23

2e).

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

sobre Juegos y Numeros de Conway

T E S I S

Que para obtener el Titulo de:

MATEMATICO

P r e s e n t a

Juan Pablo Ornelas Yan

México, D.F. 1994

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Juan Pablo Ornelas Yan

con número de cuenta 8505632-1 con el Título:

" Sobre Juegos y Números de Conway "

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matematico

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
DR. Director de Tesis	HUGO ALBERTO	RINCON MEJIA	Hugo A. Rincón M.
DRA.	HORTENSIA	GALEANA SANCHEZ	[illegible]
MAT.	RICARDO	HERNANDEZ BARAJAS	[illegible]
MAT. Suplente	LAURA	PASTRANA RAMIREZ	Laura Pastrana R.
MAT. Suplente	SAUL	DIAZ ALVARADO	[illegible]

Yavé es mi pastor . Nada me faltará . . .

A mi abuela Martha Gonzalez.

A mis padres: José Luis Ornelas Calderón

María del Rocío Yan Gonzalez.

Y muy en especial a mi amigo y maestro Ing. Víctor Manuel Escalante Reséndiz

de quien por su ayuda y consejo es mucho mi logro.

Agradecimientos

A todos mis maestros y amigos, en especial a:

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía por su amistad, dedicación y paciencia de la que es fruto este sueño hecho realidad.

Dr. Alberto Barajas Celis por su invaluable formación.

Mario Delgadillo Torres por su entrañable y desinteresada amistad al igual que la de Norma P. M., Rosa G. de la R. (Ita), Ricardo H. B.

Así como a: Actuario Victor Solís, Dentista Ricardo Ruelas, Raymundo Gomez y Socorro Colín.

Muy en especial por su cariño, compañia, apoyo y motivación a mi compañera Alma Lilia García Almanza.

Y a todos ellos y a los que por su infinidad pero no menos como personas y apoyo omití, gracias.

INDICE

INTRODUCCIÓN

A fines del siglo pasado un matemático Alemán llamado Richard Dedekind (1831-1916) comenzó el trabajo de fundación lógica y filosofica de las matemáticas. Dedekind prefirió para sus fines el uso de ideas abstractas generales, su procedimiento se basó sobre el concepto de cortaduras.

Desde entonces muchos matemáticos han hecho aportaciones a la estructuración de las matemáticas desde distintos puntos de vista, uno de esos puntos de vista ha sido el de el matemático norteamericano Conway, quien ha aportado ya una gran cantidad de trabajos sobre la teoría de juegos y que sobre esta línea desarrolla una teoria alternativa de la construcción de los números reales. Su trabajo ya ha sido reconocido por otros matemáticos, con esas bases el presente trabajo pretende dar una perspectiva de la forma en que Conway hace su construcción del campo de números reales. Knuth hizó su aportación a través de su "novela didactica" llamada: " NUMEROS SURREALES", aunque su obra solo es de carácter divulgativo da una magnifica idea de la forma en que constructivamente crea Conway un campo, sin hacer una sola demostración. Aqui intentaremos, por el contrario, hacer todas las respectivas pruebas de cada elemento necesario, para dicha construcción.

La construcción de Conway retoma la forma de las cortaduras de Dedekind pero de una manera que al mismo tiempo también retoma la construcción de los números del célebre matemático Von Neumann, al comenzar desde el origen mismo que es la nada (el vacío), y en forma de conjuntos anidados para generar, inicialmente, a todos los números naturales y cardinales.

Todo lo anterior Conway lo lleva sobre un campo, donde el conoce mejor las cosas, la teoría de juegos y construye una equivalencia entre los juegos (usuales) y sus juegos, probando su equivalencia en ambos sentidos. Lleva luego esta equivalencia a la construcción de una estructura algebraica, para la cual debe de definir y estructurar operaciones, ordenes y equivalencias entre elementos.

Finalmente Conway lleva esta estructura a otra más compleja (aquí un anillo conmutativo y ordenado) con la previa formulación de los juegos como números, y para poder aprovechar todo el trabajo previo y justificar sin gran problema la viabilidad de esta estructura.

CAPITULO I

NUMEROS Y JUEGOS

Para dar inicio al presente trabajo nos introduciremos en el área de trabajo de Conway, veremos las definiciones de juegos de Conway y juegos (usuales), las características que deben de reunir estos juegos, la forma en que habremos de definir los distintos clases de juegos, los que posteriormente nos llevarán a la descripción de juegos positivos y negativos

De principio introduciremos el concepto de juego de Conway por un postulado:

CG Si x e y son ambos conjuntos de juegos de Conway, entonces el par ordenado (x, y) es un juego de Conway.

Si a partir de esto consideremos la construcción de un juego de Conway cualquiera (x ,y) donde los conjuntos dados x , y necesitan ser construidos como conjuntos de juegos de Conway habremos entonces de comenzar la construcción de los números, comenzando por el cero a partir tan solo del conjunto vacio (como en la construcción de Von Neumann), donde éste habrá de ser considerado como conjunto de juegos de Conway – ya que al no contener elemento (juego) alguno en el se cumple por vacuidad con ser un conjunto de los aqui requeridos.

De lo anterior se desprende que de acuerdo con el postulado CG, la pareja de conjuntos ($\varnothing$,$\varnothing$) es un juego de Conway, al satisfacer el postulado arriba mencionado, a este juego de Conway lo habremos de identificar como el número cero.

1) $0= (\varnothing,\varnothing)$

De aqui que el número cero sea un juego de Conway y $\{ 0 \}$ es un conjunto de juegos de Conway (conteniendo al cero únicamente). A partir de este conjunto de juegos de Conway y con la ayuda nuevamente del postulado CG hacemos los siguientes combinaciones de conjuntos de juegos de Conway : ($\{ 0 \}$, $\varnothing$) ; ($\varnothing$, $\{ 0 \}$) los que por contrucción son también juegos de Conway. Retornando a la idea de Von Neuman habremos de obtener los siguientes conjuntos de juegos de Conway.

2) $1 = (\{0\}, \varnothing)$ $2 = (\{1,0\}, \varnothing)$

$n = (\{1,2,3,\dots\dots,n-1\}, \varnothing)$.

Demostraremos por el método de inducción que los conjuntos arriba mencionados son juegos de Conway.

Demostración:

Ya se ha visto que $(\varnothing, \varnothing)$ es una pareja de conjuntos de juegos de Conway, así que el cero es un juego de Conway.

Ahora adoptamos como hipótesis de inducción que el número $n = (\{0,1,2,3,\dots,n-1\}, \varnothing)$ es también un juego de Conway.

Con lo que nos queda por demostrar que el número $n+1 = (\{0,1,2,\dots,n-1,n\}, \varnothing)$ es un juego de Conway.

Dado que $n = (\{0,1,2,\dots,n-1\}, \varnothing)$ es un juego de Conway, entonces el conjunto $\{0,1,2,\dots, n-1,n\}$ es también un conjunto de juegos de Conway. De lo anterior se desprende que $(\{0,1,2,\dots, n\}, \varnothing)$ es una pareja de conjuntos de juegos de Conway, con lo que por el postulado CG $(\{0,1,2,\dots, n\}, \varnothing)$ es un nuevo juego de Conway: el juego $n+1$.

Con lo anterior se ha demostrado que los números naturales (de esta forma construidos) son juegos de Conway – o alternativamente que de esta forma se pueden construir los números naturales –. Pero esto puede ser llevado a una forma un "poco" más general demostrando que todo ordinal puede ser visto como un juego de Conway de acuerdo con la construcción planteada anteriormente.

3) Todo ordinal es un juego de Conway.

Demostración:

Por definición tenemos que cualquier ordinal α es la representación del conjunto de ordinales β_i, $i \in I$ tales que ninguno de estos β_i es mayor que α. Así dentro de la representación como juego de Conway el ordinal α es el juego de Conway que esta formado por el par ordenado $(\{\beta_i \mid \beta_i < \alpha \ \forall i \in I\}, \varnothing)$; donde el conjunto $\{\beta_i \mid \beta_i < \alpha \ \forall i \in I\}$ esta formado por los juegos de Conway creados previamente. Cumpliendo con el postulado CG y por lo tanto es un juego de Conway.

Tenemos entonces que para demostrar que un conjunto cualquiera z es un juego de Conway, sólo existe una única vía de prueba utilizable y esta es el postulado CG. Asi que para que z sea un juego de Conway, z debe ser forzosamente un par ordenado (x, y) en el cual ambos conjuntos x, y deben ser conjuntos de juegos de Conway. Habremos de llamar seguidamente a los elementos del conjunto x como los elementos izquierdos de z y a los elementos del conjunto y como los elementos derechos de z. De lo anterior obtenemos la siguiente observación:

4) Cada juego de Conway es un par de conjuntos. Los elementos izquierdos y derechos de un juego de Conway son ellos mismos juegos de Conway.

De ahora en adelante nuestro interés principal sera sobre un tipo particular de juegos: los juegos en que intervienen dos personas (jugadores). A este tipo de juegos pertenecen muchos juegos bien conocidos, los cuales se verá posteriormente que son juegos de Conway. Desde ahora, cada vez que se haga referencia a un juego se presupondrá que se está hablando de un juego perteneciente a esta clase.

El Concepto de Juego

Para satisfacer la necesidad de analizar situaciones antagónicas, se han desarrollado técnicas matemáticas especiales, que surgen de la teoría de los juegos. La aplicación de esta teoría permite elaborar cursos de acción racionales para los bandos opuestos. En la vida real las situaciones antagónicas son extremadamente complicadas y difíciles de analizar, debido a la presencia de un gran número de factores concomitantes. Por lo tanto el análisis matemático, de las mismas requiere que se pasen por alto los factores secundarios, y se construyan modelos formales simplificados. Tales modelos se llaman juegos.

Antes de entrar en materia conviene definir algunos conceptos básicos. Considerense dos jugadores A y B o, en general n, con intereses opuestos entre sí. Por juego, se entiende un curso de eventos que consisten de una sucesión de acciones por parte de A y B, o el conjunto de jugadores implicados. Para que el juego sea suceptible de ser análizado matemáticamente, también debe tenerse un sistema de reglas establecidas sin ambigüedad, es decir, un sistema de condiciones que regulen las acciones permisibles para cada jugador en cada etapa del juego, la cantidad de información que tiene cada bando acerca del comportamiento del otro, la sucesión de jugadas (es decir, las decisiones que se toman en el curso del juego) y también el resultado del juego, que se obtiene de la totalidad de las jugadas realizadas por cada bando. Este resultado (un triunfo o una derrota) no siempre tiene una representación cuantitativa; pero usualmente es posible establecer algún tipo de escala con la cual puede representarse el resultado como algún número definido. Por ejemplo, en el juego de ajedrez puede convenirse en contar un triunfo con +1, un empate como 0 y una derrota como −1.

Para nuestros fines habremos de considerar solo los juegos entre dos personas, un jugador izquierdo L y un jugador derecho R. Antes de dar inicio a un juego se acuerda cual de los dos jugadores habrá de iniciar o abrir dicho juego, tras lo cual se efectuarán alternativamente los movimientos de cada uno de los jugadores. Los movimientos son las traslaciones de una posición a otra dentro de reglas fijadas previamente por los participantes. Denotaremos con S al conjunto de posiciones, entre el que se habrá de elegir un elemento distinguido s_0 que será la posición inicial de dicho juego. Se dan dos relaciones binarias de juego, identificadas por $\longrightarrow_L$ & $\longrightarrow_R$, entre las posibles posiciones de juego. Cuando el juego ha llegado a una posición s, en la cual por ejemplo, es el turno de mover de L, entonces su movimiento habrá de consistir en cambiar de la posición s a la posición s', de existir dicha posición, lo que se denota $s \longrightarrow_L s'$. De no existir tal s' (esto es L no puede hacer un *movimiento* legal) entonces L tiene perdido el juego, de acuerdo a las reglas previamente establecidas, por lo que entonces R gana el mismo. Análogamente para el caso de R.

Ahora nosotros definimos, de acuerdo a lo anterior que:

1) $s \longrightarrow s'$ si y sólo si $s \longrightarrow_L s'$ o $s \longrightarrow_R s'$.

Un requerimiento que además impondremos a un juego es la siguiente condición:

Condición de finitez: No debe existir ninguna sucesión infinita de posiciones $s_0, s_1, s_2, \ldots$ tales que $s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow \ldots\ldots$.

Lo anterior nos lleva al hecho de que cualquier juego debe de llegar a su fin despues de un número finito de movimientos y de que uno de los jugadores L o R debe resultar el ganador. Lo que elimina la posibilidad de que se retorne a la posición inicial. Asi un juego es definible a través del conjunto de posiciones S, su posición inicial s_0 y las relaciones binarias antes mencionadas $\longrightarrow_L$, $\longrightarrow_R$, con lo que se forma la tétrada ($S, s_0, \longrightarrow_L, \longrightarrow_R$).

Ejemplos de Juegos

A continuación se dan algunos ejemplos de juegos bien conocidos, en la teoria de juegos, y que caen dentro de las caracteristicas de juego, aqui mencionadas:

a) NIM. La eneada ($N_1, N_2, \ldots, N_m$) es la posición s_0, donde $N_i \in \mathbb{N}$, las posiciones apartir de aqui son las eneadas ($n_1, n_2, \ldots, n_m$) tales que $n_i \leq N_i \ \forall\ i \in I$, las relaciones $\longrightarrow_L$ & $\longrightarrow_R$ se dan entre las posiciones ($n_1, n_2, \ldots, n_m$) y ($n'_1, n'_2, \ldots, n'_m$) siempre que $n_i = n'_i$ para todo i excepto para un i_0, donde $n_{i0} > n'_{i0}$.

b) *Dominó*. La posición inicial s_0 es el conjunto finito de cuadrados de un tablero cuadriculado. Las posiciones son los conjuntos subyacentes de s_0. Las relaciones $s \longrightarrow_L s'$ & $s \longrightarrow_R s'$ se dan si s' puede obtenerse desde s quitando dos cuadrados adyacentes de s (En la práctica esto se puede hacer cubriendo las parejas de cuadrados con fichas de dominó).

c) *Los juegos de Conway*. x puede ser visto como un juego normal. La posición inicial s_0 se identifica con x mismo. Las posiciones son además de la posición inicial, los elementos de las partes izquierda y derecha de x, luego los elementos de las partes izquierda y derecha de cada una de las anteriores y así sucesivamente, por lo tanto todas las posiciones son juegos de Conway. Las relaciones $s \longrightarrow_L s'$ & $s \longrightarrow_R s'$ se dan si y sólo si s' es un elemento izquierdo o derecho respectivamente de s (que sea elemento izquierdo de s significa que pertenece a la parte izquierda de s, así mismo para los elementos derechos). Veamos ahora que satisface la condición de finitez. En caso contrario existiría una sucesión infinita

$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow \ldots\ldots$ (I).

de posiciones, con lo que existiría una sucesión también infinita de conjuntos:

$S_0 \ni S_1 \ni S_2 \ni \ldots\ldots$ (II).

<u>Nota:</u> Si $s \longrightarrow s'$ y $s = (x, y)$ entonces $s' \in x$ o $s' \in y$, $s' \in x \Rightarrow s \ni x \ni s'$; $s' \in y \Rightarrow s \ni \{ x, y \} \ni y \ni s'$ (III).

usando (III) se obtiene un sucesión (II) a partir de (I). Pero la existencia de una sucesión infinita como (II) viola el <u>axioma de fundación de la teoría de conjuntos</u>, que dice: " Cada conjunto $x \neq \varnothing$ contiene un elemento z el cual es ajeno a x [cosa que no se satisface en la existencia de una sucesión infinita como (II)].

Un principio de Inducción para Juegos

En esta sección introduciremos un método de prueba, el de inducción matemática. Este es un recurso extremadamente valioso en las matemáticas, porque es aplicable a muchos tipos de problemas, y para algunos es la mejor solución.

Dado un juego $x = (S, s_0, \longrightarrow_L, \longrightarrow_R)$. Para cada s'_0 con $s_0 \longrightarrow s'_0$ nosotros podemos asignarle un juego $x' = (S', s'_0, \longrightarrow_L, \longrightarrow_R)$ como sigue: $s \in S'$ si y sólo si existe una cadena $s'_0 \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow s$ (incluso cuando $s'_0 = s$). Para $s, s' \in S'$ tenemos que $s \longrightarrow_L{}' s' \Leftrightarrow s \longrightarrow_L s'$. Análogamente para $s \longrightarrow_R{}' s'$.

Cada juego definido de esta manera será llamado un juego predecesor de s. Más específicamente, nosotros podemos decir que un juego es predecesor izquierdo o derecho según se den las relaciones $s_0 \longrightarrow_L s'_0$ ó $s_0 \longrightarrow_R s'_0$.

Un Principio de Inducción para Juegos: Escribimos Px para decir que el juego x tiene la propiedad P.

Principio de Inducción para Juegos: Si la proposición Px se sigue como una consecuencia de la hipótesis de inducción, de que se implica Px para cada juego predecesor x' de x, entonces cada juego x tiene la propiedad P.

Demostración:

Supongamos que se sigue Px de la hipótesis de inducción, pero que existe un juego predecesor x_0, el cual no tiene la propiedad P, entonces existe un juego predecesor x'_0 el cual tampoco posee la propiedad P, y este tiene a su vez un predecesor x''_0 que carece de la propiedad P y así, sucesivamente, se darán las posiciones $s_0, s'_0, s''_0, \ldots\ldots$ de los juegos $x_0, x'_0, x''_0, \ldots\ldots$ que deberán de satisfacer la siguiente relación:

$$s_0 \longrightarrow s'_0 \longrightarrow s''_0 \longrightarrow \ldots\ldots\ldots$$

en contradicción con la condición de finitez para juegos.

CAPITULO II

SOBRE LA TEORIA DE JUEGOS

Nosotros demostraremos ahora que en cada juego ya sea el jugador L o el jugador R, en otras palabras el jugador que comienza o bien el otro, pueden forzar su victoria en el juego. La idea de una estrategia ganadora juega un papel decisivo aqui. En particular esta idea puede ser usada para definir juegos "positivos" y juegos "negativos". Así en esta forma podremos ver que todos los números naturales, como los hemos construido, son en este sentido positivos.

Un juego se realiza mediante jugadas sucesivas; cada jugada es una elección de una de las alternativas posibles especificadas por las reglas. Una jugada puede ser personal o aleatoria.

Una jugada personal es una elección y ejecución conciente, por parte de uno de los jugadores, en una de las jugadas que sean posibles en la situación dada. Un ejemplo de una jugada personal es cualquier jugada en un juego de ajedrez. Cuando le corresponde su turno, el jugador hace una elección conciente de entre las jugadas posibles, dependiendo de la posición de las piezas sobre el tablero.

Una jugada aleatoria es la elección de una posibilidad de entre un cierto número de ellas, no por la decisión de un jugador, sino por el resultado de algún evento aleatorio. Asi para nuestro fines este tipo de jugadas quedan descartadas para la elaboración o consecución de una estrategia.

Estrategia ganadora

El concepto de estrategia es una de las ideas fundamentales de la teoría de juegos. Supongamos que en una partida jugada de acuerdo con las reglas del juego x, el jugador A es el que va a mover (así A puede ser L o R). Si no hay posibilidad de moverse para este jugador, entonces el juego se ha terminado y A ha perdido, pero si A tiene varias opciones entonces puede escoger entre varios movimientos posibles. Una estrategia σ para A en x, en caso de existir, determinará sin ambigüedad el movimiento a realizar por A en x.

Este movimiento predescrito por una estrategia dada puede depender del estado en que se encuentre el juego hasta ese momento.

Diremos que un jugador A toma parte en x un juego con la estrategia σ si σ es una estrategia para A en x y cada movimiento hecho por A es el descrito por σ respecto al jugador que haya comenzado el juego o partida.

σ es llamada una estrategia ganadora para L en el juego x, en el caso en que R haga el primer movimiento si y sólo si σ es una estrategia para L en x de tal forma que L gana cada juego que R comienza, si L adopta la estrategia σ.

Escribiremos LxR para denotar que L tiene una estrategia ganadora en el juego x cuando R comienza. Definimos LxL, RxL, & RxR análogamente.

Después usaremos los siguientes lemas:

1) Sea x' un juego que es predecesor derecho de x, entonces $Rx'L$ implica RxR.

2) Si $Lx'L$ para cada juego x' que es predecesor derecho del juego x entonces LxR.

Demostración:

1) Sea σ' una estrategia ganadora para R en x', cuando L comienza. Una estrategia ganadora σ para R en x cuando R comienza, puede diseñarse

como sigue: R mueve primero para presentar una posición inicial x', después R juega de acuerdo con la estrategia σ'. Por hipótesis la estrategia garantiza su victoria.

2) Una estrategia ganadora para L en x cuando R comienza, es permitir que R haga cualquier mivimiento (Si no hay movimiento posible para R entonces L gana inmediatamente). Este movimiento inicial lleva a un juego x', su predecesor derecho de x, en el que L va a mover: Ahora L puede usar una estrategia ganadora σ la cual, por hipótesis da LxL .

<u>Nótese:</u> Que por razones de simetría, cada una de las afirmaciones anteriores 1) y 2) (y los subsecuentes que usen esta terminología) tienen una forma dual válida.

Si en un juego particular el jugador R comienza, entonces R & L no pueden tener ambos estrategias ganadoras. La siguiente proposición establece que al menos uno de los jugadores L o R tiene una estrategia ganadora.

Para cualquier juego x la afirmación siguiente es válida:

3) $(LxR$ o $RxR)$ y $(LxL$ o $RxL)$.

Demostración:

(La demostración utiliza el principio de inducción para juegos) De la 1ª afirmación entre paréntesis: Si existe x', el cual es predecesor derecho de x y satisface $Rx'L$, entonces por 1) se da RxR y la afirmación es cierta. Si no, $Rx'L$ es falsa para cada predecesor derecho x' de x y entonces usando la hipótesis de inducción de $L x\,{}^{\prime}L$ obtenemos $L x R$ por 2) y de nuevo la afirmación entre paréntesis es cierta.

La segunda afirmación entre paréntesis que aparece en 3) se demuestra de la misma manera que lo anterior con la ayuda de los duales a las afirmaciones 1) y 2).

Juegos Positivos y Negativos.

Dado que nuestra intención es la creación de un modelo con las operaciones ya conocidas, y sus respectivas propiedades, además de su semejanza con los reales, es obvio que debemos justificar por principio de cuentas el hecho de que los números naturales como los hemos construido aquí deben de ser positivos. Así a partir de este interés y de lo ya hecho previamente debemos dar una definición de lo que será para nosotros un juego positivo (en el sentido de que por positivo entenderemos que el número o juego es mayor o igual que cero: "$0\leq$").

Si al comienzo de un juego el jugador R no tiene movimiento, entonces $L x R$ es trivialmente cierto. Esto es aplicable a todos los juegos de Comway nombrados con anterioridad, todos esos números son positivos (en el sentido $0\leq$). Estos ejemplos proveen un motivo para introducir una propiedad "$0\leq$" definida por lo siguiente:

Definición: $0\leq x$ si y sólo si $L x R$.

Definición: $x\leq 0$ si y sólo si $R x L$.

Así con esto y con 3) las afirmaciones 1) y 2) pueden ser reformulados.

Siguiendo a Conway, aquí usaremos x^L , x^R como variables para los juegos predecesores izquierdos y derechos de x. Así obtenemos:

1') Si un $x^R \leq 0$, entonces $0 \leq x$ es falso.

2') Si para todo x^R, $x^R \leq 0$ es falso, entonces $0 \leq x$.

<u>Observación:</u> Para probar 1') basta suponer que $x^R \leq 0$ y $0 \leq x \Rightarrow LxR$ & $Rx^RL \Rightarrow RxR$ lo que es una contradicción. Análogamente para 2').

Combinando estas dos afirmaciones obtenemos caracterizaciones inductivas de "0≤" & "≤0".

4) $0 \leq x$ sí y sólo si, para todo x^R, no es cierto $x^R \leq 0$.

5) $x \leq 0$ sí y sólo sí para todo x^L, no es cierto que $0 \leq x^L$.

Una Clasificación de Juegos

Equivalencia de juegos:

Aplicando la ley distributiva a 3) tenemos que para cada juego x:

$$\begin{aligned}(LxR \text{ o } RxR) \,\&\, (LxL \text{ o } RxL) &= ((LxR \text{ o } RxR) \,\&\, LxL) \text{ o } ((LxR \text{ o } RxR) \text{ o } RxL) \\ &= ((LxL \,\&\, LxR) \text{ o } (LxL \,\&\, RxR)) \text{ o } ((LxR \,\&\, RxL) \text{ o } (RxR \,\&\, RxL)) \\ &= (LxR \,\&\, LxL) \text{ o } (LxR \,\&\, RxL) \text{ o } (RxR \,\&\, LxL) \text{ o } (RxR \,\&\, RxL).\end{aligned}$$

Si la primera afirmación entre paréntesis se da para x entonces L tiene una estrategia ganadora para cualquier juego en el que L comienza y también una para cualquier juego en el que R inicie el juego. Nosotros diremos que un tal pertenece a la clase de L. Similarmente un juego pertenecera a la clase de R si la última afirmación entre paréntesis es satisfecha.

Si la tercera afirmación entre paréntesis se cumple entonces el jugador que comienza posee una estrategia ganadora para dicho juego. Diremos que un juego de esta forma pertenece a la clase de F.

Finalmente si la segunda afirmación se ve cumplida, el segundo (el jugador que no empieza) tiene en este juego una estrategia ganadora y le asignamos a este juego la clase de S.

Claramente ningún juego pertenece a dos clases diferentes entre sí, con lo que;

6) Cada juego cae dentro de una de las mutuamente exclusivas clases L, R, F o S.

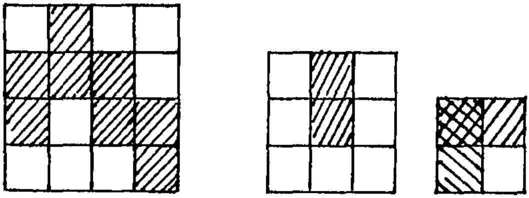
<u>Definición:</u> Los juegos que caen dentro de la misma clase se dice que son de igual valor.

Ejemplos:

Los juegos de dominó con posiciones iniciales , , , pertenecen a las clases L, R, F y S respectivamente. Dado D_n definido como el juego de dominó cuya posición inicial es el cuadrado de nxn.

D_0 & D_1 pertenecen a la clase de S ya que en ambos casos el primer jugador no puede hacer jugada legal alguna, por lo tanto el segundo jugador gana.

D_2, D_3 & D_4 pertenecen a la clase de F. En el caso de D_2 sólo el primer jugador puede mover dejando sin opción al segundo con lo que él gana dicho juego. En D_3 por ser un cuadrado de 3x3, deja sólo una jugada posible al segundo contendiente y asegura para si dos más con lo que también aqui gana. Para el caso de D_4 haciedo sus movimientos de forma que sean traslaciones de una jugada previa, va dejando espacios inocupables con lo que reduce las posibilidades de acción del oponente y asegurando siempre una jugada por lo menos.



El juego de Conway $0 = (\varnothing, \varnothing)$ definido anteriormente pertenece a la clase de S porque ningún jugador en la posición inicial puede hacer una legítima jugada.

Uno naturalmente podría definir las clases arriba mencionadas con la ayuda de las relaciones ≤ 0 & ≥ 0. Así:

a) $x \in S$ si y sólo si $x \leq 0$ & $0 \leq x$

$x \in S$ entonces por definición el segundo jugador (aquel que no empiezo) tiene una estrategia ganadora en el juego x, asi si R comienza L ganará, esto, si y sólo si $0 \leq x$. Ahora si L comienza R tendra una estrategia ganadora en x si y sólo si $x \leq 0$.

Por lo tanto $x \in S \Leftrightarrow x \leq 0$ & $0 \leq x$

b) $x \in L \Leftrightarrow 0 \leq x$ & no $x \leq 0$,

El que $x \in L$ implica que el jugador izquierdo es el que tiene una estrategia ganadora para este juego, independientemente de el jugador que haya comenzado dicho juego, lo cual da que si L comienza tenemos entonces $LxL \Leftrightarrow 0 \leq x$. Ahora si es R el que comienza, tendrán que llegar a un momento en que R ya no pueda mover y por lo tanto ganar el juego en curso, lo que es $\neg(RxL) \Leftrightarrow x \leq 0$ lo que implica que L gana x.

$\neg(RxL)$ es x un juego donde sólo L puede mover lo que por regla implica que R ha perdido: Probemoslo por inducción y que entonces $\neg(RxL) \Rightarrow LxL$.

Supongamos que se ha cumplido hasta una determinada jugada de manera que R no puede adoptar una estrategia ganadora en x^{L} entonces $\neg(Rx^{LL})$ con lo que sin importar que movimiento haga R, L puede hacer un movimiento de manera que R no pueda adoptar una estrategia ganadora en x^{RL} y entonces $\neg(Rx^{RL}L)$ con lo que L tiene ganada (no perdida) la jugada, y por lo tanto $Lx^{RL}L$. Entonces por inducción sobre los predecesores de x tenemos que $LxL \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow \neg(RxL)$.

c) $x \in R$ si y sólo si $x \leq 0$ & no $0 \leq x$,

$x \in R$ entonces R tiene una estrategia ganadora en x independientemente de quien haya comenzado el juego, asi si es L el que ha comenzado tendremos RxL lo que es por definición $x \leq 0$. Si por el contrario hubiera comenzado R, como ya tiene una estrategia ganadora en x debe haber un momento en el que L ya no pueda hacer movimiento alguno y por regla entonces perder, pero el que no pueda hacer movimiento alguno se representa por $\neg(LxR)$ que por definición es $0 \leq x$.

Análogamente a lo anterior se prueba que $\neg(LxR)=RxR$.

d) $x \in F$ si y sólo si no $x \leq 0$ & no $0 \leq x$,

Que $x \in F$ implica entonces que el primer jugador en x es el que posee una estrategia ganadora, con lo que sólo se pueden dar las siguientes relaciones RxR & LxL, pero por lo visto anteriormente en b) y c), tenemos que: $RxR= \neg(LxR) \Leftrightarrow 0 \leq x$ & $LxL=\neg(RxL)$ $\Leftrightarrow x \leq 0$.

En particular $0 \in S$, ya que al no haber ninguna jugada posible el primer jugador por regla pierde dicho juego y el segundo contendiente sale victorioso, y así en el sentido de las definiciones tenemos que $0 \leq x$ & $x \leq 0$, de lo cual podemos ahora afirmar que:

7) $0 \leq 0$.

CAPITULO III

UN GRUPO PARCIALMENTE ORDENADO DE JUEGOS EQUIVALENTES

En la sección anterior introducimos los conceptos de juegos "positivos" y "negativos". En lugar de escribir x es positivo, escribimos: x tiene la propiedad "$0\leq$" o "$0\leq$"x o más brevemente $0\leq x$ en la misma forma para x negativa escribimos x tiene la propiedad "≤ 0", x"≤ 0" ó $x\leq 0$. Las notaciones $0\leq x$ & $x\leq 0$ sugieren que x puede ser comparado con 0, aunque la propiedad no sea mencionada explicitamente en las definiciones.

En esta sección introduciremos una relación binaria $\leq$ entre juegos y mostraremos que "$0\leq$"x si y sólo si $0\leq x$ y que x"≤ 0" si y sólo si $x\leq 0$.

Habremos de definir también dos operaciones $-x$ & $x+y$ Entoces interpretaremos $x\leq y$ como "$0\leq$"$y-x$, donde $y-x$ es la abreviación usual de $y+(-x)$.

La relación $\leq$ (y sus aplicaciones a $-$ y $+$) son una contribución de la teoría de juegos a la teoria de Conway para números. Esto es la relación que se necesitaba en una sección anterior.

La relación que existe entre dos juegos x & y cuando $x\leq y$ & $y\leq x$ se dan simultáneamente es una relación de equivalencia compatible con $\leq$, $-$ y $+$. Las clases de congruencia correspondientes constituyen los elementos de un grupo Abeliano parcialmente ordenado cuyo elemento cero es la clase de S.

El Negativo de un Juego.

Si definimos como positivo un avance dentro de un juego para uno de los jugadores es obvio que al hacer que este mismo jugador retroceda, esta será una actitud negativa en su juego.

Dado que sólo hay dos posibles direcciones en el juego, $\longrightarrow_L$ & $\longrightarrow_R$, entonces para un jugador:

El negativo de un juego

$$x=(S,\ s_0,\ \longrightarrow_L,\ \longrightarrow_R)$$

puede ser definido como el juego

1) $$-x=(S,\ s_0,\ \longrightarrow_R,\ \longrightarrow_L).$$

que es el juego derivado de x por la transposición de las relaciones de juego L & R.

Claramente tenemos,

$$-(-x)=x \qquad \& \qquad -0=0.$$

donde el juego de Conway 0 debe ser interpretado como el juego con la única posición $(\varnothing,\varnothing)$ en la cual ningún jugador tiene la opción de una jugada legitima.

2) Si $0\leq x$, entonces $-x\leq 0$ (y reciprocamente).

Demostración:

Mostraremos que $R(-x)L$, si LxR. Esto se sigue de la observación de que una estrategia ganadora para L en x, cuando R hace el primer movimiento, es una estrategia para R en $-x$ cuando L hace el primer movimiento.

La Suma de Dos Juegos

Primero un ejemplo:

x_1 puede ser un juego de NIM y x_2 un juego de dominó. Entonces x_1+x_2 puede pensarse como el juego en el cual x_1 y x_2 son jugados simultaneamente, entendiendo que cuando es el turno de cada oponente, este tiene la opción de mover en x_1 o en x_2 (pero no en ambos).

La definición general es: Si

$$x_i = (S_i , s_{0i} , \longrightarrow_{Li} , \longrightarrow_{Ri}) \qquad (i=1,2).$$

entonces,

$$x_1 + x_2 = (S, s_0, \longrightarrow_L, \longrightarrow_R,).$$

Donde S = S_1xS_2 el conjunto de parejas de posiciones de los juegos x_1, x_2 ; s_0 es el par (s_{01} , s_{02}) y

$$(s_1 ,s_2) \longrightarrow_L (s'_1, s'_2).$$

si y sólo si

$$(s_1 \longrightarrow_{L1} s'_1 \text{ y } s_2=s'_2) \text{ o } (s_1=s_2 \text{ y } s_2 \longrightarrow_{L2} s'_2).$$

(La relación R es definida de manera análoga). Es claro que:

3) $\quad -(x+y)= -x -y \qquad (= -x +(-y)).$

Demostración:

$-(x+y)$ es el negativo de la suma de juegos $x+y$, en donde las relaciones de juego L y R han sido cambiadas (o interpuestas) así $s \longrightarrow_L s'$ en $x+y$ se convierte en $s \longrightarrow_L s'$ en $-(x+y)$ que es: $(s_1 \longrightarrow_{R1} s'_1$ y $s_2 = s'_2)$ o $(s_1= s'_1$ y $s_2 \longrightarrow_{R2} s'_2)$ cuando $(s_1 \longrightarrow_{L1} s'_1$ y $s_2= s'_2)$ o $(s_1=s'_1$ y $s_2 \longrightarrow_{L2} s'_2)$ que es cambiar las relaciones de juego tanto en x para hacerlo $-x$, como en y para hacerlo $-y$; con lo que $-(x+y)$ se convierte en $-x+(-y)=-x-y$.

Además:

4) a) $0 \le x - x$ y $x - x \le 0$.

b) Si $0 \le x$ & $0 \le y$, entonces $0 \le x + y$.

c) Si $0 \le x + y$ & $0 \le y$, entonces $0 \le x$.

Demostración:

a) $0 \le x - x$ sugiere que $L(x-x)R$. Si R comienza, L pude ganar el juego $x - x$ si L copia el movimiento hecho por R en la otra componente. La segunda afirmación se sigue por dualidad.

b) Tomando LxR y LyR, tenemos que mostrar que $L(x+y)R$. Obtenemos una estrategia ganadora para L en $x+y$, cuando R comienza, por adoptar la regla de que L responda a cada movimiento de R con uno en la misma componente del juego escogida por R y haciendo la jugada requerida por la estrategia ganadora para cada componente del juego.

c) Probaremos que no $0 \le x$ & $y \le 0$ implican $0 \le x + y$. Por el tercer punto de la sección anterior es suficiente probar que: " Si RxR y RyL, entonces $R(x+y)R$ ".

R comienza a moverse en la componente x donde R tiene una estrategia ganadora. Después él hace su movimiento en el juego en el cual su oponente ha elegido un movimiento, de acuerdo con la estrategia ganadora que existe para R en este juego. Como R tiene una estrategia ganadora para ambos juegos, entoces R debe ganar la suma según lo anterior.

Juegos Isomorfos

Por isomorfo en matemáticas entendemos, intuitivamente hablando, la igualdad existente entre dos conjuntos bajo la misma estructura algebraica. Esto lo verificamos al hacer una comparación entre ambos conjuntos vía una función biyectiva, que nos diga si son de igual cardinalidad y si sus estructuras son idénticas. Esto último, al someter a la estructura a la aplicación de la función y ver si esta preserva o no las operaciones de la estructura sobre la que se le ha mapeado.

La formulación de isomorfismo resulta particularmente importante para el objetivo de nuestro estudio, ya que al tener diferentes tipos de juegos: dominó, NIM y juegos de Conway nos importa saber su comportamiento y generalizar este con el fin de llevarlo a una estructura algebraica. Todo esto sería sumamente complicado si nos dedicamos a analizar cada juego, por ello hemos introducido previamente ya las clases de juegos, de las cuales habremos de seleccionar solo representantes que sean lo más generales posibles, esto gracias al hecho de que serán isomorfos al resto de sus coelementos de clase (o subclase según sea el caso).

Los isomorfismos además nos facilitarán el análisis de expresiones ya conocidas como lo es la suma y el producto, que aunque bien conocidos, en este conjunto sus propiedades resultan no tan fáciles de corroborar.

Los isomorfismos para juegos pueden ser definidos en la forma usual.

Es fácil ver que el juego $x+y$ es isomorfo al juego $y+x$ y que $(x+y)+z$ es isomorfo al $x+(y+z)$.

Demostración:

Sea el mapeo.

Φ: $S_1 x S_2 \longrightarrow S_2 x S_1$ *definido por la regla de correspondencia.*

$(x, y) \longrightarrow (y, x)$.

Donde $x = (S_1, s_{01}, \longrightarrow_{L1}, \longrightarrow_{R1})$ & $y = (S_2, s_{02}, \longrightarrow_{L2}, \longrightarrow_{R2})$.

Nos saltaremos la prueba de que Φ es biyectiva, para ver que es morfismo:

$\Phi(s \longrightarrow_L s') = \Phi[(s_1, s_2) \longrightarrow_L (s'_1, s'_2)]$

$= \Phi[(s_1 \rightarrow_L s'_1 \text{ y } s_2 = s'_2) \text{ o } (s_1 = s'_1 \text{ y } s_2 \rightarrow s'_2)]$

$= [(s_2 = s'_2 \text{ y } s_1 \rightarrow_L s'_1) \text{ o } (s_2 \rightarrow_L s'_2 \text{ y } s_1 = s'_1)]$

$= (s_2, s_1) \longrightarrow_L (s'_2, s'_1) = \Phi(s) \longrightarrow_L \Phi(s')$.

Lo que prueba el morfismo de Φ y que $x+y$ es isomorfo a $y+x$.

Sea ahora el mapeo:

Ψ: $S_1 x S_2 x S_3 \longrightarrow S_1 x S_2 x S_3$ definido por la regla de correspondencia.

$$[(x, y), z)] \longrightarrow [x, (y, z)].$$

Análogamente al anterior para x, y y $z = (S_3, s_{03}, \longrightarrow_{L3}, \longrightarrow_{R3})$.

De manera análoga al anterior se prueba que Ψ es tambien un isomorfismo entre los juegos $(x+y)+z$ & $x+(y+z)$.

CAPITULO IV

Un Orden Parcial de Juegos

Nuestro trabajo se ha orientado al encuentro de una estructura, si no igual si, muy semejante a los reales. Estos últimos cuentan con una característica muy particular, que es el orden, dados dos números podemos compararlos y decir claramente quien de ellos es mayor o si son iguales.

Con el fin de llegar a algo semejante introduciremos una forma de comparación a través de la siguiente definición; cuando hablamos de orden parcial hablamos de una relación que cumple con ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición: $x \leq y$ si y sólo si $0 \leq x-y$ (donde naturalmente "$0\leq$" se entiende en el sentido de la propiedad introducida en la sección 4).

Deseamos mostrar que $0 \leq y$ si y sólo si "$0\leq$"y (la prueba de que $x \leq 0$ si y sólo si x"≤ 0" se prueba similarmente). Tenemos que probar que, para la propiedad $0\leq$ tenemos:

$0 \leq y-0$ si y sólo si $0 \leq y$.

Si $0 \leq y$, entonces $0 \leq y-0$ sigue de que $0 \leq 0$ (4.7), $-0=0$ (1), y 4b).

Si $0 \leq y-0$ entonces $0 \leq y$ sigue de que $0 \leq 0$, $-0=0$ y 4c).

$\leq$ es una relación de orden parcial. La reflexividad viene de 4a), ya que $0 \leq x-x$ & $x-x \leq 0$

y solo resta probar la transitividad. Supongamos que $x \leq y$ & $y \leq z$, entonces:

$$0 \leq y - x \ \& \ 0 \leq z - y.$$

$$0 \leq (z - y) + (y - x) \quad 4b).$$

$$0 \leq (z - x) + (y - y) \quad (\text{isomorfismo}).$$

$$0 \leq z - x \qquad \text{por } 4a) \ \& \ 4c).$$

y entonces $x \leq z$.

5) a) Si $x \leq y$, entonces $-y \leq -x$.

b) Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.

Demostración:

a) Tomando $x \leq y$. Tenemos entonces $0 \leq y - x$, $0 \leq -x - (-y)$ (por isomorfismo), con lo que $-y \leq -x$.

b) Tomando $x \leq y$. Entonces tenemos $0 \leq y - x$, $0 \leq (y - x) + (z - z)$ por 4b) $0 \leq (y - z) - (x - z)$ (por isomorfismo), y entonces nos queda $x + z \leq y + z$.

6) No $(x^R \leq x \ \& \ x \leq x^L)$.

Demostración:

Probaremos la primera afirmación (la segunda es dual). $x^R - x^R$ es un predecesor derecho del juego $x - x^R$. Por ser $0 \leq x - x$ & $x - x \leq 0$ tenemos que $R(x^R - x^R)L$. De esto se sigue que $R(x - x^R)R$, por la afirmación: Dado x' un juego que es predecesor derecho de x, entonces $Rx'L \Rightarrow RxR$; y entonces que $L(x - x^R)R$ y $x^R \leq x$ son ambas falsas. No $x \leq x^L$ se sigue por dualidad.

En la sección 3 caracterizamos la propiedad "≤ 0" inductivamente. Existe también una caracterización inductiva para la relación binaria $\leq$.

TEOREMA: $x \leq y$ si y sólo si a) no $y^R \leq x$ & b) no $y \leq x^L$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos $x \leq y$. Para probar a) notemos que $x \leq y$ & $y^R \leq x$ podría implicar $y \leq y^R$, por transitividad, contrario a 6). La afirmación b) se prueba por analogía.

$\Leftarrow$) Supongamos que nunca se da la condición $y^R \leq x$ y tampoco se da $y \leq x^L$ pero que sin embargo $x \leq y$ es falsa. Entonces nosotros podríamos tener $R(y-x)R$. Así R tendría una estrategia ganadora para el juego $y-x$, cuando R comienza. Existen dos posibles casos para ser considerados para el primer movimiento hecho por R.

i) R hace un movimiento en la componente y. Este movimiento produce y^R, y con esto $R(y^R-x)L$, así que $L(x-y^R)R$, o en otras palabras $y^R \leq x$ contrario a la hipótesis.

ii) R hace su movimiento en la componente $-x$. Este movimiento produce un predecesor derecho de $-x$ y así un predecesor izquierdo x^L de x. Esto implica $R(y-x)L$ y así $L(x^L-y)R$ o en otras palabras, $y \leq x^L$ lo que contradice la hipótesis.

Igualdad de Juegos

En lo posterior mostraremos que $\leq$ tiene todas las propiedades que caracteriza a la relación binaria expresada por "$x \leq y$ & $y \leq x$" como una relación de equivalencia compatible con $\leq$, $-$, $+$. Seguiremos desde ahora la siguiente terminología de Conway y llamaremos a dos juegos iguales ($=$) cuando esta relación se de entre ellos. Podría notarse que hasta ahora la igualdad siempre se manejó como un concepto de identidad lógica. Para evitar confusión desde ahora habremos de usar el símbolo $\equiv$ para denotar lo anterior. Acordando desde ahora adoptar la siguiente definición de igualdad.

Definición: $x = y$ significa ($x \leq y$ & $y \leq x$).

Nos ahorraremos los detalles de la construcción de las clases de equivalencia correspondientes a esta definición de $\leq$, $-$ & $+$ para estas clases y nos contentaremos con enunciar el siguiente resultado.

TEOREMA: Las clases de equivalencia formadas por juegos iguales conforman un grupo Abeliano parcialmente ordenado respecto a $\leq$, $-$ & $+$ cuyo elemento cero es la clase de S.

Demostración:

Observación: $x \leq y$ & $x \approx x'$, $y \approx y' \Rightarrow x' \leq y'$

Prueba: Como $x \approx x' \Rightarrow x \leq x'$ & $x' \leq x$, análogamente para $y \approx y'$, tenemos entonces, $x' \leq x$, $x \leq y$ & $y \leq y'$ con lo que por transitividad $x' \leq y'$.

Probaremos primeramente que dichas clases forman un grupo.

a) $x + y \approx x + y$. Sean $x \approx a$ & $y \approx b$ de ahí que $a \leq x$ & $x \leq a$, análogamente para $y \approx b$. Entonces tenemos $x + y \leq a + y \leq a + b$ similarmente $a + b \leq x + y$, si tomamos ahora las clases correspondientes $x + y \leq a + b$ & $a + b \leq x + y$ con lo que $x + y = x + y$

b) $0 + x \approx x$. Por lo visto anteriormente basta probar $x \leq x + 0$ & $x + 0 \leq x$ entonces, como $x \leq x + 0$ es $0 \leq (x + 0) - x \Leftrightarrow 0 \leq (x - x) \Leftarrow 0 \leq x - x \Leftarrow 0 \leq 0$ y análogamente para $x \leq x + 0$.

c) $-x \approx (-x)$. Como $0 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x - x \Rightarrow 0 \leq -x + x \Rightarrow 0 \leq -x - (-x) \Rightarrow (-x) \leq -x$ igual para $-x \leq (-x)$.

d) $(x + y) + z \approx x + (y + z)$. En este caso se da el mismo isomorfismo que se dió para los juegos cuando se probó la asociatividad

e) $x + y \approx y + x$ Con esto se prueba la Abelianidad del grupo y es a través de un isomorfismo también ya dado para la misma propiedad de los juegos.

Ya se ha probado que este es un grupo Abeliano, resta probar que es parcialmente ordenado, cosa que se hará en este momento.

O_1) Reflexividad ($x \approx x$). Esta propiedad está dada por la afirmación probada en 4a) que nos da $x \leq x$ y al aplicarla simétricamente tenemos el resultado deseado.

O_2) Transitividad (si $x \leq y$ & $y \leq z \Rightarrow x \leq z$). Por la observación $x \leq y$ & $x \leq x'$, $y \leq y' \Rightarrow x' \leq y'$ que igualmente se vale para tener $y' \leq z'$ de $z \leq y$ con lo que entonces tenemos $x' \leq y'$ & $y' \leq z'$ y finalmente obtenemos que $x' \leq z'$ & $x \leq z$.

O_3) Antisimetría ($x \leq y$ & $y \leq x \Rightarrow x = y$). Haciendo una analogía a la observación tenemos $x \approx x'$ & $y \approx y'$ con lo que $x' \leq y'$ & $y' \leq x'$, por definición $x' = y'$ así resulta $x = y$.

Juegos iguales, resultan también respecto a lo anterior, de igual valor–en el sentido definido en la sección 3. Cada una de las clases F, L, R o S se divide en clases de juegos iguales. Todos los juegos de la clase S son iguales a algun otro, pero las otras clases se dividen en más de una clase de juegos iguales (para ser precisos en un infinito número de clases de tales juegos). Por ejemplo: Los juegos de dominó, x con posición inicial , & y con posición inicial   están obviamente en R, pero no son iguales. En efecto x es isomorfo a y^R. Para y^R tenemos trivialmente que $y^R \leq x$. Podemos entonces deducir trivialmente del Teorema de la sección 4 que $x \leq y$ es falso, y por lo tanto $x \neq y$.

CAPITULO V

JUEGOS Y JUEGOS DE CONWAY

Nosotros vimos en en la sección 3 que cada juego de Conway c puede ser visto también como un juego. Más precisamente mostramos como dado un juego de Conway c podíamos definirle un juego correspondiente c_G. Ahora nos proponemos mostrar que-reciprocamente-a cada juego x le corresponde un juego x_C, que es un juego igual a x, donde la palabra "igual" está dada bajo el concepto definido en la última sección.

Uno podría denotar como x_C a la forma normal de x. Conway basa su teoria desde el principio sobre formas normales. Así tiene la gran ventaja de la simplicidad matemática, aunque a costo de la intuición.

Los mapeos $c \longrightarrow c_G$ & $x \longrightarrow x_C$ preservan las relaciones $\leq$ & $=$ y las operaciones + & - definidas inicialmente para juegos, para ser llevadas sobre juegos de Conway.

El Mapeo Fundamental

Comenzaremos por repetir la definición de c_G la cual, en principio ya fue dada en la sección 3.2.

1) $c_G = (S_C, c, {}_C\!\!\longrightarrow_L, {}_C\!\!\longrightarrow_R)$.

donde las posiciones c_G son, aparte de la inicial c, los elementos izquierdos y derechos de c, los elementos izquierdos y derechos de estos y así sucesivamente. El movimiento $s \,{}_C\!\!\longrightarrow_L s'$ es válido si y sólo si s, s' son posiciones de S_C y s' es un elemento izquierdo de s. Definimos igual $s_C \longrightarrow_R s$.

Nosotros introducimos x^L, x^R en la sección 4.2 como variables para los predecesores izquierdos y derechos de un juego x. Usaremos similarmente c^L, c^R como variables para los elementos izquierdos y derechos respectivamente de un juego de Conway. Es fácil verificar que:

2) Las variables $c_G{}^L$ coinciden con las variables $c^L{}_G$ y las variables $c_G{}^R$ con las variables $c^R{}_G$.

Demostración:

$$\Rightarrow)\ c_G{}^L = \{ c_G \}^L : \{c_G' \mid c_G \longrightarrow_L c_G'\} \Leftrightarrow c' \in c^L \Rightarrow c'_G \in c^L{}_G \Rightarrow c_G{}^L \subset c^L{}_G.$$

$$\Leftarrow)\ c^L{}_G = \{ c^L \}_G : \{ c'' \mid c \longrightarrow_L c'' \}_G \Leftrightarrow c''_G \in c_G{}^L \Rightarrow c^L{}_G \subset c_G{}^L.$$

El proceso es el mismo para probar la segunda parte de la afirmación.

Ahora vamos a asignarle un juego de Conway x_C a cada juego x. Definimos esta correspondencia inductivamente sobre la suposición de que z_C está bien definida para todas las z predecesores de x.

Como z_C es el juego correspondiente a un predecesor z de x, entonces cada juego z_C tiene un correspondiente z. Ya que de no ser así existiría un juego z_{C0} tal que no tendría un juego correspondiente z de x y entonces también habría de existir un juego $z_{C'0}$ predecesor de z_{C0} el cual tampoco tendría juego correspondiente entre los predecesores de x y este a su vez tendría un predecesor $z_{C''0}$ sin la propiedad antes mencionada y así sucesivamente. Donde las posiciones c_0, c'_0, c''_0.............. de los juegos z_{C0}, $z_{C'0}$, $z_{C''0}$........, satisfacen las relaciones $c_0 \longrightarrow c'_0 \longrightarrow c''_0 \longrightarrow$..... en contradicción con lo establecido en la condición de finitez.

Por ende definimos:

3) $x_C = (\{x^L{}_C\}, \{x^R{}_C\})$.

Por inducción sobre juegos uno puede ver en seguida que x_C es un juego de Conway (de manera semejante a lo arriba probado), y se sigue a partir de lo visto en la sección 4 que:

4) Las variables $x_C{}^L$ coinciden con las variables $x^L{}_C$ y similarmente las variables $x_C{}^R$ coinciden con las variables $x^R{}_C$.

5) Para cada juego de Conway $c_{GC} = c$.

Para probar estas afirmaciones de manera análoga a las anteriores necesitamos un principio de inducción para juegos de Conway también análogo al que ya tenemos para juegos, y el cual se pueda probar de la misma manera que el primero.

Un Principio de Inducción para juegos de Conway:

Si del supuesto de inducción de que Px' se da para cada elemento izquierdo o derecho x' de un juego arbitrario de Conway x, se sigue la consecuencia de inducción Px, entonces cada juego de Conway x tiene la propiedad P.

Lo anterior como ya se expuso se prueba igual que su antecesor y permite extender las demostraciones hechas previamente a las dos últimas afirmaciones.

Deducimos de esto que:

$c_{CG} = (\{ c_G{}^L{}_C \}, \{ c_G{}^R{}_C \})$ por 3)

$= (\{ c_{GC}{}^L \}, \{ c_{GC}{}^R \})$ por 2)

$= (\{ c^L \}, \{ c^R \})$ (por hipótesis de inducción).

6) $x = x_{CG}$ para cada juego x.

Demostración:

Probaremos que $x \leq x_{CG}$ (la prueba de que $x_{CG} \leq x$ es análoga). Usaremos la caracterización inductiva de $\leq$ dada ya en la sección 4, junto con 2), 4) y la hipótesis de inducción.

$x \leq x_{CG}$ sí y sólo si no $x_{CG}{}^R \leq x$ & $x_{CG} \leq$ no x^L.

si y sólo si no $x^R{}_{CG} \le x$ & $x_{CG} \le$ no $x^L{}_{CG}$.

si y sólo si no $x^R \le x$ & $x_{CG} \le$ no $x_{CG}{}^L$.

donde las últimas conjunciones son válidas por la sección 4.

Extensión de las Definiciones de Relaciones y Operaciones Definidas para Juegos y Juegos de Conway.

Comenzaremos por definir la relación $\le$ entre juegos de Conway c, c':

7) $c \le c'$ significa $c_G \le c'_G$.

Como con la definición de igualdad para juegos escribimos $c=c'$ si se dan tanto $c' \le c$ como $c \le c'$.

Las extenciones de las operaciones − & + definidas para juegos a juegos de Conway son activadas canonicamente por medio de las siguientes definiciones:

8) $-c = (-c_G)_C$.

9) $c_1+c_2 = (c_{1G}+c_{2G})_C$.

Uno también puede caracterizar la relación $\le$ y las relaciones − & + de la siguiente forma:

7I) $c \le c'$ cuando y sólo cuando:

a) nunca tenemos $c'^R \le c$ y

b) nunca tenemos $c' \le c^L$.

8I) $-c = (\{ c^R \} , \{ c^L \})$.

9I) $c_1+c_2 = (\{ c_1{}^L+c_2 \} \cup \{ c_1+c_2{}^L \} , \{ c_1{}^R+c_2 \} \cup \{ c_1+c_2{}^R \})$.

7I) se sigue inmediatamente con la ayuda de 2) desde la caracterización de la relación $\le$ entre dos juegos.

Para probar 8I). Por 8) y 3) tenemos:

$-c = (\{-c_G\}^L{}_C , \{-c_G\}^R{}_C)$

deducimos de 8) usando 6) que $(-c)_G = -c_G$ con lo que tenemos

$$-c = (\{ (-c)_G{}^L{}_C \} , \{ (-c)_G{}^R{}_C \})$$

y de esto junto con 2) y 8) resulta

$$-c = (\{ (-c)^L \} , \{ (-c)^R \}) = (\{ c^R \} , \{ c^L \}).$$

Para poder probar 9)). Por 9) y 3) tenemos:

$$c_1+c_2 = [(\{ c_1{}^L \} , \{ c_1{}^R \})_G + (\{ c_2{}^L \} , \{ c_2{}^R \})_G]_C$$

de 9) y usando 6) tenemos igual que en 8)

$$c_1+c_2 = [(\{ c_1{}^L \} , \{ c_1{}^R \}) + (\{ c_2{}^L \} , \{ c_2{}^R \})]_{CG}$$

de la forma de suma vista en la última sección tenemos lo siguiente: $s \longrightarrow s'$ con s & s' pertenecientes a (c_1+c_2) $\Leftrightarrow$ ($s_1 \longrightarrow_{L1} s_1'$ & $s_2=s_2'$) o ($s_1=s_1'$ & $s_2 \longrightarrow_{L2} s_2'$) con s_1, $s_1' \in c_1$ y s_2, $s_2' \in c_2$ con lo que si los vemos como conjuntos resulta lo siguiente:

$$\{ c_1{}^L+c_2 \} \cup \{ c_1+c_2{}^L \}$$

para el caso de la parte izquierda de la suma de dos juegos e igual para su parte derecha. Lo anterior nos da la expresión deseada de la suma.

Dc lo expuesto en la sección anterior, podemos ahora deducir el siguiente teorema:

<u>TEOREMA:</u> Las clases de juegos equivalentes de juegos de Conway, iguales, forman un grupo Abeliano parcialmente ordenado respecto a las relaciónes $\leq$, = y las operaciones - & +.

Demostración:

En la presente sección se han probado la equivalencia tanto para juegos como para juegos de Conway de las relaciones $\leq$, = y de las operaciones - & +. Con lo que la demostración del presente teorema se ve dada por el factor de que el llamado mapeo fundamental respeta dichas relaciones como se vió en 7), es también biyectivo como se probó en 2), 3), 4) & 5) y por último cumple con ser morfismo al "abrir" o respetar las operaciones de juegos sobre juegos de Conway como se demuestra en las afirmaciones 8) & 9) de esta sección. Al ser ambos conjuntos isomorfos se extiende vía este medio la estructura de grupo Abeliano parcialmente ordenado.

Ejemplos

Habremos de determinar por medio de ejemplos de juegos de Conway correspondientes a uno o dos de los juegos de dominó discutidos previamente al final de la sección 4. Vimos que D_0, D_1 no tenian ambos predecesor alguno, en otras palabras $D_{0C}=D_{1C}=(\varnothing,\varnothing)=0$. El juego de dominó con posición inicial  tiene a D_0 como un predecesor izquierdo, pero no tiene predecesor derecho. El juego de Conway correspondiente a este juego de dominó es $(\{0\}, \varnothing) = 1$. En la misma forma vemos que los juegos de domino con posiciones iniciales y , corresponden respectivamente a los juegos de Conway $(\varnothing, \{0\})$ y $(\{-1\}, \{1\})$. El juego de dominó con posición inicial que tiene a D_1 como único predecesor derecho, corresponde al juego de Conway $(\{0\}, \{0\})$.

CAPITULO VI

NUMEROS DE CONWAY

En la sección 8 discutiremos los postulados D_1) a D_4) de la teoría de Dedekind. En la futura generalización, aparte del concepto básico de relacionar a un número un par de conjuntos, cuyos elementos sean precisamente números previamente construidos ya, únicamente el postulado D_3 (o su versión D_3') fue preservada. Esto en virtud del problema de como podía ser definida la relación $\leq$. Este problema queda ahora resuelto. Los números de Conway son, de acuerdo con la forma en que fueron construidos, en cualquier caso juegos de Conway, y tenemos también de la sección 5.2 una relación de orden parcial para juegos de Conway motivada por la teoría de juegos. Ahora estamos en posición de formular los dos postulados de Conway C_1) y C_2). C_1) generaliza el postulado D_1') de Dedekind mientras que D_2) da la caracterización inductiva de $\leq$.

Los Postulados de Conway 1 & 2

Los números de Conway, los que desde ahora podríamos llamar simplemente números, serán introducidos vía los siguientes dos postulados. Usaremos z^L & z^R como al principio de la sección 5, como variables para denotar los elementos izquierdos y derechos de los pares de conjuntos respectivamente.

C_1) Si $z = (x, y)$ donde x & y son ambos conjuntos de números y $z^R \leq z^L$ nunca se verifica, entonces z es un número.

C2) Para dos números x & y la afirmación de que $x \leq y$ es equivalente a la combinación de las afirmaciones, $y^R \leq x$ nunca se verifica y tampoco $y \leq x^L$ nunca es cierto.

Conway desarrolla su teoría enteramente sobre la base de estos dos axiomas, aparte claro de la definición de las operacones aritméticas. Así de estos postulados se derivan todos las propiedades de $\leq$, sin la necesidad de volver a referirnos a la teoría de juegos previamente establecida en la sección 4. Probaremos esto aquí en forma semejante a la vista en la sección 1 donde definimos los juegos de Conway con ayuda del postulado CG).

De C1) se sigue que:

1) Cada número es un par de conjuntos. Los elementos izquierdos y derechos de un número son ellos mismos números. Cada número es un juego de Conway.

Si x es un conjunto de números, entonces $(x\ ,\ \varnothing)$ y $(\varnothing\ ,\ x)$ son números ya que la restricción dada en C1) es satisfecha trivialmente. En particular se sigue de esto que:

2) Todo número ordinal es un número.

Lo anterior se sigue de lo ya probado en la sección 1 junto con 1).

Nosotros repetidamente habremos de dar pruebas inductivamente, por lo que formularemos un principio de inducción para números correspondiente al formulado para juegos de Conway en la sección 5 y para los juegos, visto en la sección 2, y que sea más fácil de probar siguiendo los mismos pasos. En adición a la formulación de un principio para una propiedad, también formularemos un principio para una relación dada.

Principio de Inducción para números : (para una propiedad P) Si de la hipótesis de inducción Px, válida para cada elemento izquierdo o derecho x' de un número x, se sigue la validéz de la propiedad Px para cada número x. Entonces cada número x tiene la propiedad P.

Demostración:

Supongamos que la propiedad Px se sigue de la hipótesis de inducción para Px' y que existe un elemento patógeno x_0 tal que no cumple con la propiedad P, donde x_0 es un elemento izquierdo o derecho de x'. Pero de existir un x_0 con tal caracteristica, este debe de tener forzosamente un elemento x'_0, izquierdo o derecho, el cual tampoco cumple con la propedad P. Y este a su vez debe tener un elemento x''_0 con la misma restricción sobre la propiedad antes mencionada, y así sucesivamente, creando de esta manera una sucesión $x_0, x'_0, x''_0, \ldots\ldots$ que satisface la siguiente relación: $\ldots\ldots \in x''_0 \in x'_0 \in x_0$, y dado que los elementos, izquierdos o derechos, son conjuntos de números en si mismos, esto contradice el axioma de fundación de la teoria de conjuntos. Así no puede existir un elemento de las caracteristicas de x_0, y de el cumplimiento de la afirmación como consecuencia de la hipótesis de inducción se sigue que todos los x tienen la propiedad arriba mencionada.

Principio de inducción para números: (para una relación R).

Conclusión de inducción: $Rx_1,\ldots\ldots,x_n$.

Hipotesis de inducción: Si se cumple $Rx'_1,\ldots\ldots,x'_n$, para cada n-ada $x'_1,\ldots\ldots,x'_n$, donde, para cada i, x'_i es igual a x_i o bien es un elemento izquierdo o derecho de x_i y donde, para almenos un i, x'_i es un elemento izquierdo o derecho de x_i.

Si (para todo $x_1,\ldots\ldots,x_n$) se sigue la conclusión antes mencionada a partir de la hipótesis arriba expuesta, entonces la afirmación $Rx_1,\ldots\ldots,x_n$ resulta ser válida para todos los números $x_1,\ldots\ldots,x_n$.

Demostración:

Supongamos que la conclusión de inducción $Rx_1,\dots,x_n$ se cumple a partir de la hipótesis de inducción de que $Rx'_1,\dots,x'_n$ es válida. Pero que existe una n-ada $x_{10},\dots,x_{n0}$ tal que no cumple la relación R. Entonces a su vez debe existir una n-ada $x'_{10},\dots,x'_{n0}$ donde para cada i, $x_{i0}=x'_{i0}$ o es un elemento ya sea izquierdo o derecho de x_{i0} y donde por lo menos para un i, x'_{i0} es un elemento izquierdo o dercho de x_{i0} de tal suerte que no cumple con la relación antes mencionada. Esta n-ada a su vez contiene una n-ada $x''_{i0},\dots,x''_{i0}$ tal que para cada i, $x''_{i0}=x'_{i0}$ o bien es un elemento de la parte izquierda o derecha de x'_{i0} y donde almenos para un i, x''_{i0} es de la forma antes mencionada, que análogamente no cumple con la relación R. Siguiendo con este proceso se crea una sucesión infinita de n-adas (representémoslas por su elemento inicial) $x_{i0}, x'_{i0}, x''_{i0}, \dots$ plenamente contenidos una en otra, de la siguiente manera: $\dots\subset x''_{i0}\subset x'_{i0}\subset x_{i0}$ lo cual esta en contradicción con lo referido en el axioma de fundación de la teoria de conjuntos.

Propiedades Elementales de la Relación de Orden

Primero usando el principio de inducción mostraremos que la relación $\leq$ es reflexiva. Al mismo tiempo probaremos dos nuevas afirmaciones.

Para cada número x.

3) a) No $x^R \leq x$ para cada x^R.

b) No $x \leq x^L$ para cada x^L.

c) $x \leq x$.

Demostración:

Probaremos la afirmación a) ya que b) resulta análogo. Si tuviéramos $x^R \leq x$ entonces por c2), en particular, $z \leq x^R$ es falsa cuando z es un elemento derecho de x. Ahora bien, x^R es un elemento derecho de x, así podríamos tener que no $x^R \leq x^R$, contrario a lo expuesto en la parte c) de la hipótesis de inducción, con lo cual $x^R \leq x$.

Para probar la afirmación c) si $x \leq x$, entonces por 7l) de la sección 5, existe un $x^R \leq x$ o un x que es menor igual a un x^L en contradicción a lo expuesto en los incisos a) o b) respectivamente.

Como para juegos de Conway y juegos, ahora introduciremos una relación de equivalencia = para números a través de la siguiente definición.

<u>Definicón:</u> $x = y$ significa $x \leq y$ & $y \leq x$.

De 3) se sigue que:

4) Para cada número x, $x \leq x$.

Ahora mostraremos que $\leq$ es transitiva:

5) Para todo número x, y, z tenemos que: si $x \leq y$ & $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

(Claramente conocemos desde las primeras secciones que esto se aplica cuando la relación $\leq$ esta dada conforme a la definición de teoría de juegos)

Demostración:

Nosotros usaremos el principio de inducción para la relación ternaria R, definida por:

$$
\begin{aligned}
Rxyz \text{, se da si y sólo si } & (x \leq y \;\&\; y \leq z \Rightarrow x \leq z) \\
& \text{y } (y \leq z \;\&\; z \leq x \Rightarrow y \leq x) \\
& \text{y } (z \leq x \;\&\; x \leq y \Rightarrow z \leq y).
\end{aligned}
$$

Mostraremos que la conclusión de inducción $Rxyz$ es una consecuencia de la hipótesis de inducción. Sobre fundamentos de simetría es suficiente mostrar que $x \le z$, si $x \le y$ & $y \le z$, sigue de la hipótesis de inducción. En efecto, supongamos $x \le y$ & $y \le z$. Si $x \le z$ no se cumpliera, existiría por C2) un z^R con $z^R \le x$ y un x^L tal que $z \le x^L$. Nos restringiremos al primer caso (el segundo puede ser tratado de manera similar). Se sigue de $z^R \le x$ & $x \le y$ por la hipótesis de inducción (en particular el tercer término de la conjunción definida en $Rxyz$) que $z^R \le y$. De ahí que se siga de $z^R \le y$ & $y \le z$ y por el primer término de la conjunción que $z^R \le z$ ∇.

En esta prueba de reflexividad y transitividad no hemos hecho uso de la restricción dada en C1) como factor sobre la formación de pares de conjuntos. Esta restricción será esencial en lo siguiente.

Definimos $x < y$ de la manera más usual por $x \le y$ & no $y \le x$ (o equivalentemente por $x \le y$ & $x \ne y$) y afirmamos:

6) Para cada número x, $x^L \le x$ & $x \le x^R$.

<u>Nota</u>: Nótese que la afirmación correspondiente para juegos de Conway es falsa, dado que se pudiera dar $x^L < x^R$ siempre, donde estos son juegos de Conway x & z tales que z es tanto un elemento izquierdo como derecho de x.

Demostración:

Prueba inductiva para $x < x^L$.

Nosotros teníamos ya demostrado en 3) que no $x \le x^L$. Con lo que será suficiente probar que $x^L \le x$. Si x^L no $\le x$ es verdad, sería posible por C2) la existencia de un x^R tal que $x^R \le x^L$ o un x^{LL} tal que $x \le x^{LL}$. Pero $x^R \le x^L$ está en contradicción con C1) y de darse un x^{LL} con tal propiedad, entonces por la hipótesis de inducción $x^{LL} \leq x^{L}$ y por la propiedad transitiva de $\leq$ podríamos tener también que $x \leq x^{L}$ en contradicción con C2).

La segunda afirmación se prueba de manera análoga.

Ahora intentaremos mostrar que los números son totalmente ordenados a través de la relación $\leq$. (esto no es válido para juegos en general. Tenemos en efecto, indicado en la sección 3 un ejemplo de un juego x de la clase F, y para este juego no $x \leq 0$ & no $0 \leq x$)

7) Para cualesquiera números x, y tenemos $x \leq y$ o $y \leq x$.

Demostración:

Supongamos que no$(y \leq x)$ y demostraremos entonces que $x \leq y$. Se sigue de $y \leq x$, por C2), que existe un $x^{R} \leq y$ o que $x \leq y^{L}$.

$x \leq x^{R}$ por 6) y $x^{R} \leq y$ implican $x \leq y$

$x \leq y^{L}$ & $y^{L} \leq y$ por 6) implican $x \leq y$.

Ejemplos

Hemos visto que todos los ordinales son números. Si los ordinales son construidos en sucesión (ver la sección 1 donde los primeros ordinales son definidos) uno ve enseguida que cada ordinal es diferente (esto es = a) de cualquiera de sus predecesores. Sin embargo más que esto sea verdad cada número ordinal, es también desigual a cualquiera de sus predecesores. Nosotros nos habremos de conformar con probar esto para números naturales n. Así esto será suficiente para mostrar que se cumple que $n \leq n+1$.

a) $n \leq n+1$: usaremos C2);

a_1) ($n+1$)$^{R} \leq n$ no puede ser nunca cierto, porque este no es un elemento derecho de $n+1$.

a_2) Si $n+1$ fuese $\leq$ que un n^{L}, entonces por la definición de $n+1$, tal n^{L} podría ser también un $(n+1)^{L}$ y $n+1$ podría ser $\leq$ que un $(n+1)^{L}$ contrario a lo expuesto en 3).

b) $\neg(n+1 \leq n)$: En vista de lo expuesto en C2) es suficiente mostrar que $n \leq$ que un $(n+1)^{L}$ pero n es un $(n+1)^{L}$ y $n \leq n$ por 3).

CAPITULO VII

EL ANILLO DE LOS NUMEROS DE CONWAY

En la última sección introducimos los números de Conway, conjuntamente con la relación de orden $\leq$, y la de equivalencia $=$. Ahora habremos de dar las definiciones para las operaciones aritméticas y algunos ejemplos, y esbozaremos las propiedades de el campo de los números de Conway.

Operaciones Aritméticas para números

Estas serán definidas inductivamente. Como vimos − & + serán reincorporadas, donde tendremos que definir tales operaciones como para juegos de Conway lo hicimos en la sección 5. Nosotros tomamos finalmente estas definiciones inductivas de 8I) & 9I) y volvemos a darlas en forma de dos postulados C−) & C+) para números.

C−) Para cada número x, tenemos

$-x=(\{x^R\},\{x^L\})$.

C+) Para cualesquiera x, y números, tenemos

$x+y=(\{x^L+y\}\cup\{x+y^L\},\{x^R+y\}\cup\{x+y^R\})$.

Puede ser mostrado que las operaciones − & + nunca quedan fuera del dominio de los números, y que la relación de igualdad definida en la última sección es una relación de congruencia para estas operaciones.

Dado que $-x$ solo es el cambio de posición de los conjuntos de números, estos siguen siendo números y por lo tanto $-x$ también lo sigue siendo. En el caso de $x+y$, bajo la relación +, siguen siendo números las uniones de conjuntos de números, que es lo que conforma la suma y así la suma cumple con el postulado CG.

Como en la sección anterior, se definió $x=y$ como $x \leq y$ & $y \leq x$, más en la sección 6 se vio que $-c = (\{ -c^L \}, \{ -c^R \})$ respecto al uso de juegos y juegos de Conway, y al usar la inducción esta sólo nos asegura la congruencia de las hipótesis de inducción. Asi la conclusión se sigue sobre la congruencia para estos ahora números. En esta misma forma se haya la justificación para la suma de dos números.

En cuanto a la multiplicación, ésta aparenta no ser modelada para ser manejada dentro del dominio de los juegos y juegos de Conway. Tras algunas dificultades Conway logra hallar la siguiente definición inductiva C·) de multiplicación formulada sobre las analogías de C−) & C+).

C·) Para cualesquiera x, y números, tenemos

$$x \cdot y = (\{ x^L y + x y^L - x^L y^L \} \cup \{ x^R y + x y^R - x^R y^R \}, \\ \{ x^L y + x y^R - x^L y^R \} \cup \{ x^R y + x y^L - x^R y^L \}).$$

La multiplicación no se sale del dominio de los números por ser formulada inductivamente como uniones de conjuntos de sumas y restas de productos de números, definidos previamente por hipótesis. La igualdad definida en la última sección forma una relación de congruencia para estas operaciones aqui definidas.

Conway muestra que el conjunto de todos los números módulo esta igualdad constituyen un campo ordenado respecto a $\leq$, $-$, $+$ & $\cdot$.

Como ya se probó en secciones anteriores los números de Conway forman un grupo Abeliano parcialmente ordenado respecto a $\leq$, $-$ & $+$. De ahí que solo probaremos que con la operación dada por C·) los números de Conway forman un monoide y al adjuntarlo con lo anterior y lo expuesto al final de la última sección tengamos el resultado deseado.

Las clases de congruencia módulo la igualdad, con la operación $\cdot$ forman un monoide.

Demostración:

a) Que C$\cdot$) es una ley de composición salta de lo expuesto anteriormente.

b) Que sea asociativa se ve del siguiente factor:

$$x\cdot(y\cdot z)=(\{x^L\cdot(y\cdot z)+x\cdot(y\cdot z)^L-x^L\cdot(y\cdot z)^L\}\cup\{x^R\cdot(y\cdot z)+x\cdot(y\cdot z)^R-x^R\cdot(y\cdot z)^R\},$$
$$\{x^L\cdot(y\cdot z)+x\cdot(y\cdot z)^R-x^L\cdot(y\cdot z)^R\}\cup\{x^R\cdot(y\cdot z)+x\cdot(y\cdot z)^L-x^R\cdot(y\cdot z)^L\})$$

con los siguientes observaciones:

$$x^L\cdot(y\cdot z)=(\ x^L\cdot y\ )\cdot z.$$

$$x\cdot(y\cdot z)^L= x\cdot(\{y^Lz+yz^L-y^Lz^L\}\cup\{y^Rz+yz^R-y^Rz^R\})$$
$$=\{(xy^L)z+(xy)z^L-(xy)z^L\}\cup\{(xy^R)z+(xy)z^R-(xy^R)z^R\}$$

pero lo anterior no es sino $(xy^L)\cdot z$ ya que $xy^L\in(xy)^L$ y $xy^R\in(xy)^R$.

$$x^L\cdot(y\cdot z)^L= \{(x^Ly^L)z+(x^Ly)z^L-(x^Ly^L)z^L\}\cup\{(x^Ly^R)z+(x^Ly)z^R-(x^Ly^R)z^R\}$$

como en el anterior, esto es ahora $(x^Ly^L)\cdot z$. Todo esto unión:

$$x^R\cdot(y\cdot z)=(x^R\cdot y)\cdot z.$$

$$x\cdot(y\cdot z)^R= x\cdot(\{y^Lz+yz^R-y^Lz^R\}\cup\{y^Rz+yz^L-y^Rz^L\})$$
$$=\{(xy^L)z+(xy)z^R-(xy^L)z^R\}\cup\{(xy^R)z+(xy)z^L-(xy^R)z^L\}.$$

pero esto no es otra cosa que $(xy^R)\cdot z$, para la conjugación de y con $x\&z$.

$$x^R\cdot(y\cdot z)^R= \{(x^Ry^L)z+(x^Ry)z^R-(x^Ry^L)z^R\}\cup\{(x^Ry^R)z+(x^Ry)z^L-(x^Ry^R)z^L\}$$

y esto es ahora $(x^Ry^R)\cdot z$.

De todo lo anterior se obtiene:

$\{(x^Ly)z+(xy^L)z-(x^Ly^L)z\}\cup\{(x^Ry)z+(xy^R)z-(x^Ry^R)z\}$, que es la parte izquierda de $(x\cdot y)\cdot z$. Siguiendo el mismo proceso para la parte derecha tenemos que:

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z.$$

c) La existencia de un neutro multiplicativo se da del número $1=(\{0\},\varnothing)$ ya que al multiplicarlo por un número $x=(\{x^L\},\{x^R\})$ cualquiera, no lo afecta:

$$x\cdot 1=(\{x^L1+x0-x^L0\}\cup\{x^R1+x\varnothing-x^R\varnothing\},\{x^L1+x\varnothing-x^L\varnothing\}\Box\cup\{x^R1+x0-x^R0\})$$
$$=(\{x^L\}\Box\cup\{\varnothing\},\{\varnothing\}\cup\{x^R\})=(\{x^L\},\{x^R\})=x.$$

d) Que sea conmutativa es inmediato:

$(x\cdot y)^L=\{x^Ly+xy^L-x^Ly^L\}\cup\{x^Ry+xy^R-x^Ry^R\}=\{y^Lx+yx^L-y^Lx^L\}\cup\{y^Rx+yx^R-y^Rx^R\}=(y\cdot x)^L$. Igualmente para las partes derechas con lo cual queda probado que $x\cdot y=y\cdot x$.

e) La propiedad distributiva se da de las siguientes observaciones:

$$(a+b)\cdot x=[(\{a^L+b\}\cup\{a+b^L\},\{a^R+b\}\cup\{a+b^R\})]\cdot x$$

$$=(\{[\{a^L+b\}\cup\{a+b^L\}]x+(a+b)x^L-[\{a^L+b\}\cup\{a+b^L\}]x^L\}\cup\{[\{a^R+b\}\cup\{a+b^R\}]x+(a+b)x^R-$$
$$[\{a^R+b\}\cup\{a+b^R\}]x^R\}.$$

$$=(\{[\{a^Lx+bx\}\cup\{ax+b^Lx\}]+ax^L+bx^L-[\{a^Lx^L+bx^L\}\cup\{ax^L+b^Lx^L\}]\}\cup$$
$$\{[\{a^Rx+bx\}\cup\{ax+b^Rx\}]+ax^R+bx^R-[\{a^Rx^R+bx^R\}\cup\{ax^R+b^Rx^R\}]\}.$$

$$=(\{[\{a^Lx+bx+ax^L\}\cup\{ax+b^Lx+bx^L\}]-[\{a^Lx^L+bx^L\}\cup\{ax^L+b^Lx^L\}]\}\cup$$
$$\{[\{a^Rx+bx+ax^R\}\cup\{ax+b^Rx+bx^R\}]-[\{a^Rx^R+bx^R\}\cup\{ax^R+b^Rx^R\}]\}.$$

$$=(\{[\{a^Lx+ax^L-a^Lx^L+bx-bx^L\}\cup\{b^Lx+bx^L-b^Lx^L+ax-ax^L\}]\}\cup$$
$$\{[\{a^Rx+ax^R-a^Rx^R+bx-bx^R\}\cup\{b^Rx+bx^R-b^Rx^R+ax-ax^R\}]\}.$$

$$=(\{[\{a^Lx+ax^L-a^Lx^L\}\cup\{b^Lx+bx^L-b^Lx^L\}]+(a+b)(x-x^L)\}\cup$$
$$\{[\{a^Rx+ax^R-a^Rx^R\}\cup\{b^Rx+bx^R-b^Rx^R\}]+(a+b)(x-x^R)\}.$$

$$=([\{(ax)^L\}\cup\{(bx)^L\}]+(a+b)(x+x-x^L-x^R).$$

pero $x-x^L-x^R=0$, con lo que queda:

$$=(\{(ax)^L+bx\}\cup\{ax+(bx)^L\}.$$

$$=(ax+bx)^L.$$

Se sigue el mismo proceso para la parte correspondiente a la derecha y con ello queda probado: $(a+b)\cdot x=(ax+bx)$.

Con todo lo visto anteriormente se ve que los números de Conway forman un anillo conmutativo, con un orden parcial dado por la forma de juegos que tienen los mismos.

Ejemplos:

Los siguientes ejemplos intentan ilustrar lo definido antes. Habremos de mostrar por inducción que $x+0\equiv x$, que $x+(-x)=0$, $1+1=2$ y que $(1/2)+(1/2)=1$, para $(1/2)\equiv(\{0\},\{1\})$.

a) $x+0\equiv x$ (y simétricamente $0+x\equiv x$)

$x+0\equiv(\{x^L+0\}\cup\{x+\varnothing\},\{x^R+0\}\cup\{x+\varnothing\})$ C+)

$\equiv(\{x^L+0\},\{x^R+0\})$

$\equiv(\{x^L\},\{x^R\})$ por hipótesis de inducción

$\equiv x$.

b) $x+(-x)=0$ (aquí el signo = no puede ser reemplazado por $\equiv$, como puede verse, por ejemplo, al tomar $x\equiv 1$).

Usando la definición de = vista en la sección anterior y restringiéndonos a probar que la expresión $x+(-x)\leq 0$ es cierta. Es claro que $0^R\leq x+(-x)$, ya que no existe un 0^R. Si existiera un $z\equiv(x+(-x))^L$ con $0\leq z$, entonces podríamos tener, por C+) $z\equiv x^L+(-x)$ o $z\equiv x+(-x)^L$. En el primer caso 0 podría ser menor o igual que $x^L+(-x)$, y entonces por C2), $(x^L+(-x))^R$ nunca podría ser menor que 0; pero por C+) y C−) tenemos que $x^L+(-x)^L$ es un $(x^L+(-x))^R$ y en virtud de la hipótesis de inducción tendríamos $x^L+(-x)^L\leq 0\nabla$. En el segundo caso podría existir un x^R con $z\equiv x+(-x)^R$ y 0 podría ser $\leq x+(-x)^R$. Consecuentemente no existiría, por C2), $(x+(-x)^R)^R\leq 0$; y esto en contradicción con la hipótesis de inducción de que existe un $x^R+(-x)^R\leq 0$.

c) $1+1=2$

en la segunda sección definimos $1\equiv(\{0\},\varnothing)$. De esto se sigue que:

$1+1\equiv(\{1^L+1\}\cup\{1+1^L\},\{1^R+1\}\cup\{1+1^R\})$ C+)

$\equiv(\{0+1\}\cup\{1+0\},\varnothing)$

$\equiv(\{1\},\varnothing)$ a).

Ahora debemos probar que este número obtenido de la suma de uno consigo mismo es, de acuerdo con lo ya visto, equivalente a el número dos como lo conocemos. Para esto haremos uso del criterio ya expuesto en una sección anterior.

c_1) $(\{1\},\varnothing)\leq(\{1,0\},\varnothing)$. Como no existe un $\varnothing^R$, será suficiente con que mostremos que 2 no es menor igual que $(\{1\},\varnothing)^L$, o en otras palabras que 2 no $\leq$ 1. Lo anterior se sigue de que $1<2$ como ya se había probadó en la sección anterior.

c_2) $(\{0,1\},\varnothing)\leq(\{1\},\varnothing)$. Para este caso será suficiente con mostrar que $(\{1\},\varnothing)$ no es menor que $(\{0,1\},\varnothing)$, esto es, que $(\{1\},\varnothing)$ no ≤ 0 y que $(\{1\},\varnothing)$ no ≤ 1. Si fuera $(\{1\},\varnothing)\leq 0$ verdadero, tendríamos que 0 no es menor igual a $(\{1\},\varnothing)^L$, lo cual contradiría el hecho de que $0\leq 1$. Así 2 es menor igual que $(\{1\},\varnothing)$, ya que su parte izquierda no es mayor o igual que todo elemento de el número con el que lo comparamos.

Con todo lo anterior se ha demostrado que: primero $(\{1\},\varnothing)$ es equivalente a 2 y segundo, que con esto, 1+1 es igual a dos.

d) Definimos $(1/2)=(\{0\},\{1\})$.

$(1/2)$ es un número, de acuerdo con c1), ya que 1 no es menor igual que cero. Ahora se justificará la notación al probar que $(1/2)+(1/2)=1$.

e) $0\leq(1/2)$.

De acuerdo con lo ya expuesto es suficiente probar que la parte derecha de $(1/2)$ no es menor ugual que cero, pero esto es obvio, ya que $(1/2)^R=1$ y uno no es menor igual que cero.

f) 1 no $\leq(1/2)$.

Es fácil ver esto, ya que 1 es elemento derecho de $(1/2)$ y $1\leq 1$ con lo que $(1/2)$ no puede ser mayor que 1.

g) $1+(1/2)=(\{(1/2),1\},\{1+1\})$.

Lo que resulta de C+) junto con a) y la propiedad conmutativa.

h) $(1/2)+(1/2)=1$.

$$(1/2)+(1/2)=(\{0+(1/2)\}\cup\{(1/2)+0\}.\{1+(1/2)\}\cup\{(1/2)+1\}) \qquad C+)$$
$$=(\{(1/2)\}.\{1+(1/2)\}) \qquad \text{o) y Prop. conm.}$$

Con lo que sólo nos resta probar como con la suma de 2, que este último número es equivalente a 1. Seguiremos la misma tónica que en c).

h_1) $1\leq(\{1/2\}.\{1+(1/2)\})$. En este caso haremos la prueba completa de orden entre dos números:

Primero. $1+(1/2)$ no es menor igual que 1, esto se sigue facilmente de que $1\leq 1$, ya que por g) 1 es un $(1+(1/2))^L$. Asi no puede ser mayor que $1+(1/2)$.

Segundo. $(\{1/2\}.\{1+(1/2)\})$ no es menor igual que cero, lo cual es obvio, ya que $0\leq(1/2)$ como se vio en e).

h_2) $(\{1/2\}.\{1+(1/2)\})\leq 1$. Con que veamos aqui que 1 no es menor igual que $(\{1/2\}.\{1+(1/2)\})^L$ nos bastará o lo que es lo mismo, ya que $(\{1/2\}.\{1+(1/2)\})^L=(1/2)$, que como ya habiamos probado en f) no es mayor igual que uno.

Con todo lo anterior se ha probado entonces que estos dos números son equivalentes y que por lo tanto $(1/2)+(1/2)=1$. Lo que hace coherente la notación empleada para el susodicho número $(1/2)$.

CAPITULO VIII

CONCLUSIONES

Como se mencionó en la sección 6 aqui se discutirán los postulados D_1) a D_4) de Dedekind, parte fundamental del proyecto a desarrollar en este trabajo.

Postulados de Dedekind

Para terminar con lo esperado en esta tesis hubieramos querido llegar a extender nuestro anillo conmutativo y ordenado a un campo y no solo un simple campo sino uno isomorfo a los reales. Para este fin hubierá sido necesario usar el concepto de cortadura y ver a cada real como una cortadura de Dedekind, lo cual no sería en esencia muy complicado ya que para los números de Conway se usó el mismo concepto, ambos son una pareja ordenada (x, y) donde x e y son conjuntos de números racionales.

Para que una pareja (x, y) sea una cortadura deberá cumplir con los siguientes requerimientos:

D_1) Cada número racional está precisamente en una de las dos clases (Como los llama Conway) x e y.

D_2) x e y son ambos no vacíos.

D_3) Cada elemento de x es menor que cada elemento de y.

D_4) x carece de un elemento máximo.

Con lo anterior y siguiendo los pasos de Dedekind se habría de llegar a la construcción, por así decirlo, de los reales vía teoría de juegos, más la extención del trabajo hizo este objetivo demasiado ambicioso.

Lo anterior solo expresa una cara de la moneda, ya que por el otro lado este trabajo desarrollado por Conway abre una inmensidad de posibilidades para la teoría de juegos al dotarlos, por lo menos para los del tipo manejado y expuesto, de una estructura algebraica junto con toda la riqueza de información generada ya previamente para esto.

Solo me resta hacer patente mi admiración hacia la terrible capacidad de autoenriquecimiento que posee la matemática, al ver como entre áreas se brinda nuevas y exuberantes aportaciones.

Deseando que lo anterior brinde una somera perspectiva del trabajo realizado por los modernos matemáticos agradezco la atención prestada a la presente tesis.

Quedo de ustedes Juan Pablo Ornelas Yan.

Bibliografia

Ebbinghous, Hermes . Numbers , Springer – Verlog, Nuevo York, 1990

Knuth . Números surreoles, Ed. Reverte . Borcelono, 1979