

00362

3

Lej.

16



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

**ANALISIS DE SISTEMAS
USANDO EL METODO
DE MAXIMA VEROSIMILITUD**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
(FISICA)

ROBERTO SAYAVEDRA SOTO

FACULTAD DE CIENCIAS

1981

TESIS CON
CITA EN ANEXOS



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AL DR. ARTURO NOYOLA ISGLEAS Y
AL CENTRO DE INSTRUMENTOS UNAM

G R A C I A S.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A MIS PADRES:

OFELIA Y ROBERTO

A MIS HERMANOS:

SILVIA Y LUIS

A MI ESPOSA:

JULIETA

Y A MI HIJO:

JULIO

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

I N D I C E

Introducción	1
CAPITULO I	
El Método de Máxima Verosimilitud	
1.1 Introducción	4
1.2 Definición de Verosimilitud	5
1.3 El Soporte	8
1.4 Máximo Soporte: El Método de Máxima Verosimilitud	11
1.5 La Teoría de Control y el Método de Máxima Verosimilitud	14
1.6 Un caso general y el Método de Máxima Verosimilitud	17
CAPITULO II	
Ejemplo de aplicación del MMV para obtener los parámetros del modelo de un sistema.	
2.1 Problema: un circuito RC	20
2.2 Construcción de la función de Soporte	21
2.3 Obtención de los valores evaluados	25
CAPITULO III	
Algoritmo para probar modelos de sistemas y su utilización.	
3.1 La prueba χ^2_{v-1} y el MMV	31
3.2 Algoritmo para analizar modelos de sistemas	35
Conclusiones	48
Apéndice A1	50
Apéndice A2	56
Bibliografía	59

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

I N T R O D U C C I O N

El método de verosimilitud ayudó a la formalización de pruebas de hipótesis introduciendo una escala relativa a la cual se le llamó el Soporte, y así se habla de que una hipótesis A respecto a una hipótesis B tiene más soporte y es por lo tanto más factible. Pero cuando se tiene un continuo de hipótesis, encontrar la de mayor soporte respecto a las demás fue lo que generó el Método de Máxima Verosimilitud (MMV).

El MMV encontró pronto una gran aplicación en todas las teorías en las que la estimación de parámetros es de fundamental importancia, sobre todo en esta época en que las computadoras se usan para resolver problemas laboriosos. Dentro de las teorías que utilizan el MMV están: la Teoría de Control, la Teoría de Estimación y ciencias básicas como la Termodinámica.

La identificación de sistemas dinámicos dentro de la Teoría de Control Estocástico (Åstrom & Bohlin, 1965) fue uno de los primeros trabajos que marcaron el empleo del MMV como herramienta en este tipo de labores. En la actualidad el empleo de este método es muy variado. Son ejemplos: el cálculo de parámetros en sistemas adaptivos (Repperger & Junker, 1975), la estimación de parámetros en las aplicaciones del Filtro de

Kalman (Mac Aulay, 1978; Bohlin, 1977; Arthur & Doming, 1976).
Y también en las ciencias básicas como la Termodinámica (Fabries & Renon, 1975).

En este trabajo se utiliza el MMV, con las modificaciones que se proponen en el artículo de Fabries & Renon, para implementar un algoritmo, junto con la prueba de la distribución de χ^2_{y-1} , que analice sistemas. Para ejemplificarlo se estudian datos experimentales, bajo diferentes circunstancias, de circuitos RC. Se considera como una nueva aplicación del MMV ya que, al emplearlo como un discriminante en el ajuste de datos a modelos matemáticos, se puede cuantificar en que medida el modelo del sistema sigue comportándose acorde a los datos experimentales. La implementación de un algoritmo de este tipo intenta dar solución a los problemas que enfrentan la Instrumentación y el Control de Procesos.

El tema se desarrolla en cuatro capítulos. El primero se trata sobre la teoría referente al Método del Soporte para pruebas de hipótesis. En el segundo capítulo se presenta un problema, al cual se le aplica el MMV para estimar los parámetros del modelo. En el capítulo tercero se habla sobre las pruebas de ajustes de curvas y el MMV. Se tratan dos ejemplos, en los que se prueban los datos ajustados al modelo haciendo uso del algoritmo desarrollado en este trabajo. Se hace notar también, la importancia del conocimiento que tenga el experimentador en su campo para dar la última opinión. Se termina



con un capítulo de conclusiones y un apéndice donde se muestra el programa para computadora, el cual se empleó para analizar los ejemplos que se usaron a lo largo de este trabajo.

CAPITULO I

"EL METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD"

1.1 Introducción:

Desde 1921 hasta su muerte, Fisher se preocupó por un problema que existe en el método científico: la prueba de hipótesis. Es decir, el problema de valorar hipótesis rivales a la luz de la observación y de los datos experimentales. Al método que propuso Fisher le llamó Verosimilitud (likelihood) y está basado en los trabajos de inferencia estadística hechos por Laplace y Bayes (Edwards, 1976).

Para poder hacer inferencias inductivas sobre las hipótesis son necesarios los conceptos de modelo estadístico e hipótesis estadística. En su forma mas general, una hipótesis estadística es una afirmación que se hace sobre una función de densidad de una variable aleatoria. La función de densidad es lo que se conoce como modelo estadístico o simplemente modelo, éste no está en cuestión y se considera como dado (Hoel, 1971).

Una hipótesis estadística son los atributos de valores particulares de los parámetros desconocidos del modelo. O di



cho de otra forma, son cualidades particulares de entidades desconocidas sujetas a una investigación.

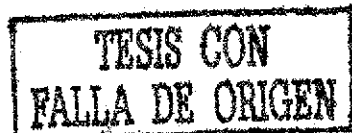
La prueba de hipótesis se busca cuando se esta limitado para observar consecuencias estadísticas de tal forma, que lo único que se pueda sea pesar hipótesis y ver cual es la mas adecuada para describir en términos probabilísticos las consecuencias que observamos.

1.2 Definición de verosimilitud:

Quando no se puede definir un intervalo de valores para probar hipótesis, es decir cuando falla el lema de Neyman-Pearson (Hoel, 1971). O cuando la hipótesis que se considera es compuesta en vez de simple (Hoel, 1971). Es necesario considerar pruebas de hipótesis como el Método de Verosimilitud.

A continuación se darán algunas definiciones y propiedades del Soporte, siguiendo fundamentalmente lo expuesto por Edwards en su libro (Edwards, 1976). Si se conoce el material se puede optar por pasar directamente a la sección 1.5 de este trabajo.

Si la probabilidad es una medida racional de creencia de obtener un determinado resultado antes de realizar un ensayo, tanto a priori como a posteriori. Entonces, la probabilidad



no es adecuada para expresar la confianza o desconfianza sobre las inferencias que se realicen. De esto se ve la necesidad de definir un concepto que mida órdenes de preferencia sobre poblaciones de datos y que necesariamente se establezcan de un ensayo.

Por lo tanto si $P(R|H)$ es la probabilidad de obtener los resultados R dada la hipótesis H , se define:

La verosimilitud, que se denota como $L(H|R)$, de la hipótesis H dado el conjunto de datos R , y el modelo específico, es proporcional a la probabilidad $P(R|H)$, donde la constante de proporcionalidad es arbitraria (Edwards, 1976).

Lo primero que se observa en esta definición es que en la probabilidad: R es la variable y H es constante; en cambio con la versomilitud: H es la variable para R constante. Además, cuando se comparan dos hipótesis para los mismos datos se cancelan las constantes ya que se realiza un cociente de la forma $L(H_1, H_2|R) = \frac{L(H_1|R)}{L(H_2|R)}$.

Debido a que la verosimilitud se define proporcionalmente a la probabilidad $P(R|H)$, se pueden construir teoremas semejantes a los de la Teoría de Probabilidad, por ejemplo:

Los cocientes de verosimilitud de dos hipótesis sobre conjuntos de datos independientes puede multiplicarse para formar el cociente de verosimilitud sobre los datos combinados, es decir:

$$(1.2.1) \quad L(H_1, H_2 | R_1 \& R_2) = L(H_1, H_2 | R_1) \cdot L(H_1, H_2 | R_2).$$

La prueba de este teorema es inmediata si se recuerda la regla de la multiplicación de las probabilidades y la definición de verosimilitud (Edwards, 1976).

Por otro lado, en ocasiones es conveniente manejar a las variables como continuas y hablar entonces de una densidad de probabilidad. En este caso la definición de verosimilitud si que funcionando ya que el elemento diferencial dR se puede absorber dentro de la constante, o cancelar cuando se haga un cociente.

Además, si para cada valor de un parámetro continuo o para un conjunto de parámetros continuos se puede obtener una curva que puede ser graficada; se tiene entonces una función de verosimilitud o una gráfica de la curva de verosimilitud.

Existe una diferencia, entre la curva de la distribución de probabilidad y la curva de verosimilitud, que es vital en la inferencia de hipótesis. Si se integra o suma sobre todos

los posibles resultados R de la distribución estadística, se obtiene la unidad debido a uno de los axiomas fundamentales de la probabilidad. En cambio, no hay un significado del área bajo la curva de verosimilitud, no tiene sentido obtener una suma sobre las posibles hipótesis.

1.3 El Soporte:

A veces es recomendable referirse al logaritmo de la verosimilitud, es por la conveniencia de transformar a las constantes multiplicativas en aditivas y entonces referirse a un nivel que se puede definir como cero. Es precisamente al logaritmo natural de la verosimilitud al que se le llama Soporte.

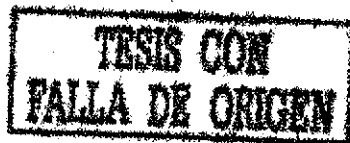
De acuerdo a todo lo que se ha mencionado, y teniendo en mente la idea de que el Soporte sea una medida relativa de comparación de hipótesis, resultan naturales las siguientes propiedades (Edwards, 1976):

(a) Transitividad. Si H_1 está mejor soportada que H_2 , H_2 mejor que H_3 ; entonces H_1 está mejor soportada que H_3 .

(b) Aditividad: Si $L(H_1, H_2 | R_1 \& R_2) = L(H_1, H_2 | R_1) \cdot L(H_1, H_2 | R_2)$ implica que $\ln\{L(H_1, H_2 | R_1 \& R_2)\} = \ln\{L(H_1, H_2 | R_1)\} + \ln\{L(H_1, H_2 | R_2)\}$.

- (c) Invariancia bajo transformaciones de datos. Esta propiedad resalta la condición de estadística suficiente que contienen los datos, además de que toda la información que puedan dar debe estar contenida en los cocientes de verosimilitud de las hipótesis que se prueben.
- (d) Invariancia bajo transformaciones de los parámetros. En ocasiones resulta más fácil encontrar hipótesis mejor soportadas si se realiza una transformación de los parámetros del modelo, es necesario entonces conservar las propiedades del soporte bajo estas condiciones.
- (e) Relevancia y consistencia. Es relevante porque cuando se obtiene un cociente de cero de verosimilitud es "ignorancia" (las dos hipótesis son igualmente válidas) y cuando se realice una larga prueba (serie de medidas), existirá una hipótesis con mayor soporte que otra. La consistencia se refiere a la aplicación del soporte en diferentes casos o aplicaciones, donde se pueden obtener los mismos valores de verosimilitud.

Lo que se observa de estas propiedades es en cierta forma las características de una escala de medida y así poder de



cir que el soporte de una hipótesis respecto a otra puede ir desde cero hasta una cantidad muy grande.

La razón de los soportes de verosimilitud de dos hipótesis es el cociente de frecuencias con el que las hipótesis han dado esos datos en una larga prueba.

Por lo tanto, con el soporte se busca dar una escala, de tal manera que de una información completa de la contribución de los datos a nuestro juicio. Es pues, un factor que debe tomar en consideración el científico al enjuiciar sus hipótesis.

Otra manera de introducir el concepto de verosimilitud es a través del teorema de Bayes. En este caso se construyó sin recurrir a él. Sin embargo, es conveniente mencionarlo y observar como puede ser interpretado en función del soporte.

La fórmula de Bayes dice:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_k P(A_k)P(B|A_k)} \quad (1.3.1)$$

Una interpretación es (Hoel, 1971): si se tienen A_k eventos como "causas" posibles del evento observable B, entonces, $P(A_i|B)$ es la probabilidad de que el evento A_i fue la "causa" de B dado que B ocurrió.

Ahora desde el punto de vista que se ha venido desarrollando, si se tienen dos hipótesis H_1 y H_2 para R datos y aplicando - la fórmula:

$$(1.3.2) \quad P(H_1|R) = \frac{P(H_1) \cdot P(R|H_1)}{P(H_1) \cdot P(R|H_1) + P(H_2) \cdot P(R|H_2)}$$

donde $P(H_1)$ es conocida a priori, desde el punto de vista de que todas las probabilidades tienen el mismo soporte a priori. La interpretación es: la probabilidad de que H_1 ocurra dados R datos es cuando $P(R|H_1)$ sea máxima, es decir, cuando la verosimilitud sea máxima.

1.4 Máximo Soporte: El Método de Máxima Verosimilitud.

Las dificultades que se presentan cuando se desea graficar la función de Soporte, y no poder obtener de una manera - cuantitativa el valor del parámetro o de los parámetros que - maximizen el soporte, son las principales causas que origina - ron el Método de Máxima Verosimilitud.

Para obtener esta información el MMV da la descripción - de la curva de soporte en la vecindad del máximo y obtiene el valor del máximo, sobre todo cuando es difícil dibujar la cur - va.

Para la descripción de la curva alrededor del máximo, se

definen los siguientes conceptos:

- (a) Al valor mejor soportado de un parámetro (es decir el valor para el cual, de todos los datos, el soporte es máximo) se le llama el valor evaluado. En el caso de dos o más parámetros, los valores evaluados son aquellos para los cuales el soporte es un máximo sobre todos los parámetros juntos (Edwards, 1976).

Una vez que se tiene el valor alrededor del cual se va a describir la curva, se tienen los siguientes índices:

- (b) Los límites del Soporte son los valores de los parámetros para los cuales varió el Soporte en dos unidades alrededor del máximo. La necesidad de dos unidades se verá cuando se defina la "formación observada".
- (c) El valor evaluado y los límites del Soporte se pueden obtener directamente de la Curva de Soporte cuando está graficada. Cuando resulte difícil obtener una gráfica, se puede recurrir a un desarrollo en serie de Taylor alrededor del valor evaluado:

$$S(\theta) = S(\hat{\theta}) + (\theta - \hat{\theta}) \left. \frac{dS}{d\theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2S}{d\theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}} + \dots \quad (1.4.1)$$

Como las derivadas están evaluadas en $\theta = \hat{\theta}$ se tiene que:

$$\left. \frac{dS}{d\theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}} = 0 \quad \text{a la cual se le llama indicadora (score)}$$

Sustituyendo este valor en la serie resulta:

$$S(\theta) = S(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta})^2 \left. \frac{d^2 S}{d\theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}} \quad (1.4.2)$$

donde $-\left. \frac{d^2 S}{d\theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}}$ se le define como la información observada, da la curvatura esférica de la curva de soporte en el valor máximo.

Al inverso de la información se le define como la formación observada W^2 , término que da el radio de curvatura y a la raíz cuadrada de la formación se le llama el ancho (span). Dos veces este valor da los valores de los límites del soporte.

El span es pues un análogo de la desviación standard, pero hay que distinguir que a un valor evaluado \hat{p} se le puede asociar una desviación standard $\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}$ en la medida que $\hat{p} \rightarrow p^*$, donde p^* es el valor verdadero. Y además se le puede asociar un ancho.

En términos geométricos, la aproximación en serie de Taylor corresponde a un reemplazo de la curva de soporte por una parábola en el máximo. La aproximación será mejor en la medida en que la curva de soporte sea simétrica alrededor del valor evaluado y así obtener todas las derivadas impares iguales a cero. La búsqueda de curvas simétricas es una de las causas por las cuales se hacen transformaciones de variables (Box et al, 1978).

Por lo tanto, si la curva de Soporte toma la forma parabólica:

$$S(\theta) = S(\hat{\theta}) - \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2\omega^2} \quad (1.4.3)$$

entonces la función de verosimilitud tiene la forma:

$$L^{S(\theta)} = K L^{-\frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2\omega^2}} \quad (1.4.4)$$

una curva normal con media $\hat{\theta}$ y desviación standard ω . Una interpretación es que la función de verosimilitud tiende a ser mas normal en la medida que se incrementa el tamaño de la muestra.

1.5 La Teoría de Control y el Método de Máxima Verosimilitud:

Hacer estimaciones adecuadas de los estados de sistemas,

utilizando mínimos cuadrados, es un problema que se trató desde los años cuarenta por Kolmogorov (Zadeh & Desoer, 1963) y Wiener (Wiener, 1949). La solución, que dio en ese entonces Kolmogorov, fue un procedimiento recursivo ortonormal para tiempos discretos.

Wiener, por su lado, obtuvo una ecuación integral denominada Wiener-Hopf (Wiener & Hopf, 1931) para sistemas continuos en el tiempo y desde un punto de vista probabilístico. Siguió a este trabajo, los escritos de Bode y Zadeh (Bode & Shannon, 1950; Zadeh & Ragazzini, 1950), quienes desde el punto de vista de Wiener hacen una extensión. La idea que tuvieron era considerar al sistema como una caja negra con una función de transferencia obtenida de una función impulso. Y cuya relación entre entrada y salida estaba dada por el operador de convolución:

$$x(t) = h(t) * \omega(t) \quad (1.5.1)$$

donde $x(t)$ es la salida, $h(t)$ la función de transferencia y $\omega(t)$ la entrada.

Una aportación interesante fue la de Kalman (Kalman, 1962; Kalman & Bucy, 1961) para sistemas dinámicos lineales. Consideró al sistema descrito, con el método de transición de estado, de acuerdo a la ecuación:

$$x(t) = A(t) x(t) + w(t) \quad (1.5.2)$$

y cuyas observaciones están dadas a la salida por el vector de observación $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + v(t) \quad (1.5.3)$$

donde $w(t)$ y $v(t)$ son ruido blanco. En este tipo de filtro se obtienen una serie de fórmulas recursivas para realizar estimaciones.

En todas estas representaciones se ha utilizado el MMV (Ott, 1970; Rauch et al., 1965; Smith, 1978; Norton, 1979; Harvey, 1979) para minimizar el error de estimación o de predicción.

Por otro lado, se encuentra también el problema de establecer el conjunto de parámetros, que pueden variar en el tiempo, del modelo $A(t)$. La obtención de estos valores se puede realizar usando el Método de Máxima Verosimilitud. Haciéndolo de esta manera, cuando se trabajara con filtros como el de Wiener o el de Kalman, se optimizaría al sistema en dos lugares: en la minimización del error de estimación y en la obtención óptima de los parámetros del modelo. Los parámetros así obtenidos afectarían al error de estimación y así se obtendrían

filtros más eficientes.

En este trabajo se presenta un algoritmo para obtener los parámetros de un modelo. Este modelo se trabaja en la parte dinámica lineal y en la no lineal. Y de acuerdo al MMV y pruebas como χ^2_{p-1} , se implementa una escala indicadora de la calidad del ajuste del modelo a los datos experimentales.

En la siguiente sección se esboza la manera general de encontrar los parámetros de un modelo aplicando el MMV.

1.6 Un caso general y el Método de Máxima Verosimilitud:

Si se supone un sistema lineal y estacionario, el cual puede ser descrito en términos de una ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 \quad (1.6.1)$$

Esta ecuación puede ser transformada, vía la formulación de variables de estado, (Rosko, 1972), en:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

donde \mathbf{A} es la matriz del sistema, \mathbf{B} la matriz de entrada, \mathbf{C} la matriz de salida. Y \mathbf{D} es una matriz que relaciona la entrada con la salida.

Una vez que se tiene la forma canonica (1.6.2) se construye la función de Soporte $S(y | a_i; b_j)$. Ejemplos de diferentes formulaciones para llegar a la forma del Soporte se pueden observar en los artículos de Bohlin, Fabries o de Mac Aulay.

A continuación se optimiza S de tal manera que se haga una estimación de los parámetros a_i y b_j para que la salida $Y(t)$ ocurra (recordar la ecuación 1.3.2).

Si la forma de la función de Soporte es cuadrática, es decir desde el punto de vista del análisis: que sea una transformación uno a uno de tal manera que su jacobiano sea uno (Bohlin, 1965; Perez & Viniegra, 1979), se puede construir un vector indicador:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial a_n} \\ \frac{\partial S}{\partial b_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial b_m} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.6.3)$$

y entonces optimizar respecto a cada uno de los parámetros. Y debido a las propiedades de consistencia (propiedad e de la sección 1.3) (Bohlin, 1965) la precisión de los parámetros evaluados está dada aproximadamente por el inverso de la matriz de información:

$$\left[\begin{array}{cccc}
 \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_2} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_n} \\
 \frac{\partial^2 S}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial a_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial a_2 \partial a_n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{\partial^2 S}{\partial a_n \partial a_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial a_n^2}
 \end{array} \right]_{a_i = \hat{a}_i} \quad (1.6.4)$$

Despejar los parámetros de cada una de las componentes del vector indicador resulta en ocasiones imposible. Lo que se recomienda es recurrir a métodos numéricos para obtener la solución.

Toca mostrar en el siguiente capítulo un ejemplo de aplicación del MMV.

C A P I T U L O I I

"EJEMPLO DE APLICACION DEL MMV PARA OBTENER LOS PARAMETROS DEL MODELO DE UN SISTEMA"

En este capítulo se muestra una aplicación del MMV en el cálculo de los parámetros del modelo lineal para la descarga de un condensador a través de una resistencia. Se construye la función de Soporte y se aplica un método numérico para encontrar los parámetros evaluados.

2.1 Problema : un circuito RC.

Ejemplo: 2.1:

Se tiene un capacitor de 120 μ f al cual se le conecta una resistencia desconocida, se le aplica un voltaje también desconocido y se obtiene la siguiente tabla de datos cuando se descarga dicho condensador:

T A B L A 2.1

Voltaje (V)	Tiempo (S \pm 0.05)
6.32 \pm 0.02	0.40
4.85 \pm 0.01	0.80
3.751 \pm 0.009	1.20
2.916 \pm 0.007	1.60
2.277 \pm 0.005	2.00



TABLA 2.1
(continuación)

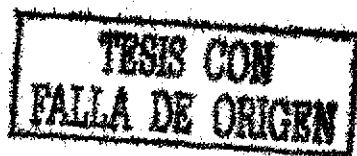
1.785	±	0.004	2.40
1.404	±	0.003	2.80
1.109	±	0.002	3.10
0.878	±	0.002	3.50
0.693	±	0.001	3.90
0.557	±	0.001	4.30
0.446	±	0.001	4.70
0.358	±	0.001	5.10
0.289	±	0.001	5.50

Los datos se obtuvieron utilizando un multímetro HP3490 A y una computadora de escritorio HP 9830 acoplados con el sistema HP-IB. Se programó a la computadora para que tomara catorce lecturas del voltímetro cada 5.5 segundos. Se repitió el fenómeno varias veces, y así poder reportar valores promedio y desviaciones standard para los valores del voltaje de descarga. La gráfica de los datos se muestra en la figura 2.1

2.2 Construcción de la función de Soporte:

El modelo matemático que se propone para describir este comportamiento es el de descarga de un condensador $V = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ donde V_0 es el voltaje inicial, R la resistencia desconocida, C el capacitor y t el tiempo de descarga.

En el capítulo anterior se mencionó que el MMV es generalmente aplicado a modelos de distribuciones estadísticas. Sin



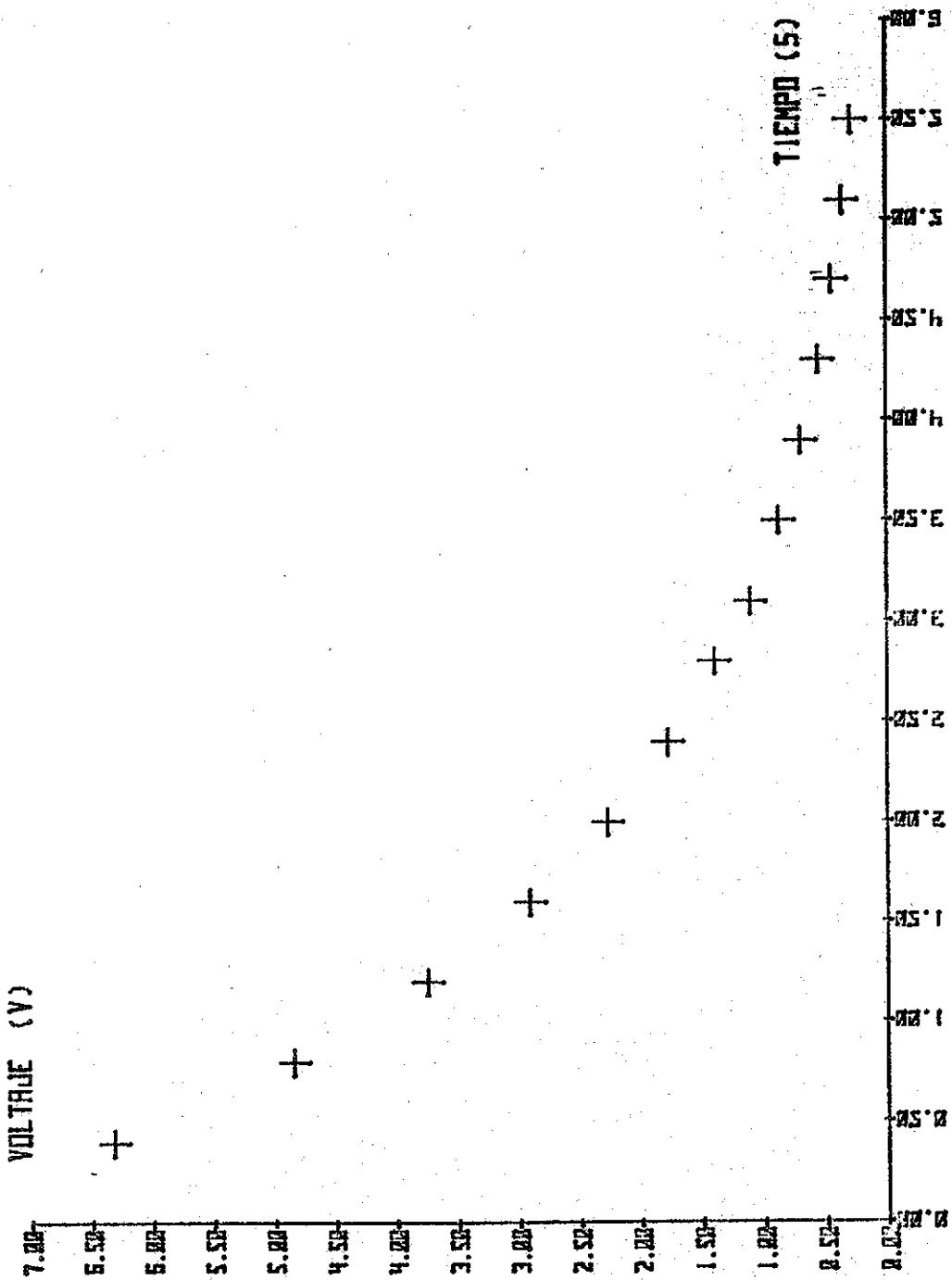


FIGURA 2.1 GRAFICA DE VOLTAJE VS. TIEMPO DE LA DESCARGA DE UN CAPACITOR.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

embargo, un análisis semejante se puede realizar con modelos de leyes de la naturaleza influenciadas por errores accidentales (Fabries & Renon, 1975).

Lo primero es construir una diferencia entre la parte experimental y la parte teórica, de acuerdo a la información que se tenga y a los modelos que se tengan para los parámetros que se van a determinar:

$$r_j = \eta_j^{exp} - \eta_j^{teo} \quad (2.2.1)$$

para el problema a resolver, este vector residuo tiene sólo una componente:

$$r = V^{exp} - V^{teo} = V^{exp} - V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.2.2)$$

Pueden existir experimentos en los que existan más componentes para el vector residuo. En este caso un residuo para el tiempo sería redundante.

Las variables experimentales son el voltaje V y el tiempo t con sus incertidumbres asociadas σ_V y σ_t , y los parámetros a determinar son V_0 y R . Como consecuencia al residuo se le puede asociar un error propagado.

Es por esto que se le asocia una distribución estadística gaussiana a los residuos (recordar ecuación 1.4.4) de la

forma:

$$f_i = \frac{1}{2\pi(\det \bar{V}_i)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{r}_i^t \bar{V}_i^{-1} \bar{r}_i\right) \quad (2.2.3)$$

donde \bar{V}_i es una matriz de varianzas de las componentes del vector residuo \bar{r}_i en el i-ésimo experimento. Los elementos de la diagonal son las varianzas de cada elemento del vector residuo:

$$\sigma^2(r_j) = \sum_k \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_k}\right)^2 \sigma^2(x_k) \quad (2.2.4)$$

para k variables experimentales y j elementos del vector \bar{r}_i . Y los otros elementos de la matriz son las covarianzas entre componentes, por ejemplo para j=1,2:

$$\delta r_1 \delta r_2 = \sum_k \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_k}\right) \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_k}\right) \sigma^2(x_k) \quad (2.2.5)$$

con k variables experimental y 2 elementos del vector \bar{r}_i .

La función de soporte es:

$$S = \sum_{i=1}^n \text{Ln} f_i \quad \text{con n experimentos.}$$

Entonces la función de Soporte para el problema que se

trata es:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{(V_i^{exp} - V_0 e^{-t_i/Rc})^2}{\sigma^2(V_i) + \left(\frac{V_0}{Rc} e^{-t_i/Rc}\right)^2 \sigma^2(t_i)} \quad (2.2.6)$$

En este caso particular donde el vector residuo tiene solo una componente, es decir, los errores de las variables son estadísticamente independientes, la expresión para el soporte adquiere la forma usual de mínimos cuadrados pesados, cuyos coeficientes de peso son las varianzas de $\sigma^2(v_{ij})$ (para la j-ésima componente del vector y el sistema en el estado i).

2.3 Obtención de los valores evaluados.

Los parámetros se obtienen, como ya se dijo, de los dos derivadas del Soporte respecto a V_0 y R e igualadas a cero:

$$\frac{\partial S}{\partial V_0} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial R} = 0 \quad (2.3.1)$$

Derivar la función de soporte (2.2.6) y despejar los valores para V_0 y R resulta ser muy complicado, es por esto que se recurrió a un método numérico para resolver el problema.

El método que se empleó es conocido como Método de Optimización por Búsqueda Paramétrica (Bekey & Karplus, 1968). En el cual no se requiere el gradiente de la función, sino que se trabaja directamente con la función a minimizar, en este caso la función de soporte S (ec. 2.2.6)

La idea es buscar el mínimo de la función, ajustando los parámetros por turnos, dentro de un intervalo adecuado. Si se consideran dos parámetros por ejemplo (ver figura 2.2), se puede empezar a variar el parámetro V_0 en el punto 0, con R fija se dan incrementos ΔV tanto positivos como negativos. Se evalúa la función de soporte en cada paso del intervalo AB. El valor deseado es el valor mínimo de todos los valores encontrados (punto 1 de la figura 2.2). Ahora con V fijo se repite el proceso para valores de la resistencia R hasta que se encuentra otro valor mínimo de S (punto 2 de la figura 2.2). El proceso se repite para V y R hasta obtener el mínimo *minimorum* dentro de una precisión escogida de antemano.

El programa para el algoritmo descrito aparece en lenguaje BASIC en el apéndice A1 de este trabajo. En la tabla 2.2 se presentan los resultados obtenidos por la computadora. Aparecen cinco grupos de datos. Cada grupo corresponde a una corrida del algoritmo descrito. En el primer renglón de cada grupo se indican los valores iniciales para el voltaje y la resistencia, y también el valor del tamaño de los incrementos. En los otros tres renglones aparecen los valores de R y V_0 para el valor de la función de Soporte mínima (S_{\min}).

El algoritmo se trabajó hasta la tercera cifra después del

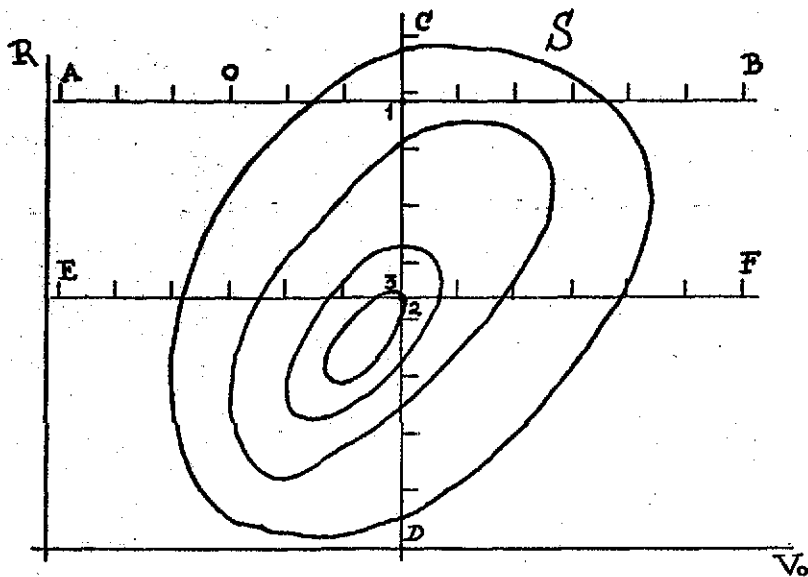


FIG. 2.2 Búsqueda del mínimo por variación de un parámetro.

T A B L A 2.2

R= 14000	V= 10	DELTA R= 1000	DELTA V= 10
R= 13000	V= 10	FMIN= 194.5103791	
R= 13000	V= 10	FMIN= 194.5103791	
R= 13000	V= 10	FMIN= 194.5103791	
R= 13000	V= 10	FMIN= 194.5103791	
R= 13000	V= 10	DELTA R= 100	DELTA V= 1
R= 12600	V= 10	FMIN= 138.2376285	
R= 12600	V= 10	FMIN= 138.2376285	
R= 12600	V= 10	FMIN= 138.2376285	
R= 12600	V= 10	FMIN= 138.2376285	
R= 12600	V= 10	DELTA R= 10	DELTA V= 0.1
R= 12620	V= 10	FMIN= 138.0622544	
R= 12620	V= 9.6	FMIN= 118.0322298	
R= 12670	V= 9.6	FMIN= 110.5047499	
R= 12670	V= 9.6	DELTA R= 1	DELTA V= 0.01
R= 12675	V= 9.6	FMIN= 109.8763722	
R= 12675	V= 9.55	FMIN= 108.9547422	
R= 12680	V= 9.55	FMIN= 108.2358063	
R= 12680	V= 9.55	DELTA R= 0.1	DELTA V= 1.000000E-03
R= 12680.5	V= 9.55	FMIN= 108.1651506	
R= 12680.5	V= 9.545	FMIN= 108.0974379	
R= 12681	V= 9.545	FMIN= 108.0258704	

punto decimal en el voltaje para estar acorde con la precisión de los datos (ver tabla 2.1). Los parámetros evaluados que se reportan son cuando se obtuvo el mínimo minimorum (ver tabla - 2.3)

T A B L A 2.3

R= 13700	V= 8	DELTA R= 10	DELTA V= 0.1
R= 13750	V= 8	FMIN= 19.54299639	
R= 13750	V= 8	FMIN= 19.54299639	
R= 13780	V= 8	FMIN= 19.26839295	
R= 13780	V= 8	DELTA R= 1	DELTA V= 0.01
R= 13779	V= 8	FMIN= 19.2679914	
R= 13779	V= 8.02	FMIN= 19.2170929	
R= 13774	V= 8.02	FMIN= 19.17669796	
R= 13774	V= 8.02	DELTA R= 0.1	DELTA V= 1.0000000003
R= 13773.5	V= 8.02	FMIN= 19.17355703	
R= 13773.5	V= 8.021	FMIN= 19.17324031	
R= 13773	V= 8.021	FMIN= 19.17002240	

$$\langle R \rangle = 13773 \pm 41.4809226$$

$$\langle V_0 \rangle = 8.021 \pm 0.048497393$$

Los valores obtenidos son: $\langle R \rangle = 13773 \pm 41 \Omega$ y $\langle V_0 \rangle = 8.021 \pm 0.048$ V, cuyas incertidumbres son los elementos (1,1) y (2,2) del inverso de la matriz de información - (1.6.4). Los valores son semejantes a los que se obtienen mediante mínimos cuadrados: 13728 ± 135 y 8.05 ± 0.02 V. Lo anterior se puede corroborar observando la coincidencia de las



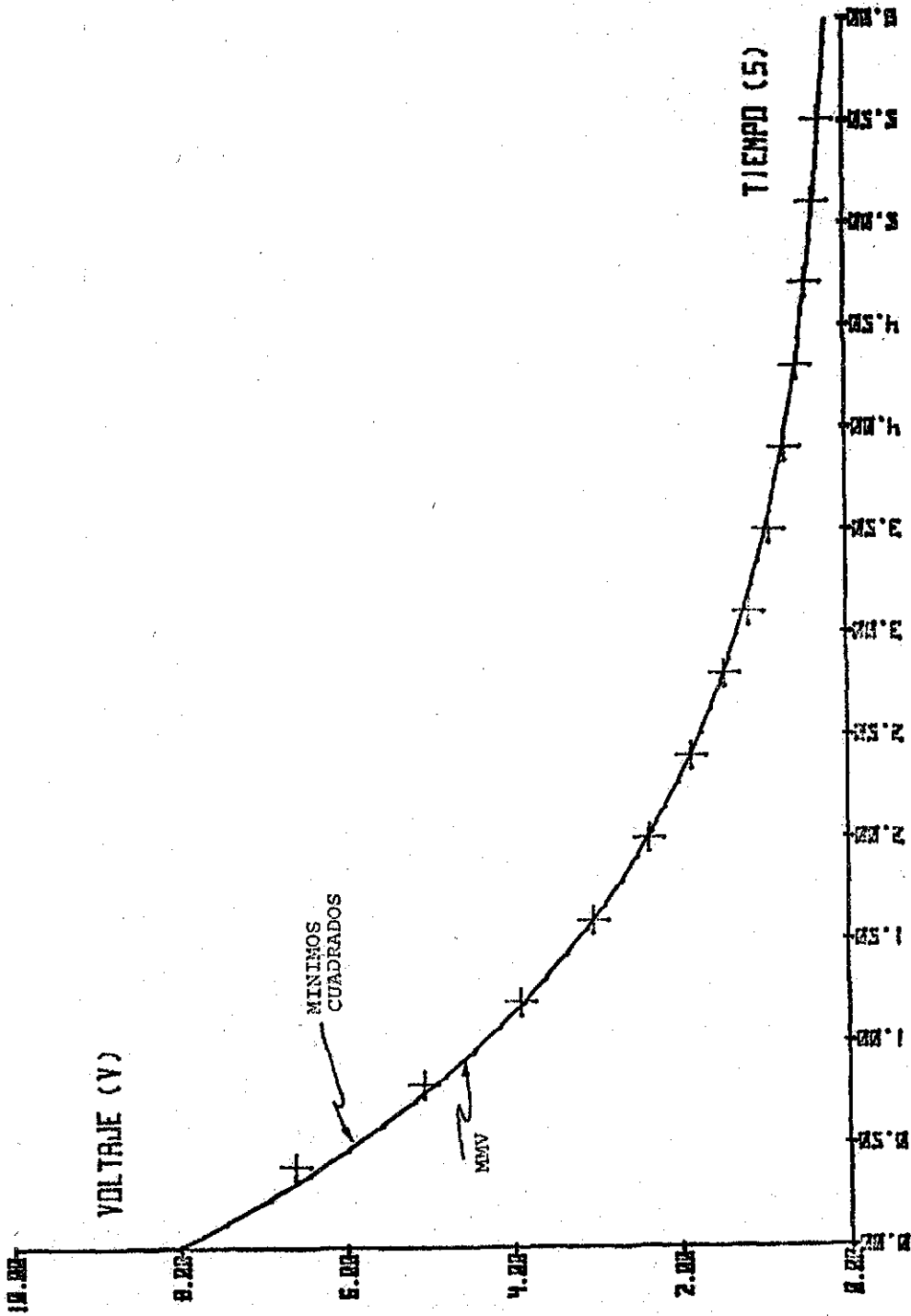


FIG. 2.3 Gráficas de las curvas ajustadas por mínimos cuadrados y por el MMV.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

curvas obtenidas por M.C. y M.M.V en la figura 2.3. O también de los errores porcentuales que dan los dos métodos (Tabla A2-1 en el apéndice A2).

Para considerar "válidos" a los parámetros se acostumbra reportar el valor de la distribución χ^2_{13} , que en este caso daría una certidumbre del más del 99% para 13 grados de libertad (Tabla II, Hoel). En el siguiente capítulo se muestra como se llega de una manera natural a la distribución de χ^2_{v-1} cuando se prueba la hipótesis nula sobre las varianzas y no sobre valores promedio. De ahí que sea incorrecto usar la prueba de χ^2_{v-1} para dar validez a valores medios.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

C A P I T U L O I I I

"ALGORITMO PARA PROBAR MODELOS DE SISTEMAS Y SU UTILIZACION"

Con lo que se ha desarrollado del MMV y con la prueba de $\chi^2_{\nu-1}$ para ajustes de curvas, en este capítulo se implementa un algoritmo que ayuda al experimentador a descartar o a seguir aceptando el modelo empleado para describir al sistema que se esté estudiando. A continuación se aplica el algoritmo al modelo de un sistema dinámico, el cual varía sus características.

La aceptación del modelo no se puede realizar exclusivamente usando métodos matemáticos, sino también se debe considerar el conocimiento científico que se tenga del sistema.

3.1 La prueba $\chi^2_{\nu-1}$ y el MMV.

El uso de pruebas de significancia basadas en distribuciones como la Normal, χ^2 , t y la F son usadas ampliamente en el análisis de experimentos. Si se analizan estas distribuciones desde el punto de vista de la verosimilitud se pueden

encontrar resultados que den un punto de vista más adecuado de lo que significa utilizar distribuciones.

El MMV supone que hipótesis alternativas están implícitas en las pruebas. Entonces si se hace un análisis de las varianzas de n datos experimentales, se supone una hipótesis nula para las varianzas σ^2 en la prueba de $\chi^2_{\nu-1}$.

Para aplicar el método a las varianzas, se supone (Edwards, 1976) que X_i ($i=1,2,3,\dots,n$) son n observaciones independientes distribuidas normalmente con medias μ_i y varianzas σ_i^2 , la forma de la distribución es:

$$dF = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right] dx_1\dots dx_n \quad (3.1.1)$$

Sin olvidar que en esta ocasión las μ_i forman parte del modelo y la hipótesis nula se aplica sobre las σ_i^2 . Entonces el soporte para ver si las varianzas son razonables es:

$$S = -\frac{1}{2} \ln(\sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (3.1.2)$$

A continuación se pregunta ¿en qué medida pueden variar las σ_i^2 para incrementar el soporte? La función de Soporte para las varianzas que se han incrementado una determinada - constante, supóngase k^2 , es:

$$S = -\frac{1}{2} \text{Ln}(\sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2) - \frac{n}{2} \text{Ln} k^2 - \frac{1}{2k^2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (3.1.3)$$

Entonces para contestar la pregunta, el incremento del soporte se encuentra restando (3.1.2) de (3.1.3).

$$\Delta S = -\frac{n}{2} \text{Ln} k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.1.4a)$$

Se puede demostrar que, debido a que $-2 \ln \frac{L(H_1|R)}{L(H_2|R)}$ tiene una distribución igual a $\chi_{\nu-1}^2$ (teorema 25, Hoel) cuando el número de muestras es grande y cuando a la función de verosimilitud se le considera normal (ec 3.1.1), la forma

$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2 / \sigma_i^2$ es igual a χ_{n-1}^2 , por lo tanto:

$$\Delta S = -\frac{n}{2} \ln k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \chi_{n-1}^2 \quad (3.1.4b)$$

El máximo cambio en el soporte es cuando $k^2 = \frac{\chi_{n-1}^2}{n}$,
sustituyendo en (3.1.4b) resulta:

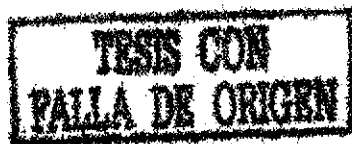
$$\Delta S = \frac{n}{2} (\ln n - \ln \chi_{n-1}^2) - \frac{1}{2} (n - \chi_{n-1}^2) \quad (3.1.5)$$

También, se observa que cuando $\chi_{n-1}^2 = n$ no hay manera de incrementar el soporte. Por otro lado, el incremento del soporte es igual a los límites del soporte, medido en m unidades, por lo tanto:

$$\chi_{n-1}^2 - n \ln \chi_{n-1}^2 - n + n \ln n = 2m \quad (3.1.6)$$

Por ejemplo: si $m=2$ y $n=1$ se obtienen los valores para χ_1^2 con un grado de libertad: 0.006784 y 6.9368; a los cuales les corresponde un valor de $Q=1-P$ de la curva de χ^2 de 0.95 y 0.01 respectivamente (Edwards, 1976)

Entonces, si se conoce el valor de χ_{n-1}^2 para una serie de $n + 1$ experimentos se puede calcular el incremento del soporte m de (3.1.6). Si $m \geq 2$ (ver sección 1.4) puede dudar se seriamente de la hipótesis nula sobre las σ_i^2 y de acuer-



do al valor $Q=1-P$ que le corresponda al valor de χ^2_{v-1} se puede aprobar el modelo sugerido para nuestros datos.

3.2 Algoritmo para analizar modelos de sistemas.

De acuerdo a lo mencionado en la sección anterior, el incremento en el soporte m y el valor Q que corresponden a un valor de χ^2_{n-1} dado son dos índices indicadores de que tanto se ajusta el modelo a los datos experimentales obtenidos del análisis de un sistema.

El algoritmo para el cálculo de estos índices consiste de dos partes fundamentalmente: la primera, descrita en el Capítulo 2, donde se calculan los parámetros más adecuados del modelo de acuerdo al MMV. La segunda parte calcula el valor de χ^2_{n-1} y los índices m y Q . El valor de χ^2_{n-1} con $n-1$ grados de libertad se calcula de acuerdo a:

$$\chi^2_{n-1} = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} \quad (3.2.1)$$

donde O_i es el valor observado, e_i el valor esperado y n el

número de experimentos. Hay que recordar que para $n \leq 5$, la ecuación (3.2.1) pierde generalidad ya que es una aproximación a la distribución χ_{n-1}^2 .

El valor del incremento del soporte m se obtiene de acuerdo a las fórmulas (3.1.6) y (3.2.1), y el otro índice Q se obtiene de la siguiente expresión (Abramowitz & Stegun, 1972):

$$Q(\chi_{n-1}^2, n) = 1 - F(t) \quad \text{con} \quad t = \frac{\chi^2 - n}{(2n)^{1/2}} \quad (3.2.2)$$

donde $F(t)$ se calcula de acuerdo a la expansión asintótica de Edgeworth:

$$F(t) \sim P(t) - \frac{1}{n^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} Z^{(2)}(t) \right] + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} Z^{(3)}(t) + \frac{1}{9} Z^{(5)}(t) \right] \quad (3.2.3)$$

$$\text{con} \quad P(t) = 1 - Z(t) \left[\frac{.461836}{1+.33267t} - \frac{.1201676}{(1+.33267t)^2} + \frac{.9372980}{(1+.33267t)^3} \right] + \epsilon(t) \quad (3.2.4)$$

donde $\epsilon(t)$ es un error $< 10^{-5}$ y las funciones $Z(t)$ son:

$$Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad Z^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} Z(t) \quad (3.2.5)$$

Aplicando lo anteriormente expuesto al problema que se presentó en el Capítulo 2 de este trabajo, se obtuvieron los siguientes resultados:

EL VALOR DE CHI CUADRADA ES 0.032778570 CON 13 GRADOS DE LIBERTAD
 LOS LÍMITES DEL SOPORTE TIENE 32.4054923 UNIDADES
 LA Q DE 0.032778570 CON 13 GRADOS DE LIBERTAD ES 4.022448869

Los resultados indican que el modelo propuesto es adecuado ($m=32 > 2$ y $Q > 1$) a los datos presentados. El programa para obtener estos resultados aparece en el apéndice A1.

A continuación se modifica dos veces el sistema, y en cada caso se analiza el modelo con el algoritmo. Se sigue utilizando un circuito RC, pero ahora conectando un amplifi



cador operacional a la salida y así cambiar las característi-
cas del circuito.

EJEMPLO 3.1

Los datos que se obtuvieron para la primera modifica-
ción del circuito RC fueron

T A B L A 3.1

Voltaje (V)	Tiempo (S)+0.05
6.83+0.08	0.50
6.39+0.07	0.75
5.30+0.07	1.00
4.14+0.06	1.25
3.30+0.03	1.50
2.68+0.03	1.75
2.15+0.01	2.00
1.66+0.01	2.50
1.420+0.008	2.75
0.932+0.007	3.00
0.700+0.006	3.25
0.423+0.005	3.50
0.250+0.003	3.75
0.056+0.004	4.00

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Se utilizó el mismo dispositivo experimental. Los valores difieren de los de la Tabla 2.1 debido a los cambios que ocasionó el amplificador operacional. En la figura 3.1 aparecen los datos graficados.

Si se desearan hacer predicciones con valores de $\langle R \rangle = 13773$ ohms y $\langle V_o \rangle = 8.021V$ (ver Tabla 2.3) para el modelo $V = V_o e^{-t/\tau}$ con $C = 1.2 \times 10^{-4} \mu f$ se tendrían errores porcentuales, entre el voltaje de la fórmula y el voltaje esperado, muy grandes. Esto se puede observar en la figura 3.1 con la curva de predicción y en la Tabla A2-2 que aparece en el apéndice A2. Por lo tanto, es necesario realizar un nuevo ajuste ya que con los parámetros evaluados del ejemplo 2.1 no es posible predecir.

Para la evaluación de los nuevos parámetros R y V_o , para el modelo $V = V_o e^{-t/\tau}$, que describan los datos experimentales de la Tabla 3.1 se utilizó la misma función de Soporte (ecuación 2.2.6) y el algoritmo descrito al inicio de esta sección, cuyo programa aparece escrito en lenguaje BASIC en el apéndice A1 de este trabajo.

Los datos que se obtuvieron se muestran en la Tabla 3.2.

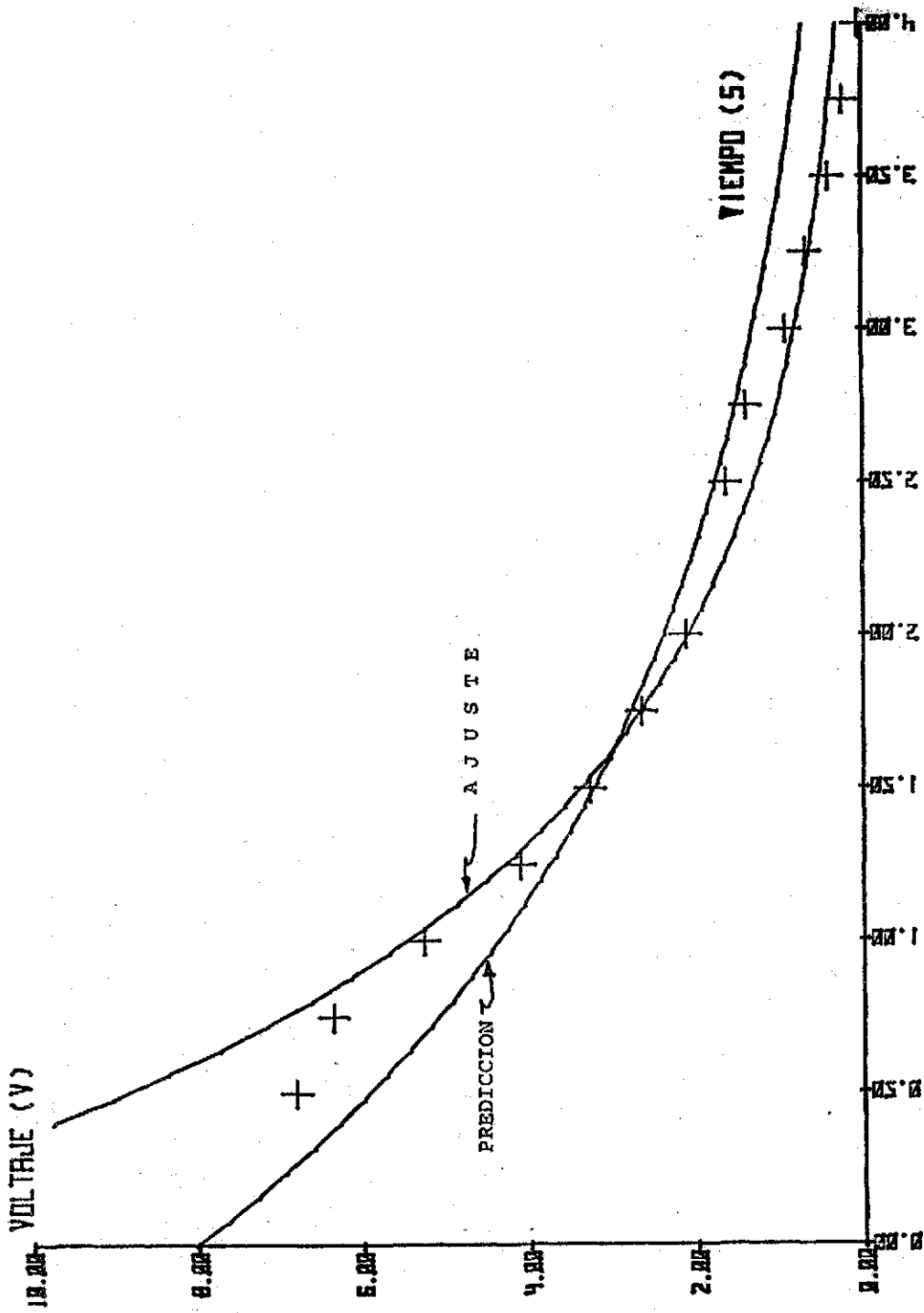


FIG. 3.1 Gráficas de los datos del ejemplo 3.1, de la curva de predicción y los parámetros tras evaluados del ejemplo 2.1 y la curva del nuevo ajuste.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

También se muestran los parámetros evaluados que minimizan -
 la función de Soporte, junto con los índices m y Q .

T A B L A 3.2

R= 10000	V= 15	DELTAR= 1000	DELTAV= 1
R= 9000	V= 15	FMIN= 549.2457964	
R= 9000	V= 14	FMIN= 504.1469937	
R= 9000	V= 14	FMIN= 504.1469937	
R= 9000	V= 14	DELTAR= 100	DELTAV= 0.1
R= 8800	V= 14	FMIN= 482.2505266	
R= 8800	V= 14.3	FMIN= 480.3795642	
R= 8700	V= 14.3	FMIN= 474.5929287	
R= 8700	V= 14.3	DELTAR= 10	DELTAV= 0.01
R= 8680	V= 14.3	FMIN= 474.3584361	
R= 8680	V= 14.35	FMIN= 473.4024857	
R= 8660	V= 14.35	FMIN= 473.29217	
R= 8660	V= 14.35	DELTAR= 1	DELTAV= 1.000000E-03
R= 8663	V= 14.35	FMIN= 473.2832009	
R= 8663	V= 14.355	FMIN= 473.1839419	
R= 8662	V= 14.355	FMIN= 473.1834752	

$\langle R \rangle = 8662$ ± 30.30326030
 $\langle V \rangle = 14.355$ ± 0.127192535

EL VALOR DE CHI CUADRADA ES 1.091516082 CON 13 GRADOS DE LIBERTAD
 LOS LÍMITES DEL SOPORTE TIENE 10.14873926 UNIDADES
 LA Q DE 1.091516082 CON 13 GRADOS DE LIBERTAD ES 2.215028733

**TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN**

Los índices $m=10 > 2$ y $Q=2 > 1$ para los valores obtenidos: $\langle R \rangle = 8662 \pm 30 \Omega$ y $\langle V_0 \rangle = 14.355 \pm 0.127$ V, indican que el modelo se ajusta a los datos experimentales, aunque no tan bien como ocurre con el ejemplo 2.1. Los errores porcentuales se pueden observar en la Tabla A2-3 que aparece en el Apéndice A2. y la curva del ajuste se puede ver en la figura 3.1.

EJEMPLO 3.2

Para este ejemplo se tomaron los mismos datos de la Tabla 3.1, pero ahora se supone que se conoce el voltaje al tiempo $t=0$. Los datos se muestran en la Tabla 3.3.

T A B L A 3.3

Voltaje (V)	Tiempo (S)+0.05
6.83+0.08	0.00
6.39+0.07	0.50
5.30+0.07	0.75
4.14+0.06	1.00
3.30+0.03	1.25
2.68+0.03	1.50
2.15+0.01	1.75
1.66+0.01	2.00

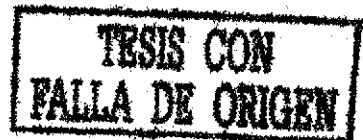
T A B L A 3.3 (continuación)

1.420+0.008	2.50
0.932+0.007	2.75
0.700+0.006	3.00
0.423+0.005	3.25
0.250+0.003	3.50
0.056+0.004	3.75

Los datos aparecen graficados en la figura 3.2. Se observa que si se suponen como válidos los parámetros evaluados del ejemplo 3.1, la curva de predicción se aleja de los puntos experimentales. Los errores porcentuales para esta curva se pueden observar en la Tabla A2-4 del apéndice 2.

Aplicando el algoritmo para este ejemplo, debido a la necesidad de nuevos parámetros para el modelo $v=V_0 e^{-t/rc}$, se obtuvieron los datos de la Tabla 3.4.

.....



.. T A B L A 3.4

R= 10000	V= 15	DELTA R= 1000	DELTA V= 1
R= 8000	V= 15	FMIN= 521.7463786	
R= 8000	V= 13	FMIN= 460.5446829	
R= 8000	V= 13	FMIN= 460.5446829	
R= 8000	V= 13	DELTA R= 100	DELTA V= 0.1
R= 8100	V= 13	FMIN= 460.3302162	
R= 8100	V= 12.9	FMIN= 459.9711309	
R= 8100	V= 12.9	FMIN= 459.9711309	
R= 8100	V= 12.9	DELTA R= 10	DELTA V= 0.01
R= 8080	V= 12.9	FMIN= 459.7672985	
R= 8080	V= 12.95	FMIN= 459.6816413	
R= 8060	V= 12.95	FMIN= 459.5962889	
R= 8060	V= 12.95	DELTA R= 1	DELTA V= 1.00000E-03
R= 8065	V= 12.95	FMIN= 459.5877450	
R= 8065	V= 12.955	FMIN= 459.5720689	
R= 8063	V= 12.955	FMIN= 459.5710956	

<R>= 8063 +- 31.05189453
 <V>= 12.955 +- 0.114368451

EL VALOR DE CHI CUADRADA ES 6.930063432 CON 13 GRADOS DE LIBERTAD
 LOS LIMITES DEL SOPORTE TIENE 1.054054258 UNIDADES
 LA Q DE 6.930063432 CON 13 GRADOS DE LIBERTAD ES 0.921558760

**TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN**

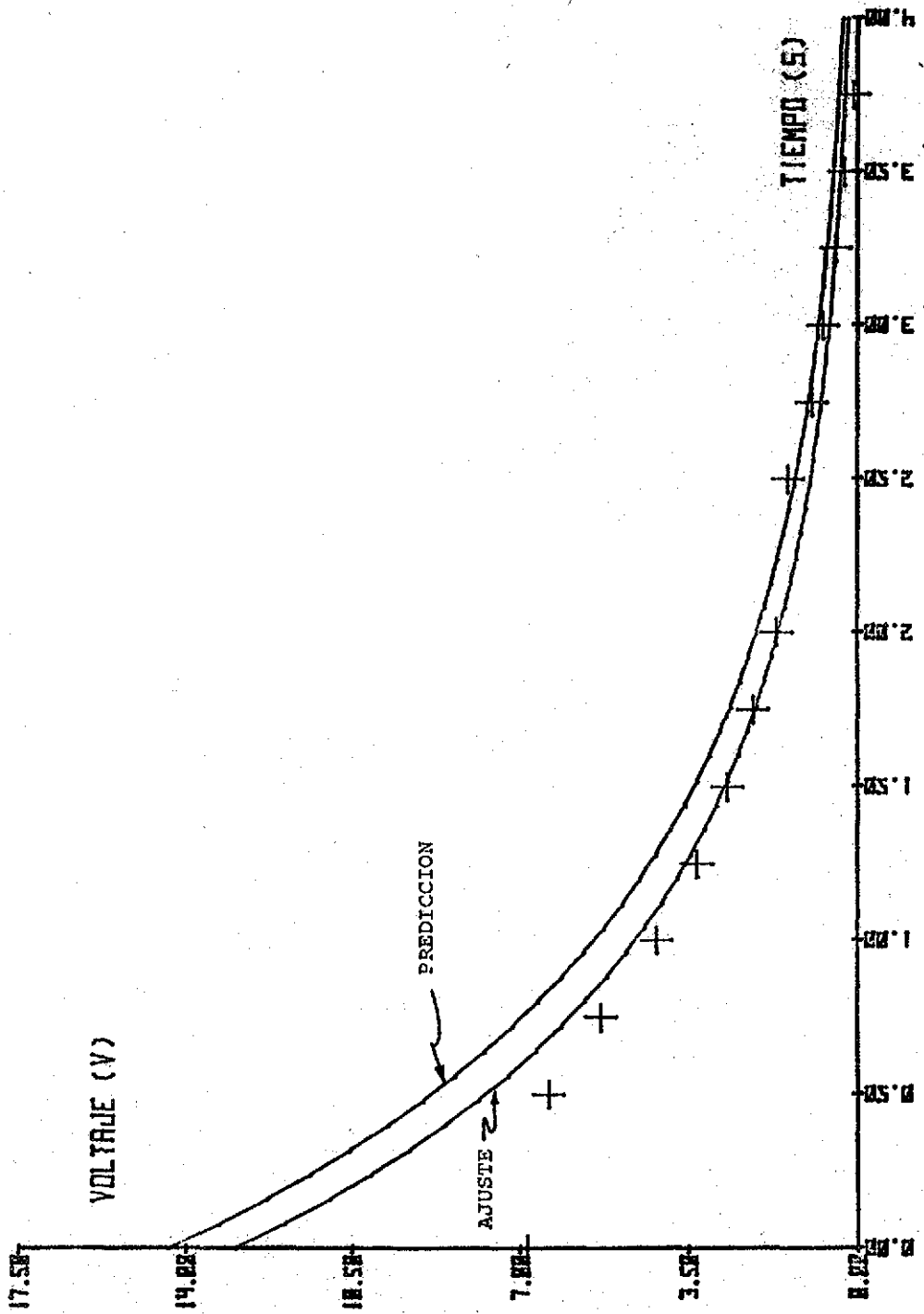


FIG. 3.1 Curvas de los datos del ejemplo 3.2, de la curva de prediccion y los parametros evaluados del ejemplo 3.1 y la curva del ajuste para este ejemplo.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Los índices $m=1.005 < 2$ y $Q=0.9 < 1$ para los valores obtenidos: $\langle R \rangle = 8063 \pm 31 \Omega$ y $\langle V_o \rangle = 12.955 \pm 0.114 V$, indican que el modelo no es adecuado para hacer una descripción de los datos experimentales obtenidos. Esto puede observarse en la figura 3.2 con la curva para el ajuste. O también de los errores porcentuales obtenidos para este ajuste en la Tabla A2-5 del apéndice A2, valores semejantes a los de la Tabla A2-4.

Con los tres ejemplos tratados (2.1, 3.1 y 3.2) se intenta mostrar que el Soporte da una escala, la cual permite apreciar los ajustes que se realicen cuando se estudie un sistema cualquiera.

La minimización de la función de Soporte lleva un tiempo promedio de 15 minutos, y en ocasiones hay que hacer un recorrido de la superficie de Soporte lo que implica un tiempo mayor. Esto se presentó sobre todo en el ejemplo 3.2 debido a la no linealidad de los datos. El aumento de tiempo se debe a que no hay un algoritmo universal para la optimización de funciones (Bakhvalov, 1977).

Para la aceptación definitiva del modelo no hay que olvidar el comportamiento físico del sistema, en este caso el condensador. Se sabe (Worrel F.T., 1974) que el material -

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

dieléctrico que se emplea, ya sea aceite o mica, dista mucho de ser un dieléctrico ideal. Esto se puede observar en el tamaño de los errores porcentuales (ver Tabla A2-1) de los extremos de la curva del modelo lineal (ejemplo 2.1), comportamiento que se ve reflejado también en los otros ejemplos.

" CONCLUSIONES "

En este trabajo se desarrolló un algoritmo mediante el cual se puede probar que tanto se adapta un modelo matemático a la descripción de los datos experimentales. Esta prueba utiliza la escala de Soporte y la prueba de $\chi^2_{\nu-1}$, analizada desde el punto de vista de la teoría de la Máxima Verosimilitud, para dar dicha apreciación. Hay que hacer notar que se esta probando el modelo a los datos experimentales, y no como se presenta comunmente (Box et al) en donde a partir de los datos experimentales se genera el modelo. El algoritmo se puede considerar como general, quedando como problema particular la optimización de la función de Soporte que se construye para llevar a cabo la prueba. Este problema se debe a la variedad de modelos que existen para la descripción de sistemas y por lo tanto no existe un algoritmo universal para la optimización de una función. Es entonces la forma de esta función la que va a indicar el camino más adecuado para su optimización (Bakhtalov, 1977). De esta manera se vió, con el problema particular que se presentó, como el modelo es adecuado, menos adecuado e inadecuado para la descripción de los datos experimentales. La apreciación se debe a la escala relativa que da la teoría del Soporte que dió un valor de 32 para el ajuste lineal, después de 10 para un ajuste menos lineal, y por último

menor que 2 cuando el sistema era no lineal.

No hay que olvidar que este algoritmo no es una apreciación definitiva, sino un indicador al experimentador. Ya que esta persona es la que decide, de acuerdo a su campo de trabajo, si acepta o no al modelo.

La aplicación del algoritmo se puede realizar en otras ramas de la ciencia; ejemplo de esto es el modelo que se utilizó en este trabajo, ya que también aparece en bioquímica. Aunque en este trabajo se presentó una aplicación, el algoritmo se puede trabajar para cualquier problema (secciones 1.5 y 1.6) y de esta manera aplicarlo en otras ramas de la ciencia. Así otras posibles aplicaciones del algoritmo están en la Teoría de la Estimación cuando se calculan los parámetros para predecir el comportamiento del sistema al tiempo $t + \Delta t$ a partir de la información ruidosa al tiempo t (filtro de Kalman) o también, en el Control Adaptivo cuando se estiman los coeficientes del regulador al tiempo t . En estos casos y en su momento adecuado se calculan, generalmente usando el MMV, los parámetros del modelo propuesto para la descripción del sistema, ya sea para hacer predicciones o para minimizar un error cuadrático medio (Wiener & Hopf, 1931; Kalman & Bucy, 1961). Pero nunca se cuestiona si el modelo sigue siendo el adecuado. De ahí que la aplicación del algoritmo de este trabajo en el momento antes de la predicción o de la optimización del error ayudaría a un mejor funcionamiento de la planta del sistema.

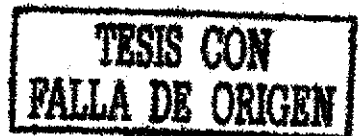
A P E N D I C E A I

PROGRAMA DEL ALGORITMO

Consta de dos partes fundamentalmente. En la primera se calculan los parámetros óptimos para el modelo de acuerdo a una lista de datos experimentales e incertidumbres. Esta parte se puede dividir en cuatro partes a su vez: una para mapear la superficie generada por la función de Soporte, otra sección para encontrar el mínimo de esta función, la tercera evalúa la función de Soporte; la cuarta y última, es para obtener las incertidumbres de los parámetros evaluados. Todo lo anterior se encuentra escrito en lenguaje BASIC (ver figura A1).

FIGURA A.1

```
10 REM INICIALIZACION DEL PROGRAMA
20 REM
30 DISP "DONDE ESTAN LOS DATOS":
40 INPUT Y
50 FIND Y
60 DIM X(20),R(20)
70 DISP "CUAL ES EL VALOR DE R":
80 INPUT R
90 C=1E-04
100 DISP "CUAL ES EL VALOR DE V0 INICIAL":
110 INPUT V
120 DISP "CUAL ES EL INCREMENTO DE R,R3":
130 INPUT R2,R3
140 DISP "CUAL ES EL INCREMENTO DE V,V3":
150 INPUT V2,V3
160 DISP "EL NUMERO DE DATOS":
170 INPUT U
180 REM
190 REM BUSCA Y CARGA EL ARCHIVO DE DATOS
200 REM
210 LINK Y:1050,250
220 REM
230 REM IMPRIME LOS DATOS INICIALES
240 REM
250 PRINT "R="R;"V="V;"DELTA R="R3;"DELTA V="V3
260 REM
```



```

270 REM MAPEO DE LA SUPERFICIE DE LA FUNCION DE SOPORTE
280 REM
290 P2=1
300 R5=R
310 P2=P2+1
320 FOR K1=-5 TO 5
330 R=R5+(K1*R2)
340 GOSUB 750
350 W=K1+6
360 R[W]=R
370 X[W]=J
380 NEXT K1
390 GOSUB 590
400 PRINT "R="P1;"V="V;"FMIN="P
410 R=P1
420 IF P2>3 THEN 920
430 V5=V
440 P2=P2+1
450 FOR K1=-5 TO 5
460 V=V5+(K1*V2)
470 GOSUB 750
480 W=K1+6
490 R[W]=V
500 X[W]=R1
510 NEXT K1
520 GOSUB 590
530 PRINT "R="R;"V="P1;"FMIN="P
540 V=P1
550 GOTO 300
560 REM
570 REM SUBROUTINA PARA ENCONTRAR EL MINIMO
580 REM
590 W=1
600 P=X[W]
610 P1=R[W]
620 W1=W+1
630 IF W1>11 THEN 710
640 IF X[W1] >= X[W] THEN 690
650 P=X[W1]
660 P1=R[W1]
670 W=W1
680 GOTO 620
690 W1=W1+1
700 IF W1 <= 11 THEN 630
710 RETURN
720 REM

```

FIGURA A.1 (continuación)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN


```

730 REM SUBROUTINA PARA EVALUAR LA FUNCION DE SOPORTE
740 REM
750 RESTORE 1050
760 A1=0
770 FOR K=1 TO U
780 READ T
790 READ S1
800 READ I
810 READ S2
820 F2=EXP(T/(R*C))
830 A=I-(V*(1/F2))
840 G=S2+2+((S1+2*V+2)/(R+2*C+2*EXP(2*T/(R*C))))
850 A2=A+2/G
860 GOSUB 900
870 NEXT K
880 J=A1
890 RETURN
900 A1=A1+A2
910 RETURN
920 R2=R2/R3
930 V2=V2/V3
940 REM
950 REM PRUEBA DEL GRADO DE RESOLUCION
960 REM
970 IF R2 <= 0.1 THEN 1030
980 PRINT
990 GOTO 250

```

```

830 REM
840 REM CALCULO DE INCERTIDUMBRES
850 REM
860 DISP "CALCULO LAS INCERTIDUMBRES";
870 INPUT A$
880 IF A$="SI" THEN 910
890 FIND 1
900 LINK 1
910 FIND 5
920 LINK 5

```

FIGURA A.1 (continuación)

Para el cálculo de incertidumbres busca un nuevo archivo, en caso de que no se deseen pasa a la segunda parte del algoritmo.



```

10 REDIM D(2,2),E(2,2)
20 FIND Y
25 LINK Y,990,30
30 RESTORE 990
40 X1=0
50 FOR K=1 TO U
60 READ T
70 READ S1
80 READ I
90 READ S2
100 F2=EXP(T/(R*C))
110 A=I-(V*(1/F2))
120 G=S2+2+((S1+2*V+2)/(R+2*C+2*EXP(2*T/(R*C))))
130 A1=(V*T)/(R+2*C*F2)
140 G1=(T/(R*C)-1)*(2*S1+2*V+2)/(R+3*C+2*F2+2)
150 A2=(T/(R*C)-2)*((V*T)/(R+3*C*F2))
160 G3=(-2*T*S1+2*V+2)/(R+5*C+3*F2+2)
170 G4=(T/(R*C)-1)*(-3/R+(2*T)/(R+2*C))*((2*S1+2*V+2)/(R+3*C+2*F2+2))
180 G2=G3+G4
190 X2=(2*A1+2)/G-(4*A*A1*G1)/G+2+(2*A+2*G1+2)/G+3+(2*A*A2)/G-(A+2*G2)/G+2
200 GOSUB 230
210 NEXT K
220 GOTO 260
230 X1=X1+X2
240 D(1,1)=X1
250 RETURN
260 RESTORE 990
270 X3=0
280 FOR K=1 TO U
290 READ T
300 READ S1
310 READ I
320 READ S2
330 F2=EXP(T/(R*C))
340 A=I-(V*(1/F2))
350 G=S2+2+((S1+2*V+2)/(R+2*C+2*EXP(2*T/(R*C))))
360 A1=1/F2
370 G1=(2*S1+2*V)/(R+2*C+2*F2+2)
380 A2=0
390 G2=(2*S1+2)/(R+2*C+2*F2+2)
400 X4=(2*A1+2)/G-(4*A*A1*G1)/G+2+(2*A+2*G1+2)/G+3+(2*A*A2)/G-(A+2*G2)/G+2
410 GOSUB 440
420 NEXT K
430 GOTO 470
440 X3=X3+X4
450 D(2,2)=X3
460 RETURN
470 RESTORE 990
480 X5=0
490 FOR K=1 TO U
500 READ T
510 READ S1
520 READ I
530 READ S2
540 F2=EXP(T/(R*C))
550 A=I-(V*(1/F2))
560 G=S2+2+((S1+2*V+2)/(R+2*C+2*EXP(2*T/(R*C))))
570 A1=(V*T)/(R+2*C*F2)
580 B1=1/F2
590 G1=(T/(R*C)-1)*(2*S1+2*V+2)/(R+3*C+2*F2+2)

```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```

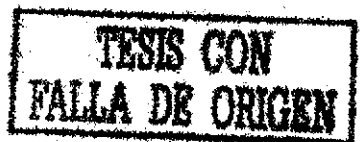
600 H1=(2*S1^2*V)/(R^2*C^2*F2^2)
610 A2=T/(R^2*C*F2)
620 B2=(T/(R*C)-1)*(4*S1^2*V)/(R^3*C^2*F2^2)
630 X6=(2*B1*A1)/G-(2*A*A1*H1)/G^2-(2*A*G1*B1)/G^2+(2*A^2*G1*H1)/G^3+(2*A*A2)/G
640 X6=X6-(A^2*B2)/G^2
650 GOSUB 680
660 NEXT K
670 GOTO 710
680 X5=X5+X6
690 DI 1,2]=X5
700 RETURN
710 RESTORE 990
720 X7=0
730 FOR K=1 TO U
740 READ T
750 READ S1
760 READ I
770 READ S2
780 F2=EXP(T/(R*C))
790 A=1-(V*(1/F2))
800 G=S2^2+((S1^2*V^2)/(R^2*C^2*EXP(2*T/(R*C))))
810 A1=(V*T)/(R^2*C*F2)
820 B1=1/F2
830 G1=(T/(R*C)-1)*(2*S1^2*V^2)/(R^3*C^2*F2^2)
840 H1=(2*S1^2*V)/(R^2*C^2*F2^2)
850 A2=T/(R^2*C*F2)
860 B2=(T/(R*C)-1)*(4*S1^2*V)/(R^3*C^2*F2^2)
870 X8=(2*B1*A1)/G-(2*A*A1*H1)/G^2-(2*A*G1*B1)/G^2+(2*A^2*G1*H1)/G^3+(2*A*A2)/G
880 X8=X8-(A^2*B2)/G^2
890 GOSUB 920
900 NEXT K
910 GOTO 950
920 X7=X7+X8
930 DI 2,1]=X8
940 RETURN
950 MAT E=INV(D)
960 PRINT "<R>="R"+-SQR(EI 1,1)
970 PRINT "<V>="V"+-SQR(EI 2,2)
980 PRINT "LAS COVARIANZAS:"EI 1,2],EI 2,1]

1000 REM
1010 REM BUSCA LA SEGUNDA PARTE DEL ALGORITMO
1020 REM
1030 FIND 1
1040 LINK 1

```

FIGURA A.1 (continuación)

La segunda parte del algoritmo es el cálculo del valor de la χ^2_{n-1} como una primera sección para después calcular el valor Q y el incremento en el soporte m. También se escribió en lenguaje BASIC y se encuentra en la figura A2.



```

10 REM CALCULO DE CHI CUADRADA
20 REM
30 FIND Y
40 LINK Y,460,50
50 RESTORE 460
60 X2=0
70 FOR K=1 TO U
80 READ T
90 READ S1
100 READ I
110 READ S2
120 F2=EXP(T/(R*C))
130 V0=V/F2
140 F3=(1-V0)12/V0
150 GOSUB 180
160 NEXT K
170 GOTO 200
180 X2=X2+F3
190 RETURN
200 PRINT "EL VALOR DE CHI CUADRADA ES"X2"CON "U-1"GRADOS DE LIBERTAD"
210 REM
220 REM CALCULO DEL INCREMENTO EN EL SOPORTE
230 REM
240 M=0.5*(X2-(U-1)*LOG(X2)-(U-1)+(U-1)*LOG(U-1))
250 PRINT "LOS LIMITES DEL SOPORTE TIENE" M "UNIDADES"
260 REM
270 REM PROGRAMA PARA CALCULAR Q DE CHI CUADRADA
280 REM
290 U=U-1
300 T=(X2-U)/(SQR(2*U))
310 E=1/(SQR(2*PI)*EXP(T2/2))
320 A1=0.4361836
330 A2=-0.1201676
340 A3=0.937298
350 P=0.33267
360 A1=A1/(1+P*T)
370 A2=A2/(1+P*T)2
380 A3=A3/(1+P*T)3
390 P1=1-(E*(A1+A2+A3))
400 Z2=E*(T2-1)
410 Z3=E*(2*T-(T*(T2-1)))
420 Z5=E*(2*13*(T2-1)-T*(T2-1)-4*T3-2*T*(1-T2)-4*T)
430 Q=1-(P1-(Z2*SQR(2))/(3*SQR(U))+Z3/(2*U)+Z5/(9*U))
440 PRINT "LA Q DE"X2"CON U"GRADOS DE LIBERTAD ES"Q

```

FIGURA A.2



A P E N D I C E A2

TABLA A2-1

T= 0.3929	V= 6.340345771	ERROR= 4.568429534
T= 0.7858	V= 4.995027895	ERROR= 1.701133752
T= 1.1787	V= 3.935164511	ERROR=-0.385359018
T= 1.5716	V= 3.100186837	ERROR=-1.941393873
T= 1.9645	V= 2.442377796	ERROR=-2.963415255
T= 2.3574	V= 1.924145096	ERROR=-3.489606679
T= 2.7503	V= 1.515872915	ERROR=-3.68585747
T= 3.1432	V= 1.194229427	ERROR=-3.452387440
T= 3.5361	V= 0.940833436	ERROR=-2.74580338
T= 3.929	V= 0.741203939	ERROR=-1.781417776
T= 4.3219	V= 0.583932562	ERROR=-0.330956356
T= 4.7148	V= 0.460031604	ERROR= 1.732140977
T= 5.1077	V= 0.362420407	ERROR= 4.298762628
T= 5.5006	V= 0.285520713	ERROR= 7.522847378
R=13728.72 OHMS Y V=8.048 VOLTS		

Errores porcentuales entre el valor teórico y el experimental para un ajuste con mínimos cuadrados.

T= 0.4	V= 6.323921694	V ESP= 6.63	ERROR= 4.616565695
T= 0.8	V= 4.985910185	V ESP= 5.08	ERROR= 1.85216171
T= 1.2	V= 3.930994338	V ESP= 3.92	ERROR=-0.280467809
T= 1.6	V= 3.099276945	V ESP= 3.04	ERROR=-1.949899500
T= 2	V= 2.443533812	V ESP= 2.37	ERROR=-3.1026925
T= 2.4	V= 1.926532413	V ESP= 1.857	ERROR=-3.744341042
T= 2.8	V= 1.518917856	V ESP= 1.46	ERROR=-4.03546958
T= 3.1	V= 1.197546139	V ESP= 1.153	ERROR=-3.863498607
T= 3.5	V= 0.944170055	V ESP= 0.915	ERROR=-3.18798411
T= 3.9	V= 0.744403128	V ESP= 0.728	ERROR=-2.25317695
T= 4.3	V= 0.586902767	V ESP= 0.582	ERROR=-0.842399776
T= 4.7	V= 0.462726236	V ESP= 0.468	ERROR= 1.126872651
T= 5.1	V= 0.364822900	V ESP= 0.378	ERROR= 3.486005247
T= 5.5	V= 0.287633893	V ESP= 0.307	ERROR= 6.30817829

Errores porcentuales para un ajuste con el MMV.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

TABLA A2-2

PREDICIONES CON $\langle R \rangle = 13773$ OHMS Y $\langle V \rangle = 8.021$ VOLTS
 PARA EL SISTEMA MENOS LINEAL (FILE 3)

T= 0.5	V= 5.927122436	V ESP= 6.83	ERROR= 13.21929083
T= 0.75	V= 5.095086830	V ESP= 6.39	ERROR= 20.26468185
T= 1	V= 4.379850439	V ESP= 5.3	ERROR= 17.36131246
T= 1.25	V= 3.765017263	V ESP= 4.14	ERROR= 9.057554041
T= 1.5	V= 3.236492932	V ESP= 3.3	ERROR= 1.924456615
T= 1.75	V= 2.782161612	V ESP= 2.68	ERROR= -3.812000448
T= 2	V= 2.391608262	V ESP= 2.15	ERROR= -11.23759358
T= 2.5	V= 1.767280263	V ESP= 1.66	ERROR= -6.462666435
T= 2.75	V= 1.519193587	V ESP= 1.42	ERROR= -6.985463844
T= 3	V= 1.305932739	V ESP= 0.932	ERROR= -40.12153848
T= 0.25	V= 6.895030751	V ESP= 0.7	ERROR= -885.004393
T= 3.5	V= 0.965019728	V ESP= 0.423	ERROR= -128.1370514
T= 3.75	V= 0.829552512	V ESP= 0.25	ERROR= -231.8210447
T= 4	V= 0.713101867	V ESP= 0.056	ERROR= -1173.396192

TABLA A2-3

T= 0.5	V= 8.873506749	V ESP= 6.83	ERROR= -29.91957173
T= 0.75	V= 6.976559902	V ESP= 6.39	ERROR= -9.179341194
T= 1	V= 5.485135634	V ESP= 5.3	ERROR= -3.432125171
T= 1.25	V= 4.312542764	V ESP= 4.14	ERROR= -4.167699617
T= 1.5	V= 3.390622645	V ESP= 3.3	ERROR= -2.74614076
T= 1.75	V= 2.665787344	V ESP= 2.68	ERROR= 0.530322982
T= 2	V= 2.095904767	V ESP= 2.15	ERROR= 2.516057365
T= 2.5	V= 1.295578202	V ESP= 1.66	ERROR= 21.95312035
T= 2.75	V= 1.018614083	V ESP= 1.42	ERROR= 28.3666189
T= 3	V= 0.800858371	V ESP= 0.932	ERROR= 14.07099020
T= 3.25	V= 0.629653705	V ESP= 0.7	ERROR= 10.0494707
T= 3.5	V= 0.495048566	V ESP= 0.423	ERROR= -17.0327579
T= 3.75	V= 0.389218837	V ESP= 0.25	ERROR= -55.68753469
T= 4	V= 0.306013012	V ESP= 0.056	ERROR= -446.4518076

Errores porcentuales entre el valor del voltaje dado por el modelo y el valor de voltaje experimental. Para el ejemplo 3.1.



TABLA A2-4

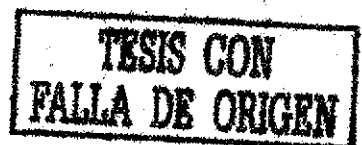
PREDICCIONES CON $\langle R \rangle = 8662$ OHMS Y $\langle V \rangle = 14.355$ VOLTS
 PARA EL SISTEMA NO LINEAL (FILE 2)

T= 0	V= 14.355	V ESP= 6.83	ERROR=-110.1756955
T= 0.5	V= 8.873506749	V ESP= 6.39	ERROR=-38.86552033
T= 0.75	V= 6.976559902	V ESP= 5.3	ERROR=-31.6332057
T= 1	V= 5.485135634	V ESP= 4.14	ERROR=-32.49119889
T= 1.25	V= 4.312542764	V ESP= 3.3	ERROR=-30.68311407
T= 1.5	V= 3.390622645	V ESP= 2.68	ERROR=-26.51577034
T= 1.75	V= 2.665787344	V ESP= 2.15	ERROR=-23.99010903
T= 2	V= 2.095904767	V ESP= 1.66	ERROR=-26.25932329
T= 2.5	V= 1.295578202	V ESP= 1.42	ERROR= 8.762098435
T= 2.75	V= 1.018614083	V ESP= 0.932	ERROR=-9.293356491
T= 3	V= 0.800858371	V ESP= 0.7	ERROR=-14.40833877
T= 3.25	V= 0.629653705	V ESP= 0.423	ERROR=-48.854300379
T= 3.5	V= 0.495048566	V ESP= 0.25	ERROR=-98.01942637
T= 3.75	V= 0.389218837	V ESP= 0.056	ERROR=-595.033637

TABLA A2-5

T= 0	V= 12.955	V ESP= 6.83	ERROR=-89.67709155
T= 0.5	V= 7.726979189	V ESP= 6.39	ERROR=-20.922997
T= 0.75	V= 5.967547784	V ESP= 5.3	ERROR=-12.59524121
T= 1	V= 4.60873851	V ESP= 4.14	ERROR=-11.32218623
T= 1.25	V= 3.559329799	V ESP= 3.3	ERROR=-7.858478749
T= 1.5	V= 2.748871213	V ESP= 2.68	ERROR=-2.569821363
T= 1.75	V= 2.122953862	V ESP= 2.15	ERROR= 1.257959899
T= 2	V= 1.63955775	V ESP= 1.66	ERROR= 1.23146083
T= 2.5	V= 0.977910352	V ESP= 1.42	ERROR= 31.13307377
T= 2.75	V= 0.755240387	V ESP= 0.932	ERROR= 18.96562366
T= 3	V= 0.583272323	V ESP= 0.7	ERROR= 16.67538245
T= 3.25	V= 0.450461348	V ESP= 0.423	ERROR=-6.49204433
T= 3.5	V= 0.347891401	V ESP= 0.25	ERROR=-39.15656042
T= 3.75	V= 0.268676608	V ESP= 0.056	ERROR=-379.7796573

Errores porcentuales del ajuste en el ejemplo 3.2



BIBLIOGRAFIA

1. Abramowitz M., Stegun I.A. "Handbook of Mathematical Functions". Dover Publication Inc. 1972.
2. Arthur, W.B., Doming, J.J. "A dynamic model of nuclear energy market share employing full-information Maximum Likelihood parameter estimation via Kalman filtering". Modeling and simulation, 7, 173-7 1976. ISA Pittsburgh P.A. U.S.A.
3. Åström, K.J.; Bohlin T. "Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from normal operating records" Proceedings of the 2ND IFAC Symposium on the Theory of Self-Adaptive Control Systems. Sept.1965 National Physics Lab. Teddington, England.
4. Bakhvalov N.S. "Numerical Methods". Traducido del ruso por Yankovsky G. MIR 1977.
5. Bekey G.A., Karplus W.J. "Hybrid computation". Wiley International Edition 1968.
6. Bode H.W. y Shannon C.E. "A simplified derivation of linear least square smothing and prediction theory", Proc. IRE, 38 417-425, Abril (1980).
7. Bohlin, T. "Analysis of EEG Signals with changing spectra using a short-word Kalman estimator". Math. Biosci. (USA) 35, 221-59. 1977.



8. Box E.P.G., Hunter W.G., Hunter J.S. "Statistics for Experimenters. An introduction to Design, Data Analysis, and Model Building". Wiley 1978.
9. Edwards, A.F.W. "Likelihood" Cambridge University Press, 1976.
10. Fabries J.F., Renon H. "Method of reduction of experimental data for vapor-liquid equilibrium at low pressure". International symposium of Reduction of vapor-liquid equilibrium data. 1975 Marsella Francia V.E.R. Scientifique de Luminy.
11. Harvey A.C. y Phillips B.D.A. Bometrika 66, 49-53 (1979).
12. Hoel P.G. "Introduction to Mathematical Statistics" Wiley International Edition 1971.
13. Kailath T., y Frost P., IEEE Trans. Ant. Cont. AC-13, N6, 655-660 Dic. (1968).
14. Kailath T. IEEE Tans. Ant. Cont. AC-13, N6, 646-655, Dic. (1968).
15. Kalman R.E. y Bercy R.S. Lourn, of Basic Eng. 95, 107, Marzo (1961).
16. Kalman, R.E. "New Methods in Wiener filtering Theory" "Procc. of first Symp. Eng. Appli, John Wily and Sons, 270-388 (1962).
17. Lemay L.J. Brogam W.L. "Lecture Notes in Kalman Filtering" Vol. I y II. UCLA SJS Inc. 1980.

18. Mc Aulay R.J. "Maximum Likelihood Pitch Estimation using state-variable techniques" Proceedings of the 1978 IEEE international conference on acoustic, speech and signal processing. 1978 TULSA OK USA.
19. Norton J.P. Procc. IEEE 126, No. 2, 185-188, Feb. (1979).
20. Ott N. IBM Publicación 70.11.005, 1-39, Nov. (1970).
21. Perez-Rosette H., Viniegra F.H. "El método de máxima verosimilitud y la técnica para su utilización" Revista del Instituto Mexicano del Petróleo XI, 2, 49-57 Abril 1979.
22. Rauch H.E., Tung F. y Striebel C.T. AIAA Lourn. 3, No. 8, 1445-1480, Agosto (1965).
23. Repperger, D.W., Junker, A.M. " A ML Approach of identifying human operator remnant in a trackingstack" Proceedings of the 1975 IEEE Conference on Decisión Control including the 14th Symposium on adaptive process. Houston, Tex. U.S.A.
24. Rosko, Joseph S. "Digital Simulation of Physical Systems" Addison-Wesly 1972.
25. Smith M.W.A. Math. Comp. Simul. XX, 102-109 (1978).
26. Worrel F.T. "Experimenting with Real Systems " AJP 42, 503-5 (USA) 1974.
27. Wiener N. "The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications", New York. Willy, (1949).
28. Wiener N. of Hopf E. "On a class of singular integral equation" Proc. Prussion Acad. Math-Phys. Sei, 696, (1931).

29. Zadeh L.A. y Ragazzini S.R., "An extension of Wiener's - theory of prediction" S. Appl. Phys. 21, 645-655, Julio (1950).
30. Zadeh L.A. y Desoer C. "Teoria de sistemas lineales" A state space approach. New York. Mc Graw-Hill (1963).