

00363



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias
División de Estudios de Postgrado

1
2eg

**COMPARACION ENTRE TRES DIFERENTES
INTERPRETACIONES DE LA ECUACION DEL
POTENCIAL GEOMAGNETICO.**

T E S I S
D E P O S T G R A D O
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (GEOFISICA),
PRESENTA:
LUCIA D. CHARGOY ESPINOLA

México

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1981



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

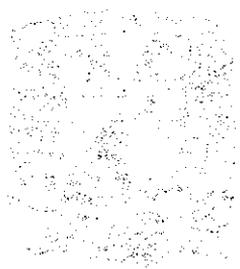
DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PLEASE PRINT NAME AND ADDRESS

NAME AND ADDRESS



EDUCATIONAL INSTITUTIONS AND LIBRARIES
AND INDIVIDUALS WHO WISH TO PURCHASE
CONSERVATION LITERATURE

1. Name of Institution
2. Address
3. City
4. State
5. Zip

WOOD BERT
LEWIS ED ALLAN

LIBRARY

A MIS PADRES

A MIS HERMANOS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FOR SALE
MEDRO 10 ALIA

A JUSTINO

A

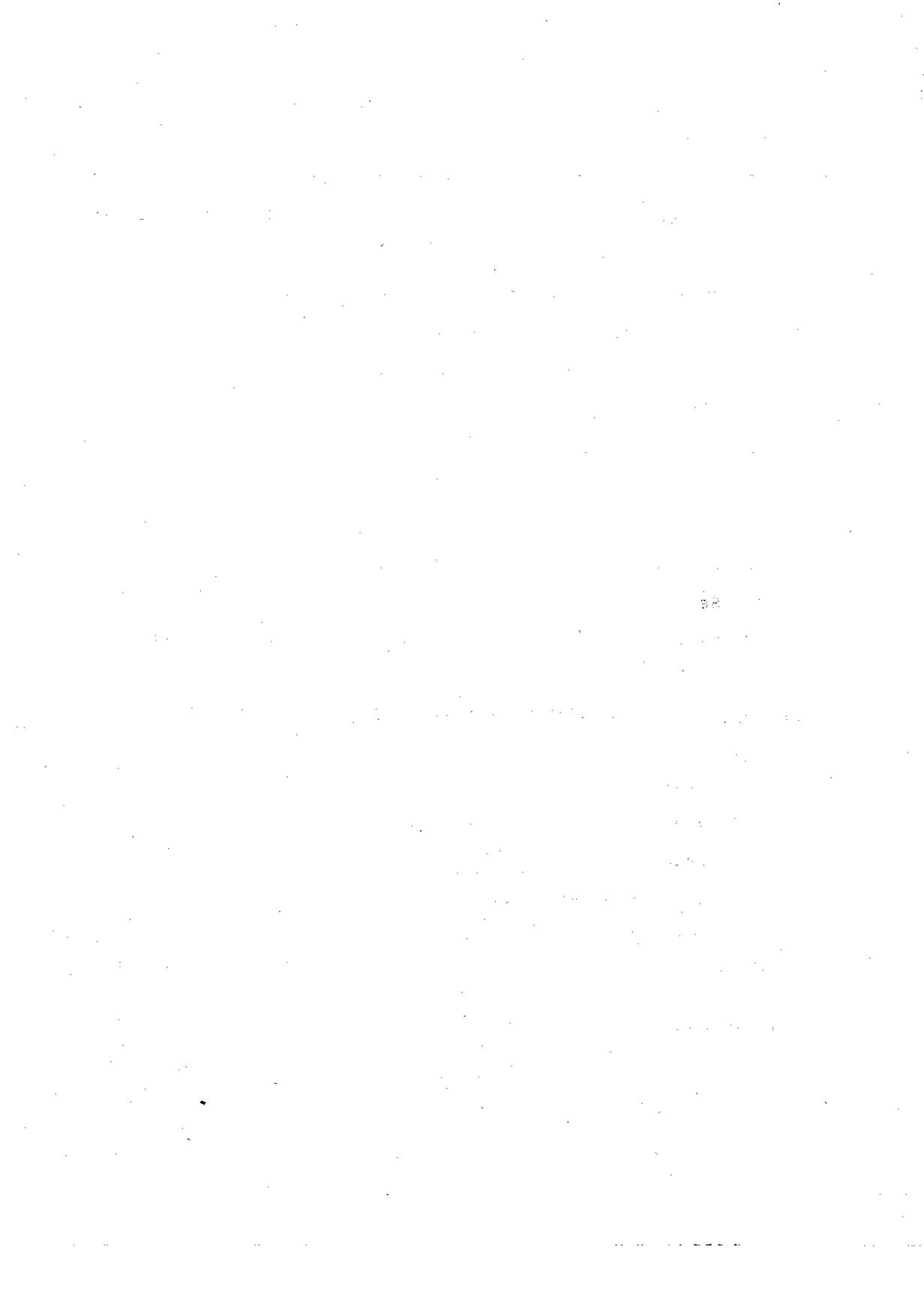
DORALDINA
LEON FELIPE
MIGUEL ANGEL

10/1/1918
10/1/1918
10/1/1918

AL MAESTRO ANSELMO CHARGOY QUIEN
CON CARINO Y ESFUERZO HA GUIADO
MI VIDA PROFESIONAL

INDICE

	Pág
INTRODUCCION.	1
CAPITULO I. ECUACION DE GAUSS DEL POTENCIAL.	
1.1 Solución de la ecuación diferencial de Laplace	8
1.2 Desarrollos de Taylor	12
1.3 Propiedades algebraicas de las sustituciones	20
1.4 Multipolos y puntos singulares	24
1.5 Generalización de las sustituciones	26
1.6 Caso Magnético	36
1.7 Centro de una distribución $S_0 = \{m_i\}$	39
CAPITULO II. DOS INTERPRETACIONES DE LA ECUACION DE GAUSS	
2.1 Primera interpretación	51
2.2 Segunda interpretación	54
2.3 Ventajas del sistema de referencia de ejes propios	61
CAPITULO III. UNA TERCERA INTERPRETACION DE LA ECUACION DE GAUSS.	
3.1 Dipolo	81
3.2 Cuadripolo	89
3.3 Octipolo	99
3.4 Otras consideraciones	105
3.5 Campo electromagnético	107
APENDICE	114
BIBLIOGRAFIA	117



INTRODUCCION

El magnetismo es un fenómeno físico natural conocido desde la antigüedad. Muchos siglos antes de la Era Cristiana se escribía acerca de una piedra que poseía la propiedad, entre otras, de atraer partículas de hierro en algunas zonas de su superficie; se trataba de la "piedra imán" o "magnetita" (Fe_3O_4) y el escrito más antiguo donde se menciona es el de Thales de Mileto (640 - 546 A.C.). Desde entonces se sucedieron los descubrimientos relacionados con el magnetismo en general y con la existencia del campo magnético terrestre. Es en el siglo XII cuando se empieza a conocer en Europa el empleo de la aguja magnética como método de orientación, aunque en Asia era conocido desde antes.

Conocida ya la existencia del campo magnético terrestre de origen interno, su estudio se puede dividir en tres partes:

La primera es obtener los datos experimentales de una red mundial de observatorios magnéticos permanentes, instalados sobre la superficie del planeta. En el caso de los océanos y de las zonas de acceso difícil, como los casquetes polares, las observaciones se hacen a bordo de embarcaciones ya sean marítimas o aéreas, e inclusive en los últimos tiempos desde vehículos espaciales.

En las observaciones hechas se ve que la dirección e intensidad del campo magnético varía en cada punto de la superfi

cie, por lo que el campo magnético se puede tratar como función de las coordenadas del observador y representar por un vector \vec{F} en cada punto de la superficie.

Este vector magnético \vec{F} , se puede determinar en casi todos los puntos P sobre la superficie donde se instala el observador, por sus componentes (X, Y, Z) respecto a un sistema de referencia construido por el mismo observador con origen en P, el cual se llama "sistema local". Por facilidad en la medición, \vec{F} también se puede expresar mediante otros tres elementos, éstos son intensidad horizontal H, declinación D e inclinación I que tradicionalmente se han observado con equipo que consta de magnetómetros, inductor terrestre y otros.

Con los datos obtenidos en las observaciones, se elaboran las cartas magnéticas mundiales para representar el vector magnético (en intensidad y dirección) en cada punto de la superficie terrestre, en ellas se trazan curvas llamadas isomagnéticas, relativas a valores medios correspondientes a una época determinada. Estas curvas unen puntos en los que un elemento magnético determinado tiene el mismo valor, las cartas que se elaboran son para declinación D, componente vertical Z, componente horizontal H ($H^2 = X^2 + Y^2$), inclinación I e intensidad total F.

En nuestro país se cuenta con un observatorio de registro continuo, Teoloyucan, además de una red de 60 estaciones dispersas sobre todo el territorio en las que se hacen observa-

ciones periódicamente para elaborar las cartas magnéticas de la República. Los datos obtenidos en estas estaciones también se envían a los centros mundiales para la elaboración de las cartas magnéticas mundiales.

A partir de las cartas se construyen tablas en dos dimensiones (longitud λ y latitud θ) para obtener en cualquier punto de la superficie el valor de los elementos observados.

La segunda parte del estudio consiste en determinar una función matemática que describa las últimas tablas, así se obtiene la expresión para el potencial escalar $V = V(r, \lambda, \theta; g_j^i, h_j^i)$, considerando que el gradiente de esta función V está dado por las componentes del vector F obtenido de la observación.

Los coeficientes g_j^i, h_j^i están determinados por las isolíneas y se calculan siguiendo un método similar al de Fourier.

Para obtener este potencial V que satisfaga la igualdad $\bar{F} = \nabla V$, tradicionalmente se usa el método de resolver la ecuación diferencial de Laplace $\nabla^2 V = 0$, suponiendo que V es continua e integrable en casi toda la superficie terrestre. También se puede obtener V , como se verá en el capítulo I, mediante desarrollos similares al de Taylor, considerando que para $r = \text{cte.}$ las coordenadas $\{\lambda_i, \theta_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ son conjuntos ortogonales.

En la tercera parte, una vez obtenida la ecuación de Gauss del potencial:

$$(1) \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} [a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \operatorname{sen} m\lambda] P_n^m,$$

por cualquiera de los métodos mencionados, queda por investigar que objetos o fenómenos físicos pudieran existir en el planeta de tal forma que su comportamiento describa lo observado a través de la ecuación (1).

El interés en el presente trabajo está en esta tercera parte del estudio del campo geomagnético, por lo que se presentan tres interpretaciones que corresponden a tres modelos diferentes del fenómeno magnético obtenido a través de la ecuación del potencial de Gauss:

- a) En el primer modelo se hace corresponder a cada término de la ecuación (1):

$$V_n = \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} [a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \operatorname{sen} m\lambda] P_n^m$$

un punto singular de orden n residiendo en el origen de referencia (Maxwell, 1885), así resulta V determinada por una colección de estos puntos singulares cuyo potencial produce los datos numéricos dados por las cartas.

- b) Con una aplicación del artificio del Balayage, la ecuación (1) puede escribirse en la forma (Chapman and

Bartels, 1940):

$$(2) \quad V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda] P_n^m$$

donde a es el radio medio terrestre.

La interpretación es que esta expresión corresponde al potencial de una distribución de carga magnética que está repartida en la superficie del planeta, como se verá en el capítulo II.

c) La interpretación que se introduce en el presente trabajo es la siguiente:

Por desarrollos similares al de Taylor se llega a la ecuación:

$$(3) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^k \partial y^j \partial x^i} \{\bar{u}_\ell\}$$

donde $i + j + k = n$, $\bar{u}_\ell = (u_{\ell x}, u_{\ell y}, u_{\ell z})$.

Para $n=1$ se ve con facilidad que la expresión corresponde al potencial de dipolo como se presenta en los tratados de Física, en este trabajo se tomará este potencial más términos de



derivadas de orden superior, que corresponden a potenciales de multipolos que se han definido como "multipolos matemáticos" y que en la ecuación (3) están incluidos en los términos $n = 2, 3, \dots$

Para $n = 2$ en la ecuación (3) se tienen términos de segundas derivadas provenientes de V_1 , potencial del dipolo mencionado anteriormente, además incluido en ese mismo desarrollo de segundas derivadas un potencial V_2 de cuadripolo como se presenta en los tratados de Física en los que sólo se toman términos de segundas derivadas, despreciando, en esos tratados, los términos de derivadas de orden tres en adelante. En este trabajo se tomarán para el potencial de V_2 , los términos de segundas derivadas y además derivadas de orden tres en adelante, que en la ecuación (3) están incluidos en los potenciales de octipolo en adelante.

En el análisis que se haga para $n = 3$ en adelante, se procede en forma similar a los casos $n = 1, 2$; con lo que se llega a que la ecuación del potencial no está determinada por una serie como se ha venido usando, en la que se hace corresponder a cada término los modelos de puntos singulares de órdenes uno, dos, tres, etc., sino que está determinada por una suma de series en que cada una de ellas corresponde al potencial del multipolo del orden correspondiente.

La diferencia entre multipolos y puntos singulares es que las distancias entre las cargas de la estructura de mul



tipolo son finitas y como tal se usan, en cambio en el punto singular se considera que estas distancias tienden a cero.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

100 527
SECRET

CAPITULO I

ECUACION DE GAUSS DEL POTENCIAL

En la primera sección de este capítulo se describirá brevemente el método tradicional de resolver la ecuación diferencial de Laplace para obtener la expresión del potencial escalar V , considerando que las componentes del vector \vec{F} obtenido de la observación determinan el gradiente de V . A partir de la sección 1.2 se presenta otro artificio para obtener la expresión del potencial escalar V , que como ya se dijo en la introducción, es por medio de desarrollos de Taylor. Y en la sección 1.7, donde se define el centro de una distribución, se discute ampliamente el término V_2 de cuadripolo.

1.1. Solución de la ecuación diferencial de Laplace. Como es costumbre, la Tierra se va a considerar esférica y de radio a , el plano XOY el ecuador geográfico, XOZ el plano que contiene al meridiano de Greenwich y (r, λ, θ) las coordenadas esféricas de un observador colocado sobre la superficie, donde r es la distancia al centro de la Tierra, λ la longitud y θ la colatitud. Se va a suponer también que V es continua e integrable sobre casi toda la superficie terrestre.

Usando coordenadas esféricas y el método de variables separables, la función V puede escribirse:

$$V = R(r) L(\lambda) T(\theta)$$

y como es bien sabido, la ecuación de Laplace toma la forma:

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{T} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + \frac{1}{L} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 L}{d\lambda^2} = 0$$

Ecuación que se resuelve mediante la introducción de los parámetros m y n , que nos pueden llevar a las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{1}{L} \left(\frac{d^2 L}{d\lambda^2} \right) = -m^2$$

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{n(n+1)}{r^2} \quad , \quad y$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) = \frac{m^2 T}{\sin^2 \theta} - n(n+1) T \quad ;$$

esta última es la conocida ecuación de Legendre cuyas soluciones son los polinomios asociados de Legendre:

$$P_{n,m} = P_{n,m}(\cos \theta) \quad ,$$

en este trabajo se usará la notación $P_{n,m}$.

En esta forma la solución general de la ecuación de Laplace en este sistema de coordenadas y con las consideraciones anteriores, puede escribirse:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) (a_m \cos m\lambda + b_m \sin m\lambda) P_{n,m}$$

Ya que en el fenómeno gravimétrico o en el magnético de origen interno el observador $P(r, \lambda, \theta)$ está sobre la superficie terrestre $r \gg a$ y la expresión anterior converge para los términos $\frac{B_n}{r^{n+1}}$, por lo que en este trabajo se usará la expresión:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{B_n}{r^{n+1}} (a_m \cos m\lambda + b_m \sin m\lambda) P_{n,m}$$

y si se asocian los coeficientes B_n con a_m y b_m se va a poder escribir:

$$(1.1) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) P_{n,m}$$

A continuación se da una tabla de los polinomios asociados de Legendre hasta de orden tres:



$$P_{0,0} = 1$$

$$P_{1,0} = \cos \theta$$

$$P_{1,1} = \sin \theta$$

$$P_{2,0} = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_{2,1} = 3 \sin \theta \cos \theta$$

$$P_{2,2} = 3 \sin^2 \theta$$

$$P_{3,0} = \frac{1}{2} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3)$$

$$P_{3,1} = \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$$

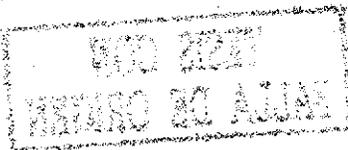
$$P_{3,2} = 15 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$P_{3,3} = 15 \sin^3 \theta$$

Aunque al resolver la ecuación diferencial de Laplace se obtienen estos polinomios $P_{n,m}$, aquí se usarán normalizados según Schmidt los cuales están dados por las expresiones:

$$P_n^m = \left[\frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{n,m} \quad \text{si } m > 0$$

$$\text{y } P_n^m = P_{m,n} \quad \text{si } m=0$$



En adelante la ecuación (1.1) se usará con estos polinomios normalizados P_n^m .

Como se ve, los coeficientes a_n^m y b_n^m son constantes que resultan al resolver la ecuación diferencial de Laplace, y no nos dan información acerca de la estructura que está produciendo el fenómeno físico cuyo potencial satisface la ecuación de Laplace. Así, estas constantes dadas en forma abstracta, tomarán valores según sea la naturaleza del fenómeno en que se usa la citada ecuación.

1.2. Desarrollos de Taylor. El artificio que se presenta en este trabajo para obtener la expresión de V , consiste en desarrollos de Taylor de la función $f(\rho) = \frac{1}{\rho}$ que como se verá más adelante, la ventaja de éste con respecto al método de la sección 1.1 es que desde que se calculan los coeficientes podemos obtener la información que nos permita construir una estructura del fenómeno magnético que produce el potencial dado en la ecuación (1.1).

Slater y Frank (1947) señalan la necesidad de encontrar el significado del desarrollo (1.1) y para ello analizan los dos primeros términos, poniendo en claro el significado sólo del primero. En cambio, aprovechando la ventaja del artificio introducido en los desarrollos de Taylor, podemos obtener información respecto al comportamiento del fenómeno en el espacio.

En el artificio se considera lo siguiente, el potencial Newtoniano para una carga gravimétrica m con residencia en un punto Q y medido desde un observador colocado en $P(x, y, z)$, queda definido como $V = \frac{m}{\rho}$ y para una colección de cargas $\{m_i \in Q_i\}$ el potencial es:

$$(a) \quad V_a = \sum_i \frac{m_i}{\rho_i}$$

Si se considera un sistema coordenado y la colección de cargas está situada de tal manera que para cualquier carga m_i se verifica que $\overline{OQ_i} < \overline{OP}$, entonces mediante un desarrollo de Taylor puede obtenerse:

$$(b) \quad S:V_b = (\sum m_i) f(x) - \frac{1}{1!} (\sum m_i x_i f_x + \sum m_i y_i f_y + \sum m_i z_i f_z) \\ + \frac{1}{2!} (\sum m_i x_i^2 f_{xx} + 2 \sum m_i x_i y_i f_{xy} + \dots) - \dots$$

La operación S puede definirse como una sustitución, de tal manera que el potencial V_b medido a través de (b) se va a aproximar en alguna forma a la V_a dada en la ecuación (a) es decir $V_b \rightarrow V_a$ en casi toda la superficie y así va a manejarse la ecuación (b) en lugar de (a) como una sustitución. Esta sustitución tiene propiedades algebraicas y geométricas que facili-

tan el conocimiento del potencial V dado en (1.1).

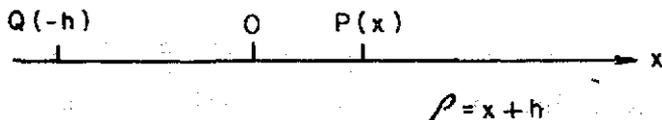
En la ecuación (b), f_x, f_y, \dots expresan derivación con respecto a las variables x, y, z y la función $f(r)$ es $\frac{1}{r}$.

Obviamente que el potencial de Coulomb es una generalización del Newtoniano al considerar que algunas cargas admitan signo positivo o negativo.

Para facilitar el estudio se empieza el análisis en una dimensión y al pasar al caso de tres dimensiones, fácilmente se ve que se heredan las definiciones y propiedades que se dan para una dimensión.

Definición 1.- Un punto singular Q de orden cero y coordenada $(-h)$ con $h > 0$, es un punto al cual se asigna un número real m .

Definición 2.- La medida de la propiedad V que da al espacio la presencia de m en Q es $V(m) = mf(\rho)$, esta medida se toma en el punto $P(x)$, f es una función real que tiene todas sus derivadas, $\overline{PQ} = \rho$



Por comodidad Q se tomó a la izquierda de 0 , pero se puede considerar a la derecha.

Definición 3.- Distribución S_0 es una colección de puntos singulares $\{Q_i(-h_i)\}$.

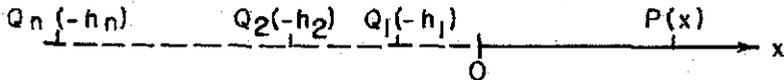


Fig. 2

Axioma.- V es una función lineal, en el sentido de que se verifican:

$$i) \quad V(S_0) = \left(\sum_i m_i \quad f(\rho_i) \right) \quad \text{con } \rho_i = x + h_i$$

ii) Si $S_0 = \{m_i\}$ reside en Q entonces:

$$V(S_0) = \left(\sum_i m_i \right) f(\rho).$$

$$iii) \quad V(cm) = c V(m).$$

Teorema Fundamental.- Sea la distribución $S_0 = \{m_i\}$ que proporciona al espacio la propiedad $V(S_0) = \sum_i [m_i f(\rho_i)]$. Un desarrollo de Taylor de $V(S_0)$ es una medida V de una distribución S que sustituye a la distribución dada S_0 . Es decir si

S es un desarrollo de Taylor de $V(S_0)$ se tiene:

$$S:V(S_0) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{\ell=0}^p \frac{m_i h_i^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x) \right] + \left[\sum_{i=1}^n R_{i1} \right]$$

donde el primer paréntesis del segundo miembro está midiendo una distribución que reside en una vecindad δ del origen, con $\delta \rightarrow 0$. El segundo paréntesis mide una distribución extendida sobre $\overline{00}_n$ ver figura 2.

Este trabajo se refiere al caso en el que $R_{i1} \rightarrow 0$ para toda i si $p \rightarrow \infty$, por lo que se tiene:

$$(1.2) \quad S:V(S_0) = \lim_{i=1}^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{m_i h_i^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x)$$

Así, la distribución S_0 se ha sustituido por una S residiendo en una vecindad δ del origen, S se llama sustitución.

Demostración: Sea la distribución que consta de un sólo punto Q ($-h$) en el que se localiza m , entonces (1.2) se puede escribir:

$$(1.3) \quad S:V(S_0) = \lim_{\ell=0}^p \sum \frac{m h^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x)$$

donde p crece indefinidamente, en adelante se omitirá la nota

ción lim.

Al analizar cada término $V_\ell = \frac{m h^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x)$ se encuentra que:

Para $\ell = 0$, $V_0 = m f(x)$, es decir desde $P(x)$ se está midiendo m con residencia en el origen.

Para $\ell = 1$, $V_1 = mh f'(x)$ que no necesariamente tiene la forma de la definición 2, pero si se recurre a la definición de derivada se tiene que:

$$(1.4) \quad V_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} mh \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

es obvio que en $\frac{mh}{\Delta x} f(x + \Delta x)$ se está midiendo una m multiplicada por un número $c = \frac{h}{\Delta x}$, es decir se está midiendo (+ cm) residiendo en el punto A ($-\Delta x$), y en el término $-\frac{mh}{\Delta x} f(x)$ se está midiendo (- cm) residiendo en el origen 0, por lo tanto en (1.4) se está midiendo el sistema de puntos (+ cm) y (- cm) localizados en A y 0, esta estructura se denominará dipolo.



Fig. 3

Si $\Delta x \rightarrow 0$ entonces $A \rightarrow 0$ y la estructura se denominará, siguiendo la nomenclatura de Maxwell, punto singular de orden uno con residencia en 0.

Por lo tanto, V está dentro de las definiciones 1 a 3 aunque la expresión $f(x)$ no aparezca en V_1 , por ejemplo si $f(x) = \ln x$, $V_1 = m h f'(x) = m h \left(\frac{1}{x}\right)$, de manera que en esta última expresión no figura $f(x)$.

Para $\ell = 2$, $V_2 = m \frac{h^2}{2!} f''(x)$, siguiendo los mismos pasos que en V_1 se puede escribir:

$$V_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m h^2}{2!} \left[\frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} \right]$$

teniendo así un sistema de cuatro puntos singulares, residiendo uno de ellos en $-2\Delta x$, dos en $-\Delta x$ y el último en el origen 0. (Véase definición 1).

Es obvio que para $V_n = m \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$ se tendrá una estructura de 2^n puntos singulares residiendo como en el caso anterior en el intervalo $[-n\Delta x, 0]$ como fácilmente se puede comprobar. Es decir en (1.3) en lugar de medir la propiedad $V(m)$ dada por m , se está midiendo una sustitución S que reside en una vecindad δ del origen, $\delta \rightarrow 0$.

Se recuerda que por comodidad se tomaron los puntos Q_1, Q_2, \dots a la izquierda de P , porque en este caso $f(p) = f(x + \Delta x)$, se ve

que para puntos colocados a la derecha se tendría $f(p) = f(x - \Delta x)$ y se aplicaría todo lo visto para el caso anterior.

Si se pasa ahora al caso de una distribución $S_0 = \{m_i\}$ se tendrá:

$$S:V(S_0) = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) f(x) + \left(\sum_{i=1}^n m_i h_i \right) f'(x) + \dots \\ + \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i h_i^p}{p!} \right) f^{(p)}(x) + \dots$$

Se ve que en el primer término V_0 , se está midiendo $m = \sum_{i=1}^n m_i$ localizada en el origen; en el término V_1 se está midiendo un sistema de puntos singulares localizados en $-\Delta x$ y en 0 ; y así hasta llegar al término $V_p = \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i h_i^p}{p!} \right) f^{(p)}(x)$ donde se mide un sistema de puntos singulares localizados en el intervalo $[-p\Delta x, 0]$ con la condición $\Delta x \rightarrow 0$, es decir se mide un sistema residiendo en una vecindad δ del origen con $\delta \rightarrow 0$.

Se tiene entonces que la sustitución S de S_0 va a residir en una vecindad del origen y el teorema queda demostrado.

En adelante cuando se hable de vecindad δ del origen se entenderá que $\delta \rightarrow 0$. Y si $Q(m, \Delta x)$ es un punto singular tal que toda vecindad δ de 0 siempre contiene a Q , entonces se dirá que Q está adherido a 0 .

1.3. Propiedades algebraicas de las sustituciones. Sean S_0 la distribución que consta de un sólo punto singular m residuando en $Q(-h)$ y S_1 la sustitución que expresa a $V = mf(\rho)$ como:

$$V = mf(x) + mh f'(x) + \frac{m}{2!} h^2 f''(x) + \dots$$

Si se aplica una nueva sustitución S_2 en esta última ecuación, considerando a $Q_2(k)$ como nuevo origen de coordenadas, figura 4, se ve que:

$$V = mf(x') + m(k+h) f'(x') + \frac{m}{2!} (k+h)^2 f''(x') + \dots$$

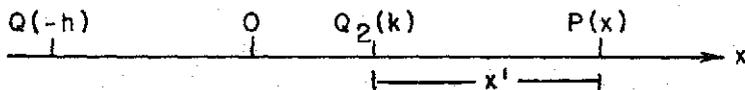


Fig. 4

$$k = \overline{OQ_2}$$

$$x = x' + k$$

Es decir, en lugar de haber aplicado dos sustituciones sucesivas S_1 y S_2 a la distribución S_0 , se pudo haber aplica

do una sola S que llevara a m a la vecindad δ del origen O_2 , se ve entonces que las sustituciones tienen la siguiente propiedad:

$$i) \quad S_2 S_1 S_0 = S S_0$$

En el caso de una sola carga m que se está tratando, se prueba fácilmente que existe la sustitución S_1^{-1} tal que:

$$ii) \quad S_1^{-1} S_1 S_0 = S_0$$

es decir, la sustitución S_1 tiene su inversa S_1^{-1} tal que:

$$iii) \quad S_1^{-1} S_1 S = S$$

Se comprueba también que las sustituciones cumplen la ley asociativa, es decir:

$$iv) \quad (S_3 S_2) S_1 = S_3 (S_2 S_1)$$

Con todas estas propiedades, se dice que el conjunto

S_0, S_1, S_2, \dots forma grupo.

Si en lugar de una sola carga m se considera la colección $\{m_i\}$ extendida en un segmento $\overline{Q_1 Q_n}$, donde Q_1 contiene a m_1, \dots, Q_n contiene a m_n , se ve que sólo se verifican las propiedades (i) y (iv) por lo tanto, en este caso el conjunto S_0, S_1, \dots, S_n sólo forma semigrupo, ya que para S_1 no existe S_1^{-1} tal que $S_1 S_1^{-1} S = S$, pues para cualquier i , S_i lleva la sustitución $S_{i-1} S_{i-2} \dots S_0$ a una vecindad δ de un origen O_i . En cambio, si se considera al conjunto S_1, S_2, \dots, S_n si cumple todas las propiedades anteriores, es decir forma grupo.

Definición 4.- Se llama sustitución propia a una S tal que lleva a la distribución S_0 a una vecindad δ de un punto del intervalo $[Q_1, Q_n]$.

Definición 5.- Centro de una distribución $S_0 = \{m_i\}$ con $m_i > 0$ para toda i , como se encuentra en el caso gravimétrico, es un punto C tomado como origen en el cual la sustitución S_C es propia y en el desarrollo de:

$$V(S_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{m_i h_i^{\ell}}{\ell!} f^{(\ell)}(x)$$

se verifica que el segundo término del segundo miembro tiene un valor absoluto mínimo, es decir: $\left(\sum_{i=1}^n m_i h_i \right) f'(x) = 0$

lo que implica que: $\sum_{i=1}^n m_i h_i = 0$ cuando se tiene la sustitución S_c .

Sea S_1 una sustitución cualquiera de S_0 , entonces:

$$S:V(S_0) = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) f(x) + \left(\sum_{i=1}^n m_i h_i \right) f'(x) + \dots$$

Sea ahora una sustitución S_2 de S_1 que verifique

$S_2 S_1 S_0 = S_c S_0$, entonces:

$$S_2:V(S_1) = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) f(x') + \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) k f'(x') + \left(\sum_{i=1}^n m_i h_i \right) f'(x') + \dots,$$

se usa la notación x' referida a 0_2 para diferenciarla de x que está referida a 0_1 .

La condición $S_2 S_1 = S_c$ conduce a que $\left(\sum_{i=1}^n m_i \right) k + \sum_{i=1}^n m_i h_i = 0$ o bien:

$$(1.5) \quad k = - \frac{\sum_{i=1}^n m_i h_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

k es la coordenada de O_2 con respecto al origen considerado en la sustitución S_1 . Así se ve que O_2 es el centro de masa como se define en Física, el signo negativo resulta de suponer a O_2 residiendo a la derecha de O_1 .

La ecuación (1.5) nos indica que el centro C de una sustitución es independiente de lo que de ella se está midiendo.

1.4. Multipolos y puntos singulares. Para definir un multipolo de orden n se hablará de paralelepípedo de dimensión n , por lo cual es conveniente dar las siguientes:

Definiciones.- Paralelepípedo de dimensión cero es un punto A ; paralelepípedo de dimensión uno es un segmento de recta \overline{AB} , con arista \overline{AB} y vértices A y B ; un paralelepípedo de dimensión dos (paralelogramo) se construye con un paralelepípedo \overline{AB} de dimensión uno y otro $\overline{A'B'}$ de la misma dimensión desplazado paralelamente al anterior y uniendo A con A' y B con B' , de manera que en este caso se tienen cuatro vértices y cuatro aristas. Paralelepípedo de dimensión tres es un paralelepípedo $A B C D$ de dimensión dos como el anterior y otro $A'B'C'D'$ desplazado paralelamente al $A B C D$ y uniendo los vértices A con A' , ..., D con D' . Se pueden seguir construyendo paralelepípedos de dimensión cuatro, cinco, seis, etc.

Se ve claro que un paralelepípedo de dimensión n tiene 2^n vértices y de cada uno de ellos salen n aristas. Todos estos paralelepípedos están sumergidos en el espacio tridimensional.

Si \overline{AB} es una arista se dirá que los vértices A y B son contiguos.

Sean $P(x)$ y $Q(x + \Delta x)$ dos puntos sobre el eje OX , con $\Delta x > 0$; en el límite, se dice que Q es un punto adherido a P , si cualquier vecindad $U(P)$ es también vecindad de Q , es decir si $Q \in U(P)$ para cualquier $U(p)$ se dice que Q está adherido a P o que P es adherente al punto Q .

Si en uno de los vértices A de un paralelepípedo de dimensión n se supone que reside un número real $(+m)$, y en los vértices contiguos los elementos $(-m)$ de tal forma que todos los vértices del paralelepípedo se cubren con los elementos $(+m)$ ó $(-m)$, se dice que se tiene un multipolo de orden n .

Al multipolo así definido se le hace corresponder un momento M_n que se define:

$$M_n = c_n m l_1 l_2 \dots l_n$$

donde l_1, \dots, l_n son las longitudes de las aristas que nacen

en el vértice A, y c_n es un número constante escogido por algún criterio vg. $c_n = n!$ (Stratton, 1941).

Si se consideran las direcciones de las aristas que nacen en A (\overline{AB} , \overline{AC} , ...) se dice que el 2^n polo tiene n ejes.

Supóngase que en el 2^n polo se tiene que $\lambda_1 \rightarrow 0$, $\lambda_2 \rightarrow 0$, ..., $\lambda_n \rightarrow 0$ y $m \rightarrow \infty$ de tal manera que su producto sea un número finito, entonces al punto A se le llama punto singular de orden n (Maxwell, 1885). En este caso en el paralelepípedo de dimensión n, los $2^n - 1$ vértices diferentes de A son adheridos a A. En esta forma un punto singular de orden n tiene n ejes. Es frecuente que se diga multipolo en lugar de punto singular.

1.5. Generalización de las sustituciones. Cuando se pasa al caso de tres dimensiones y se toma un sistema de referencia ortogonal, las definiciones 1 a 3 dadas para el caso de una dimensión se conservan si se hace la siguiente generalización:

Las coordenadas del punto singular Q son (x_0, y_0, z_0) y las del punto P, residencia del observador, son (x, y, z) de manera que en la ecuación:

$$V(m) = m f(\rho),$$

ρ es el número no negativo:

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El axioma dado también en la sección 1.2 se mantiene, por lo cual $V(S_0)$ es función aditiva de conjunto respecto a la distribución $S_0 = \{m_i\}$ y es función de punto respecto a $P(x, y, z)$.

La medida $V(S_0)$ puede expresarse por la ecuación:

$$(1.6) \quad V(S_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_i h_i^k}{k!} \frac{\partial^k f(r)}{\partial h_i^k}$$

En efecto, sea S_0 la distribución que consta sólo de un punto Q que contiene a m (ver figura 5) es claro que:

$$V(S_0) = mf(r) + m \frac{h}{1!} \frac{\partial f(r)}{\partial h} + \frac{mh^2}{2!} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial h^2} + \dots$$

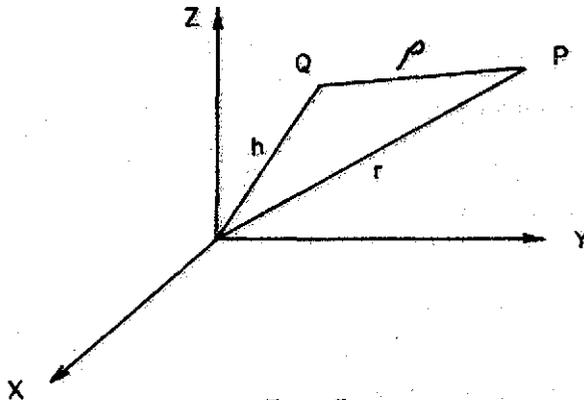


Fig 5

NO SE
 ENERO DE 1954

y para una distribución $S_0 = \{m_i\}$ se tiene:

$$V(S_0) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^t \frac{m_i h_i^k}{k!} \frac{\partial^k f(r)}{\partial h_i^k} + \sum_{i=1}^n R_i ,$$

como se dijo en la sección 1.2, solamente se consideran funciones para las cuales $R_i \rightarrow 0$ para toda i cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema.- En la ecuación (1.6) se está midiendo una distribución S que sustituye a la distribución dada $S_0 = \{m_i\}$.

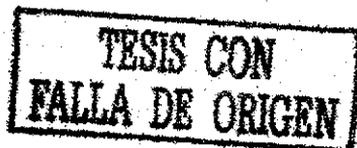
Esta distribución S consiste de una colección de puntos singulares de todos los órdenes, con residencia en el origen O de coordenadas.

Desde un punto de vista geométrico, O es la adherencia de S , toda vecindad $U(O)$ contiene a S .

Demostración: Sea la distribución S_0 que consta de un solo punto m , entonces en:

$$V(S_0) = m f(r) + m \frac{h}{1!} \frac{\partial f(r)}{\partial h} + m \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial h^2} + \dots$$

se está midiendo, como se dijo en la sección 1.2, una colección de puntos singulares de órdenes cero, uno, dos, ..., residiendo en el origen O .



Si se tiene ahora $S_0 = \{m_i\}$, en $V(S_0)$ a través de (1.6) también se está midiendo la colección de puntos singulares de todos los órdenes residiendo en el origen 0:

$$V_0 = \left(\sum_i m_i \right) f(x), \quad V_1 = \sum_i m_i \frac{h_i}{1!} \frac{\partial f(x)}{\partial h_i}, \quad V_2 = \sum_i m_i \frac{h_i^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial h_i^2}, \dots,$$

$$V_n = \sum_i m_i \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial h_i^n}$$

Una colección de puntos singulares de orden n residiendo en 0, se puede reducir a un solo punto singular del mismo orden. En efecto, para $n = 0$ es evidente, para $n = 1$ se tiene:

$$m_j h_j \frac{\partial f}{\partial h_j} = m_j \bar{h}_j \cdot \nabla f$$

$$V_1 = \sum_i m_i \bar{h}_i \cdot \nabla f = \left(\sum_i m_i \bar{h}_i \right) \cdot \nabla f$$

llamando $\sum_i m_i \bar{h}_i = \bar{u}_1$, entonces $V_1 = \bar{u}_1 \cdot \nabla f$ está midiendo un punto singular de orden uno residiendo en 0.

Se puede escribir ∇f como la matriz: $A_1 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$, con lo cual $V_1 = \bar{u}_1 A_1$.

En $V_2 = \sum_i m_i \frac{h_i^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial h_i^2}$ se puede proceder como sigue, usando coordenadas cartesianas:

$$V_2 = \frac{1}{2!} (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}) A_2 \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix}$$

en que $A_2 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$ donde los índices x, y, z indican derivación parcial, como se usa frecuentemente, también se usa $f_{xx} = f_{x^2}$ y las componentes de los vectores:

$\bar{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z})$ y $\bar{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ satisfaciendo las condiciones:

$$u_{2x} v_{2x} = \sum_i m_i x_i^2, \quad u_{2x} v_{2y} + u_{2y} v_{2x} = 2 \left(\sum_i m_i x_i y_i \right)$$

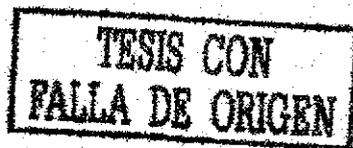
$$u_{2y} v_{2y} = \sum_i m_i y_i^2, \quad u_{2x} v_{2z} + u_{2z} v_{2x} = 2 \left(\sum_i m_i x_i z_i \right)$$

$$u_{2z} v_{2z} = \sum_i m_i z_i^2, \quad u_{2y} v_{2z} + u_{2z} v_{2y} = 2 \left(\sum_i m_i y_i z_i \right)$$

Como se ve, se está midiendo con la matriz A_2 un punto singular de orden dos (cuadripolo) de momento M_2 y con ejes en las direcciones \bar{u}_2, \bar{v}_2 , residiendo en O.

En forma similar para V_3 se tiene:

$$V_3 = \frac{1}{3!} \bar{u}_3 [(A_3 \bar{v}_3) \bar{w}_3]$$



donde A_3 es una matriz de $3 \times 3 \times 3$ es decir, es un bloque de 3 matrices de 3×3 y los elementos de cada una de estas son derivadas parciales terceras de $f(r)$ con respecto a las variables x, y, z . A la derecha de A_3 van \bar{v}_3, \bar{w}_3 que son los vectores transpuestos de (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z}) y (u_{3x}, u_{3y}, u_{3z}) .

En esta forma se tiene que V_3 mide un punto singular de orden tres (octipolo) residiendo en 0, con ejes en las direcciones dadas por $\bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{w}_3$ y de momento M_3 .

La generalización para V_n es obvia. Desde luego, que si la distribución consta de un solo punto, los vectores $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \dots$ tienen la dirección \overline{OQ} que es el caso tratado en la sección 1.2.

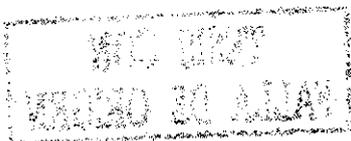
Entonces la ecuación (1.6) puede escribirse como sigue:

$$(1.7) \quad V(S_0) = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

$$= \sum_i m_i f(r) + \frac{1}{1!} \bar{u}_1 A_1 + \frac{1}{2!} \bar{u}_2 A_2 \bar{v}_2 + \frac{1}{3!} \bar{u}_3 A_3 \bar{v}_3 \bar{w}_3 + \dots$$

En estas condiciones el momento M_i de un punto singular de orden i , residiendo en el origen, se define como el producto de los módulos de los vectores laterales; ésto es, para el caso de dipolo, cuadripolo y octipolo los momentos respectivos serán:

$$M_1 = |\bar{u}_1|, \quad M_2 = |\bar{u}_2| |\bar{v}_2|, \quad M_3 = |\bar{u}_3| |\bar{v}_3| |\bar{w}_3|.$$



Con esta definición la ecuación (1.7) queda en la forma:

$$V(S_0) = \sum_i m_i f(x) + \frac{M_1}{1!} \bar{a}_1 A_1 + \frac{M_2}{2!} \bar{a}_2 A_2 \bar{b}'_2 + \frac{M_3}{3!} \bar{a}_3 A_3 \bar{b}'_3 \bar{c}'_3 + \dots$$

donde $\bar{a}_i, \bar{b}'_i, \bar{c}'_i$ son vectores unitarios.

Cuando se generalizan las sustituciones a tres dimensiones se puede comprobar que las propiedades algebraicas de las sustituciones para el caso de una dimensión, vistas en la sección 1.3, se mantienen y las definiciones 4 y 5 dadas también en esta sección quedan en la siguiente forma:

Definición 4.- Una sustitución S se llama propia, si lleva a la distribución S_0 a una vecindad de un punto del mínimo convexo que contenga a S_0 .

Definición 5.- Centro C de la distribución $S_0 = \{m_i\}$, es un punto que tomado como origen para la distribución S_C , ésta es propia y en el desarrollo de:

$$S_C: V(S_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{m_i h_i^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell f}{\partial h_i^\ell}$$

el término $\sum_i \frac{m_i h_i}{\ell!} \frac{\partial f}{\partial h_i}$ tiene un valor absoluto mínimo.

En el caso gravimétrico, en el que las distribuciones $\{m_i\}$ de puntos singulares de orden cero tiene el mismo signo para toda i , este segundo término del desarrollo es cero, en efecto:

Sea S_1 una sustitución cualquiera de S_0 :

$$S_1:V(S_0) = \left(\sum_i m_i\right) f(r) + \frac{\sum_i m_i h_i}{1!} \frac{\partial f}{\partial h_i} + \dots,$$

si S_2 es una sustitución tal que $S_2 S_1 = S_C$ entonces:

$$S_C:V(S_0) = \left(\sum_i m_i\right) f(r) + \frac{\sum_i m_i h_i}{1!} \frac{\partial f}{\partial h_i} + \frac{\left(\sum_i m_i\right) h}{1!} \frac{\partial f}{\partial h} + \dots$$

De la condición $S_2 S_1 = S_C$ se tiene que:

$$\left(\sum_i m_i \bar{h}_i\right) \cdot \nabla f + \left(\sum_i m_i\right) \bar{h} \cdot \nabla f = 0$$

donde $\bar{h} = \overline{O_1 O_2}$ y sus componentes:

$$h_x = -\frac{\sum_i m_i h_{ix}}{\sum m_i}, \quad h_y = -\frac{\sum_i m_i h_{iy}}{\sum m_i}, \quad h_z = -\frac{\sum_i m_i h_{iz}}{\sum m_i}$$

son las conocidas fórmulas del centro de gravedad de un cuerpo. Este centro es para cualquier f con que se mida la distribución, se puede decir que f sólo sirvió de vehículo para las sustituciones que llevan a S_C ; el signo negativo, como se dijo en la sección 1.3, proviene del sistema de referencia tomado.

Entonces la ecuación (1.7) se puede escribir:

$$(1.8) \quad S_C:V(S_O) = \sum_i m_i f(r_i) + \frac{1}{2!} \bar{u}_2 A_2 \bar{v}_2' + \dots$$

Definición 6.- a) Cuando los vectores \bar{u}_2 y \bar{v}_2 de la ecuación (1.8) formen un ángulo de 0° ó 180° , determinan una dirección, la cual se define como eje principal de la distribución. El plano normal a estos vectores y que pasa por el centro, se define como ecuador o plano principal de la distribución.

b) Cuando los mencionados vectores formen un ángulo diferente de 0° ó 180° , determinan un plano, al que se le llama plano principal o ecuador de la distribución, y a la dirección normal a este plano y que pasa por el centro, se le llama eje principal de la distribución.

Si el ángulo que forman \bar{u}_2 y \bar{v}_2 , en la ecuación (1.8) es 0° ó 180° se puede hacer una rotación tal al sistema de referencia, que el eje CZ, por ejemplo, coincida con el eje principal de la distribución, y se tiene entonces:

$$(1.9) \quad S_k: V(S_0) = \sum_i m_i f(r) + \frac{1}{2!} a_{33}^2 f_{zz} + \dots$$

el eje principal definido por S_0 es el eje CZ.

Si las direcciones de \bar{u}_2 y \bar{v}_2 no coinciden, se puede tomar el plano que contiene a esos vectores como plano coordenado, el XCY por ejemplo, y además que CX sea bisectriz del ángulo que forman, entonces se tiene:

$$(1.10) \quad S_k: V(S_0) = \sum_i m_i f(r) + \frac{1}{2!} (u_{2x}^2 f_{xx} - u_{2y}^2 f_{yy}) + \dots$$

el plano principal será el XCY y el eje principal el CZ.

Como se ve, la distribución S_0 define, independiente de $f(r)$, el centro C y el eje principal o el plano principal.

En las ecuaciones (1.9) y (1.10) se usa el índice k para indicar que la sustitución no sólo es S_C como en la ecuación (1.8), sino que también los ejes de la distribución S_0 se han tomado como ejes de simetría con respecto a los ejes de referencia. Estas ecuaciones se definen como formas canónicas de V. Siguiendo el lenguaje usual en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales parciales, el segundo término de (1.9) y

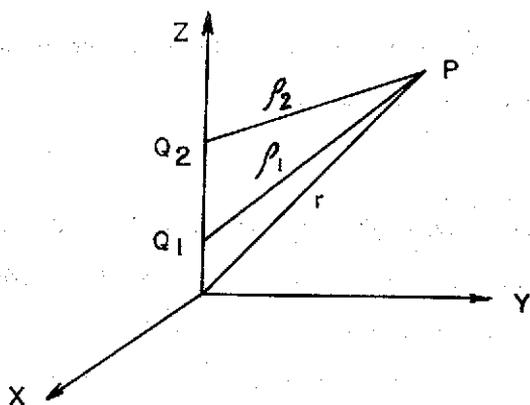
(1.10) son de forma parabólica e hiperbólica respectivamente, referidas a sus propios ejes de simetría.

1.6. Caso Magnético. Hasta aquí sólo se han considerado distribuciones $\{m_i\}$ en las que $m_i > 0$ para toda i , a continuación se verá el caso magnético en el que se tienen cargas tanto positivas como negativas, es decir consideraremos distribuciones $S_0 = \{m_i\}$ con la propiedad $\sum_i m_i = 0$ y $m_i \neq 0$ para toda i .

Considerar una distribución de este tipo es equivalente a considerar una colección de dipolos de momentos $\{M_i\}$.

Consideremos por ejemplo, el dipolo formado por las cargas $-m$ residiendo en $Q_1 (0, 0, z_1)$ y $+m$ residiendo en $Q_2 (0, 0, z_2)$, ver figura 6. La medida de la propiedad V (potencial) que la presencia de esta distribución da al espacio, desde un observador colocado en $P (r, \lambda, \theta)$ ó (x, y, z) , usando desarrollos de Taylor, es:

$$V = -\frac{m(z_2 - z_1)}{1!} f_z + \frac{m(z_2^2 - z_1^2)}{2!} f_{zz} - \frac{m(z_2^3 - z_1^3)}{3!} f_{z^3} + \dots$$



$$r > 2l, \rho_1, \rho_2$$

$$\overline{Q_1 Q_2} = 2l$$

$$- m \in Q_1 (0, 0, z_1)$$

$$+ m \in Q_2 (0, 0, z_2)$$

Fig. 6

En forma similar al caso gravimétrico, se puede definir centro C de una distribución, y se comprueba fácilmente que el centro de esta distribución $\{Q_1, Q_2\}$ es el punto medio del segmento $\overline{Q_1 Q_2}$, por lo que el potencial está dado por la forma canónica:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{m(2l)}{1!} f_z - \frac{m(2l^3)}{3!} f_{z^3} - \frac{m(2l^5)}{5!} f_{z^5} - \dots \\ &= -M_1 \left(f_z + \frac{l^2}{3!} f_{z^3} + \frac{l^4}{5!} f_{z^5} + \dots \right) \end{aligned}$$

Obsérvese que el primer elemento corresponde al potencial de un dipolo físico, como se define usualmente, cuando r se considera muy grande y el término de segundas derivadas se minimizó.

Si las cargas que residen en Q_1 y Q_2 se colocaran menos simétricamente, como por ejemplo en la figura 7, el potencial medido desde un observador colocado en P (x, y, z) debido a la presencia del dipolo $\overline{Q_1Q_2}$ será:

$$V = -m (x_2 f_x + y_2 f_y + z_2 f_z) + \frac{m}{2!} (x_2^2 f_{xx} + 2x_2 y_2 f_{xy} + \dots) + \dots$$

$$= m (x_2, y_2, z_2) \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + m (x_2, y_2, z_2) \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \dots$$

En esta expresión se ve que el primer término se conserva invariante, en efecto se tiene:

$$|\vec{M}_1| = m (2\lambda) = m \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},$$

en cambio los otros términos dependen de las coordenadas de Q_2 .

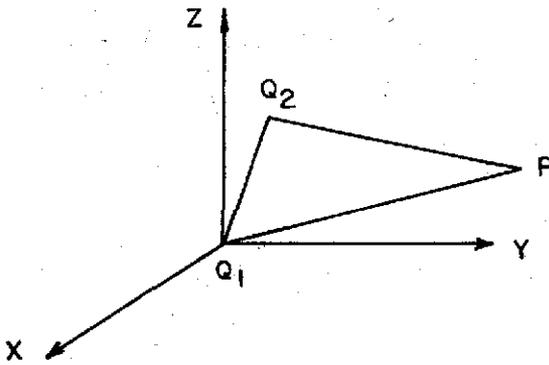


Fig. 7

$$\begin{aligned}
 -m &\in Q_1 (0,0,0) \\
 +m &\in Q_2 (x_2, y_2, z_2)
 \end{aligned}$$

Si se considera un análisis sólo del término de primeras derivadas, como es usual en los tratados de electricidad y magnetismo, se estaría considerando un punto singular de orden uno (primeras derivadas) en lugar de un multipolo, aunque como ya se dijo, en la naturaleza lo que existe es el multipolo.

1.7. Centro C de una distribución $S_0 = \{M_i\}$. Sea ahora la distribución $S_0 = \{M_i\}$, el potencial V debido a S_0 medido desde un observador en P (x,y,z) y considerando sólo primeras derivadas está dado por:

$$V(S_0) = \sum_i M_i \frac{\partial f(r)}{\partial h_i} .$$

Si se aplica una sustitución S_1 a S_0 se tendrá:

$$(1.11) \quad S_1:V(S_0) = \sum_i M_i \frac{\partial f(x)}{\partial h_i} + \frac{1}{1!} \sum_i M_i k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial h_i \partial k} \\ + \frac{1}{2!} \sum_i M_i k^2 \frac{\partial^3 f(x)}{\partial h_i \partial k^2} + \dots$$

aquí se está midiendo un punto singular de orden uno residiendo en 0 y con medida $V_1 = \frac{1}{1!} \sum_i M_i \frac{\partial f}{\partial h_i}$, más un punto singular de orden dos residiendo en 0 con medida $V_2 = \frac{1}{2!} \sum_i M_i k \frac{\partial^2 f}{\partial h_i \partial k}$, etc.

Usando la notación matricial, la ecuación (1.11) se puede escribir:

$$(1.11) \quad S_1:V(S_0) = \frac{1}{1!} \bar{u}_1 A_1 + \frac{1}{2!} \bar{u}_2 A_2 \bar{v}_2 + \frac{1}{3!} \bar{u}_3 A_3 \bar{v}_3 \bar{w}_3 + \dots$$

Se observa que V_1, V_2, V_3, \dots en las rotaciones permanecen invariantes en el sentido de que los vectores laterales $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \dots$ cambian sus componentes pero sus módulos, es decir sus momentos, permanecen constantes y las matrices A_i formalmente no cambian.

De acuerdo con la definición de centro de una distribución (definición 5) el segundo término del desarrollo (1.11) se debe hacer mínimo.

En efecto, con una rotación conveniente en el sistema de referencia en que \bar{u}_1 coincida con el eje OZ, la ecuación (1.11) toma la forma:

$$(1.12) \quad S : V(S_0) = a_3 \frac{\partial f}{\partial z} + a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2a_{13} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ + a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2a_{23} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \dots$$

donde $a_3, a_{11}, a_{12}, \dots$ son funciones de M_1 y de sus coordenadas (x_1, y_1, z_1) .

Con el objeto de que los términos f_{xx} y f_{yy} tengan coeficientes iguales se introduce el parámetro $c^2 = \frac{a_{11}^2 + a_{22}^2}{2}$ y aprovechando la propiedad $\nabla^2 f = 0$ se tiene:

$$S_1: V = a_3 f_z + \frac{1}{2} (a_{11}^2 - a_{22}^2) (f_{xx} - f_{yy}) + a_{12}^2 f_{xy} \\ + a_{13}^2 f_{xz} + a_{23}^2 f_{yz} + (a_{33}^2 - c^2) f_{zz} + \dots$$

Si a esta última expresión se le aplica una sustitución S_2 (traslación) que la lleve hasta el origen C (x', y', z') y los ejes del nuevo sistema sean paralelos a OX, OY, OZ, el término $a_3 f_z$ generará los términos: $a_3 x'_O f_{xz} + a_3 y'_O f_{yz} + a_3 z'_O f_{zz} + \dots$, entonces tomando valores convenientes para x', y', z' el poten

cial queda reducido a:

$$(1.13) S_2 S_1 : V = a_3 f_z + \frac{1}{2!} (a_{11}^2 - a_{22}^2) (f_{xx} - f_{yy}) + a_{12}^2 f_{xy} + \dots$$

en esta expresión los ejes del punto singular (cuadripolo), cuyo potencial está dado por V_2 , son ortogonales entre sí y ortogonales al eje CZ (eje del dipolo). De esta forma, queda definido el eje principal CZ y el plano principal que contiene a los ejes del cuadripolo (ver figura 8).

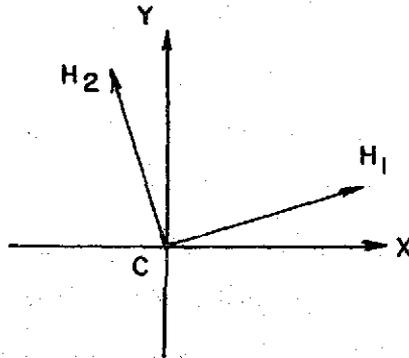


Fig. 8

Como lo establece la definición 5, el punto C es el centro de la distribución $\{M_1\}$ ya que en esta forma el término V_2 se ha minimizado, como se verá más ampliamente cuando se vea el valor medio cuadrático de V definido sobre la superfi-

cie de la esfera que contenga a la distribución.

La definición que se da aquí de centro de la distribución, está de acuerdo con el punto de vista de Thompson (Bartels, 1936) puesto que la ecuación (1.13) es la que él sugiere cuando define centro magnético terrestre.

Aprovechando que las rotaciones no alteran a V , en la ecuación (1.13) se puede aplicar una rotación en el plano XCY, tal que el eje \overline{CH}_1 coincida con el eje CX (ver figura 8) con ésta, el potencial V queda expresado en la forma:

$$(1.14) \quad V = a_3 f_z + k (f_{xx} - f_{yy}) + \dots,$$

donde el término correspondiente a V_2 es una expresión diferencial hiperbólica y equilátera.

De esta forma la ecuación del potencial V queda referida al sistema de ejes propios, es decir los ejes de referencia quedan determinados por la propia distribución.

Como se ve, para pasar de la ecuación (1.11) a la (1.14) se está haciendo uso de artificios similares a los empleados en la geometría analítica, cuando la expresión cuadrática:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = K$$

se lleva a la forma:

$$A'x^2 - B'y^2 = C'z$$

por el isomorfismo que existe en las operaciones de rotaciones y traslaciones.

Schmidt definió el centro geomagnético C, como el origen común del sistema de coordenadas en el cual el valor medio cuadrático del término V_2 es mínimo.

El valor medio cuadrático del potencial V sobre una esfera que contenga a la distribución $S_0 = \{M_1\}$ es:

$$\bar{V}^2 = \frac{1}{A} \int_A V^2 dA$$

donde el elemento de área es $dA = a^2 \sin\theta d\theta d\lambda$.

Para el caso terrestre, suponiendo que la superficie es esférica y de radio $a=1$, se tiene:

$$\bar{V}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) P_n^m \right]^2 \sin\theta d\theta d\lambda$$

Debido a la ortogonalidad de los polinomios de Legendre normalizados por Schmidt y a que el conjunto $\{\cos m\lambda, \sin m\lambda\}$ con $m = 0, 1, 2, \dots$ es ortogonal en el intervalo $0, 2\pi$ se tiene:

$$\bar{V}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)r^{2n+2}} \left[\sum_{m=0}^n (a_n^m)^2 + \sum_{m=0}^n (b_n^m)^2 \right].$$

Para $n = 2$ el valor medio cuadrático es:

$$\bar{V}_2^2 = \frac{1}{5r^6} [(a_2^0)^2 + (a_2^1)^2 + (b_2^1)^2 + (a_2^2)^2 + (b_2^2)^2]$$

se ve entonces, que este valor se ha hecho mínimo cuando se tiene la ecuación (1.13) puesto que \bar{V}_2^2 se reduce a: $\frac{1}{5r^6} [(a_2^2)^2 + (b_2^2)^2]$. Por lo tanto, en S_2S_1 el punto C es el centro de la distribución $S_0 = \{M_1\}$, definición que coincide con la sugerida por Thompson.

Siguiendo el criterio de Schmidt para determinar el punto C, si se parte directamente de la ecuación (1.1) referida al sistema geográfico y se aplica la sustitución S_2S_1 que lleve a la distribución hacia un sistema de referencia con origen en $O'(x', y', z')$ y conservando los ejes del nuevo sistema paralelo a los geográficos se tendrá:

$$S_2S_1: V = V_1 + (\Delta V_1 + V_2) + \dots$$

donde:

$$\Delta V_1 = - \left[\alpha_2^0 P_2^0 + (\alpha_2^1 \cos \lambda + \beta_2^1 \operatorname{sen} \lambda) P_2^1 + (\alpha_2^2 \cos 2\lambda + \beta_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2 \right] + \dots$$

de manera que:

$$\Delta V_1 + V_2 = (\alpha_2^0 - \alpha_2^0) P_2^0 + \left[(\alpha_2^1 - \alpha_2^1) \cos \lambda + (\beta_2^1 - \beta_2^1) \operatorname{sen} \lambda \right] P_2^1 + \left[(\alpha_2^2 - \alpha_2^2) \cos 2\lambda + (\beta_2^2 - \beta_2^2) \operatorname{sen} 2\lambda \right] P_2^2$$

Si ahora se quiere minimizar la medida de este punto singular de orden dos, se puede usar el criterio ya mencionado de minimizar el valor medio cuadrático de $\Delta V_1 + V_2$, con lo que se llega a las conocidas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_2^0 &= 2a_1^0 z' - a_1^1 x' - b_1^1 y' \\ \alpha_2^1 &= (a_1^1 z' + a_1^0 x') \sqrt{3} \\ (1.15) \quad \beta_2^1 &= (b_1^1 z' + a_1^0 y') \sqrt{3} \\ \alpha_2^2 &= (a_1^1 x' - b_1^1 y') \sqrt{3} \\ \beta_2^2 &= (b_1^1 x' + a_1^1 y') \sqrt{3} \end{aligned}$$

donde x' , y' , z' están dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned}
 x' &= a (L_1 - a_1^1 E) / 3 M_1^2 \\
 (1.16) \quad y' &= a (L_2 - b_1^1 E) / 3 M_1^2 \\
 z' &= a (L_0 - a_1^0 E) / 3 M_1^2
 \end{aligned}$$

siendo a el radio de la Tierra, M_1 el momento de dipolo y:

$$\begin{aligned}
 L_0 &= 2a_1^0 a_2^0 + (a_1^1 a_2^1 + b_1^1 b_2^1) \sqrt{3} \\
 L_1 &= -a_1^1 a_2^0 + (a_1^0 a_2^1 + a_1^1 a_2^2 + b_1^1 b_2^2) \sqrt{3} \\
 L_2 &= -b_1^1 a_2^0 + (a_1^0 b_2^1 - b_1^1 a_2^2 + a_1^1 b_2^2) \sqrt{3} \\
 E &= (L_0 a_1^0 + L_1 a_1^1 + L_2 b_1^1) / 4 M_1^2
 \end{aligned}$$

Dados los coeficientes a_1^0 , b_1^1 de la ecuación (1.1) se puede comprobar fácilmente que la dirección del dipolo y su momento M_1 están dados por:

$$\cos \theta_0 = \frac{a_1^0}{M_1}, \quad \tan \lambda_0 = \frac{b_1^1}{a_1^1}$$

(1.17)

$$M_1 = \sqrt{(a_1^0)^2 + (a_1^1)^2 + (b_1^1)^2}$$

También se puede comprobar que para el cuadripolo, su momento reducido M_2 y los cosenos directores de sus ejes \overline{OH}_1 y \overline{OH}_2 están dados por:

$$\frac{M_2}{2} (2z_1z_2 - x_1x_2 - y_1y_2) = a_2^0$$

$$M_2 (x_1z_2 + x_2z_1) = \frac{2a_2^1}{\sqrt{3}}$$

$$M_2 (y_1z_2 + y_2z_1) = \frac{2b_2^1}{\sqrt{3}}$$

(1.18).

$$M_2 (x_1x_2 - y_1y_2) = \frac{2a_2^2}{\sqrt{3}}$$

$$M_2 (x_1y_2 + x_2y_1) = \frac{2b_2^2}{\sqrt{3}}$$

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1, \quad i = 1, 2$$

donde: $\overline{OH}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overline{OH}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Obsérvese que cuando el potencial V está referido al sistema con origen en C y ejes paralelos a OX, OY, OZ (ecuación (1.13)) se tiene:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\frac{M_2}{2} (x_1 x_2 + y_1 y_2) = 0$$

$$M_2 (x_1 x_2 - y_1 y_2) = \frac{2a_2^2}{\sqrt{3}}$$

$$M_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) = \frac{2b_2^2}{\sqrt{3}}$$

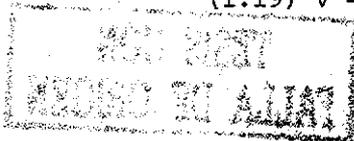
Se comprueba también que la definición de centro C de una distribución $\{m_i\}$ con $m_i > 0$ para toda i, dada en la sección 1.5, queda incluida en la definición dada por Schmidt, es decir, se verifica que el valor medio cuadrático de V_1 es mínimo.

En lo que sigue se usará indistintamente la ecuación de Gauss dada en (1.1) usando los polinomios P_n^m normalizados por Schmidt:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \left[a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda \right] P_n^m$$

o bajo la forma:

$$(1.19) \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n f}{\partial z^k \partial y^j \partial x^i} ; a_n^m, b_n^m \right\}$$



donde $i + j + k = n$, $f = \frac{1}{r}$; $a_n^m, b_n^m (\{m_i, x_i, y_i, z_i\})$

Y también se usarán los sistemas de referencia geográfico, como se explicó en la sección 1.1 o el sistema de ejes propios antes mencionado.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

100 WEST
PROVED BY ALL

CAPITULO II

DOS INTERPRETACIONES DE LA ECUACION DE GAUSS

Obtenida la ecuación de Gauss del potencial en el capítulo anterior se procederá, como se dijo en la introducción, a determinar un mejor modelo físico estático que se ajuste a describir los fenómenos observados sobre la superficie del planeta, para lo cual en este capítulo se analizan dos interpretaciones de la mencionada ecuación, dadas por Maxwell la primera y por Chapman y Bartels la segunda, en el siguiente capítulo se introduce una interpretación diferente. En la sección 2.3 se analizan ventajas que se obtienen cuando se introduce el sistema de referencia con centro en C, que no han sido tratadas en detalle por otros autores.

2.1 Primera Interpretación. La primera interpretación que se presenta parece ser la más sencilla, ésta establece por separado estructuras correspondientes a cada índice n en la ecuación (1.1).

Es usual en los tratados de física, que el potencial V_1 (obtenido de la ecuación (1.1) tomando $n=1$) se defina como el potencial producido por una estructura dipolar formada por dos masas, $+m$ y $-m$ separadas una distancia λ y colocadas por ejemplo, $-m$ en $O(0,0,0)$ origen del sistema de referen-

cia y + m en Q (x_0, y_0, z_0), por lo que se tiene:

$$v_1 = \frac{m \ell \cos \phi}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left[a_1^0 P_1^0 + (a_1^1 \cos \theta + b_1^1 \sin \theta) P_1^1 \right]$$

donde el ángulo ϕ está formado por la dirección \overline{OQ} y el radio vector \overline{OP} del observador (ver figura 9).

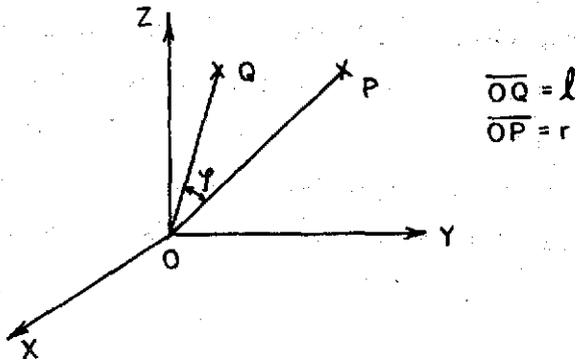
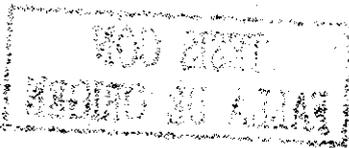


Fig. 9

El momento de dipolo M_1 se define:

$$M_1 = m\ell = \sqrt{(a_1^0)^2 + (a_1^1)^2 + (b_1^1)^2}$$

y considerando a este momento como vector, sus componentes sobre los ejes x, y, z son a_1^1 , b_1^1 y a_1^0 respectivamente.



Cuando del potencial V (ecuación 1.1) se toma sólo el término V_1 se está haciendo la siguiente consideración: el observador está colocado en un punto $P(x, y, z)$ a una distancia r del origen de referencia tal que $r \gg \lambda$. Esta condición se cumple en cualquiera de los siguientes casos:

- a) Si λ distancia entre las masas es finita, la distancia r crece indefinidamente.
- b) Si r radio vector del observador, permanece finito ($r=a$) la longitud λ se hace muy pequeña.

Si el observador está sobre la superficie terrestre o muy próximo a ella, como ocurre en nuestro caso, la consideración (b) es la que se cumple.

Con esta condición la estructura multipolar lo lleva a uno a la definición dada por Maxwell, de punto singular de orden uno con residencia en el origen O de referencia, de tal forma que una vecindad δ del origen siempre contiene a la estructura dipolar.

En forma similar, para los siguientes términos V_2, V_3, \dots se van a tener estructuras multipolares que llevan a la definición de puntos singulares de órdenes dos, tres, etc. residiendo en O .

Por lo tanto considerando que $V = \sum_n V_n$, si se toma una vecindad δ del origen se tiene una colección de puntos singulares de todos los órdenes contenida en esta vecindad, es decir, en este primer modelo para el fenómeno magnético, V resulta de

terminado por una colección de puntos singulares, residiendo en el origen de referencia y cuyo potencial produce los datos numéricos observados.

Esta interpretación la manejó Umow (1904), él hizo su análisis calculando y determinando los potenciales correspondientes a los términos hasta $n=3$ de la ecuación (1.1).

En esta interpretación se ve que, matemáticamente se cumple que este modelo se ajusta a la función, sin embargo físicamente no hay porque establecer, a partir del punto singular de orden uno, que las longitudes λ_i (aristas del multipolo) tiendan a cero. Entonces más que puntos singulares hay que buscar multipolos auténticos, en el sentido de que no necesariamente se cumpla que $r \gg \lambda_i$ para toda λ_i .

2.2 Segunda Interpretación. Esta que es la comúnmente usada por los magnetistas está expuesta por Chapman y Bartels (1940). En esta interpretación a partir de ciertos artificios la ecuación (1.1) se lleva a forma:

$$(2.1) \quad V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left[(g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m \right]$$

En efecto, la ecuación del potencial debido a una distribución $S_0 = \{m_i\}$ es $V = \sum_i \frac{m_i}{\rho i}$.



El primer artificio que se introduce, es sustituir cada carga m_i de la ecuación anterior por otra m'_i con la siguiente propiedad $m_i = \alpha^2 m'_i$, siendo α el radio de una esfera que contenga a S_0 . Entonces por la propiedad de linealidad de V , se puede escribir:

$$(2.2) \quad V = \alpha^2 \sum_i \frac{m'_i}{\rho_i}$$

La carga m'_i se define como carga reducida. Con este artificio, el potencial V queda expresado en unidades de trabajo.

Por cualquiera de los métodos del capítulo anterior, la ecuación (2.2) puede escribirse:

$$V = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} \left[(a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m \right]$$

Un segundo artificio consiste en escribir los coeficientes de esta última ecuación en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_n^m &= \alpha^n g_n^m & \text{y} & & b_n^m &= \alpha^n h_n^m \\ \text{donde} & & & & & \\ g_n^m &= \frac{a_n^m}{\alpha^n} & \text{y} & & h_n^m &= \frac{b_n^m}{\alpha^n} \end{aligned}$$

la n que afecta a α es exponente, mientras que en los coeficientes a_n^m , b_n^m , g_n^m y h_n^m , tanto m como n son índices.

Con ésto, los coeficientes g_n^m y h_n^m miden intensidad de carga reducida, como se introdujo en el artificio anterior. Entonces si se sustituyen estos coeficientes en la última ecuación se tiene:

$$V = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n+1} \left[(g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m \right]$$

Como ya se dijo, α es el radio de cualquier esfera que contenga a la distribución, pero para el caso magnético terrestre conviene usar éste como el radio medio terrestre a , con lo que finalmente se llega a la ecuación (2.1).

Los coeficientes a_n^m y b_n^m son momentos de orden n y corresponden a cargas m_i ubicadas en $Q_n(x_n, y_n, z_n)$, en cambio g_n^m y h_n^m definen momentos de estructuras multipolares que se obtienen recorriendo cada carga m_i a lo largo de su radio vector $\overline{OQ_i}$, del lugar de su residencia hasta la distancia a . En esta forma, se ha proyectado toda la carga de la distribución $S_0 = \{m_i\}$ en la superficie de la esfera de radio a , sin que se altere el potencial. Esto es una forma del artificio del Balayage.

De esta manera, los momentos M_1, M_2, M_3, \dots de los mul

tipolos dados por la ecuación (1.1) se obtienen de los momentos reducidos m_1, m_2, m_3, \dots (de los multipolos dados por la ecuación (2.1)) como sigue:

$$M_1 = a^3 m_1, \quad M_2 = a^4 m_2, \quad M_3 = a^5 m_3, \dots,$$

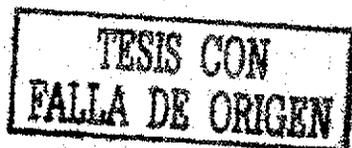
obviamente los momentos reducidos m_1 se obtienen de sistemas de ecuaciones como el sistema (1.18) de la sección (1.7).

Con ésto la ecuación (1.17) del capítulo anterior queda como sigue:

$$M_1 = \sqrt{(a_1^0)^2 + (a_1^1)^2 + (b_1^1)^2} = a^3 \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}$$

como se ve, no está explícita la definición que se ha manejado para el momento M_1 que sería $M_1 = a^3 m_1 \ell$, puesto que los coeficientes g_1^i, h_1^i que determinan a M_1 son calculados directamente como constantes al resolver la ecuación diferencial $\nabla^2 V = 0$, por lo que el valor M_1 no está determinado en función de $m_1 \ell$; desde luego que los otros momentos M_2, M_3, \dots también están determinados directamente como M_1 , por los coeficientes g_n^m, h_n^m que tampoco pasan por la definición que se ha visto de momento en forma explícita $M_n = c_n m \ell_1 \ell_2 \dots \ell_n$.

Sin embargo si se considera como vector el momento de



dipolo M_1 , que emerge del origen hacia cierto punto Q , con la condición de que sus componentes en los tres ejes son $g_1^1 = m_1 \cos \alpha$, $h_1^1 = m_1 \cos \beta$, $g_1^0 = m_1 \cos \gamma$ entonces, $M_1 = a^3 m_1 |\bar{\mu}|$ en que $\bar{\mu} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ vector unitario, con lo que se cumple que $\bar{M}_1 = a^3 m_1 \bar{\mu}$, $\bar{\mu} = |\bar{\mu}| = 1$. En la misma forma se tendrá que en el sistema (1.18) las direcciones \overline{OH}_1 , \overline{OH}_2 , ejes del cuadripolo, se consideran vectores unitarios dados por (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) que determinan a m_2 .

El artificio de introducir la masa reducida se puede usar en el estudio del campo magnético de otros planetas y aún en el Sol, por ejemplo Smith y Gulkis (1979) lo han usado para estudiar el campo magnético de Júpiter, aunque ellos definen el momento reducido de cuadripolo en la forma:

$$(2.3) m_2 = \left[(g_2^0)^2 + (g_2^1)^2 + (h_2^1)^2 + (g_2^2)^2 + (h_2^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

que difiere de la definición usual (Stratton, 1941). En efecto si esta definición se aplicara para el caso magnético terrestre, para la época 1975 se tendría $m_2 = 442.86$ unidades, que obviamente difiere del valor que aparece en la tabla III para esta misma época y que es $m_2 = 511.16$ unidades.

Sin embargo, el segundo miembro de la ecuación (2.3) es útil cuando se calcula el valor medio cuadrático de V_2 sobre una superficie esférica de radio r que contenga a la distri-

bución $\{m_1\}$ y que está dado por:

$$\frac{V_2^2}{5r^6} = \frac{1}{5r^6} \left[(g_2^0)^2 + (g_2^1)^2 + (h_2^1)^2 + (g_2^2)^2 + (h_2^2)^2 \right]$$

Con los coeficientes g_n^m y h_n^m se obtiene información de un modelo magnético que produce el potencial dado por la ecuación (2.1). A continuación se da una tabla de los coeficientes correspondientes a los términos V_1 y V_2 para diferentes épocas.

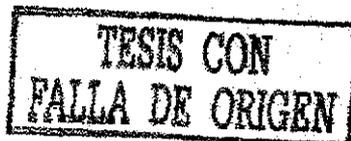
TABLA I

Autor *	Epoca	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Gauss	1835	-3235	-311	625	51	292	12	-2	157
Adams	1845	-3219	-278	578	9	284	-10	4	135
Fritsche	1885	-3164	-241	591	-35	286	-75	68	142
Dyson-Furner	1922	-3095	-226	592	-89	299	-124	144	84
Afanasieva	1945	-3032	-229	590	-125	288	-146	150	48
Finch-Leaton	1955	-3055	-227	590	-152	303	-190	158	24
Hendricks-Cain	1960	-3042	-216	578	-154	300	-195	159	20
I G R F	1965	-3034	-212	576	-165	299	-201	157	13
Hurwitz, Fabiano y Peddie	1970	-3021	-207	575	-179	300	-206	161	4
Barracough, Harwood Leaton y Malin	1975	-3010	-202	568	-191	301	-206	163	-6

La unidad usada es:

$$1 \text{ unidad} = 10\gamma = 10^{-4} \text{ oersted}$$

* Estas referencias aparecen con * en la página 117.



Con los coeficientes g_1^0 , g_1^1 , y h_1^1 dados en la tabla anterior, se obtiene en el sistema geográfico, el momento reducido de dipolo m_1 y su dirección (θ_0, λ_0) para las diferentes épocas (ver ecuaciones (1.17)) sus valores aparecen en la tabla II. Aunque estas ecuaciones (1.17) dan la dirección del dipolo dirigido hacia el sur, en la tabla II se dan como es costumbre, la dirección hacia el norte y la longitud oeste.

TABLA II

Epoca *	θ_0	λ_0	m_1
1835	12°11'	63°33'	3309
1845	11°16'	64°19'	3232
1885	11°24'	67°49'	3228
1922	11°35'	69°06'	3159
1945	11°47'	68°47'	3097
1955	11°42'	68°57'	3120
1960	11°28'	69°30'	3104
1965	11°27'	69°48'	3096
1970	11°25'	70°12'	3082
1975	11°20'	70°25'	3070

Conocidos los coeficientes g_2^1 , h_2^1 de la tabla I, el momento reducido de cuadrípulo m_2 y las direcciones de sus ejes \overline{OH}_1 y \overline{OH}_2 se determinan con el sistema (1.18) y están dados en la tabla III en la que aparece también el ángulo α formado por \overline{OH}_1 y \overline{OH}_2 .

* Chargoy, 1971; Chargoy y Chargoy, 1974, 1976-1977.

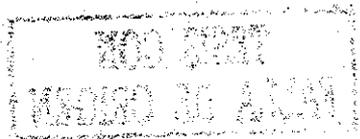


TABLA III

Epoca *	λ_1	θ_1	λ_2	θ_2	m_2	α
1835	178°19'	97°32'	-87°41'	151°50'	386.85	85°14'
1845	177°35'	90°50'	-89°17'	154°53'	363.46	90°36'
1885	168°10'	84°39'	-103°45'	151°58'	388.61	93°48'
1922	161°14'	82°11'	-130°59'	153°19'	432.64	87°20'
1945	158°14'	78°13'	-140°30'	154°59'	439.21	89°12'
1955	153°48'	75°59'	-144°54'	156°55'	485.04	92°23'
1960	152°43'	75°45'	-145°32'	156°56'	485.91	92°19'
1965	152°05'	74°46'	-147°21'	157°28'	492.08	93°24'
1970	151°46'	73°49'	-150°21'	157°23'	503.56	93°30'
1975	151°52'	73°16'	-153°59'	157°22'	511.16	88°30'

Las intersecciones de los ejes del cuadripolo con la superficie de la Tierra para diferentes épocas están representadas en la figura 10.

2.3 Ventajas del sistema de referencia de ejes propios. Como se vió en el capítulo anterior, cuando a la ecuación del potencial (2.1) referida al sistema geográfico, se le aplica la sustitución $S_2 S_1$ que lleva a la distribución S_0 hacia el sistema de referencia con origen en C (x' , y' , z') y ejes paralelos a los geográficos se tiene:

$$(2.4) \quad S_2 S_1: V = V_1 + (\Delta V_1 + V_2) + (\Delta^2 V_1 + \Delta V_2 + V_3) + \dots$$

* Chargoy, 1971; Chargoy y Chargoy, 1974, 1976-1977.



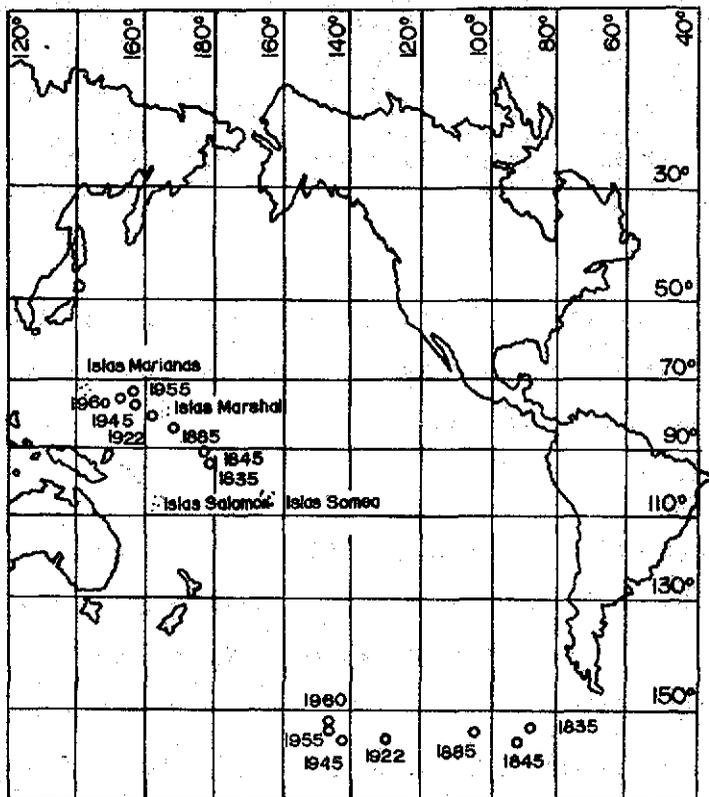


FIG. 10

Intersecciones de los ejes del cuadrípulo central con la superficie de la Tierra.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

NOV 1955
ACERCA DE LA
FALLA DE ORIGEN

En este nuevo sistema las coordenadas de un observador son $P(\bar{r}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$ donde \bar{r} se calcula fácilmente mediante el conocido teorema:

$$\bar{r}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2(\overline{OP})(\overline{OC})\cos\phi,$$

\overline{OP} es el radio de la Tierra y coordenada del observador, \overline{OC} la distancia del centro C al origen O y ϕ el ángulo formado por \overline{OP} y la distancia \overline{OC} .

Las coordenadas (x', y', z') del centro geomagnético C, se calculan con las ecuaciones (1.16) tomando el radio terrestre igual a 6368 Km. Haciendo el cambio a coordenadas esféricas (r, λ, θ) para las diferentes épocas se tiene la tabla IV, donde $r = \overline{OC}$.

TABLA IV

Epoca *	r	λ	θ
1835	289	188°22'	102°59'
1845	285	181°12'	95°02'
1885	305	168°35'	87°46'
1922	364	161°19'	80°21'
1945	368	156°30'	75°41'
1955	436	150°49'	74°18'
1960	440	149°55'	74°02'
1965	450	148°42'	75°52'
1970	459	149°07'	71°18'
1975	474	148°01'	70°12'

* Chargoy, 1971; Chargoy y Chargoy, 1974, 1976-1977.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Determinadas las coordenadas del centro, los coeficientes del cuadripolo que reside en este centro C y cuyo potencial es:

$$\Delta V_1 + V_2 = (g_2^0 - \alpha_2^0) P_2^0 + \left[(g_2^1 - \alpha_2^1) \cos \lambda + (h_2^1 - \beta_2^1) \operatorname{sen} \lambda \right] P_2^1 + \left[(g_2^2 - \alpha_2^2) \cos 2\lambda + (h_2^2 - \beta_2^2) \operatorname{sen} 2\lambda \right] P_2^2$$

se pueden calcular mediante las ecuaciones (1.15) y se dan en la tabla VIII para las épocas 1955, 1965 y 1975.

Los cosenos directores de los ejes del cuadripolo trasladado al centro C así como el momento m_2 , se calculan mediante el sistema (1.18) como se hizo para el caso del cuadripolo que reside en O y están dados en la siguiente tabla:

TABLA V

Epoca *	x_1	Y_1	z_1	x_2	Y_2	z_2	m_2
1835	-0.9931	-0.0874	0.0786	0.0706	-0.9781	-0.1958	240
1845	-0.9955	-0.0581	0.0756	0.0437	-0.9827	-0.1802	212
1885	-0.9856	0.1363	0.1005	-0.1519	-0.9736	-0.1703	238
1922	-0.9216	0.3632	0.1368	-0.3816	-0.9126	-0.1467	240
1945	-0.8899	0.4285	0.1563	-0.4478	-0.8834	-0.1385	219
1955	-0.8584	0.4881	0.1581	-0.5079	-0.8520	-0.1268	228
1960	-0.8510	0.5017	0.1555	-0.5218	-0.8441	-0.1232	228
1965	-0.8427	0.5151	0.1517	-0.5339	-0.8368	-0.1215	224
1970	-0.8278	0.5408	0.1496	-0.5542	-0.8175	-0.1571	226
1975	-0.8143	0.5580	0.1598	-0.5766	-0.8090	-0.1140	224

* Chargoy, 1971; Chargoy y Chargoy, 1974, 1976-1977.

La dirección de los ejes \overline{CH}_1 y \overline{CH}_2 , del cuadrípulo con residencia en C, está dada para las diferentes épocas en la tabla VI, y las intersecciones de estos ejes, \overline{CH}_1 y \overline{CH}_2 , con la superficie terrestre están representadas en la figura 11, en la que se ve claramente que estas intersecciones tienen lugar en las proximidades del ecuador geográfico y emigran en dirección norte-oeste-oeste.

TABLA VI

Epoca *	λ_1	θ_1	λ_2	θ_2
1835	185°00'	85°30'	274°08'	101°17'
1845	183°15'	85°40'	272°33'	100°23'
1885	172°08'	84°14'	261°08'	99°48'
1922	158°29'	82°08'	274°18'	98°26'
1945	153°58'	81°00'	243°07'	97°58'
1955	150°23'	80°54'	239°12'	97°17'
1960	149°29'	81°05'	238°16'	97°05'
1965	148°40'	80°59'	237°28'	96°59'
1970	146°51'	81°24'	235°52'	97°35'
1975	145°35'	80°48'	234°31'	97°35'

Si se comparan los valores de m_2 que aparecen en la tabla V con los obtenidos en la tabla III se observa que, el momento m_2 del cuadrípulo que reside en O está creciendo de 387 a 511 unidades, en cambio, para el cuadrípulo que resulta con el cambio del sistema de referencia, el valor de m_2 se mantiene próximo a un promedio de 228 unidades.

La tabla V es más consistente que la tabla III ya que

* Chargoy, 1971; Chargoy y Chargoy, 1974, 1976-1977.

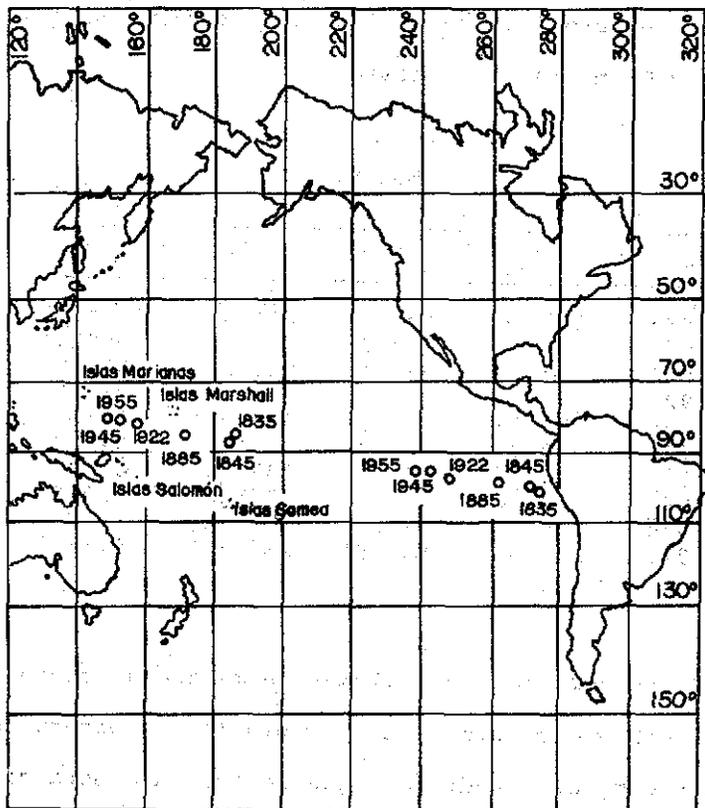


FIG. II

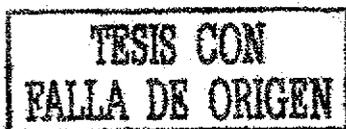
Intersecciones de los ejes del cuadrípulo cuando el dipolo y el cuadrípulo residen en C.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

los datos obtenidos en ella, resultan de una sustitución referida al sistema de coordenadas determinado por la propia distribución, de tal manera que se han eliminado términos que aparecen en el desarrollo de Taylor, como consecuencia de considerar en el sistema de referencia un centro diferente al centro C. Mientras que en los valores de m_2 dados en la tabla III, está incluido un momento de orden dos generado por m_1 , como se verá en el capítulo III.

En la tabla IV se observa que la distancia \overline{OC} está creciendo en forma continua; lo cual explica el crecimiento de m_2 en la tabla III. Se observa también que \overline{OC} tiene un movimiento de rotación en la dirección noroeste, que resulta ser muy parecido al movimiento del eje \overline{OH}_1 , dado también en la tabla III. Es interesante hacer notar que la dirección \overline{CH}_1 de la tabla VI se encuentre aproximada a la dirección \overline{OH}_1 de la tabla III aunque más hacia el oeste, cuando no había porqué esperar esta aproximación.

El crecimiento y la rotación que sufre \overline{OC} en el período de 1835 a 1975 se ilustran en forma aproximada en la figura 12, en la cual se presentan las proyecciones de las distancias del centro geomagnético C al centro geográfico O sobre el plano XOY. En ésta se pone de manifiesto que el centro C se aleja de O en forma continua.



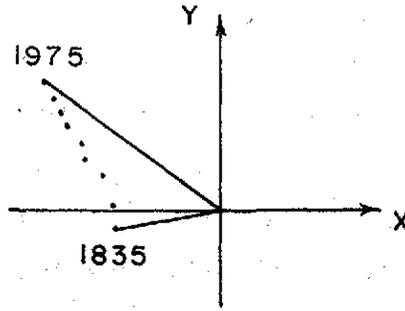


Fig. 12

El término correspondiente a terceras derivadas de la ecuación (2.4) es

$$\Delta^2 V_1 + \Delta V_2 + V_3$$

donde:

$$\Delta^2 V_1 = a_3^0 P_3^0 + \dots + (a_3^3 \cos 3\lambda + b_3^3 \operatorname{sen} 3\lambda) P_3^3$$

$$\Delta V_2 = - \left[\bar{a}_3^0 P_3^0 + \dots + (\bar{a}_3^3 \cos 3\lambda + \bar{b}_3^3 \operatorname{sen} 3\lambda) P_3^3 \right]$$

Si el término $\Delta^2 V_1 + \Delta V_2 + V_3$ se toma como el potencial de un sólo multipolo (octipolo) que reside en C, sus



coeficientes resultan ser:

$$\bar{g}_3^i = g_3^i - \bar{a}_3^i + a_3^i, \quad \bar{h}_3^i = h_3^i - \bar{b}_3^i + b_3^i \quad \text{con } i = 0, 1, 2, 3,$$

donde los coeficientes a_3^i , b_3^i corresponden al término de octipolo generado por el dipolo que residía en 0 y \bar{a}_3^i , \bar{b}_3^i al término de octipolo generado por el cuadrupolo que también residía en 0 antes de la traslación y se calculan con las ya conocidas fórmulas (Bartels, 1936):

$$a_3^0 = \frac{1}{2} g_1^0 (3x'^2 + 3y'^2 - 6z'^2) + 3g_1^0 x' z' + 3h_1^0 y' z'$$

$$a_3^1 = \sqrt{6} \left[-2g_1^0 x' z' + \frac{1}{4} g_1^1 (-4z'^2 + 3x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2} h_1^1 x' y' \right]$$

$$b_3^1 = \sqrt{6} \left[-2g_1^0 y' z' + \frac{1}{2} g_1^1 x' y' + \frac{1}{4} h_1^1 (x'^2 + 3y'^2 - 4z'^2) \right]$$

$$a_3^2 = \sqrt{15} \left[\frac{1}{2} g_1^0 (y'^2 - x'^2) - g_1^1 x' z' + h_1^1 y' z' \right]$$

$$b_3^2 = -\sqrt{15} \left[g_1^0 x' y' + g_1^1 y' z' + h_1^1 x' z' \right]$$

$$a_3^3 = 3\sqrt{10} \left[\frac{1}{4} g_1^1 (y'^2 - x'^2) + \frac{1}{2} h_1^1 x' y' \right]$$

$$b_3^3 = 3\sqrt{10} \left[-\frac{1}{2} g_1^1 x' y' + \frac{1}{4} h_1^1 (y'^2 - x'^2) \right]$$

$$\bar{a}_3^0 = 3m_2 \left[x_1 x_2 z'^4 + x_1 z_2 x'^4 + z_1 x_2 x'^4 + y_1 y_2 z'^4 + y_1 z_2 y'^4 + z_1 y_2 y'^4 - 2z_1 z_2 z'^4 \right]$$

$$\bar{a}_3^1 = m_2 \frac{\sqrt{6}}{2} \left[x_1 y_2 y' + y_1 x_2 y' + y_1 y_2 x' + 3x_1 x_2 x' \right. \\ \left. + - 4 (x_1 z_2 z' + z_1 x_2 z' + z_1 z_2 x') \right]$$

$$\bar{b}_3^1 = m_2 \frac{\sqrt{6}}{2} \left[x_1 x_2 y' + x_1 y_2 x' + y_1 x_2 x' + 3y_1 y_2 y' \right. \\ \left. + - 4 (y_1 z_2 z' + z_1 y_2 z' + z_1 z_2 y') \right]$$

$$\bar{a}_3^2 = m_2 \sqrt{15} \left[y_1 y_2 z' + y_1 z_2 y' + z_1 y_2 y' - x_1 x_2 z' - x_1 z_2 x' \right. \\ \left. - z_1 x_2 x' \right]$$

$$\bar{b}_3^2 = - m_2 \sqrt{15} \left[x_1 y_2 z' + x_1 z_2 y' + y_1 x_2 z' + y_1 z_2 x' \right. \\ \left. + z_1 x_2 y' + z_1 y_2 x' \right]$$

$$\bar{a}_3^3 = m_2 \frac{3\sqrt{10}}{2} \left[x_1 y_2 y' + y_1 x_2 y' + y_1 y_2 x' - x_1 x_2 x' \right]$$

$$\bar{b}_3^3 = m_2 \frac{3\sqrt{10}}{2} \left[y_1 y_2 y' - x_1 x_2 y' - x_1 y_2 x' - y_1 x_2 x' \right]$$

En la tabla VIII se dan los coeficientes correspondientes a los términos V_1 , V_2 y V_3 de la ecuación (2.1) referida al sistema con origen en el centro C para tres épocas diferentes. También para estas épocas se dan en la tabla VII los coeficientes correspondientes a V_3 cuando el potencial V está referido al sistema geográfico.

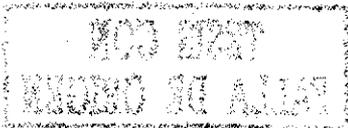


TABLA VII

Epoca *	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
1955	118	-191	-45	126	29	91	-9
1965	130	-204	-40	129	24	84	-18
1975	128	-214	-33	125	27	83	-23

TABLA VIII

Epoca *	g_1^0	g_1^1	h_1^1	\bar{g}_2^0	\bar{g}_2^1	\bar{h}_2^1	\bar{g}_2^2	\bar{h}_2^2	\bar{g}_3^0	\bar{g}_3^1	\bar{h}_3^1	\bar{g}_3^2	\bar{h}_3^2	\bar{g}_3^3	\bar{h}_3^3
1955	-3055	-227	590	-7	5	-39	168	95	131	-184	-29	95	93	33	6
1965	-3034	-212	576	-6	3	-37	171	83	179	-131	-70	111	103	27	3
1975	-3010	-202	568	-6	0	-37	179	65	174	-126	-73	111	109	26	7

Si se compara la tabla VIII con las tablas I y VII se verá la simplificación que se obtiene al cambiar de un sistema a otro minimizando el valor medio cuadrático de segundas derivadas.

Usando el artificio mencionado en la sección (1.7), al aplicar una rotación R en el sistema de referencia con origen en el centro C, de manera que los nuevos ejes coincidan, CZ con $-\overline{CD}$, dirección del dipolo, CX con \overline{CH}_1 y CY con \overline{CH}_2 , siendo \overline{CH}_1 y \overline{CH}_2 las direcciones de los ejes del cuadrípolo, la matriz de rotación de un sistema a otro es:

* Chargoy y Chargoy, 1976-1977.

$$R = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 \end{bmatrix}$$

donde x_0, y_0, \dots, z_2 son cosenos directores en las direcciones de los ejes \overline{CD} , \overline{CH}_1 y \overline{CH}_2 .

Aplicando la transformación $\overline{X} = \overline{X} R$ a la ecuación (1.1) escrita usando coordenadas cartesianas (Chargoy y Chargoy, 1976-1977) se tiene:

$$(2.5) \quad \overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 + \dots = \frac{1}{F^3} \overline{X} R \begin{bmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2F^3} \overline{g}_2^0 + \frac{1}{F^5} (\overline{X} R A_2 R' \overline{X}') \\ + \frac{1}{F^5} (\overline{X} R B) + \frac{1}{F^7} (\overline{X} R A_3 R' \overline{X}' R' \overline{X}') + \dots$$

donde: $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ son las coordenadas de un punto P en el sistema con origen en C y ejes ya rotados, \overline{X}' es el vector transpuesto de \overline{X} ,

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} \bar{g}_2^2 & \bar{h}_2^2 & \bar{g}_2^1 \\ \bar{h}_2^2 & -\bar{g}_2^2 & \bar{h}_2^1 \\ \bar{g}_2^1 & \bar{h}_2^1 & 3 \bar{g}_2^0 \end{bmatrix}$$

$$B = -\frac{\sqrt{6}}{4} \begin{bmatrix} \bar{g}_3^1 \\ \bar{h}_3^1 \\ 6 \bar{g}_3^0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} (A_x) \\ (A_y) \\ (A_z) \end{bmatrix}$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 1a_1^1 & 1a_1^2 & 1a_1^3 \\ 1a_2^1 & 1a_2^2 & 1a_2^3 \\ 1a_3^1 & 1a_3^2 & 1a_3^3 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 2a_1^1 & 2a_1^2 & 2a_1^3 \\ 2a_2^1 & 2a_2^2 & 2a_2^3 \\ 2a_3^1 & 2a_3^2 & 2a_3^3 \end{bmatrix}, \quad A_z = \begin{bmatrix} 3a_1^1 & 3a_1^2 & 3a_1^3 \\ 3a_2^1 & 3a_2^2 & 3a_2^3 \\ 3a_3^1 & 3a_3^2 & 3a_3^3 \end{bmatrix}$$

y los elementos de cada una de estas matrices son:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$${}_1a_1^1 = \frac{\sqrt{10}}{4} \bar{g}_3^3 \quad {}_1a_1^2 = \frac{\sqrt{10}}{4} \bar{h}_3^3 \quad {}_1a_1^3 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2$$

$${}_1a_2^1 = \frac{\sqrt{10}}{4} \bar{h}_3^3 \quad {}_1a_2^2 = -\frac{\sqrt{10}}{4} \bar{g}_3^3 \quad {}_1a_2^3 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2$$

$${}_1a_3^1 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2 \quad {}_1a_3^2 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2 \quad {}_1a_3^3 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{g}_3^1$$

$${}_2a_1^1 = \frac{\sqrt{10}}{4} \bar{h}_3^3 \quad {}_2a_1^2 = -\frac{\sqrt{10}}{4} \bar{g}_3^3 \quad {}_2a_1^3 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2$$

$${}_2a_2^1 = -\frac{\sqrt{10}}{4} \bar{g}_3^3 \quad {}_2a_2^2 = \frac{\sqrt{10}}{4} \bar{h}_3^3 \quad {}_2a_2^3 = -\frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2$$

$${}_2a_3^1 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2 \quad {}_2a_3^2 = -\frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2 \quad {}_2a_3^3 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{h}_3^1$$

$${}_3a_1^1 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2 \quad {}_3a_1^2 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2 \quad {}_3a_1^3 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{g}_3^1$$

$${}_3a_2^1 = \frac{\sqrt{15}}{6} \bar{h}_3^2 \quad {}_3a_2^2 = -\frac{\sqrt{15}}{6} \bar{g}_3^2 \quad {}_3a_2^3 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{h}_3^1$$

$${}_3a_3^1 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{g}_3^1 \quad {}_3a_3^2 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \bar{h}_3^1 \quad {}_3a_3^3 = \frac{5}{2} \bar{g}_3^0$$

Después de efectuar la transformación indicada en (2.5), la ecuación del potencial queda en la forma:

$$V = -\frac{1}{r^2} \bar{g}_1^0 P_1^0 + \frac{1}{r^3} \left[\bar{h}_2^2 \text{sen } 2\lambda P_2^2 \right] + \frac{1}{r^4} \left[\bar{g}_3^0 P_3^0 + (\bar{g}_3^1 \cos \lambda + \bar{h}_3^1 \text{sen } \lambda) P_3^1 \right. \\ \left. + (\bar{g}_3^2 \cos 2\lambda + \bar{h}_3^2 \text{sen } 3\lambda) P_3^2 + (\bar{g}_3^3 \cos 3\lambda + \bar{h}_3^3 \text{sen } 3\lambda) P_3^3 \right] + \dots$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

se puede decir que ésta es la forma canónica de la ecuación, pues el sistema de referencia quedó determinado por los ejes de los multipolos dados en las expresiones:

$$V_1 = \frac{1}{r^3} (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}) \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{1}{r^4} (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}) \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{bmatrix}$$

donde los vectores \bar{u}_1 , \bar{u}_2 , \bar{v}_2 quedan definidos por la distribución de carga magnética que produce el campo.

A continuación se dan tablas de los coeficientes de la ecuación de Gauss, en los diferentes sistemas de referencia para las épocas 1955, 1965 y 1975. El sistema I es el geográfico, el sistema II es el que tiene origen en C y ejes paralelos a los del sistema geográfico y el sistema III es el de ejes propios.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TABLA IX. EPOCA 1955

*	g_1^0	g_1^1	h_1^1
Sistema I	-3055	-227	590
Sistema II	-3055	-227	590
Sistema III	-3120	0	0

	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Sistema I	-152	303	-190	158	24
Sistema II	-7	5	-39	168	95
Sistema III	0	0	0	0	197

	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
Sistema I	118	-191	-45	126	29	91	-9
Sistema II	168	-123	-68	102	104	33	6
Sistema III	145	169	39	1	136	24	-2

* Chargoy y Chargoy, 1976-1977.

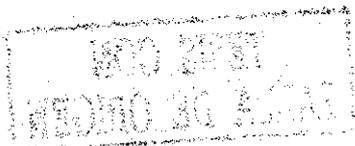


TABLA X. EPOCA 1965.

*	g_1^0	g_1^1	h_1^1
Sistema I	-3034	-212	576
Sistema II	-3034	-212	576
Sistema III	-3095	0	0

	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Sistema I	-165	299	-201	157	13
Sistema II	-6	3	-37	171	83
Sistema III	0	0	0	0	194

	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
Sistema I	130	-204	-40	129	24	84	-18
Sistema II	179	-131	-70	111	104	27	3
Sistema III	156	175	44	0	142	24	5

* Chargoy y Chargoy, 1976-1977.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TABLA XI. EPOCA 1975.

*	g_1^0	g_1^1	h_1^1
Sistema I	-3010	-202	568
Sistema II	-3010	-202	568
Sistema III	-3070	0	0

	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Sistema I	-191	301	206	163	-6
Sistema II	-6	0	-37	179	65
Sistema III	0	0	0	0	194

	g_3^0	g_3^1	h_3^1	g_3^2	h_3^2	g_3^3	h_3^3
Sistema I	128	-214	-33	125	27	83	-23
Sistema II	174	-126	-73	111	109	26	7
Sistema III	154	166	55	22	143	25	12

* Chargoy y Chargoy, 1976-1977.



Del valor medio cuadrático de V_n tomado sobre la superficie terrestre expresado por:

$$\overline{V_n^2} = \frac{1}{(2n+1) r^{2n+2}} \left[\sum_{m=0}^n (g_n^m)^2 + \sum_{m=0}^n (h_n^m)^2 \right]$$

y considerando $r=1$ se obtiene el valor medio de V_n , en la tabla XII aparecen los valores para $n=1,2,3$ en los diferentes sistemas de referencia para estas tres épocas.

TABLA XII

*	Epoca 1955			Epoca 1965			Epoca 1975		
	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3
Sistema I	1801	188	105	1787	191	110	1772	198	112
Sistema II	1801	88	100	1787	87	105	1772	87	104
Sistema III	1801	88	100	1787	87	105	1772	87	104

* Chargoy y Chargoy, 1976-1977.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

NOV 1951
RECEIVED IN ALBANY

UNA TERCERA INTERPRETACION DE LA ECUACION DE GAUSS

En este capítulo se presenta una interpretación que probablemente sea la que más se ajuste a la naturaleza del fenómeno magnético y que describa los datos numéricos obtenidos de la observación.

Usualmente en la ecuación de Gauss del potencial se hace corresponder, al primer término el modelo físico de dipolo y del desarrollo en serie de la función $\frac{1}{r}$, para obtener el potencial de este modelo de dipolo, se toman sólo los términos de primeras derivadas considerando que los términos de segundas derivadas en adelante (contenidos en la ecuación en $n = 2$ en adelante) pueden desprejarse por ser muy pequeños, como en el caso de la primera interpretación dada en el capítulo anterior. En forma similar, al segundo término de la ecuación de Gauss se le hace corresponder el modelo de cuadrípulo, y en el potencial de este cuadrípulo se toman sólo las derivadas de orden dos, considerando como en el caso anterior, que las derivadas de orden tres en adelante se pueden desprejarse. Para los siguientes términos $n = 3, 4, \dots$ se procede en forma similar.

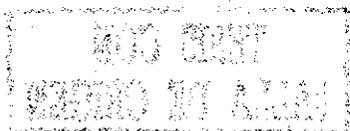
En ciertos estudios de la geofísica en dimensión planetaria como es el de gravimetría, el sistema de referencia geográfico, que es el usado habitualmente, resulta muy adecuado, pero para el estudio del geomagnetismo, también en

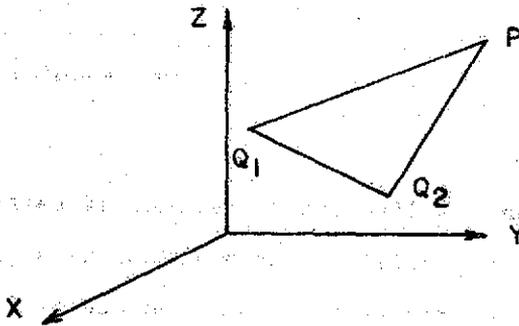
dimensión planetaria, el sistema geográfico no resulta ser el más adecuado cuando se tomen no sólo los términos de primeras derivadas para el caso del dipolo, de segundas derivadas para el de cuadrípulo y así para el resto de los múltiplos, puesto que como se ve en el dipolo por ejemplo, la distancia $\overline{Q_1 Q_2}$ no se puede definir como mucho menor que r .

En este capítulo se tomará de preferencia para sistema de referencia, en primer lugar el sistema de ejes propios del que se habló en el capítulo anterior, y se verá con más facilidad el comportamiento de los términos que determinan el potencial para una V_n dada.

3.1. Dipolo. Considérese la esfera terrestre y dentro de ella una colección de dipolos distribuidos arbitrariamente. En un sistema de referencia cualquiera, el potencial V_1 medido desde un observador colocado en $P(x, y, z)$ colocado sobre la superficie o a pocos kilómetros sobre ella debido a la presencia de un dipolo formado por las cargas $-m$ residiendo en $Q_1(x_1, y_1, z_1)$ y $+m$ en $Q_2(x_2, y_2, z_2)$ (ver figura 13) es:

$$V_1 = -\frac{m}{1f} (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \dots$$





$$\begin{aligned}
 &P(x, y, z) \\
 &- m \in Q_1(x_1, y_1, z_1) \\
 &+ m \in Q_2(x_2, y_2, z_2) \\
 &\overline{Q_1 Q_2} = 2l \\
 &\overline{OQ_1}, \overline{OQ_2} < \overline{OP}
 \end{aligned}$$

Fig. 13

Si se toma ahora un sistema de referencia tal que el di polo $\overline{Q_1 Q_2}$ esté, por ejemplo, sobre el eje z como en la figura 6 del capítulo I, se tiene:

$$\begin{aligned}
 V_1 = & - \frac{m}{1!} (z_2 - z_1) f_z + \frac{m}{2!} (z_2^2 - z_1^2) f_{zz} - \\
 & \frac{m}{3!} (z_2^3 - z_1^3) f_{z^3} + \dots
 \end{aligned}$$

En cambio si el sistema de referencia se elige de manera que se tenga $- m \in Q_1 (0, 0, -l)$ y $+ m \in Q_2 (0, 0, +l)$, el po tencial quedará expresado por:

$$V_1 = -\frac{m}{1!} (2\lambda) f_z - \frac{m}{3!} (2\lambda^3) f_{z^3} - \frac{m}{5!} (2\lambda^5) f_{z^5} - \dots$$

que como se vió en el capítulo I, es la forma canónica del potencial V_1 .

Se observa que en los diferentes sistemas de referencia, el primer término del potencial V_1 que corresponde a primeras derivadas, permanece invariante en el sentido que se conserva invariante el módulo y la dirección del vector que representa a M_1 , momento de dipolo; si los términos siguientes en el desarrollo de V_1 , es decir términos de derivadas de orden dos en adelante se representan en forma matricial, por ejemplo el de segundas derivadas queda en la forma:

$$\Delta V_1 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}) \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix},$$

bajo traslaciones del sistema de referencia los vectores laterales cambian en magnitud y dirección, en cambio bajo rotaciones conservan su módulo y dirección, lo que cambia son los componentes de cada vector.

Se observa también que ese término invariante de primeras derivadas, corresponde al potencial de un dipolo físico

como tradicionalmente se ha tratado en los textos de física, los siguientes términos representan potenciales de multipolos de orden superior, como se verá más adelante. Entonces en la ecuación (2.1):

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left[(g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m \right]$$

al término $n=1$ se le puede hacer corresponder el término invariante V_1 y los términos de derivadas de orden superior de V_1 van a estar incluidos en la ecuación (2.1) cuando $n=2,3,\dots$

A esos términos de derivadas de orden dos en adelante se les define como potenciales de multipolos matemáticos y se representarán por ΔV_1 al término de segundas derivadas, $\Delta^2 V_1$ al de terceras derivadas, etc. Algunos $\Delta^n V_1$ pueden ser cero como ocurre en el caso del potencial referido al punto medio del dipolo que se acaba de ver. Como se ve, se está usando la notación V_1 y V_1 para distinguir entre el potencial de dipolo en su mayor aproximación en serie V_1 y la parte invariante V_1 de ese potencial, que es la que habitualmente se usa en los textos.

Aunque los términos $\Delta V_1, \Delta^2 V_1, \dots$ tomados separadamente, pueden corresponder a la parte invariante del potencial de una estructura multipolar del mismo orden (cuadripolo, octipolo, ...) en el caso que se está tratando, del potencial debido

a un dipolo, estos términos sólo afectarán numéricamente a V_1 .

En el caso del potencial Newtoniano se ve con mucha claridad como funcionan los potenciales de multipolos matemáticos.

En efecto, sea E una esfera de radio a , con distribución homogénea de masa sobre la superficie y con centro en C , C centro del sistema de referencia; su potencial newtoniano medido desde un observador colocado en P (r, λ, θ) con $r \geq a$, como es bien sabido, es:

$$(3.1) \quad V_0 = \frac{M}{r}$$

donde M es la suma de la masa.

Desde luego que esta ecuación (3.1) se puede obtener de la ecuación (2.1), puesto que las simetrías que en todas direcciones tiene la esfera con respecto a su centro, obligan a que los coeficientes g_n^m , y h_n^m de esa ecuación (2.1) sean iguales a cero cuando n diferente de cero.

Supongáse que para obtener ese mismo potencial V_0 se hiciera con un sistema de referencia con centro en Q y en cual Q ($0, 0, h$), entonces el potencial se podría obtener por un desarrollo de Taylor a partir de la ecuación (3.1) como:

$$V_Q = \frac{M}{r} - h M \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{h^2 M}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \dots$$

Para cualquier desarrollo que se hiciera escogiendo como centro de referencia cualquier otro punto, se ve que el primer término permanecería invariante y los otros términos dependerían de las coordenadas del punto Q.

Por otro lado, los términos a partir de la primera derivada se pueden definir como potenciales de multipolos matemáticos de órdenes uno, dos, etc., porque físicamente no está el elemento que podría tener ese potencial en este supuesto; por ejemplo, el término $h M \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$ en el fenómeno magnético se encuentra como potencial de un dipolo.

Lo que se ha dicho para este término de primeras derivadas en este desarrollo puede hacerse extensivo para cualquier término de las derivadas siguientes tomado aisladamente, y que físicamente, en algún otro experimento, pudiera corresponder a un fenómeno físico.

Desde luego que si Q tuviera coordenadas (h_1, h_2, h_3) el elemento de primeras derivadas que tendría la forma:

$$M \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

nos muestra que los multipolos matemáticos sí se alteran



con un traslado de los ejes de referencia.

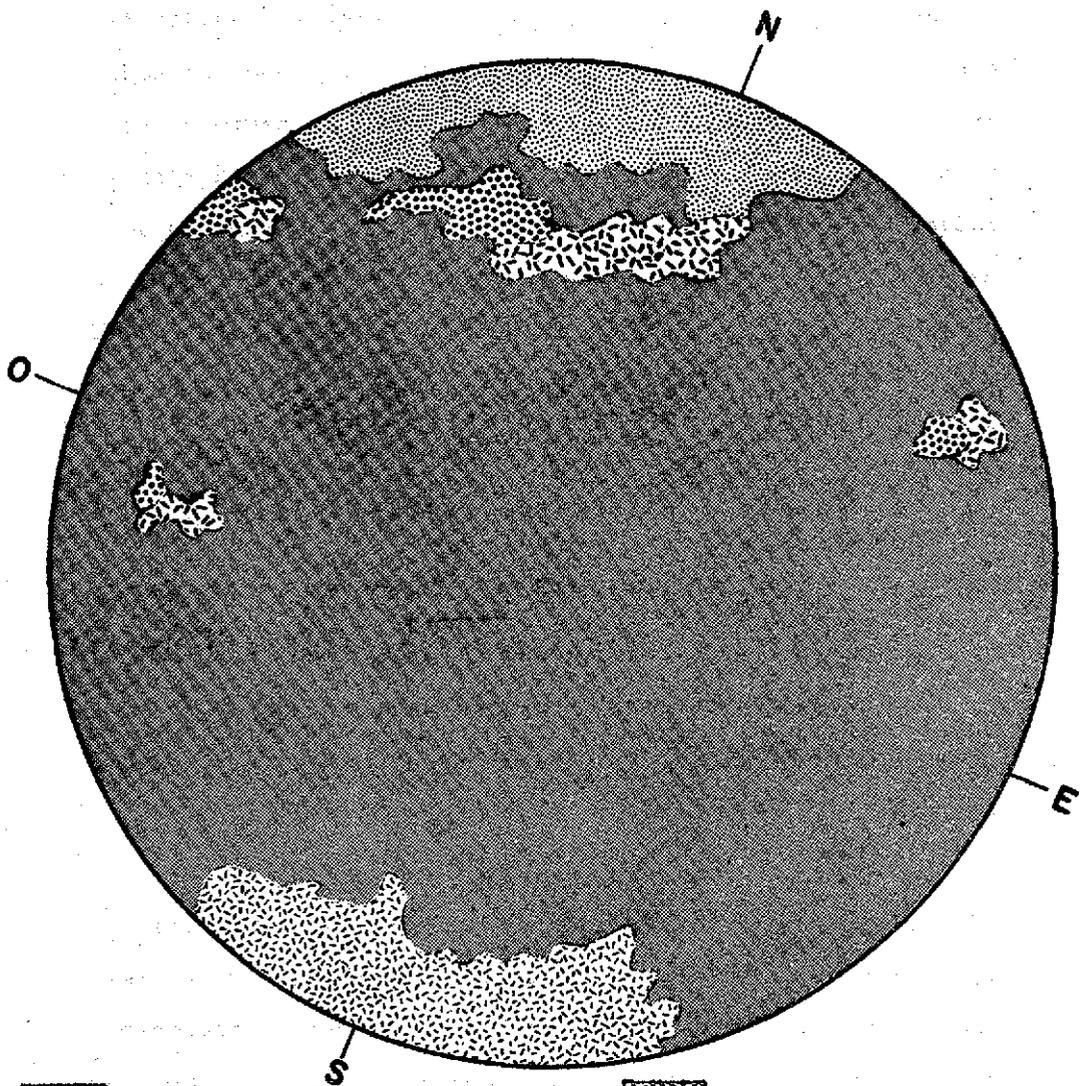
Es evidente de la observación de las cartas magnéticas mundiales (v.g. las editadas para 1975 por The Defense Mapping Agency Hydrographic Center) que la mayor parte de los dipolos que se han supuesto contenidos dentro de la esfera terrestre se orientan en la dirección norte-sur, generando así la componente dipolar del campo que se obtiene a través de los coeficientes de Gauss. Obviamente que no se alcanza una polarización completa en esa dirección norte-sur, puesto que las cartas mencionadas muestran que hay distorsiones en las líneas del campo debido a anomalías de éste, por ejemplo para diferentes épocas la carta de intensidad vertical presenta en el hemisferio norte, dos regiones de máxima intensidad localizadas en la parte central de Canadá y el noroeste de Asia y el punto definido como polo no está contenido en ninguna de ellas como era de esperarse.

Por la similitud del fenómeno magnético solar la gráfica del disco solar publicada por Scientific American en noviembre de 1966 y que se da a continuación, ha sido útil para explicar en el caso terrestre la existencia de dos regiones de máxima intensidad vertical en lugar de una, y que el polo magnético estuviera contenido en ella como sucede en el caso del hemisferio sur que también puede apreciarse en las cartas. En efecto en la gráfica del sol se ve que las regiones de flujo de vector magnético no tienen geometría

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

GRAFICA DEL DISCO SOLAR

Tomada de una fotografía en Noviembre 1964 por el Observatorio Nacional Kitt Peak, Arizona, E. U.



 Polaridad negativa de mayor intensidad

 Polaridad positiva de mayor intensidad

 Polaridad negativa de intensidad media

 Polaridad positiva de intensidad medio

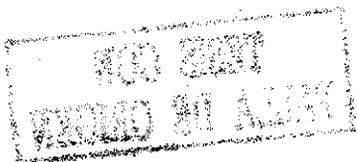
 Campo no polarizado que cubre el resto del disco

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

regular sobre la superficie del astro, lo cual es muy probable que ocurra en el caso terrestre, y entonces las dos regiones de máxima intensidad pueden ser subregiones de toda una región de flujo del mismo signo, y por lo tanto el punto que definiría al polo como una resultante estará aproximadamente dentro de un arco máximo que une los centros de estas dos regiones de máxima intensidad, esta suposición se confirma con la carta de la Proyección Estereográfica Polar para 1975, publicada también por The Defense Mapping Agency Hydrographic Center. En cambio en esta carta para el hemisferio sur se ve que el punto definido como polo magnético sí está contenido en la región de máxima intensidad vertical.

Se ve que las líneas de fuerza del campo magnético se comportan como un haz más o menos compacto en la zona de flujo (polo sur magnético), en cambio en la zona de inmersión (hemisferio norte) las líneas llegan muy dispersas.

3.2 Cuadripolo. Desde luego que pueden existir dipolos colocados de tal manera que formen estructuras cuadripolares como se han definido en el capítulo I, y cuyo tratamiento ahí se vió; pero además se pueden tener estructuras de cuadripolo en forma indirecta, por ejemplo: Sean dos dipolos contenidos en forma arbitraria dentro de la esfera terrestre, si éstos se proyectan en el plano ecuatorial magnético,



es decir en el plano XCY, los momentos de sus proyecciones se representarán por los vectores \bar{M}_1 y \bar{M}'_1 . Con estos vectores puede ocurrir que:

$$\bar{M}_1 \cdot \bar{M}'_1 \geq 0 \quad \text{ó} \quad \bar{M}_1 \cdot \bar{M}'_1 < 0$$

En el primer caso el potencial debido a la presencia de la distribución $S_0 = \{\bar{M}_1, \bar{M}'_1\}$ puede expresarse a partir de derivadas de primer orden, de manera que si se tiene previamente calculado el potencial V_1 del campo magnético dipolar, el potencial de S_0 estará contenido en V_1 .

En el segundo caso para calcular el potencial debido a estas dos proyecciones, se sugiere lo siguiente:

Sean $\bar{M}_1 = \overline{AB}$ y $\bar{M}'_1 = \overline{CD}$, si el vector \overline{CD} se proyecta sobre \overline{AB} (ver figura 14) se tiene que:

$$\overline{CD} = \overline{CS} + \overline{SD}$$

y
$$\overline{AB} = \overline{AR} + \overline{RB}$$

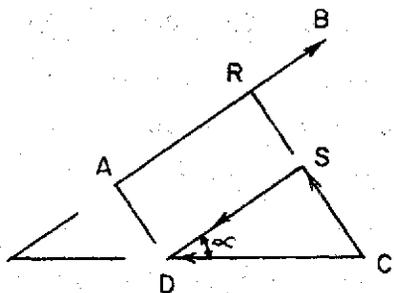


Fig 14

Por la propiedad aditiva para el potencial, se llega a que el potencial de la distribución S_0 es igual al potencial del dipolo de momento \overline{RB} más el de \overline{CS} , que son vectores perpendiculares entre sí y lo cual está contemplado en el caso anterior, más el potencial de los dipolos de momento \overline{AR} y \overline{SD} que son paralelos, de sentido opuesto y de módulos iguales, y que como se vió en el capítulo I, éstos definen un cuadrípulo. De esta forma se tiene, que el potencial de la distribución S_0 es igual al potencial de los mencionados dipolos perpendiculares entre sí, más el potencial de un cuadrípulo contenido en el plano ecuatorial magnético.

Se ve entonces que aunque la mayor parte de los dipolos contenidos dentro de la esfera terrestre se orientan, como ya se dijo en la dirección norte-sur, algunos se orientarán de tal manera que cuando se proyecten sobre el plano ecuatorial magnético formarán cuadrípolos y el potencial de cada uno de estos cuadrípolos contiene (como se vió en la ecuación (1.13)) las derivadas de orden dos: f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} ; entonces, haciendo uso de la propiedad aditiva del potencial, se obtiene que la suma de los potenciales de estos cuadrípolos está dada por el potencial de un solo cuadrípulo contenido en el plano ecuatorial y generado como resultante de todos ellos, en forma similar a como ocurrió en el caso del dipolo.

Se ve que la expresión matricial:

$$V_2 = \frac{1}{2!} (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}) \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix}$$

se puede escribir en la forma:

$$V_2 = \frac{1}{2!} M_2 (\lambda_{1x} \lambda_{1y} \lambda_{1z}) \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{2x} \\ \lambda_{2y} \\ \lambda_{2z} \end{bmatrix}$$

donde $\bar{\lambda}_1 = (\lambda_{1x}, \lambda_{1y}, \lambda_{1z})$ y $\bar{\lambda}_2 = (\lambda_{2x}, \lambda_{2y}, \lambda_{2z})$ son vectores unitarios en las direcciones de \bar{u} y \bar{v} respectivamente y el módulo del vector que representa al momento de orden dos es $M_2 = |\bar{u}| |\bar{v}|$.

En general para los multipolos de orden superior se va a poder escribir:

$$V_n = \frac{1}{n!} M_n \bar{\lambda}_1 A_n \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \dots \bar{\lambda}_n$$

En esta forma, un cuadripolo en el que sus aristas forman un paralelogramo se puede llevar a una expresión en que

las aristas correspondientes formen un rombo y su momento estará representado por $M_2 = 2 m a^2$.

Regresando el cuadripolo que se está tratando en el caso magnético terrestre (el cuadripolo que se obtiene como resultante de los cuadripolos proyectados sobre el plano ecuatorial y contenido también en este plano) cuyas aristas forman un rectángulo, se puede llevar a una expresión en que las aristas correspondientes formen un cuadrado. Entonces se le puede hacer corresponder la siguiente estructura en el plano XCY: + m situada en $Q_1 (h, h, 0)$, - m en $Q_2 (0, 2h, 0)$, + m en $Q_3 (-h, h, 0)$ y - m en C $(0, 0, 0)$ como se vió cuando se seleccionó el sistema de ejes propios, el potencial producido por este cuadripolo, medido desde un observador colocado en P (x, y, z) es:

$$V_2 = \frac{m}{2!} (2h^2 f_{xx} - 2h^2 f_{yy}) + \frac{m}{4!} (2h^4 f_{x^4} - 2h^4 f_{y^4}) + \frac{m}{6!} (2h^6 f_{x^6} - 2h^6 f_{y^6}) + \dots$$

donde el primer término del desarrollo corresponde, como en el caso del dipolo, al término invariante V_2 del potencial de cuadripolo y los términos siguientes a potenciales de multipolos matemáticos representados por $\Delta V_2, \Delta^2 V_2, \dots$. Obsérvese que en este caso $\Delta V_2, \Delta^3 V_2$ y en general $\Delta^{(2n+1)} V_2$ son cero.

En forma similar al caso del dipolo, el término invariante V_2 corresponde al potencial del modelo de cuádrupolo como tradicionalmente se presenta en los tratados de física, y en la ecuación (2.1) está incluido en el término $n=2$. Los términos $\Delta^n V_2$ están incluidos en la ecuación (2.1) cuando $n=3,4,\dots$

Por otra parte, es de esperar que en la colección de dipolos distribuidos arbitrariamente, habrá algunos que se orienten de tal forma que su potencial también esté representado a partir de segundas derivadas y que su estructura no corresponda a la de un cuádrupolo como se ha definido anteriormente. Por ejemplo, sean:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= (0, h, 0) , & \bar{M}'_1 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} h, -\frac{h}{2}, 0\right) \quad \text{y} \\ \bar{M}''_1 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} h, -\frac{h}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

los vectores que representan el momento de tres dipolos contenidos en el plano ecuatorial magnético (ver figura 15), esta colección de dipolos es equivalente a la siguiente distribución de carga:

$$\begin{aligned} & \{ + m\epsilon Q_1 (0, h, 0), + m\epsilon Q_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} h, -\frac{h}{2}, 0\right), m\epsilon Q_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} h, -\frac{h}{2}, 0\right), \\ & - 3 m\epsilon C (0, 0, 0) \} \end{aligned}$$

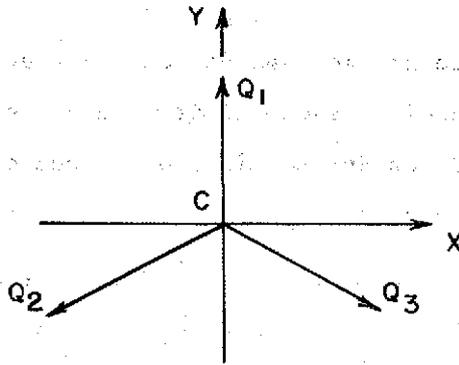


Fig.15

El potencial de esta estructura está dado por la expresión:

$$V_2 = \frac{m}{2!} \left(\frac{3h^2}{2} f_{xx} + \frac{3h^2}{2} f_{yy} \right) - \frac{m}{3!} \left(-\frac{9h^3}{4} f_{x^2y} + \frac{3h^3}{4} f_{y^3} \right) + \dots$$

Nótese que en el desarrollo, el término correspondiente a segundas derivadas es una expresión diferencial elíptica. Con esta expresión y las anteriores (1.9) y (1.10) se ve que existe isomorfismo para las tres posibilidades, entre las expresiones diferenciales homogéneas de segundo orden, que pueden presentarse en la ecuación del potencial que se

está tratando, y las formas cuadráticas de la geometría en su forma canónica.

Observando la gráfica del disco solar se aprecian, además de la polarización predominante en la dirección del eje de rotación, regiones con polarización local en las que la distribución de carga es de geometría muy irregular, y que podrían dar origen a estructuras multipolares como la que se acaba de mencionar. Esto nos sugiere que en la Tierra puede ocurrir algo similar, y en efecto, si se observan las cartas magnéticas mundiales se encuentra también que además de la polarización norte-sur del planeta, existen anomalías locales que pueden dar origen a estructuras como la anterior y cuyo potencial estaría incluido en el término de segundas derivadas ($n=2$) de la ecuación de Gauss.

A continuación se presenta otro ejemplo: sean $\vec{M}_1 = (h,0,0)$, $\vec{M}_2 = (0,h,0)$, $\vec{M}_3 = (-h,0,0)$ y $\vec{M}_4 = (0,-h,0)$ vectores que representan el momento de cuatro dipolos, lo cual equivale a tener la distribución de carga:

$$\begin{aligned} & (+ m\epsilon Q_1 (h,0,0), + m\epsilon Q_2 (0,h,0), + m\epsilon Q_3 (-h,0,0), \\ & + m\epsilon Q_4 (0,-h,0), - 4 m\epsilon C (0,0,0) \end{aligned}$$

y cuyo potencial está dado por:

$$V_2 = \frac{m}{2!} (2h^2f_{xx} + 2h^2f_{yy}) + \frac{m}{4!} (2h^4f_{x^4} + 2h^4f_{y^4}) + \dots$$

También en este caso se ve que el potencial de la estructura está expresado a partir de segundas derivadas, pero de la observación tanto de la gráfica del disco solar como de las cartas magnéticas planetarias se ve que en la naturaleza sería difícil encontrar una estructura tan simétrica como ésta, puesto que la distribución de carga magnética es de geometría muy irregular en ambos casos, sin embargo puede ocurrir que con las proyecciones que se tienen sobre el plano ecuatorial magnético si se formen estructuras aproximadas a ésta.

Desde luego que los coeficientes g_j^i , h_j^i que son los que nos dan información de lo observado sobre la superficie, nos están señalando que esa estructura multipolar que da lugar a una forma especial de polarización en el plano ecuatorial, no se va a detener en el cuadripolo del que se está hablando, sino que habrá otras formas en las que se distribuyan los dipolos para producir estructuras de octipolo y otras de orden superior.

De lo visto en las secciones (3.1) y (3.2) se llega a que el potencial medido desde un observador P (x,y,z) debido a la presencia de una estructura dipolar o cuadripolar es respectivamente:

$$V_1 = V_1 + \Delta V_1 + \Delta^2 V_1 + \Delta^3 V_1 + \dots$$

y

$$V_2 = V_2 + \Delta V_2 + \Delta^2 V_2 + \dots$$

donde $\Delta V_1, \Delta^2 V_1, \dots, \Delta V_2, \dots$ se definieron como potenciales de multipolos matemáticos y V_1, V_2 son la parte invariante de dipolo y cuadripolo respectivamente. Si se suman estas dos expresiones y se asocian los términos de derivadas del mismo orden se tiene:

$$V_1 + V_2 = V_1 + (V_2 + \Delta V_1) + \dots$$

Obsérvese que en la ecuación de Gauss escrita en la forma:

$$(1.19) \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n f}{\partial z^k \partial y^j \partial x^i} ; a_n^m, b_n^m \right\}$$

el término $n=1$ corresponde a V_1 y el $n=2$ a $\bar{V}_2 = (V_2 + \Delta V_1)$, en general se va a expresar para cualquier n :

$$\bar{V}_n = \sum_{m=0}^n \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n f}{\partial z^k \partial y^j \partial x^i} ; a_n^m, b_n^m \right\}$$

De esta manera el potencial V puede interpretarse, con el mismo resultado, de las dos formas siguientes:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n \quad \text{ó bien} \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$$

en que cada V_n si es una serie.

3.3 Octipolo. Como se acaba de ver, el término $n=3$ de la ecuación (1.19) está dado en la forma:

$$(3.2) \quad \bar{V}_3 = V_3 + \Delta V_2 + \Delta^2 V_1,$$

expresión en la cual el término V_3 es la parte invariante del potencial de un multipolo de orden tres, y los términos $\Delta^2 V_1$ y ΔV_2 corresponden a potenciales de multipolos matemáticos cuando $n=1$ y $n=2$ respectivamente, como se vió en la sección (2.3) del capítulo II.

Habitualmente los magnetistas que se ocupan de este problema toman \bar{V} como potencial de una sola estructura de multipolo, pero por lo que se ha visto, la estructura de octipolo habría que buscarla en la parte invariante V_3 , ya que los otros términos $\Delta^2 V_1$ y ΔV_2 son potenciales de multipolos

matemáticos que inclusive se modifican con la selección del sistema de referencia, no así V_3 , y a esta parte invariante se refiere esta sección.

En forma similar a los casos de dipolo y cuadripolo, a esta parte invariante V_3 , se le puede hacer corresponder el modelo físico de octipolo definido como una distribución de ocho cargas colocadas en los vértices de un paralelepípedo (sección 1.4) y en el cual tres de sus aristas que convergen en un vértice, definen los ejes de la distribución octipolar.

Se observa que escribiendo esa parte invariante en la forma matricial:

$$(3.3) \quad V_3 = \frac{1}{3!} \bar{u}_3 A_3 \bar{v}'_3 \bar{w}'_3$$

esta expresión no corresponde a una sola estructura octipolar, ya que si a dos de los vectores laterales se les multiplica por menos uno, el valor de V_3 no se altera pero físicamente se obtiene un octipolo diferente, es decir existen cuatro estructuras de octipolos diferentes cuyo potencial es la expresión (3.3).

En el caso del cuadripolo sucede algo similar, el valor de la expresión $V_2 = \frac{1}{2!} \bar{u}_2 A_2 \bar{v}'_2$ corresponde a dos posibles

estructuras, la que se escogió en la sección (3.2) es porque uno de los ejes, por ejemplo el \overline{OH}_1 , tiene aproximadamente la misma dirección y movimiento que \overline{OC} como puede verse en la tabla XIII, (donde λ_1 es el coseno director de \overline{OH}_1 y λ es una coordenada esférica del centro C referido al sistema geográfico), lo cual pudiera estar asociado a algún fenómeno físico aún no determinado.

TABLA XIII.

Epoca *	λ_1	λ
1835	178°19'	188°22'
1845	177°35'	181°12'
1885	168°10'	168°35'
1922	161°14'	161°19'
1945	158°14'	156°30'
1955	153°48'	150°49'
1960	152°43'	149°55'
1965	152°05'	148°42'
1970	153°28'	147°47'
1975	151°52'	148°18'

Así por ejemplo, en el caso del potencial de cuadrípolo referido a sus ejes (Maxwell, 1885) y dado por:

* Chargoy y Chargoy, 1976-1977.

$$V_2 = \frac{M}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos u_1 \cos u_2 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right)$$

donde u_1 y u_2 son los ángulos que forma el radio vector \overline{OP} del observador con los ejes del cuadrípulo \overline{OH}_1 y \overline{OH}_2 respectivamente y α es el ángulo formado entre \overline{OH}_1 y \overline{OH}_2 , si u_1 y u_2 se sustituyeran por $\pi - u_1$ y $\pi - u_2$, el potencial que se obtendría sería el mismo. Con ésto se ve que el potencial de cuadrípulo referido a sus propios ejes guarda simetría con respecto a los planos coordenados, de manera que dado un valor del potencial V_2 éste puede atribuirse a ocho puntos diferentes.

En forma similar, si en la ecuación del potencial de octípulo, referida también a sus ejes propios, dada por Maxwell:

$$V_3 = \frac{M}{2r^4} \left[5 \cos u_1 \cos u_2 \cos u_3 - (\cos u_1 \cos \alpha_{23} + \cos u_2 \cos \alpha_{31} + \cos u_3 \cos \alpha_{12}) \right]$$

se sustituyera dos cualesquiera de los ángulos u_i , $i=1,2,3$ por $\pi - u_i$, el potencial que se obtendría sería el mismo.

u_i son los ángulos que se forman entre \overline{OP} , radio vector del observador, y los ejes \overline{OH}_i del octípulo ($i=1,2,3$),

los tres ángulos que forman entre sí los ejes \overline{OH}_i se denotan por α_{12} , α_{23} , α_{31} .

Por otra parte, así como ocurrió en el caso del cuadrípulo, pueden existir estructuras compuestas por dipolos orientados de tal forma, que su potencial esté expresado a partir de terceras derivadas y que estas estructuras no correspondan a la definición que se ha dado de octipolo, a continuación se presenta un ejemplo:

Sean $\overline{M}_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1)h, \frac{1}{2}h, 0$, $\overline{M}'_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1)h, -\frac{1}{2}h, 0$ y $\overline{M}''_1 = (\sqrt{3}h, 0, 0)$ vectores que representan los momentos de tres dipolos contenidos en el plano ecuatorial magnético (ver figura 16). Tener esta colección de dipolos es equivalente a tener la siguiente distribución de carga:

$$\begin{aligned} & -m\epsilon Q_1(h, 0, 0), +m\epsilon Q_2(\frac{1}{2}\sqrt{3}h, \frac{1}{2}h, 0), -m\epsilon Q_3(-\frac{1}{2}\sqrt{3}h, \frac{1}{2}h, 0), \\ & +m\epsilon Q_4(-h, 0, 0), -m\epsilon Q_5(-\frac{1}{2}\sqrt{3}h, -\frac{1}{2}h, 0), +m\epsilon Q_6(\frac{1}{2}\sqrt{3}h, -\frac{1}{2}h, 0) \end{aligned}$$

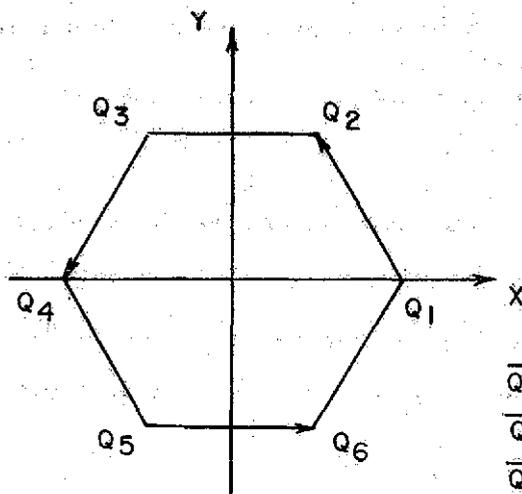


Fig 16

El potencial de esta distribución que se define como hexapolo está expresado como sigue:

$$V_{6p} = -\frac{m}{3!} \left(-\frac{3}{2} h^3 f_{x^3} + \frac{9}{2} h^3 f_{xy^2} \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{r^4} \left[6p g_3^3 \cos 3\lambda P_3^3 \right] + \dots$$

donde $6p g_3^3 = \frac{\sqrt{10}}{4} M_3$ y $M_3 = 6 m h^3$

Entonces como se ve, en la parte invariante V_3 del potencial de una estructura multipolar, puede estar incluida la parte invariante de una estructura de hexapolo.

Desde luego no se excluye la posibilidad de que existan otras estructuras multipolares, cuyo potencial esté expresado también a partir de terceras derivadas y que estén incluidas en V_3 , como ocurre en el cuadripolo.

Cuando la ecuación del potencial geomagnético está referida al sistema de ejes propios (definido en el capítulo I) la información sobre las anomalías magnéticas observadas en las cartas de isolíneas, pueden buscarse a partir del término de orden tres (óctipolo) en adelante, ya que como se vió en el capítulo anterior, el término correspondiente a dipolo da simetría axial y el correspondiente a cuadripolo, simetría ecuatorial.

3.4 Otras consideraciones. En todo lo expuesto anterior - mente se ve, que la ecuación de Gauss del potencial (dada en cualquiera de las formas (1.1), (1.19) ó (2.1)) no es un desarrollo en series como tradicionalmente se ha considerado, sino que es una suma de series $V = \sum V_i$ correspondiendo cada una de las series al potencial de un multipolo y en las cuales, el primer término V_i es la parte invariante del potencial correspondiente. Por ésto no se ve una forma de establecer la convergencia en el desarrollo de $V = \sum \bar{V}_i$.

En el sistema geográfico los valores absolutos medios hasta el término $n=8$ y para la época 1975 son:

$$|\bar{V}_n| = 1772, 198, 112, 49, 17, 8, 3, 1 \text{ unidades}$$

$$1 \text{ unidad} = 10\gamma = 10^{-4} \text{ oersteds}$$

Si se quitaran del planeta los elementos que producen la polarización dada por el dipolo, posteriormente se quitarán los que producen la polarización dada por el cuadripolo y así se continuará, se ve que se enrarecería la distribución $\{m_i\}$ de puntos de los cuales fluyen líneas del campo magnético, por lo cual se ve que la sucesión $|\bar{V}_n|$ también se va empequeñeciendo. Puede llegar un momento en que para cierta n , la existencia de multipolos ya no se de

tecte y los términos para la n de este orden en adelante sólo correspondan a potenciales de multipolos matemáticos, ésto puede ocurrir a partir de n no muy grande; burdamente es lo que se hace cuando se toma como potencial geomagnético el valor:

$$V = \frac{1}{r^2} \left[g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos\lambda + h_1^1 \operatorname{sen}\lambda) P_1^1 \right] + \frac{1}{r^3} \left[g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cos\lambda + h_2^1 \operatorname{sen}\lambda) P_2^1 + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2 \right]$$

La variación secular de la parte invariante del dipolo observada en la tabla II, sugiere que el cambio también se puede observar en los términos de multipolos matemáticos $\Delta V_1, \Delta^2 V_1, \dots$ y en efecto, calculados éstos para las épocas 1955, 1965 y 1975 se tiene:

TABLA XIV.

Epoca	$ \Delta V_1 $	$ \Delta^2 V_1 $
1955	166	14
1965	170	14
1975	178	15

Del término de segundas derivadas se dió la parte invariante en la tabla XIII del capítulo II, y a continuación se da la tabla de los valores medios de ΔV_2 :

TABLA XV

Epoca	$ \Delta V_2 $
1955	62
1965	65
1975	70

El valor medio cuadrático de la serie V_1 correspondiente al potencial del dipolo y también el de V_2 correspondiente al potencial de cuadrupolo, se pueden deducir fácilmente de las tablas anteriores, por la propiedad de ortogonalidad en los términos que contienen a λ y θ .

En todo lo que se ha tratado, se han considerado modelos de multipolos observables en laboratorio, producidos por distribuciones de carga magnética $\{m_i\}$ con $\sum_i m_i = 0$, que favorecen la investigación de la función potencial en forma estática.

3.5. Campo electromagnético. Considérese ahora el conocido fenómeno de un conductor circular por el que pasa una corriente continua i tal, que genera un campo magnético de forma toroidal debido al fenómeno Ampere, si por el punto medio de

la circunferencia que describe el conductor se traza un plano normal al círculo que contiene a dicho conductor, en ese plano normal se tendrá lo siguiente: (ver figura 17) por el punto Q la corriente del conductor se sumerge y por el punto Q', a la izquierda de Q, la corriente emerge.

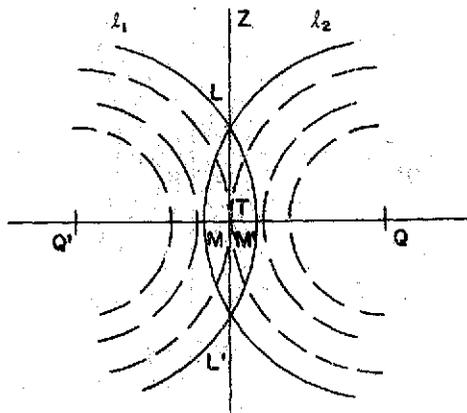


Fig 17

Si no se deformaran las líneas l_1 y l_2 del campo magnético inducido, éstas se cortarían en los puntos L y L' como se ve en la figura, de manera que se detectaría como si las líneas fluyeran en L y se sumergieran en L' estableciéndose así un similitud con un dipolo.

Sin embargo, experimentalmente se ve que la familia de curvas $\{l_1\}$, del campo magnético inducido, se deforma de tal manera que las distancias, \overline{QL} y $\overline{Q'L}$ se acortan sin que se llegue a producir la intersección de l_1 y l_2 en los puntos L y L'. En la deformación, el valor mínimo que obtienen

las distancias \overline{QL} y $\overline{Q'L}$ es \overline{MQ} y $\overline{M'Q'}$ respectivamente (ver figura 18), M y M' localizadas sobre el diámetro $\overline{QQ'}$ y equidistantes del eje Z, que en esta forma se va a constituir en eje de simetría del toro.

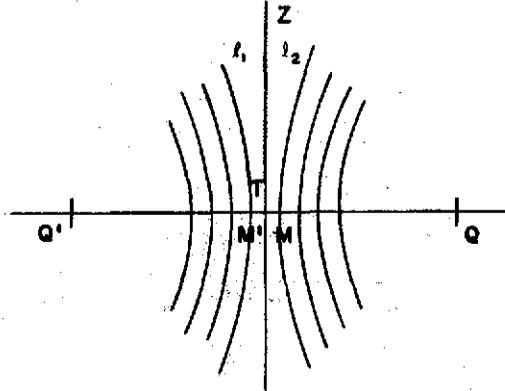


Fig.18

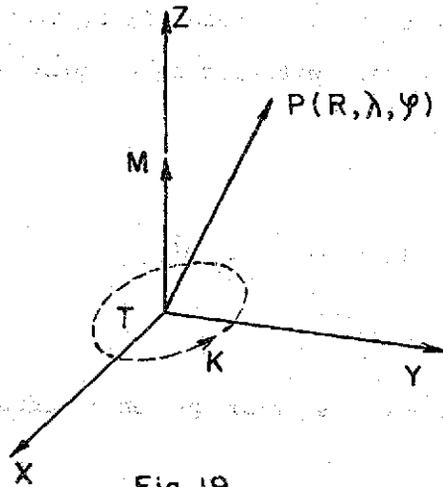
El similitud con un dipolo y más precisamente con un punto singular de orden uno, se conserva como se dijo al analizar la figura 17, y el vector M correspondiente al momento de ese dipolo estará en la dirección del eje Z.

Es bien sabido que un observador colocado en P (R, λ, ϕ) como en la figura 19, detectaría una intensidad de campo generada por el conductor K que se puede derivar del potencial:

$$V = \frac{M \cos \phi}{R^2}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN





Supóngase que en el caso terrestre se tuviera este fenómeno ubicado de tal manera que el conductor K estuviera contenido en el plano ecuatorial geomagnético, el centro T coincidiera con el centro C y el vector \vec{M} coincidiendo con el eje del dipolo, entonces el potencial mencionado está dado por la ecuación:

$$V = \frac{M \cos \theta}{r^2}$$

en que el observador en P tiene coordenadas (r, λ, θ) .

Obsérvese que aquí se está tomando solamente la parte invariante del potencial de un dipolo, claro que se supone que $\Delta^n V_1 = 0$ para toda n . Sin embargo si el observador tuviera como sistema de referencia al sistema geográfico como comúnmente se usa, entonces la ecuación del potencial tomaría la forma:

$$(3.4) \quad V_1 = V_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^n V_1$$

Se tiene que señalar que en la ecuación (3.4) la parte invariante:

$$(3.5) \quad V_1 = \frac{M \cos\theta}{r^2}$$

difiere de la parte invariante de la ecuación del potencial de un dipolo, como se ha visto en la sección 3.1, en que la parte invariante de ese dipolo es: $V_1 = \frac{m \ell \cos\theta}{r^2}$.

Esta última expresión proviene de considerar un desarrollo de Taylor en el que V_1 implica primeras derivadas de la función $f = \frac{1}{r}$, en cambio en la ecuación (3.5) se está considerando la presencia de un momento \bar{M} al que se le va a detectar a través de la función $f = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$ de tal manera que:

$$V_1 = M \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{Mx_0}{1!} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{My_0}{1!} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{Mz_0}{1!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots$$

(x_0, y_0, z_0) son las coordenadas del origen O en el sistema propio.

Como se ve, es aplicable todo lo visto respecto al potencial de dipolo que se vió en el primer capítulo.

Si se tuviera una colección de momentos $\{M_i\}$ generados por corrientes en el interior del planeta, se podría aplicar todo lo visto en la sección (3.1) sustituyendo la función

$f = \frac{1}{r}$ por la función $f = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{1}{r} \right)$ considerando el vector $\bar{M}_i = |\bar{M}_i| \bar{u}_i$, \bar{u}_i es un vector unitario en la dirección de \bar{M}_i , como fué tratado en la sección (2.2).

Si el sistema de coordenadas es el geográfico, en el desarrollo de $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta^n V_i$ se ve fácilmente que cada término de orden n contiene al factor $\frac{1}{n!} (\overline{OC})^n$, de tal manera que si el radio a de la Tierra se considera $a=1$, $\overline{OC} < \frac{1}{12}$, con lo que el desarrollo de V resulta muy convergente.

Se recuerda también que cuando se está en el sistema de referencia con centro en C, la coordenada \bar{r} del observador es:

$$\overline{r}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2(\overline{OP})(\overline{OC}) \cos \phi$$

donde \overline{OP} es el radio de la Tierra y coordenada del observador, \overline{OC} la distancia del centro C al origen O y ϕ el ángulo entre \overline{OP} y \overline{OC} .

También se observa que el artificio de masa reducida, introducido en el capítulo II para obtener el valor de V en unidades de trabajo, se sigue conservando en todo el capítulo III.

APENDICE

Fórmulas más usuales para la parte invariante del potencial de:

a) Dipolo

- 1) Cuando está referido a un sistema de coordenadas cartesianas:

$$V_1 = \frac{1}{1!} (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}) \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \frac{1}{1!} |\bar{M}_1| \bar{\lambda}_1 A_1$$

λ_1 vector unitario en la dirección de \bar{u}_1 .

- 2) Cuando está referido a un sistema de coordenadas esféricas:

$$V_1 = \frac{1}{r^2} \left[a_1^0 P_1^0 + (a_1^1 \cos \lambda + b_1^1 \operatorname{sen} \lambda) P_1^1 \right]$$

- 3) Cuando está referido al eje OZ:

$$V_1 = \frac{m \ell \cos \phi}{r^2}$$

donde $\ell = \overline{Q_1 Q_2}$

b) Cuadripolo

- 1) Cuando está referido a un sistema de coordenadas cartesianas:

$$V_2 = \frac{1}{2!} (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}) \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2!} |\bar{M}_2| \bar{\lambda}_1 A_2 \bar{\lambda}_2$$

$\bar{\lambda}_1$ y $\bar{\lambda}_2$ vectores unitarios en las direcciones de \bar{u}_2 y v_2 respectivamente.

2) Cuando está referido a un sistema de coordenadas esféricas:

$$V_2 = \frac{1}{r^3} \left[a_2^0 p_2^0 + (a_2^1 \cos \lambda + b_2^1 \text{sen} \lambda) p_2^1 + (a_2^2 \cos 2\lambda + b_2^2 \text{sen} 2\lambda) p_2^2 \right]$$

3) Cuando está referido a sus ejes:

$$V = \frac{M}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos u_1 \cos u_2 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right)$$

c) Octipolo

1) Cuando está referido a un sistema de coordenadas cartesianas:

$$V_3 = \frac{1}{3!} \bar{u}_3 A_3 \bar{v}_3 \bar{w}_3 = \frac{1}{3!} |\bar{M}_3| \bar{\lambda}_1 A_3 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3$$

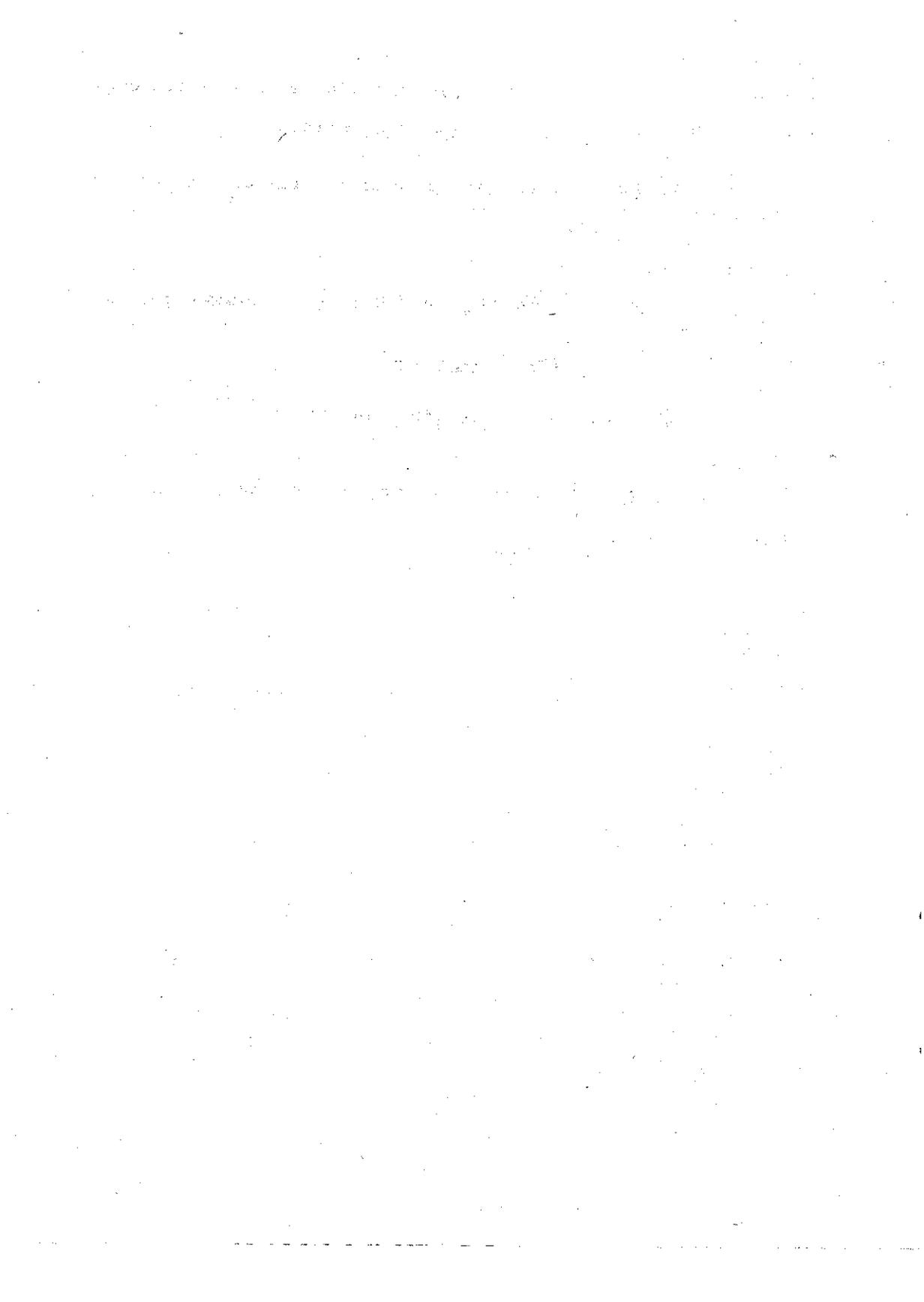
$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ vectores unitarios en las direcciones de \bar{u}_3, \bar{v}_3 y \bar{w}_3 respectivamente.

2) Cuando está referido a un sistema de coordenadas esféricas:

$$\bar{V}_3 = \frac{1}{r} a_3^0 P_3^0 + \left[(a_3^1 \cos \lambda + b_3^1 \operatorname{sen} \lambda) P_3^1 + a_3^2 \cos 2\lambda + b_3^2 \operatorname{sen} 2\lambda \right] P_3^2 + (a_3^3 \cos 3\lambda + b_3^3 \operatorname{sen} 3\lambda) P_3^3$$

3) Cuando está referido a sus ejes:

$$V_3 = \frac{M}{2r^4} \left[5 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - (\cos \alpha_1 \cos \alpha_{23} + \cos \alpha_2 \cos \alpha_{31} + \cos \alpha_3 \cos \alpha_{12}) \right]$$



BIBLIOGRAFIA

- * Afanásieva, V.1, 1946, Terr. Mag. 51, 26 tabla 6.
- * Barraclough, D.R. et al, 1975. A model of the Geomagnetic field Epoch 1975, Geophys. j. R. Astr. Soc. 43, p.645-659.
- Bartels, J. 1936. The eccentric dipole approximating the earth's magnetic field. Terr. mag. vol. 41 (3), p. 225-250.
- Chapman, S. and J. Bartels, 1940. Geomagnetism, Oxford, Clarendon Press.
- Chargoy, A., 1960. Substituciones de distribuciones. Una aplicación de las series de Taylor. An. Inst. Geofís., UNAM, vol. 6, p. 1-54.
- Chargoy, A., 1971. El artificio de Taylor aplicado al potencial Gravimétrico, al Magnético y a Momentos en general, An. Inst. Geofís., UNAM, vol. 17, p. 7-49.
- Chargoy, A. y L. Chargoy, 1974. Análisis de los términos de primero y segundo orden de la Ecuación de Gauss hasta el año 1970, An. Inst. Geofís., UNAM, vol. 20, p. 9-20.
- Chargoy, A. y L. Chargoy, 1976-1977. Estudio de la estructura de los términos del potencial Geomagnético. An. Inst. Geofís., UNAM, vol. 22-23, p. 167-202.
- * Finch, H.F. y B.R. Leaton, 1957, Month Not. of the Royal Astronomical Society. Geophysical Supplement, vol. 7 (6), p. 314-317.
- Frank, N.H., 1940. Introduction to electricity and Optics, New York and London, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- * Hurwitz L., E.B. Fabiano and N.W. Peddie, 1974. A model of the Geomagnetic field for 1970. Jour. of Geophys. Research, vol. 79 (11), p. 1716-1717.
- * IGRF; Fabiano, E.B. and N. W. Peddie, 1969. Grid Values of Total Magnetic Intensity IGRF-1965, essa, Technical Report, § GS38, p. 1-55.
- Livingston, W.C., 1966. Magnetic fields on the Quiet Sun. Scient. Amer., 215 (5); p. 54-62.
- Maxwell, J.C., 1885. Traité de Electricité et de Magnetism, Paris, Gauthier Villars, Tomo I.
- Slater, J.C. and N.H. Frank, 1947. Electromagnetism, New York and London, McGraw-Hill Book Company, Inc.

Smith, E. and S. Gulkis, 1979. The magnetic field of Júpiter: a comparison of radio astronomy and spacecraft observations. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 7, p. 385-415.

Stratton, J.A., 1941. Electromagnetic Theory, New York and London, McGraw-Hill Book Company, Inc.

Umwow, N., 1904. Die construction des geometrischen bildes des Gauss'schen potentials, als methode zur erforschung der gesetze des erdmagnetismus. Terr. Mag. vol. 9 (3), p. 105-112.