



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

8  
2EJ

PRUEBA DE RODDIER. UNA REVISION

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
F I S I C O  
P R E S E N T A

**MANUEL CAMPOS GARCIA**



MEXICO, D. F.

1995

FALLA DE ORIGEN

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



INSTITUTO NACIONAL  
AZÚCAR DE  
MÉXICO

**M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE**

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Manuel Campos García

con número de cuenta 8236081-2 con el Título:

"PRUEBA DE RODDIER. UNA REVISION"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Físico.

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
	Dr. Rufino Díaz Uribe		<i>[Firma]</i>
<b>Director de Tesis</b>	Dr. Ramiro García García		<i>[Firma]</i>
	Dr. Alejandro Cornejo Rodríguez		<i>[Firma]</i>
	Dra. Martha Rosete Aguilar		<i>[Firma]</i>
<b>Suplente</b>	M.en C. Beatriz Fuentes Madariaga		<i>[Firma]</i>
<b>Suplente</b>			

*Dedico esta tesis con todo mi cariño a mi  
adorado hijo Juan Manuel esperando que  
sirva de ejemplo y a mi amada esposa  
Magdalena por su paciencia y apoyo.*

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a mis Padres Barbará y José Manuel por haberme dado la oportunidad de estudiar. También a mis hermanos Gabriel, Rosa y Marco Antonio. En general a la familia García por su apoyo.

Agradezco a mis compañeros de estudio de los cuales aprendí muchas cosas (Club de "Tobi" ?): Manuel Olivares, Fermín Granados, Tizoc Sotelo, Jorge Rosas, Enrique Garduño, Antonio, Juan Luis, Pedro, Wenceslao, Ricardo, Max, Gerardo ...

Deseo agradecer de manera especial a mi director de Tesis Dr. Rufino Diaz Uribe por haberme dado la oportunidad de trabajar con él. ¡Gracias, Rufino!

Así mismo, agradezco a mis Profesores y Sinodales M. en C. Beatriz Fuentes y Dr. Ramiro García; y Sinodales, Dra. Martha Rosete y Dr. Alejandro Comejo; por sus comentarios y sugerencias.

Agradezco el apoyo que me brindo el M. en C. Salvador Arellano Balderas.

Agradezco al Centro de Instrumentos de la UNAM el apoyo que me brindo a través de una beca.

También agradezco el apoyo incondicional que me ha brindado la Familia Olvera, el Señor Lázaro y la Sra. Angelina así como todos sus hijos.

Finalmente deseo agradecer el apoyo que me brindo el grupo de óptica: Dr. Roberto Ortega, Fís. Arturo Nogueira, Eduardo González, María Orozco, Armando González ...

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN GENERAL.	1
CAPÍTULO 1 : PRUEBAS ÓPTICAS.	
MÉTODOS DE PERCEPCIÓN DEL FRENTE DE ONDA.	3
1.1. Introducción.	3
1.2. Métodos de percepción del frente de onda.	4
1.2.1. Método de Roddier.	4
1.2.2. Método de Shack-Hartmann.	5
1.2.3. Recuperación de fase.	7
CAPÍTULO 2 : ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA.	9
2.1. Introducción.	9
2.2. Obtención de la Ecuación de Transporte de Irradiancia mediante argumentos de óptica física.	9
2.2.1. Teoría básica.	9
2.2.1.1. Ecuación de Helmholtz.	9
2.2.1.2. Teoría de la difracción.	10
2.2.2. Ecuación de onda paraxial y ecuación parabólica.	11
2.2.3. Ecuación de transporte de irradiancia. (Óptica física).	12
2.3. Obtención de la Ecuación de Transporte de Irradiancia mediante argumentos de óptica geométrica.	15
2.3.1. Ecuación de transporte de irradiancia. (Óptica geométrica).	15
2.3.2. Límites de validez de la Ecuación de Transporte de Irradiancia.	17
2.4. Conclusiones.	18
CAPÍTULO 3 : MÉTODO DE RODDIER.	19
3.1. Introducción.	19
3.2. Instrumentación del método de Roddier.	19
3.3. Obtención de la ecuación de Roddier a partir de cálculos directos.	19
3.3.1. Distribución de irradiancia en el plano $P_1$ .	19
3.3.2. Distribución de irradiancia en el plano $P_2$ .	21
3.3.3. Aproximaciones de óptica geométrica.	22
3.3.4. Ecuación de Roddier.	24
3.4. Obtención de la ecuación de Roddier a partir de la Ecuación de Transporte de Irradiancia.	27
3.5. Generalización del método de Roddier.	30
3.5.1 Método de Roddier en sistemas que producen frentes de onda no convergentes	30
3.6. Conclusiones.	32

<b>CAPÍTULO 4 : SIMULACIÓN DEL MÉTODO DE RODDIER</b>	<b>34</b>
4.1. Introducción.	34
4.2. Solución numérica de la ecuación de Roddier por el método de diferencias finitas.	34
4.3. Simulación.	38
4.3.1. Ejemplos.	39
4.3.1.1. Frente de onda sin aberraciones.	39
4.3.1.2. Frente de onda con tilt.	40
4.3.1.3. Frente de onda con defoco.	43
4.3.2. Comentarios sobre el cálculo de la señal del sensor en el borde.	45
4.4. Conclusiones.	46
<b>CONCLUSIONES GENERALES.</b>	<b>47</b>
<b>APÉNDICE A :</b>	
Obtención de la ecuación de transporte de irradiancia general a partir de teorema de Poynting.	48
<b>APÉNDICE B :</b>	
Calculo de la distribución de irradiancia en el plano $P_2$	50
<b>APÉNDICE C :</b>	
Condición de consistencia para la ecuación de Poisson en coordenadas polares en el método de diferencias finitas.	51
<b>APÉNDICE D :</b>	
Diagrama de bloques del programa "SR" empleado en la simulación del método de Roddier.	52
<b>APÉNDICE E :</b>	
Condición de consistencia para la existencia de la solución en una ecuación de Poisson con condiciones a la frontera de Neumann.	53
<b>REFERENCIAS.</b>	<b>54</b>

## INTRODUCCIÓN GENERAL

En ciencia y tecnología modernas se ha hecho fundamental el desarrollo de sistemas ópticos de muy alta calidad. En astronomía, por ejemplo, se han desarrollado los llamados telescopios de nueva tecnología (NTT) basados en óptica activa (un sistema óptico activo [1], en cuanto a su uso se refiere, es aquel que puede corregirse durante el tiempo de operación), como el del ESO (European Southern Observatory) en Chile.

La característica más importante de un sistema óptico es la calidad de la formación de imágenes, pero no siempre estas imágenes son de buena calidad debido a errores en los sistemas ópticos como pueden ser: aberraciones en lentes y espejos, errores en los ángulos de prismas, errores en las superficies ópticas producidos en la fabricación, etc. Sin embargo, estos errores pueden ser conocidos con la ayuda de las pruebas ópticas para posteriormente corregirse. Dentro de las pruebas ópticas [1] se encuentran las técnicas mediante las cuales se puede obtener el frente de onda (o fase) de un haz de rayos que pasan a través de un sistema óptico; a estas técnicas se les llama métodos de percepción del frente de onda y son importantes ya que a partir del frente de onda se pueden conocer los errores en el sistema óptico. Por tal motivo, se puede decir que el desarrollo de los sistemas ópticos recae en buena medida en los métodos de percepción del frente de onda mediante los cuales, por ejemplo, pueden probarse sistemas durante su fabricación y diseño, y se pueden controlar y alinear sistemas en operación.

En los últimos años se ha investigado un nuevo método de percepción del frente de onda llamado método de Roddier [2] o método de percepción de la curvatura del frente de onda, cuya instrumentación es técnicamente más simple en comparación con los métodos tradicionales, como el método de Shack-Hartmann [1][3]. El método de Roddier consiste principalmente en efectuar mediciones de irradiancia en dos planos desenfocados a partir de las cuales se obtiene directamente la curvatura del frente de onda (haciendo la diferencia de las irradiancias y normalizando). Finalmente, este frente de onda es recuperado resolviendo la ecuación de Roddier que no es más que una ecuación de Poisson con condiciones a la frontera tipo Neumann.

El trabajo de tesis consiste en realizar un análisis completo y detallado que nos permita comprender lo que es el método de Roddier, es decir, conocer cuáles son sus alcances y limitaciones. Para lograr esto se planteó la siguiente metodología, misma que se desarrollará y explicará en detalle a lo largo de cada uno de los capítulos de la tesis:

1. Descripción de algunos métodos de pruebas ópticas, en particular los métodos de percepción del frente de onda [3] para establecer la forma en cómo surge el método de Roddier y qué relación tiene con otros métodos de pruebas ópticas. Capítulo I.
2. Si bien la teoría del método de Roddier puede explicarse efectuando cálculos directos, es posible dar una descripción más física partiendo de la Ecuación de Transporte de

Irradiancia [4][5], por lo que es importante estudiar y obtener esta ecuación. La Ecuación de Transporte de Irradiancia se obtiene mediante argumentos de óptica física, partiendo de la ecuación parabólica y la ecuación de onda paraxial siendo ambas casos particulares de la ecuación de Helmholtz. También se puede obtener mediante argumentos de óptica geométrica [6], relacionando el teorema de Poynting de la teoría electromagnética con la ecuación Eikonal de la óptica geométrica. De esta relación se deduce una ecuación de transporte de energía generalizada que mediante algunas aproximaciones es equivalente a la ecuación de transporte de irradiancia. Capítulo 2.

3. Estudio de la teoría básica del método y obtención de la ecuación de Roddier. La ecuación de Roddier se obtiene de dos maneras: la primera es efectuando cálculos directos [7] usando para ello la óptica de Fourier [8] y la óptica física (teoría de la difracción), y la segunda a partir de la Ecuación de transporte de Irradiancia [9]. Todo lo anterior se hace con el propósito de establecer que el método de Roddier es un método de óptica geométrica a pesar de que surge de argumentos de óptica física. Capítulo 3.
4. Obtención de ecuaciones tipo Roddier para sistemas que producen haces no convergentes a la salida; esto con el objeto de generalizar el método a superficies planas como por ejemplo prismas o cualquier espejo plano. Capítulo 3.
5. Simulación del método de Roddier. Esta se lleva a cabo en tres partes, primero se proponen frentes de onda conocidos que son sustituidos en la ecuación de transporte de energía generalizada para obtener su correspondiente función de irradiancia. Segundo, esta función de irradiancia se emplea en la ecuación de Roddier obteniéndose una ecuación de Poisson con condiciones de Neumann a la frontera que se resuelve numéricamente mediante el método SOR (Simultaneous Over-Relaxation) [10][11][12][13]. Por último, se comparan ambos frentes de onda, el propuesto y el numérico. Capítulo 4.

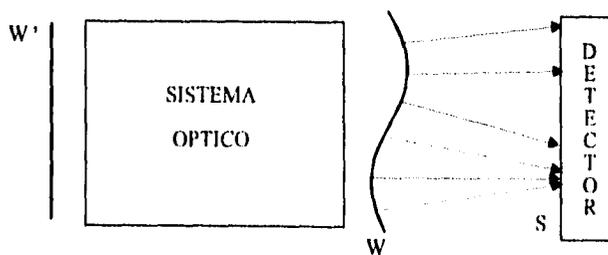
## CAPÍTULO I

### PRUEBAS ÓPTICAS. MÉTODOS DE PERCEPCIÓN DEL FRENTE DE ONDA.

#### 1.1. INTRODUCCIÓN.

En el desarrollo de algunas ciencias como son la astronomía o la biología, el poder obtener imágenes lo más parecidas posibles de un objeto que se esté estudiando es muy importante, debido a que esta imagen puede conducir a interpretaciones adecuadas de los fenómenos que se estudian. Por ejemplo, el tener una buena imagen de alguna galaxia distante permitiría a los astrónomos, de una manera eficiente, poder estudiar el comportamiento de éstas y/o conocer su estructura. Sin embargo, en la realidad se encuentra que estas imágenes son deterioradas o confusas debiéndose principalmente a errores en los sistemas ópticos empleados para obtenerlas como pueden ser: aberraciones en lentes o espejos, errores en ángulos de prismas, desalineaciones, defectos de fabricación etc. (También esta degradación de las imágenes puede deberse a factores externos al sistema como: las vibraciones y la turbulencia atmosférica). Esto nos indica que la calidad en la imagen o imágenes está limitada por la óptica de los sistemas empleados para obtenerlas, por lo que para controlar y conocer la calidad óptica de los sistemas y no tener una interpretación errónea de la imagen estudiada, es necesario contar con métodos de pruebas ópticas cuya instrumentación sea simple y precisa.

En una prueba óptica, generalmente al sistema se le hace interactuar con un haz luminoso cuyo frente de onda (o fase)  $W'$  es conocido; puede tratarse de un frente de onda plano o esférico. Posteriormente emergerá del sistema óptico un frente de onda deformado,  $W$ , que es el parámetro (ó es la cantidad) que se desea conocer, ya que a partir de éste es posible saber cuáles son los tipos de errores del sistema óptico. Por ello se hace importante contar con un método adecuado y eficiente para la percepción del frente de onda; véase figura 1.1.



*Figura 1.1. Esquema general de una prueba óptica.*

## 1.2. MÉTODOS DE PERCEPCIÓN DEL FRENTE DE ONDA.

Actualmente existen gran variedad de métodos para percibir el frente de onda [1][3]. Estos se pueden clasificar según pertenezcan al régimen de la óptica geométrica, por ejemplo el método de Ronchi, o al régimen de la óptica física, por ejemplo los algoritmos de recuperación de fase (véase sección 1.2.3). Estos a su vez se pueden clasificar en interferométricos, por ejemplo el método de desplazamiento lateral, o no interferométricos, por ejemplo el método de Shack-Hartmann. También hay métodos cualitativos o semi-cuantitativos como el método de la navaja de Foucault, o cuantitativos como el método de Roddier.

En una prueba óptica el empleo de uno u otro método depende de factores tales como: el tamaño del sistema, el tipo de fuente luminosa empleada (puede ser una fuente coherente o incoherente), la complejidad o el costo de la instrumentación del sistema de prueba, la rapidez con la que se desea recuperar el frente de onda o fase (la rapidez de recuperación del frente de onda es muy importante en aplicaciones de óptica activa), o simplemente de acuerdo al medio ambiente donde se encuentre el sistema óptico que se esté probando ya que la presencia de vibraciones o turbulencia atmosférica [14] pueden afectar los resultados. En este trabajo consideraremos sólo aquellos métodos de percepción del frente de onda que sean cuantitativos ya que desde un punto de vista tecnológico, es importante conocer de manera cuantitativa la magnitud de las aberraciones o errores del sistema óptico que se esté probando para así corregirlo.

### 1.2.1. MÉTODO DE RODDIER.

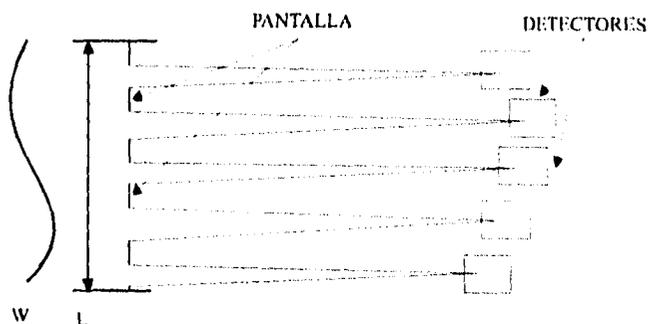
El método de Roddier [2][15] o método de la percepción de la curvatura del frente de onda, y que es objeto de estudio en este trabajo, está basado en las observaciones cualitativas de imágenes desenfocadas cuyas variaciones en la intensidad reflejan cambios en la curvatura del frente de onda y que eran empleadas principalmente para la alineación de telescopios [16]. Recientemente Beckers [17] da una interpretación sobre las imágenes desenfocadas obtenidas en un telescopio de espejos múltiples, en términos de la curvatura del frente de onda. Este es un método cuyo desarrollo está directamente relacionado con el método de Shack-Hartmann y con los algoritmos de recuperación de fase.

El método de Roddier, que es empleado principalmente para probar la óptica de telescopios astronómicos, es relativamente fácil de instrumentar en comparación con los métodos cuantitativos tradicionales, como por ejemplo el método de Shack-Hartmann. Este método pertenece al régimen de la óptica geométrica, es un método cuantitativo (es posible conocer cuantitativamente el frente de onda o fase), su sensibilidad es comparable con la del método de Shack-Hartmann [2] y puede ser empleado en aplicaciones de óptica activa [15] (Schwartz y otros [18] emplean un espejo bimorfo como dispositivo analógico en conjunción con el sensor de Roddier para corregir el frente de onda).

El método de Roddier consiste básicamente en efectuar mediciones de la distribución de irradiancia en dos planos desenfocados simétricamente colocados a ambos lados del plano focal del sistema óptico que se desea probar. La diferencia en las mediciones de la distribución de irradiancia son una medida de la curvatura del frente de onda o el laplaciano de la superficie del frente de onda (previamente Teague [19] había propuesto como aplicación obvia e inmediata la percepción del frente de onda basada sólo en mediciones de irradiancia). De la diferencia de las mediciones se obtiene una ecuación de Poisson con condiciones a la frontera de Neumann cuya solución nos proporciona cuantitativamente el frente de onda. Esta ecuación puede ser obtenida y explicada a partir de la Ecuación de Transporte de Irradiancia la cual se obtuvo a partir de algunos trabajos realizados sobre recuperación de fase efectuados por Teague [19][20].

### 1.2.2. MÉTODO DE SHACK-HARTMANN.

El método de Shack-Hartmann es un método comúnmente empleado por la comunidad astronómica para probar la óptica de telescopios astronómicos. Este pertenece al régimen de la óptica geométrica y se emplea en aplicaciones de óptica activa (existe un sensor Shack-Hartmann colocado en el telescopio de nueva tecnología NTT del ESO en Chile, empleado principalmente para aplicaciones de óptica activa).



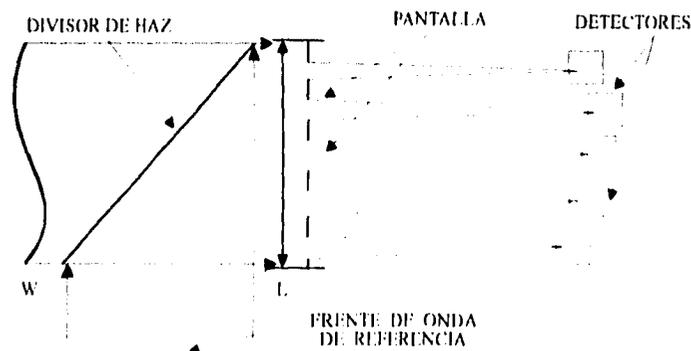
**Figura 1.2.** Sensor de Shack-Hartmann.

Este método está basado principalmente en la posibilidad de reconstruir el frente de onda a partir de la medición de la inclinación (pendiente) del frente de onda local (wavefront tilt) en pequeñas regiones [1][3]. Esto se lleva a cabo dividiendo el frente de onda en pequeñas regiones y colocando una pantalla opaca con agujeros; en éstos se colocan unos pequeños lentes atrás del espejo de prueba. Cada agujero actúa como una abertura a través de la cual pasa la luz produciendo un arreglo de puntos luminosos como imagen. Con una calibración adecuada, la posición de los puntos luminosos es proporcional a la inclinación (pendiente) del frente de onda local en cada agujero, proporcionándonos esto una

descripción de la calidad del lente o espejo de prueba. En la figura 1.2 se muestra el sensor de Shack-Hartmann; el frente de onda es dividido por una pantalla que puede ser un arreglo de lentes; cada rayo luminoso en cada una de las subaberturas es enfocado hacia un detector de posición de cuadrante.

Como es fácil de observar, para que el sensor de Shack-Hartmann sea eficiente es necesario contar con una pantalla que tenga una alta calidad óptica y con un sensor de posición que sea eficiente; esto, en cuanto a diseño se refiere, representa un gran reto para la ingeniería. Sin embargo, aún cuando se reúnan la características anteriores, existen ciertos inconvenientes si el sistema no está calibrado perfectamente. Esto significa que si los puntos luminosos no caen en el centro del detector de posición cuando se quita el lente o espejo de prueba, la medición de la inclinación (pendiente) del frente de onda local obtenida será errónea; es decir, no se podrá saber qué tanto se han desviado los puntos luminosos respecto de una posición de referencia una vez que es colocado el sistema de prueba.

El método más fundamental para remover los errores de alineación es la introducción de un haz de referencia. Este haz suele ser una onda plana cuya longitud de onda es diferente a la del haz que tiene el frente de onda desconocido; esto es debido a que no se desea ningún tipo de interferencia entre los dos haces. En la figura 1.3 se muestra un sensor de Shack-Hartmann con referencia.



**Figura 1.3.** Sensor de Shack-Hartmann con referencia.

Como ya se mencionó en la sección anterior, el método de Roddier y el método de Shack-Hartmann son no interferométricos y pertenecen al régimen de la óptica geométrica [1], además según Roddier [2] ambos tienen la misma sensibilidad. Sin embargo, una de las mayores ventajas que nos da el método de Roddier es que su instrumentación es más sencilla que la del sensor de Shack-Hartmann. Otra ventaja se encuentra en el hecho de que es más

fácil, experimentalmente hablando, el medir un campo escalar, como lo es la irradiancia (el laplaciano o curvatura del frente de onda local) en el método de Roddier, que un campo vectorial, como lo es la inclinación (pendiente) del frente de onda local en el método de Shack-Hartmann donde se tienen que hacer el doble de mediciones, una por cada componente, de un punto de prueba. Otra ventaja más se encuentra en aplicaciones de óptica activa donde el uso de un espejo bimorfo o un espejo de membrana, en el método de Roddier, pueden utilizarse como dispositivos analógicos para recuperar automáticamente el frente de onda y así corregir el sistema de prueba durante el tiempo de operación [15][18]. De acuerdo a lo anterior, el método de Roddier parece ser un serio candidato para sustituir al método de Shack-Hartmann.

### 1.2.3. RECUPERACIÓN DE FASE.

La recuperación de fase [1] consiste en obtener el frente de onda o fase óptica de un haz luminoso a partir de su patrón de difracción. La formulación matemática del patrón de difracción se encuentra en la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld, la cual describe los efectos de la fase en la propagación de la luz de acuerdo al principio de Huygens-Fresnel [6].

Desafortunadamente, no hay una manera directa de medir la fase de un sólo fotón; no hay forma de interactuar con el haz luminoso para determinar la dirección instantánea de su vector eléctrico. Sin embargo, de acuerdo a los principios de interferencia y difracción, es posible relacionar la fase óptica con la distribución de irradiancia, cantidad que si puede ser medida, para obtener el frente de onda o fase del haz luminoso que se estudia.

El problema de recuperación de fase ha sido abordado por muchos investigadores los que han desarrollado múltiples algoritmos; Fienup [21] hace una revisión y comparación de algunos de ellos. Algunos emplean métodos para evaluar el patrón de difracción de Fraunhofer, otros calculan los momentos de irradiancia a partir del patrón de difracción [19] y otros más, efectúan mediciones múltiples de irradiancia para extraer la información del frente de onda [20]. Sin embargo, el problema no es trivial debido principalmente a la no unicidad del patrón de difracción.

Teague [19][20] desarrolló dos algoritmos de recuperación de fase que tienen implicaciones directas con el método de Roddier. En estos, Teague propone como aplicación obvia y directa la percepción del frente de onda a partir de mediciones de irradiancia en mínimo dos planos para medir aberraciones de primer orden. Si se desean medir aberraciones de mayor orden se tienen que tomar las irradiancias en más de dos planos.

Uno de sus algoritmos [19] consiste en la determinación de la fase óptica a partir de mediciones de los momentos de irradiancia medidos en planos múltiples; sin embargo, en principio, dos planos son suficientes para obtener la fase. En el otro algoritmo [20] se determina la fase a partir de mediciones de irradiancia en dos planos; se derivan ecuaciones

de propagación para la fase y la irradiancia y se da una solución en términos de las funciones de Green para la fase, que está dada en términos de la irradiancia. De estas últimas ecuaciones se obtiene la ecuación de transporte de irradiancia, fundamental para la descripción de la teoría del método de Roddier.

De acuerdo a lo anterior podemos decir que el método de Roddier, que pertenece al régimen de la óptica geométrica, puede ser considerado un caso particular de los algoritmos de recuperación de fase que pertenecen al régimen de la óptica física [14].

## CAPÍTULO 2

### ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA.

#### 2.1. INTRODUCCIÓN.

La teoría básica del método de Roddier se describe a partir de cálculos directos de la irradiancia en dos planos simétricamente desenfocados [7]. Sin embargo, se puede establecer una descripción alternativa de esta teoría, desde un punto de vista más físico, si se parte de la Ecuación de Transporte de Irradiancia [9].

La Ecuación de Transporte de Irradiancia se obtiene de argumentos de óptica física. En particular, surge de trabajos efectuados sobre recuperación de fase basados en la teoría de la difracción (véase sección 1.2.3). Sin embargo, se puede mostrar que la Ecuación de Transporte de Irradiancia también puede obtenerse partiendo de argumentos de óptica geométrica.

#### 2.2. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA FÍSICA.

##### 2.2.1. TEORÍA BÁSICA.

##### 2.2.1.1. ECUACIÓN DE HELMHOLTZ.

Consideremos que  $w(x,y,z,t)$  representa una perturbación óptica al tiempo  $t$  y en la posición  $P(x,y,z)$  (puede ser la magnitud del campo magnético o del campo eléctrico). Supongamos que  $w(x,y,z,t)$  es una onda óptica monocromática escalar de la forma

$$w(x,y,z,t) = \exp(-i\omega t) u(x,y,z) \quad (2.1)$$

donde  $\omega = Kc$  es la frecuencia angular,  $K=2\pi/\lambda$  es el número de onda,  $c$  es la velocidad de la luz y  $u(x,y,z)$  es una función compleja que depende sólo de la posición. Como  $w(x,y,z,t)$  representa una onda óptica debe satisfacer la ecuación de onda

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w(x,y,z,t) = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  es el operador laplaciano. Si sustituimos (2.1) en (2.2) y desarrollamos, obtenemos una ecuación independiente del tiempo

$$(\nabla^2 + K^2)u(x,y,z) = 0 \quad (2.3)$$

que recibe el nombre de Ecuación de Helmholtz [6][8]. En lo que sigue supondremos que cualquier onda monocromática que dependa sólo de la posición deberá obedecer esta ecuación.

### 2.2.1.2. TEORÍA DE LA DIFRACCIÓN.

Los efectos de la propagación de frentes de onda ópticos que pasan a través de planos que contienen aberturas requiere de la evaluación de la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld la cual describe matemáticamente el principio de Huygens-Fresnel [6][8][22]

$$u(x,y,z) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[iK(r+r')] \cos(\vec{n}, \vec{r})}{r r'} dx' dy' \quad (2.4)$$

donde

$$r = \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (2.5)$$

es la distancia desde un punto  $P'$  sobre el plano de la abertura hasta un punto  $P$  sobre la región del plano de observación,  $\Sigma$  es la abertura,  $(x,y)$  son las coordenadas en plano de observación,  $(x',y')$  son las coordenadas en el plano de la abertura,  $\cos(\vec{n}, \vec{r})$  es el factor de oblicuidad, y  $\vec{n}$  es un vector unitario perpendicular al plano de la abertura (figura 2.1). La fórmula (2.4) se considera exacta, esto es, válida en todo el espacio de propagación. Sin embargo, a pesar de ser exacta, su evaluación directa impone algunas dificultades numéricas. Primero, es no separable debido a que  $r$  contiene a  $x'$  y  $y'$  en una raíz cuadrada común; y segundo, el factor de fase en el integrando  $Kr$  es grande debido a lo pequeño de las longitudes de onda ópticas, lo que implica que el integrando oscile rápidamente.



Figura 2.1. Geometría de difracción.

Algunas de estas dificultades pueden resolverse mediante algunas aproximaciones. Estas aproximaciones se basan en la suposición de que la distancia  $z$ , entre el plano de la abertura  $\Sigma$  y el plano de observación, sea mucho mayor que la máxima dimensión de la

abertura y que la máxima dimensión de la imagen de la abertura en el plano de observación, (figura 2.1). Basados en estas suposiciones el factor de oblicuidad de (2.4) puede aproximarse por  $\cos(\bar{n}, \bar{r}) = 1$  y el término  $r$  en el denominador puede sustituirse por  $z$ . La cantidad  $r$  en el exponente no se sustituye por  $z$  debido a que está multiplicado por una cantidad grande que es  $K$  y esto podría generar errores de fase mayores de  $2\pi$  radianes. Sin embargo, este problema se puede resolver si efectuamos una expansión binomial al término raíz cuadrada de (2.5), es decir

$$r \approx z + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} - \frac{\{(x-x')^2 + (y-y')^2\}^2}{8z^3} + \dots \quad (2.6)$$

Reteniendo los primeros dos términos de esta expresión y sustituyéndolos juntos con las otras suposiciones, la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld (2.4) se reduce a la fórmula de difracción de Fresnel

$$u_r(x, y, z) = \frac{\exp(iKz)}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} u(x', y', 0) \exp\left[\frac{ik\{(x-x')^2 + (y-y')^2\}}{2z}\right] dx' dy' \quad (2.7)$$

donde  $u(x', y', 0) = A \exp(iKr')/r'$ . Para que la aproximación a primer orden sea válida, es suficiente que los errores en fase que producen los términos cuadráticos de (2.6) (tercer término en la expansión) sean mucho menores que un radián [8].

## 2.2.2. ECUACIÓN DE ONDA PARAXIAL Y ECUACIÓN PARABÓLICA.

Sea  $\Psi(x, y, z)$  la parte espacial de una perturbación óptica que se propaga en la dirección de  $z$  y que puede describirse por una onda escalar, que obedece a la ecuación de Helmholtz, de la forma

$$\Psi(x, y, z) = u(x, y, z) \exp(-iKz)$$

Sustituyendo esta perturbación óptica en la ecuación de Helmholtz (2.3) y desarrollando, obtenemos

$$\left( \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2iK \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, y, z) = 0 \quad (2.8)$$

donde  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  es el operador laplaciano bidimensional. Si suponemos que  $u(x, y, z)$  varía muy lentamente en  $z$ , esto es,  $u(x, y, z)$  puede considerarse como casi lineal en  $z$ ; entonces  $\partial^2 u / \partial z^2$  puede ser despreciada y (2.8) se convierte en

$$\left( \nabla_T^2 - 2iK \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, y, z) = 0 \quad (2.9)$$

que es la llamada ecuación de onda paraxial [22][23][24]. Nótese que la suposición hecha en (2.8) para obtener la ecuación paraxial (2.9) es equivalente al requerimiento de que

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} u \right| \ll \left| \nabla_T^2 u \right| + \left| -2iK \frac{\partial u}{\partial z} \right|$$

en todas partes de la región de propagación. Puede mostrarse que la ecuación de onda paraxial (2.9) y sus soluciones pueden conducir a una descripción de la difracción equivalente a la formulación de Fresnel [22]. Feiock [23] muestra que mientras que la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld (2.4) es una solución exacta a la ecuación de Helmholtz (2.3), la fórmula de difracción de Fresnel (2.7) sin el término  $\exp(iKz)$  es una solución exacta de la ecuación de onda paraxial (2.9).

Considerando lo anterior, supongamos una perturbación de Fresnel (2.7) (sin el factor  $\exp(iKz)$ ), de la forma  $\phi(x, y, z) = u_F(x, y, z) \exp(-iKz)$ , es decir

$$\phi(x, y, z) = u_F(x, y, z) \exp(-iKz) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} u(x', y', 0) \exp\left[ \frac{ik \{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \}}{2z} \right] dx' dy'$$

Si la sustituimos en la ecuación paraxial (2.9) y desarrollamos resulta

$$\left( \frac{\nabla_T^2}{2K} - K - i \frac{\partial}{\partial z} \right) u_F(x, y, z) = 0 \quad (2.10)$$

que es llamada ecuación parabólica [20][24]. Teague [20] muestra que la fórmula de difracción de Fresnel (2.7) satisface exactamente a (2.10) y también muestra que es aproximadamente válida para cualquier perturbación óptica que se propaga en la dirección de  $\mathbf{z}$ . Esto se basa en los resultados numéricos efectuados por Southwell [25] sobre la validez de la aproximación de Fresnel en el campo cercano. La ecuación parabólica (2.10) es la ecuación fundamental por medio de la cual se obtiene la Ecuación de Transporte de Irradiancia y a partir de ésta se explica la teoría de Roddier.

### 2.2.3. ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA (ÓPTICA FÍSICA).

Representemos por  $w(x, y, z)$  a una perturbación óptica que se propaga en la dirección de  $\mathbf{z}$ . Supongamos que  $w(x, y, z)$  satisface aproximadamente la ecuación parabólica (2.10), de acuerdo al resultado de Teague [20], es decir

$$\left(\frac{\nabla_T^2}{2K} - K - i\frac{\partial}{\partial z}\right)w(x,y,z) = 0 \quad (2.11)$$

Supongamos también que la normalización de  $w(x,y,z)$  es tal que

$$|w(x,y,z)|^2 = I(x,y,z)$$

nos proporciona la irradiancia en el punto  $P(x,y,z)$ ; y finalmente supongamos que  $w(x,y,z)$  puede expresarse en términos de cantidades reales como la fase  $\phi(x,y,z)$  y la irradiancia  $I(x,y,z)$  mediante la expresión

$$w(x,y,z) = [I(x,y,z)]^{1/2} \exp[-i\phi(x,y,z)]$$

Si sustituimos esta expresión en (2.11), resulta

$$\left(\frac{\nabla_T^2}{2K} - K - i\frac{\partial}{\partial z}\right)[I(x,y,z)]^{1/2} \exp[-i\phi(x,y,z)] = 0 \quad (2.12)$$

Multiplicando el lado izquierdo de (2.12) por  $w^*(x,y,z)$ , es decir

$$[I(x,y,z)]^{1/2} \exp[i\phi(x,y,z)] \left(\frac{\nabla_T^2}{2K} - K - i\frac{\partial}{\partial z}\right)[I(x,y,z)]^{1/2} \exp[-i\phi(x,y,z)] = 0 \quad (2.13)$$

y multiplicando el lado izquierdo del conjugado de (2.12) por  $w(x,y,z)$ , es decir

$$[I(x,y,z)]^{1/2} \exp[-i\phi(x,y,z)] \left(\frac{\nabla_T^2}{2K} - K + i\frac{\partial}{\partial z}\right)[I(x,y,z)]^{1/2} \exp[i\phi(x,y,z)] = 0 \quad (2.14)$$

Restando (2.13) de (2.14) y desarrollando, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z}I(x,y,z) + \frac{1}{K}\nabla_T\phi(x,y,z)\cdot\nabla_T I(x,y,z) + \frac{I(x,y,z)}{K}\nabla_T^2\phi(x,y,z) = 0 \quad (2.15)$$

Si hacemos  $\phi(x,y,z) = KW(x,y,z)$ , donde  $W(x,y,z)$  es el frente de onda geométrico de la perturbación, (2.15) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial z}I(x,y,z) + \nabla_T W(x,y,z)\cdot\nabla_T I(x,y,z) + I(x,y,z)\nabla_T^2 W(x,y,z) = 0 \quad (2.16)$$

Esta ecuación obtenida por Teague [20] y de manera alternativa por Streibl [5] recibe el nombre de Ecuación de Transporte de Irradiancia.

La interpretación física, así como la validez experimental de la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.16) fueron hechas por Ichikawa y otros [4]. Para ellos el término  $\nabla_r I \cdot \nabla_r W$  representa las variaciones de irradiancia causadas por el desplazamiento transversal del haz inhomogéneo ( $\nabla_r I \neq 0$ ) debido a la inclinación (pendiente) del frente de onda local cuya normal está dada por  $\nabla_r W$ ; este puede considerarse como un término que produce un efecto de prisma. El término  $I \nabla_r^2 W$  representa las variaciones de irradiancia causadas por la convergencia o divergencia del haz cuya longitud focal es inversamente proporcional a  $\nabla_r^2 W$  (curvatura) y puede considerarse como un término que produce un efecto de lente. El término  $\partial I / \partial z$  expresa las variaciones en irradiancia del haz causadas por los efectos de prisma y lente conforme se propaga a lo largo del eje z, (véase figura 2.2).



**Figura 2.2.** En un sistema óptico convergente se observa como los rayos que inciden en el borde del sistema se desviarán de tal forma como si el sistema se comportara como un pequeño prisma en la región del borde.

La Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.16) se puede escribir como

$$\nabla_r \cdot (I \nabla_r W) = -\frac{\partial I}{\partial z}$$

Haciendo una analogía con la ley de conservación de masa o densidad de carga expresada por

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

donde  $\rho$  es la masa o densidad de carga y  $\mathbf{v}$  es la velocidad de flujo, se obtiene que la Ecuación de Transporte de Irradiancia representa la ley de conservación de energía luminosa.

En resumen, se puede afirmar que la Ecuación de Transporte de Irradiancia es válida sólo en la región paraxial y representa la ley de conservación de energía luminosa.

### 2.3. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA MEDIANTE ARGUMENTOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA.

#### 2.3.1. ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA (ÓPTICA GEOMÉTRICA).

Supongamos que tenemos un frente de onda aberrado  $W$ , proveniente de un sistema óptico el cual se encuentra inmerso en un medio homogéneo, y que incide sobre la superficie  $S$  de algún detector. Como los rayos representan la dirección de flujo de energía radiante y son perpendiculares al frente de onda, se observarán sobre la superficie  $S$  del detector, zonas más iluminadas que otras debido a la convergencia o divergencia de los rayos en cualquier punto sobre la superficie  $S$  del detector, (figura 2.3).

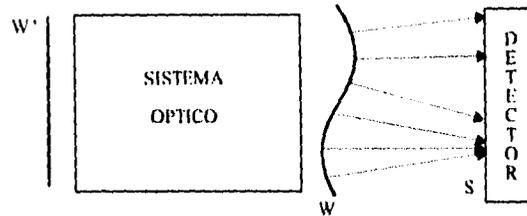


Figura 2.3. El frente de onda  $W$  produce zonas de mayor iluminación que otras sobre el detector.

Lo anterior nos hace suponer que debe existir alguna relación entre la distribución de irradiancia y la curvatura del frente de onda. Para conocer esta relación principiaremos considerando una pequeña porción  $\delta W$  de este frente de onda donde supondremos irradiancia uniforme. Aquí los rayos marginales  $M$ , el área  $\delta W$  y una pequeña área  $A$  sobre el detector limitan una pequeña región cerrada del espacio  $\Omega$  como se ilustra en la figura 2.4.

Dentro de esta región cerrada  $\Omega$  hay un flujo de energía radiante cuya dirección está dada por

$$\hat{s} = \nabla W / |\nabla W| \quad (2.17)$$

donde  $\hat{s}$  es un vector unitario perpendicular a la superficie del frente de onda  $W$ . En ausencia de cargas dentro de la región  $\Omega$ , encontramos que el flujo de energía  $\phi_{\delta W}$  que cruza el área  $\delta W$  hacia adentro, será igual al flujo de energía  $\phi_A$  que cruza el área  $A$  hacia afuera; esto significa que el flujo total de energía radiante que entra o sale de la región  $\Omega$  es cero. Es decir,

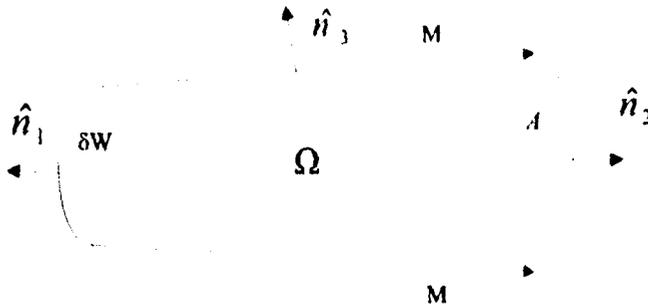


Figura 2.4. Flujo de energía radiante en la región Ω.

$$0 = \phi_{\delta W} + \phi_A = \int_{\delta W} (I\hat{s}) \cdot \hat{n}_1 ds + \int_A (I\hat{s}) \cdot \hat{n}_2 ds + \int_M (I\hat{s}) \cdot \hat{n}_3 ds = \sum_{\partial\Omega} \int (I\hat{s}) \cdot \hat{n}_i ds = \int_{\partial\Omega} (I\hat{s}) \cdot \hat{n} ds \quad (2.18)$$

donde  $\partial\Omega = \delta W + A + M$  es la superficie que envuelve a la región Ω y  $\hat{n}$  es un vector unitario perpendicular a la superficie  $\partial\Omega$ . La última integral del tercer miembro es cero debido a que  $\hat{s} \cdot \hat{n}_i = 0$  por tratarse de rayos marginales.

Si aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss [26] a (2.18) se obtiene que

$$\int_{\Omega} \{\nabla \cdot (I\hat{s})\} dv = \int_{\partial\Omega} (I\hat{s}) \cdot \hat{n}_i ds = 0 \quad (2.19)$$

y como la superficie de integración es arbitraria, para que se cumpla (2.19) es necesario que

$$\nabla \cdot (I\hat{s}) = 0 \quad (2.20)$$

Esta ecuación significa que en esta región la energía radiante se conserva, en otras palabras, se tiene que el flujo neto que entra o sale de la región Ω es cero. Usando la ecuación Eikonal [6]  $(\nabla W)^2 = n^2$ , o equivalentemente,  $\nabla W = n\hat{s}$ , donde  $n$  es el índice de refracción del medio, y sustituyendo en (2.20), resulta

$$\nabla \cdot (I\nabla W/n) = 0 \quad (2.21)$$

Desarrollando y considerando que se trata de un medio homogéneo, obtenemos

$$\nabla I \cdot \nabla W + I \nabla^2 W = 0 \quad (2.22)$$

Esta ecuación puede considerarse como una ecuación de transporte de irradiancia generalizada la cual nos dá una relación entre la distribución de irradiancia y el frente de onda geométrico y además representa la ley de conservación de energía luminosa. Es posible, partiendo del teorema de Poynting de la teoría electromagnética [6][27], obtener la misma ecuación (2.22), ver apéndice A.

Si ahora, reescribimos a (2.22) como

$$I \nabla_T^2 W + I \frac{\partial^2}{\partial z^2} W + \nabla_T I \cdot \nabla_T W + \frac{\partial}{\partial z} I \frac{\partial}{\partial z} W = 0 \quad (2.23)$$

y suponemos las siguientes condiciones sobre el frente de onda  $W$

$$\begin{aligned} \text{i) } & \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right| \approx 1 \\ \text{ii) } & \left| I \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right| \ll \left| I \nabla_T^2 W \right| + \left| \nabla_T I \cdot \nabla_T W \right| + \left| \frac{\partial I}{\partial z} \right|, \quad \text{o, } \left| I \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right| = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

la ecuación de transporte de irradiancia generalizada (2.22) se convierte en

$$I \nabla_T^2 W + \nabla_T I \cdot \nabla_T W = - \frac{\partial I}{\partial z} \quad (2.25)$$

que es la Ecuación de Transporte de Irradiancia (ver sección, 2.2.3) y representa la ley de conservación de la energía radiante, en concordancia con los resultados obtenidos por K. Ichikawa y otros [4]. Todo este análisis demuestra que la Ecuación de Transporte de Irradiancia no pertenece al dominio específico de la óptica física.

### 2.3.2 LÍMITES DE VALIDEZ DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA.

Con el fin de obtener una interpretación más clara sobre el significado físico de la condiciones de (2.24), se estudian analíticamente dos casos particulares de frente de onda:

(a) Frente de onda plano más un término adicional de fase

$$W = \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{|\vec{k}|} + \frac{\varphi(r)}{|\vec{k}|} \quad (2.26)$$

donde  $\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}$  es el vector número de onda,  $\varphi(r)$  es el término adicional de fase y  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  es un vector de posición.

(b) Frente de onda esférico más un término adicional de fase

$$W = r + \frac{\eta(r)}{K} \quad (2.27)$$

donde  $K$  es el número de onda,  $\eta(r)$  es el término adicional de fase y  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Si se substituye (2.26) y (2.27) en (2.24) se obtiene, para ambos casos que :

- i) La dirección de propagación del frente de onda debe ser preferente en la dirección de  $z$ .
- ii) Los términos de fase adicionales deben de ser suaves y de magnitud mucho menor que el número de onda.
- iii) El frente de onda debe ser casi lineal en  $z$ .

Del análisis anterior se infiere que la Ecuación de Transporte de Irradiancia es sólo válida en el régimen paraxial, (ver sección 2.2). Todos los resultados están en concordancia con los obtenidos por M.R. Teague [20] y N. Streibl [5].

#### **2.4. CONCLUSIONES.**

Se muestra que la Ecuación de Transporte de Irradiancia se puede obtener a partir de argumentos de óptica física y de óptica geométrica. Como consecuencia de esto, se concluye que la Ecuación de Transporte de Irradiancia pertenece al régimen de la óptica geométrica. También, se encuentra independientemente de los argumentos seguidos para obtenerla, que la Ecuación de Transporte de Irradiancia representa la ley de conservación de energía luminosa y sólo es válida en la región paraxial.

## CAPÍTULO 3

### MÉTODO DE RODDIER

#### 3.1. INTRODUCCIÓN.

Con el propósito de obtener información cuantitativa sobre el frente de onda a partir de mediciones de irradiancia en planos distintos, Roddier [2][15] propone un nuevo método mediante el cual a partir de la diferencia entre las mediciones de irradiancia en dos planos desenfocados, que son una medida de la curvatura del frente de onda y de la derivada radial del frente de onda en el borde de la pupila, se puede recuperar el frente de onda resolviendo la ecuación de Roddier la cual es una ecuación de Poisson con condiciones de Neumann a la frontera.

La ecuación de Roddier puede obtenerse calculando directamente las distribuciones de irradiancia de dos planos simétricamente desenfocados [7]. Sin embargo, es posible obtenerla de una manera más simple, al mismo tiempo que se puede dar una explicación más clara de la teoría si partimos de la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.25).

Finalmente, y aunque el método de Roddier surge como un método para probar la óptica de sistemas convergentes, en particular la de los telescopios astronómicos, se mostrará que éste puede generalizarse para probar cualquier tipo de sistema óptico.

#### 3.2. INSTRUMENTACIÓN DEL MÉTODO DE RODDIER.

La instrumentación del método se esquematiza en la figura 3.1. Una onda plana distorsionada  $W$  es enfocada por un elemento óptico convergente  $L_1$  (lente o espejo), de longitud focal  $f$ , sobre el plano focal  $F$ . El sensor de curvatura consiste en dos detectores de imagen; uno detecta la distribución de irradiancia en el plano  $P_1$  a una distancia  $l$  antes de  $F$ , el otro detecta la distribución de irradiancia en el plano  $P_2$  a una distancia  $l$  después de  $F$ . Por razones de cálculo y simetría, una segunda lente de longitud focal  $f/2$  es colocada en el plano  $F$  para enfocar a  $L_1$  una distancia  $f$  más allá del plano  $F$ .

#### 3.3. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE RODDIER A PARTIR DE CÁLCULOS DIRECTOS.

##### 3.3.1. DISTRIBUCIÓN DE IRRADIANCIA EN EL PLANO $P_1$ .

Sea  $\Psi(r)$  la amplitud compleja del frente de onda que incide sobre la lente  $L_1$  y sea  $P(r)$  la función de transmitancia de la pupila (es igual a uno dentro de la pupila y a cero afuera de ella). La amplitud compleja a la salida de la lente  $L_1$  es [8]

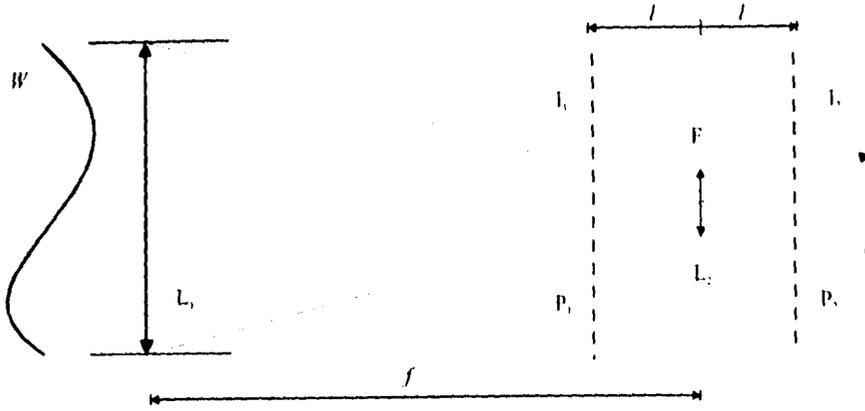


Figura 3.1. Sensor de Roddier; espacio imagen.

$$A_0(\vec{r}) = P(\vec{r})\Psi(\vec{r})\exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda f}r^2\right] \quad (3.1)$$

donde  $\vec{r} = (x, y)$  es un vector bidimensional. La amplitud compleja en el plano  $P_1$ , a una distancia  $f-l$ , está dada a partir de la fórmula de difracción de Fresnel (2.7) por

$$A_1(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda(f-l)} \iint A_0(\vec{r}_1) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda(f-l)}(\vec{r} - \vec{r}_1)^2\right] d\vec{r}_1 \quad (3.2)$$

donde el término constante en la fórmula de Fresnel se ha suprimido. Sustituyendo (3.1) en (3.2), desarrollando el término cuadrático y como la distribución de irradiancia es el cuadrado de la amplitud compleja, es decir,

$$I_1(\vec{r}) = |A_1(\vec{r})|^2$$

se obtiene finalmente que

$$I_1(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^2(f-l)^2} \iiint P(\vec{r}_1)P(\vec{r}_2)\Psi(\vec{r}_1)\Psi^*(\vec{r}_2) \times \exp\left[\frac{i\pi l}{\lambda f(f-l)}(\vec{r}_1^2 - \vec{r}_2^2)\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)}\vec{r} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (3.3)$$

Mediante el cambio de variable  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\rho}$ , la ecuación (3.3) se convierte en

$$I_1(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^2(f-l)^2} \iint \exp\left[-\frac{i\pi l}{\lambda f(f-l)} \vec{\rho}^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \vec{\rho} \cdot \vec{r}\right] \times \iint P(\vec{r}_1)P(\vec{r}_1 + \vec{\rho})\Psi(\vec{r}_1)\Psi^*(\vec{r}_1 + \vec{\rho}) \exp\left[-\frac{2i\pi l}{\lambda f(f-l)} \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1\right] d\vec{r}_1 d\vec{\rho} \quad (3.4)$$

que representa la distribución de irradiancia en el plano  $P_1$ .

### 3.3.2. DISTRIBUCIÓN DE IRRADIANCIA EN EL PLANO $P_2$ .

Sea  $A_F(\vec{r})$  la amplitud compleja en el plano  $F$  la cual se obtiene de (3.2) haciendo  $l=0$

$$A_F(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda f} \iint A_0(\vec{r}_1) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda f}(\vec{r} - \vec{r}_1)^2\right] d\vec{r}_1 \quad (3.5)$$

si desarrollamos el término cuadrático de (3.5), obtenemos

$$A_F(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda f} \vec{r}^2\right] \iint P(\vec{r}_1)\Psi(\vec{r}_1) \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda f} \vec{r} \cdot \vec{r}_1\right] d\vec{r}_1 \quad (3.6)$$

Luego, de acuerdo a (3.6) la amplitud compleja a la salida de la lente  $L_2$  es

$$A_2(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda f} \vec{r}^2\right] \iint P(\vec{r}_1)\Psi(\vec{r}_1) \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda f} \vec{r} \cdot \vec{r}_1\right] d\vec{r}_1 \quad (3.7)$$

La amplitud compleja  $A_2(\vec{r})$  en el plano  $P_2$  a una distancia  $l$  está dada por (3.7) y la fórmula de difracción de Fresnel (2.7), es decir

$$A_2(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda l} \iint A_2(\vec{r}_1') \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l}(\vec{r} - \vec{r}_1')^2\right] d\vec{r}_1' \quad (3.8)$$

Finalmente, procediendo como en la sección anterior, mediante algunas operaciones matemáticas que se muestran en el apéndice B, se obtiene que la distribución de irradiancia en el plano  $P_2$  es

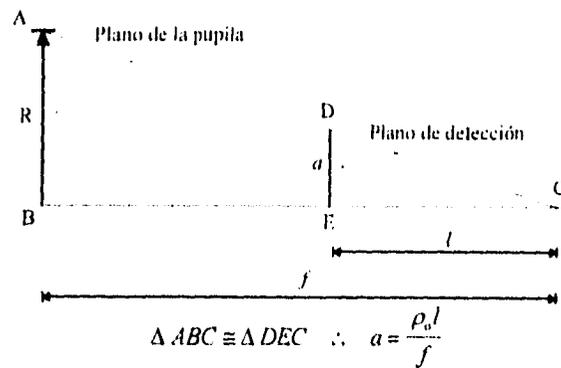
$$I_2(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^2(f-l)^2} \iint \exp\left[\frac{i\pi l}{\lambda f(f-l)} \vec{\rho}^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \vec{\rho} \cdot \vec{r}\right] \times \iint P(\vec{r}_1)P(\vec{r}_1 + \vec{\rho})\Psi(\vec{r}_1)\Psi^*(\vec{r}_1 + \vec{\rho}) \exp\left[\frac{2i\pi l}{\lambda f(f-l)} \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1\right] d\vec{r}_1 d\vec{\rho} \quad (3.9)$$

que es una expresión similar a la distribución de irradiancia en el plano  $P_1$ .

### 3.3.3. APROXIMACIONES DE ÓPTICA GEOMÉTRICA.

Sea  $\rho_0$  la longitud de coherencia [1] del frente de onda que incide sobre el plano de la pupila (en ausencia de turbulencia atmosférica  $\rho_0$  será igual al radio de la pupila  $R$ ). Físicamente las fluctuaciones del frente de onda de magnitud  $\rho_0$  difractan la luz sobre un ángulo  $\lambda/\rho_0$ , produciendo sobre el plano  $P_1$  una mancha de tamaño  $\lambda(f-l)/\rho_0$ . Esta mancha deberá ser pequeña en comparación con el tamaño de las fluctuaciones que se desean medir las cuales son de magnitud  $\rho_0(l/f)$  (figura 3.2), es decir

$$\frac{\lambda(f-l)}{\rho_0} \ll \frac{\rho_0 l}{f} \quad (3.10)$$



**Figura 3.2.** Geometría del sensor de Roddier.

Esta condición nos dice que la mancha producida por difracción debe ser pequeña en comparación con la producida por un simple trazo de rayos, esto significa que los efectos producidos por difracción no son considerados importantes; es por esto que (3.10) se considera como una condición de óptica geométrica; en lo sucesivo supondremos que se cumple tal condición.

Sea  $\phi(\vec{r}_1)$  la fase del frente de onda incidente sobre el plano de la pupila; si suponemos que las perturbaciones son sólo de fase, obtenemos

$$\Psi(\vec{r}_1)\Psi^*(\vec{r}_1 + \vec{\rho}) = \exp[-i(\phi(\vec{r}_1 + \vec{\rho}) - \phi(\vec{r}_1))] \quad (3.11)$$

Luego, si suponemos que  $|\vec{\rho}| \ll \rho_0$ , de acuerdo a la definición de derivada y mediante un desarrollo en serie de Taylor, a primer orden, sobre la exponencial, la ecuación (3.11) se convierte en

$$\Psi(\vec{r}_1)\Psi'(\vec{r}_1 + \vec{\rho}) \approx \exp[-i\vec{\rho} \cdot \nabla_T \phi(\vec{r}_1)] \approx 1 - i\vec{\rho} \cdot \nabla_T \phi(\vec{r}_1) \quad (3.12)$$

Por otro lado, bajo la misma suposición que antes,  $|\vec{\rho}| \ll \rho_0$ , se cumple

$$P(\vec{r}_1)P(\vec{r}_1 + \vec{\rho}) \approx P(\vec{r}_1) \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.12) y (3.13) en (3.4), resulta

$$I_1(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^2(f-l)^2} \iint \exp\left[-\frac{i\pi l}{\lambda f(f-l)} \vec{\rho}^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \vec{\rho} \cdot \vec{r}\right] \times \iint P(\vec{r}_1)(1 - i\vec{\rho} \cdot \nabla_T \phi(\vec{r}_1)) \exp\left[-\frac{2i\pi l}{\lambda f(f-l)} \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1\right] d\vec{r}_1 d\vec{\rho} \quad (3.14)$$

La integral sobre  $\vec{r}_1$  en la ecuación (3.14) toma valores significativos sólo cuando se cumple que

$$\frac{\lambda f(f-l)}{l|\vec{\rho}|} \geq \rho_0, \quad \text{ó} \quad |\vec{\rho}| \leq \frac{\lambda f(f-l)}{\rho_0 l}; \quad (3.15)$$

Suponiendo que se cumple esta condición y de acuerdo a la condición (3.10), se obtiene que

$$\frac{l\vec{\rho}^2}{\lambda f(f-l)} \leq \frac{\lambda f(f-l)}{l\rho_0^2} \ll 1$$

Si se cumple esta última condición, el término cuadrático de la exponencial en la integral (3.14) será muy pequeño comparado con uno, de tal forma que la función exponencial respectiva se convierte, aproximadamente, en

$$\exp\left[-\frac{i\pi l}{\lambda f(f-l)} \vec{\rho}^2\right] \approx 1 \quad (3.16)$$

Ahora bien, sustituyendo (3.16) en la ecuación (3.14), la irradiancia  $I_1$  puede escribirse como

$$I_1(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda^2(f-l)^2} \iint \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \vec{\rho} \cdot \vec{r}\right] \iint P(\vec{r}_1)(1 - i\vec{\rho} \cdot \nabla_T \phi(\vec{r}_1)) \exp\left[-\frac{2i\pi l}{\lambda f(f-l)} \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1\right] d\vec{r}_1 d\vec{\rho} \quad (3.17)$$

Procediendo de manera similar, la ecuación (3.9) se convierte en

$$I_2(\bar{r}) = \frac{1}{\lambda^2(f-l)^2} \iint \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \bar{\rho} \cdot \bar{r}\right] \iiint P(\bar{r}_1) (1 - i\bar{\rho} \cdot \nabla_{\bar{r}_1} \phi(\bar{r}_1)) \exp\left[\frac{2i\pi l}{\lambda f(f-l)} \bar{\rho} \cdot \bar{r}_1\right] d\bar{r}_1 d\bar{\rho} \quad (3.18)$$

Las ecuaciones (3.17) y (3.18) representan las distribuciones de irradiancia en los dos planos desenfocados y son una aproximación de la óptica geométrica, de acuerdo a la condición (3.10).

### 3.3.4. ECUACIÓN DE RODDIER.

Reescribiendo la ecuación (3.17) como

$$I_1(\bar{r}) = I_0(\bar{r}) + \Delta I_1(\bar{r}) \quad (3.19)$$

donde

$$I_0(\bar{r}) = \frac{1}{\lambda^2(f-l)^2} \iint \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \bar{\rho} \cdot \bar{r}\right] \iiint P(\bar{r}_1) \exp\left[-\frac{2i\pi l}{\lambda f(f-l)} \bar{\rho} \cdot \bar{r}_1\right] d\bar{r}_1 d\bar{\rho} \quad (3.20)$$

representa la distribución de irradiancia de una onda plana incidente, y

$$\Delta I_1(\bar{r}) = \frac{-i}{\lambda^2(f-l)^2} \iint \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \bar{\rho} \cdot \bar{r}\right] \bar{\rho} \cdot \iiint P(\bar{r}_1) \nabla_{\bar{r}_1} \phi(\bar{r}_1) \exp\left[-\frac{2i\pi l}{\lambda f(f-l)} \bar{\rho} \cdot \bar{r}_1\right] d\bar{r}_1 d\bar{\rho} \quad (3.21)$$

es la distribución de irradiancia producida por las fluctuaciones del frente de onda distorsionado.

Luego, mediante el cambio de variable

$$\bar{\rho} = \frac{\lambda f(f-l)}{l} \bar{u}$$

las ecuaciones (3.20) y (3.21) se convierten, respectivamente, en

$$I_0(\bar{r}) = \frac{f^2}{l^2} \iint \exp\left[\frac{2i\pi f}{l} \bar{u} \cdot \bar{r}\right] \iiint P(\bar{r}_1) \exp[-2i\pi \bar{u} \cdot \bar{r}_1] d\bar{r}_1 d\bar{u} \quad (3.22)$$

y

$$\Delta I_1(\bar{r}) = \frac{-i\lambda f^3(f-l)}{l^3} \iint \exp\left[\frac{2i\pi f}{l} \bar{u} \cdot \bar{r}\right] \bar{u} \cdot \iiint P(\bar{r}_1) \nabla_{\bar{r}_1} \phi(\bar{r}_1) \exp[-2i\pi \bar{u} \cdot \bar{r}_1] d\bar{r}_1 d\bar{u} \quad (3.23)$$

Ahora bien, la integral sobre  $\bar{r}_1$  en (3.22) es la transformada de Fourier [8][24] de  $P(\bar{r}_1)$ , es decir

$$\iiint P(\bar{r}_1) \exp[-2i\pi \bar{u} \cdot \bar{r}_1] d\bar{r}_1 = F\{P(\bar{r}_1)\}_{\bar{r}_1 \rightarrow \bar{u}} \equiv g(\bar{u})$$

Sustituyendo este resultado en (3.22), obtenemos

$$I_0(\vec{r}) = \frac{f^2}{l^2} \iint g(\vec{u}) \exp\left[\frac{2i\pi f}{l} \vec{u} \cdot \vec{r}\right] d\vec{u}$$

la cual es la transformada inversa de Fourier de  $g(\vec{u})$ . Combinando los resultados se obtiene finalmente que

$$I_0(\vec{r}) = \frac{f^2}{l^2} P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \quad (3.24)$$

que representa una irradiancia uniforme de una imagen de la pupila colocada a una distancia  $f/l$  producida por un frente de onda plano ( $\phi=0$ ), tal y como era de esperarse para una onda plana.

Por otra parte, la integral sobre  $\vec{r}_1$  en (3.23) es la transformada de Fourier de  $P(\vec{r}_1)\nabla_r\phi(\vec{r}_1)$ , es decir

$$\iint P(\vec{r}_1)\nabla_r\phi(\vec{r}_1) \exp[-2i\pi \vec{u} \cdot \vec{r}_1] d\vec{u} = F\{P(\vec{r}_1)\nabla_r\phi(\vec{r}_1)\}_{\vec{r}_1=\vec{u}} \equiv \vec{h}(\vec{u})$$

Sustituyendo este resultado en (3.23), resulta que

$$\Delta I_1(\vec{r}) = \frac{-i\lambda f^3(f-l)}{l^3} \iint \vec{u} \cdot \vec{h}(\vec{u}) \exp\left[\frac{2i\pi f}{l} \vec{u} \cdot \vec{r}\right] d\vec{u}$$

que es la transformada inversa de Fourier de  $\vec{u} \cdot \vec{h}(\vec{u})$ , por lo que finalmente se obtiene que

$$\Delta I_1(\vec{r}) = \frac{-\lambda f^3(f-l)}{2\pi l^3} \nabla_r \cdot \left[ P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \nabla_r \phi\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \right] \quad (3.25)$$

que representa las variaciones en intensidad producidas por las fluctuaciones del frente de onda distorsionado. Desarrollando la divergencia en (3.25), resulta

$$\Delta I_1(\vec{r}) = \frac{-\lambda f^3(f-l)}{2\pi l^3} \left[ \nabla_r P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \cdot \nabla_r \phi\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) + P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \nabla_r^2 \phi\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \right]$$

o equivalentemente

$$\Delta I_1(\vec{r}) = \frac{-\lambda f^3(f-l)}{2\pi l^3} \left[ -\frac{\partial}{\partial n} \phi\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \delta(r-a) + P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \nabla_r^2 \phi\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \right] \quad (3.26)$$

donde

$$\nabla P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) = -\hat{n}\delta(r-a)$$

y

$$\nabla P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) \cdot \nabla \phi\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) = -\delta(r-a)\hat{n} \cdot \nabla \phi\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right) = -\delta(r-a)\frac{\partial}{\partial n}\phi\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right)$$

Aquí  $\hat{n}$  es un vector unitario normal al borde de la pupila y que apunta hacia afuera.  $\delta(r-a)$  es una delta de Dirac (es cero en todos lados menos en el borde de la pupila donde vale uno, es decir en  $r=a$ ) y  $\partial\phi/\partial n$  es la derivada direccional de la fase en la dirección hacia afuera.

Procediendo de manera análoga, la ecuación (3.18) se puede escribir como

$$I_2(\vec{r}) = I_0(\vec{r}) + \Delta I_2(\vec{r}) \quad (3.27)$$

donde, equivalentemente se obtiene

$$I_0(\vec{r}) = \frac{f^2}{l^2} P\left(-\frac{f}{l}\vec{r}\right) \quad (3.28)$$

y

$$\Delta I_2(\vec{r}) = \frac{\lambda f^3(f-l)}{2\pi l^4} \left[ -\frac{\partial}{\partial n}\phi\left(-\frac{f}{l}\vec{r}\right)\delta(r-a) + P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right)\nabla_r^2\phi\left(-\frac{f}{l}\vec{r}\right) \right] \quad (3.29)$$

Definamos a  $S(\vec{r})$  como la señal del sensor que se obtiene de la diferencia de iluminaciones normalizada, o sea

$$S(\vec{r}) = \frac{I_1(\vec{r}) - I_2(-\vec{r})}{I_1(\vec{r}) + I_2(-\vec{r})} \quad (3.30)$$

donde  $I_2(-\vec{r})$  se ha rotado  $180^\circ$  respecto a  $I_1(\vec{r})$ , esto es debido a que la imagen de la pupila en el plano  $P_2$  esta invertida respecto a la imagen de la pupila en el plano  $P_1$ , (véase figura 3.1).

Sustituyendo los resultados de (3.19) y (3.27) en (3.30) y desarrollando se obtiene la ecuación de Roddier

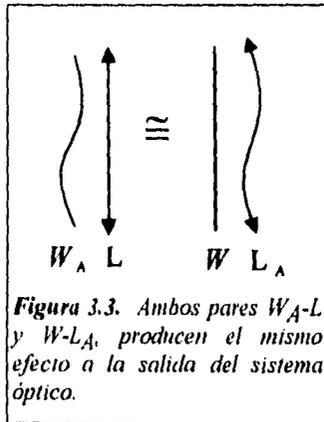
$$S(\vec{r}) = \frac{f(f-l)}{l} \left[ \frac{\partial}{\partial n} W\delta(r-a) - P\left(\frac{f}{l}\vec{r}\right)\nabla_r^2 W \right] \quad (3.31)$$

donde la fase se sustituye por  $\phi = kW$ ; aquí  $W$  es el frente de onda. La ecuación (3.31) muestra que el sensor percibe la curvatura del frente de onda sobre la pupila y la variación radial del frente de onda sobre el borde. Como estos dos términos no se traslapan, pueden ser medidos separadamente y el frente de onda puede recuperarse resolviendo una ecuación de

Poisson usando la derivada normal al frente de onda en el borde como una condición de Neumann a la frontera.

Para finalizar, analizaremos la importancia de la posición de detección  $l$  en el método de Roddier. Si en la ecuación (3.31) se incrementa el valor de  $l$ , se incrementará la resolución del método; esto es así debido a que la irradiancia medida en cualquiera de los planos se encuentra distribuida sobre una área de sección transversal más grande. Sin embargo, decrecerá la señal del sensor  $S(\bar{r})$  y por lo tanto también decrecerá la sensibilidad a los errores pequeños en el frente de onda. En resumen, debe ser claro que si solamente se modifica el valor de  $l$  en (3.31), se podrá cambiar la sensibilidad en contra de la resolución en el método de Roddier.

### 3.4. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE RODDIER A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA.



Por cuestiones de cálculo, en la teoría desarrollada en la sección 3.3 para obtener la ecuación de Roddier, se supuso que un frente de onda aberrado incide sobre el plano de la pupila donde se encuentra un sistema óptico perfecto  $L_1$ , (figura 3.1). Sin embargo, en una prueba óptica el sistema óptico que se desea probar es precisamente  $L_1$ . En este caso el frente de onda (frente de onda plano) incidente deberá ser perfecto y lo que provoque la distorsión será el sistema óptico  $L_1$ . Aunque estas dos situaciones son aparentemente distintas, son equivalentes; esto significa que ambos pares frente de onda aberrado-lente ( $W_A-L$ ) y frente de onda-lente aberrada ( $W-L_A$ ), producirán el mismo efecto a la salida del sistema tal y como se muestra esquemáticamente en la figura 3.3.

La teoría del método de Roddier puede ser más fácilmente explicada partiendo de la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.25) [9]. Como se discutió en la sección 3.2, la técnica consiste en obtener las iluminaciones  $I_1$  e  $I_2$  de las dos secciones transversales del haz incidente a ambos lados del plano focal  $F$ , (figura 3.1). Supongamos que las iluminaciones  $I_1$  e  $I_2$  son imágenes desenfocadas en el espacio imagen, (figura 3.1), y que las iluminaciones  $I'_1$  e  $I'_2$  son imágenes desenfocadas de la pupila en el espacio objeto, (figura 3.4). Entonces, suponiendo un sistema óptico perfecto sobre el plano de la pupila, y salvo un cambio en las dimensiones de las imágenes, es equivalente el trabajar en el espacio imagen o en el espacio objeto, por lo que es válido suponer que  $I'_1 \cong I_1$ , e  $I'_2 \cong I_2$ ; estas reciben el nombre de imágenes conjugadas.

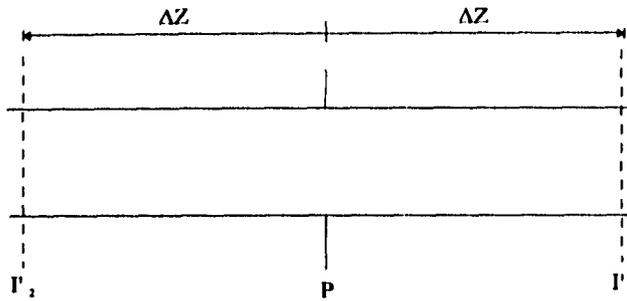


Figura 3.4. Sensor de Roddier; espacio objeto.

Ahora, supongamos que sobre el sistema de prueba incide una onda plana sobre el plano de la pupila ( $z=0$ ), entonces en este plano se tiene que

$$\nabla I|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{todos lados menos en el borde} \\ -I|_{z=0} \hat{n} \delta(r-a) & \text{en el borde de la pupila} \end{cases} \quad (3.32)$$

donde  $\delta(r-a)$  es una delta de Dirac (es cero en todos lados menos en el borde de la pupila donde vale uno),  $\hat{n}$  es un vector unitario normal al borde de la pupila que apunta hacia afuera e  $I|_{z=0}$  es la iluminación uniforme sobre el plano de la pupila. Sustituyendo (3.32) en la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.25), resulta

$$\frac{\partial}{\partial z} I \Big|_{z=0} = - \left( -I \delta(r-a) \frac{\partial}{\partial n} W + P(\bar{r}) I \nabla_T^2 W \right) \Big|_{z=0} \quad (3.33)$$

donde  $P(\bar{r})$  es la función de transmitancia de la pupila (es igual a uno dentro de ella y a cero afuera) y  $\hat{n} \cdot \nabla W = \partial W / \partial n$  es la derivada direccional del frente de onda.

Luego, si tomamos las iluminaciones  $I_1$  e  $I_2$  alrededor del plano  $z=0$ , mediante una aproximación de Taylor a primer orden, se tiene que (figura 3.4)

$$\begin{aligned} I_1 &= I|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial z} I \Big|_{z=0} \cdot \Delta z_1 \\ I_2 &= I|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial z} I \Big|_{z=0} \cdot (-\Delta z_2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Si suponemos que las iluminaciones tomadas están simétricamente desenfocadas, entonces se debe cumplir que

$$|\Delta z_1| \approx |\Delta z_2| = \Delta z \quad (3.35)$$

esto es válido si las iluminaciones se toman muy cerca la una de la otra en el espacio imagen, o equivalentemente, si pertenecen a imágenes de la pupila altamente desenfocadas en el espacio objeto. Sustituyendo (3.33) y (3.35) en (3.34), resulta

$$\begin{aligned} I_1 &= I|_{r=a} - \left( -I\delta(r-a)\frac{\partial}{\partial n}W + P(\bar{r})I\nabla_r^2W \right) \Big|_{r=a} \cdot \Delta z \\ I_2 &= I|_{r=a} + \left( -I\delta(r-a)\frac{\partial}{\partial n}W + P(\bar{r})I\nabla_r^2W \right) \Big|_{r=a} \cdot \Delta z \end{aligned} \quad (3.36)$$

Calculando la señal del sensor (3.30) a partir de (3.36), se obtiene

$$S(\bar{r}) = \left( \delta(r-a)\frac{\partial}{\partial n}W - P(\bar{r})\nabla_r^2W \right) \Delta z \quad (3.37)$$

donde  $\Delta z$  se calcula usando la ecuación gaussiana de las lentes [28], es decir, usando

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} \quad (3.38)$$

Aplicando la ecuación anterior al plano  $P_1$ , resulta

$$\Delta z_1 = -\frac{f(f-l)}{l} \quad (3.39)$$

donde  $S_o = \Delta z_1$  y  $S_i = f-l$ . Análogamente para el plano  $P_2$ , se obtiene

$$\Delta z_2 = \frac{f(f+l)}{l} \quad (3.40)$$

donde  $S_o = \Delta z_2$  y  $S_i = f+l$ . Si suponemos que  $f \gg l$ , de (3.35), (3.39) y (3.40) se deduce

$$\Delta z \approx \frac{f(f-l)}{l} \quad (3.41)$$

Sustituyendo (3.41) en (3.37) se obtiene finalmente

$$S(\bar{r}) = \frac{f(f-l)}{l} \left( \delta(r-a)\frac{\partial}{\partial n}W - P(\bar{r})\nabla_r^2W \right) \quad (3.42)$$

que es la ecuación de Roddier y es exactamente la misma expresión que (3.31). La ecuación (3.42) es una aproximación a primer orden válida para valores pequeños de  $\Delta z$ , o equivalentemente para imágenes de la pupila altamente desenfocadas.

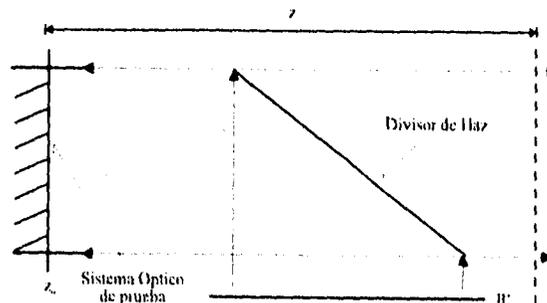
Por último, al igual que en la parte final de la sección 3.3.4, comentaremos sobre la importancia de la posición de detección  $l$  en la ecuación (3.42). Debido a que el método de Roddier está fundamentado en la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.25) y esta última se obtiene de argumentos de óptica geométrica (sección 2.3), en donde se hace la suposición de que no hay cruce de rayos (figura 2.3), se deduce que la distancia de detección  $l$  no debe tomarse muy cerca del foco. Es decir, no dentro de la zona de la cáustica ya que de ser así podría haber cruce de rayos y esto no permitirá la reconstrucción satisfactoria del frente de onda debido a que se perdería la correspondencia de puntos en las distribuciones de irradiancia en ambos planos.

### 3.5. GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE RODDIER.

De acuerdo al análisis efectuado para obtener la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.25) desde el punto de vista de la óptica geométrica, es claro que la relación que hay entre la curvatura del frente de onda y la distribución de irradiancia no depende de que el sistema de prueba produzca un haz convergente o no a la salida, (figura 2.2). Esto hace posible, por tanto, el obtener ecuaciones muy parecidas a la de Roddier para sistemas que producen haces no convergentes a la salida.

#### 3.5.1. MÉTODO DE RODDIER EN SISTEMAS QUE PRODUCEN FRENTES DE ONDA NO CONVERGENTES.

Consideremos un sistema óptico que produce un haz de luz no convergente a la salida. La instrumentación para este sistema se muestra en la figura 3.5. Supongamos una irradiancia casi uniforme inciendiendo sobre una pupila en el plano  $z=0$ . En este plano encontramos que  $\nabla l = 0$  en todos lados menos en el borde donde vale



**Figura 3.5.** Sistema óptico no convergente.

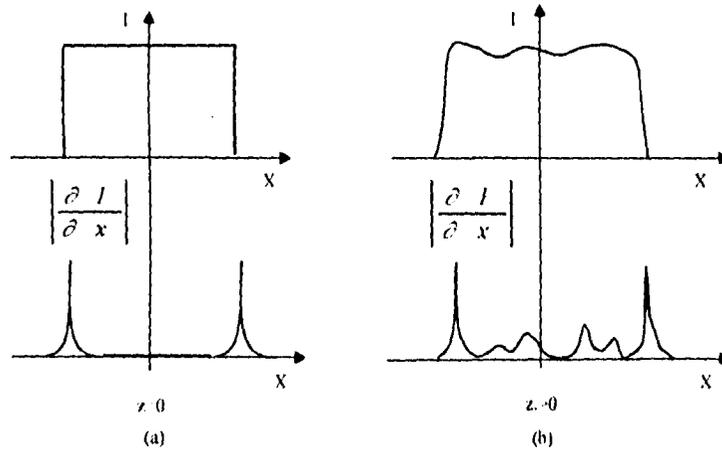
$$\nabla I \Big|_{z=0} = (-I \delta(r-a) \hat{n}) \Big|_{z=0} \quad (3.43)$$

Aquí  $\delta(r-a)$  es una delta de Dirac y  $\hat{n}$  es un vector unitario normal al borde de la pupila y que apunta hacia afuera, (figura 3.6.a).

En un plano  $z_1 > 0$ , más allá del plano de la pupila, encontramos que  $\nabla I \neq 0$  en todos lados tal como se muestra en la figura 3.6.b. Sin embargo, si el plano  $z_1 > 0$  se escoge muy cercano al plano  $z=0$ . Entonces esperaríamos tener irradiancias muy parecidas tales que cumplan con la ecuación (3.43) y así aplicar la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.25) en el plano  $z=0$

$$\frac{\partial I}{\partial z} \Big|_{z=0} = \left( -I \delta(r-a) \frac{\partial}{\partial n} W + P(\vec{r}) \nabla^2 W \right) \Big|_{z=0} \quad (3.44)$$

donde  $P(\vec{r})$  es la función de transmitancia de la pupila (es igual a uno dentro de ella y a cero afuera) y  $\partial W / \partial n = \hat{n} \cdot \nabla W$  es la derivada direccional del frente de onda.



**Figura 3.6.** Perfil de la distribución de irradiancia y su primera derivada en dos planos distintos.

Ahora bien, mediante una aproximación a primer orden de Taylor, la irradiancia  $I_1$  en el plano  $z_1$  cercano al plano  $z=0$ , es

$$I_1 = I \Big|_{z=0} + \frac{\partial I}{\partial z} \Big|_{z=0} (z_1) \quad (3.45)$$

Si hacemos la diferencia de iluminaciones entre el plano  $z_1$  y el plano  $z=0$ ; y dividimos el resultado por la irradiancia en el plano  $z=0$ , resulta

$$\frac{I_1 - I|_{z=0}}{I|_{z=0}} = \frac{1}{I|_{z=0}} \frac{\partial}{\partial z} I|_{z=0} (z_1) \quad (3.46)$$

Si sustituimos (3.44) en (3.46), obtenemos

$$\frac{I_1 - I|_{z=0}}{I|_{z=0}} = z_1 (\delta(r-a) \frac{\partial}{\partial n} W - P(x,y) \nabla_T^2 W) \quad (3.47)$$

la cual es una ecuación tipo Roddier para sistemas que producen un haz no convergente a la salida. Esta es una ecuación de Poisson con condiciones a la frontera de Neumann y nos indica que con sólo mediciones de irradiancia podemos conocer la curvatura del frente de onda (ver sección 3.3).

### 3.6. CONCLUSIONES.

La teoría del método de Roddier puede explicarse a partir de cálculos directos [7] o partiendo de la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.25) [9]. Esta teoría muestra cómo a partir de mediciones de la distribución de irradiancia en dos planos, es posible recuperar el frente de onda mediante la resolución de una ecuación de Poisson con condiciones de Neumann a la frontera (ecuación de Roddier); todo esto en concordancia con algunos trabajos efectuados sobre recuperación de fase [19][20] que fueron discutidos en el capítulo uno.

Ahora bien, se muestra que el método de Roddier es un método de óptica geométrica y sólo se cumple en la región paraxial ya que está fundamentado en la Ecuación de Transporte de Irradiancia (2.25). También se encuentra que la posición de detección  $l$  en el método de Roddier tiene que tomarse fuera de la zona de la cáustica si no se quiere tener problemas en la reconstrucción del frente de onda debido a un posible cruce de rayos. Adicionalmente, el método de Roddier se propone como un sustituto del método de Shack-Hartmann debido a que:

- a) La instrumentación del método de Roddier es relativamente más fácil que la del método de Shack-Hartmann.
- b) Desde un punto de vista experimental es más fácil y rápido medir un campo escalar como lo es la distribución de irradiancia en el método de Roddier, que un campo vectorial como lo es la inclinación (pendiente) del frente de onda en el método de Shack-Hartmann. En un campo vectorial se tienen que hacer el doble de mediciones que en un campo escalar por cada punto de prueba.

- c) En el método de Roddier puede balancearse la resolución en contra de la sensibilidad solamente cambiando el valor de  $l$  en la ecuación (3.42); el mismo proceso en el método de Shack-Hartmann requiere un cambio de pantalla (véase capítulo 1).
- d) Una de las propiedades más interesantes del método de Roddier es su aplicación en óptica activa [15][18], donde el uso de un espejo bimorfo o un espejo de membrana puede ser usado como un dispositivo analógico para resolver automáticamente la ecuación de Roddier (ecuación de Poisson con condiciones de Neumann a la frontera) y así poder corregir el sistema durante el tiempo de operación.

Por último, se obtienen ecuaciones tipo Roddier para sistemas que producen haces no convergentes a la salida y se muestra que el método de Roddier es independiente del sistema óptico a probar. Como una consecuencia de este resultado, se propone que el método de Roddier puede generalizarse al estudio de sistemas tales como espejos planos, prismas o cualquier otro sistema que produzca un haz no convergente a la salida. Sin embargo, lo anterior estará limitado por el tamaño de los detectores empleados (por ejemplo, un CCD), en consecuencia no se podrán probar sistemas ópticos con aberturas muy grandes. No obstante, si se requiere probar en sistema de abertura grande que produzca un frente de onda no convergente se tendrá que modificar la instrumentación para que a la salida se tenga un haz convergente.

## CAPÍTULO 4

### SIMULACIÓN DEL MÉTODO DE RODDIER.

#### 4.1. INTRODUCCIÓN.

La simulación del método de Roddier tiene como propósito, en primer lugar, el de conocer los algoritmos numéricos para poder resolver la ecuación de Roddier y así reconstruir el frente de onda, y segundo, establecer la forma en que han de tomarse los datos de las distribuciones de irradiancia en los planos simétricamente desenfocados. Esto nos permitirá tener una visión más amplia sobre el concepto de la percepción de la curvatura del frente de onda.

#### 4.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RODDIER POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

Si consideramos que gran parte de componentes ópticos presentan forma circular será válido suponer que la pupila del elemento óptico que se desea probar es circular. Sea  $R$  el radio de la pupila y  $f$  la distancia focal del sistema óptico bajo prueba. Las coordenadas sobre el plano de la pupila son  $\vec{r} = (x, y)$  y las coordenadas sobre el plano de detección, antes del foco, son  $\vec{r}' = l\vec{r}/f = (lx/f, ly/f)$ , (figura 4.1). Si definimos coordenadas reducidas sobre el plano de la pupila como  $\vec{u} = \vec{r}/R$  y sobre el plano de detección como  $\vec{u}' = \vec{r}'/a = (l\vec{r})/(fa)$ , donde  $a = lR/f$  es el radio de la sección transversal de la imagen de la pupila en el plano de detección y si suponemos además que  $f \gg l$  y que el frente de onda  $W$  está dado en unidades de longitud de onda  $\lambda$ , entonces la ecuación de Roddier se puede escribir como

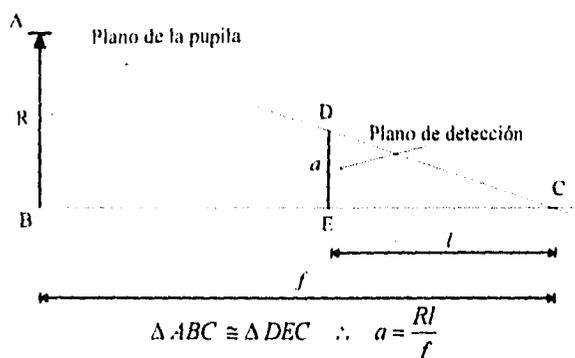
$$S(\vec{u}) = -\frac{f^2 \lambda}{lR^2} \left( P(\vec{u}) \nabla^2 W(\vec{u}) - \delta(u-1) \frac{\partial}{\partial u} W(\vec{u}) \right) \quad (4.1)$$

donde  $S(\vec{u})$  es la señal del sensor (3.30). Usando coordenadas polares y separando los términos independientes, la ecuación (4.1) se convierte en

$$\begin{aligned} \nabla_p^2 W(\rho, \theta) &= F(\rho, \theta) \Big|_{0 \leq \rho < 1} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} W(\rho, \theta) &= F(\rho, \theta) \Big|_{\rho=1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $F(\rho, \theta) = -\frac{lR^2}{f^2 \lambda} S(\rho, \theta)$  y  $\nabla_p^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  es el operador laplaciano en coordenadas polares.

La ecuación (4.2) es una ecuación con derivadas parciales del tipo elíptica llamada ecuación de Poisson con condiciones de Neumann a la frontera [12][13].



**Figura 4.1.** Geometría del sensor de Roddier.

La reconstrucción directa del frente de onda se efectúa resolviendo numéricamente la ecuación (4.2) por el método de diferencias finitas [10][11][12][13], aunque se puede resolver mediante algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT) [29], o mediante el método general de mínimos cuadrados donde el frente de onda se da en términos de los modos de los polinomios de Zernike [6][30].

Como hemos supuesto que la pupila de entrada es circular, las imágenes de la pupila desenfocadas tendrán simetría circular, por lo que podemos suponer que la región de interés, donde se desea conocer el frente de onda  $W(\rho, \theta)$ , es una región de este tipo. Sobre esta región construiremos una rejilla o malla cuyos nodos los definiremos como el conjunto de puntos

$$(\rho_i, \theta_j) = (i\Delta\rho, j\Delta\theta) \quad (4.3)$$

donde  $\Delta\rho$  y  $\Delta\theta$  son las separaciones o tamaños de la rejilla para  $\rho$  (radio) y  $\theta$  (ángulo), respectivamente, e  $i=1, 2, \dots, N$ ;  $j=0, 1, 2, \dots, M-1$ , (figura 4.2). También definiremos la siguiente notación de subíndices para el frente de onda  $W(\rho, \theta)$

$$W_{i,j} \equiv W(\rho_i, \theta_j) \quad (4.4)$$

Para cada punto de la malla  $(\rho_i, \theta_j)$  las derivadas parciales de la función  $W(\rho, \theta)$  se pueden expresar como un cociente de diferencias más un error de truncamiento (E.T.) mediante una aproximación de Taylor; así usando (4.3) y (4.4) tenemos que, para las diferencias centradas de  $\partial W / \partial \rho$ , se tiene



**Figura 4.2.** Parte de la malla donde se define la ecuación de Poisson.

$$\frac{\partial}{\partial \rho} W(\rho_i, \theta_j) = \frac{W(\rho_{i+1}, \theta_j) - W(\rho_{i-1}, \theta_j)}{2 \Delta \rho} + E.T. \quad (4.5.a)$$

Para diferencias centradas de  $\partial^2 W / \partial \rho^2$ , se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} W(\rho_i, \theta_j) = \frac{W(\rho_{i+1}, \theta_j) - 2W(\rho_i, \theta_j) + W(\rho_{i-1}, \theta_j)}{(\Delta \rho)^2} + E.T. \quad (4.5.b)$$

y para diferencias centradas de  $\partial^2 W / \partial \theta^2$ , se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} W(\rho_i, \theta_j) = \frac{W(\rho_i, \theta_{j+1}) - 2W(\rho_i, \theta_j) + W(\rho_i, \theta_{j-1})}{(\Delta \theta)^2} + E.T. \quad (4.5.c)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.5) en la ecuación de Roddier (4.1) se obtiene para el laplaciano

$$-2 \left\{ 1 + \frac{1}{(i \Delta \theta)^2} \right\} W_{i,j} + \left\{ 1 + \frac{1}{2i} \right\} W_{i+1,j} + \left\{ 1 - \frac{1}{2i} \right\} W_{i-1,j} + \frac{1}{(i \Delta \theta)^2} W_{i,j-1} + \frac{1}{(i \Delta \theta)^2} W_{i,j+1} = (\Delta \rho)^2 F_{i,j} \quad (4.6.a)$$

y para la derivada radial (condición de frontera)

$$W_{N+1,j} - W_{N-1,j} = 2 \Delta \rho F_{N,j} \quad (4.6.b)$$

donde  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;  $\Delta \rho = 1/N$ ;  $\Delta \theta = 2\pi/M$ ;  $i=1, 2, \dots, N$ ;  $j=0, 1, \dots, M-1$ ;  $N$  es el número máximo de particiones en la coordenada radial y  $M$  es el número máximo de particiones en la coordenada angular, (figura 4.2). Para el tipo de coordenadas empleadas

(coordenadas polares), en el apéndice C se muestra que en el punto central ( $i=0$ ) existe una inconsistencia en (4.6.a) y por tanto, se tiene que establecer la siguiente condición adicional [13]

$$W_{0,j} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M W_{1,j} - F_{0,0} \left( \frac{\Delta\rho}{2} \right)^2 \quad (4.6.c)$$

Combinando las ecuaciones en diferencias (4.6), se obtiene:

Para ( $i = 1$ ) y ( $j = 0, 1, \dots, M-1$ ) ( $\rho = 0$ )

$$a_1 W_{1,j} + b_1 W_{2,j} + \frac{c_1}{M} \sum_{\alpha=0}^{M-1} W_{1,\alpha} + d_1 W_{1,j-1} + d_1 W_{1,j+1} = (\Delta\rho)^2 \left( \frac{c_1 F_{0,0}}{4} + F_{1,j} \right) \quad (4.7.a)$$

Para ( $i = 2, 3, \dots, N-1$ ) y ( $j = 0, 1, \dots, M-1$ ) ( $0 < \rho < 1$ )

$$a_i W_{i,j} + b_i W_{i+1,j} + c_i W_{i-1,j} + d_i W_{i,j-1} + d_i W_{i,j+1} = (\Delta\rho)^2 F_{i,j} \quad (4.7.b)$$

Para ( $i = N$ ) y ( $j = 0, 1, \dots, M-1$ ) ( $\rho = 1$ )

$$a_N W_{N,j} + b_N W_{N-1,j} + c_N W_{N-1,j} + d_N W_{N,j-1} + d_N W_{N,j+1} = -2b_N \Delta\rho F_{N,j} \quad (4.7.c)$$

donde  $a_i = -2 \left( 1 + \frac{1}{(i\Delta\theta)^2} \right)$ ,  $b_i = 1 + \frac{1}{2i}$ ,  $c_i = 1 - \frac{1}{2i}$ , y  $d_i = \frac{1}{(i\Delta\theta)^2}$ .

Las nuevas ecuaciones en diferencias (4.7) nos proporcionan un sistema de ecuaciones lineales que se puede escribir como

$$AW = B \quad (4.8)$$

donde  $A$  es una matriz de dimensión  $(N \cdot M) \times (N \cdot M)$  que depende del tamaño de la malla así como del número de particiones,  $B$  es una matriz de dimensión  $(N \cdot M) \times 1$  que depende del tamaño de la malla, del número de particiones y de las condiciones de frontera (señal del sensor) y  $W$  es la matriz solución de dimensión  $(N \cdot M) \times 1$ ,  $W_{i,j}$  es el frente de onda en la posición dada por  $(i,j)$  sobre la malla de la figura 4.2. El método numérico empleado para resolver el sistema de ecuaciones lineales de dimensiones muy grandes como (4.8), es el método iterativo SOR (Simultaneous Over-Relaxation) [10][11][12][13], en donde, si suponemos que  $\tilde{W}$  es una aproximación a la solución del sistema (4.8), el objetivo del método consiste en generar una sucesión de aproximaciones hasta que se cumpla que la diferencia  $\|B - A\tilde{W}\|$  converja a cero, o a un valor de tolerancia máxima establecido. Para

propósitos de cómputo, se puede mostrar que la  $m$ -ésima componente de  $W_{i,j}$  del sistema de ecuaciones (4.8) está dada por la fórmula iterativa [10]

$$W_m = (1-\omega)\tilde{W}_m + \frac{\omega}{a_{m,m}} \left[ b_m - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{m-1} a_{m,n} W_n - \sum_{n=m+1}^{(mm)} a_{m,n} \tilde{W}_n \right] \quad (4.9)$$

donde  $a_{m,n} \in A$ ,  $b_m \in B$  y  $\omega$  es el parámetro de relajación. El valor del parámetro de relajación es  $0 < \omega < 2$ ; si  $0 < \omega < 1$  se dice que el método está sub-relajado, si  $\omega = 1$  el método se llama de Gauss-Seidel y si  $1 < \omega < 2$  se dice que el método es sobre-relajado [10][11][12][13].

### 4.3. SIMULACIÓN.

La simulación consiste primeramente en resolver analíticamente la ecuación de transporte de irradiancia generalizada (2.22) para un frente de onda conocido que satisfaga la ecuación eikonal [6][28]. La solución de la ecuación de transporte de irradiancia generalizada es una función analítica de irradiancia que es sustituida en la ecuación de Roddier, la cual se resuelve numéricamente obteniendo una solución discreta del frente de onda que finalmente se compara con el frente de onda propuesto. En la figura 4.3 se muestra un diagrama de bloques de la simulación. Para la simulación del método de Roddier se hizo un programa en lenguaje C [31], llamado "SR" cuyo diagrama de bloques se muestra en el apéndice D este consta de tres subprogramas: El programa "SIM" que genera automáticamente los coeficientes numéricos de las matrices  $A$  y  $B$  de la ecuación (4.8); el programa "SOR" que resuelve iterativamente el sistema de ecuaciones lineales (4.8) aplicando el método iterativo SOR, y el programa "GRAFSOR" que grafica el frente de onda discreto y el esperado o "real".

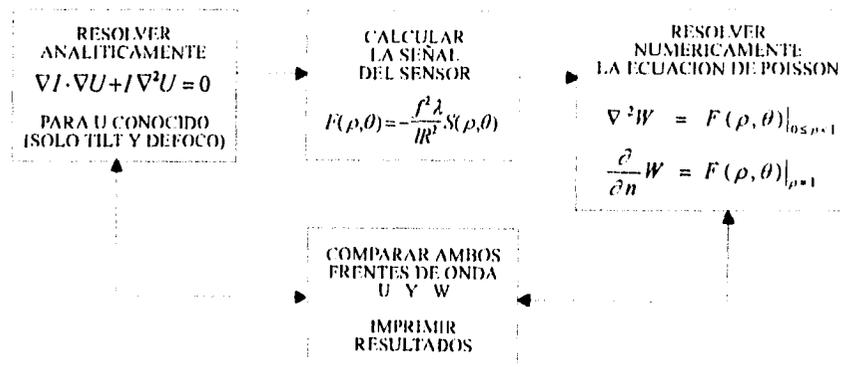


Figura 4.3. Diagrama de bloques de la simulación del método de Roddier.

#### 4.3.1. EJEMPLOS.

Debido a la complejidad que representa resolver analíticamente la ecuación de transporte de irradiancia general (2.22), sólo se pudo resolver para tres casos de frente de onda: frente de onda "sin aberraciones", frente de onda con tilt y frente de onda con defoco. Para cada uno de los casos se simuló, como un ejemplo tal y como se indica en el diagrama de bloques de la figura 4.3, la prueba de un sistema óptico convergente de radio  $R = 76$  mm y longitud focal  $f = 2000$  mm; la posición de detección considerada fue de  $l = 70$  mm y la longitud de onda de la luz empleada en la interacción de  $\lambda = 6 \times 10^{-4}$  mm (datos tomados del dispositivo experimental de S. Fierro [30]).

##### 4.3.1.1. FRENTE DE ONDA SIN ABERRACIONES.

Sea  $W = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  el frente de onda esférico sin aberraciones. Sustituyendo en la ecuación de transporte de irradiancia general (2.22) y resolviendo analíticamente obtenemos la función de irradiancia siguiente

$$I(\vec{r}) = \frac{cte}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Haciendo uso de esta expresión se calculan las distribuciones de irradiancia en los dos planos simétricamente desenfocados, obteniendo

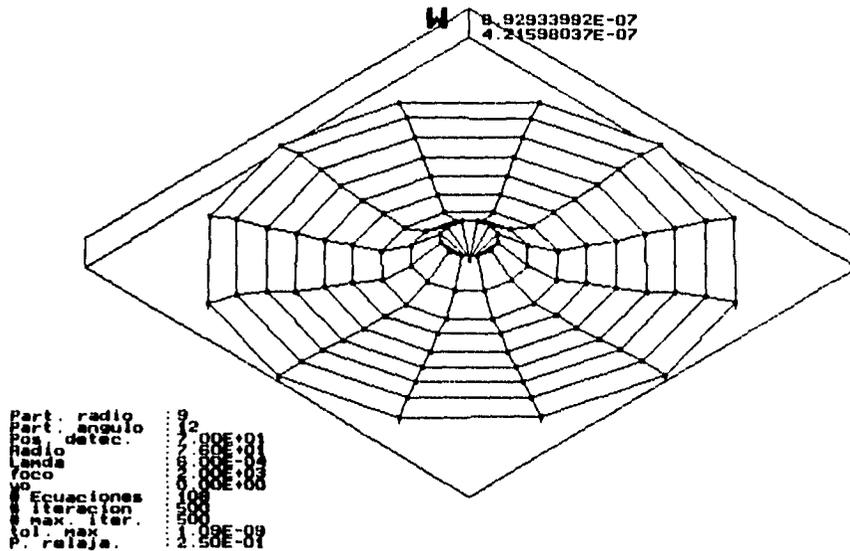
$$\begin{aligned} I_1(\vec{r}) &= \frac{cte}{x^2 + y^2 + l^2} \\ I_2(-\vec{r}) &= \frac{cte}{x^2 + y^2 + l^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $l$  es la posición de detección e  $I_2$  se ha rotado  $180^\circ$  respecto a  $I_1$ . Si sustituimos las distribuciones de irradiancia de (4.10) en la señal del sensor (3.30), se obtiene que  $S(\vec{r}) = 0$ . Esto es porque las distribuciones de irradiancia (4.10) son las mismas en ambos planos y por tanto el sensor no proporcionará información sobre la presencia de aberraciones en este caso, tal y como es de esperarse para un frente de onda sin aberraciones. Si ahora sustituimos la señal del sensor en la ecuación de Roddier (4.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_\rho^2 W(\rho, \theta) &= 0|_{0 \leq \rho < 1} \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} W(\rho, \theta) &= 0|_{\rho=1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

la cual se resuelve numéricamente mediante el método SOR y cuya solución se muestra en la figura 4.4, donde se observa que  $W_{i,j} \approx 0, \forall i, j$ . Esto está en acuerdo con lo esperado debido a que para un frente de onda esférico sin aberraciones, la función de error (frente de onda

esférico menos frente de onda aberrado) es cero. Por tanto, podemos deducir que para este caso, el método de Roddier predice satisfactoriamente cómo debe ser el frente de onda.



**Figura 4.4.** Frente de onda  $W$  sin aberraciones calculado con el método SOR. El frente de onda  $W$  está expresado en unidades de  $\lambda$ . Obsérvese que debido a la escala, el frente de onda parecería estar deformado. Sin embargo, las diferencias sobre el máximo y el mínimo son tan sólo de  $4 \times 10^{-7}$ , lo que prácticamente es un plano.

#### 4.3.1.2. FRENTE DE ONDA CON TILT.

Sea  $W = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$  un frente de onda esférico con un descentramiento  $y_0$  sobre el eje  $y$  (tilt en  $y$ ). Si sustituimos como antes en la función de irradiancia general (2.22) y resolvemos analíticamente obtenemos la función de irradiancia siguiente

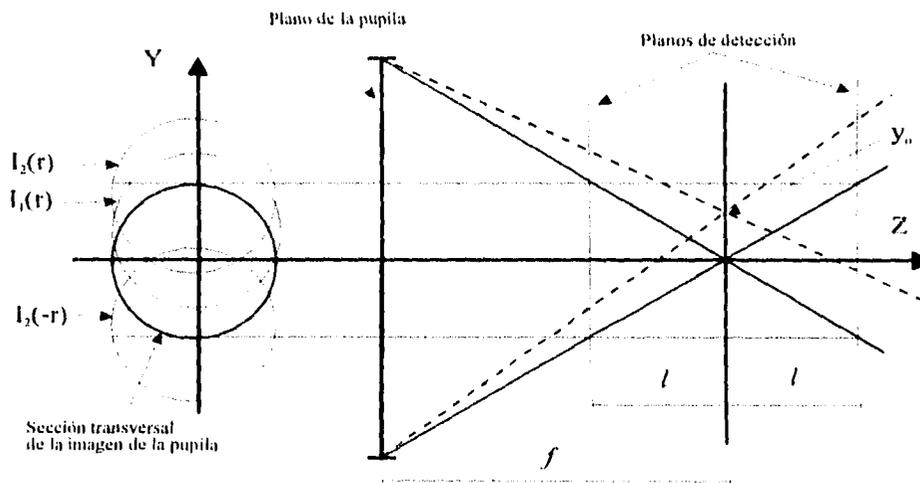
$$I(\vec{r}) = \frac{c/e}{x^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$$

Con esta expresión y basándonos en la geometría de la señal del sensor de la figura 4.5, se calculan las distribuciones de irradiancia en los dos planos simétricamente desenfocados obteniendo

$$I_1(\bar{r}) = \frac{cte}{x^2 + \left[ y - y_0 \frac{(f-l)}{f} \right]^2 + l^2}$$

$$I_2(-\bar{r}) = \frac{cte}{x^2 + \left[ y + y_0 \frac{(f+l)}{f} \right]^2 + l^2}$$
(4.12)

donde  $f$  es el foco del sistema de prueba,  $l$  es la posición de detección,  $y_0$  es el descentramiento e  $I_2$  se ha rotado  $180^\circ$  respecto a  $I_1$ . En la figura 4.5, donde se ha exagerado el descentramiento para mayor claridad, se muestra cómo las distribuciones de irradiancia de los dos planos de detección (4.12) se encuentran desplazadas respecto a la sección transversal de la imagen de la pupila a lo largo del eje  $y$ .



**Figura 4.5.** Geometría de la señal del sensor para el caso de tilt.  $I_2(-r)$  está rotado  $180^\circ$  respecto a  $I_1(r)$ .

Si ahora sustituimos (4.12) en la ecuación de Roddier (4.2) y resolvemos numéricamente mediante el método SOR, se obtiene el frente de onda discreto que se muestra en la figura 4.6. Comparando este resultado con el frente de onda esperado, es decir, frente de onda esférico menos el frente de onda aberrado  $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$ , (figura 4.7), se observa que ambos resultados son aproximadamente iguales. En resumen, podemos decir que el método de Roddier predice adecuadamente cuál es el frente de onda para este caso. Sin embargo, para llegar a este resultado se hicieron algunos ajustes sobre el borde de la señal del sensor que discutiremos más adelante.

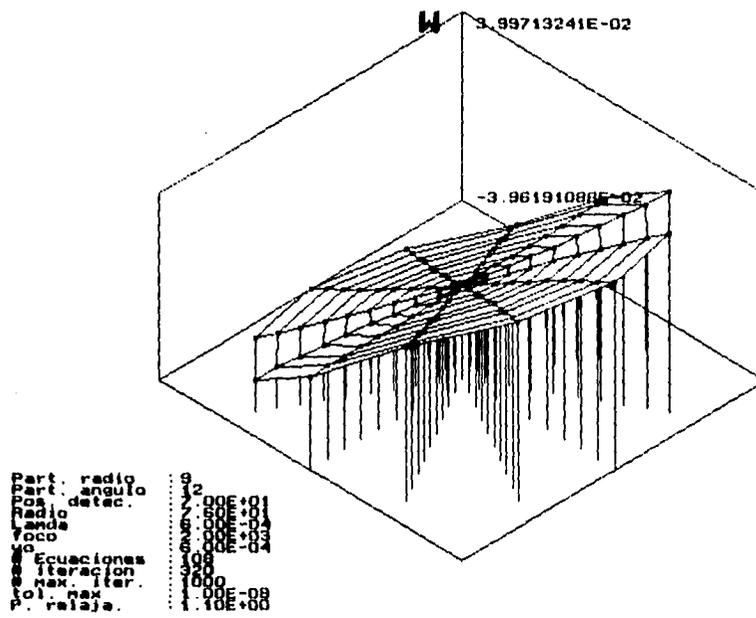


Figura 4.6. Frente de onda  $W$  con tilt, calculado con el método SOR;  $W$  está expresado en unidades de  $\lambda$ .

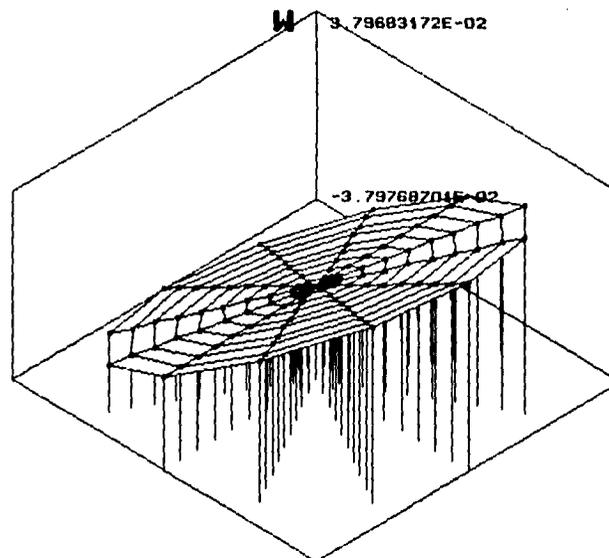
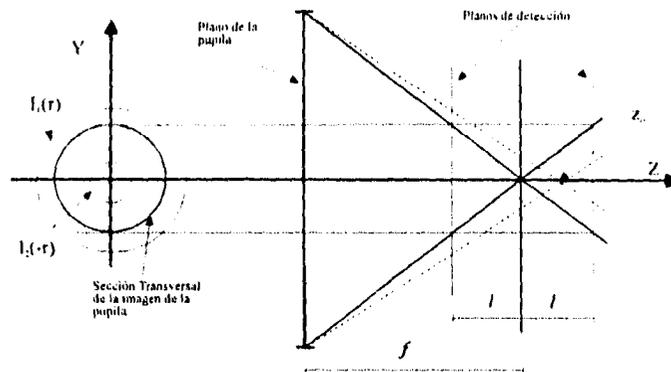


Figura 4.7. Frente de onda "real"  $W$  con tilt, expresado en unidades de  $\lambda$ .

#### 4.3.1.3. FRENTE DE ONDA CON DEFOCO.

Sea  $W = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$  un frente de onda esférico con un pequeño descentramiento  $z_0$  sobre el eje  $z$  ( defoco). Si sustituimos en la ecuación de transporte de irradiancia general (2.22) y resolvemos analíticamente, obtenemos la siguiente función de la irradiancia

$$I(\vec{r}) = \frac{cte}{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$$



**Figura 4.8.** Geometría de la señal del sensor para el caso del defoco.  $I_2(-r)$  está rotado  $180^\circ$  respecto a  $I_1(r)$ .

Ahora bien, partiendo de esta expresión y de acuerdo a la geometría de la señal del sensor de la figura 4.8, se calculan las distribuciones de irradiancia en los planos simétricamente desenfocados obteniendo

$$\begin{aligned} I_1(\vec{r}) &= \frac{cte}{x^2 + y^2 + (l - z_0)^2} \\ I_2(-\vec{r}) &= \frac{cte}{x^2 + y^2 + (l + z_0)^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde  $l$  es la posición de detección,  $z_0$  es el descentramiento e  $I_2$  se ha rotado  $180^\circ$  respecto a  $I_1$ . Sustituyendo (4.13) en la ecuación de Roddier (4.2) y resolviendo numéricamente se obtiene el frente de onda discreto que se muestra en la figura 4.9. Comparando este frente de onda discreto con el frente de onda esperado, se encuentra que ambos son aproximadamente semejantes en su forma, más no numéricamente, (figura 4.10). Sin embargo, como se indica en el apéndice E, lo anterior puede deberse a que en una ecuación de Poisson con condiciones de Neumann a la frontera, (como lo es la ecuación (4.2)), se tiene que cumplir una condición de consistencia sobre los datos (dentro de la pupila como en el borde) para

que exista solución y como la ecuación de Roddier para este caso no cumple con esa condición de consistencia, el método SOR no converge a una solución exacta. Al igual que en el ejemplo anterior, aquí también se realizaron algunos ajustes sobre los datos de la señal del sensor en el borde.

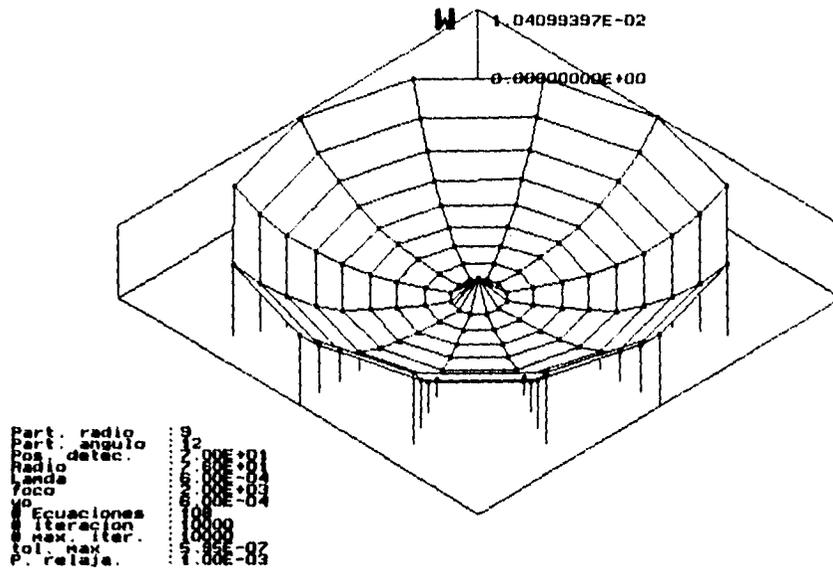


Figura 4.9. Frente de onda  $W$  con defoco calculado con el método SOR.  $W$  está expresado en unidades de  $\lambda$ .

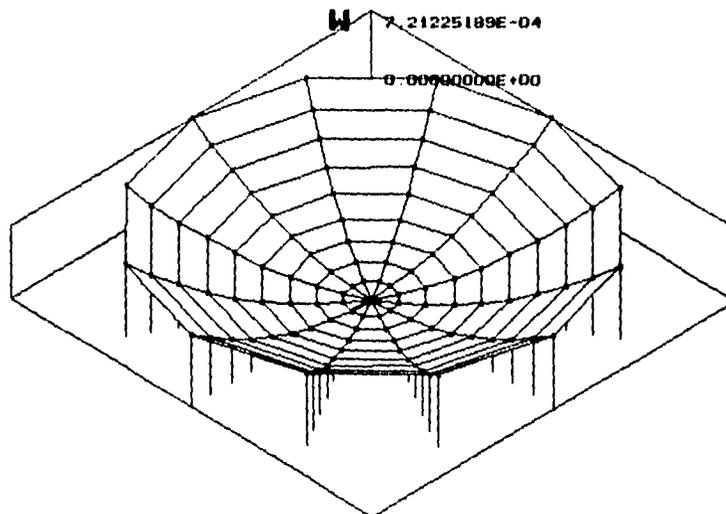


Figura 4.10. Frente de onda  $W$  con defoco.  $W$  está expresado en unidades de  $\lambda$ .

#### 4.3.2. COMENTARIOS SOBRE EL CALCULO DE LA SEÑAL DEL SENSOR EN EL BORDE.

Para obtener información sobre el frente de onda en los casos de tilt y defoco, se deben tomar las distribuciones de irradiancia como se muestra en las figuras 4.5 y 4.8. En éstas, los descentramientos se han exagerado para mayor claridad aunque realmente se tienen que considerar magnitudes de descentramiento muy pequeñas. En estas figuras se observa cómo las distribuciones de irradiancia en los dos planos son diferentes; para el tilt, se observa que las dos imágenes están desplazadas una respecto de la otra; si aquí se recentran las imágenes, las distribuciones de irradiancia en los dos planos serán iguales. Para el caso de defoco, se observa que una imagen es mayor que la otra; aquí si se reescalan las imágenes para hacerlas del mismo tamaño, las distribuciones de irradiancia en ambos planos serán aproximadamente iguales. De lo anterior es claro que, si se recentran y reescalan las dos imágenes de irradiancia medidas en los dos planos, el frente de onda que se obtenga estará corregido para tilt y defoco, y esto puede ser de interés si se requiere conocer del frente de onda solamente los términos de otras aberraciones, como astigmatismo, aberración esférica y coma [3] sin considerar tilt y defoco. Sin embargo, esto no debe hacerse si tilt y defoco son de importancia; por ejemplo, en la alineación de un telescopio o en la corrección de estas desalineaciones.

Ahora bien, en las figuras 4.5 y 4.8 se observa que existen regiones sobre el borde donde las distribuciones de irradiancia dadas por (4.12) y (4.13) no están definidas. Esto trae como consecuencia que al calcular la señal del sensor en el borde, se obtenga siempre

$$S(\vec{r}) = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = 1 \quad (\text{Si } I_1 = 0, \text{ o, } I_2 = 0; \text{ en el borde})$$

y como  $F(\vec{r}) = \frac{f\lambda}{R} S(\vec{r})$ , en la condición de Neumann de (4.2), se obtendrá el mismo valor aún para distintos valores de descentramiento. Con esta condición de Neumann y considerando que la señal en el borde es mucho más intensa que la señal dentro de la pupila, se resuelve numéricamente la ecuación de Roddier (4.2) por el método SOR, obteniendo aproximadamente el mismo valor de frente de onda para distintos valores de descentramiento. Esto obviamente está en desacuerdo con lo que debería observarse, ya que para distintos valores en el descentramiento debería obtenerse un frente de onda diferente para cada caso. Sin embargo, para evitar estas complicaciones y como aparentemente la señal en el borde, que es muy intensa, debe depender del valor de descentramiento, a la condición de Neumann de (4.2) se le multiplica por el siguiente factor  $\alpha f^2/\lambda^2$ , (donde  $\alpha$  es el descentramiento en el eje y para el caso de tilt, o sobre el eje z para el caso de defoco).

No obstante que por el momento no sea posible dar una explicación físicamente aceptable del por qué de este factor multiplicativo adicional sobre la condición de Neumann en (4.2), se encuentra que los resultados obtenidos por el método SOR, con esta constante sobre la señal del borde, son muy aproximados a los resultados esperados. Para el caso de tilt, esta aproximación es más evidente que para el caso de defoco donde la inconsistencia de

los datos (se discute en el apéndice E) no permite que el método SOR converja a una solución exacta.

#### 4.4. CONCLUSIONES.

Se estudia cómo la ecuación de Roddier (4.2) es resuelta numéricamente por el método de diferencias finitas, aplicando el algoritmo SOR, para distribuciones de irradiancia provenientes de las soluciones de la ecuación de transporte de irradiancia general (2.22) para los casos de frente de onda sin aberraciones, con tilt y con defoco. Se encuentra que las soluciones discretas o frentes de onda discretos de 4.2, son muy aproximados a los frentes de onda "reales" por lo que se puede afirmar que el método de Roddier predice de manera aproximada cómo deben ser los frentes de onda solución para los casos arriba mencionados. Sin embargo, se hallaron algunas dificultades antes de llegar a los resultados mencionados. La primera de ellas es que debido a la complejidad matemática que representó resolver la ecuación de transporte de irradiancia general (2.22) para frentes de onda con otro tipo de aberraciones como astigmatismo, coma y aberración esférica, no se pudo hacer una simulación con estos casos de interés. Otra de las dificultades encontradas la representó el hecho de no obtener una solución aproximada para el caso de frente de onda con defoco, debido principalmente a que los datos de la señal del sensor para este caso, no cumplían con la condición de consistencia para la existencia de la solución en la ecuación de Roddier (4.2). Finalmente, la última de las dificultades encontradas fue el hecho de tener que multiplicar, para los casos de frente de onda con desalineaciones estudiados, la condición de Neumann de (4.2) por un factor constante que dependiera del descentramiento el cual depende de la desalineación. Se encuentra que esta constante, que no se puede predecir en la teoría establecida en la simulación, si está en acuerdo con los resultados esperados.

No obstante, a pesar de las dificultades anteriores, se pudo llegar al establecimiento de algunos resultados interesantes en la simulación del método de Roddier. Primero, para que en una prueba óptica sea posible obtener un frente de onda que contenga la información de todas las aberraciones (tilt, defoco, astigmatismo, coma y aberración esférica) aplicando el método de Roddier a un sistema óptico, es necesario que se tomen las mediciones de irradiancia sin hacer ningún tipo de ajuste sobre las imágenes. Si por lo contrario, se desean corregir los datos para que se obtenga un frente de onda sin tilt y defoco en el método de Roddier, se puede hacer de manera numérica, reescalando y recentrando las imágenes de los dos planos desenfocados. Por otro lado, si tomamos en cuenta las dificultades encontradas en la simulación y considerando las que puedan originarse al efectuar el cálculo de la señal del sensor y que dependen de la manera eficiente en que se tomen las mediciones de irradiancia en los planos desenfocados, resulta razonable concluir que el método de Roddier trabajaría de manera más eficiente si en lugar de resolver numéricamente la ecuación (4.2) y obtener el frente de onda y después corregir el sistema óptico, se emplea un espejo de membrana o espejo bimorfo [15][18] para resolver de manera analógica la ecuación (4.2), siendo esto último muy importante si se desea usar el método de Roddier en aplicaciones de óptica activa.

## CONCLUSIONES GENERALES

- Se muestra cómo la ecuación de transporte de irradiancia puede obtenerse de argumentos de óptica física y de óptica geométrica.
- Se muestra que la ecuación de transporte de irradiancia representa la ley de conservación de energía radiante; es sólo válida en la región paraxial y pertenece al régimen de la óptica geométrica.
- Se muestra que el método de Roddier puede ser explicado desde el punto de vista de la óptica física a partir de cálculos directos y desde el punto de vista de la óptica geométrica partiendo de la ecuación de transporte de irradiancia. De esto último se concluye que el método de Roddier es válido en la región paraxial y es un método de óptica geométrica.
- Se encuentra que la posición de detección en el método de Roddier tiene que efectuarse fuera de la zona de la cáustica. También se encuentra que con sólo cambiar la posición de detección, puede balancearse la resolución en contra de la sensibilidad en el método.
- El método de Roddier presenta ventajas en instrumentación y de rapidez en la recuperación del frente de onda sobre los métodos de percepción tradicionales.
- El método de Roddier se generaliza a sistemas ópticos que producen haces no convergentes a la salida. Esto demuestra, al menos teóricamente, que el método no es exclusivo de la configuración del sistema óptico a probar.
- Las soluciones de la ecuación de Roddier predicen de manera aproximada la forma de los frentes de onda estudiados en la simulación.
- Como resultado de las dificultades encontradas durante la simulación, se propone que el método de Roddier sería más eficiente, si en lugar de resolver la ecuación de Poisson numéricamente, ésta se resuelve analógicamente.

## APÉNDICE A

### OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE IRRADIANCIA GENERAL A PARTIR DEL TEOREMA DE POYNTING.

Como se muestra en muchos libros de texto referentes a la teoría electromagnética, el teorema de Poynting [27] es una consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell. Además este teorema nos proporciona información sobre la conservación de la energía del campo electromagnético. Este teorema escrito en forma matemática es

$$-\oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV + \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (\text{a.1})$$

donde  $\mathbf{E}$  es el vector eléctrico,  $\mathbf{H}$  es el vector magnético,  $\mathbf{B}$  es el vector inducción magnética,  $\mathbf{D}$  es el vector de desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{J}$  es el vector de densidad de corriente y  $\epsilon_0$  es una constante. El primer término del lado derecho de (a.1) es la razón de incremento de la energía del campo electrostático en la región bajo consideración. El último término es la razón de energía disipada por calentamiento Joule del medio contenido en la región. El principio de conservación de la energía requiere que el miembro del lado izquierdo sea interpretado como la razón del influjo de energía dentro de la región.

En nuestro caso se va a considerar la sola presencia del campo electromagnético en cierta región del espacio; es decir, sin fuentes, inmerso en un medio homogéneo no-conductor y donde no se realiza trabajo mecánico. Con estas suposiciones el teorema de Poynting (a.1) se escribe como

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (\text{a.2})$$

donde  $w = w_e + w_m$ ,  $w$  es la densidad de energía total electromagnética,  $w_e$  es la densidad de energía eléctrica,  $w_m$  es la densidad de energía magnética y  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  es el vector de Poynting el cual se considera como el vector que da la dirección y la razón de energía electromagnética que fluye por unidad de área en punto del espacio.

Ahora bien, en nuestro caso de estudio vamos a considerar sólo frecuencias ópticas por lo que se toma el promedio temporal de la cantidades de (a.2), con lo que resulta

$$\langle w_e \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{E}_e^*, \quad \langle w_m \rangle = \frac{\mu}{16\pi} \mathbf{H}_e \cdot \mathbf{H}_e^*, \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*] \quad (\text{a.3})$$

donde  $\mathbf{E}_e$  y  $\mathbf{H}_e$  son funciones que dependen sólo de la posición. Si sustituimos (a.3) en (a.2), resulta

$$\nabla \cdot \langle \mathcal{S} \rangle = 0 \quad (\text{a.3})$$

Que es el teorema de Poynting para campos electromagnéticos a frecuencias ópticas.

Ahora, desde el punto de vista de la óptica geométrica el promedio del vector de Poynting esta relacionada con la ecuación eikonal ( $\nabla W = n\hat{s}$ ) mediante la siguiente expresión

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \frac{c}{n^2} \langle w \rangle \nabla W = v \langle w \rangle \hat{s} \quad (\text{a.4})$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio y  $v = c/n$ . De esta expresión se observa que el promedio del vector de Poynting esta en la dirección de la normal al frente de onda geométrico  $W$ .

La irradiancia se define como el valor absoluto del promedio del vector de Poynting, por lo que obtenemos

$$I = |\langle \mathcal{S} \rangle| = v \langle w \rangle \quad (\text{a.5})$$

combinando (a.4) y (a.5), se obtiene

$$\langle \mathcal{S} \rangle = I \frac{\nabla W}{n} \quad (\text{a.6})$$

sustituyendo (a.6) en (a.3) y desarrollando la divergencia se obtiene finalmente

$$\nabla^2 W + \nabla W \cdot \nabla I = 0$$

que es la misma expresión de (2.22) y que recibe el nombre de ecuación de transporte de irradiancia general y representa la conservación de la energía electromagnética a frecuencias ópticas.

## APÉNDICE B

### CALCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE IRRADIANCIA EN EL PLANO P<sub>2</sub>

Sustituyendo la ecuación (3.7) en (3.8) (véase sección 3.3.2), resulta

$$A_2(\bar{r}) = -\frac{1}{\lambda^2 f} \iiint P(\bar{r}_1) \Psi(\bar{r}_1) \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda f} \bar{r}_1^2\right] \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda f} \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_1\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l} (\bar{r} - \bar{r}_1)^2\right] d\bar{r}_1 \quad (\text{b.1})$$

desarrollando el término cuadrático de (b.1) y sumando los términos de las exponenciales, resulta

$$A_2(\bar{r}) = -\frac{1}{\lambda^2 f} \iiint P(\bar{r}_1) \Psi(\bar{r}_1) \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda f} (l-f) \bar{r}_1^2 - \frac{2i\pi}{\lambda} \bar{r}_1 \cdot \left(\frac{\bar{r}_1}{f} + \frac{\bar{r}}{l}\right) + \frac{i\pi}{\lambda l} \bar{r}^2\right] d\bar{r}_1 \quad (\text{b.2})$$

Ahora bien, haciendo uso de la integral gaussiana [32]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha z^2 - \beta z - \gamma] dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left[\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right] \quad (\text{b.3})$$

y haciendo la siguiente identificación entre (b.2) y (b.3)

$$\alpha = -\frac{i\pi(f-l)}{\lambda f l}, \quad \beta = \frac{2i\pi}{\lambda} \left(\frac{\bar{r}_1}{f} + \frac{\bar{r}}{l}\right), \quad \gamma = -\frac{i\pi}{\lambda l} \bar{r}^2.$$

se integra (b.2) con respecto a  $\bar{r}_1 = (x_1, y_1)$ , resultando

$$A_2(\bar{r}) = \frac{1}{i\lambda(f-l)} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda(f-l)} \bar{r}^2\right] \iiint P(\bar{r}_1) \Psi(\bar{r}_1) \exp\left[-\frac{i\pi l}{\lambda f(f-l)} \bar{r}_1^2\right] \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \bar{r} \cdot \bar{r}_1\right] d\bar{r}_1$$

finalmente como la distribución de irradiancia es el cuadrado de la amplitud compleja, es decir,  $I_2(\bar{r}) = |A_2(\bar{r})|^2$ , se obtiene mediante el cambio de variable  $\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \bar{\rho}$  que,

$$I_2(\bar{r}) = \frac{1}{\lambda^2(f-l)^2} \iint \exp\left[\frac{i\pi l}{\lambda f(f-l)} \bar{\rho}^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda(f-l)} \bar{\rho} \cdot \bar{r}\right] \times \iint P(\bar{r}_1) P(\bar{r}_1 + \bar{\rho}) \Psi(\bar{r}_1) \Psi^*(\bar{r}_1 + \bar{\rho}) \exp\left[\frac{2i\pi l}{\lambda f(f-l)} \bar{\rho} \cdot \bar{r}_1\right] d\bar{r}_1 d\bar{\rho}$$

que es la ecuación (3.9) y que representa la distribución de irradiancia en el plano P<sub>2</sub>.

## APÉNDICE C

### CONDICIÓN DE CONSISTENCIA PARA LA ECUACIÓN DE POISSON EN COORDENADAS POLARES EN EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

Consideremos la ecuación de Poisson en coordenadas polares sobre un disco unitario, expresada por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} = f(r, \theta) \quad (c.1)$$

donde  $0 \leq r \leq 1$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Esta ecuación puede aproximarse usando el método de diferencias finitas [10][11][12][13] por

$$\frac{1}{r_i} \left( r_{i+1/2} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - r_{i-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \right) \frac{1}{\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta \theta)^2} = f_{i,j} \quad (c.2)$$

donde  $u_{i,j}$  y  $f_{i,j}$  son funciones de malla definidas en  $(r, \theta) = (i\Delta r, j\Delta \theta)$ , (ver figura 4.2). Si fijamos nuestra atención en el punto central ( $i = 0, \forall j$ ), es claro que hay dificultades, ya que para este punto la ecuación (c.2) se hace discontinua. Sin embargo, hay que hacer notar que esta dificultad surge solamente de haber elegido el sistema de coordenadas polares y no depende de la continuidad de la función  $u(r, \theta)$  en el punto central. Luego para eliminar la dificultad en el origen, se integra (c.1) sobre un disco  $D$  de radio  $\varepsilon$ , obteniendo

$$\iint_D f r dr d\theta = \iint_D \left( \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \varepsilon d\theta \quad (c.3)$$

Si escogemos  $\varepsilon = \Delta r/2$  y aproximamos la ecuación (c.3) por

$$f(0) \left( \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \pi = \sum_{j=1}^J \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\Delta r} \frac{\Delta r}{2} \Delta \theta \quad (c.4)$$

como  $u_{0,j}$  es independiente del valor de  $j$ , debido a que la función de malla es periódica con período  $J = 2\pi/\Delta \theta$ , de la ecuación (c.4) se obtiene que

$$u_{0,j} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J u_{1,j} - f(0) \left( \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \quad (c.5)$$

Usando esta fórmula se elimina la inconsistencia en (c.2) producida en el punto central del disco unitario al haber escogido coordenadas polares.

APÉNDICE D

DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROGRAMA "SR" EMPLEADO EN LA SIMULACIÓN DEL MÉTODO DE RODDIER.

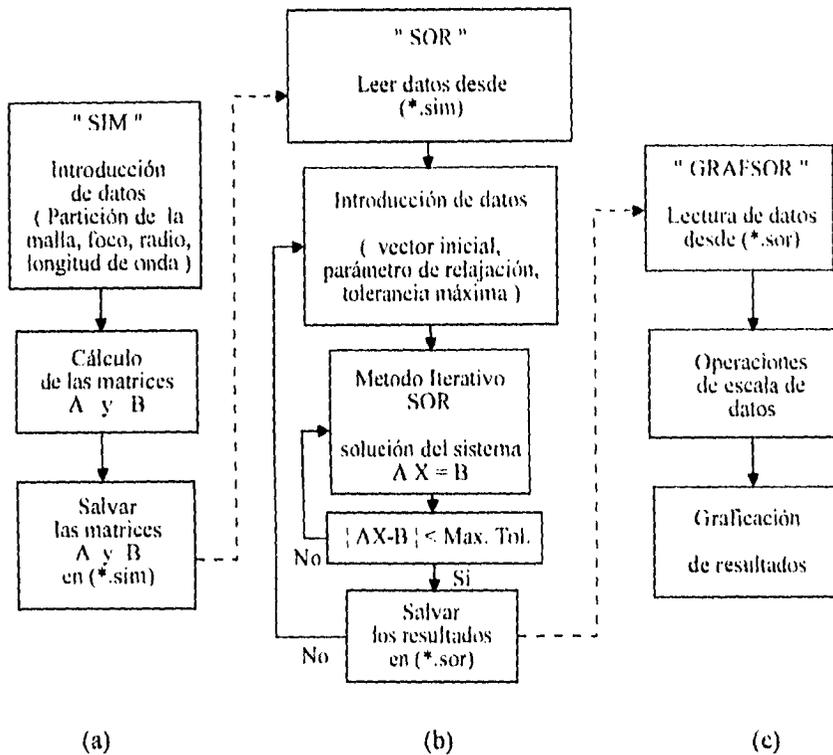


Diagrama de bloques del programa "SR".

(a) "SIM", genera automáticamente los coeficientes de las matrices "A" y "B" del sistema de ecuaciones lineales  $AX=B$ ; sólo para tilt y defoco.

(b) "SOR", resuelve iterativamente el sistema de ecuaciones lineales  $AX=B$  mediante el método SOR (Simultaneous Over-Relaxation).

(c) "GRAFSOR", grafica los frentes de onda discretos obtenidos mediante el método SOR.

## APÉNDICE E

### CONDICIÓN DE CONSISTENCIA PARA LA EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN EN UNA ECUACIÓN DE POISSON CON CONDICIONES A LA FRONTERA DE NEUMANN.

Consideremos una ecuación de Poisson con condiciones de Neumann a la frontera como la ecuación de Roddier (4.2), es decir

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g & \text{en } S \end{aligned} \quad (\text{e.1})$$

donde  $\Omega$  es la región donde se halla definida la función  $u$  y  $S$  es la frontera de la región.

Ahora bien, para que el problema de Neumann, ecuación (e.1) tenga solución, es necesario que la siguiente condición de consistencia

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_S g \, dS$$

se satisfaga para los datos. Esta condición de consistencia se muestra a partir del teorema de la divergencia de Gauss [26]:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{w} \, d\Omega = \int_S \vec{w} \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{e.2})$$

donde  $\Omega$  es una región acotada por una superficie de frontera  $S$ ,  $\vec{n}$  es un vector unitario exterior a  $S$  y  $\vec{w}$  es un campo vectorial. Luego, si hacemos  $\vec{w} = \nabla u$ , (e.2) resulta ser

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u \, d\Omega = \int_S \nabla u \cdot \vec{n} \, dS = \int_S \frac{\partial}{\partial n} u \, dS \quad (\text{e.3})$$

Si ahora, combinamos (e.3) con (e.1), se obtiene

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_S g \, dS$$

que nos dice que si no se satisface esta condición de consistencia sobre los datos, entonces (e.1) y en consecuencia la ecuación de Roddier (4.2), no tiene solución.

## REFERENCIAS

- [1] R.K. Tyson; **Principles of Adaptive Optics**, (Academic Press, Inc., 1991).
- [2] F. Roddier, C. Roddier, N. Roddier, "Curvature Sensing: a new wavefront sensing method," SPIE 976, 203-209 (1988).
- [3] D. Malacara; **Optical shop testing**, Wiley (USA, 1978).
- [4] K. Ichikawa, A. Lohmann, M. Takeda, "Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: experiments". Appl. Opt. 27, 3433-3436 (1988).
- [5] N. Streibl, "Phase imaging by the transport equation of intensity," Opt. Commun. 49, 6-10 (1984).
- [6] M. Born, E. Wolf, **Principles of Optics**, Sixth Ed. (Pergamon, Oxford. 1980).
- [7] F. Roddier, "Curvature sensing: a Diffraction Theory," NOAO R&D Note 87-3 (1987).
- [8] J.W. Goodman; **Introduction to Fourier Optics**, McGraw-Hill (New York, 1968).
- [9] F. Roddier, "Wavefront sensing and the irradiance transport equation," Appl. Opt. 29, 1402-1403 (1990).
- [10] R.L. Burden, J.D. Faires; **Análisis numérico**, 3ra. ed. (Grupo editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1985).
- [11] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling , **Numerical recipes in C. The art of scientific computing**, (Cambridge University Press, 1990).
- [12] G.D. Smith; **Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods**, third edition (Oxford applied mathematics on computing science series, Oxford University Press, New York, 1985).
- [13] J.C. Strikwerda; **Finite difference schemes and partial differential equations**, (Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1989).
- [14] C. Roddier, F. Roddier, "New optical testing methods developed at the University of Hawaii: results on ground-based telescopes and Hubble space telescope," SPIE 1531, 37-43 (1991).
- [15] F. Roddier, "Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics," Appl. Opt., 27, 1223-1225 (1988).
- [16] E. Ruiz, S. Cuevas, R. Langarica, R. Enriquez, I. Gutiérrez, L. Salas, "Offset guider/alignment system for the 2.1 m UNAM telescope," SPIE 627, 231-235 (1986).
- [17] J.M. Beckers, "Interpretation of out-of-focus star images in terms of wave-front curvature," J.Opt.Soc. Am. II, 425-427 (1994).

- [18] C. Schwartz, E. Ribak, S.G. Lipson, "**Bimorph adaptive mirrors and curvature sensing**," *J.Opt.Soc.Am.* **11**, 895-902 (1994).
- [19] M.R. Teague, "**Irradiance moments: their propagation and use for unique retrieval of phase**," *J. Opt. Soc. Am.* **72** 1199-1209 (1982).
- [20] M.R. Teague, "**Deterministic phase retrieval: a Green's Function Solution**," *J. Opt. Soc.Am.* **73** 1434 (1983).
- [21] J.R. Fienup, "**Phase retrieval algorithms: a comparison**," *Appl. Opt.* **21**, 2758-2769 (1982).
- [22] R. Guenther; **Modern Optics**, (John Wiley & Sons Inc., 1990).
- [23] F.D. Feiock, "**Wave propagation in optical systems with large apertures**," *J.Opt.Soc. Am.* **68**, 485-489 (1978).
- [24] A. Papoulis; **Systems and transforms with applications in optics**, (McGraw-Hill, Inc., 1968).
- [25] W.H. Southwell, "**Validity of the Fresnel approximation in the near field**," *J.Opt.Soc. Am.* **71**, 7-14 (1981).
- [26] J.E. Marsden, A.J. Tromba; **Cálculo Vectorial**, tercera edición (Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., 1991).
- [27] O.D. Jefimenko; **Electromagnetic Theory**, Second ed. (Meredith Publishing Company, 1989).
- [28] E. Hecht, A. Zajac; **Optica**, (Fondo Educativo Interamericano, 1977).
- [29] F. Roddier, C. Roddier, "**Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms**," *Appl. Opt.* **30**, 1325-1327 (1991).
- [30] Fierro, P.S., **Evaluación de las aberraciones de un frente de onda por el método de Roddier**, Tesis de Licenciatura de la Facultad de Ciencias, UNAM, 1993.
- [31] H. Schildt; **Turbo C/C++: manual de referencia**, primera edición (Osborne McGraw-Hill Interamericana de España, S.A., 1992).
- [32] G. Polya, G. Latta; **Variable Compleja**, primera edición (Editorial Linusa, S.A. de C.V., 1986).