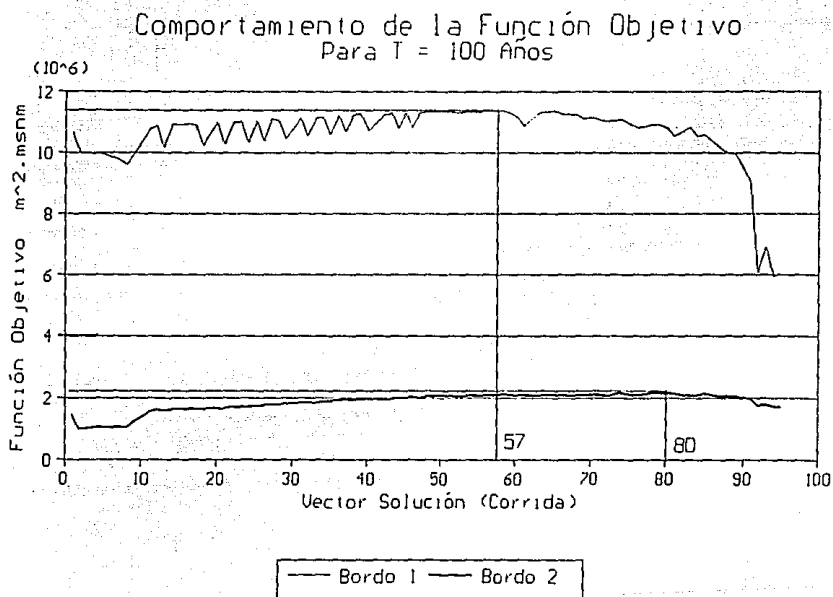


Figura 4.6 Resumen de Resultados de Corridas

Además en las figuras 4.7 y 4.8 se presentan los limnogramas más desfavorables para el período de retorno $T = 100$ años y para cada uno de los bordos de protección analizado separadamente.

Limnograma Más Desfavorable Bordo 1

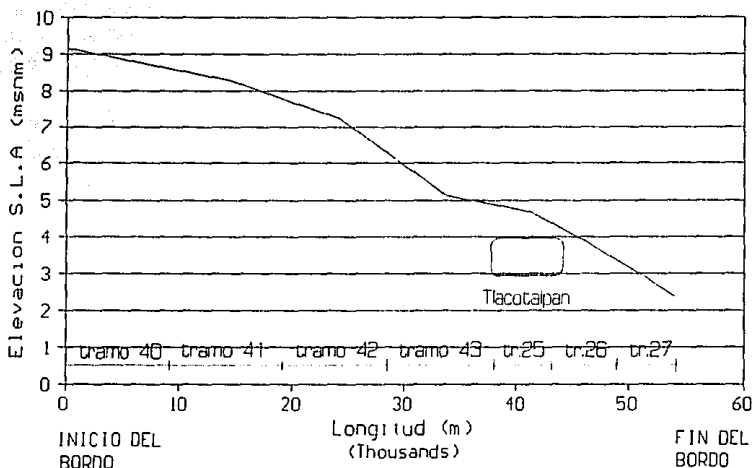


Figura 4.7

Limnograma Más Desfavorable Bordo 2

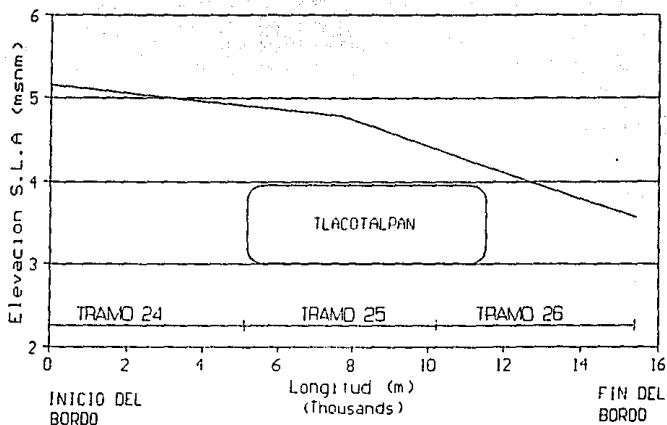


Figura 4.8

Análisis y comentarios de los resultados obtenidos en el ejemplo de aplicación.

A partir de los vectores solución registrados en la tabla 4.4 se puede determinar que existe un valor máximo en el gasto x_1 del tal forma que se siga cumpliendo la ec (4.11) aún cuando los otros dos gastos se aproximen a cero. Tales valores son:

$$x_1 = 15675 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_2 = 5859 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$x_3 = 7970 \text{ m}^3/\text{s}$$

De esta misma tabla es posible deducir que el efecto de la variación de x_1 sobre el resultado es mucho menor que los efectos de variación de x_2 y x_3 sobre la misma.

Por otro lado, se observa también que es el valor de x_3 el que tiene mayor efecto sobre el resultado. Esto obedece a que los parámetros de escala y forma correspondientes a la variable aleatoria x_3 son menores a los asociados con las otras variables aleatorias x_1 y x_2 , de tal manera que una pequeña variación en el valor de x_3 produce un gran efecto en la función de distribución trivariada.

Por otro lado, todo lo anterior coincide con la situación que se mantiene en la realidad, ya que se ha observado que en ciertas ocasiones el río San Juan a través de la estación Cuatutolapan, aporta un gasto aún mayor que el del propio río Papaloapan.

Se observa, a partir de las soluciones más desfavorable para los bordos, que en ambos casos, éstas se presentan para gastos muy grandes en la estación hidrométrica Tuxtepec, en el río Papaloapan.

Resulta evidente que la solución puede resultar más aproximada, si uno elige un error menor al aceptado en este trabajo, en el cual se ha limitado a incrementos de gasto de 500 m³/s, sin embargo esto representa un aumento bastante considerable en el tiempo de cálculo. Además por la comparación de los resultados de los limnogramas para la condición más desfavorable con los de las soluciones más próximas, se encuentran diferencias del orden de 1 cm en promedio, lo cual puede proporcionar un elemento en la decisión de afinar más la solución o no.

Para este caso, la combinación más desfavorable para el diseño de los bordos resultó ser para el bordo 1, la existencia de eventos con períodos de retorno $T_1 = 10.89$ años en el río Papaloapan, $T_2 = 3.94$ años en el río Tesechoacán y $T_3 = 67.20$ años en el río San Juan. Para el bordo 2, la condición más desfavorable se presenta para $T_1 = 44.09$ años en el río Papaloapan, $T_2 = 11.52$ años en el río Tesechoacán y $T_3 = 25.28$ años en el río San Juan.

Análisis de la condición más desfavorable.

Se ha demostrado ya que la condición más desfavorable se presenta para el caso en que las variables aleatorias son completamente dependientes, lo cual queda representado por $\rho = 1$ o bien $m = \infty$ en el modelo logístico de valores extremos.

Cabe señalar que para este caso se presenta un problema en el ajuste o determinación de los parámetros de escala y forma característicos de la distribución (ec. 4.6), ya que la sustitución de $m = \infty$ conduce a una indeterminación en dicha expresión.

Sin embargo, es posible obtener en un análisis simplificado, una solución muy cercana a la más desfavorable, si consideramos como válidos los parámetros de escala y forma correspondientes a la función de distribución trivariada de valores extremos obtenidos bajo la consideración de dependencia parcial.

Recordemos que para el caso de completa dependencia se cumple en primer término la expresión (2.79), dada por Johnson y Kotz [31] y como consecuencia de esta la expresión (3.59).

De acuerdo a esta última expresión los períodos de retorno de los eventos en las corrientes individuales serán iguales al período de retorno de diseño de la obra. Con esta consideración y la aplicación de las expresiones (4.18) a (4.20) se obtiene:

$$X_1 = 15726 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$X_2 = 5880 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$X_3 = 7971 \text{ m}^3/\text{s}$$

Una importante observación consiste en el hecho de este vector solución es prácticamente igual al formado por los máximos valores posibles de los gastos obtenidos en el análisis de la dependencia parcial, y que resultan:

$$X_1 = 15675 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$X_2 = 5859 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$X_3 = 7970 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para el vector solución correspondiente a la completa dependencia, se presenta el limnograma mostrado en la tabla 4.11, el cual fue obtenido por el modelo del tránsito en llanuras de inundación PAPAL2 después de alimentarlo con los hidrogramas construidos por un proceso de mayoración.

Tramo	Tirante Medio Máximo (msnm)
24	5.38
25	5.15
26	4.31
27	3.28
40	9.09
41	8.52
42	7.52
43	5.57

Tabla 4.11

Los valores de las funciones características de los bordos resultan:

$$\Phi_1 = 12.07 \times 10^6 \text{ m}^2 \cdot \text{msnm}$$

$$\Phi_2 = 2.34 \times 10^6 \text{ m}^2 \cdot \text{msnm}$$

Se observa a partir de estos valores, que efectivamente ésta es la condición más desfavorable en la estimación de la avenida de diseño.

Esta condición corresponde al hecho de que tanto los eventos en las corrientes individuales como en el sitio de la obra, tengan el mismo período de retorno ($T = 100$ años en este caso).

De esta manera, se ha obtenido en forma aproximada la solución más desfavorable para el diseño de la obra dado un cierto riesgo.

El paso que queda por dar para llegar en forma efectiva a la estimación de la avenida más desfavorable será precisamente estimar de la mejor manera posible los parámetros característicos de la distribución de probabilidad trivariada de valores extremos, cuando se tiene un parámetro de asociación infinito.

"Lo conocido es finito, lo desconocido infinito; desde el punto de vista intelectual estamos en una pequeña isla en medio de un océano ilimitado de inexplicabilidad. Nuestra tarea en cada generación es recuperar algo más de tierra".

T. H. Huxley

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha introducido en este trabajo una metodología para la estimación de avenidas de diseño en redes de ríos, mediante la utilización de funciones de distribución de probabilidad conjuntas multivariadas como parte esencial del análisis de frecuencias.

Se ha considerado que las variables aleatorias en las corrientes individuales, es decir antes de cualquier confluencia están distribuidas conjuntamente de acuerdo a una distribución conjunta multivariada de valores extremos, sin embargo, es posible mediante la previa realización de pruebas de bondad en el ajuste, elegir alguna otra función de distribución multivariada en la aplicación. De esta manera se deberá utilizar la que presente el menor error en la estimación.

En este trabajo, se ha tomado una distribución de extremos, pensando en que es una buena descripción de eventos representados por los máximos de algún fenómeno.

La distribución multivariada de valores extremos estudiada en este documento, fue la correspondiente a distribuciones marginales tipo Gumbel de una sola población. El caso del ajuste de funciones de distribución trivariadas con marginales tipo Gumbel de dos poblaciones está descrito en la referencia [11], de tal forma que mediante pruebas de bondad en el ajuste es posible determinar cual función de distribución arrojará mejores resultados.

Por otro lado, existe un amplio campo de investigación en lo correspondiente al modelo mixto de valores extremos estudiado por Tiago de Oliveira [54] y a otras funciones de distribución multivariadas y su potencial aplicación a la descripción de fenómenos hidrológicos.

Es de esperarse que para el caso de estaciones hidrométricas con registros largos es posible elegir la función de distribución aplicable con una mayor seguridad de que se tendrán resultados aceptables.

El hecho de tomar alguna otra función de distribución multivariada no incluirá mayores modificaciones a la metodología aquí planteada.

Una de las contribuciones básicas del trabajo consiste en el hecho de tratar a las variables aleatorias, representadas por los gastos máximos en las corrientes antes de cualquier confluencia, como parcialmente dependientes, dejando atrás las soluciones convencionales de total dependencia y total independencia entre las variables dentro de la red de ríos descritas por varios autores, las cuales no toman en cuenta ningún proceso de optimización. Dicha dependencia queda explícitamente reflejada mediante los parámetros de correlación y asociación de las funciones de distribución de probabilidad conjuntas multivariadas.

En este documento se ha demostrado también que la condición más desfavorable en la estimación de la avenida de diseño para una cierta obra hidráulica dentro de un red de ríos, cuando se utiliza una función de distribución multivariada de valores extremos, está representada por la dependencia total entre las variables aleatorias (gastos máximos en este caso), por lo cual se deduce que la solución convencional de independencia es riesgosa.

Se presentan en este trabajo las soluciones correspondientes a la dependencia parcial entre las variables y la solución más desfavorable de completa dependencia. El caso de completa independencia se ha omitido de la aplicación ya que se estableció que no es más desfavorable que el correspondiente a la dependencia parcial.

Cabe mencionar que la solución de dependencia total es también, desde otra perspectiva, la más desfavorable económicamente ya que la aplicación sistemática de ésta llevará al sobrediseño de las obras. Es posible entonces mediante un análisis de riesgo para la obra en particular definir cual de las dos soluciones posibles aplicar. De cualquier manera, el problema del análisis de frecuencias en una red de ríos está resuelto de una forma general, mediante la metodología planteada en este trabajo.

Se ha encontrado la expresión general que relaciona el período de diseño de una obra dada dentro de la red de ríos, con las funciones de distribución y por consiguiente con los períodos de retorno de los eventos en las corrientes individuales, de tal forma que es posible contestar al cuestionamiento fundamental de este tipo de problemas que consiste en: ¿Cómo se relaciona el período de retorno del evento de diseño en el sitio de la obra, con los períodos de retorno de los eventos correspondientes en los sitios en los que se dispone de datos medidos?, o bien: Si se establece un período de retorno para el diseño de una obra en una red de ríos, ¿Cuáles son los períodos de retorno que se deben elegir en las corrientes individuales antes de cualquier confluencia?

Con los conceptos establecidos en este trabajo, se sigue el proceso efectivamente lógico; a partir de un riesgo aceptado se encuentra el período de retorno de diseño de la obra y con este se estima la avenida de diseño de la misma.

A partir de la relación encontrada entre el período de retorno de diseño y las funciones de distribución o períodos de retorno antes de la confluencia, se desprende que existen una infinidad de soluciones (combinaciones de hidrogramas) del problema. Se plantea entonces un procedimiento para que la elección de la solución adoptada no se realice en forma arbitraria, la cual es otra característica importante de la metodología. Aquí los hidrogramas o avenidas de diseño en los ríos individuales se eligen tomando en cuenta la combinación más desfavorable de estas, según los efectos que tales avenidas ocasionan sobre la obra específica por diseñar, de tal forma que las características de la obra se hacen participar en la estimación de su propio evento de diseño.

A falta de elementos adicionales en el caso general, se propone armar las avenidas mediante un proceso de mayoración, a partir de los datos registrados de las avenidas máximas históricas en los sitios de medición.

Todos los conceptos anteriores nos llevan a encontrar un diseño seguro, en donde se ha utilizado la condición más desfavorable para una obra hidráulica particular y para un período de retorno dado en función de un riesgo aceptado, ya sea bajo la consideración de dependencia parcial o bien de completa dependencia.

Una característica que debe desprenderse de la red hidrográfica específica en estudio, es la consideración de que las avenidas en los ríos antes de las confluencias se presentan simultáneamente o no. Esta situación requiere de un análisis adicional en cuanto al tránsito se refiere, para determinar en su caso los tiempos de desfase de los hidrogramas.

Esta metodología se aplicó al caso real del diseño de obras de protección en la zona baja del río Papaloapan en donde se han planteado algunas hipótesis, las cuales pueden extenderse a otras aplicaciones en forma general.

1.- Las avenidas en los ríos antes de la confluencia se presentan simultáneamente. Esta es una hipótesis razonable cuando las cuencas de dichas corrientes sean de poca superficie y pertenecientes a zonas fisiográficamente semejantes.

2.- Las avenidas se pueden construir mediante un proceso de mayoración a partir solamente del gasto máximo presentado en estas.

Un problema adicional consiste en hacer involucrar también a otros parámetros característicos del hidrograma, como por ejemplo el volumen de escurrimiento o el tipo pico del mismo. Este problema representa un gran conducto de futura investigación.

3.- Los efectos de remanso pueden ser importantes, de tal forma que se ha incluido el escurrimiento en todos los ríos en el análisis de cada obra.

Además se ha decidido llevar a cabo las siguientes acciones:

Con efecto de determinar efectivamente las condiciones más desfavorables en las obras por diseñar, éstas se han tratado en forma independiente de tal manera que la combinación de avenidas en los ríos individuales son distintas para el diseño de cada obra de protección.

Ya que se cuenta en este caso con una muestra de datos de corta longitud, para el caso de la dependencia parcial se ha considerado pertinente incluir el parámetro de asociación de la función de distribución multivariada en el proceso de optimización, para con esto tener la estimación de la avenida de diseño en forma segura.

En los casos en que se disponga de registros largos y confiables, esto no es necesario.

Es importante señalar que las hipótesis y acciones tomadas para el ejemplo de aplicación presentado en este trabajo son convincentes en el estudio de cualquier obra hidráulica, de tal forma que pueden ser incorporados a la metodología básica para el tratamiento de estos problemas en hidrología.

Los resultados obtenidos para el problema de los bordos de protección en la zona baja del Papaloapan por el modelo de dependencia parcial resultan razonables comparados con los resultados obtenidos por el modelo de tránsito de avenidas PAPAL para la avenida de 1981, con la cual se calibró, ya que para un período de retorno de diseño de 100 años, los limnogramas de superficie libre del agua son en promedio 70% mayores que los presentados en ese año.

Para el modelo de completa dependencia, los limnogramas de superficie libre son en promedio un 75% mayores que los registrados en la avenida de 1981.

De acuerdo a los resultados obtenidos en este trabajo y los conceptos manejados en el mismo, resulta entonces ampliamente recomendable aplicar cualquiera de los dos modelos de estimación de avenidas de diseño en redes de ríos (el de dependencia parcial o el de completa dependencia), a fin de lograr un diseño eficiente de las nuevas obras hidráulicas y de revisar desde un punto de vista más confiable las obras existentes, o simplemente para contar con un elemento más en la toma de decisiones en las que se involucre el riesgo humano.

"William James solía predicar la 'voluntad de creer'. Yo por mi parte, quisiera predicar la 'voluntad de dudar' ...

Lo que se persigue no es la voluntad de creer, sino el deseo de descubrir, que es exactamente lo opuesto".

Bertrand Russell
Sceptical Essays

CAPITULO VI

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

- 1.- Abramowitz, M., Stegun, I. A., "*Handbook of mathematical functions*", Dover, New York, 1965.
- 2.- Aldama Rodriguez, A. y Gutierrez Ojeda, C. "*Una nueva metodología para estimar las avenidas de diseño*" XIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Montevideo Uruguay, 1987.
- 3.- Aparicio Mijares, F. J., "*Fundamentos de Hidrología de Superficie*", Limusa, 1992.
- 4.- Benjamin, J. R., Cornell, C. A., "*Probability, statistics and decision for civil engineers*", McGraw Hill, New York, 1970.
- 5.- Campos Aranda, D. F., "*Estimación de los parámetros óptimos de la distribución Gumbel mixta por medio del algoritmo de Rosenbrock*", Revista Ingeniería Hidráulica en México, enero-abril 1989.
- 6.- Castillo, E., "*Extreme value theory in engineering*", Academic Press, 1988.
- 7.- Chow, V. T. (Editor) "*Handbook of applied hydrology*", McGraw Hill, New York, 1964.
- 8.- Comisión del Papaloapan "*Boletines hidrométricos*", 1948-1978.
- 9.- Cudworth, A. G., "*Flood hydrology manual*", A Water Resources Technical Publication, U. S. Department of the interior, Denver, Colorado, 1989.

- 10.- Dalrymple, T., "*Flood frequency analyses*", USGS Water Supply Paper 1543-A, 1960.
- 11.- Escalante Sandoval, C., "*Distribuciones trivariadas de valores extremos y sus aplicaciones en hidrología*", Tesis Doctoral, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 1991.
- 12.- Escalante Sandoval, C., "*Análisis regional de eventos extremos*", Memorias del Congreso Nacional de Hidráulica, Puebla, México, 1994.
- 13.- Fisher, R. A., Tippett, L. H. C., "*Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample*". Proc. of the Cambridge Philosophical Society. Vol XXIV, Part. II, 1928.
- 14.- Feller, W., "*Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*", Vols. I y II, Limusa, Mexico, 1989.
- 15.- Galambos, J., "*A new bound on multivariate extreme value distributions*", Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. No. 27, 1984
- 16.- Galambos, J., "*The asymptotic theory of extreme order Statistics*", Wiley & Sons, 1978.
- 17.- Grolier Electronic Publishing, Inc., "*The software toolworks multimedia encyclopedia (CD-ROM)*", 1992.
- 18.- Gumbel, E. J., "*Bivariate exponential distributions*", J. Amer. Statist. Assoc. No. 55, 1960.
- 19.- Gumbel, E. J., "*Distributions des valeurs extremes en plusieurs dimensions*", Publications de L'Institute de Statistique, Vol. 9, 1960.

- 20.- Gumbel, E. J., "*Statistical theory of extremes values*", Cap. 6 Contributions to order statistics, Sarhan y Greenberg Editores. Wiley & Sons, 1962.
- 21.- Gumbel, E. J., "*Statistics of extremes*", Columbia University Press, New York, London, 1958.
- 22.- Gumbel, E. J., Goldstein, N., "*Analysis of empirical bivariate extremal distributions*", J. Amer. Statist. Assoc. No. 59, 1964.
- 23.- Gumbel, E. J., Mustafi, C. K., "*Some analytical properties of bivariate extreme value distributions*", J. Amer. Statist. Assoc. No. 62, 1967.
- 24.- Haan, Ch. T., "*Statistical methods in hydrology*", The Iowa State University Press, 1986.
- 25.- Herbert, A., "*Order statistics*", Wiley & Sons, 1981.
- 26.- Hüsler, J., Reiss, D., "*Extreme value theory*", Lectures Notes in Statistics No. 51. Proceedings, Oberwolfach, Ed. Springer-Verlag, 1987.
- 27.- James P. S., "*Applied multivariate analysis*", Univ. of Chicago, Series in Quantitative Methods for Decision-making, 1972.
- 28.- Jenkinson, A. F., "*The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements*", Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, Vol. 87, 1955.
- 29.- Joe, H., "*Families of min-stable multivariate exponential and multivariate extreme value distributions*", Statistics and Probability Letters, 9, 1990.

- 30.- Johnson, M. E., "*Multivariate statistical simulation*", John Wiley & Sons, 1987.
- 31.- Johnson, N. L., Kotz, S., "*Distributions in statistics: continuous multivariate distributions*", John Wiley & Sons, 1972.
- 32.- Kendall, M. G., Stuart, A., "*The advanced theory of statistics*", Vol. I Distribution theory, Vol. II Inference and relationship, Griffin London, 1963, 1967.
- 33.- Kite, G. W., "*Frequency and risk analyses in hydrology*", A Water Resources Publication, Littleton, Colorado, 1988.
- 34.- Kuester, J. L., Mize, J. H., "*Optimization techniques with Fortran*", Multivariate unconstrained methods (Rosenbrock algorithm), Mc Graw-Hill, 1973.
- 35.- Linsley, R., Franzini J. B., "*Ingeniería de los Recursos Hidráulicos*", CECSA, 1984.
- 36.- Linsley, R., Kohler, M., Paulus, J., "*Applied hydrology*", McGraw Hill, 1949.
- 37.- Linsley, R., Kohler, M., Paulus, J., "*Hidrología para ingenieros*" McGraw Hill, 1988.
- 38.- Marshall, A. W., Olkin, I., "*Families of multivariate distributions*", Journal of the American Statistical Association Vol. 83, No. 403, 1988.
- 39.- Mockus, V., "*Use of storm and watershed characteristics in synthetic unit hydrograph analysis and application*", U. S. Soil Conservation Service, 1957.
- 40.- Mood, A. M., Graybill, F. y Boes, D. C., "*Introduction to the theory of statistics*", Mc Graw-Hill, 1974.

- 41.- Papoulis, A., *"Probability, random variables and stochastic processes"*, McGraw Hill, 1965.
- 42.- Pickands, J. III., *"Multivariate extreme value distributions"*, Bulletin of the International Statistical Institute, No. 49, 1981.
- 43.- Ramírez Orozco, A. I., *"Funciones de distribución de probabilidad en redes de ríos"*, Trabajo no publicado, 1993.
- 44.- Raudkivi, A. J., *"Hydrology"*, Pergamon Press, Oxford, 1979.
- 45.- Raynal Villaseñor, J. A., *"Análisis de gastos máximos aguas abajo de confluencias de ríos"*, Revista Ingeniería Hidráulica en México, Enero-Abril 1990.
- 46.- Raynal Villaseñor, J. A., *"Bivariate extreme value distributions applied to flood frequency analysis"*, Ph.D. Dissertation, Civil Engineering Department, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 1985.
- 47.- Raynal Villaseñor, J. A., Salas, J. D., *"Multivariate extreme value distributions in hydrological analyses"*, Proceedings of the Rome Symposium, 1987.
- 48.- Rosenbrock, H. H., *"An automatic method for finding the greatest or least value of a function"*, Computer Journal, Vol. 3, 1960.
- 49.- S.A.R.H. *"Modelo de simulación del tránsito de avenidas por la llanura de inundación del río Papaloapan y Pánuco"*, 1977.
- 50.- Sarkar, S., *"A continuous bivariate exponential distribution"*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 82, No. 398, 1987.

- 51.- Takahashi, R., "*Some properties of the multivariate extreme value distributions and multivariate tail equivalence*", Ann. Inst. Statist. Math., No. 39, 1987.
- 52.- Tawn, J. A., "*Modelling multivariate extreme value distributions*", Biometrika, No. 77, 1990.
- 53.- Tiago de Oliveira, J., "*Bivariate extremes: models and statistical decision*", Technical Report No. 14, Center of Stochastic Processes, Department of Statistics, Univ. of North Carolina at Chapel Hill, 1982.
- 54.- Tiago de Oliveira, J., "*Structure theory of bivariate extremes*", Estudios de matemática, estadística y econometría, Vol. III, 1962, 1963.
- 55.- Viessman, W., Lewis, G., Knapp, J., "*Introduction to hydrology*", Harper & Row Pub., New York, 1977.
- 56.- Woodroffe, M., "*Probability with applications*" Mc Graw-Hill, 1975.
- 57.- Yevjevich, V., "*Probability and statistics in hydrology*", A Water Resources Publication, Littleton, Colorado, 1982.