ALGEBRAS FORESTALES

TESIS

que para optar al grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas) presenta

FRANCISCO LARRIÓN RIVEROLL (*)

FACULTAD DE CIENCIAS, U.N.A.M.

Primavera [redacted]
2002

(*): Becario del Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.

INDICE

INTRODUCCION

Sea k un campo algebraicamente cerrado.

Una de las miras de la Teoría de Representaciones es llegar a clasificar aquellas k-álgebras de dimensión finita que sean de tipo de representación finito (t.r.f.). El primer paso significativo en esta dirección es el trabajo de P. Gabriel [5], en donde se clasifican las k-álgebras hereditarias de t.r.f.

A cada k-álgebra Λ de dimensión finita puede asociársele una gráfica dirigida (el carcaj ordinario de Λ) y un "sistema de relaciones" en la gráfica, de forma tal que el estudio de las k-álgebras de dimensión finita es equivalente al estudio de los "carcajes con relaciones". El caso que P. Gabriel resolvió en [5] es aquél en que no hay relaciones.

El caso general (relaciones arbitrarias) no ha sido resuelto aún, pero un avance importante es el trabajo de Ch. Riedtmann [7], en donde se clasifican las k-álgebras autoinyectivas de t.r.f.

El "caso opuesto" al autoinyectivo (desde el punto de vista de la dimensión homológica y de la estructura del carcaj ordinario) es el de las k-álgebras cocientes de hereditarias. Estas corresponden a los carcajes sin ciclos dirigidos (y relaciones arbitrarias). Presumiblemente, una solución a este "caso opuesto" facilitaría la solución al caso general, sin embargo, tampoco ha sido resuelto hasta el momento.

Una familia importante de k-álgebras cocientes de hereditarias que ha admitido solución al problema de clasificar las de t.r.f. es la de las k-álgebras localmente hereditarias, clasificadas por R. Bautista en [1]

Es opinión de una de las principales corrientes de la Teoría de Representaciones que, si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, el estudio de Λ debería hacerse a través de CAR(Λ), el carcaj de Auslander-Reiten de Λ; [7] es un ejemplo de la gran fuerza de este método. En [6] se dió cierta información geométrica sobre CAR(Λ) para el caso en que el carcaj ordinario de Λ sea un árbol dirigido y se afirmaba que "es en base a esta información que se espera obtener suficientes resultados que permitan clasificar los árboles con relaciones de t.r.f." En efecto, tal clasificación ha sido ya obtenida por K. Bongartz y C.M. Ringel en [4] utilizando (entre otras cosas) resultados de [6]

El principal resultado de [6] es que si el carcaj ordinario de Λ es un árbol dirigido entonces Λ es una (P)-álgebra; en [2] se generalizó esto para cierta familia de álgebras cocientes de hereditarias: las álgebras que satisfacen la condición (S). Las k-álgebras cocientes de hereditarias que satisfacen la condición (S) generalizan simultáneamente a las k-álgebras localmente hereditarias de t.r.f. y a los árboles con relaciones.

En [3], R. Bautista y L. Salmerón obtienen ciertas (P)-álgebras a partir de un carcaj Γ que llamaremos "álgebras Γ-sumergibles". Existe la conjetura (R. Bautista) de que el estudio de una gran familia de álgebras de t.r.f. puede ser reducido al estudio de las álgebras forestales: un álgebra forestal es un álgebra Γ-sumergible para cierto árbol orientado Γ.

En este trabajo probaremos dos resultados: "Las álgebras Γ-sumergibles (Γ arbitrario) son la totalidad de las (P)-álgebras" y "Las k-álgebras forestales coinciden con las que satisfacen la condición (S)" Este último es de interés en vista de la conjetura anterior y por dar la equivalencia de una condición intrínseca de las álgebras con una condición geométrica de sus carcajes de Auslander-Reiten.

Quiero agradecer aquí a Raymundo Bautista, director de esta Tesis, por haberme dado los conocimientos, apoyo y confianza en mí mismo que fueron necesarios para realizarla. También agradezco a mi maestro Roberto Martínez y a mi compañero de estudios Leonardo Salmerón por la gran paciencia (¡e interés!) que demostraron en tantas y tan largas pláticas que sostuve con ellos durante la realización de esta Tesis.

NOTACION EMPLEADA

$x \mapsto y$	asociación del elemento y al elemento x.
$M \to N$	morfismo (o flecha) de M a N.
$M - N$	morfismo (o flecha) entre M y N (cualquier dirección).
$M \rightsquigarrow N$	camino dirigido de M a N.
$A \setminus B$	diferencia de conjuntos.
$\oplus \mathcal{C}$	suma directa de los elementos de $\mathcal{C}$.
$\cup \mathcal{C}$	unión de los elementos de $\mathcal{C}$.
$:=$	igual por definición a
$\lightning$	contradicción.
$//$	final (o ausencia) de prueba

CAPITULO I

Teoría General

(1.1) Nota:

> En todo este trabajo, k denotará a un campo algebraicamente cerrado y Λ será siempre una k-álgebra de dimensión finita. Supondremos además que Λ es cociente de hereditaria e indescomponible

Como Λ es de k-dimensión finita, es en particular un anillo artiniano y por el Teorema de Krull-Schmidt sabemos que todo Λ-módulo finitamente generado es, en forma única, suma directa de Λ-módulos inescindibles. Entonces para estudiar $\operatorname{mod}\Lambda$ —la categoría de los Λ-módulos izquierdos finitamente generados— basta centrar nuestra atención sobre los módulos inescindibles.

(1.2) Notación: $\operatorname{ind}\Lambda$ es la subcategoría plena de $\operatorname{mod}\Lambda$ definida por los módulos inescindibles. $\mathcal{P}_\Lambda$ es la subcategoría plena de $\operatorname{ind}\Lambda$ definida por los proyectivos inescindibles. Usualmente identificaremos a $\operatorname{ind}\Lambda$ y $\mathcal{P}_\Lambda$ con sus esqueletos.

Un caso particularmente importante es aquél en el que Λ es de <u>tipo de representación finito</u> (t.r.f.): indΛ es finita. Un conocido teorema de M. Auslander dice que en este caso todo Λ-módulo (finitamente generado o no) es suma directa, en forma única, de módulos inescindibles finitamente generados.

Como decíamos en la introducción, uno de los objetivos de la Teoría de Representaciones es determinar cuáles son todas las k-álgebras de t.r.f.; también se aspira a describir, para cada una de ellas, la categoría de módulos finitamente generados.

Para esto último, un primer paso sería describir los módulos inescindibles y las aplicaciones irreducibles entre ellos (un morfismo f en modΛ es <u>irreducible</u> si no es sección ni retracción, pero siempre que sea $f=gh$ será h sección o g retracción): en efecto, se sabe que si Λ es de t.r.f. todo morfismo no invertible entre módulos inescindibles es combinación lineal de composiciones de morfismos irreducibles entre inescindibles. Decimos "un primer paso" porque no hay unicidad en estas expresiones y en general no se conocen las relaciones que deben satisfacer los morfismos irreducibles. Sin embargo, en los casos que nos ocuparán aquí sí se conocen tales relaciones (ver 1.10) y se sospecha actualmente que el estudio de las k-álgebras de t.r.f. puede ser reducido al de álgebras para las cuales sí se conocen estas relaciones.

Son particularmente fáciles de describir los morfismos irreducibles $f: M \to N$ en indΛ cuando N es proyectivo o M es inyectivo: en el primer caso f es irreducible exactamente cuando es (hasta isomorfía) la inclusión de un sumando directo del radical de N y en el segundo cuando es la proyección a un sumando directo de $M/\mathrm{soc}\,M$.

Para estudiar los casos restantes son útiles las <u>sucesiones de Auslander-Reiten</u>: sucesiones exactas no escindidas $0 \to A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ con A y C inescindibles y tales que para todo morfismo $h: X \to C$ en mod Λ que no sea retracción existe $g: X \to B$ tal que $h = \pi g$. Auslander y Reiten probaron que si C es inescindible y no proyectivo (o si A es inescindible y no inyectivo) existe una única sucesión de Auslander-Reiten $0 \to A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$. Se sabe también que todo morfismo irreducible con dominio inescindible que llegue a C es la restricción de π a un sumando directo de B, y que todo morfismo irreducible con codominio inescindible que salga de A es la composición de σ con la proyección a algún sumando directo de B. Si Λ es de t.r.f, se sabe que si $B = \bigoplus_{i=1}^{s} B_i$ es la descomposición de B en suma directa de inescindibles, entonces $B_i \approx B_j$ sólo cuando $i = j$. La asociación $C \mapsto A$ establece una biyección —denotada por $D\mathrm{tr}$— entre los módulos inescindibles no proyectivos y los módulos inescindibles no inyectivos, cuya inversa se denota por $D\mathrm{tr}^{-1} =: \mathrm{tr}D$.

(1.3) <u>Notación</u>: Pondremos $D\mathrm{tr}\, M \in \mathrm{ind}\, \Lambda$ si $D\mathrm{tr}\, M$ está definido, o sea, si $M \in \mathrm{ind}\, \Lambda$ y M no es proyectivo. Similarmente para $\mathrm{tr}D M$. $\mathcal{O}_\Lambda(M)$ denotará a la órbita $\mathcal{O}_\Lambda(M) = \{D\mathrm{tr}^n M \mid n \in \mathbb{Z}$ & $D\mathrm{tr}^n M \in \mathrm{ind}\, \Lambda\}$ de M bajo $\{D\mathrm{tr}^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(1.4) <u>Observación</u>: Si $X, Y \in \mathrm{ind}\, \Lambda$ y Y no es proyectivo, hay un morfismo irreducible $X \to Y$ si y sólo si lo hay $D\mathrm{tr}\, Y \to X$. Similarmente, si $\mathrm{tr}D\, X \in \mathrm{ind}\, \Lambda$, hay un morfismo irreducible $X \to Y$ exactamente cuando lo hay $Y \to \mathrm{tr}D\, X$. En consecuencia, si para cierta $n \in \mathbb{Z}$ $D\mathrm{tr}^n X, D\mathrm{tr}^n Y \in \mathrm{ind}\, \Lambda$ hay un morfismo irreducible de X en Y si y sólo si hay un morfismo irreducible de $D\mathrm{tr}^n X$ en $D\mathrm{tr}^n Y$.

(1.5) Definición. Un carcaj C es cualquier gráfica dirigida. Entonces C consta de un conjunto de vértices C_0, un conjunto de aristas C_1 y una asociación que para cada arista $\alpha \in C_1$ nos dice cuál es el vértice inicial $i \in C_0$ y cuál el vértice final $j \in C_0$ de α. En este caso escribimos $\alpha: i \to j$ y decimos que α es una flecha en C que va de i a j. Pondremos $x^+ := \{y \in C_0 \mid x \to y \text{ en } C\}$ y $x^- := \{y \in C_0 \mid y \to x \text{ en } C\}$ si $x \in C_0$

(1.6) Definición: El carcaj de Auslander-Reiten de Λ, denotado por $CAR(\Lambda)$, tiene por vértices los objetos de $\operatorname{ind} \Lambda$ (recuérdese que, aquí, $\operatorname{ind} \Lambda$ es esquelética) y hay una flecha $M \to N$ en $CAR(\Lambda)$ si y sólo si existe algún morfismo irreducible $M \to N$ en $\operatorname{ind} \Lambda$. Por abuso de notación, pondremos usualmente $(CAR(\Lambda))_0 = \operatorname{ind} \Lambda$.

(1.7) Definición (Riedtmann): Un carcaj de traslación es un carcaj C sin flechas dobles ni lazos junto con una inyección $\tau: \mathcal{A} \hookrightarrow C_0$ definida en un subconjunto $\mathcal{A}$ de C_0 y tal que $x^- = (\tau x)^+$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Un morfismo de carcajes de traslación es un morfismo de carcajes compatible con la traslación. Una inmersión de carcajes de traslación es un monomorfismo $f: D \to C$ de carcajes de traslación tal que $\operatorname{Im} f$ tiene la estructura inducida por C. Un morfismo de carcajes es pleno si toda flecha entre imágenes proviene de una entre las preimágenes.

(1.8) Ejemplos:

(A): $C = CAR(\Lambda)$ es un carcaj de traslación si hacemos $\mathcal{A} = \operatorname{ind} \Lambda \setminus \mathcal{P}_\Lambda$ y, para $M \in \mathcal{A}$, $\tau M = D\operatorname{tr} M$.

(B): Sea Γ un carcaj sin ciclos dirigidos ni aristas múltiples. $\mathbb{Z}\Gamma$ es el carcaj definido como sigue: $(\mathbb{Z}\Gamma)_0 := \Gamma_0 \times \mathbb{Z}$, y hay una flecha $(i, z) \to (j, z')$ en $\mathbb{Z}\Gamma$ si y sólo si $z=z'$ y hay una flecha $i\to j$ en Γ o bien $z'=z+1$ y hay una flecha $j\to i$ en Γ. $C=\mathbb{Z}\Gamma$ es un carcaj de traslación si hacemos $\mathcal{A}=(\mathbb{Z}\Gamma)_0$ y $\tau(i,z):=A(i,z):=(i,z-1)$ para todo $(i,z)\in\mathcal{A}$. En $\mathbb{Z}\Gamma$, para no confundir con $CAR(\Lambda)$, denotaremos las órbitas bajo A por $\mathcal{O}$ sin subíndice.

(1.9) Definición: Sea C un carcaj de traslación. La categoría de caminos de C, denotada por $k[C]$, tiene por objetos a los vértices de C y, para $\{i,j\}\in C_0$, $Hom_{k[C]}(i,j)$ es el k-espacio vectorial de base formada por todos los caminos dirigidos de i a j en C. La composición en $k[C]$ es la inducida por "pegar caminos". Las relaciones de malla en C forman el ideal de $k[C]$ denotado por $\mathcal{M}_C$ y generado, para $x\in\mathcal{A}$, por $\mathcal{M}_C(\tau x,x):=\{\lambda m_x \mid \lambda\in k\}$ donde m_x es la suma de todos los caminos de longitud dos de τx a x. La categoría de Riedtmann de C, denotada por $k(C)$ es el cociente $k(C):=k[C]/\mathcal{M}_C$.

La importancia de la categoría de Riedtmann radica principalmente en el siguiente resultado, que es bien conocido:

(1.10) Teorema: Supongamos que Λ es una k-álgebra de dimensión finita de t.r.f. Supongamos que se tiene una aplicación Φ que a cada flecha $\alpha: M\to N$ en $CAR(\Lambda)$ le asocia un morfismo irreducible $\Phi(\alpha): M\to N$ en $ind\,\Lambda$ de tal manera que, para todo $M\in ind\,\Lambda$,

$$0\to D\,tr\,M\xrightarrow{(\Phi(\alpha_i))}\bigoplus_{i=1}^{t}M_i\xrightarrow{(\Phi(\beta_i))}M\to 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten, donde $\{M_i\}_{i=1}^{t}=M^-$ y $D\,tr\,M\xrightarrow{\alpha_i}M_i\xrightarrow{\beta_i}M$ son las flechas correspondientes en $CAR(\Lambda)$

(Por ejemplo, tal Φ siempre existe si $CAR(\Lambda)$ no tiene ciclos dirigidos). Entonces Φ puede extenderse a un funtor pleno y denso $\Phi: k[CAR(\Lambda)] \to \text{ind}\,\Lambda$ cuyo núcleo es el ideal de las relaciones de malla en $CAR(\Lambda)$. Por lo tanto, Φ induce una equivalencia $\Phi: k(CAR(\Lambda)) \approx \text{ind}\,\Lambda$. //

También tendremos oportunidad de utilizar el siguiente resultado, que se debe a Ch. Riedtmann:

(1.11) <u>Proposición</u>: Sea C un carcaj de traslación y sea D un subcarcaj cualquiera de C. Demos a D la traslación inducida por la de C. Sea $\mathcal{B}$ el ideal de $k(C)$ definido por los puntos de $B = C_0 \setminus D_0$. Entonces se tiene una equivalencia de categorías $k(D) \approx k(C)/\mathcal{B}$. //

CAPITULO II

Preliminares

§1. (P)-Algebras

(2.1) Definición: Un subconjunto finito y no vacío $\mathcal{S}$ de indΛ es una presección si $DtrM \notin \mathcal{S}$ para todo $M \in \mathcal{S}$. Una presección $\mathcal{S}$ de CAR(Λ) es una sección de CAR(Λ) si para toda flecha $M \to X$ en CAR(Λ), $M \in \mathcal{S}$ implica $X \in \mathcal{S}$ o $DtrX \in \mathcal{S}$. Identificaremos a las secciones y presecciones con las subgráficas que definen: si $\mathcal{G} \subseteq$ indΛ, la subgráfica de CAR(Λ) definida por $\mathcal{G}$ tiene por vértices los puntos de $\mathcal{G}$ y las mismas flechas que CAR(Λ) tiene entre puntos de $\mathcal{G}$.

(2.2) Definición: Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_\Lambda$. Dos módulos $M, N \in$ indΛ están (P)-conectados por $\mathcal{P}$ si existe un camino

$$M - P_1 - P_2 - \cdots - P_r - N$$

en CAR(Λ) con $P_1, P_2, \ldots, P_r \in \mathcal{P}$. Dos presecciones $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ de CAR(Λ) están (P)-conectadas por $\mathcal{P}$ si existen $M_1 \in \mathcal{S}_1$ y $M_2 \in \mathcal{S}_2$ que estén (P)-conectados por $\mathcal{P}$. Una familia $\mathcal{F}$ de presecciones de CAR(Λ) está (P)-conectada por $\mathcal{P}$ si para cualesquiera $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{F}$ existe una subfamilia $\{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_t = \mathcal{T}\}$ de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{S}_j$ y $\mathcal{S}_{j+1}$ están (P)-conectadas por $\mathcal{P}$ para todas las $j \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$.

(2.3) <u>Notación</u>: Si $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{ind}\Lambda$, $\operatorname{Dtr}\mathcal{C} = \{\operatorname{Dtr}X \mid X \in \mathcal{C}\setminus\mathcal{P}_\Lambda\}$ y, similarmente, $\operatorname{tr}D\mathcal{C} = \{\operatorname{tr}DX \mid X \in \mathcal{C} \ \& \ \operatorname{tr}DX \in \operatorname{ind}\Lambda\}$.

(2.4) <u>Definiciones</u>:

(A): Una familia finita y no vacía $\mathcal{F}$ de secciones de $CAR(\Lambda)$ es una <u>(P)-familia</u> si se satisfacen los siguientes axiomas:

(a).- $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \phi$ siempre que $\{\mathcal{S}, \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$.

(b).- $\mathcal{S}$ no tiene ciclos dirigidos si $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$.

(c).- $\bigcup\mathcal{F}$ es conexa

(d).- Si $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$, $\operatorname{Dtr}\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I(\mathcal{S})} \mathcal{S}_i \setminus \{\text{inyectivos}\}$ para cierto subconjunto $\{\mathcal{S}_i \mid i \in I(\mathcal{S})\}$ tal que $\operatorname{tr}D\mathcal{S}_i \neq \phi$ para toda $i \in I(\mathcal{S})$.

(e).- La relación transitiva y reflexiva generada por $\mathcal{S}_i \triangleleft \mathcal{S}$ para toda $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ e $i \in I(\mathcal{S})$ es un orden parcial $\leq$ de $\mathcal{F}$.

(f).- Si $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ es minimal (respecto de $\leq$), entonces $\mathcal{S}$ es conexa.

(g).- Si $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ no es minimal, entonces $\{\operatorname{tr}D\mathcal{S}_i \mid i \in I(\mathcal{S})\}$ está (P)-conectada por $\mathcal{P}_\Lambda \cap \mathcal{S}$.

(h).- Si $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ no es minimal, cualquier proyectivo de $\mathcal{S}$ está (P)-conectado por $\mathcal{P}_\Lambda \cap \mathcal{S}$ con algún módulo no proyectivo de $\mathcal{S}$.

(B): Una <u>(P)-cubierta</u> de $CAR(\Lambda)$ es una (P)-familia $\mathcal{F}$ de $CAR(\Lambda)$ tal que $\bigcup\mathcal{F} = \operatorname{ind}\Lambda$.

(C): Λ es una <u>(P)-álgebra</u> si $CAR(\Lambda)$ admite una (P)-cubierta.

<u>Nota</u>: Por el resto de la sección Λ es una (P)-algebra y $\mathcal{F}$ denotará una (P)-cubierta de $CAR(\Lambda)$

(2.5) <u>Observación</u>: De la proposición (2.4) de [2] se sigue que las secciones minimales de $\mathcal{F}$ son las componentes conexas, de la subgráfica de $CAR(\Lambda)$ definida por los proyectivos hereditarios, que sean secciones. De aquí se sigue por inducción sobre el orden parcial de las (P)-familias que $\mathcal{F}$ es la única (P)-cubierta de $CAR(\Lambda)$.

(2.6) Proposición ([2]): Sean $M\in\mathcal{S}\in\mathcal{F}$ y supongamos que se tiene un camino dirigido $X_1\to X_2\to\cdots\to X_r\to M$ en $CAR(\Lambda)$. Entonces $X_1\in\mathcal{T}\in\mathcal{F}$ con $\mathcal{T}\leq\mathcal{S}$. //

(2.7) Proposición: Como Λ es (P)-álgebra, Λ es cociente de hereditaria, de t.r.f., y para todo $M\in \operatorname{ind}\Lambda$ existe $P\in\mathcal{P}_\Lambda$ —necesariamente único— tal que $M\in\mathcal{O}_\Lambda(P)$. Además, $CAR(\Lambda)$ no tiene ciclos dirigidos y por tanto se sigue de (1.10) que $\operatorname{ind}\Lambda\approx k(CAR(\Lambda))$.

Demostración: Por (2.6) y el axioma (b) de (2.4) se tiene que $CAR(\Lambda)$ no tiene ciclos dirigidos y es bien sabido que en este caso Λ es cociente de hereditaria. Las demás afirmaciones están probadas en [2]. //

(2.8) Definición y Proposición ([2]): Si $\mathcal{S}\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\mathcal{S}:=\{\mathcal{T}\in\mathcal{F}\mid\mathcal{T}\leq\mathcal{S}\}$ es una (P)-familia. En particular, $\cup\mathcal{F}_\mathcal{S}$ es conexa. //

(2.9) Lema: Si $\mathcal{S}\in\mathcal{F}$, cualquier camino (dirigido o no) que abandone $\cup\mathcal{F}_\mathcal{S}$ lo hace hacia una sección de $\mathcal{F}$ que es mayor que $\mathcal{S}$.

Demostración: Por (2.6) basta probar que si tenemos una flecha $X\to Y$ en $CAR(\Lambda)$ con $X\in\cup\mathcal{F}_\mathcal{S}$ pero $Y\notin\cup\mathcal{F}_\mathcal{S}$, entonces Y está en una sección mayor que $\mathcal{S}$; pero esto es consecuencia del hecho de que, si se tienen en $\mathcal{F}$: $\mathcal{T}\lhd\mathcal{T}_1\lhd\mathcal{T}_2\lhd\cdots\lhd\mathcal{T}_r\lhd\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}\lhd\mathcal{U}_1\lhd\mathcal{U}_2\lhd\cdots\lhd\mathcal{U}_t\lhd\mathcal{T}'$, entonces $r=t$ y $\mathcal{T}_i=\mathcal{U}_i$ para todo $i\in\{1,\dots,r\}$ //

(2.10) Lema: Sea $\mathcal{S}\in\mathcal{F}$ y supongamos que $P\in\mathcal{S}\cap\mathcal{P}_\Lambda$. Entonces, para toda flecha $P\to X$ en $\mathcal{S}$, $X\in\mathcal{P}_\Lambda$.

Demostración: Observemos primero que si $Y\to P$ en $CAR(\Lambda)$, entonces P está en la misma sección que Y. Supongamos entonces que $X\notin\mathcal{P}_\Lambda$. Se tiene $D\operatorname{tr}X\to P$ y, como $P\in\mathcal{S}$, $D\operatorname{tr}X\in\mathcal{S}$. Pero como $X\in\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ no es presección ↯. //

(2.11) <u>Proposición</u>: Existe una función $h: \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ tal que $h(\mathcal{S}) = h(\mathcal{T})+1$ siempre que $\mathcal{T} \triangleleft \mathcal{S}$. Puede elegirse h de tal forma que $1 \in \operatorname{Im} h \subseteq \mathbb{Z}_+$, y así h es única. Llamaremos a h la <u>estratificación</u> de $\mathcal{F}$.

<u>Demostración</u>: Observemos que, dada $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{T} \triangleleft \mathcal{S}$ puede verificarse a lo más para una sección $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ (aquélla tal que $\phi \neq \operatorname{tr} D\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$), de modo que si tomamos un punto $i_{\mathcal{S}}$ por cada $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ y una flecha $i_{\mathcal{S}} \to i_{\mathcal{T}}$ cada vez que $\mathcal{S} \triangleleft \mathcal{T}$, se obtiene un árbol dirigido. Fijemos $\mathcal{S}_0 \in \mathcal{F}$ y, para cada $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$, consideremos un camino $\gamma_{\mathcal{S}}: i_{\mathcal{S}_0} - i_{\mathcal{T}_1} - i_{\mathcal{T}_2} - \cdots - i_{\mathcal{T}_r} - i_{\mathcal{S}}$ (nuestro árbol es conexo porque $\cup\mathcal{F}$ lo es). Definamos ahora $h(\mathcal{S})$ como la diferencia del número de flechas "a la derecha" en $\gamma_{\mathcal{S}}$ menos el número de flechas "a la izquierda" en $\gamma_{\mathcal{S}}$. Como para caminos cerrados esta diferencia es cero (nuestra gráfica es un árbol), $h(\mathcal{S})$ no depende del camino considerado y por lo tanto está bien definida. Claramente $h(\mathcal{S}) = h(\mathcal{T})+1$ siempre que $\mathcal{T} \triangleleft \mathcal{S}$ y sumando a h una constante adecuada se preserva esta propiedad y se logra que $1 \in \operatorname{Im} h \subseteq \mathbb{Z}_+$. La unicidad se sigue del hecho de que si h y h' son estratificaciones, $h-h'$ es constante //

Del axioma (e) de (2.4) se sigue:

(2.12) <u>Lema</u>: Si $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ en $\mathcal{F}$, $h(\mathcal{S}) \leq h(\mathcal{T})$. Además, si $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ y $h(\mathcal{S}) = h(\mathcal{T})$, entonces $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ //

También de la definición, tenemos:

(2.13) <u>Lema</u>: Sean $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{F}$ y $P \in \mathcal{P}_\Lambda$. Si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$ y $N \in \mathcal{T} \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$, entonces $M = D\operatorname{tr}^n N$, donde $n = h(\mathcal{T}) - h(\mathcal{S})$ //

En la siguiente sección daremos una condición suficiente para que Λ sea una (P)-álgebra. La prueba de que es una condición suficiente es el objeto de [2].

§2. La condición (S)

(2.14) Definición: Un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_\Lambda$ es débilmente conexo si para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$ existen $X_1, X_2, \ldots, X_r \in \mathcal{C}$ y morfismos no nulos $X - X_1 - X_2 - \cdots - X_r - Y$ en modΛ. Obsérvese que $\mathcal{C}$ no necesita ser conexo como subgráfica de CAR(Λ).

(2.15) Notación: Si $P \in \mathcal{P}_\Lambda$, $\mathcal{D}(P) := \{Q \in \mathcal{P}_\Lambda \mid \exists\, P \xrightarrow{f_0} Q_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \to Q_r \xrightarrow{f_r} Q$ con $Q_1, \ldots, Q_r \in \mathcal{P}_\Lambda$ y $f_0, f_1, \ldots, f_r$ no nulos$\}$.

(2.16) Observaciones:

(a).- Si $M \in$ indΛ, Supp $M := \{Q \in \mathcal{P}_\Lambda \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, M) \neq 0\}$ es débilmente conexo.

(b).- Como Λ es cociente de hereditaria, Λ es un álgebra de Schur: $\mathrm{End}_\Lambda(P) \approx k$ para todo $P \in \mathcal{P}_\Lambda$. En consecuencia, Supp rad $P \subseteq \mathcal{P}_\Lambda \setminus \mathcal{D}(P)$ para todo $P \in \mathcal{P}_\Lambda$.

(2.17) Definiciones:

(a).- $P \in \mathcal{P}_\Lambda$ tiene radical separado si siempre que se tengan $M, N \in$ indΛ, sumandos no isomorfos de rad P, Supp M y Supp N están contenidos en distintas componentes débilmente conexas de $\mathcal{P}_\Lambda \setminus \mathcal{D}(P)$.

(b).- Λ satisface la condición (S) si todo $P \in \mathcal{P}_\Lambda$ tiene radical separado.

El resultado principal de [2] es:

(2.18) Teorema: Supongamos que Λ satisface la condición (S). Entonces Λ es una (P)-álgebra si y sólo si Λ es de t.r.f. //

Daremos en la sección siguiente un breve resumen de las definiciones y resultados de [3]

§3. Algebras Γ-Sumergibles

Denotemos por Γ a un carcaj finito sin ciclos dirigidos ni aristas múltiples.

(2.19) Definición: Las secciones canónicas de $\mathbb{Z}\Gamma$ son los conjuntos de la forma $S_z := \Gamma_0 \times \{z\}$ para $z \in \mathbb{Z}$. Un conjunto de vértices de $\mathbb{Z}\Gamma$ es plano si es conexo y está contenido en alguna sección canónica de $\mathbb{Z}\Gamma$. Una flecha $x \to y$ de $\mathbb{Z}\Gamma$ es plana si $\{x, y\}$ es plano. Si $\mathcal{T} \subseteq (\mathbb{Z}\Gamma)_0$, usaremos la notación $\mathcal{O}^+(\mathcal{T}) := \bigcup_{n \geq 0} A^n(\mathcal{T})$. Recordemos: $\mathcal{O}(\mathcal{T}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A^n(\mathcal{T})$

(2.20) Definición: Una familia $\mathcal{V} = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_s\}$ de subconjuntos planos de $(\mathbb{Z}\Gamma)_0$ es un sistema (P)-generador para $\mathbb{Z}\Gamma$ si se cumplen los siguientes axiomas:

(a)... $\mathcal{O}(\mathcal{T}_i) \cap \mathcal{O}(\mathcal{T}_j) = \phi$ siempre que $i \neq j$.

(b)... No hay flechas planas de $\mathcal{O}^+(\mathcal{T}_i)$ a $\mathcal{T}_j$ si $j \neq i$.

(c)... $(\mathbb{Z}\Gamma)_0 = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{O}(\mathcal{T}_i)$.

Fijemos un sistema (P)-generador $\mathcal{V} = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_s\}$ y hagamos $\mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{T}_i$.

(2.21) Definición: $\mathbb{T}\Gamma$ es el subcarcaj de $\mathbb{Z}\Gamma$ definido por $(\mathbb{T}\Gamma)_0 = (\mathbb{Z}\Gamma)_0 \setminus B_0$, donde $B_0 = \mathcal{O}^+(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{U}$.

Daremos a $\mathbb{T}\Gamma$ la traslación inducida por la de $\mathbb{Z}\Gamma$. Denotaremos también por $\mathcal{U}$ a la subcategoría de $k(\mathbb{T}\Gamma)$ definida por los puntos de $\mathcal{U}$.

(2.22) <u>Definición</u>: $/\!/\Gamma$ es el subcarcaj de $\mathbb{N}\Gamma$ definido por $(/\!/\Gamma)_0 :=$ $(\mathbb{N}\Gamma)_0 \setminus B_1$, con $B_1 := \{x \in \mathbb{N}\Gamma \mid \mathrm{Hom}_{k(\mathbb{N}\Gamma)}(-, A^n x)_{|\mathcal{U}} = 0$ para algún $n \geq 0\}$

También daremos a $/\!/\Gamma$ la traslación inducida por $\mathbb{N}\Gamma$ o, equivalentemente, por $\mathbb{Z}\Gamma$. Denotaremos también por $\mathcal{U}$ a la subcategoría de $k(/\!/\Gamma)$ definida por los puntos de $\mathcal{U}$.

(2.23) <u>Definición</u>: Decimos que U <u>satisface la condición (+)</u> si para cualquier flecha $x \to y$ en $/\!/\Gamma$, con $y \in \mathcal{U}$, se tiene que $\mathrm{Hom}_{k(/\!/\Gamma)}(-, x)_{|\mathcal{U}} \neq 0$.

(2.24) <u>Definición</u>: $\Lambda(\Gamma, U) := \mathrm{End}^{op}_{k(/\!/\Gamma)}(\oplus \mathcal{U})$

(2.25) <u>Definición</u>: $L(\mathcal{U})$ es el subcarcaj de $/\!/\Gamma$ definido por los puntos de $(L(\mathcal{U}))_0 := \{x \in /\!/\Gamma \mid \mathrm{Hom}_{k(/\!/\Gamma)}(-, x)_{|\mathcal{U}} \neq 0\}$

Como siempre, $L(\mathcal{U})$ es carcaj de traslación con la traslación inducida por $\mathbb{Z}\Gamma$. Podemos enunciar ahora el resultado principal de [3]:

(2.26) <u>Teorema</u> (<u>Bautista-Salmerón</u>): Sea Γ un carcaj finito sin ciclos y sin aristas múltiples. Sea U un sistema (P)-generador para $\mathbb{Z}\Gamma$ y supongamos que U satisface la condición (+). Entonces $L(\mathcal{U})$ es isomorfo (como carcaj de traslación) a la unión de las componentes preproyectivas de $CAR(\Lambda(\Gamma, U))$. En particular, si $\Lambda(\Gamma, U)$ es de t.r.f. e inescindible, $L(\mathcal{U}) \approx CAR(\Lambda(\Gamma, U))$ y $\Lambda(\Gamma, U)$ es una (P)-álgebra: de hecho, si σ es la (P)-cubierta de $L(\mathcal{U}) \approx CAR(\Lambda(\Gamma, U))$, toda sección de σ está contenida en alguna sección canónica de $\mathbb{Z}\Gamma$. //

(2.27) <u>Definición</u>: En la situación de (2.26) —cuando $\Lambda(\Gamma, U)$ es de t.r.f. e inescindible— diremos que $\Lambda(\Gamma, U)$ es <u>Γ-Sumergible</u>

En su prueba de (2.26), Bautista y Salmerón utilizan la siguiente proposición, que también nos será de utilidad:

(2.28) <u>Proposición</u>: Sea C un subcarcaj de $\mathbb{Z}\Gamma$ y démosle la traslación inducida por $\mathbb{Z}\Gamma$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{Z}\Gamma$, la sucesión de funtores

$$\mathrm{Hom}_{k(C)}(-,x) \longrightarrow \coprod_{x_i \in x^+} \mathrm{Hom}_{k(C)}(-,x_i) \longrightarrow \mathrm{rad}\, \mathrm{Hom}_{k(C)}(-,A^{-1}x) \to 0$$

es exacta si $A^{-1}x \in C_0$. //

CAPITULO III

Caracterización de las (P)-álgebras

Supondremos en este capítulo que Λ es una (P)-álgebra y que $\mathcal{F}$ es la (P)-cubierta de $CAR(\Lambda)$. Empezaremos asociando a Λ un carcaj $\Gamma = \Gamma(\Lambda)$.

(3.1) Definición: Denotaremos por Γ, o por $\Gamma(\Lambda)$, al carcaj definido como sigue: los vértices de Γ son todas las órbitas $\mathcal{O}_\Lambda(P)$ para $P \in \mathcal{P}_\Lambda$ y pondremos una flecha $\mathcal{O}_\Lambda(P) \to \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ en Γ si existen $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$, $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$ y $N \in \mathcal{S} \cap \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ tales que hay una flecha $M \to N$ en $CAR(\Lambda)$.

(3.2) Lema: Si $\mathcal{O}_\Lambda(P) \to \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ en Γ, tomemos $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ mínima tal que existen $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$, $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$, $N \in \mathcal{S} \cap \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ y $M \to N$ en $CAR(\Lambda)$. Entonces $N = Q$. En particular, hay un camino dirigido $P \rightsquigarrow Q$ en $CAR(\Lambda)$.

Demostración: Supongamos que $N \neq Q$. Entonces $Dtr\, N \in ind\,\Lambda$, pero como $\mathcal{S}$ es mínima, $Dtr\, M \notin ind\,\Lambda$. En consecuencia, $M = P$, pero por (2.10), ya que $P \to N$ en $\mathcal{S}$, se tendría $N = Q$ $\lightning$ //

(3.3) Corolario: Γ no tiene ciclos dirigidos ni aristas multiples //

(3.4) Notación: (a) Si $X \in ind\,\Lambda$, $\mathcal{S}_X$ es la única sección de $\mathcal{F}$ que contiene a X

(b). Denotaremos por h a la estratificación de $\mathcal{F}$ (ver 2.11)

(3.5) <u>Proposición</u>: Existe una inmersión plena $\Psi: CAR(\Lambda) \hookrightarrow \mathbb{Z}\Gamma$ de carcajes de traslación.

<u>Demostración</u>: Si $M \in \operatorname{ind}\Lambda$, definamos $\Psi(M) := (\mathcal{O}_\Lambda(P), h(\mathcal{S}_M))$, donde $P \in \mathcal{P}_\Lambda$ es el único tal que $M \in \mathcal{O}_\Lambda(P)$ (ver 2.7) Claramente Ψ define una inyección de los vértices de $CAR(\Lambda)$ en los de $\mathbb{Z}\Gamma$ que preserva y refleja la traslación. Bastará entonces probar que dados M y N en $\operatorname{ind}\Lambda$, $M \to N$ en $CAR(\Lambda)$ si y sólo si $\Psi(M) \to \Psi(N)$ en $\mathbb{Z}\Gamma$. Digamos, para esto, que $M \in \mathcal{S}_M \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$ y $N \in \mathcal{S}_N \cap \mathcal{O}_\Lambda(Q)$.

Supongamos primero que $M \to N$ en $CAR(\Lambda)$. Si $\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N$, entonces $\mathcal{O}_\Lambda(P) \to \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ en Γ y se tiene una flecha $\Psi(M) = (\mathcal{O}_\Lambda(P), h(\mathcal{S}_M)) \to (\mathcal{O}_\Lambda(Q), h(\mathcal{S}_N)) = \Psi(N)$ en $\mathbb{Z}\Gamma$. Si $\mathcal{S}_M \neq \mathcal{S}_N$, $\mathcal{S}_M \triangleleft \mathcal{S}_N$ y N no puede ser proyectivo por (2.10), de donde $D\operatorname{tr} N \to M$ en $\mathcal{S}_M$ y hay una flecha $\mathcal{O}_\Lambda(Q) \to \mathcal{O}_\Lambda(P)$ en Γ, por lo que se concluye que hay una flecha $\Psi(M) = (\mathcal{O}_\Lambda(P), h(\mathcal{S}_M)) \to (\mathcal{O}_\Lambda(Q), h(\mathcal{S}_N)+1) = \Psi(N)$ en $\mathbb{Z}\Gamma$.

Recíprocamente, supongamos que se tiene una flecha $\alpha: \Psi(M) \to \Psi(N)$ en $\mathbb{Z}\Gamma$. Si α es plana, $h(\mathcal{S}_M) = h(\mathcal{S}_N)$, tenemos una flecha de $\mathcal{O}_\Lambda(P)$ en $\mathcal{O}_\Lambda(Q)$ en Γ y por tanto existen $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$, $\hat{M} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$, $\hat{N} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ y $\hat{M} \to \hat{N}$ en $CAR(\Lambda)$. Por (2.13), $M = D\operatorname{tr}^n \hat{M}$ y $N = D\operatorname{tr}^n \hat{N}$, donde $n = h(\mathcal{T}) - h(\mathcal{S}_M)$ y por (1.4) hay una flecha $M \to N$ en $CAR(\Lambda)$. Si α no es plana, entonces $h(\mathcal{S}_N) = h(\mathcal{S}_M) + 1$ y tenemos en este caso una flecha $\mathcal{O}_\Lambda(Q) \to \mathcal{O}_\Lambda(P)$ en Γ. Entonces existen $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$, $\hat{M} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$, $\hat{N} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ y $\hat{N} \to \hat{M}$ en $CAR(\Lambda)$. Haciendo $n = h(\mathcal{T}) - h(\mathcal{S}_M)$ se tiene de (2.13) que $D\operatorname{tr}^n \hat{M} = M$ y $D\operatorname{tr}^{n-1} \hat{N} = N$. Si $\operatorname{tr} D M \in \operatorname{ind}\Lambda$, hay una flecha $D\operatorname{tr}^{n-1} \hat{N} = N \to \operatorname{tr} D M = D\operatorname{tr}^{n-1} \hat{M}$ en $CAR(\Lambda)$ y por tanto otra $D\operatorname{tr}\operatorname{tr} D M = M \to N$. Si $\operatorname{tr} D M \notin \operatorname{ind}\Lambda$, $M = D\operatorname{tr}^n \hat{M}$ es inyectivo y entonces $n \leq 0$. Se sigue que $N = \operatorname{tr} D^{|n|+1} \hat{N}$ no puede ser proyectivo y entonces $D\operatorname{tr} N = \operatorname{tr} D^{|n|} \hat{N} \in \operatorname{ind}\Lambda$ y $D\operatorname{tr} N \to M = \operatorname{tr} D^{|n|} \hat{M}$ en $CAR(\Lambda)$. Nuevamente por (1.4) hay una flecha $M \to N$ en $CAR(\Lambda)$ //

(3.6) <u>Observación</u>: Como $CAR(\Lambda)$ es conexo, (3.5) implica que $\Gamma(\Lambda)$ es conexo.

Consideremos ahora, para cada $\mathcal{S} \in \mathcal{C}$, las componentes conexas de la subgráfica de $CAR(\Lambda)$ definida por $\mathcal{P}_\Lambda \cap \mathcal{S}$. Sean $\vartheta_1, \dots, \vartheta_s$ todas las componentes no vacías que se obtienen cuando $\mathcal{S}$ recorre todo $\mathcal{C}$. Para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ definamos $\mathcal{T}_i := \Psi(\vartheta_i)$. Entonces $U = \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_s\}$ es una familia de subconjuntos planos de $\mathbb{Z}\Gamma$.

(3.7) <u>Lema</u>: U es un sistema (P)-generador para $\mathbb{Z}\Gamma$.

<u>Demostración</u>: (a) y (c) de (2.20) claramente se satisfacen, probaremos (b). Sean $i, j \in \{1, \dots, s\}$, $\bar{P} = \Psi(P) \in \mathcal{T}_i$, $\bar{Q} = \Psi(Q) \in \mathcal{T}_j$ y supongamos que existen $n \geq 0$ y una flecha plana $A^n \bar{P} \to \bar{Q}$ en $\mathbb{Z}\Gamma$. Mostraremos $i = j$.

Como $A^n \bar{P} \to \bar{Q}$ es plana, $\mathcal{O}_\Lambda(P) \to \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ en Γ y por (3.2) existen $M \in \mathcal{S}_Q \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$ y $M \to Q$ en $CAR(\Lambda)$. Como hay un camino $P \rightsquigarrow M \to Q$ en $CAR(\Lambda)$, $\mathcal{S}_P \leq \mathcal{S}_Q$ por (2.6).

Por otra parte, como $(\mathcal{O}_\Lambda(P), h(\mathcal{S}_P) - n) = A^n \bar{P} \to \bar{Q} = (\mathcal{O}_\Lambda(Q), h(\mathcal{S}_Q))$ es plana y $n \geq 0$, $h(\mathcal{S}_Q) = h(\mathcal{S}_P) - n \leq h(\mathcal{S}_P)$ y por (2.12) $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_Q$. Entonces $M = P$ y hay una flecha $P \to Q$ en $\mathcal{S}_Q$. Se sigue que P y Q están en el mismo ϑ_i y por lo tanto $i = j$. //

(3.8) <u>Lema</u>: Ψ puede restringirse a una inmersión plena de carcajes de traslación $\Psi: CAR(\Lambda) \hookrightarrow \mathbb{Z}\Gamma$.

<u>Demostración</u>: $B_0 = \{(\mathcal{O}_\Lambda(P), z) \mid P \in \mathcal{P}_\Lambda \ \& \ z < h(\mathcal{S}_P)\}$, que claramente no contiene puntos de $\operatorname{Im} \Psi$. //

(3.9) <u>Lema</u>: Ψ vuelve a restringirse a una inmersión plena de carcajes de traslación $\Psi: CAR(\Lambda) \hookrightarrow \mathbb{N}\Gamma$.

<u>Demostración</u>: Sea $M \in \operatorname{ind} \Lambda$, digamos $M \in \mathcal{S}_M \cap \mathcal{O}_\Lambda(P)$. Probaremos que $\Psi(M) \notin B_1$ (ver 2.22). Sea $n \geq 0$ tal que $A^n \Psi(M) \in \mathbb{Z}\Gamma$, debemos probar que $\operatorname{Hom}_{k(\mathbb{Z}\Gamma)}(-, A^n \Psi(M))_{|U} \neq 0$. Como $h(\mathcal{S}_P) \leq h(\mathcal{S}_M) - n$, $r := h(\mathcal{S}_M) - h(\mathcal{S}_P) \geq n \geq 0$ y $D\mathrm{tr}^r M = P$ por (2.13). Entonces $D\mathrm{tr}^n M \in \operatorname{ind} \Lambda$ y, desde luego, $A^n \Psi(M) = \Psi(D\mathrm{tr}^n M)$. Sea $Q \in \operatorname{Supp} D\mathrm{tr}^n M$. Por (3.8), (2.7) y (1.11) hay un epimorfismo $\operatorname{Hom}_{k(\mathbb{Z}\Gamma)}(\Psi(Q), A^n \Psi(M)) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, D\mathrm{tr}^n M) \neq 0$

y como $\Psi(Q)\in\mathcal{U}$ se obtiene el resultado buscado //

(3.10) <u>Lema</u>: $\mathcal{U}$ satisface la condición (+)

<u>Demostración</u>: Sea $y=(\mathcal{O}_\Lambda(P), h(\mathcal{S}_P))=\Psi(P)\in\mathcal{U}$ y consideremos una flecha cualquiera $\alpha: x\to y$ en $\mathbb{Z}\Gamma$, digamos con $x=(\mathcal{O}_\Lambda(Q), z)$. Se afirma primero que α es plana. En efecto, como $x\in\mathbb{Z}\Gamma$, $x\in\mathbb{N}\Gamma$ y $z\geq h(\mathcal{S}_Q)$, de donde $n := z-h(\mathcal{S}_Q)\geq 0$ y si α no fuese plana lo sería $\alpha^*: y\to A^{-1}x$ y también $A^{n+1}y\to A^{n+1}A^{-1}x=A^n x=\Psi(Q)$ contradiciendo a (3.7) pues como $n+1>0$ $\Psi(P)$ y $\Psi(Q)$ están en $\mathcal{T}_i$'s distintos.

Como α es plana, tenemos una flecha $\mathcal{O}_\Lambda(Q)\to\mathcal{O}_\Lambda(P)$ en Γ y existen $M\in\mathcal{O}_\Lambda(Q)\cap\mathcal{S}_P$ y $M\to P$ en $CAR(\Lambda)$. Entonces $x=(\mathcal{O}_\Lambda(Q), z)=(\mathcal{O}_\Lambda(Q), h(\mathcal{S}_P))=(\mathcal{O}_\Lambda(Q), h(\mathcal{S}_M))=\Psi(M)$.

Aplicando (3.9), (2.7) y (1.11) obtenemos, como en la prueba de (3.9), que $\mathrm{Hom}_{k(\mathbb{Z}\Gamma)}(-,x)_{|\mathcal{U}}\neq 0$ //

(3.11) <u>Proposición</u>: Ψ se restringe (¡más aún!) a un isomorfismo $\Psi: CAR(\Lambda)\approx L(\mathcal{U})$ de carcajes de traslación

<u>Demostración</u>: El último argumento de la prueba anterior demuestra que Ψ puede restringirse a una inmersión plena de carcajes de traslación $\Psi: CAR(\Lambda)\hookrightarrow L(\mathcal{U})$. Nos basta entonces demostrar que todo vértice x de $L(\mathcal{U})$ esta en la imagen de Ψ.

Hay un orden parcial natural definido entre los vértices de $L(\mathcal{U})$: el inducido por $x\leq y$ si $x\to y$ en $L(\mathcal{U})$. Haremos inducción sobre este orden parcial.

Para "anclar" nuestra inducción observemos que si $x\in\mathcal{U}$, $x\in \mathrm{Im}\,\Psi$ por la definición de $\mathcal{U}$.

Sea ahora x un vértice cualquiera de $L(\mathcal{U})$ que no esté en $\mathcal{U}$ y supongamos que todos los vértices de $L(\mathcal{U})$ que sean menores que x están en la imagen de Ψ.

Por (3.10), el Teorema de Bautista-Salmerón (2.26) nos asegura que $L(\mathcal{U})$ es la componente preproyectiva de $\Lambda(\Gamma,\mathcal{U})$, de modo que como $x \notin \mathcal{U}$, $Ax \in L(\mathcal{U})$ y llegan a x caminos en $L(\mathcal{U})$ desde algunos puntos de $\mathcal{U}$.

Sean $y_1, \dots, y_r$ los puntos de $L(\mathcal{U})$ tales que existen flechas $y_i \to x$ en $L(\mathcal{U})$. Por hipótesis de inducción existen $M, M_1, \dots, M_r \in \operatorname{ind}\Lambda$ tales que $\Psi(M) = Ax$ y $\Psi(M_i) = y_i$ para $i \in \{1, \dots, r\}$. Por la plenitud de Ψ, estos M_i's son precisamente aquellos tales que hay flechas $\bar{\alpha}_i : M \to M_i$ en $CAR(\Lambda)$.

<u>Supongamos</u> que M es inyectivo. Por el capítulo I, sabemos que la sucesión $M \xrightarrow{\pi} \coprod_{i=1}^{r} M_i \to 0$ es exacta donde π es el morfismo inducido por $(\Phi(\bar{\alpha}_i) : M \to M_i)_{i=1}^{r}$ y $\Phi : k(CAR(\Lambda)) \approx \operatorname{ind}\Lambda$ es la equivalencia de (2.7). Por la hipótesis de inducción, Ax y los y_i's se encuentran en una zona de $L(\mathcal{U})$ que sí es isomorfa a la correspondiente de $CAR(\Lambda)$ de modo que, como en (1.10) puede probarse que $\operatorname{Hom}_{k(L(\mathcal{U}))}(-, Ax)_{|\mathcal{U}} \approx \operatorname{Hom}_\Lambda(-, M)_{|\mathcal{P}_\Lambda}$ y similarmente para los y_i's y los M_i's.

Usando (2.28) obtenemos entonces un diagrama conmutativo y exacto:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\operatorname{Hom}_{k(L(\mathcal{U}))}(-, Ax)_{|\mathcal{U}} \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{i=1}^{r} \operatorname{Hom}_{k(L(\mathcal{U}))}(-, y_i)_{|\mathcal{U}} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_{k(L(\mathcal{U}))}(-, x)_{|\mathcal{U}} \arrow[r] & 0 \\
\operatorname{Hom}_\Lambda(-, M)_{|\mathcal{P}_\Lambda} \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{i=1}^{r} \operatorname{Hom}_\Lambda(-, M_i)_{|\mathcal{P}_\Lambda} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

de donde $\operatorname{rad}\operatorname{Hom}_{k(L(\mathcal{U}))}(-, x)_{|\mathcal{U}} = 0$, pero entonces $\operatorname{Hom}_{k(L(\mathcal{U}))}(-, x)_{|\mathcal{U}} = 0$, contradiciendo el hecho de que $k(L(\mathcal{U}))$ es unión de las componentes preproyectivas de $\Lambda(\Gamma, \mathcal{U})$ ↯. Entonces M no es inyectivo y $x = \Psi(\operatorname{tr} DM)$ //

De (2.26) y los resultados de este capítulo se sigue:

(3.12) <u>Teorema</u> Λ es una (P) álgebra si y sólo si Λ es Γ-sumergible //

CAPITULO IV

Algebras Forestales

Recordemos que en (3.1) ha sido definido un carcaj $\Gamma(\Lambda)$ para cada (P)-álgebra Λ, y que hay una inmersión de carcajes de traslación $\psi: CAR(\Lambda) \hookrightarrow \mathbb{Z}\Gamma(\Lambda)$ de tal manera que $\psi(\mathcal{P}_\Lambda)$ es la unión de un sistema (P)-generador.

(4.1) Proposición: Si Λ es una (P)-álgebra, $\Gamma(\Lambda)$ es subcarcaj de todo carcaj C tal que exista una inmersión $\psi: CAR(\Lambda) \hookrightarrow \mathbb{Z}C$ de carcajes de traslación y $\psi(\mathcal{P}_\Lambda)$ sea unión de un sistema (P)-generador de $\mathbb{Z}C$.

Demostración: Abusando del lenguaje, diremos que $\psi(\mathcal{P}_\Lambda)$ "es (P)-generador". Pongamos, para cada $P \in \mathcal{P}_\Lambda$, $\psi(P) = (\tau_p, z_p) \in \mathbb{Z}C$. Como $\psi(\mathcal{P}_\Lambda)$ es (P)-generador tenemos, por (a) y (c) de (2.20), que $\mathcal{O}_\Lambda(P) \mapsto \tau_p$ define una biyección de $(\Gamma(\Lambda))_0$ en C_0. Supongamos que se tiene una flecha $\mathcal{O}_\Lambda(P) \to \mathcal{O}_\Lambda(Q)$ en $\Gamma(\Lambda)$ y probaremos que también hay una flecha $\tau_p \to \tau_Q$ en C.

Por (3.2) existe $M \in \mathcal{O}_\Lambda(P) \cap \mathcal{S}_Q$ tal que $M \to Q$ en $CAR(\Lambda)$. Entonces hay una flecha $\alpha: \psi(M) \to \psi(Q)$ en $\mathbb{Z}C$ y por lo tanto $\psi(M)$ es de la forma $\psi(M) = (\tau_p, z_Q)$: en efecto, la primera coordenada debe ser τ_p porque ψ preserva la traslación y la segunda es z_Q porque α debe ser plana. Ciertamente, si α no fuese plana lo sería $\psi(Q) \to A^{-1}\psi(M)$ y también $A^{n+1}\psi(Q) \to \psi(P)$ donde $n \geq 0$ es tal que $A^n\psi(M) = \psi(P)$, pero en vista de (b) de (2.20) se tendría que $\Psi(\mathcal{P}_\Lambda)$ no es (P)-generador $\mathcal{Y}$. Entonces, como la flecha $\alpha:(i_P,z_Q)\to(i_Q,z_Q)$ está en $\mathbb{Z}C$ deberemos tener, por definición, una flecha $i_P\to i_Q$ en C. //

(4.2) Corolario: Si Γ es un árbol orientado y Λ es Γ-sumergible, entonces $\Gamma=\Gamma(\Lambda)$. En consecuencia $\Gamma(\Lambda)$ es el único árbol C tal que Λ es C-sumergible.

Demostración: Ambas afirmaciones son equivalentes. La segunda es inmediata de (4.1) y el hecho de que ningún árbol sigue siéndolo si se le agrega una flecha. //

(4.3) Definición: Λ es un álgebra forestal si Λ es una (P)-álgebra y $\Gamma(\Lambda)$ es un árbol orientado. Equivalentemente, si Λ es C-sumergible para algún árbol orientado C.

Hasta nuevo aviso Λ será un álgebra forestal, $\mathcal{F}$ la (P)-cubierta de $CAR(\Lambda)$ y $\Gamma=\Gamma(\Lambda)$. Identificaremos a $CAR(\Lambda)$ con su imagen bajo la inmersión $\Psi: CAR(\Lambda)\hookrightarrow\mathbb{Z}\Gamma$ construída en (3.5). Recordemos que por (2.26) cada sección de $\mathcal{F}$ está contenida en alguna sección canónica de $\mathbb{Z}\Gamma$. Identificaremos a Γ con la sección canónica $\mathcal{S}_0$ de $\mathbb{Z}\Gamma$.

(4.4) Definición: Si $x=(i,z)\in\mathbb{Z}\Gamma$, los sectores de $\mathbb{Z}\Gamma$ definidos por x son las órbitas en $\mathbb{Z}\Gamma$ de las componentes conexas de $\Gamma\setminus\{i\}$. Por abuso de lenguaje, los llamaremos "sectores de x".

(4.5) Observación: Como Γ es un árbol, para cualesquiera $x\in\mathbb{Z}\Gamma$ y $\mathcal{G}\subseteq\mathbb{Z}\Gamma$ que sea conexo y no contenga puntos de $\mathcal{O}(x)$, $\mathcal{G}$ está enteramente contenido en algún sector de x. En particular, si $P\in\mathcal{P}_\Lambda$ y $\mathcal{T}\triangleleft\mathcal{S}_P$, $\cup\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ está contenida en algún sector de P. Fijemos un $P\in\mathcal{P}_\Lambda$.

Sean $\mathcal{T}_1,\dots,\mathcal{T}_r$ todas las secciones de $\mathcal{F}$ tales que $\mathcal{T}_i\triangleleft\mathcal{S}_P$

y sea, para cada $i \in \{1,\dots,r\}$, $\mathcal{C}_i$ la unión de las componentes de $\mathcal{S}_P \setminus \{P\}$ que contienen a $tr\partial \mathcal{T}_i$; entonces $\mathcal{M}_i := \mathcal{C}_i \cup \bigcup \mathcal{G}_{\mathcal{T}_i}$ es conexo y está contenido en algún sector de P. Probablemente, además de las componentes de $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ contenidas en $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{C}_i$ hay otras, que llamaremos $\mathcal{M}_{r+1},\dots,\mathcal{M}_s$. En caso de existir, estas componentes están formadas por proyectivos y por ser conexas, cada una de ellas está contenida en algún sector de P.

Llamemos $A_1, A_2, \dots, A_u$ a los distintos sectores de P. Para cada $i \in \{1,\dots,u\}$, llamemos Π_i a la unión de todos los $\mathcal{M}_j$'s $(j \in \{1,\dots,s\})$ que estén en el sector A_i.

Entonces tenemos la descomposición $\bigcup \mathcal{G}_{\mathcal{S}_P} = \{P\} \cup \bigcup_{i=1}^{u} \Pi_i$ que, por (2.9), tiene la propiedad de que cualquier camino —dirigido o no— en $\bigcup \mathcal{G}_{\mathcal{S}_P}$ que abandone algún Π_i lo hace hacia P.

(4.6) Proposición: Sea $P \in \mathcal{P}_\Lambda$ y supongamos que $M, N \in \operatorname{ind} \Lambda$ son dos sumandos no isomorfos de $\operatorname{rad} P$. Consideremos una cadena de morfismos no nulos $P_M - P_1 - P_2 - \cdots - P_t - P_N$ en $\mathcal{P}_\Lambda$ con $P_M \in \operatorname{Supp} M$ y $P_N \in \operatorname{Supp} N$. Entonces, si para ningún $i \in \{1,\dots,t\}$ se tiene $\mathcal{S}_P < \mathcal{S}_{P_i}$, existe algún $i \in \{1,\dots,t\}$ tal que $P \in \operatorname{Supp} P_i$.

Demostración: Usaremos la notación de (4.5). Sabemos que M y N están en $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ pero además, como $M \to P \leftarrow N$ en $\mathcal{S}$, M y N están en distintos sectores de P, digamos que $M \in \Pi_1$ y $N \in \Pi_2$.

Como hay un camino dirigido en $\bigcup \mathcal{G}_{\mathcal{S}_P} \setminus \{P\}$ de P_M a M, resulta $P_M \in \Pi_1$ y similarmente $P_N \in \Pi_2$ de forma que por (4.5) cualquier camino en $\bigcup \mathcal{G}_{\mathcal{S}_P}$ que conecte a P_M con P_N deberá pasar por P.

Consideremos ahora nuestra cadena $P_M - P_1 - \cdots - P_r - P_N$: cada morfismo $P_i \to P_j$ de esta cadena $(i,j \in \{M,N,1,\dots,r\})$ nos da un camino dirigido $P_i \to X_{ij}^1 \to X_{ij}^2 \to \cdots \to X_{ij}^{n(i,j)} \to P_j$ en $CAR(\Lambda)$ cuya composición en $\operatorname{ind}\Lambda \simeq k(CAR(\Lambda))$ no es cero. Usando (2.9), (2.6), el hecho de que $P_i \in \mathcal{S}_{P_i} \not> \mathcal{S}$ para todo $i \in \{1,\dots,r\}$ y el que

$P_M, P_N \in \bigcup \mathcal{C}_{S_p}$ se obtiene que todos estos caminos están contenidos en $\bigcup \mathcal{C}_{S_p}$. Si los ponemos todos juntos se obtiene un camino que conecta a P_M con P_N, de modo que por lo anteriormente dicho algún P_i es P o bien algún X_{ij}^{ℓ} es P. En este último caso la composición $P = X_{ij}^{\ell} \to X_{ij}^{\ell+1} \to \cdots \to X_{ij}^{m(i,j)}$ no es cero, de donde $P \in \mathrm{Supp}\, P_j$. //

(4.7) <u>Definición</u>: Consideremos el conjunto de todas las cadenas $P_M - P_1 - P_2 - \cdots - P_u - P_N$ de morfismos no nulos en $\mathcal{P}_\Lambda$, con P_M y P_N fijos. Una cadena dada es <u>menor</u> que $P_M - P_1 - \cdots - P_u - P_N$ si se obtiene aplicando a ésta varias veces el siguiente procedimiento: se omite un eslabón, digamos P_{i_0}, y se intercala una subcadena, obteniéndose $P_M - P_1 - \cdots - P_{i_0-1} - Q_1 - \cdots - Q_s - P_{i_0+1} - \cdots - P_u - P_N$ donde $P_{i_0} \neq Q_j \in \mathrm{Supp}\, P_{i_0}$ para toda $j \in \{1, \dots, s\}$. Como Λ es cociente de hereditaria esto define un orden parcial estricto en el conjunto considerado.

(4.8) <u>Lema</u>: Con las hipótesis de (4.6), excepto $S_p \neq S_{P_i}$ para toda $i \in \{1, \dots, t\}$, supongamos que $S_{P_{i_0}}$ es maximal (entre las S_{P_i}'s) con la propiedad de que $S_p < S_{P_{i_0}}$. Supongamos que P_{i_0} es maximal entre los P_i's que están en $S_{P_{i_0}}$ y supongamos que existe un sumando inescindible M de $\mathrm{rad}\, P_{i_0}$ tal que $\{P_{i_0-1}, P_{i_0+1}\} \subseteq \mathrm{Supp}\, M$. Entonces existe una cadena menor que la considerada.

<u>Demostración</u>: Inmediato de que $\mathrm{Supp}\, M$ es débilmente conexo. (Las maximalidades de P_{i_0} y $S_{P_{i_0}}$ no son necesarias: se han puesto para futura referencia). //

<u>Aviso</u>: Este es el "nuevo aviso" esperado: Λ deja de ser forestal y vuelve a ser como en (1.1)

(4.9) <u>Teorema</u>: Si Λ es forestal, Λ satisface la condición (S).

Demostración: Sea $P \in \mathcal{P}_\Lambda$. Probaremos que P tiene radical separado. Sean $M, N \in \operatorname{ind}\Lambda$ dos sumandos no isomorfos de $\operatorname{rad} P$ y consideremos una cadena $\gamma: P_M - P_1 - \cdots - P_r - P_N$ de morfismos no nulos en $\mathcal{P}_\Lambda$ con $P_M \in \operatorname{Supp} M$ y $P_N \in \operatorname{Supp} N$. Probaremos que algún $P_i \in \mathcal{D}(P)$. Haremos inducción (descendente) sobre el orden parcial de $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}_P$ es maximal en $\mathcal{S}$ con la propiedad de contener proyectivos, entonces ciertamente se satisfacen las hipótesis de (4.6) y algún P_i tiene a P en su soporte, de donde $P_i \in \mathcal{D}(P)$.

Si $\mathcal{S}_P$ no es maximal en $\mathcal{S}$ con la propiedad de contener proyectivos, tenemos por la hipótesis de inducción que Q tiene radical separado siempre que $Q \in \mathcal{P}_\Lambda$ sea tal que $\mathcal{S}_Q > \mathcal{S}_P$.

En vista de (4.6) podemos suponer que existe un i_0 tal que $\mathcal{S}_{P_{i_0}} > \mathcal{S}_P$.

Supongamos que ningún P_i está en $\mathcal{D}(P)$. Podemos suponer que nuestra cadena γ es minimal, en el sentido de (4.7), con esta mala propiedad, y que P_{i_0}, $\mathcal{S}_{P_{i_0}}$ son como en (4.8).

Si hubiera sumandos inescindibles no isomorfos X y Y de $\operatorname{rad} P_{i_0}$ tales que $P_{i_0-1} \in \operatorname{Supp} X$ y $P_{i_0+1} \in \operatorname{Supp} Y$, como tenemos la cadena de morfismos no nulos en $\mathcal{P}_\Lambda$:

$$P_{i_0-1} - P_{i_0-2} - \cdots - P_1 - P_M - P - P_N - P_r - \cdots - P_{i_0+2} - P_{i_0+1}$$

y P_{i_0} tiene radical separado por la hipótesis de inducción, alguno de estos proyectivos estaría en $\mathcal{D}(P_{i_0})$; sin embargo, esto no ocurre para los P_i's por la elección de P_{i_0} ni para P_M, P, P_N que están en secciones menores o iguales que $\mathcal{S}_P < \mathcal{S}_{P_{i_0}}$ $\lightning$.

Entonces vale la hipótesis de (4.8) y se tiene una cadena γ' menor que γ, digamos $\gamma' = P_M - P_1 - \cdots - P_{i-1} - Q_1 - Q_2 - \cdots - Q_s - P_{i+1} - \cdots - P_r - P_N$ con $Q_j \in \operatorname{Supp} P_i$ para toda $j \in \{1, \dots, s\}$. Como $\gamma' < \gamma$, alguno de sus eslabones está en $\mathcal{D}(P)$ y como esto no ocurre para los P_i's existe un $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $Q_j \in \mathcal{D}(P)$. Pero como $Q_j \in \operatorname{Supp} P_i$, resulta ahora que P_i siempre sí está en $\mathcal{D}(P)$ $\lightning$ //

Supongamos ahora (y hasta antes de 4.13) que Λ es una (P)-álgebra. Sea $\mathscr{C}$ la (P)-cubierta de $CAR(\Lambda)$. Estudiaremos los ciclos de $\Gamma(\Lambda)$.

Supongamos que se tiene un ciclo

$$\Sigma : \mathcal{O}_\Lambda(P_0) - \mathcal{O}_\Lambda(P_1) - \cdots - \mathcal{O}_\Lambda(P_r) - \mathcal{O}_\Lambda(P_0)$$

en $\Gamma(\Lambda)$. Podemos suponer que se trata de un ciclo Hamiltoniano (desde luego, no dirigido): $P_i \neq P_j$ siempre que $i \neq j$. Por (3.3), $r \geq 2$.

Llamemos P a P_0. Tenemos derecho a suponer que $\mathcal{S}_P$ es maximal en $\{\mathcal{S}_{P_i}\}_{i=0}^r$ y que no hay caminos dirigidos en $CAR(\Lambda)$ que vayan de P a los otros P_i's.

Por (3.2), cada flecha $\mathcal{O}_\Lambda(P_i) \to \mathcal{O}_\Lambda(P_j)$ en Σ nos da un camino dirigido $\gamma_{ij} : P_i \to X_{ij}^1 \to X_{ij}^2 \to \cdots \to X_{ij}^{n(i,j)} \to P_j$ en $CAR(\Lambda)$. En particular $\mathcal{S}_{P_i} \leq \mathcal{S}_{P_j}$ siempre que $\mathcal{O}_\Lambda(P_i) \to \mathcal{O}_\Lambda(P_j)$, de modo que en Σ se tiene $\mathcal{O}_\Lambda(P_r) \to \mathcal{O}_\Lambda(P) \leftarrow \mathcal{O}_\Lambda(P_1)$.

(4.10) <u>Lema</u>: Consideremos una flecha $\mathcal{O}_\Lambda(P_i) \to \mathcal{O}_\Lambda(P_j)$ en Σ tal que $n(i,j) > 0$. Entonces, si $1 \leq \ell \leq n(i,j)$, $X_{ij}^\ell \neq P$.

<u>Demostración</u>: Por la elección de P. //

Poniendo juntos todos los γ_{ij}'s se obtiene un ciclo σ en $CAR(\Lambda)$. Por (4.10), σ pasa una sola vez por P, de modo que $\Delta := \sigma \setminus \{P\}$ es un camino (tal vez no dirigido) que va de $M := X_{r0}^{n(r,0)}$ a $N := M_{10}^{n(1,0)}$. $M \neq N$ debido a que $M \in \mathcal{O}_\Lambda(P_r)$, $N \in \mathcal{O}_\Lambda(P_1)$,(*) Σ es Hamiltoniano y $r \geq 2$. Definamos ahora $\mathfrak{S} := \bigcup \mathscr{C}_{\mathcal{S}_P}$.

(4.11) <u>Lema</u>: $\Delta \subseteq \mathfrak{S} \setminus \mathcal{D}(P)$

<u>Demostración</u>: Veamos primero que $\sigma \subseteq \mathfrak{S}$. Para esto nos bastará con demostrar que todos los γ_{ij}'s están contenidos en $\mathfrak{S}$. El primer γ_{ij} es $\gamma_{10} : P_1 \rightsquigarrow P$ y está contenido en $\mathfrak{S}$ por (2.6). Para el segundo γ_{ij} hay dos posibilidades: γ_{21} y γ_{12}. Si lo que se

---

(*): Puede tomarse $M = X_{r0}^{n(r,0)} = tr D^{\frac{1}{2} n(r,0)}$ y similarmente para N.

tiene es γ_{21}, éste está contenido en $\mathcal{C}$ por (2.6). Supongamos que lo que se tiene es $\gamma_{12}: P_1 \rightsquigarrow P_2$ y <u>supongamos</u> que γ_{12} no está contenido en $\mathcal{C}$. Como $P_1 \in \mathcal{C}$ se tiene entonces, por (2.9), que $\mathcal{S}_{P_2} > \mathcal{S}_P$ ↯.

Continuando inductivamente, todos los γ_{ij}'s están contenidos en $\mathcal{C}$ y por lo tanto $\sigma \subseteq \mathcal{C}$.

Sea $Q \in \sigma \cap \mathcal{D}(P)$. Q no es ningún X_{ij}^{ℓ} pues no hay caminos $P \rightsquigarrow Q \rightsquigarrow P_j$ en $CAR(\Lambda)$ por la elección de P. Entonces $Q = P_i$ para alguna $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ pero, nuevamente por la elección de P, sólo puede ser $Q = P_0 = P$.

Entonces $\Delta = \sigma \setminus \{P\} \subseteq \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}(P)$. //

(4.12) <u>Lema</u>: Para todo módulo $X \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}(P)$, $\mathrm{Supp}\, X$ está contenido en alguna componente débilmente conexa de $\mathcal{P}_\Lambda \setminus \mathcal{D}(P)$.

<u>Demostración</u>: $\mathrm{Supp}\, X$ es débilmente conexo, de modo que basta probar que $\mathrm{Supp}\, X \subseteq \mathcal{P}_\Lambda \setminus \mathcal{D}(P)$. <u>Supongamos</u> que existe algún $Q \in \mathcal{D}(P) \cap \mathrm{Supp}\, X$. Entonces hay un camino de morfismos no nulos $P \rightsquigarrow Q \rightarrow X$ que nos da un camino dirigido en $CAR(\Lambda)$: $P \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_r \to X$ y por lo tanto $\mathcal{S}_P \leq \mathcal{S}_X$. Como $X \in \mathcal{C}$, $\mathcal{S}_X \leq \mathcal{S}_P$ y entonces $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_X$. En consecuencia todo nuestro camino $P \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_r \to X$ está contenido en $\mathcal{S}_P$ (ver 2.6). Por (2.10) resulta ahora que $\{X_1, X_2, \dots, X_r, X\} \subseteq \mathcal{P}_\Lambda$. ¡Entonces se tiene que $X \in \mathcal{D}(P)$! ↯ //

Aquí, nuevamente, Λ vuelve a ser como en (1.1). Resumiendo los resultados de este capítulo, podemos enunciar:

(4.13) <u>Teorema</u>: Supongamos que Λ es de t.r.f. Entonces Λ es forestal si y sólo si Λ satisface la condición (S).

<u>Demostración</u>: La necesidad es (4.9). Para probar la suficiencia supongamos que Λ satisface la condición (S).

Por (2.18) Λ es una (P)-álgebra, de modo que sólo nos falta ver que $\Gamma(\Lambda)$ es un árbol.

Supongamos que $\Gamma(\Lambda)$ tiene un ciclo. Hemos obtenido ya un $P \in \mathcal{P}_\Lambda$ y dos sumandos inescindibles no isomorfos M y N de $\operatorname{rad} P$ tales que hay un camino

$$\Delta : M - Z_1 - Z_2 - \cdots - Z_u - N$$

en $CAR(\Lambda)$.

Por (4.11) y (4.12) todos los módulos de Δ tienen soporte contenido en alguna componente débilmente conexa de $\mathcal{P}_\Lambda \setminus \mathcal{D}(P)$ y, ya que hay morfismos no nulos entre ellos, esta componente es la misma para todos, en particular para M y N. ¡ Entonces P no tiene radical separado! $\not{z}$ //

Bibliografía

[1] R Bautista "Classification of certain algebras of finite representation type". Com Internas del Depto de Mat., Fac de Ciencias, U.N.A.M 51 (1978).

[2] R Bautista - F. Larrión "Auslander-Reiten quivers for certain algebras of finite representation type" Publ Preliminares del Inst. de Mat., U.N.A.M 8 (1980).

[3] R Bautista - L Salmerón "Preprojective components for certain finite dimensional algebras". Por publicarse.

[4] K Bongartz - C.M Ringel "Representation-finite tree algebras" Por publicarse

[5] P. Gabriel "Unzerlegbare Darstellungen I". Manuscripta Math 6 (1972) 71-103.

[6] F. Larrión "Representaciones de Arboles". Tesis para optar al grado de Maestro en Ciencias Fac. Ciencias, U.N.A.M. (1980).

[7] Ch. Riedtmann "Representation-finite selfinjective algebras of class A_n" Por publicarse

¡Y ya!