UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ELEMENTOS BASICOS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

JOSE RAMON RODRIGUEZ MANCILLA

MEXICO, D. F. 1994

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) José Ramón Rodríguez Mancilla

con número de cuenta 9052101-8 con el Título:
"ELEMENTOS BASICOS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Actuario

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS		FIRMA
Dra.	María Emilia	Caballero	Acosta	[firma]
Director de Tesis				
Dra.	María Asunción Begoña	Fernández	Fernández	[firma]
Mat.	Luis Alberto	Briseño	Aguirre	[firma]
Dr.	Manuel	Galán	Medina	[firma]
Suplente				
M. en C.	Dino	Mon	Vásquez	[firma]
Suplente				

Dedicatoria

A Dios, que me ha permitido alcanzar esta meta, largamente deseada.

A mis padres, quienes siempre me han apoyado en todas las metas que me he fijado y que asi mismo me han alentado a fijarme nuevos y mds grandes retos.

A mis hermanos, quienes con su cariño y forma de ser han colmado de alegría mi vida.

Agradecimientos

A Ma. Emilia Caballero, quien a pesar de conocerme poco confió en mi para ser su tesista y que durante el trabajo de la presente tesis, me ha permitido entrever a una persona jovial que me ha brindado su amistad. Espero no haber defraudado esa confianza.

A Luis Briseño, quien aceptó gentilmente ser mi sinodal y que me ha dedicado largas horas de su valioso tiempo, aportándome importantes comentarios que me han ayudado a madurar los conceptos de la presente tesis y que me ha permitido conocer a una persona muy valiosa.

A Begoña Fernández, a quien estimo y que en los inicios de mi carrera fue pieza clave para decidirme a estudiar Matemáticas Aplicadas.

A Manuel Galán, quien a pesar de tener tantas ocupaciones aceptó gentilmente ser mi sinodal, dedicándome generosamente su atención en revisarme esta tesis y por su valiosa dirección para cristalizar la inquietud de aplicar las Matemáticas con esa calidez humana que lo caracteriza.

A Dino Mon, a quien aprecio y agradezco que haya aceptado ser mi sinodal y que junto con Begoña Fernández marcaron una directriz importante en mi carrera.

A Angel Carrillo, mi maestro, quien es indiscutiblemente el pilar más importante de mi carrera y que siempre será un ejemplo a seguir para mí en todos los aspectos.

A Agustin Cano, quien matizó de una manera muy especial mi carrera al darme una visión global de la misma, aunado a ese sentido del humor que sólo él tiene.

A Alma, que con su paciencia, amor y comprensión, me apoyó a superarme día a día en la realización de esta tesis.

A aquél Clan maravilloso de Actuarios y Matemáticos con los que navegé en la maravillosa y a veces pesada travesía de la carrera en el mar de la Facultad de Ciencias.

A todos aquellos que de una manera directa o indirecta han contribuido a alcanzar esta meta.

MUCHAS GRACIAS

Contenido

Introducción

Con este trabajo se busca dar una presentación del importante tema del Movimiento Browniano, que logre ser a la vez rigurosa desde el punto de vista matemático y lo más accesible posible, de tal manera que éste pueda ser leído no sólo por especialistas en el área sino por un amplio sector de personas interesadas tales como estudiantes de los años finales de las carrera de Matemáticas, Física y Actuaría, asi como por economistas e ingenieros, haciendo hincapié en que es necesaria una sólida base de análisis matemático para su lectura.

En el primer capítulo, se exponen las herramientas de probabilidad que se utilizarán a lo largo de toda la tesis. Estas herramientas comprenden el concepto de esperanza condicional y algunas de sus propiedades más importantes, el concepto de probabilidad condicional y el Teorema $\Pi - \lambda$ del cual se enuncian otras versiones y se demuestra la equivalencia con respecto a una de estas versiones, versión que se utilizará en la presente tesis.

En el segundo capítulo se desarrollan los conceptos fundamentales del Movimiento Browniano asi como algunas de sus propiedades elementales. Para tal efecto, se comienza dando una pequeña motivación. Después se da una primera definición del Movimiento Browniano y se demuestran cuatro propiedades importantes inmediatas de la definición dada, para inmediatamente después dar otras definiciones y señalar su relación. En la parte media y final del segundo capítulo se desarrollan dos importantes propiedades del Movimiento Browniano: la Propiedad de Markov, de la cual se derivan algunas de sus consecuencias, y la Propiedad Fuerte de Markov, que relaciona al Movimiento Browniano con el concepto de tiempos de paro.

En el tercer capítulo se desarrollan más propiedades del Movimiento Browniano. La primera de estas propiedades, conocida como el Principio de Reflexión, se demuestra como una consecuencia de la Propiedad Fuerte de Markov. En segunda instancia, se presenta el Movimiento Browniano restringido al intervalo de tiempo $[0,1]$ y bajo la condición de que alcance el mismo valor en los extremos. Este Movimiento Browniano restringido se conoce con el nombre de **Puente Browniano**. Por último, se demuestran algunas de las propiedades de tiempos de entrada y las Leyes de Arco Seno.

En el cuarto capítulo se dan cinco variantes del Movimiento Browniano, incluyendo en éstas el caso en que el Movimiento Browniano tenga ya una tendencia.

Finalmente en el quinto capítulo se desarrollan cuatro aplicaciones, de las cuales dos emanan de la Propiedad de Invarianza del Movimiento Browniano y otros dos de suponer que la tasa de cambio del precio de un cierto artículo se comporte como un Movimiento Browniano.

Notación

En la presente tesis se adoptará la siguiente notación:

$$\chi_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{si } \omega \in B^c \end{cases}$$

$\Re$	:	representa al conjunto de los números reales.
$\Re^{\#}$	:	representa a el conjunto de los reales extendidos.
$B(\Re)$	:	representa a el conjunto de los Boreleanos en $\Re$.
$\xrightarrow{d}$	:	representa convergencia en distribución.
N	:	representa al conjunto de los números naturales.
Q	:	representa al conjunto de números racionales.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 Esperanza Condicional

Definición 1.1.1 *Sea (Ω, ℓ, P) un espacio de probabilidad. Sea $A \in \ell$ y $B \in \ell$. Entonces la probabilidad condicional de A, dado B, se define como:*

$$P\{A \mid B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

siempre y cuando $P\{B\} > 0$.

Una vez que se ha dado la definición de probabilidad condicional, se pueden hacer algunas observaciones importantes:

- Para $B \in \ell$ tal que $P\{B\} > 0$ se cumple que $P\{\cdot \mid B\} = \frac{P\{\cdot\}}{P\{B\}}$ es una medida de probabilidad sobre (Ω, ℓ), de tal manera que $(\Omega, \ell, P\{\cdot \mid B\})$ es un espacio de probabilidad.

- Si X es una variable aleatoria en (Ω, ℓ, P) y $E\{X\}$ existe entonces X es integrable con respecto a $P\{\cdot \mid B\}$.

Definición 1.1.2 *Sea X una variable aleatoria definida en (Ω, ℓ, P) tal que $E\{X\}$ existe y $B \in \ell$ tal que $P\{B\} > 0$. Entonces se define la esperanza condicional de X dado B como:*

$$\int_\Omega X dP\{\cdot \mid B\}$$

y la denotamos como $E\{X \mid B\}$.

Proposición 1.1.1 *Sea X una variable aleatoria en (Ω, ℓ, P) tal que $E\{X\}$ existe y sea $B \in \ell$ tal que $P\{B\} > 0$. Entonces,*

$$E\{X \mid B\} = \frac{E\{X\,\chi_B\}}{P\{B\}}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} E\{X \mid B\} &= \int_{\Omega} X dP\{\cdot \mid B\} \\ &= \int_{\Omega \setminus B} X dP\{\cdot \mid B\} + \int_{B} X dP\{\cdot \mid B\} \end{aligned}$$

Nótese que si $H \in \Omega \setminus B \Rightarrow H \cap B = \emptyset$, por tanto, se tiene que:

$$P\{H \mid B\} = 0$$

de donde,

$$\int_{\Omega \setminus B} X dP\{\cdot \mid B\} = 0$$

De esta manera se tiene:

$$\begin{aligned} E\{X \mid B\} &= \int_{B} X dP\{\cdot \mid B\} \\ &= \frac{\int_B X dP\{\cdot\}}{P\{B\}} \\ &= \frac{\int_\Omega X\,\chi_B dP\{\cdot\}}{P\{B\}} \\ &= \frac{E\{X\,\chi_B\}}{P\{B\}} \end{aligned}$$

□

Corolario 1.1.1 *Si en particular se toma $X = \chi_A$ con $A \in F$ se obtiene que,*

$$P\{A \mid B\} = E\{\chi_A \mid B\}$$

Una vez que hemos definido la Esperanza de una variable aleatoria condicionando a un evento, es natural preguntarse por la Esperanza de una variable aleatoria condicionando a una σ-álgebra. Para tal efecto, se considerará en primer lugar la σ-álgebra generada por $B \in \ell$, es decir, se considerará a la σ-álgebra $\mho = \{B, B^c, \Omega, \emptyset\}$. Defínase entonces la siguiente función:

$$E\{X \mid \mho\}(\omega) = \begin{cases} E\{X \mid B\} & \text{si } \omega \in B \\ E\{X \mid B^c\} & \text{si } \omega \in B^c \end{cases}$$

Esta función es $\mho$ medible y por tanto, ℓ medible, es decir, es una variable aleatoria en (Ω, ℓ, P).

Observación:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega E\{X \mid \mho\}\, dP &= E\{X \mid B\} P\{B\} + E\{X \mid B^c\} P\{B^c\} \\
&= E\{X \chi_B\} + E\{X \chi_{B^c}\} \\
&= \int_\Omega X \chi_B dP + \int_\Omega X \chi_{B^c} dP \\
&= \int_\Omega X \chi_{B \cup B^c} dP \\
&= \int_\Omega X dP \\
&= E\{X\}
\end{aligned}$$

Generalización:

Consideremos ahora $\mho$ como la σ-álgebra generada por $B_1, \ldots, B_n \in \ell$ con $B_i \cap B_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ y $P\{B_i\} > 0$ para toda $i \in \overline{1,n}$. Entonces, en una analogía con la definición anterior, se define la Esperanza Condicional de una variable aleatoria X en (Ω, ℓ, P) dada la σ-álgebra generada por las B_i con $i \in \overline{1,n}$ como:

$$E\{X \mid \mho\}(\omega) = E\{X \mid B_i\} \text{ si } \omega \in B_i$$

De igual manera a el caso de $n = 1$ se puede demostrar que $E\{X \mid \mho\}$ es una función ℓ medible, es decir, que es una variable aleatoria en (Ω, ℓ, P).

Observaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P\{B_i\} E\{X \mid B_i\} &= \sum_{i=1}^{n} E\{X I_{B_i}\} \\ &= \int_{\Omega} X dP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} E\{X \mid \mho\} dP &= \sum_{i=1}^{n} P\{B_i\} E\{X \mid B_i\} \\ &= \int_{\Omega} X dP \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\int_{\Omega} E\{X \mid \mho\} dP = \int_{\Omega} X dP$$

Nótese que si la variable aleatoria X es $\mho$ medible entonces,

$$E\{X \mid \mho\} = X \; a.e.(P_{\mho})$$

donde $P_{\mho}$ es la medida inducida de P en la subσ-álgebra $\mho$.

De una manera todavia más general, sea $\{B_n \mid n \geq 1\}$ una partición numerable de Ω con $P\{B_n\} > 0$ para $n \geq 1$, y $\mho$ la σ-álgebra generada por las B_n. Sea X una variable aleatoria con esperanza finita. Entonces la expresión

$$E\{X \mid \mho\} = \sum_{i=1}^{\infty} E\{X \mid B_n\} I_{B_n}$$

define la esperanza condicional de X dado $\mho$. Como antes, $E\{X \mid \mho\}$ es una variable aleatoria que toma un conjunto numerable de valores $\{E\{X \mid B_n\}, n \geq 1\}$ y que cumple con:

$$\int_{\Omega} E\{X \mid \mho\}\, dP = \int_{\Omega} X dP$$

En muchas aplicaciones prácticas se necesita el concepto de esperanza condicional de una variable aleatoria X, dada la σ-álgebra generada por una variable aleatoria Y, o más generalmente, por una colección fija de variables aleatorias $\{Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Para este propósito es necesario extender la definición de esperanza condicional de una variable aleatoria a el caso en que se condicione con una σ-álgebra cualquiera. Para poder extender el concepto de esperanza condicional dada una σ-álgebra cualquiera, se necesita de un importante resultado de Teoria de la Medida conocido como el Teorema de Radon-Nikodym, el cual es enunciado después de dar un par de definiciones.

Definición 1.1.3 *Sea $(\overline{X}, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea μ una medida definida en este espacio. Entonces, se dirá que μ es una medida σ-finita si existe una sucesión $\{A_n\}$ de conjuntos en $\mathcal{M}$ con la propiedad de que $\overline{X} = \bigcup_{n \in N} A_n$ y que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in N$.*

Definición 1.1.4 *Sea $(\overline{X}, \mathcal{M})$ un espacio medible y sean ν y μ dos medidas con signo definidas sobre este espacio. Entonces, se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ, y lo denotamos como $\nu \prec\!\prec \mu$, si y solo si para cada $E \in M$ tal que $\mu(E) = 0$ se cumple que $\nu(E) = 0$.*

Teorema 1.1.1 Radon-Nikodym

Sea $(\overline{X}, \mathcal{M})$ en espacio medible y μ una medida con signo σ-finita sobre este espacio. Entonces, para cada medida ν en $(\overline{X}, \mathcal{M})$ tal que $\nu \prec\prec \mu$ existe f integrable ($f : \overline{X} \longrightarrow \Re^{\sharp}$) tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para $E \in \mathcal{M}$. Además, la función f es única, en el sentido de que cualquier otra función $g : \overline{X} \longrightarrow \Re^{\sharp}$ que tenga esta propiedad cumple que $f(x) = g(x)$ a.e. (μ)

Comentario del Teorema de Radon-Nikodym

El teorema de Radon-Nikodym para el caso de medidas positivas, nos da el recíproco de la proposición que a continuación se enuncia, con el supuesto adicional de que μ sea σ-finita.

Proposición 1.1.2

Sea $(\overline{X}, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea μ una medida en este espacio. Sea $f : \overline{X} \longrightarrow \Re^{\sharp}$ integrable no negativa. Defínase $\nu(A)$ como:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \text{para todo } A \in D$$

Entonces, ν es una medida positiva en $(\overline{X}, \mathcal{M})$ y además $\nu \prec\prec \mu$.

Habiéndose enunciado el Teorema de Radon-Nikodym se extenderá el concepto de esperanza condicional de la siguiente manera.

Sea (Ω, ℓ, P) un espacio de probabilidad y sea $D \subset \ell$ una σ-álgebra. Sea P_D la medida inducida de P sobre D, es decir, $P_D(A) = P(A)$ para $A \in D$. Sea X una variable aleatoria definida en (Ω, ℓ, P) tal que $E\{X\}$ existe. Entonces para cada $A \in D$ defínase:

$$Q_X(A) = \int_A X dP = \int_\Omega X I_A dP$$

Es claro que $Q_X(A)$ es una medida con signo finita sobre D tal que $Q_X(A) = 0$ para cada $A \in D$ que cumpla que $P_D(A) = 0$, es decir, $Q_X \prec\prec P_D$ y por tanto, en vista del teorema de Radon-Nikodym existe una función D-medible definida sobre Ω, la cual denotaremos como $E\{X \mid D\}$, que cumple con la relación:

$$\begin{aligned}\int_A E\{X \mid D\}\, dP_D &= Q_X(A) \\ &= \int_A X dP\end{aligned}$$

para toda $A \in D$.

Definición 1.1.5 *La función D medible asi definida $E\{X \mid D\}$ es llamada la Esperanza Condicional de la variable aleatoria X dada la σálgebra D. Aquí, $E\{X \mid D\}$ esta definida de manera única excepto para conjuntos D medibles de P_D medida cero.*

Nótese que hasta el momento se han trabajado la probabilidad y esperanza condicional dado un evento bajo el supuesto de que éste tiene una probabilidad positiva. Sin embargo, si nos quedasemos con esta definición se restringuiría el espacio de eventos en una gran proporción. Por tanto, se buscará definir la probabilidad y esperanza condicional de tal manera que se pueda condicionar sobre cualquier evento. Para tal efecto, sea X una variable aleatoria tal que,

$$X : (\Omega, \ell, P) \rightarrow (\Re, B(\Re))$$

Defínanse sobre $(\Re, B(\Re))$ las siguientes medidas para $B \in B(\Re)$ y $A \in \ell$:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_A(B) &= P\left\{A \cap X^{-1}(B)\right\} \\ \hat{P}(B) &= P\left\{X^{-1}(B)\right\}\end{aligned}$$

Claramente, $\hat{Q}_A(B) \prec\prec \hat{P}(B)$.

Por el Teorema de Radon-Nikodym se sabe que existe $\psi(x)$ Borel medible tal que,

$$\hat{Q}_A(B) = \int_B \psi(x)\, \hat{P}(dx) \quad \text{para } B \in B(\Re)$$

Esta función es única en el sentido de que cualquier otra ψ' que satisfaga la igualdad anterior cumple que $\psi = \psi'$ (c.s.)

Definición 1.1.6 *Sea $X : (\Omega, \ell, P) \rightarrow (\Re, B(\Re))$ una variable aleatoria. Entonces la probabilidad condicional $P\{A \mid X = x\}$ con $A \in \ell$ es definida como una función Borel medible que satisface la igualdad :*

$$P\left\{A \cap X^{-1}(B)\right\} = \int_B P\{A \mid X = x\}\ \hat{P}(dx) \quad \textit{para todo } B \in B(\Re)$$

donde

$$\hat{P}(B) = P\left\{X^{-1}(B)\right\}$$

Observaciones:

1. $\hat{P}(\cdot) : (\Re, B(\Re)) \rightarrow \Re$ recibe el nombre de probabilidad inducida de la variable aleatoria X.

2. La definición dada de $P\{A \mid X = x\}$ esta en términos de una medida $(\hat{P})$ sobre $(\Re, B(\Re))$. Sin embargo, en algunas ocasiones es necesario trabajar con la probabilidad condicional como una variable aleatoria en (Ω, ℓ, P). Para tal efecto, nótese que por el Teorema de Cambio de Variable en la Integral de Lebesgue se cumple que,

$$\int_B \psi(x)\ \hat{P}(dx) = \int_{X^{-1}(B)} \psi \circ X\ dP \quad \text{para } B \in B(\Re)$$

donde

$$\psi(x) = P\{A \mid X = x\}$$

Por tanto, lo más natural sería definir $P\{A \mid X\}$ como $\psi \circ X$.

Definición 1.1.7 *Sea $X : (\Omega, \ell, P) \rightarrow (\Re, B(\Re))$ una variable aleatoria. Entonces la probabilidad condicional de $A \in \ell$ dado X se define como culaquier variable aleatoria en Ω, $\sigma(X)$-medible tal que,*

$$P\left\{A \cap X^{-1}(B)\right\} = \int_{X^{-1}(B)} P\{A \mid X\}\ dP \ \textit{para todo } B \in B(\Re)$$

Para definir el concepto de esperanza condicional considerense a X y Y dos variables aleatorias en (Ω, ℓ, P) y definanse las siguientes dos medidas sobre $(\Re, B(\Re))$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(B) &= \int_{X^{-1}(B)} Y \, dP \\ \hat{P}(B) &= P\left\{X^{-1}(B)\right\} \end{aligned}$$

para $B \in B(\Re)$

Asúmase $E\{| Y |\} < \infty$ $(\Rightarrow | \hat{Q}(B) | < \infty)$.

Claramente $\tilde{Q}(B) \prec\prec \hat{P}(B)$ para todo $B \in B(\Re)$. Por tanto, por el Teorema de Radon-Nikodym, existe una función $\phi(x)$ Borel medible tal que,

$$\tilde{Q}(B) = \int_B \phi(x) \, \hat{P}(dx) \quad \text{para todo } B \in B(\Re)$$

De esta manera se da la siguiente definición:

Definición 1.1.8 *Sean X y Y dos variables aleatorias en (Ω, ℓ, P) tal que $E\{| Y |\} < \infty$. Entonces, se define la esperanza condicional de Y dado $X = x$ ($E\{Y \mid X = x\}$), como cualquier función Borel medible que satisface la siguiente igualdad:*

$$\int_B E\{Y \mid X = x\} \, d\hat{P}(x) = \int_{X^{-1}(B)} Y(\omega) \, dP\{\omega\}$$

con $B \in B(\Re)$

De manera análoga a la probabilidad condicional, la esperanza condicional puede ser definida como variable aleatoria de (Ω, ℓ, P) componiendosele con X o de manera más directa se da la siguiente definición:

Definición 1.1.9 *Sean X y Y dos variables aleatorias en (Ω, ℓ, P) tal que $E\{| Y |\} < \infty$. Entonces, se define la esperanza condicional de Y dado X ($E\{Y \mid X = x\}$), como cualquier función $\sigma(X)$-medible que satisface la siguiente igualdad:*

$$\int_A E\{Y \mid X\}\ dP = \int_A Y\ dP$$

$$\text{con } A \in \sigma(X)$$

Propiedades Elementales

Proposición 1.1.3 *Sea X una variable aleatoria definida sobre (Ω, ℓ, P) tal que $E\{X\}$ existe y sea $D \subset \ell$ una σ-álgebra.*

(a) Sea X D medible. Entonces $E\{X \mid D\} = X\ (P_D)$ c.s.

(b) Sea $X = c(P)$ c.s., donde c se una constante. Entonces $E\{X \mid D\} = c(P_D)$ c.s.

(c) Sea $X \geq 0\ (P)$ c.s.. Entonces $E\{X \mid D\} \geq 0\ (P_D)$ c.s.

(d) Sea Y otra variable aleatoria en (Ω, F, P) tal que $E\{Y\}$ existe. Sean $a, b \in \Re$. Entonces,

$$E\{aX + bY \mid D\} = aE\{X \mid D\} + bE\{Y \mid D\}\ \ (P_D)\ \text{c.s.}$$

(e) Si $X \leq Y$ entonces $E\{X \mid D\} \leq E\{Y \mid D\}$

Demostración:

La demostración es inmediata si se observa que todo se reduce a probar la propiedad correspondiente para cada $E \in D$. Por ejemplo:

$$X \geq 0 \Longrightarrow \int_A X dP \geq 0 \quad \forall A \in D$$

pero,

$$\int_A E\{X \mid D\}\, dP_D = \int_A X dP \geq 0 \quad \forall A \in D$$

y esto implica que:

$$E\{X \mid D\} \geq 0$$

Proposición 1.1.4 Teorema de Convergencia Monótona Condicional
Sea $\{X_n\}$ una sucesión no decreciente de variables aleatorias no negativas en (Ω, ℓ, P) tales que convergen casi seguramente en Ω a una variable aleatoria X. Suponga que $E\{X\}$ existe. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} E\{X_n \mid D\} \\ &= E\{X \mid D\} \end{aligned}$$

Demostración

Ante todo, por el inciso (e) se tiene que:

$$E\{X_n \mid D\} \leq E\{X_{n+1} \mid D\} \leq E\{X \mid D\}$$

Por tanto, para cada $w \in \Omega$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} E\{X_n \mid D\}(w) = Y(w) \leq E\{X \mid D\}$$

Como $E\{X_n \mid D\}$ son D-medibles, el limite puntual $Y(w)$ es también D-medible. Además por el Teorema de Convergencia Monótona se tiene que para cada $A \in D$

$$\int_A E\{X_n \mid D\}\, dP_D \longrightarrow \int_A Y dP_D$$

y

$$\int_A X_n dP \longrightarrow \int_A X dP$$

Además,

$$\int_A E\{X_n \mid D\} = \int_A X_n dP \quad \forall A \in D$$

Por tanto,

$$\int_A Y dP_D = \int_A X dP \quad \forall A \in D$$

Por lo que,

$$Y = E\{X \mid D\}\ (P_D)\, c.s.$$

Proposición 1.1.5 *Sean X y Y dos variables aleatorias tales que $E\{XY\}$ y $E\{X\}$ existen. Supongamos que X es D-medible. Entonces,*

$$E\{XY \mid D\} = XE\{Y \mid D\} \ (P_D) \ c.s.$$

Demostración

Se demostrará en primera instancia para funciones indicadoras. Sea $X = \chi_F$, donde $F \in D$. Entonces para todo $A \in D$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_A E\{\chi_F Y \mid D\}\, dP_D &= \int_A \chi_F Y dP_D \\
&= \int_{A\cap F} Y dP_D \\
&= \int_{A\cap F} E\{Y \mid D\}\, dP_D \\
&= \int_A \chi_F E\{Y \mid D\}\, dP_D
\end{aligned}$$

Dado que cualquier función simple D-medible se puede escribir como una combinación lineal finita de funciones indicadoras de conjuntos D-medibles y siendo la esperanza un operador lineal entonces la proposición también se cumple para funciones simples.

Ahora supongase que $X \geq 0$, $Y \geq 0$ *c.s.* Entonces existe una sucesión $\{X_n\}$ no decreciente de funciones simples D-medibles tal que $0 \leq X_n \uparrow X$ (P) *c.s.* Ahora, si formamos la sucesión $\{X_nY\}$ es evidente que $0 \leq X_nY \uparrow XY$ *c.s.* (P), de donde utilizando el teorema de convergencia monótona se concluye que:

$$\begin{aligned}
E\{XY \mid D\} &= \lim_{n\to\infty} E\{X_nY \mid D\} \\
&= \lim_{n\to\infty} X_n E\{Y \mid D\} \\
&= XE\{Y \mid D\}
\end{aligned}$$

Finalmente para demostrar que es válido para X y Y v.a. cualesquiera se realiza la siguiente igualdad: $X = X^+ - X^-$ y $Y^+ - Y^-$ y se se utiliza la linealidad de la esperanza condicional. □

Corolario 1.1.2 *Sean D_1,D_2 dos subσ-álgebras de ℓ tales $D_1 \subset D_2$. Sean X y Y variables aleatorias tales que $E\{XY\}$ y $E\{Y\}$ existen y X es D_2-medible. Entonces,*

$$E\{XY \mid D_1\} = E\{[XE\{Y \mid D_2\}] \mid D_1\} \text{ c.s. } (P_D)$$

Demostración

Sean P_{D_1} y P_{D_2} las restricciones de P en D_1 y D_2, respectivamente. Entonces para $A \in D_1$

$$\begin{aligned} \int_A E\{[XE\{Y \mid D_2\}] \mid D_1\}\, dP_{D_1} &= \int_A XE\{Y \mid D_2\}\, dP_{D_2} \\ &= \int_A E\{XY \mid D_2\}\, dP_{D_2} \\ &= \int_A XY dP \\ &= \int_A E\{XY \mid D_1\}\, dP_{D_1} \end{aligned}$$

Nótese que $E\{XY \mid D_1\}$ es D_1-medible y por tanto D_2-medible. □

Corolario 1.1.3 *Sea $D_1 \subset D_2 \subset \ell$ dos subσ-álgebras. Si $E\{Y\}$ existe, entonces*

$$\begin{aligned} E\{Y \mid D_1\} &= E\{E\{Y \mid D_1\} \mid D_2\} \\ &= E\{E\{Y \mid D_2\} \mid D_1\} \text{ c.s. } (P_{D_1}) \end{aligned}$$

Demostración

De la observación del corolario 1 se sabe que $E\{XY \mid D_1\}$ es D_2 y D_1 medible y por tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} E\{E\{XY \mid D_1\} \mid D_2\} &= E\{XY \mid D_1\} \\ &= E\{[XE\{Y \mid D_2\}] \mid D_1\} \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Ahora simplemente tomese $X = 1$ *c.s.* para obtener el resultado.

Lema 1.1.1 *Sea (Ω, ℓ, P) un espacio de probabilidad y sean $F, G \subset \ell$ σ-álgebras tales que $F \subset G$ y $E\{X \mid G\}$ es F-medible. Entonces, se cumple que:*

$$E\{X \mid F\} = E\{X \mid G\}$$

Demostración

$$\begin{aligned} E\{X \mid F\} &= E\{E\{X \mid G\} \mid F\} \\ &= E\{X \mid G\} \end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.6 *Sea $D \subset \ell$ una σ-álgebra y sea X una variable aleatoria tal que $E\{X\}$ existe y $\sigma(X)$ y D son independientes. Entonces,*

$$E\{X \mid D\} = E\{X\} \ (P_D) \text{ c.s.}$$

Demostración

Dado que D y $\sigma(X)$ son independientes, las variables aleatorias χ_A y X son independientes para cada $A \in D$. Por tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_A E\{X \mid D\}\, dP_D &= \int_A X dP \\ &= \int_\Omega \chi_A X dP \\ &= E\{\chi_A X\} \\ &= E\{\chi_A\}\, E\{X\} \\ &= P(A)\, E\{X\} \\ &= \int_A E\{X\}\, dP \end{aligned}$$

de tal manera que $E\{X \mid D\} = E\{X\}$ c.s.

Observación

De esta proposición se sigue que, si X y Y son variables aleatorias independientes, $E\{X \mid Y\} = E\{X\}$ c.s.

La Desigualdad de Jensen

Otra importante propiedad de Esperanza Condicional es la desigualdad de Jensen. Para poder demostrar la desigualdad de Jensen se hará uso de la siguiente lema.

Lema

Sea g una función definida sobre $\Re$ que es continua y convexa. Entonces,

$$g(x) - g(y) \geq k(y)(x - y) \text{ para } x,\ y \in \Re,\ x < y$$

donde, para $y \in \Re$ fija:

$$k(y) = \lim_{x \uparrow y} h(x)$$

y

$$h(x) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$$

Demostración

Puesto que $g(x)$ es una función convexa y continua se sabe que para $0 < \alpha < 1$ y $x,y \in \Re$ se cumple:

$$g(\alpha\, x + (1 - \alpha)\, y) \leq \alpha\, g(x) + (1 - \alpha)\, g(y)$$

Hagase $z = \alpha\, x + (1 - \alpha)\, y$. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{z - y}{x - y} \\ 1 - \alpha &= \frac{x - z}{x - y} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g(z) \leq \frac{z - y}{x - y} g(x) + \frac{x - z}{x - y} g(y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{z-y}{x-y}g(x) - \frac{z-x}{x-y}g(y) \\
&= \frac{z-y}{x-y}g(x) - \frac{z-x+y-y}{x-y}g(y) \\
&= \frac{z-y}{x-y}g(x) - \frac{z-y}{x-y}g(y) + \frac{x-y}{x-y}g(y) \\
&= \frac{z-y}{x-y}\{g(x)-g(y)\} + g(y)
\end{aligned}
$$

De donde,

$$g(z) - g(y) \le \frac{z-y}{x-y}\ \{g(x)-g(y)\}$$

o sea,

$$\frac{g(z)-g(y)}{z-y} \ge \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

De este hecho se desprende que para y fija, $h(x)$ cumple con:

$$h(x) \le h(z) \text{ si } x < z$$

Es decir, $h(x)$ es una función no decreciente que, además esta acotada superiormente, por lo cual converge cuando $x \uparrow y$ al supremo de $\{h(x) \mid x < y\}$. Denominemos a este supremo $k(y)$. Para este supremo se cumple que:

$$k(y) \ge \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

que es equivalente a

$$(x-y)k(y) \le g(x) - g(y)$$

por ser $(x-y) < 0$. □

Proposición 1.1.7 *Sea (Ω, ℓ, P) un espacio de probabilidad tal que $E\{X\}$ existe. Sea g una función continua convexa sobre $\Re$ tal que $E\{g(X)\}$ existe. Sea $D \subset \ell$ una σ-álgebra. Entonces*

$$g\left(E\{X \mid D\}\right) \le E\{g(X) \mid D\} \quad \text{c.s.}$$

Demostración

Aplicando el lema anterior reemplazando a x por X y a y por $E\{X \mid D\}$ se tiene:

$$g(X) - g(E\{X \mid D\} \geq k(E\{X \mid D\})(X - E\{X \mid D\}) \;\; c.s.$$

Dado que g es una función continua y k es el supremo de funciones D-medibles se sabe que $g(E\{X \mid D\})$ y $k(E\{X \mid D\})$ son funciones D-medibles. Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned} E\{g(X) \mid D\} - g(E\{X \mid D\}) &= E\{[g(X) - g(E\{X \mid D\})] \mid D\} \\ &\geq E\{k(E\{X \mid D\})(X - E\{X \mid D\}) \mid D\} \\ &= k(E\{X \mid D\})\, E\{(X - E\{X \mid D\}) \mid D\} \\ &= 0 \;\; c.s. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.1.4 *Si g es convexa y $E\{X\}$ y $E\{g(X)\}$ existen, entonces*

$$g(E\{X\}) \leq E\{g(X)\}$$

Demostración

Tómese $D = \{\emptyset, \Omega\}$. Entonces para todo A que se encuentre en los boreleanos en $\Re$ se cumple que:

$$\begin{aligned} P\{X^{-1}(A) \cap D\} &= \begin{cases} P\{X^{-1}(A) \cap \emptyset\} & \text{si } D = \emptyset \\ P\{X^{-1}(A) \cap \Omega\} & \text{si } D = \Omega \end{cases} \\ &= \begin{cases} P\{\emptyset\} & \text{si } D = \emptyset \\ P\{X^{-1}(A)\} & \text{si } D = \Omega \end{cases} \\ &= \begin{cases} P\{X^{-1}(A)\}\, P\{\emptyset\} & \text{si } D = \emptyset \\ P\{X^{-1}(A)\}\, P\{\Omega\} & \text{si } D = \Omega \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, X y D son independientes y por tanto, se cumple que $E\{X \mid D\} = E\{X\}$ $c.s.$ y que $E\{g(X) \mid D\} = E\{g(X)\}$ $c.s.$ de donde se concluye de inmediato utilizando la desigualdad de Jensen. □

Corolario 1.1.5 *Sea $p \geq 1$, y supóngase que $E\{(| X |)^p\} < \infty$. Entonces,*

$$|E\{X \mid D\}|^p \leq E\{|X|^p \mid D\} \;\; c.s.$$

Demostración

Simplemente tómese $g(x) = |x|^p$ □

1.2 Probabilidad Condicional

Sea (Ω, ℓ, P) un espacio de probabilidad, y sea $D \subset \ell$ una subσ-álgebra. Sea $A \in \ell$. Entonces, la función indicadora χ_A es una función simple ℓ-medible y por tanto $E\{\chi_A\}$ esta bien definida.

Definición 1.2.1 *La probabilidad condicional $P\{A \mid D\}$ de un evento $A \in \ell$, dado D, esta definido por*

$$P\{A \mid D\} = E\{\chi_A \mid D\}$$

Observación

Para cada $C \in D$ se cumple que:

$$\int_C P\{A \mid D\}\, dP_D = \int_C \chi_A dP = P(A \cap C)$$

Nótese que $P(A \mid D)$ es una función D-medible que esta determinada de manera ùnica excepto por conjuntos de medida cero. Además es relativamente sencillo verificar que se cumple:

a) $\leq P\{A \mid D\} \leq 1$ $c.s.$ y que $P\{\Omega \mid D\} = 1$ $c.s.$

b) Si $A_1, A_2, \ldots$ son conjuntos disjuntos en ℓ, entonces

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid D\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n \mid D\} \;\; c.s.(*)$$

Debe enfatizarse que la ecuación (*) se satisface tán sólo casi seguramente y que consecuentemente la probabilidad condicional $P\{A \mid D\}(\omega)$ no se le puede considerar como una medida de A dado $\omega \in \Omega$ fijo. Uno podría suponer que excepto para un conjunto $\mathcal{N}$ de medida cero, $P\{A \mid D\}(\omega)$ sería una medida para $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$. Sin embargo, este no es el caso en general por la siguiente razón. Sea $N(A_1, A_2, \ldots)$ el conjunto de los puntos muestrales $\omega \in \Omega$ tales que (*) no se cumple para estos $A_1, A_2, \ldots$. Entonces, el conjunto $\mathcal{N}$ se puede expresar como

$$\mathcal{N} = \bigcup N(A_1, A_2, \ldots)$$

donde la unión es tomada sobre todos los $A_1, A_2, \ldots$ en ℓ. Esta unión es de hecho no numerable por lo que, la medida de probabilidad de $\mathcal{N}$ puede no ser cero.

Sin embargo, sería muy conveniente que la probabilidad condicional $P\{\cdot \mid D\}(\omega)$ fuese una medida para cada $\omega \in \Omega$, ya que, el cálculo de $E\{X \mid D\}$ podría expresarse como,

$$E\{X \mid D\} = \int_{\Omega} X(\omega)\, P\{d\omega \mid D\} \quad c.s.$$

De esta manera se introduce la siguiente definición.

Definición 1.2.2 *Una función $\hat{P}$ definida sobre $\Omega \times \ell$ es llamada la función de probabilidad condicional regular, dado D, si satisface las siguientes condiciones:*

(i) Para cada ω fija, la función de conjuntos $\hat{P}\{\omega, \cdot\}$ definida sobre ℓ es una medida de probabilidad sobre ℓ.

(ii) Para cada $A \in \ell$ fijo, la función $\hat{P}\{\cdot, A\}$ es una función D-medible sobre Ω

(iii) Para cada $A \in \ell$ y $C \in D$ se mantiene la relación:

$$\int_C \hat{P}\{\omega, A\}\, dP_D(\omega) = P\{A \cap C\}$$

Comentario

Nótese que de la observación y definición dada con anterioridad es claro que no siempre existe la probabilidad condicional regular.

Distribución de Probabilidad Condicional

Sea (Ω, ℓ, P) un espacio de probabilidad y sea $D \subset \ell$ una σ-álgebra. Sea X una variable aleatoria definida sobre Ω.

Definición 1.2.3 *Una función $\hat{P}_X$ definida sobre $\Omega \times \mathcal{B}$ se dice que es una distribución condicional regular de X, dado D, si satisface las siguientes condiciones:*

(i) Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, la función $\hat{P}_X\{\omega, \cdot\}$ definida sobre $\mathcal{B}$ es una medida de probabilidad.

(ii) Para cada $B \in \mathcal{B}$ fijo, la función $\hat{P}_X\{\cdot, B\}$ es una función sobre Ω D-medible.

(iii) Para cada $B \in \mathcal{B}$ y $A \in D$, se mantiene la relación

$$\int_A \hat{P}_X\{\omega, X^{-1}(B)\}\, dP_D(\omega) = P\{A \cap X^{-1}(B)\}$$

Observación:

En particular, si la función regular de probabilidad condicional $\hat{P}$, dado D existe, se tiene que:

$$\hat{P}_X\ \{\omega, B\} = \hat{P}\ \{\omega, X^{-1}(B)\}\ \ c.s.$$

Definición 1.2.4 *Con la misma notación de la definición anterior, hagase*

$$F_X\ \{x \mid D\} = F_X\ \{x \mid D\}\ (\omega) = \hat{P}_X(\omega, (-\infty, x])\ \ c.s.\ \ con\ x \in \Re$$

La función F_X definida asi sobre $\Re \times \Omega$ es llamada la función de distribución condicional de X, dado D.

Observación

Una función F_X definida sobre $\Re \times \Omega$ es una función de distribución condicional de X, dado D, si satisface las siguientes condiciones:

(i) Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, la función $F_X\ \{\cdot \mid D\}$ es una función de distribución en $\Re$.

(ii) Para cada $x \in \Re$ fijo, la función $F_X\ \{x \mid D\}\ (\cdot)$ es una función D-medible sobre Ω.

(iii) Para cada $x \in \Re$ y $A \in D$, la relación

$$\int_A F_X\ \{x \mid D\}\ (\omega)\, dP_D\ (\omega) = P\{A \cap X^{-1}(-\infty, x]\}$$

se mantiene.

1.3 Teorema $\Pi - \lambda$

Definición 1.3.1 *Sea Ω un conjunto distinto del vacio y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω. Entonces, se dice que $\mathcal{A}$ es un Π sistema si es cerrada bajo intersecciones finitas y contiene a Ω. Es decir, si cumple con la condición:*

$$C \cap D \in \mathcal{A} \ \forall \ C, D \in \mathcal{A}$$

Definición 1.3.2 *Sea Ω un conjunto distinto del vacio y sea $\mathcal{L}$ una familia de subconjuntos de Ω. Entonces, decimos que $\mathcal{L}$ es un λ sistema si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\Omega \in \mathcal{L}$.

ii) Si $C, D \in \mathcal{L}$ *y* $C \subset D \implies D \setminus C \in \mathcal{L}$.

iii) Si $C_n \in \mathcal{L}$ *y* $C_n \uparrow C \implies C \in \mathcal{L}$.

Teorema 1.3.1 *Si $\mathcal{P}$ es un Π sistema y $\mathcal{G}$ es un λ sistema tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$. Entonces, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}$*

Demostración

La idea central de la demostración se fundamenta en demostrar la siguiente relación:

$$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}$$

donde:

$L(\mathcal{P})$ es el λ sistema generado por $\mathcal{P}$

$\sigma(\mathcal{P})$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{P}$

La primer contención de derecha a izquierda ($L(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}$) es cierta por hipótesis, ya que, por definición $L(\mathcal{P})$ es el λ sistema más pequeño que contiene a $\mathcal{P}$ y por hipótesis $\mathcal{G}$ es un λ sistema que contiene a $\mathcal{P}$, por tanto, $\mathcal{G} \supset \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Por tanto, básicamente la demostración se concreta a demostrar que:

$$L(\mathcal{P}) \supset \sigma(\mathcal{P})$$

Para lo cual bastaría demostrar que $L(\mathcal{P})$ es una σ-álgebra, ya que, $\sigma(\mathcal{P})$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{P}$.

Para demostrar que $L(\mathcal{P})$ es una σ-álgebra basta demostrar que $L(\mathcal{P})$ es cerrada bajo intersecciones finitas.

Sea $R_A = \{B \in \Omega \mid A \cap B \in L(\mathcal{P})\}$ para $A \in \mathcal{P}$

Afirmación

Si $A \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}_A$ es un λ sistema.

Demostración

Por demostrar que:

i) $\Omega \in R_A$.

ii) $D, C \in R_A \Longrightarrow D \setminus C \in R_A$.

iii) Si $E_j \subset E_{j+1} con E_j \in R_A$. Entonces

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \lim_{n\to\infty} E_n = \hat{A} \in R_A$$

Demostración de cada punto:

i) $\Omega \in R_A \Longrightarrow A \in L(\mathcal{P})$, lo cual es cierto por que $A \in \mathcal{P}$.

ii) Por hipótesis sabemos que:

$$C \cap A \in L(\mathcal{P})$$
$$D \cap A \in L(\mathcal{P})$$
$$(D \cap A) \supset (C \cap A)$$

Por tanto, $(D \cap A) \setminus (C \cap A) \in L(\mathcal{P})$

Pero por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
(D \cap A) \setminus (C \cap A) &= (D \cap A) \cap (C \cap A)^c \\
&= D \cap A \cap (C^c \cup A^c) \\
&= (D \cap A \cap C^c) \cup (D \cap A \cap A^c) \\
&= D \cap A \cap C^c \\
&= (D \setminus C) \cap A
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$(D \setminus C) \cap A \in L(\mathcal{P})$$

iii) Puesto que $E_j \in R_A \Longrightarrow E_j \cap A \in L(\mathcal{P})$ por lo que se cumple entonces que:

$$F_j = E_j \cap A \uparrow \hat{A} \cap A \in L(\mathcal{P})$$

Por tanto,

$$\hat{A} \in R_A$$

Además, $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_A$ ($A \in \mathcal{P}$). Luego entonces, se tiene que $R_A \supset L(\mathcal{P})$, es decir, se tiene que si $B \in L(\mathcal{P}) \Longrightarrow B \cap A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ con $A \in \mathcal{P}$. O de otra manera, esta expresión nos esta diciendo que:

$$\text{si } B \in L(\mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{R}_B \supset \mathcal{P}$$

Por tanto,

$$B \cap A \in L(\mathcal{P}) \text{ con } B, A \in L(\mathcal{P})$$

□

El teorema que se demostró con anterioridad es uno de los teoremas denominados de la clase monótona y es conocido como el Teorema de Dynkin. Estos teoremas se encuentran dentro de los resultados más útiles en Teoría de la Medida y sirven para extender ciertas relaciones que son fácilmente verificables por una clase especial de conjuntos o funciones a una clase mayor o más grande. A continuación se enunciarán otras dos versiones del teorema existentes de clases monótonas, de los cuales sólo se demostrará el segundo, ya que, será esta versión, la que se utilizará a menudo durante la presente tesis.

Teorema 1.3.2 *Sea $\mathcal{F}_1$ un álgebra, $\mathcal{F}$ la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}_1$ y C una clase monótona de conjuntos que contiene a $\mathcal{F}_1$. Entonces $C \supset \mathcal{F}$.*

Teorema 1.3.3 *Sea Ω un espacio métrico separable, $\mathcal{A}$ un Π sistema y $\mathcal{H}$ una colección de funciones tales que cumplen con las siguientes condiciones:*

1) Si $B \in \mathcal{A}$. Entonces $\chi_B \in \mathcal{H}$.

2) Si $f, g \in \mathcal{H}$. Entonces $f + g$ y $cf \in \mathcal{H}$ para todo $c \in \Re$.

3) Si $f_n \in \mathcal{H}$ y $0 \leq f_n \uparrow f$. Entonces $f \in \mathcal{H}$.

Entonces, $\mathcal{H}$ contiene a todo el conjunto de funciones $\sigma(\mathcal{A})$-medibles.

Demostración

La idea central consiste en demostrar que $\mathcal{G} = \{B \in \Omega \mid \chi_B \in \mathcal{H}\}$ es un λ-sistema que contiene a $\mathcal{A}$ para después aplicar el teorema de Dynkin y concluir que $\mathcal{G} \supset \sigma(\mathcal{A})$, lo que significaría que todas las funciones indicadoras de conjuntos en $\sigma(A)$ están en $\mathcal{H}$. Ahora bien, puesto que toda función simple se puede escribir como combinación lineal de simples entonces, por (2), toda función simple $\sigma(\mathcal{A})$ medible está en $\mathcal{H}$. Además, como toda función no negativa $\sigma(\mathcal{A})$-medible se puede aproximar por una sucesión no decreciente de funciones simples entonces, por (3), se concluye que todas las funciones no negativas $\sigma(\mathcal{A})$-medibles están en $\mathcal{H}$. Por último, puesto que toda función $\sigma(\mathcal{A})$-medible se puede escribir como la diferencia de su parte positiva y su parte negativa (ambas resultan $\sigma(\mathcal{A})$-medibles no negativas) entonces, por (2), se concluye que toda función $\sigma(\mathcal{A})$-medible esta en $\mathcal{H}$. Se verá que $\mathcal{G}$ es un λ sistema que contiene a $\mathcal{A}$.

Por demostrar que:

i) $\Omega \in \mathcal{G}$

ii) Si $D, E \in \mathcal{G}$ y $D \supset E$. Entonces $D \setminus E \in \mathcal{G}$.

iii) Si $B_n \uparrow B$ con $B_n \in \mathcal{G}$. Entonces $B \in \mathcal{G}$.

iv) $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$.

Demostración de cada punto:

i) Puesto que $\mathcal{A}$ es un Π sistema, se tiene que $\Omega \in \mathcal{A}$ y por tanto, por (1) se tiene que $\chi_\Omega \in \mathcal{H}$.

ii) Basta notar que si $D \supset E \Longrightarrow \chi_{D\setminus E} = \chi_D - \chi_E$, para después aplicar (2).

iii) Basta notar que si $B_{n-1} \subset B_n \subset B_{n+1} \;\; \forall\ n \in N$. Entonces,

$$\chi_{B_{n-1}} \leq \chi_{B_n} \leq \chi_{B_{n+1}} \leq \chi_B$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{n\to\infty} \chi_{B_n} = \chi_B$$

y como por hipótesis, $B \in \mathcal{G}$ para toda $n \in N$ $\{\chi_{B-n}\}_{n\in N}$ es una sucesión creciente de funciones no negativas de $\mathcal{H}$.Por (3) se concluye que $\chi_B \in \mathcal{H}$ y en consecuencia $B \in \mathcal{G}$. □

Capítulo 2

MOVIMIENTO BROWNIANO

2.1 Motivación

Supóngase que una cierta partícula se mueve sobre la recta real y que es igualmente probable que en cada unidad de tiempo (Δt) se mueva una unidad de distancia (Δx) a la derecha o a la izquierda y que cada uno de estos movimientos sea independiente de cualquier otro. ¿ Cuál es la posición de la partícula al tiempo t ?

Para responder a esta pregunta defínase la variable aleatoria X_i como:

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{si el iésimo paso de longitud } \Delta x \text{ fue a la derecha} \\ -1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para esta variable aleatoria X_i se sabe por hipótesis que:

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$$

$$X_i \text{ es independiente de } X_j \text{ para } i \neq j$$

De donde:

$$\begin{aligned} E\{X_i\} &= 0 \\ Var\{X_i\} &= E\{X_i^2\} - (E\{X_i\})^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Si se define X(t) como la posición de la partícula al tiempo t. Entonces

$$X(t) = \Delta x \sum_{i=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_i$$

de donde $X(t)$ es claramente una variable aleatoria (es suma de variables aleatorias), cumpliéndose además que:

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= E\left\{\Delta x \sum_{i=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_i\right\} \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} E\{X_i\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\{X(t)\} &= Var\left\{\Delta x \sum_{i=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_i\right\} \\ &= (\Delta x)^2 \sum_{i=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} Var\{X_i\} \\ &= (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \end{aligned}$$

Una pregunta natural en este momento, sería que forma tomaría $X(t)$ si se acelerara el proceso, es decir, si $\Delta t \to 0$ pensando en que $\Delta x = g(\Delta t)$. Posiblemente, la primer función g(x) que se propondría fuese $g(x) = x$, la identidad, lo cual implicaría que:

$$E\{X(t)\} = 0 \to 0 \text{ si } \Delta t \to 0$$

y que

$$Var\{X(t)\} = (\Delta t)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \to 0 \text{ si } \Delta t \to 0$$

es decir, se tendría un proceso trivial. Por tanto, se tiene que pensar en otra forma funcional de $g(x)$ distinta a la identidad de donde, se nos deja en principio ante una infinidad de posibles elecciones de ésta. Elección que se puede simplificar si se toma algún criterio. Por ejemplo, este criterio pudiese ser que en el limite $X(t)$ adoptase una distribución de probabilidad conocida, es decir, que $X(t)$ convergiese en distribución a una distribución conocida. Bajo este criterio y ante la expresión de $X(t)$ como suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, salta a la vista el Teorema de Limite Central que, como se recordará enuncia lo siguiente:

Teorema 2.1.1 *Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tienen media y varianza común μ, σ^2 respectivamente. Entonces*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una normal estándar cuando $n \to \infty$. Es decir,

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \leq a\right\} \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{a} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$$

cuando $n \to \infty$

Nótese que para el problema particular que nos atañe,

$$\begin{aligned} X(t) &= \Delta x \sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_j \\ &= \Delta x \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}\, \frac{\sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_j - [\frac{t}{\Delta t}]\; E\{X_j\}}{\sqrt{[\frac{t}{\Delta t}]}} \\ &= A\, \frac{\sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_j - [\frac{t}{\Delta t}]\; E\{X_j\}}{\Delta x\,\sqrt{[\frac{t}{\Delta t}]}} \end{aligned}$$

donde:

$$A = (\Delta x)^2 \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_j - [\frac{t}{\Delta t}]\; E\{X_j\}}{\Delta x\,\sqrt{[\frac{t}{\Delta t}]}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

por el Teorema del Limite Central.

Entonces, si ya se tiene convergencia en distribución de uno de los factores a una normal estándar, es lógico buscar que el otro factor, $\Delta x \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}$, de ser posible converja a una constante k que sólo altere los parámetros de la normal estándar. Es decir, se buscaría que:

$$(\Delta x)^2 \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} = g(\Delta t) \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} \rightarrow k$$

$$\text{cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

Por último, se buscaría que k involucre al tiempo (t), involucramiento que puede ser de un sin fin de maneras y de los cuales se adoptará por simplicidad una lineal. Adopción que a sabiendas de que $\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\ \Delta t \rightarrow t$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$ nos orilla en cierto sentido a tomar $g(\Delta t) = \sqrt{\Delta t}$. Decisión que conlleva a que se cumpla

$$\begin{aligned} X(t) &= \Delta x \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} \frac{\sum_{j=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} X_j}{\sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}} \\ &= \sqrt{\Delta t \left[\frac{t}{\Delta t}\right]} \frac{\sum_{j=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} X_j}{\sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}} \rightarrow Y \sim N(0,t) \end{aligned}$$

y si se quisiera tener una mayor libertad en la varianza se podría tomar $g(\Delta t) = c\sqrt{\Delta t}$ con $c > 0$. Con lo que se tendría:

$$\begin{aligned} X(t) &= \Delta x \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} \frac{\sum_{j=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} X_j}{\sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}} \\ &= c\sqrt{\Delta t \left[\frac{t}{\Delta t}\right]} \frac{\sum_{j=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} X_j}{\sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}} \rightarrow U \sim N(0,c^2 t) \end{aligned}$$

En conclusión, se ha llegado a que la posición de la partícula al tiempo t dadas su forma de limite de suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas asi como el criterio de involucrar de una manera lineal al tiempo en los parámetros de su distribución, conlleva a tomar $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$. De tal forma que $X(t) \sim N(0, c^2 t)$. Cabe señalar que el desarrollo dado hasta aquí no es más que una motivación para la definición del Movimiento Browniano.

2.2 Definición

Definición 2.2.1 *Un proceso estocástico real $X = \{X_t \mid t \in [0,T]\}$ definido en (Ω, ℓ, P) es una familia $X_t : \Omega \to \Re$ de variables aleatorias, con indices en $[0,T]$.*

Definición 2.2.2 *Dada $\omega \in \Omega$, " la trayectoria de ω " del proceso estocástico $\{X_t \mid t \in [0,T]\}$ es la aplicación*

$$t \to X_t(\omega) = \omega(t)$$

definida en $[0,T]$ y con valores a $\Re$. Se le denota a veces como $\omega : [0,T] \to \Re$ con $\omega(t) = X_t(\omega)$

Definición 2.2.3 *Se dice que un proceso estocástico es continuo si para P-casi toda $\omega \in \Omega$ se cumple que la trayectoria de ω es continua como función de $[0,T]$ en $\Re$.*

Definición 2.2.4 *Sea $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico continuo definido en (Ω, ℓ, P). Se dice que $\{B(t)\}_{t\in\Re}$ es un Movimiento Browniano definido en Ω que comienza en x_o si para cada $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ y $A \in \Re^n$ se tiene que:*
$P\{(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in A\} = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A) =$

$$\int_A p(t_1, x_1 - x_o)\, p(t_2 - t_1, x_2 - x_1) \ldots p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1})\, d_{x_1} \ldots d_{x_n} \ (*)$$

donde

$$p(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} & si\ t > 0\ y\ x \in \Re \\ 1 & si\ t = 0\ y\ x = 0 \\ 0 & si\ t = 0\ y\ x \neq 0 \end{cases}$$

Cabe hacer notar que en particular cuando el Movimiento Browniano comienza en 0 recibe el nombre de Movimiento Browniano Estándar.

Los Teoremas de Kolmogorov[1] aseguran que existe un proceso con estas características y donde Ω se puede tomar como $C[0,T]$, que es el conjunto de todas las funciones reales y continuas en $[0,T]$, ℓ como la σ-álgebra generada por los cilindros finito dimensionales y P queda determinada por la igualdad (*)

Recuérdese que $H \in C[0,T]$ es un cilindro finito dimensional si existen $t_1,\ldots,t_n \in [0,T]$ y $A_1,\ldots,A_n \in B(\Re)$ tales que:

$$H = \{X_{t_1} \in A_1,\ldots,X_{t_n} \in A_n\}$$

En todo lo que sigue se trabajará en este espacio base (Ω,ℓ,P) y se le llamará espacio de Wiener.

Hay muchas otras maneras de definir el Movimiento Browniano. Aquí sólo se verán algunas de ellas como consecuencias de la definición dada.

A continuación se enunciarán algunas propiedades elementales derivadas de la definición dada. Para tal efecto, se hace notar que F_s denotará a la información acumulada del proceso hasta el tiempo s y se calcula como $F_s = \sigma(B(t) \mid t \leq s)$. Cabe señalar que mas adelante, en la sección 2.4 se ahondará un poco más al respecto.

Propiedades Elementales

Proposición 2.2.1 *Sea $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano Estándar definido en* (Ω,ℓ,P).

(1) Propiedad de Markov.
Para $0 \leq s < t$ y $A \in B(\Re)$ se cumple que:

$$P\{\omega_t \in A \mid F_s\} = \int_A p(t-s, x-\omega_s)\, dx$$

ó

$$E\{f(\omega_t) \mid F_s\} = \int f(x)\, p(t-s, x-\omega_s)\, dx \text{ para toda } f:\Re \to \Re, \text{ Borel medible}$$

[1] Ver Apéndice

En conclusión, se ha llegado a que la posición de la partícula al tiempo t dadas su forma de limite de suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas asi como el criterio de involucrar de una manera lineal al tiempo en los parámetros de su distribución, conlleva a tomar $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$. De tal forma que $X(t) \sim N(0, c^2\, t)$. Cabe señalar que el desarrollo dado hasta aquí no es más que una motivación para la definición del Movimiento Browniano.

2.2 Definición

Definición 2.2.1 *Un proceso estocástico real* $X = \{X_t \mid t \in [0,T]\}$ *definido en* (Ω, ℓ, P) *es una familia* $X_t : \Omega \longrightarrow \Re$ *de variables aleatorias, con indices en* $[0,T]$.

Definición 2.2.2 *Dada* $\omega \in \Omega$, *" la trayectoria de* ω *" del proceso estocástico* $\{X_t \mid t \in [0,T]\}$ *es la aplicación*

$$t \longrightarrow X_t(\omega) = \omega(t)$$

definida en $[0,T]$ *y con valores a* $\Re$. *Se le denota a veces como* $\omega : [0,T] \longrightarrow \Re$ *con* $\omega(t) = X_t(\omega)$

Definición 2.2.3 *Se dice que un proceso estocástico es continuo si para P-casi toda* $\omega \in \Omega$ *se cumple que la trayectoria de* ω *es continua como función de* $[0,T]$ *en* $\Re$.

Definición 2.2.4 *Sea* $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ *un proceso estocástico continuo definido en* (Ω, ℓ, P). *Se dice que* $\{B(t)\}_{t \in \Re}$ *es un Movimiento Browniano definido en* Ω *que comienza en* x_o *si para cada* $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ *y* $A \in \Re^n$ *se tiene que:*
$P\{(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in A\} = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A) =$

$$\int_A p(t_1, x_1 - x_o)\, p(t_2 - t_1, x_2 - x_1) \ldots p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1})\, d_{x_1} \ldots d_{x_n} \ (*)$$

donde

$$p(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} & si\ t > 0\ y\ x \in \Re \\ 1 & si\ t = 0\ y\ x = 0 \\ 0 & si\ t = 0\ y\ x \neq 0 \end{cases}$$

Cabe hacer notar que en particular cuando el Movimiento Browniano comienza en 0 recibe el nombre de Movimiento Browniano Estándar.

Los Teoremas de Kolmogorov[1] aseguran que existe un proceso con estas características y donde Ω se puede tomar como $C[0,T]$, que es el conjunto de todas las funciones reales y continuas en $[0,T]$, ℓ como la σ-álgebra generada por los cilindros finito dimensionales y P queda determinada por la igualdad (*)

Recuérdese que $H \in C[0,T]$ es un cilindro finito dimensional si existen $t_1,\ldots,t_n \in [0,T]$ y $A_1,\ldots,A_n \in B(\Re)$ tales que:

$$H = \{X_{t_1} \in A_1,\ldots,X_{t_n} \in A_n\}$$

En todo lo que sigue se trabajará en este espacio base (Ω,ℓ,P) y se le llamará espacio de Wiener.

Hay muchas otras maneras de definir el Movimiento Browniano. Aquí sólo se verán algunas de ellas como consecuencias de la definición dada.

A continuación se enunciarán algunas propiedades elementales derivadas de la definición dada. Para tal efecto, se hace notar que F_s denotará a la información acumulada del proceso hasta el tiempo s y se calcula como $F_s = \sigma(B(t) \mid t \leq s)$. Cabe señalar que mas adelante, en la sección 2.4 se ahondará un poco más al respecto.

Propiedades Elementales

Proposición 2.2.1 *Sea $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano Estándar definido en* (Ω,ℓ,P).

(1) Propiedad de Markov.

Para $0 \leq s < t$ y $A \in B(\Re)$ se cumple que:

$$P\{\omega_t \in A \mid F_s\} = \int_A p(t-s, x-\omega_s)\, dx$$

ó

$$E\{f(\omega_t) \mid F_s\} = \int f(x)\, p(t-s, x-\omega_s)\, dx \text{ para toda } f:\Re \to \Re, \text{ Borel medible}$$

[1] Ver Apéndice

(2) Para todo $s < t$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $F_s = \sigma(B(t) \mid t \leq s)$ y $(B(t) - B(s))$ tiene distribución $N(0, t-s)$.

(3) Para todo $0 < u \leq s < t$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $B(s) - B(u)$.

(4) $Cov\{B(s), B(t)\} = \min\{s, t\}$.

Demostración

(1):

En efecto: la familia $\{\omega_{s_1} \in A_1, \ldots, \omega_{s_n} \in A_n\}$ con $0 < s_1 < \ldots < s_n < s$ y $A_j \in B(\Re)$ genera a la σ-álgebra F_s y es π-sistema, por lo tanto basta mostrar que se cumple la igualdad

$$P\{\omega_t \in A, \omega_{s_1} \in A_1, \ldots, \omega_{s_n} \in A_n\} = \int_{\{\omega_{s_1} \in A_1, \ldots, \omega_{s_n} \in A_n\}} \int_A p(t-s, x-\omega_s)\, dx\, dP$$

para $s < t$

Para tal efecto, nótese que:

$$P\{\omega_t \in A, \omega_{s_1} \in A_1, \ldots, \omega_{s_n} \in A_n\} =$$

$$\int_{A_1 \times A_2 \times \ldots A_n} p(s_1, x_1) p(s_2 - s_1, x_2 - x_1) \ldots p(s_n - s_{n-1}, x_n - x_{n-1}) p(t - s_n, x - x_n)\, dx\, d\overline{X}$$

donde

$$d\overline{X} = dx_n \ldots dx_1$$

Defínase $f : \Re^{n+1} \to \Re$ como:

$$f(x_1, \ldots, x_n, x) = \prod_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x_j) \int_A p(t-s, y-x)\, dy$$

De donde

$$\begin{aligned} \int_{\{\omega_{s_1} \in A_1, \ldots, \omega_{s_n} \in A_n\}} \int_A p(t-s, x-\omega_s)\, dx\, dP &= \\ E\{f(\omega_{s_1}, \ldots, \omega_{s_n}, \omega_s)\} &= \end{aligned}$$

$$\int f(x_1,\dots,x_n,x)p(s_1,x_1)\ \dots\ p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})p(s-s_n,x-x_n)\,dx\,d\overline{X} =$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}}_{n+1}\prod_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(x_j)$$

$$\times\int_A p(t-s,y-x)dy\ p(s_1,x_1)\dots p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})p(s-s_n,x-x_n)\,dx d\overline{X} =$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}}_{n}\prod_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(x_j)p(s_1,x_1)\dots p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})$$

$$\times\int_{\mathbb{R}}\int_A p(t-s,y-x)p(s-s_n,x-x_n)dydxd\overline{X} =$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}}_{n}\prod_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(x_j)p(s_1,x_1)\dots p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})$$

$$\times\int_A\int_{\mathbb{R}} p(t-s,y-x)p(s-s_n,x-x_ndydxd\overline{X}$$

Es fácil demostrar que:

$$\int_{\mathbb{R}} p(t-s,y-x)\,p(s-s_n,x-x_n)\,dx = p(t-s_n,y-x_n)$$

Por tanto,

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}}_{n}\prod_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(x_j)p(s_1,x_1)\dots p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})$$

$$\times\int_A\int_{\mathbb{R}} p(t-s,y-x)p(s-s_n,x-x_n)dydxd\overline{X} =$$

$$=$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}}_{n}\prod_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(x_j)p(s_1,x_1)\dots p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})$$

$$\times\int_A p(t-s_n,y-x_n)dxd\overline{X} =$$

$$\int_{A_1\times A_2\times\ldots A_n} p(s_1,x_1)p(s_2-s_1,x_2-x_1)\ldots p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})p(t-s_n,x-x_n)dxd\overline{X} =$$

$$P\{\omega_t\in A,\omega_{s_1}\in A_1,\ldots,\omega_{s_n}\in A_n\}$$

(2):

En este caso, nuevamente basta probar la igualdad:

$$P\{\omega_t-\omega_s\in A,\omega_{s_1}\in A_1,\ldots,\omega_{s_n}\in A_n\} =$$
$$\left(\int_A p(t-s,x)\,dx\right) P\{\omega_{s_1}\in A_1,\ldots,\omega_{s_n}\in A_n\}$$

para todo $0<s_1<\ldots s_n<s$ y $A_1,\ldots,A_n\in B(\Re)$

Defínase $f:\Re^{n+2}\to\Re$ como:

$$f(x_1,\ldots,x_n,x,y)=\prod_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(x_j)\,\chi_A(y-x)$$

De donde,

$$\begin{aligned}
P\{\omega_t-\omega_s\in A,\omega_{s_1}\in A_1,\ldots,\omega_{s_n}\in A_n\} &=\\
E\{f(\omega_{s_1},\ldots,\omega_{s_n},\omega_s,\omega_t\} &=\\
\underbrace{\int_{\Re}\cdots\int_{\Re}}_{n+2} f(\overline{X},x,y)p(s_1,x_1)\ldots p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})&\\
\times p(s-s_n,x-x_n)p(t-s,y-x)dydxd\overline{X} &=\\
\int_{A_1}p(s_1,x_1)dx_1\ldots\int_{A_n}p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})dx_n&\\
\times\int_{\Re^2}\chi_A(y-x)p(s-s_n,x-x_n)p(t-s,y-x)dydx &=\\
\int_{A_1\times\ldots A_n}p(s_1,x_1)\ldots p(s_n-s_{n-1},x_n-x_{n-1})dx_n\ldots dx_1&\\
\times\int_{\Re}p(s-s_n,x-x_n)dx\int_{A+x}p(t-s,y-x)dy &=
\end{aligned}$$

$$P\{\omega_{s_1} \in A_1, \ldots, \omega_{s_n} \in A_n\} \left(\int_A p(t-s,x)\,dx \right)$$

donde:

$$\overline{X} = (x_1, \ldots, x_n)$$

Nótese que en particular se cumple que:

$$P\{\omega_t - \omega_s \in A\} = \int_A p(t-s,x)\,dx$$

es decir

$$B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$$

(3): Es consecuencia directa de (2) por ser $B(s) - B(u)$ F_s-medible.

(4):

Primeramente,

$$E\{B(t)\} = 0$$

Sea $s < t$.

$$\begin{aligned}
E\{B(s)\,B(t)\} &= E\left\{B(s)\,B(t) - B(s)^2 + B(s)^2\right\} \\
&= E\{B(s)\,(B(t) - B(s))\} + E\left\{B(s)^2\right\} \\
&= E\{B(s)\}\ E\{B(t) - B(s)\} + s \\
&= s
\end{aligned}$$

□

Gracias a este Teorema podemos entender porque también se dan las siguientes definiciones del Movimiento Browniano.

Definición 2.2.5 *Un proceso estocástico $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ definido en (Ω, ℓ, P) es un Movimiento Browniano que comienza en 0 si cumple con las siguientes condiciones:*

i) $P\{B(0) = 0\} = 1$.

ii) $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ *tiene incrementos estacionarios e independientes.*

iii) Para cada $t > 0$, $B(t) \sim N(0,t)$.

Definición 2.2.6 *Un proceso estocástico $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ se dice que es un movimiento Browniano si cumple con las siguientes condiciones:*

i) Si para $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ con $t_j \in \Re^+$ y $n \in N$ se cumple que:

$$B(t_0), B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

son independientes

ii) Para $s \geq 0$, $t \geq 0$ se cumple que:

$$P\{B(t+s) - B(s) \in A\} = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\,t}\right\} dx$$

iii) Con probabilidad 1, $t \xrightarrow{f} B(t)$ es continua.

Observaciones:

Nótese que en ambas definiciones se pide la condición común de que $B(t)$ sea un proceso estocástico de incrementos independientes. Asi mismo, la condición iii y el hecho de que sea estacionaria (definición 2.2.5) es equivalente a la condición ii (definición 2.2.6).

Movimiento Browniano como un Gaussiano

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico continuo que, forma parte de la familia de los procesos estocásticos gaussianos, procesos que se definirán a continuación.

Definición 2.2.7 *Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\in\Re}$ es llamado un proceso estocástico Gaussiano si para $t_1, t_2, \ldots, t_n$ con $t_j \geq 0$ se cumple que $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ tiene una distribución normal multivariada.*

Observaciones:

i) Una distribución normal multivariada queda determinada por los valores medio y las covarianzas.

ii) Sea $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ un Movimiento Browniano. Entonces para $s < t$ se cumple que:

$$\begin{aligned} Cov\{B(s),B(t)\} &= Cov\{B(s),B(s)+B(t)-B(s)\} \\ &= Cov\{B(s),B(s)\}+Cov\{B(s),B(t)-B(s)\} \\ &= Var\{B(s)\}+0 \text{ (independencia)} \\ &= s \end{aligned}$$

Por la observación anterior también se puede visualizar a un Movimiento Browniano $\{B(t)\}_{t\in Re^+}$ como un proceso estocástico Gaussiano definido en (Ω, ℓ, P) que tiene como caracteristicas:

$$\begin{aligned} E\{B(t)\} &= 0 \\ Cov\{B(s),B(t)\} &= \min\{s,t\} \end{aligned}$$

para $s,t \in \Re^+$

2.3 Más Propiedades del Movimiento Browniano

Proposición 2.3.1 (Relación de Escala)

Sea $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ un Movimiento Browniano definido en el espacio de Wiener. Entonces, para $t > 0$ se cumple que:

$$B(st) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}\, B(s) \quad \textit{para } s \textit{ fija}$$

Demostración

Sea $A \in \ell$

$$\begin{aligned} P\{B(c^2 s) \in A\} &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2c^2 s}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_A \exp\left\{-\frac{x^2}{2c^2 s}\right\} dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s}} \int_A \exp\left\{-\left(\frac{x}{c}\right)^2 \frac{1}{2\,s}\right\} \\
&= \frac{c}{\sqrt{2\,\pi\,s}} \int_{\frac{1}{c}A} \exp\left\{-\frac{u^2}{2\,s}\right\}\, du \\
&= P\left\{B(t) \in \frac{1}{c}\,A\right\} \\
&= P\left\{c\,B(t) \in A\right\}
\end{aligned}
$$

En particular si se toma $c = \sqrt{t}$ se cumple que:

$$P\left\{B(st) \in A\right\} = P\left\{\sqrt{t}\,B(s)\right\}$$

□

Proposición 2.3.2 *Sea (Ω, ℓ, P) un espacio de probabilidad y $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ un Movimiento Browniano. Entonces, la distribución condicional de $B(s)$ dado $B(t) = b$, para $s < t$, es normal con media y varianza dadas por:*

$$
\begin{aligned}
E\left\{B(s) \mid B(t) = b\right\} &= b\,\frac{s}{t} \\
Var\left\{B(s) \mid B(t) = b\right\} &= \frac{s}{t}\,(t-s)
\end{aligned}
$$

Demostración

Ante todo se tiene que:

$$
\begin{aligned}
f_{B(s)|B(t)}\,(x \mid b) &= \frac{f_{B(s),B(t)}\,(x,b)}{f_{B(t)}\,(b)} \\
&= \frac{f_{B(s)}\,(x)\; f_{B(t)-B(s)}\,(b-x)}{f_{B(t)}\,(b)}
\end{aligned}
$$

Ahora se desarrollará la expresión obtenida:

$$
\begin{aligned}
f_{B(s)/B(t)}\,(x \mid b) &= \frac{f_{B(s)}\,(x)\; f_{B(t)-B(s)}\,(b-x)}{f_{B(t)}\,(b)} \\
&= K_1\,\exp\left\{-\frac{x^2}{2\,s} - \frac{(b-x)^2}{2\,(t-s)}\right\}
\end{aligned}
$$

donde:

$$K_1 = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\,\pi\,(t-s)s}}\exp\left\{\frac{b^2}{2\,t}\right\}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}
-\frac{x^2}{2\,s}-\frac{(b-x)^2}{2\,(t-s)} &= \frac{-x^2\,(t-s)-s\,(b-x)^2}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{-x^2\,t+x^2\,s-s\,(b^2-2bx+x^2)}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{-x^2\,t+2bxs-sb^2}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{t\,\left\{-x^2-\frac{sb^2}{t}+2bx\,\frac{s}{t}\right\}}{2\,s\,(t-s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{2\,t} &= \frac{\frac{b^2}{t}\,s\,(t-s)}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{b^2\,\left(\frac{s}{t}\right)\,(t-s)}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{t\,\left\{\frac{b^2\,s}{t^2}\,(t-s)\right\}}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{t\,\left\{b^2\,\frac{s}{t}-b^2\,\frac{s^2}{t^2}\right\}}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{t\,\left\{\frac{b^2 s}{t}-\left(b\,\frac{s}{t}\right)^2\right\}}{2\,s\,(t-s)}
\end{aligned}$$

Conjuntando se tiene que:

$$
\begin{aligned}
-\frac{x^2}{2\,s} - \frac{(b-x)^2}{2\,(t-s)} + \frac{b^2}{2\,t} &= \frac{t\left\{\frac{b^2 s}{t} - \left(b\,\frac{s}{t}\right)^2 + 2bx\,\frac{s}{t} - \frac{sb^2}{t} - x^2\right\}}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{-t\left\{x^2 + \frac{sb^2}{t} - 2bx\,\frac{s}{t} + \left(b\,\frac{s}{t}\right)^2 - \frac{b^2 s}{t}\right\}}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{-t\left\{x^2 - 2bx\,\frac{s}{t} + \left(b\,\frac{s}{t}\right)^2\right\}}{2\,s\,(t-s)} \\
&= \frac{-t\left\{x - b\,\frac{s}{t}\right\}^2}{2\,\frac{s}{t}\,(t-s)}
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
f_{B(s)|B(t)}(x \mid b) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,(t-s)\,\frac{s}{t}}}\exp\left\{-\frac{\left\{x - b\,\frac{s}{t}\right\}^2}{2\,\frac{s}{t}\,(t-s)}\right\}
$$

$\square$

Luego entonces, la distribución condicional de $B(s)$ dado $B(t) = B$ es normal con media y varianza dadas por:

$$
\begin{aligned}
E\{B(s) \mid B(t) = B\} &= B\,\frac{s}{t} \\
Var\{B(s) \mid B(t) = B\} &= \frac{s}{t}\,(t-s)
\end{aligned}
$$

2.4 Otra Forma de la Propiedad de Markov

La propiedad de Markov, es una de las propiedades del Movimiento Browniano más importantes y encierra básicamente la idea de que " si $s \geq 0$, entonces $B(t+s) - B(s)$, $t \geq 0$, es un Movimiento Browniano que es independiente de lo que sucedió antes del tiempo s ". El primer paso para establecerla, será precisar de manera más formal la idea enunciada con anterioridad. Para tal efecto, se definirá lo que se entendenderá por la información acumulada hasta un cierto punto en el tiempo de un Movimiento

Browniano y por el futuro de una cierta variable aleatoria con respecto a un cierto punto en el tiempo.

En primer lugar se definirá la información acumulada del Movimiento Browniano hasta un punto en el tiempo. Para llevarlo a cabo, es necesario recordar que en gran medida la σ-álgebra generada por una variable aleatoria recoge la información de ésta, de tal manera que, es natural definir como

$$F_s^o = \sigma\ (B(r) \mid r \leq s)$$

a la información del Movimiento Browniano hasta el tiempo s. Sin embargo, nótese que si se define de esta manera, la familia $\{F_s^o\}_{s\in\Re+}$ no cumple con la propiedad de ser continua por la derecha. Por tanto, se reemplazará F_s^o por F_s^+ definida como:

$$F_s^+ = \bigcap_{t>s} F_t^o$$

Nótese que $\{F_s^+\}$ cumple con:

$$\begin{aligned} \bigcap_{t>s} F_t^+ &= \bigcap_{t>s}\left(\bigcap_{u>t} F_u^o\right) \\ &= \bigcap_{u>s} F_u^o \\ &= F_s^+ \end{aligned}$$

Es decir, la familia $\{F_s^+\}_{s\in\Re+}$ tiene la propiedad de ser continua por la derecha. La continuidad por la derecha, esta diciendo que para un punto s en el tiempo, es lo mismo conocer la información acumulada hasta s, puede conocerse con la información acumulada hasta t, para toda $t > s$.

Por último, se definirá lo que se entenderá por el futuro de una variable aleatoria con respecto a un punto en el tiempo.

Definición 2.4.1 *Sea $\{B(t)\}_{t\in\Re+}$ el Movimiento Browniano definido en (Ω, ℓ, P). Asi mismo, denótese $B(t)$ como B_t y $B_t(w)$ como w_t para cada ω fija. Entonces, para cada $s \geq 0$ defínase la función de translación $\theta_s : \Omega \to \Omega$ como:*

$$(\theta_s\, \omega)(t) = \omega_{s+t}$$

θ_s es conocida como la transformación de translación del proceso.

Proposición 2.4.1 Propiedad de Markov *Sea Y una variable aleatoria acotada. Entonces, para todo $x \in \Re$ se cumple que*

$$E_x\{Y \circ \theta_s \mid F_s^+\} = E_{B(s)}\{Y\}$$

donde

$E_x\{\cdot\}$ *denota que la se toma la esperanza de un Movimiento Browniano que comienza en x*

Demostración

Se demostrará el resultado para Y de la forma

$$Y = \prod_{m=1}^{n} f_m(\omega(t_m)) \qquad (\alpha)$$

con $0 < t_1 < \ldots < t_n$ y $f_m : \Re \to \Re$ son funciones acotadas y continuas para después extender el resultado utilizando el Teorema de Clases Monótonas.

Sea $0 < h < t_1$, $0 < s_1 < \ldots < s_k \leq s + h$ y sea $A = \{\omega_{s_1} \in A_1, \ldots, \omega_{s_k} \in A_k\}$ donde $A_j \in B(\Re)$con $j = 1, \ldots, k$.

De la definición del Browniano se tiene que:

$$E_x\{Y \circ \theta_s; A\} = \int_{A_1} dx_1 P_{s_1}(x, x_1) \ldots \int_{A_k} dx_k P_{s_k - s_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) \int dy P_{s+h-s_k}(x_k, y)\varphi(y, h)$$

donde

$$\varphi(y, h) = \int dy_1\, P_{t_1 - h}(y, y_1)\, f_1(y_1)\, \ldots \int dy_k\, P_{t_k - t_{k-1}}(y_{k-1}, y_k)\, f_k(y_k)$$

y

$$P_t(a, b) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(b-a)^2}{2t}\right\}$$

Por tanto,

$$E_x\{Y \circ \theta_s; A\} = E\{\varphi(B_{s+h}, h); A\}^{2}$$

Sea

$$\Im = \{B \in \wp \mid E_x\{Y \circ \theta_s; B\} = E\{\varphi(B_{s+h}, h); B\}\}$$

[2] La Esperanza tomada únicamente sobre el conjunto A

y

$$\wp = \{A \mid A = \{\omega_{s_1} \in A_1, \ldots, \omega_{s_k} \in A_k\}\ ,\ A_j \in B(\Re) j = 1, \ldots, k \text{ y } 0 < s_1 < \ldots s_k \leq s + h\}$$

Observese que:

i) $\wp$ es un π-sistema.

ii) $\Im$ es un λ-sistema

iii) $\Im \supset \wp$.

Por lo que, por el Teorema $\pi - \lambda$, se cumple

$$\Im \supset \sigma(\wp) = F^{o}_{s+h} \supset F^{+}_{s}$$

Luego entonces para todo $A \in F^{+}_{s}$,

$$E_x \{Y \circ \theta_s; A\} = E\{\varphi(B_{s+h}, h); A\}$$

Ahora bien, si f es acotada y continua entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$x \to \int dy\, P_t(x,y)\, f(y) \text{ es continua}$$

Ahora puesto que,

$$\varphi(y,h) = \prod_{j=2}^{k} \int dy_k\, P_{t_j - t_{j-1}}(y_{j-1}, y_j) f_j(y_j) \int dy_1\, P_{t_1 - h}(y, y_1) f_1(y_1)$$

se sigue que $\varphi(y,h)$ es continua. Por tanto,

$$\begin{aligned} E\{\varphi(B_s, 0); A\} &= \lim_{h \to 0} E\{\varphi(B_{s+h}, h); A\} \\ &= \lim_{h \to 0} E_x \{Y \circ \theta_s; A\} \\ &= E_x \{Y \circ \theta_s; A\} \text{ para } A \in F^{+}_{s}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E\{Y \circ \theta_s; A\} = E\{\varphi(B_{s+0}, 0); A\} \text{ con } A \in F^{+}_{s} \quad (*)$$

Sean:

$$\hat{\Im} = \{Y \text{ acotadas } \mid E\{Y \circ \theta_s; A\} = E\{\varphi(B_{s+0}, 0); A\}\}$$

$$\hat{\wp} = \left\{\omega \in \Omega \mid \omega_{s_j} \in A_j \quad \text{con } A_j \text{ abierto para } j \in N \right\}$$

Se busacará demostrar que $\hat{\Im} \supset \sigma(\hat{\wp}) = \ell$ utilizando el Teorema de Clases Monótonas (TCM).

Por propiedades elementales de Esperanza se cumplen las condiciones ii) y iii) del TCM. Por tanto, basta demostrar que si

$C \in \hat{\wp}$ entonces $\chi_C \in \hat{\Im}$.

Sea $C \in \hat{\wp}$. Por tanto, $C = \left\{\omega \in \Omega \mid \omega_{t_j} \in A_j \quad \text{para } A_j \text{ abierto y } j = 1, \ldots, r\right\}$ luego entonces,

$$\chi_C = \prod_{j=1}^{r} \chi_{A_j}$$

Claramente χ_C es acotada. Por tanto, basta demostrar que:

$$E\left\{\chi_C \circ \theta_s; A\right\} = E\left\{\varphi(B_s, 0); A\right\} \quad (*) \quad \text{para } A \in F_s^+$$

Para tal efecto, se demostrará que cada χ_{A_j} es el limite de una sucesión no decreciente de funciones continuas y acotadas, es decir, se demostrará que:

$$\chi_{A_j} = \lim_{k\to\infty} f_k^j(x) \quad (***)$$

donde

$$0 \leq f_k^j(x) \leq f_{k+1}^j(x)$$

f_k^j son acotadas y continuas para toda $k \in N$ y $j = 1, \ldots, r$.

De tal manera que:

$$\begin{aligned} \chi_C &= \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{r} f_k^j(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} G_k(x) \end{aligned}$$

donde

$$G_k(x) = \prod_{j=1}^{r} f_k^j(x)$$

$$G_k(x) \leq G_{k+1}(x) \ \forall k \in N$$

Puesto que ya se demostró la igualdad (*) para Y de la forma (α) se tiene que:

$$E_x\{G_k \circ \theta_s; A\} = E\{\varphi(B_s, 0); A\} \quad \text{para } A \in F_s^+$$

Y por el Teorema de Convergencia Monótona concluir que

$$E_x\{\chi_C \circ \theta_s; A\} = E\{\varphi(B_s, 0); A\} \quad \text{para } A \in F_s^+$$

Por tanto, sólo resta demostrar (***). Para tal efecto, defínase $f_k(x) = \min\{1, k\, d(x, A_j^c)\}$.

Nótese que :

i) $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$.

ii) $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_{A_j}(x)$.

Demostración

Sea $\epsilon > 0$

P.D. existe $N \in \Re$ tal que si $k \geq N \Rightarrow |f_k(x) - \chi_{A_j}(x)| < \epsilon$

Si $x \in A_j^c \Rightarrow d(x, A_j^c) = 0 \Rightarrow f_k(x) = 0$ para toda $k \in N$ y que $\chi_{A_j}(x) = 0$ de donde se deduce claramente que:

$$|f_k(x) - \chi_{A_j}(x)| < \epsilon$$

Si $x \in (A_j^c)^c = A_j$ claramente existe $N \in \Re$ tal que $N\, d(x, A_j^c) > 1$. Por tanto,

$$f_k(x) = 1 \text{ para toda } k \geq N \ \Rightarrow |f_k(x) - \chi_{A_j}(x)| = 0 < \epsilon \text{ para toda } k \geq N$$

□

2.5 Consecuencias de la Propiedad de Markov

Proposición 2.5.1 *Sea Z una variable aleatoria acotada definida en (Ω, ℓ, P). Entonces, para todo $x \in \Re$ se cumple*

$$E_x\left\{Z \mid F_s^{+}\right\} = E_x\left\{Z \mid F_s^{\circ}\right\} \ (^{**})$$

Demostración

La demostración básicamente esta fundamentada en dos hechos:

i) Basta demostrar la proposición para Z de la forma $\prod_{m=1}^{n} f_m\left(B(t_m)\right)$ (*).

donde:

$$\begin{array}{rl} B(t_m) : \Omega \rightarrow \Re & \text{es una variable aleatoria } N(0, t_m) \\ f_m : \Re \rightarrow \Re & \text{es una función acotada y } \ell\text{-medible} \end{array}$$

ii) Si Z es de la forma (*) existen X F_s°-medible y Y ℓ-medible tales que $Z = X(Y \circ \theta_s)$.

Estos dos hechos se probarán después de hacer ver como se utilizan en la demostración. Por tanto, se supondrán ciertos por el momento, con lo que se tiene que la igualdad (**) es válida para Z de la forma (*). En efecto,

$$\begin{aligned} E_x\left\{Z \mid F_s^{+}\right\} &= E_x\left\{X\left(Y \circ \theta_s\right) \mid F_s^{+}\right\} \\ &= X\, E_x\left\{Y \circ \theta_s \mid F_s^{+}\right\} \\ &= X\, E_{B(s)}\left\{Y\right\} \end{aligned}$$

Nótese que $X\, E_{B(s)}\left\{Y\right\} = E_x\left\{Z \mid F_s^{+}\right\}$ es F_s°-medible. Por tanto, por el lema 1.1.1., se cumple que:

$$E_x\left\{Z \mid F_s^{+}\right\} = E_x\left\{Z \mid F_s^{\circ}\right\}$$

con lo que quedaría demostrada la proposición.

Ahora se demostrarán los dos hechos supuestos.

Primer Supuesto: Si la igualdad (**) es válida para toda Z de la forma (*) entonces es válida para toda Z variable aleatoria acotada.

Sea $\hat{A}$ el conjunto de los cilindros finito dimensionales, de tal manera que $\sigma(\hat{A}) = \ell$ y sea $\Im$ el conjunto de todas las funciones ℓ-medibles y acotadas que cumplen con (**).

Se demostrará que se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) Si $B \in \hat{A}$ entonces $\chi_B \in \Im$.

ii) Si $f, g \in \Im$ entonces $\lambda f + \mu g \in \Im$ con μ, $\lambda \in \Re$.

iii) Si $f_n \uparrow f$, con $f_n \in \Im$ y f acotada, entonces $f \in \Im$.

Las condiciones ii) y iii) son inmediatas de la propiedad de linealidad de la esperanza y del teorema de convergencia monótona. Por tanto, basta demostrar la condición i).

Sea $B = \{B_{t_1} \in A_{t_1}, \ldots, B_{t_n} \in A_n\} \in \hat{A}$.

Por tanto

$$\chi_B = \prod_{k=1}^{n} \chi_{A_{t_k}}$$

Por tanto, si se toma $f_k = \chi_{A_{t_k}}$ en (*) se tiene que:

$$\chi_B \in H$$

de donde:

$$\Im \supset \sigma(\hat{A}) = \ell \text{ Por el Teorema de las Clases Monótonas}$$

Segundo Supuesto:

Demostración

Sea $Z(\omega) = \prod_{m=1}^{n} f_m\left(B_{t_m}(\omega)\right)$. Se verá que existen X F_s^o-medible y Y ℓ-medible tales que

$$Z(\omega) = X\ (Y \circ \theta_s)\ (\omega)\, \omega \in \Omega$$

Sea $\omega \in \Omega$ fija. Por hipótesis se sabe que:

$$Z(\omega) = \prod_{m=1}^{n} f_m(B_{t_m}(\omega))$$

Escójase k tal que $t_k = \min\{t_i \mid t_i \geq s\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
Z(\omega) &= \prod_{m=1}^{n} f_m(B_{t_m}(\omega)) \\
&= \prod_{m=1}^{k-1} f_m(B_{t_m}(\omega)) \prod_{m=k}^{n} f_m(B_{t_m}(\omega)) \cdot \\
&= A \prod_{m=k}^{n} f_m(B_{t_m}(\omega)) \\
&= A \prod_{m=k}^{n} f_m\left(B_{s+[t_m-s]}(\omega)\right) \\
&= A \prod_{m=k}^{n} f_m\left(\omega_{s+[t_m-s]}\right) \\
&= A \prod_{m=k}^{n} f_m(\theta_s \omega(t_m - s)) \\
&= A \prod_{m=k}^{n} f_m \circ \theta_s \omega(t_m - s) \\
&= A \left(\left(\prod_{m=k}^{n} f_m\right) \circ \theta_s\right) (\omega_{t_m - s}) \\
&= A \left(\prod_{m=k}^{n} f_m \circ \theta_s\right) B_{t_m - s}(\omega) \\
&= A \, (Y \circ \theta_s)
\end{aligned}$$

donde:

$$X = A = \prod_{m=1}^{k-1} f_m(B_{t_m}(\omega)) \text{ y}$$

$$Y = \prod_{m=k}^{n} f_m\left(B_{t_m - s}(\omega)\right)$$

□

Proposición 2.5.2 Ley 0 - 1 de Blumenthal *Si* $A \in F_o^+$. *Entonces para todo* $x \in \Re$, $P_x\{A\}$ *vale 0 ó 1.*

Demostración

Puesto que $A \in F_o^+$ se cumple que χ_A es F_o^+-medible, además, se cumple que $\sigma(\chi_A)$ es independiente de F_0^o por tanto, $E\{\chi_A \mid F_0^o\} = P_x\{A\}$ Por tanto, utilizando el ejercicio anterior se cumple:

$$\begin{aligned}\chi_A &= E_x\{\chi_A \mid F_0^+\}\\ &= E_x\{\chi_A \mid F_0^o\}\\ &= P_x\{A\} \text{ c.s.}\end{aligned}$$

□

Proposición 2.5.3 *Si* $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid B(t) > 0\}$, *entonces* $P_0\{\tau = 0\} = 1$.

Demostración

En primera instancia nótese que se tiene:

$$\{\omega \in \Omega \mid B_t(\omega) > 0\} \subset \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\}$$

Por tanto,

$$P_0\{\tau \leq t\} \geq P_0\{B_t > 0\}$$

Puesto que $B_t \sim N(0, t)$, se cumple:

$$P_0\{B_t > 0\} = \frac{1}{2}.$$

Luego entonces,

$$P_0\{\tau \leq t\} \geq \frac{1}{2}$$

De donde,

$$P_0\{\tau = 0\} = \lim_{t \downarrow 0} P_0\{\tau \leq t\} \geq \frac{1}{2}$$

Ahora se demostrará que $\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) = 0\} \in F_0^+$ para aplicar la ley de Blumenthal y concluir que $P_0\{\tau = 0\} = 1$.

Afirmación

$$\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) = 0\} \in F_0^+$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) = 0\} &= \bigcap_{t>0} \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \\
&= \bigcap_{t>0} \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) > t\}^c \\
&= \bigcap_{t>0} \{\omega \in \Omega \mid B_s(\omega) \leq 0, 0 \leq s < t\}^c \\
&= \bigcap_{t>0} \left(\bigcap_{0 \leq k < t} \{\omega \in \Omega \mid B_k(\omega) \leq 0\}^c \right)
\end{aligned}$$

Claramente,

$$\{\omega \in \Omega \mid B_k(\omega) \leq 0\}^c \in F_k^o$$

Por tanto,

$$\bigcap_{0 \leq k < t} \{\omega \in \Omega \mid B_k(\omega) \leq 0\} \in F_t^o$$

Luego entonces

$$\bigcap_{t>0}\left(\bigcap_{0\leq k<t}\{\omega\in\Omega \mid B_k(\omega)\leq 0\}^c\right)\in F_0^+$$

De donde finalmente se tiene que,

$$\{\omega\in\Omega \mid \tau(\omega)=0\}\in F_0^+$$

□

Observación

Nótese que de manera totalmente análoga, se puede demostrar que

$$P\{\hat{\tau}=0\}=1$$

donde

$$\hat{\tau}=\inf\{t\geq 0 \mid B_t<0\}$$

Proposición 2.5.4 *Si* $T_o=\inf\{t>0 \mid B_t=0\}$, *entonces se cumple que:*

$$P_o\{T_o=0\}=1$$

Demostración

Para la demostración, se utilizará la proposición anterior. Defínase

$$T_{B_\epsilon}=\inf\{t>0 \mid B_t\in B_\epsilon\}$$

donde

$$B_\epsilon=\{y\in\Re \mid -\epsilon\leq y\leq\epsilon, \epsilon>0\}$$

Obsérvese que por la continuidad de $t\rightarrow B_t$,

$$\{\omega\in\Omega \mid T_o(\omega)=0\}=\bigcap_{\epsilon>0}\{\omega\in\Omega \mid T_{B_\epsilon}(\omega)=0\}$$

De donde

$$
\begin{aligned}
P\{\omega \in \Omega \mid T_o(\omega) = 0\} &= P\left\{\bigcap_{\epsilon>0} \{\omega \in \Omega \mid T_{B_\epsilon}(\omega) = 0\}\right\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} P\{\{\omega \in \Omega \mid T_{B_\epsilon}(\omega) = 0\}\}
\end{aligned}
$$

Sin embargo,

$$P\{\{\omega \in \Omega \mid T_{B_\epsilon}(\omega) = 0\}\} = 1 \quad (\text{ por la proposicion anterior })$$

Por tanto,

$$P\{\{\omega \in \Omega \mid T_o(\omega) = 0\}\} = 1$$

□

2.6 Propiedad Fuerte de Markov

En esta sección se establecerá otra importante propiedad del Movimiento Browniano: La Propiedad Fuerte de Markov. Para tal efecto, se definirán algunos conceptos que están involucrados en esta propiedad.

Definición 2.6.1 *Sea (Ω, ℓ, P). Se dice que una familia $\{\ell_t\}_{t\geq 0}$ de sub-σ-álgebras de ℓ es una filtración en (Ω, ℓ, P) si se cumple*

$$\ell_s \subset \ell_t \text{ para toda } s < t$$

Definición 2.6.2 *Sea (Ω, ℓ, P). Se dice que una variable aleatoria S es un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\ell_t\}_{t\geq 0}$ si*

$$\{\omega \in \Omega \mid S(\omega) \leq t\} \in \ell_t \text{ para } t \geq 0$$

Definición 2.6.3 *Sea (Ω, ℓ, P) y S un tiempo de paro definido en este espacio. Definanse las dos σ-álgebras ℓ_S y ℓ_S^+ por:*

$$\ell_S = \{A \in \ell_\infty \mid (A \cap \{S \leq t\}) \in \ell_t \text{ para } t \geq 0\}$$

$$\ell_S^+ = \{A \in \ell_\infty \mid (A \cap \{S < t\}) \in \ell_t \text{ para } t \geq 0\}$$

tomando la filtración $\{\ell_t\}_{t\geq 0}$ con $\ell_t = \sigma(B(s) \mid s \leq t)$. Por cierto que ℓ_S es conocida como la σ-álgebra parada de S.

Proposición 2.6.1 *Sea (Ω, ℓ, P) y S un tiempo de paro definido en este espacio. Entonces*

(1) $\ell_S \subset \ell_S^+$.

(2) S es ℓ_S-medible.

Demostración

(1):

Sea $A \in \ell_S \Rightarrow$

$$A \cap \{S \leq t\} \in \ell_t \text{ y } \{S < t\} \in \ell_t \Rightarrow$$

$$A \cap \{S < t\} \in \ell_t \Rightarrow A \in \ell_S^+$$

(2):

Simplemente nótese que:

$$\{S \leq a\} \cap \{S \leq t\} = \left\{ \begin{array}{ll} \{S \leq a\} & \text{si } a < t \\ \{S \leq t\} & \text{si } a \geq t \end{array} \right\} \in \ell_t \text{ para toda } t \geq 0$$

□

Proposición 2.6.2 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener, G un conjunto abierto en éste y $T = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \in G\}$. Entonces, T es un tiempo de paro.*

Demostración

Puesto que $t \to B_t$ es continua se sabe que imagen inversa de un conjunto abierto es abierto. Por tanto, $\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq t\}$ es abierto luego,

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq t\} = \bigcup_{q<t, q\in Q} \{\omega \in \Omega \mid B_q(\omega) \in G\} \in F_t$$

□

Proposición 2.6.3 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener y $(T_n)_{n\in N}$ una sucesión de tiempos de paro tales que $T_n \downarrow T$. Entonces T es un tiempo de paro.*

Demostración

Simplemente nótese que:

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) < t\} = \bigcup_{n\in N} \{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) < t\} \in F_t$$

$\square$

Proposición 2.6.4 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener y $(T_n)_{n\in N}$ una sucesión de tiempos de paro tales que $T_n \uparrow T$. Entonces T es un tiempo de paro.*

Demostración

De manera análoga a la proposición anterior obsérvese que:

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq t\} = \bigcap_{n\in N} \{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) < t\} \in F_t$$

$\square$

Proposición 2.6.5 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener, K un conjunto cerrado en éste y $T = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \in K\}$. Entonces, T es un tiempo de paro.*

Demostración

La idea de la demostración será construir una sucesión monótona $\{T_n\}_{n\in N}$ de tiempos de paro, que converja a T. Para tal efecto, defínase $G_n = \bigcup_{x\in K} \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\}$ y sea $T_n = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \in G_n\}$. Por tanto,

$$T_n \leq T_{n+1} \text{ para toda } n \in N$$

y puesto que G_n es abierto para toda $n \in N$, T_n es un tiempo de paro.

Además, $T_n \leq T$ para toda $n \in N$, luego entonces

$$\lim_{n\to\infty} T_n \leq T$$

Por otro lado, defínase $\alpha = \lim_{n\to\infty} T_n$. Puesto que $B_{T_n} \in G_n$ para toda $n \in N$ se cumple por la continuidad de $t \to B(t)$ que:

$$B_{T_n} \to B_\alpha \in K$$

cuando $n \to \infty$

de donde

$$\begin{aligned} T &\leq \alpha \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n \end{aligned}$$

de donde finalmente se tiene

$$T_n \uparrow T$$

□

Finalmente, para establecer la Propiedad Fuerte de Markov se generalizará la definición de función de transformación θ_S y la información acumulada hasta el tiempo t, F_t.

Definición 2.6.4 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener y sea $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ un movimiento Browniano definido en éste. Asi mismo, denótese $B(t)$ como B_t y $B_t(w)$ como w_t para cada ω fija. Entonces, para cada $s \geq 0$ defínase la función de translación $\theta_s : \Omega \to \Omega$ como:*

$$(\theta_s \omega)(t) = \begin{cases} \omega_{s+t} & sobre\ \{S < \infty\} \\ \Delta & sobre\ \{S = \infty\} \end{cases}$$

donde Δ es un punto extra que se anadirá a Ω.

θ_s es conocida como la transformación de translación del proceso.

Proposición 2.6.6 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener y sea $(T_n)_{n\in N}$ una sucesión de tiempos de paro del Movimiento Browniano tal que $T_n \downarrow T$. Entonces,*

$$F_T = \bigcap_{n\in N} F_{T_n}$$

donde

F_{T_n} es la σ-álgebra parada del tiempo de paro T_n

F_T es la σ-álgebra parada del tiempo de paro T

Demostración

De la definición de σ-álgebra parada y de la hipótesis de que $T_n \downarrow T$ se sigue que $F_{T_n} \supset F_T$ para todo $n \in N$.

Por tanto,

$$\bigcap_{n\in N} F_{T_n} \supset F_T$$

Sea $A \in \bigcap_{n\in N} F_{T_n}$. Por lo que

$$A \cap \{T_n < t\} \in F_t \quad \text{con } n \in N$$

De donde

$$\bigcup_{n\in N} A \cap \{T_n < t\} \in F_t$$

Y utilizando el hecho de que $\{T < t\} = \bigcup_{n\in N} \{T_n < t\}$ se sigue que:

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n\in N} A \cap \{T_n < t\} \in F_t$$

Por tanto,

$$A \cap \{T < t\} \in F_t$$

Por lo que,

$$A \in F_T$$

Luego,

$$\bigcap_{n\in N} F_{T_n} \subseteq F_T$$

Finalmente,

$$\bigcap_{n\in N} F_{T_n} = F_T$$

□

Proposición 2.6.7 Propiedad Fuerte de Markov

Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener, $(s,\omega) \to Y(s,\omega)$ acotada y $B(\Re) \times \ell$-medible. Si S es un tiempo de paro, entonces para toda $x \in \Re$ se cumple

$$E_x\{Y_S \circ \theta_S \mid F_S\} = E_{B(s)}\{Y_S\} \ \textit{sobre} \ \{S < \infty\}$$

Demostración

La idea de la demostración esta fundamentada en demostrar el resultado para Y_S de la forma

$$Y_s(\omega) = f_s(\omega) \prod_{m=1}^{n} f_m(\omega(t_m))$$

donde

$0 < t_1 < \ldots t_n$ y $f_0, f_1, \ldots, f_n$ funciones acotadas y continuas

Para después extender el resultado utilizando el Teorema de Clases Monótonas.

Sea S un tiempo de paro. Se demostrará el resultado primeramente para el caso en que exista una sucesión $(t_n)_{n\in N}$ tal que $t_n \uparrow \infty$ y que

$$P_x\{S < \infty\} = \sum_{n\in N} P_x\{S = t_n\}$$

Para este caso defínase $Z_n = Y_{t_n}(\omega)$ y $A \in F_S$. Entonces,

$$E_x\{Y_S \circ \theta_S; A \cap \{S < \infty\}\} = \sum_{n=1}^{\infty} E_x\{Z_n \circ \theta_{t_n}; A \cap \{S = t_n\}\}$$

Puesto que $A \in F_S \Rightarrow A \cap \{S = t_n\} \in F_{t_n}$. Por tanto, por la propiedad de Markov se deduce que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} E_x\{Z_n \circ \theta_{t_n}; A \cap \{S = t_n\}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_x\{E_{B(t_n)}\{Z_n\}; A \cap \{S = t_n\}\} \\ &= E_x\{E_{B(S)}\{Y_S\}; A \cap \{S < \infty\}\}\end{aligned}$$

Ahora, en general supóngase que S es un tiempo cualquiera. Lo que se hará será definir una sucesión $(S_n)_{n \in N}$ de variables aleatorias tales que $S_n \downarrow S$ y aprovechar después la continuidad del Browniano y de $\varphi(x,t) = E_x\{Y_t\}$ (para la forma particular de Y con la que se esta trabajando) para probar el resultado. A saber, defínase $S_n = \frac{([2^n S]+1)}{2^n}$.

De esta definición, se desprenden varios resultados:

i) $S_n = \frac{([2^n S]+1)}{2^n} \geq \frac{(2^n S-1)+1}{2^n} = S$.

Resultado del que se deriva que S_n sea un tiempo de paro.

$$\{S_n = t\} = \{S \leq t\} \in F_t$$

ii) $S_n \to S$ cuando $n \to \infty$.

Resultado que aunado a la continuidad de $B(t)$ y $\varphi(x,t)$ se tiene que

$$B(S_n) \to B(S)$$

$$\varphi(B(S_n), S_n) \to \varphi(B(S), S)$$

iii) Puesto que la composición de funciones continuas es continua, se deduce que:

$$Y_{S_n} \circ \theta_{S_n} \to Y_S \circ \theta_S$$

De i) se dedujó que S_n es un tiempo de paro y claramente cae dentro del caso particular para el que se demostró ya cierta la propiedad, por tanto se tiene que:

$$E_x\left\{Y_{S_n}\circ\theta_{S_n}; A\cap\{S<\infty\}\right\} = E_x\left\{\varphi(B(S_n),S_n); A\cap\{S<\infty\}\right\}$$

Como $Y_{S_n}\circ\theta_{S_n}$ es acotada y $B(\Re)\times\ell$-medible se cumple, por el Teorema de Convergencia Dominada, que:

$$E_x\left\{Y_{S_n}\circ\theta_{S_n}; A\cap\{S<\infty\}\right\} \to E_x\left\{Y_S\circ\theta_S; A\cap\{S<\infty\}\right\}$$

y como

$$E_x\left\{\varphi(B(S_n),S_n); A\cap\{S<\infty\}\right\} \to E_x\left\{\varphi(B(S),S); A\cap\{S<\infty\}\right\}$$

se cumple que:

$$E_x\left\{Y_S\circ\theta_S; A\cap\{S<\infty\}\right\} = E_x\left\{\varphi(B(s),S); A\cap\{S<\infty\}\right\}$$

con lo que queda demostrado el resultado. □

Capítulo 3

Propiedades del Movimiento Browniano

En este tercer capítulo se expondrán propiedades importantes del Movimiento Browniano. La primera de estas propiedades es el Principio de Reflexión, el cual se enuncia como una consecuencia de la Propiedad Fuerte de Markov enunciada en el capítulo 2. Después se estudia el proceso estocástico resultante de restringir al Movimiento Browniano al intervalo $[0,1]$ y pedirle que en los extremos alcance el mismo valor, recibiendo este proceso el nombre de Puente Browniano. Finalmente se desarrollan algunas propiedades sobre los tiempos de entrada asi como las Leyes de Arco Seno para el Movimiento Browniano.

3.1 Principio de Reflexión

Proposición 3.1.1 Principio de Reflexión *Sea* (Ω, ℓ, P) *el espacio de Wiener,* $a > 0$ *y* $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$. *Entonces,*

$$P_0\{T_a < t\} = 2\,P_0\{B_t \geq a\}$$

Demostración

Definase una variable aleatoria Y_s de la siguiente manera:

$$Y_s(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } s < t, \omega(t-s) > a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto

$$Y_{T_a} \circ \theta_{T_a}(\omega) = Y_{T_a}\ (\theta_{T_a}(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_a < t \text{ y } (\theta_{T_a}\omega)\ (t - T_a) > a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } T_a < t \text{ y } B(t) > a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La Propiedad Fuerte de Markov implica que:

$$E_0 \{Y_{T_a} \circ \theta_{T_a} \mid F_{T_a}\} = E_a \{Y_{T_a}\} \text{ sobre } \{T_a < t\}$$

Por tanto, para cada $A \in F_{T_a}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} E_0 \{Y_{T_a} \circ \theta_{T_a}; A \cap \{T_a < t\}\} &= E_a \{Y_{T_a}\} \\ &= P_a \{T_a < t, \omega(t - T_a) > a\} \\ &= P_a \{T_a < t, B_{t-T_a} > B_{T_a}\} \\ &= P_a \{B_{t-T_a} > B_{T_a} \mid T_a < t\}\ P_o \{T_a < t\} \\ &= \frac{1}{2} P_o \{T_a < t\} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} E_0 \{Y_{T_a} \circ \theta_{T_a}; A \cap \{T_a < t\}\} &= P_0 \{T_a < t, B_t > a\} \\ &= P_0 \{B_t > a\} \end{aligned}$$

De donde finalmente se concluye que

$$P_0 \{T_a < t\} = 2\, P_0 \{B_t \geq a\}$$

□

3.2 Puente Browniano

Definición 3.2.1 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener y sea $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ el Movimiento Browniano definido sobre éste. Entonces el proceso $\{Z(t)\}_{t\in[0,1]}$ definido como $Z(t) = B(t) - tB(1)$ es conocido como un Puente Browniano.*

Propiedades

i)

$$\begin{aligned} E\{Z(t)\} &= E\{B(t)\} - E\{t\,B(1)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} & Cov\{Z(s), Z(t)\} \\ =\ & Cov\{B(s) - sB(1), B(t) - tB(1)\} \\ =\ & Cov\{B(s) - sB(1), B(t)\} + Cov\{B(s) - sB(1), -tB(1)\} \\ =\ & Cov\{B(s) - sB(1), B(t)\} - Cov\{B(s) - sB(1), tB(1)\} \\ =\ & Cov\{B(s), B(t)\} - s\,Cov\{B(1), B(t)\} - t\,Cov\{B(s), B(1)\} + st\,Cov\{B(1), B(1)\} \\ =\ & s - st - st + st \\ =\ & s(1-t) \end{aligned}$$

El Puente Browniano juega un papel importante en el estudio de las funciones de distribución empírica, las cuales serán definidas a continuación.

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes que se distribuyen con distribución $F(x)$ y sea $N_n(s)$ el número de las primeras n variables aleatorias que son menores o iguales que s, es decir, $N_n(s)$ es de la forma:

$$N_n(s) = \sum_{i=1}^{n} I_i(s)$$

donde

$$I_i(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Defínase

$$F_n(s) = \frac{N_n(s)}{n}$$

$F_n(s)$ es conocida como la distribución empírica. A continuación se analizarán las propiedades de $F_n(s)$ en el limite.

Por la Ley Fuerte de los Grandes Números se tiene que:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} I_i(s)}{n}\right) = E\left\{I_i(s)\right\}\right\} = 1$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} E\left\{I_i(s)\right\} &= P\left\{I_i(s) = 1\right\} \\ &= P\left\{X_i \leq s\right\} \\ &= F(s) \\ &= s \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_n(s) \to F(s) \text{ cuando } n \to \infty \text{ con probabilidad 1}$$

De hecho, se demuestra que la convergencia es uniforme casi seguramente[1], es decir, con probabilidad 1 se cumple que

$$\sup_{0<s<1} \mid F_n(s) - s \mid \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Proposición 3.2.1 *Si se define* $\alpha_n(s) = \sqrt{n}\,(F_n(s) - s)$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(s) = \alpha(s) \sim N(0, s(1-s))$$

[1]Teorema de Glivenko-Cantelli (Chung, 1974 pag 133)

Demostración

Ante todo, nótese que $N_n(s) \sim B(n, F(s))$ (es la suma de n variables aleatorias Bernoullis independientes). Por tanto, por el Teorema del Limite Central se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} I_j(s) - ns}{\sqrt{n}\,\sqrt{s(1-s)}} \sim N(0,1)$$

Observese que:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{n} I_j(s) - ns}{\sqrt{n}\,\sqrt{s(1-s)}} &= \frac{N_n(s) - ns}{\sqrt{n}\,\sqrt{s(1-s)}} \\
&= \frac{n\,F_n(s) - ns}{\sqrt{n}\,\sqrt{s(1-s)}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{s(1-s)}}\,(F_n(s) - s)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\alpha(s)\,\frac{1}{\sqrt{s(1-s)}} \sim N(0,1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\alpha(s) \sim N(0, s(1-s))$$

□

Proposición 3.2.2 *Sea* $\alpha(s) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n(s)$. *Entonces* $\{\alpha(s)\}_{0<s<1}$ *es un Puente Browniano.*

Demostración

En primer lugar, es claro que $\alpha(s)$ es un Proceso Gaussiano, por lo que bastaría demostrar que:

i) $E\{\alpha(s)\} = 0$.

ii) $Cov\{\alpha(s),\alpha(t)\} = s(1-t)$ para $s < t$

El inciso i) es claro del hecho de que $\alpha_n(s) \sim N(0, s(1-s))$. Para la demostración del segundo inciso, se hará notar el siguiente hecho:

$$\{(N_n(t) - N_n(s)) \mid N(s) = j\} \sim Y \ \ (\beta)$$

donde

Y es una variable aleatoria binomial con parámetros $n-j$ y probabilidad de éxito $p = \left(\frac{t-s}{1-s}\right))$

Justificación de (β)

Es claro que es una binomial del hecho de que $N_n(k)$ es suma de variables aleatorias Bernoulli independientes, luego basta demostrar que la probabilidad de éxito de esta variable aleatoria Bernoulli es $\frac{t-s}{1-s}$. Claramente la probabilidad de éxito es

$$\begin{aligned}
P\{s \leq X_i \leq t \mid X_i \geq s\} &= \frac{P\{s \leq X_i \leq t, X_i \geq s\}}{P\{X_i \geq s\}} \\
&= \frac{P\{s \leq X_i \leq t\}}{P\{X_i \geq s\}} \\
&= \frac{P\{X_i \leq t\} - P\{X_i \leq s\}}{1 - P\{X_i \leq s\}} \\
&= \left\{\frac{t-s}{1-s}\right\}
\end{aligned}$$

Una vez demostrado este hecho se tiene que:

$$\begin{aligned}
Cov\{\alpha_n(s), \alpha_n(t)\} &= Cov\left\{\sqrt{n}\,(F_n(s) - s), \sqrt{n}\,(F_n(t) - t)\right\} \\
&= n\,Cov\{F_n(s) - s, F_n(t) - t\} \\
&= n\,Cov\{F_n(s), F_n(t)\} \quad \text{(Invarianza bajo translaciones)} \\
&= \frac{n}{n^2}\,Cov\{N_n(s), N_n(t)\} \\
&= \frac{1}{n}\,Cov\{N_n(s), N_n(t)\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\left\{E\left\{N_n(s)N_n(t)\right\} - E\left\{N_n(t)\right\}\ E\left\{N_n(t)\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{E\left\{E\left\{N_n(s)N_n(t) \mid N_n(s)\right\}\right\} - n^2st\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{E\left\{N_n(s)\, E\left\{N_n(t) \mid N_n(s)\right\}\right\} - n^2st\right\}
\end{aligned}
$$

Antes de proseguir, se obtendrá $E\{N_n(t) \mid N_n(s)\}$.

Sea $G(k) = E\{N_n(t) \mid N_n(s) = k\} = k + (n-k)\left(\frac{t-s}{1-s}\right)$, luego entonces

$$
\begin{aligned}
E\left\{N_n(t) \mid N_n(s)\right\} &= G \circ N_n(t) \\
&= N_n(s) + (n - N_n(s))\left(\frac{t-s}{1-s}\right)
\end{aligned}
$$

Una vez obtenido $E\{N_n(t) \mid N_n(s)\}$ se deduce que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left\{E\left\{N_n(s)\, E\left\{N_n(t) \mid N_n(s)\right\}\right\} - n^2st\right\} &= \\
\frac{1}{n}\left\{E\left\{N_n(s)\left[N_n(s) + (n - N_n(s))\cdot\left(\frac{t-s}{1-s}\right)\right]\right\} - n^2ts\right\} &= \\
\frac{1}{n}\left\{E\left\{N_n(s)^2 + \left(\frac{t-s}{1-s}\right)\left[N_n(s)n - N_n(s)^2\right]\right\} - n^2st\right\} &= \\
\frac{1}{n}\left\{E\left\{N_n(s)^2\right\}\left(1 - \frac{t-s}{1-s}\right) + n\,\frac{t-s}{1-s}\,E\left\{N_n(s)\right\} - n^2st\right\} &= \\
\frac{1}{n}\left\{E\left\{N_n(s)^2\right\}\left(\frac{1-t}{1-s}\right) + n\,\frac{t-s}{1-s}\,ns - n^2st\right\} &= \\
\frac{1}{n}\left\{ns\,(ns + (1-s))\left(\frac{1-t}{1-s}\right) + n^2s\left(\left(\frac{t-s}{1-s}\right) - t\right)\right\} &= \\
\frac{1}{n}\left\{ns\,(ns + (1-s))\left(\frac{1-t}{1-s}\right) + n^2s\left(\frac{ts-s}{1-s}\right)\right\} &= \\
\frac{1}{n}\left\{ns\,(ns + (1-s))\left(\frac{1-t}{1-s}\right) + \frac{n^2s}{1-s}\,(-s)\,(1-t)\right\} &= \\
\frac{1}{n}\,\frac{1}{1-s}\,\left\{\left[ns(1-t)\right]\,\left[ns + (1-s)\right] + \left[ns(1-t)\right](-ns)\right\} &=
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{n}\frac{1}{1-s}\left\{[ns(1-t)]\,[(1-s)]\right\} =$$

$$s(1-t)$$

$\square$

3.3 Tiempos de Entrada, Variable Máxima y Leyes de Arco Seno

En secciónes anteriores, se definió la variable aleatoria $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B(t) = a\}$ a la que se denominó tiempo de entrada en a del Movimiento Browniano de hecho, se demostró que T_a es un tiempo de paro y que además cumple con la propiedad de reflexión, la cual, como se recordará, afirma que:

$$P\{T_a \leq t\} = 2\,P\{B(t) \geq a\}$$

A continuación, se demostrarán otras propiedades interesantes de T_a.

Proposición 3.3.1 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener y sea $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B(t) = a\}$ donde $\{B(t)\}_{t\in\Re}$ es el Movimiento Browniano en el espacio de Wiener. Entonces*

$$P\{T_a < \infty\} = 1$$

Demostración

$$\begin{aligned}
P\{T_a \leq t\} &= 2\,P\{B(t) \geq a\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty \exp\left\{\frac{-x^2}{2t}\right\} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty \exp\left\{-\left[\frac{x}{\sqrt{t}}\right]^2 \frac{1}{2}\right\} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy
\end{aligned}$$

De donde,

$$P\{T_a < \infty\} = \lim_{t\to\infty} P\{T_a \leq t\}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$$

Se afirma que:

$$\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = 1 \iff$$

$$\left[\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}}\right]^2 \left[\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}\right]^2 = 1 \iff$$

$$\frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx\right] \left[\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy\right] = 1 \iff$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dx\, dy = 1 \iff$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} dr\, d\theta = 1 \iff$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r \exp\left\{-u\right\} du\, d\theta = 1 \iff$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 1$$

Por lo tanto,

$$P\{T_a < \infty\} = 1$$

□

Proposición 3.3.2 *Sea (Ω, ℓ, P) es espacio de Wiener y sea $\{B(t)\}_{t\in\Re+}$ el Movimiento Browniano en éste y T_a el tiempo de entrada en a del Movimiento Browniano. Entonces*

$$E\{T_a\} \geq \infty$$

Demostración De Probabilidad Elemental se sabe que para una variable aleatoria $Y \geq 0$ se cumple que

$$E\{Y\} = \int_0^{\infty} P\{Y > y\}\, dy$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} E\{T_a\} &= \int_0^\infty P\{T_a > t\}\, dt \\ &= \int_0^\infty (1 - P\{T_a \le t\})\, dt \\ &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy\right) dt \end{aligned}$$

Se analizará $\int_0^\infty \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy\right) dt$. Con anterioridad se demostró que

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = 1$$

Por otro lado se sabe que:

$$P\{T_a \le t\} + P\{T_a > t\} = 1$$

Por lo que,

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = P\{T_a \le t\} + P\{T_a > t\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} P\{T_a \le t\} + P\{T_a > t\} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy + \\ &\quad \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \end{aligned}$$

Se recordará además, que ya se demostró que,

$$P\{T_a \le t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$$

De donde

$$P\{T_a > t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy\right) dt &= \\
\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy\, dt &= \\
\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^\infty \int_0^{\frac{a^2}{y^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dt\, dy &= \\
\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \left(\frac{a^2}{y^2}\right) dy &= \\
\frac{2\,a^2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}}{y^2}\, dy &\geq \\
\frac{2\,a^2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^1 \frac{\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}}{y^2}\, dy &\geq \\
\frac{2\,a^2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^1 \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}}{y^2}\, dy &\geq \\
\frac{2\,a^2}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} \int_0^1 \frac{1}{y^2}\, dy &= \\
\frac{2\,a^2}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} \lim_{m\to 0} \int_m^1 \frac{1}{y^2}\, dy &= \\
\frac{2\,a^2}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} \lim_{m\to 0} \left(\frac{1}{m} - 1\right) &= \\
&\infty
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$E\{T_a\} \geq \infty$$

□

Comentario Es decir, con probabilidad 1 el movimiento Browniano eventualmente le pegára a a pero su tiempo medio es infinito.

Variable Máxima

Definición 3.3.1 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener y $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ el Movimiento Browniano en éste. Entonces defínase $M(t) = \max_{0\le s\le t} B(s)$ como la variable máxima en el intervalo* $[0,t]$.

Distribución

Para obtener la distribución basta observar que

$$\{\omega \in \Omega \mid M(t)(\omega) \geq a\} = \{\omega \in \Omega \mid T_a(\omega) \leq t\}$$

Hecho que es cierto de

$$\{\omega \in \Omega \mid M(t)(\omega) \geq a\} \subset \{\omega \in \Omega \mid T_a(\omega) \leq t\}$$

por la continuidad del Movimiento Browniano

y claramente

$$\{\omega \in \Omega \mid M(t)(\omega) \geq a\} \supset \{\omega \in \Omega \mid T_a(\omega) \leq t\}$$

Por tanto,

$$\{\omega \in \Omega \mid M(t)(\omega) \geq a\} = \{\omega \in \Omega \mid T_a(\omega) \leq t\}$$

De donde,

$$\begin{aligned} P\{M(t) \geq a\} &= P\{T_a \leq t\} \\ &= 2\,P\{B(t) \geq a\} \end{aligned}$$

Proposición 3.3.3 *Sea (Ω, ℓ, P) el espacio de Wiener , $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$ y sea $O(t_1, t_2)$ el evento de que el Movimiento Browniano tome el valor 0 al menos una vez en el intervalo (t_1, t_2). Entonces*

$$P\{O(t_1, t_2)\} = 1 - \frac{2}{\pi}\, angsen\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
&P\{O(t_1,t_2)\} = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} P\{O(t_1,t_2) \mid B(t_1)=x\}\; P\{B(t_1)=x\} = \\
&\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t_1}} \int_{-\infty}^{\infty} P\{O(t_1,t_2) \mid B(t_1)=x\} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\,t_1}\right\} dx = \\
&\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t_1}} \int_{-\infty}^{\infty} P\{T_{|x|} \le t_2 - t_1\} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\,t_1}\right\} dx = \\
&\frac{2}{\sqrt{2\,\pi\,t_1}\,\sqrt{2\,\pi\,(t_2-t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{|x|}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2}{2(t_2-t_1)}\right\} dm \exp\left\{-\frac{x^2}{2\,t_1}\right\} dx = \\
&\frac{1}{\pi\,\sqrt{t_1\,(t_2-t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{|x|}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2}{2\,(t_2-t_1)}\right\} dm \exp\left\{-\frac{x^2}{2\,t_1}\right\} dx = \\
&\frac{2}{\pi\,\sqrt{t_1\,(t_2-t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m^2}{2\,(t_2-t_1)}\right\} dm \exp\left\{-\frac{x^2}{2\,t_1}\right\} dx \;\; \text{(simetria del integrando)}
\end{aligned}
$$

Antes de proseguir, se hará la siguiente observación:

$$
\begin{aligned}
-\frac{m^2}{2\,(t_2-t_1)} - \frac{x^2}{2\,t_1} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{t_2-t_1} + \frac{x^2}{t_1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{t_1 m^2 + x^2(t_2-t_1)}{t_1(t_2-t_1)}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{am^2 + bx^2}{ab}\right)
\end{aligned}
$$

donde

$$a = t_1$$

$$b = t_2 - t_1$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty}\exp\left\{-\frac{m^2}{2(t_2-t_1)}\right\}dm\,\exp\left\{-\frac{x^2}{2\,t_1}\right\}dx &= \\
\frac{2}{\pi\sqrt{ab}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{am^2+bx^2}{ab}\right)\right\}dm\,dx &= \\
\frac{2}{\pi\sqrt{ab}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{m}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2\right)\right\}dm\,dx &= \\
\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{v\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}du\,dv &= \\
\frac{2}{\pi}\int_{k}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty} r\,\exp\left\{-\frac{1}{2}r^2\right\}dr\,d\theta &= \\
\frac{2}{\pi}\int_{k}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty} r\,\exp\{-u\}\,du\,d\theta &= \\
\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-k\right] &= \\
\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-angsen\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right] &= \\
1-\frac{2}{\pi}\,angsen\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} &
\end{aligned}
$$

□

Corolario 3.3.1 *Sea (Ω,ℓ,P) el espacio de Wiener , $\{B(t)\}_{t\in\Re^+}$. Entonces para todo $x\in(0,1)$ se cumple*

$$P\{\text{ No haya ceros en } (xt,t)\ \}=\frac{2}{\pi}\,angsen\sqrt{x}$$

Capítulo 4

TIPOS DE MOVIMIENTO BROWNIANO

En este capítulo, se estudiarán cinco de las principales variantes del Movimiento Browniano. Estas variantes estudian por un lado, al Movimiento Browniano bajo dos situaciones de especial interes para un proceso estocástico:

i) Cuando el proceso es absorbido en un valor.

ii) Cuando al proceso no se le permite ser negativo.

Por otro lado, se estudia al movimiento Browniano bajo una versión geométrica, una versión integrada y cuando éste tiene alguna tendencia.

4.1 Browniano Absorbido en un Valor

Definición 4.1.1 *Sea $\{X(t)\}$ un movimiento Browniano y sea,*

$T_x = \inf \{t > 0 \mid X(t) = x\}$ *con* $x > 0$.

Defínase $Z(t)$ como:

$$Z(t) = \begin{cases} X(t) & si\ t < T_x \\ x & si\ t \geq T_x \end{cases}$$

entonces $\{Z(t), t \geq 0\}$ es un proceso estocástico que se comporta como un movimiento Browniano que cuando alcanza x se mantiene en ese nivel para siempre.

Distribución

La variable aleatoria $Z(t)$ tiene una distribución que tiene una parte discreta y otra continua. La parte discreta se da cuando se calcula la probabilidad del evento $\{\omega \in \Omega \mid Z(t)(\omega) = x\}$ y la parte continua cuando se calcula la probabilidad del evento $\{\omega \in \Omega \mid Z(t)(\omega) \leq y\}$ para $y < x$.

Parte Discreta

De la definición de $Z(t)$ se desprende que el evento $\{\omega \in \Omega \mid Z(t)(\omega) = x\}$ sucede si y sólo si sucede el evento $\{\omega \in \Omega \mid T_x(\omega) \leq t\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P\{Z(t) = x\} &= P\{T_x \leq t\} \\ &= 2\,P\{X(t) \geq x\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_x^{\infty} \exp\left\{\frac{-y^2}{2t}\right\} dy \end{aligned}$$

Parte Continua

De manera análoga a la parte discreta se obtendrá un evento equivalente para la parte continua. A saber, se afirma que $\{\omega \in \Omega \mid Z(t)(\omega) \leq y\}$ sucede si y sólo si sucede $\{\omega \in \Omega \mid X(t)(\omega) \leq y,\ \max_{0\leq s\leq t} X(s) < x\}$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} P\{Z(t) \leq y\} &= P\left\{X(t) \leq y, \max_{0\leq s\leq t} X(s) < x\right\} \\ &= P\{X(t) \leq y\} - P\left\{X(t) \leq y, \max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\} \\ &= P\{X(t) \leq y\} - P\left\{X(t) \leq y \mid \max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\} P\left\{\max_{0\leq s\leq t} > x\right\} \end{aligned}$$

Ahora bien, el hecho de que $X(t) \leq y$ dado que el $\max_{0\leq s\leq t} X(s) > x$ sucede si y sólo el Browniano alcanzó en el momento $T_x < t$ el nivel x y en el resto del tiempo $(t - T_x)$ tuvo que disminuir en $(x - y)$. Pero esta disminución, es equivalente en probabilidad (por simetría del Browniano) a un incremento de $(x - y)$, es decir, si en T_x se alcanzó un nivel x, entonces en t se llegaría a un nivel $x + (x - y) = 2x - y$. Por lo tanto, se tiene que:

$$P\left\{X(t) \leq y \mid \max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\} P\left\{\max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\} =$$

$$P\left\{X(t) \geq 2x - y \mid \max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\} P\left\{\max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\} =$$

$$P\left\{X(t) \geq 2x - y, \max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\}$$

Nótese que si $X(t) \geq 2x - y = x + (x - y)$, entonces $\max_{0\leq s\leq t} X(s) > x$ por ser $y < x$. Es decir, el evento $\{\omega \in \Omega \mid \max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\} \subset \{\omega \in \Omega \mid X(t) \geq 2x - y\}$. Por lo que,

$$\begin{aligned} P\left\{X(t) \leq y, \max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\} &= P\left\{X(t) \geq 2x - y, \max_{0\leq s\leq t} X(s) > x\right\} \\ &= P\{X(t) \geq 2x - y\} \end{aligned}$$

De donde finalmente se concluye que:

$$\begin{aligned} P\{Z(t) \leq y\} &= P\{X(t) \leq y\} - P\{X(t) \geq 2x - y\} \\ &= P\{X(t) \leq y\} - P\{X(t) \leq y - 2x\} \quad \text{(por simetría de la normal)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{y-2x}^{y} \exp\left\{\frac{-u^2}{2t}\right\} du \end{aligned}$$

Esperanza y Varianza

$Z(t)$ se definió como:

$$Z(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } t < T_x \\ x & \text{si } t \geq T_x \end{cases}$$

de donde se puede escribir a $Z(t)$ como:

$$Z(t) = X(t)\,\chi_{\{t<T_x\}} + x\,\chi_{\{t\geq T_x\}}$$

al cual se le aplica el operador esperanza para obtener:

$$
\begin{aligned}
E\{Z(t)\} &= E\left\{X(t)\,\chi_{\{t<T_x\}}\right\} + E\left\{x\,\chi_{\{t\geq T_x\}}\right\} \\
&= E\{X(t)\}\; E\{\chi_{t<T_x}\} + x\,E\left\{\chi_{\{t\geq T_x\}}\right\} \\
&= x\,P\{t \geq T_x\} \\
&= 2x\,P\{X(t) \geq x\}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
E\{Z(t)\} = 2x\,P\{X(t) \geq x\}
$$

Ahora se obtendría la varianza, para lo cual, se obtendrá antes $E\{Z(t)^2\}$:

$$
\begin{aligned}
E\left\{Z(t)^2\right\} &= E\left\{X(t)^2\,\chi_{\{t<T_x\}} + x^2\,\chi_{\{t\geq T_x\}}\right\} \\
&= E\left\{X(t)^2\right\}\; E\left\{\chi_{\{t<T_x\}}\right\} + x^2\,E\left\{\chi_{\{t\geq T_x\}}\right\} \\
&= Var\{X(t)\}\; P\{t<T_x\} + x^2\,P\{t \geq T_x\}
\end{aligned}
$$

de donde,

$$
\begin{aligned}
Var\{Z(t)\} &= E\left\{Z(t)^2\right\} - (E\{Z(t)\})^2 \\
&= Var\{X(t)\}\; P\{t<T_x\} + x^2\,P\{t \geq T_x\} - x^2\,P\{t \geq T_x\} \\
&= Var\{X(t)\}\; P\{t<T_x\}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
Var\{Z(t)\} = Var\{X(t)\}\; P\{t<T_x\}
$$

4.2 Browniano Reflejado en el Origen

Definición 4.2.1 *Sea $\{X(t)\}$ un movimiento Browniano. Defínase $Z(t)$ como:*

$$Z(t) = \mid X(t) \mid \quad con\ t \geq 0$$

entonces $Z(t)$ es un movimiento Browniano y se le conoce como Browniano reflejado en el origen.

Distribución

Para $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
P\{Z(t) \leq y\} &= P\{\mid X(t) \mid \leq y\} \\
&= P\{X(t) \leq y\} - P\{X(t) \leq -y\} \\
&= P\{X(t) \leq y\} - \{1 - P\{X(t) \leq y\}\} \\
&= 2\,P\{X(t) \leq y\} - 1 \\
&= \left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left\{\frac{-x^2}{2t}\right\} dx\right\} - 1
\end{aligned}$$

Para $y < 0$ se tiene que $P\{Z(t) \leq y\} = 0$.

Esperanza y Varianza

Antes de obtener la esperanza y la varianza de $Z(t)$ haremos notar que:

$$F_{Z(t)}(y) = 2\,F_{X(t)}(y) - 1 \quad \text{para } y \geq 0$$

Por lo tanto,

$$f_{Z(t)}(y) = 2\,f_{X(t)}(y) \quad \text{para } y \geq 0$$

$$\begin{aligned}
E\{Z(t)\} &= E\{\mid X(t) \mid\} \\
&= 2 \int_0^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{-y^2}{2t}\right\} dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{t}} \exp\left\{\frac{-1}{2}\left[\frac{y}{\sqrt{t}}\right]^2\right\} dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\,\omega \exp\left\{\frac{-1}{2}\omega^2\right\} dw \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^\infty \omega \exp\left\{\frac{-1}{2}\omega^2\right\} dw \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^\infty \exp\{-u\}\, du \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\{Z(t)\} &= E\{Z(t)^2\} - \{E\{Z(t)\}\}^2 \\
&= E\{(\mid X(t)\mid)^2\} - \{E\{\mid X(t)\mid\}\}^2 \\
&= E\{X(t)^2\} - \frac{2t}{\pi} \\
&= Var\{X(t)\} - \frac{2t}{\pi} \\
&= t - \frac{2t}{\pi} \\
&= t(1 - \frac{2}{\pi})
\end{aligned}
$$

4.3 Browniano Geométrico

Definición 4.3.1 *Sea $\{X(t)\}$ un movimiento Browniano. Definase $Y(t)$ como:*

$$Y(t) = \exp\{X(t)\}$$

entonces $Y(t)$ es un movimiento Browniano y recibe el nombre de movimiento Browniano Geométrico.

Distribución
Para $y \geq 0$,

$$P\{Y(t) \leq y\} = P\{\exp\{X(t)\} \leq y\}$$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X(t) \leq \ln y\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\ln y} \exp\left\{\frac{-x^2}{2t}\right\} dx
\end{aligned}
$$

Para $y < 0$ se tiene $P\{Y(t) \leq y\} = 0$.

Esperanza y Varianza

Para obtener la esperanza y la varianza de $Y(t)$ se utilizará la función generadora de momentos de $X(t)$, que sabemos se distribuye normal con media cero y varianza t. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
E\{\exp\{s\,X(t)\}\} &= \exp\left\{\frac{t\,s^2}{2}\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{t}{2}\,s^2\right\}
\end{aligned}
$$

Luego entonces,

$$
\begin{aligned}
E\{Y(t)\} &= E\{\exp\{X(t)\}\} \\
&= \exp\left\{\frac{t}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\{Y(t)\} &= E\left\{Y(t)^2\right\} - (E\{Y(t)\})^2 \\
&= E\{\exp\{2\,X(t)\}\} - \exp\{t\} \\
&= \exp\{2t\} - \exp\{t\}
\end{aligned}
$$

4.4 Browniano Integrado

Definición 4.4.1 *Sea $\{X(t)\}$ un movimiento Browniano. Entonces $Z(t)$ definido como*

$$
Z(t) = \int_0^t X(s)\,ds
$$

es llamado movimiento Browniano Integrado.

Esperanza y Varianza

$$
\begin{aligned}
E\{Z(t)\} &= E\left\{\int_0^t X(s)\,ds\right\} \\
&= \int_0^t E\{X(s)\}\;ds \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov\{Z(s), Z(t)\} &= E\{Z(s)Z(t)\} \\
&= E\left\{\int_0^s X(y)\,dy \quad \int_0 X(u)\,du\right\} \\
&= E\left\{\int_0^s \int_0^t X(y)X(u)\,dy\,du\right\} \\
&= \int_0^s \int_0^t E\{X(y)X(u)\}\,dy\,du \\
&= \int_0^s \int_0^t Cov\{X(y)X(u)\}\,dy\,du \\
&= \int_0^s \int_0^t \min(y,u)dy\,du \\
&= \int_0^s \int_u^t u dy\,du + \int_0^s \int_0^u y dy\,du \\
&= \int_0^s \left\{\int_u^t u dy + \int_0^u y dy\right\} du \\
&= \int_0^s \left\{u(t-u) + \frac{u^2}{2}\right\} du \\
&= \int_0^s \left\{ut - \frac{u^2}{2}\right\} du \\
&= \frac{s^2\,t}{2} - \frac{s^3}{6} \\
&= s^2\left(\frac{t}{2} - \frac{s}{6}\right)
\end{aligned}
$$

4.5 Movimiento Browniano con Deriva

4.5.1 Motivación

Retómese el ejemplo de motivación del movimiento Browniano. Como se recordará se suponía que se tenía una cierta partícula que se movía sobre la recta real con *igual probabilidad* cada unidad de tiempo (Δt) una unidad de distancia (Δx) a la derecha o a la izquierda y que asi mismo cada uno de estos movimientos era independiente de cualquier otro. Mantengase la misma pregunta de aquél entonces formulada: ¿ Cuál es la posición de la partícula al tiempo t ?. Pero ahora, no se supondrá que es equiprobable ir hacia la derecha o hacia la izquierda, a saber , supondremos que se tiene una probabilidad p de ir hacia la derecha y una probabilidad de $1-p$ de ir hacia la izquierda.

Para responder a esta pregunta se definirá la variable aleatoria Y_j como:

$$Y_j = \begin{cases} +1 & \text{si el j-ésimo paso de longitud } \Delta x \text{ fue a la derecha} \\ -1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta variable aleatoria Y_j se sabe que:

$$\begin{aligned} P\{Y_j = +1\} &= p \\ P\{Y_j = -1\} &= 1-p \end{aligned}$$

$$Y_j \text{ es independiente de } Y_k \text{ para toda } k \neq j$$

De donde:

$$\begin{aligned} E\{Y_j\} &= 2p-1 \\ Var\{Y_j\} &= 1-(2p-1)^2 \end{aligned}$$

Si se define $X(t)$ como la posición de la partícula al tiempo t entonces

$$X(t) = \Delta x \sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_j$$

de donde $X(t)$ es una variable aleatoria (es suma de variables aleatorias) para la cual se cumple:

$$
\begin{aligned}
E\{X(t)\} &= E\left\{\Delta x \sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_j\right\} \\
&= \Delta x \left[\frac{t}{\Delta t}\right] (2p-1)
\end{aligned}
$$

y que además

$$
\begin{aligned}
Var\{X(t)\} &= Var\left\{\Delta x \sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} X_j\right\} \\
&= (\Delta x)^2 Var\left\{\sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]}\right\} \\
&= (\Delta x)^2 \sum_{j=1}^{[\frac{t}{\Delta t}]} Var\{X_j\} \\
&= (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \left(1-(2p-1)^2\right)
\end{aligned}
$$

De manera totalmente análoga a la motivación dada del Movimiento Browniano en la sección 2.1, se desarrollará de una manera no formal, la forma que asume $X(t)$ al acelerar el proceso ($\Delta t \to 0$), suponiendo que Δx es una función de Δt, es decir, $\Delta x = g(\Delta t)$.

En el ejemplo de motivación se llegó a escoger $g(\Delta t) = c\sqrt{\Delta t}$ bajo el criterio de que $X(t)$ adoptase en el limite una distribución de probabilidad, a saber, el de una normal con media cero y varianza $c^2\, t$, utilizando el Teorema del Limite Central.

Ahora, en el caso de un Browniano con Deriva no nos apartaremos de este criterio manteniendo asi que en el limite $X(t)$ se distribuya como una variable aleatoria normal.

Sin embargo, ahora los parámetros deberán reflejar que el movimiento esta probabilisticamente "cargado" hacia un lado. Esta noción de que el movimiento esta "cargado" hacia un lado, se traducirá geométricamente a que oscile alrededor de una cierta curva, curva para la cual adaptaremos una forma lineal μt donde μ es una constante positiva.

Esta condición geométrica se traduce a pedir que en el limite $E\{X(t)\} = \mu t$ para $t \geq 0$.

Por otro lado se desea que la varianza se mantenga igual (c^2, t). Entonces para encontrar a la función g se harán las siguientes observaciones:

se había obtenido que:

$$
\begin{aligned}
E\{X(t)\} &= \Delta x \left[\frac{t}{\Delta t}\right] (2p-1) \\
Var\{X(t)\} &= (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \left(1-(2p-1)^2\right)
\end{aligned}
$$

Nótese que se puede reescribir a la varianza de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Var\{X(t)\} &= (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \left(1-(2p-1)^2\right) \\
&= (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] - (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] (2p-1)^2 \\
&= (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] - \frac{\left(\Delta x \left[\frac{t}{\Delta t}\right] (2p-1)\right)^2}{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}
\end{aligned}
$$

Observese que si en particular $p = \frac{1}{2}$, debe seguirse cumpliendo que $Var\{X(t)\} \to c^2\, t$. Pero si $p = \frac{1}{2}$ la $Var\{X(t)\}$ se reduciría a $(\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$ **independientemente de cual sea la expresión de Δx**, que como se recordará es la varianza del movimiento Browniano sin Deriva, para el que se tomó $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$. Por tanto, se esta obligado a tomar $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$. De donde se deduce que para que $E\{X(t)\} \to \mu\, t$ cuando $\Delta t \to 0$ se debe cumplirse entonces que $2p - 1 = \mu \sqrt{\Delta t}$.

De esta manera se ha llegado a que la posición de la partícula al tiempo t nos lleva a seleccionar nuevamente $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$. De tal manera que en el limite $X(t) \sim N(\mu t, c^2 t)$.

4.5.2 Definición

En esta subsección se darán dos definiciones del Movimiento Browniano con Deriva. Una de ellas completamente análoga a la definició 2.2.3 y otra en términos del Movimiento Browniano Estandar.

Definición 4.5.1 *Un proceso estocástico $\{D(t)\}_{t\in\Re+}$ definido en (Ω, ℓ, P) es un Movimiento Browniano con deriva que comienza en 0 si cumple con las siguientes condiciones:*

i) $P\{D(0) = 0\} = 1$.

ii) $\{D(t)\}_{t\in\Re+}$ *tiene incrementos estacionarios e independientes.*

iii) Para cada $t > 0$, $D(t) \sim N(\mu t, c^2 t)$ *con* $c > 0$ *y* $\mu \in \Re$.

Definición 4.5.2 *Un proceso estocástico $\{\mu(t)\}_{t\in\Re+}$ definido en (Ω, ℓ, P) como $\mu(t) = B(t) + \mu t$ donde $B(t)$ es un Movimiento Browniano Estándar, $\mu \in \Re$ y $t \geq 0$.*

Capítulo 5

Aplicaciones del Movimiento Browniano

En el presente capítulo se exponen cuatro aplicaciones del Movimiento Browniano. Las dos primeras de estas aplicaciones se sustentan en la Propiedad de Invarianza del Movimiento Browniano y consisten en el cálculo de la distribución límite del tiempo de espera del n-ésimo cliente para empezar a ser atendido en un Modelo G-G-1 de Teoría de Colas[1] y en el cálculo de la distribución limite de la Estadística de Kolmogorov - Smirnov. Las otras dos aplicaciones que se enuncian se encuentran en el terreno de las finanzas y emanan por el supuesto de considerar que la tasa de crecimiento de los precios se comporta, en términos de distribución de probabilidad, como una variable aleatoria lognormal.

5.1 El Modelo G-G-1

5.1.1 Descripción del Modelo G-G-1

Este Modelo supone que las llegadas ocurren de acuerdo a un proceso de renovación, que los tiempos de servicio de atención a clientes sucesivos son independientes e idénticamente distribuidos y que se cuenta con un sólo supervisor. Se adopta la siguiente notación para la descripción del mecanismo:

i) σ_{n+1} : Tiempo entre la llegada del n-ésimo y el $n+1$-ésimo.

[1] el cual se describirá en la primera sección del presente capítulo

ii) t_n : Tiempo en el que el n-ésimo cliente llega y se define como:

$$t_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j$$

iii) $\nu(t)$: La función de renovación de conteo y se define como:

$$\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{t_k \leq t\}}$$

iv) τ_n : Tiempo de atención del n-ésimo cliente.

v) ω_n : El tiempo de espera del n-ésimo cliente para empezar a ser atendido.

vi) a : Tasa de llegada.

vii) b : Tasa de Atención.

viii) ρ : Intensidad de Tráfico, que se define como:

$$\rho = \frac{a}{b}$$

Se hacen los siguientes supuestos:

i) $\{\sigma_n\}_{n \in N}$ son independientes e idénticamente distribuidos, con distribución común $A(x)$ y $E\{\sigma_1\} = \frac{1}{a} < \infty$.

ii) $\{\tau_n\}_{n \in N \cup \{0\}}$ son independientes e idénticamente distribuidos, con distribución común $B(x)$ y $E\{\tau_0\} = \frac{1}{b} < \infty$.

5.1.2 Aplicación del Movimiento Browniano

La aplicación del Movimiento Browniano al modelo G-G-1 radica en la obtención de la distribución límite de ω_n. Para tal efecto, se hará ver que ω_n se distribuye como una función de sumas parciales de X_i que es continua casi seguramente sobre la trayectoria del Browniano para concluir, por el Teorema de Invarianza, que esta función converge en distribución a la función compuesta con el Browniano Estándar.

Para hacer ver que ω_n se distribuye como una función de sumas parciales de X_i se hace primero notar la siguiente relación de recurrencia:

$$\omega_{n+1} = (\omega_n + \tau_n - \sigma_{n+1})^+ \quad \text{para } n \geq 0$$

donde:

$$x^+ = \max\{0, x\} \quad x \in \Re$$

Defínase para $n \geq 0$

$$X_{n+1} = \tau_n - \sigma_{n+1}$$

donde claramente de los supuestos del modelo se cumple que $\{X_{n+1}\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tiene media

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{a-b}{b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)(\rho - 1) \end{aligned}$$

Con esta definición, se puede escribir la relación de recurrencia como:

$$\omega_{n+1} = (\omega_n + X_{n+1})^+ \quad \text{para } n \geq 0$$

Proposición 5.1.1 *Sea ω_n el tiempo de espera del n-ésimo cliente para empezar a ser atendido en el modelo G-G-1. Entonces*

$$\begin{aligned} \omega_n &= \max\left\{0, X_n, X_n + X_{n-1}, \ldots, \sum_{i=2}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \\ &\stackrel{d}{=} \bigvee_{j=1}^{n} S_j \end{aligned}$$

donde:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Demostración

La Demostración se hará por inducción:

Para $n = 1$ se cumple trivialmente.

Supóngase cierto para n.

$$\begin{aligned}
\omega_{n+1} &= (\omega_n + X_{n+1})^+ \\
&= \left(\max\left\{0, X_n, X_n + X_{n-1}, \ldots, \sum_{i=2}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} + X_{n+1}\right)^+ \\
&= \left(\max\left\{X_{n+1}, X_{n+1} + X_n, \ldots, \sum_{i=2}^{n+1} X_i, \sum_{i=1}^{n+1} X_i\right\}\right)^+ \\
&= \max\left\{0, X_{n+1}, X_{n+1} + X_n, \ldots, \sum_{i=2}^{n+1} X_i, \sum_{i=1}^{n+1} X_i\right\}
\end{aligned}$$

Ahora se demostrará que:

$$\omega_n \stackrel{d}{=} \bigvee_{j=1}^{n} S_j$$

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \max\left\{0, X_n, X_n + X_{n-1}, \ldots, \sum_{i=2}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \\
&\stackrel{d}{=} \max\left\{0, X_1, X_1 + X_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \\
&= \max\{0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_n\} \\
&= \bigvee_{j=1}^{n} S_j
\end{aligned}$$

Proposición 5.1.2 *Para el tiempo de espera W_n del modelo G-G-1 se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) Si $\rho = 1$ y $Var\{X_1\} = \sigma < \infty$, entonces para $x > 0$ se cumple que

$$P\left\{\frac{W_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} \to P\left\{max_{0\leq t\leq 1}B(t) \leq x\right\}$$

ii) Si $\rho < 1$, entonces $W_\infty \equiv \bigvee_{j=1}^{\infty} S_j$ y además se cumple que:

$$P\{W_n \leq x\} \to P\{W_\infty \leq x\}$$

iii) Si $\rho > 1$, entonces

$$\frac{W_n}{n} \to \mu = \frac{\rho - 1}{a} \text{ c.s.}$$

Demostración

i):

El hecho de que $\rho = 1 \Rightarrow \mu = 0$, por tanto, S_n es la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidos con media cero y varianza finita, lo que hace aplicable el Teorema de Invarianza.

En primer lugar, de la proposición anterior se tiene que:

$$P\left\{\frac{W_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} = P\left\{\frac{\bigvee_{j=1}^{n} S_j}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\}$$

Sea $X^{(n)}(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}$. Entonces,

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\bigvee_{j=1}^{n} S_j}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} &= P\left\{\max_{0\leq t\leq 1} X^{(n)}(t) \leq x\right\} \\ &\to P\left\{\max_{0\leq t\leq 1} B(t) \leq x\right\} \quad \text{(Por el Teorema de Invarianza)} \end{aligned}$$

donde

$B(t)$ es un Movimiento Browniano Estándar ii):

Por hipótesis $\rho < 1 \Rightarrow \mu < 0$. Por la Ley Fuerte de los Grandes Números se cumple que:

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} \to \mu < 0 \ c.s$$

Por tanto,

$$S_n \to -\infty \ c.s. \Rightarrow W_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} s_j < \infty$$

De donde,

$$\begin{aligned} P\{W_n \le x\} &= P\left\{\bigvee_{j=1}^{n} S_j \le x\right\} \\ &\to P\left\{\bigvee_{j=1}^{\infty} S_j \le x\right\} \\ &= P\{W_\infty \le x\} \end{aligned}$$

iii):

Por hipótesis $\rho > 1 \Rightarrow \mu > 0$. Por la Ley Fuerte de los Grandes Números se cumple que:

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} \to \mu > 0 \ c.s$$

Por tanto,

$$S_n \to \infty \ c.s.$$

De donde $W_n \to \infty$ c.s. cuando $n \to \infty$ ($W_n \ge S_n$). Luego entonces, existe $\nu = sup\{n \in N \mid W_n = 0\}$ tal que $P\{\nu < \infty\} = 1$. De donde para $k \ge 1$ se debe cumplir que:

i) $W_{\nu+k} > 0$ para $k \ge 1$.

ii) $W_{\nu+k} = S_{\nu+k} - S_\nu$.

Luego entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{n} = \lim_{k\to\infty} \frac{W_{\nu+k}}{\nu + k}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{S_{\nu+k}}{\nu+k} - \frac{S_\nu}{\nu+k}\right)$$
$$= \mu$$

□

5.2 Estadística de Kolmogorov Smirnov

5.2.1 Descripción de la Estadística de Kolmogorov-Smirnov

Supóngase que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n y se desea probar la hipótesis simple H_o de que la muestra proviene de una función de distribución $F(x)$ versus la hipótesis alternativa que afirma que H_o es falsa. La idea para realizar esta prueba de hipótesis es buscar un estadístico que en algún sentido se asemeje de manera significativa a la función de distribución verdadera a medida que la muestra aumente de tamaño. Seguramente, bajo esta idea, el estadístico que se propondría en primera instancia sería precisamente la distribución empírica de la muestra que, como se recordará, tiene la notable propiedad de converjer de manera uniforme a la distribución verdadera conforme la muestra aumenta de tamaño. Asumiendo la distribución empírica como el estadístico que se adoptará para la prueba , el criterio que se tomarápara la prueba de hipótesis será el grado de discrepancia entre la distribución empírica y la distribución que se asume en H_o, de tal manera que si esta discrepancia es significativamente grande se rechaza H_o y si no es asi se acepta.

La discrepancia entre la función de distribución empírica y la distribución asumida bajo H_o se puede medir de muy diferentes maneras. Una de las más populares es la de medirla como:

$$sup_{x\in\Re} \mid F_n(x) - F(x) \mid$$

valor al que se le denota como D_n y que se le conoce como la estadística de Kolmogorov-Smirnov.

5.2.2 Aplicación del Movimiento Browniano

La Estadística de Kolmogorov-Smirnov es una estadística que presenta propiedades interesantes que involucran la aplicación del Movimiento Browniano. A continuación se expondrán estas propiedades, para las que por cierto, se tomará no precisamente la Estadística de Kolmogorov Smirnov, sino una transformación biyectiva de la misma a saber $\sqrt{n}\ D_n$, que claramente no altera la prueba de hipótesis.

Antes de exponer la primera de estas propiedades se definirá el concepto de intervalo de estabilidad que se utilizará en la demostración de la primer proposición.

Definición 5.2.1 *Sea $I \subset \Re$ un intervalo y $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Se dice que I es estable con respecto la distribución $F(x)$ si $P\{Y \in I\} = 0$ para Y con distribución $F(x)$ y para todo $M \supset I$ se cumple que $P\{Y_1 \in M\} > 0$.*

Proposición 5.2.1 *Sea D_n^* definida como $D_n^* = \sqrt{n}\, sup_{x\in\Re} \mid F_n(x) - F(x) \mid$ con $F(x)$ función de distribución y $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas. Entonces, D_n^* tiene la misma distribución para cualquier función de distribución $F(x)$ continua.*

Demostración

Sea $B = \{I \subset \Re \mid I \text{ es intervalo estable }\}$.

En primer lugar, se hacen dos observaciones importantes:

i) $D_n^* = \sqrt{n}\, sup_{x\in B^c} \mid F_n(x) - F(x) \mid$.

ii) $\{Y_k < x\} = \{F(Y_k) < F(x)\}$ para $x \in B^c$ y $k \geq 1$.

Sea $U_k = F(Y_k)$ y $G_n(y) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \chi_{U_j < y}}{n}$. Entonces de las observaciones i) y ii) se cumple que:

$$\begin{aligned} D_n^* &= \sqrt{n}\, sup_{x\in B^c} \mid G_n(F(x)) - F(x) \mid \\ &= \sqrt{n}\, sup_{x\in\Re} \mid G_n(F(x)) - F(x) \mid \\ &= \sqrt{n}\, sup_{y\in(0,1)} \mid G_n(y) - y \mid \\ &= \sqrt{n}\, sup_{y\in[0,1]} \mid G_n(y) - y \mid \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

Manteniéndose la última igualdad debido a que $P\{U_1 = 0\} = P\{U_1 = 1\} = 0$.

Nótese que si $x = inf\,\{k \mid F(k) = y\}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} P\{U_1 < y\} &= P\{F(Y_1) < F(x)\} \\ &= P\{Y_1 < x\} \\ &= F(x) \\ &= y \end{aligned}$$

Por tanto U_1 es uniforme [0,1].

Luego entonces,

$$D_n^* = \sqrt{n}\, sup_{y\in[0,1]} \mid G_n(y) - y \mid \ c.s.$$

tiene la misma distribución para todo $F(x)$ continua, ya que, se reduce a considerar el caso en que se tengan variables aleatorias uniformes [0,1].

Considérense pues $U_1, \ldots, U_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformes [0,1]. Defínanse las Estadísticas de Orden de la siguiente manera: $U_1^{(n)}$ como la más pequeña, $U_2^{(2)}$ como la segunda más pequeña y asi sucesivamente. Claramente, el máximo de $\mid G_n(y) - y \mid$ debe ocurrir en alguno de los escalones de $G_n(y)$, que son los puntos $U_k^{(n)}$ y para los cuales se sabe que:

$$G_n(U_k^{(n)}) = \frac{k-1}{n} \text{ para } k \geq 1$$

De donde,

$$D_n = \sqrt{n} \max_{k \leq n} \mid U_k^{(n)} - (\frac{k}{n}) \mid$$

□

El hecho de que el Teorema de Invarianza sea aplicable radica en que $U_1^{(n)}, \ldots U_n^{(n)}$ se comporta como una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Esta afirmación se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.2.2 *Sean $W_1, \ldots, W_n, \ldots$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$ y sea $Z_n = \sum_{j=1}^{n} W_j$. Entonces, $U_k^{(n)}$ con $k = 1, \ldots, n$ tiene la misma distribución conjunta que $\frac{Z_k}{Z_n}$ con $k = 1, \ldots, n$.*

Demostración

Primeramente, se obtendrá la distribución conjunta de $Z_1, \ldots Z_n$ para $0 \leq X_1 \ldots \leq X_n$.

$$
\begin{aligned}
& f_{Z_1,\ldots,Z_{n+1}}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\
&= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \Delta x_i} P\left\{x_i < Z_i \leq x_i + \Delta x_i \; i = 1, \ldots, n\right\} \\
&= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \Delta x_i} P\left\{x_i - x_{i-1} < W_i \leq x_i - x_{i-1} + \Delta x_i \; i = 1, \ldots, n\right\} \\
&= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \Delta x_i} \prod_{i=1}^{n+1} P\left\{x_i - x_{i-1} < W_i \leq x_i - x_{i-1} + \Delta x_i\right\} \\
&= \lim_{\Delta x_i \to 0} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{F(x_i - x_{i-1} + \Delta x_i) - F(x_i - x_{i-1})}{\Delta x_i} \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{F(x_i - x_{i-1} + \Delta x_i) - F(x_i - x_{i-1})}{\Delta x_i} \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} f(x_i - x_{i-1}) \\
&= \exp\{-x_1\} \exp\{-(x_2 - x_1)\} \ldots \exp\{-(X_{n+1} - X_n)\} \\
&= \exp\{-x_{n+1}\}
\end{aligned}
$$

De probabilidad elemental, se sabe que Z_{n+1} se distribuye Gamma$(n+1, 1)$, es decir,

$$
f_{Z_{n+1}}(y) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} y^n \exp\{-y\} = \frac{y^n \exp\{-y\}}{n!}
$$

Por tanto,

$$
f_{Z_1,\ldots,Z_n | Z_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \begin{cases} n! x_{n+1}^{-n} & \text{si } 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

De donde utilizando el Teorema de Cambio de Variable, se concluye que:

$$
f_{Y_1,\ldots,Y_n | Z_{n+1} = x_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}) = \begin{cases} n! & \text{para } 0 \leq y_1 \leq \ldots y_n \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

donde $Y_k = \frac{Z_k}{Z_{n+1}}$

Por tanto,

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots,y_n) = \begin{cases} n! & \text{para } 0 \leq y_1 \leq \ldots y_n \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por otro lado, de resultados básicos sobre Estadísticas de Orden se concluye que:

$$f_{V_1^{(n)},\ldots,V_n^{(n)}}(v_1,\ldots,v_n) = \begin{cases} n!\prod_{j=1}^{n} f(y_j) & \text{para } 0 \leq v_1 \ldots \leq v_n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $f(x)$ es la distribución de la variable aleatoria V

y $V(k)$ es la k-ésima estadística de orden

Por tanto en particular se cumple que:

$$f_{U_1^{(n)},\ldots,U_n^{(n)}}(y_1,\ldots,y_n) = \begin{cases} n! & \text{para } 0 \leq y_1 \ldots \leq y_n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
D_n &\stackrel{d}{=} \sqrt{n}\, max_{k\leq n} \mid \frac{Z_k}{Z_{n+1}} - (\frac{k}{n}) \mid \\
&= \sqrt{n}\, max_{k\leq n} \mid \frac{Z_k}{Z_{n+1}} - (\frac{k}{n})(\frac{Z_{n+1}}{Z_{n+1}}) \mid \\
&= \frac{\sqrt{n}}{Z_{n+1}} max_{k\leq n} \mid Z_k - (\frac{k}{n})(Z_{n+1}) \mid \\
&= \frac{n}{Z_{n+1}} max_{k\leq n} \mid \frac{Z_k}{\sqrt{n}} - (\frac{k}{n})(\frac{Z_{n+1}}{\sqrt{n}}) \mid \\
&= \frac{n}{Z_{n+1}} max_{k\leq n} \mid \frac{Z_k - k}{\sqrt{n}} - (\frac{k}{n}) \left(\frac{Z_{n+1} - n}{\sqrt{n}}\right) \mid \\
&= \frac{n}{Z_{n+1}} max_{k\leq n} \mid \frac{Z_k - k}{\sqrt{n}} - (\frac{k}{n}) \left(\frac{Z_{n+1} - Z_n}{\sqrt{n}} + \frac{Z_n - n}{\sqrt{n}}\right) \mid \\
&= \frac{n}{Z_{n+1}} max_{k\leq n} \mid \frac{Z_k - k}{\sqrt{n}} - (\frac{k}{n}) \left(\frac{W_{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - (\frac{k}{n}) \left(\frac{Z_n - n}{\sqrt{n}}\right) \mid
\end{aligned}$$

Nótese que debido a que $E\{W_1\} = 1$ y que $Var\{W_1\} = 1$ se cumple, por la Ley Fuerte de los Grandes Números, que $\frac{n}{Z_{n+1}} \xrightarrow{c.s.} 1$ y por otro lado que $Z_k - k$ es una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno. Sea $S_k = Z_k - k$ y $X^{(n)}(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}$ e ignórense el término $\frac{n}{Z_{n+1}}$ y los de términos de orden $\frac{1}{\sqrt{n}}$, entonces D_n^* se puede expresar de la forma:

$$D_n^* = sup_{0 \leq t \leq 1} \mid X^{(n)}(t) - t\, X^{(n)}(1) \mid$$

Claramente $sup_{0 \leq t \leq 1} \mid X(t) - t\, X(1) \mid$ es una función continua, en particular sobre la trayectoria del Movimiento Browniano. Por tanto, aplicando el Teorema de Invarianza se concluye que:

$$D_n^* \xrightarrow{d} sup_{0 \leq t \leq 1} \mid X(t) - t\, X(1) \mid$$

□

5.3 El Modelo Black-Scholes

5.3.1 Descripción

Una opción es un instrumento financiero que brinda el derecho, más no la obligación, de comprar o vender una cantidad determinada de un bien (bien subyacente) a un precio preestablecido (precio de ejercicio) dentro de un periodo determinado y su función primordial es la de proteger al dueño de la misma contra fluctuaciones desfavorables del precio del bien sobre el que se contrata la opción.

Existen fundamentalmente dos clasificaciones de opciones:

1. Por el tipo de derecho que se ejerce (compra o venta).

2. Por el momento en que se permite ejercer la opción.

Con respecto al primer criterio de clasificación se tienen:

i) Opciones call (de compra) .

ii) Opciones put (de venta).

Con respecto al segundo criterio de clasificación se tienen:

i) Opciones tipo europeo (sólo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento)

ii) Opciones tipo americano (se pueden ejercer en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento).

Como se mencionaba en la definición las opciones tiene como función primordial la de proteger al tenedor de la misma contra fluctuaciones desfavorables del precio del bien subyacente. Por ejemplo: si se compra un call europeo se ejercerá éste si el precio del bien subyacente esta por arriba del precio del ejercicio (se compra más barato que en el mercado) y si se compra un put europeo éste se ejerce siempre y cuando el precio del bien subyacente esta por abajo del precio del ejercicio (se vende más caro que en el mercado).

Para la determinación del precio de una opción existe una relación importante entre el precio de un call y el precio de un put bajo el supuesto de un mercado eficiente[2]. Esta relación, denominada como de paridad, establece básicamente que a través de la combinación de distintos instrumentos (opciones, bonos, valores, etc.) se puede duplicar el patrón de pago de un call en términos de un put y viceversa. A saber la relación de paridad que se establece es:

$$C - P = S_t - K\,V^{\tau}$$

donde

C : Precio del Call

P : Precio del Put

$V = \dfrac{1}{(1+R)^{\tau}}$

S_t : Precio del Bien subyacente al tiempo t , $0 \leq t \leq T$

$\tau = T - t$

T : La fecha de vencimiento

De esta manera, bajo el supuesto de estar trabajando en un mercado eficiente, basta obtener el precio de un tipo de opción (compra/venta) para obtener el otro

[2]Mercado Eficiente: aquél en que los precios de los valores reflejan por completo toda la información disponible

(venta/compra). Ahora bien, normalmente los modelos que se utilizan para determinar el valor de una opción lo hacen para una opción de tipo call.

Entre los modelos de valuación de opciones que existen, el más aceptado en el medio financiero es el modelo de Black-Sholes, el cual modela el logaritmo de la tasa de retorno del precio del bien subyacente como un Movimiento Browniano con Drift.

5.3.2 Aplicación del Movimiento Browniano

Supuestos

El modelo de Black-Scholes que se desarrollará aquí contempla únicamente el caso de las opciones europeas y parte de los siguientes cuatro supuestos:

1. Los mercados de opciones, bonos y acciones operan continuamente y en ausencia de costos de transacción, impuestos o controles.

2. La Tasa de interés (libre de riesgo) es constante a lo largo de la vida de la opción opción. (r)

3. El Instrumento subyacente no paga dividendos.

4. El precio del bien a vencimiento de la opción se distribuye lognormal de la siguiente manera:

$$\ln\left\{\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right\} = \mu\,\Delta t + \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,Z$$

donde

S_t : Precio del bien al tiempo t

μ : Media del logaritmo del retorno por unidad de tiempo ($\mu = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$)

α : Media del retorno por unidad de tiempo

σ : Desviación estándar del logaritmo del retorno por unidad de tiempo

Z : Variable Aleatoria Normal Estándar

Comentario

Nótese que (*) se puede escribir como:

$$\ln\left\{\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right\} = \mu\,\Delta t + \Delta Z_t$$

donde

$$\begin{aligned} Z_t &: \quad \text{Variable Aleatoria Normal con media cero y varianza } \sigma^2 t \\ \Delta Z_t &= Z_{t+\Delta t} - Z_t \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\ln\left\{\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right\} \sim N(\mu\,\Delta t, \sigma^2\,\Delta t)$$

Desarrollo

De los supuestos del Modelo se demuestra[3] que se puede construir un portafolio que involucre a la opción y al bien subyacente de tal manera que se pueda reproducir un instrumento libre de riesgo, supuesto bajo el cual se cumple que:

$$C_t = E\{C_T\}\ \exp\{-r\,\tau\}$$

Puesto que $C_T = \max\{0, S_T - K\}$ se cumple entonces que,

$$C_t = E\{\max\{0, S_T - K\}\}\ \exp\{-r\,\tau\}$$

donde

$$\begin{aligned} E\{\max\{0, S_T - K\}\} &= E\{\max\{0, S_T - K\} \mid S_T > K\}\ P\{S_T > K\} + \\ &\quad E\{\max\{0, S_T - K\} \mid S_T \leq K\}\ P\{S_T \leq K\} \end{aligned}$$

[3]Ver Option Pricing (Jarrow, Rudd) pag 100

$$
\begin{aligned}
&= E\{\max\{0, S_T - K\} \mid S_T > K\}\ P\{S_T > K\} \\
&= E\{S_T - K \mid S_T > K\}\ P\{S_T > K\} \\
&= E\{S_T \mid S_T > K\}\ P\{S_T > K\} - \\
&\quad E\{K \mid S_T > K\}\ P\{S_T > K\} \\
&= E\{S_T \mid S_T > K\}\ P - E\{K \mid S_T > K\}\ P
\end{aligned}
$$

donde

$$P = P\{S_T > K\}$$

Cálculo de P

$$
\begin{aligned}
P\{S_T > K\} &= P\left\{Z > \frac{\ln\left\{\frac{K}{S_t}\right\} - \mu\,\tau}{\sigma\,\sqrt{\tau}}\right\} \\
&= P\left\{Z > -\left[\frac{\ln\left\{\frac{S-t}{K}\right\} + \mu\,\tau}{\sigma\,\sqrt{\tau}}\right]\right\} \\
&= P\left\{Z < \frac{\ln\left\{\frac{S-t}{K}\right\} + \mu\,\tau}{\sigma\,\sqrt{\tau}}\right\}
\end{aligned}
$$

Sea $Q = E\{S_T \mid S_T > K\}\ P$

Cálculo de Q

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_K^\infty S_t\,\exp\{\mu\,\tau + \sigma\sqrt{\tau}\,x\}\,\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\,\frac{dx}{\sqrt{2\,\pi}} \\
&= \int_K^\infty S_t\,\exp\left\{\mu\,\tau + \sigma\sqrt{\tau}\,x - \frac{x^2}{2}\right\}\,\frac{dx}{\sqrt{2\,\pi}} \\
&= \int_K^\infty S_t\,\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \mu\,\tau + \sigma\sqrt{\tau}\,x - \frac{x^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\right\}\,\frac{dx}{\sqrt{2\,\pi}} \\
&= S_t\,\exp\left\{\mu\,\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\}\int_K^\infty \exp - \left\{\frac{x}{2} - \frac{\sigma\,\sqrt{\tau}}{2}\right\}^2\,\frac{dx}{\sqrt{2\,\pi}}
\end{aligned}
$$

Para simplificar esta última expresión se hará notar lo siguiente: bajo el supuesto de neutralidad al riesgo que se esta trabajando se demuestra[4] que:

$$E\left\{\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right\} = \exp\left\{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta\, t\right\}$$

$$\text{Por tanto : } r = \mu + \tfrac{\sigma^2}{2}$$

Por tanto, se cumple que:

$$Q = S_t \exp\{\tau\, r\} \int_K^{\infty} \exp - \left\{\frac{x}{2} - \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right\}^2 \frac{dx}{\sqrt{2\,\pi}}$$

5.4 Un Problema de Bandas

Existen una gran diversidad de problemas financieros que se pueden representar en términos del comportamiento de una cierta variable entre dos o más bandas a saber, el comportamiento de los tipos de cambio se puede plantear de esta manera. Si para estos problemas se supone además que el comportamiento de la variable sigue a un Movimiento Browniano Estándar se pueden obtener resultados interesantes. Por ejemplo, considérese el siguiente problema:

5.4.1 Problema

Calcular la probabilidad de que un Movimiento Browniano Estandar le pegue primero a A que a $-B$, con $A, B > 0$

Defínase $F(x)$ como:

$$F(x) = P\,\{X(t) \text{ alcance A antes que -B } \mid X_o = x\}$$

Para calcular esta probabilidad se definirán primeramente:

$$\begin{aligned}
T_a &= \inf\{t \geq 0 \mid X(t) = a\} \\
P^x\{.\} &= \text{medida de probabilidad sobre un Movimiento Browniano que comienza en } x \\
E^x\{.\} &= \text{esperanza de un Movimiento Browniano que comienza en } x
\end{aligned}$$

[4] Ver Option Pricing (Jarrow, Rudd) pag 90

Además se partirtá el espacio de probabilidad Ω de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega \in \Omega \mid h < T_A(\omega)\} \cup \{\omega \in \Omega \mid h \geq T_A(\omega)\} \\ &= U \cup V\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}U &= \{\omega \in \Omega \mid h < T_A(\omega)\} \\ V &= \{\omega \in \Omega \mid h \geq T_A(\omega)\}\end{aligned}$$

De esta manera se cumple que:

$$\begin{aligned}F(x) &= P^x\{T_A < T_{-B}\} \\ &= P^x\{T_A < T_{-B}, U\} + P^x\{T_A < T_{-B}, V\} \\ &= P^x\{h < T_A < T_{-B}\} + P^x\{T_A < T_{-B}, V\} \\ &= E^x\left\{E^x\left\{\chi_{h<T_A<T_{-B}} \mid X_h\right\}\right\} + P^x\{T_A < T_{-B}, V\} \\ &= E^x\left\{E^x\left\{\chi_{T_A\circ\theta_h<T_{-B}\circ\theta_h} \mid X_h\right\}\right\} + P^x\{T_A < T_{-B}, V\} \\ &= E^x\{E_{x_h}\{T_A < T_{-B}\}\} + P^x\{T_A < T_{-B}, V\} \quad \text{Por la Propiedad de Markov} \\ &= E^x\{F(X_h)\} + P^x\{T_A < T_{-B}, V\}\end{aligned}$$

Ahora nótese que:

$$\begin{aligned}P^x\{T_A < T_{-B}, V\} &\leq P^x\{V\} \\ &= P^x\{T_A \leq h\} \\ &= 2\,P^x\{X_h \geq A\} \quad \text{Por el Principio de Reflexión} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\,\pi\,h}} \int_A^\infty \exp\left\{\frac{-u^2}{2\,h}\right\} du\end{aligned}$$

De donde haciendo el cambio de variable $u^2 = \frac{h^2\,A^2}{v}$ se cumple que:

$$du = h\,A\,(-\frac{1}{2})\,y^{-\frac{3}{2}}\,dy$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{2\,\pi\,h}}\int_A^\infty \exp\left\{\frac{-u^2}{2\,h}\right\}\,du &= \frac{2\,\sqrt{h}}{\sqrt{2\,\pi\,h}}\int_0^h \sqrt{h}\,A\,(-\frac{1}{2})\,y^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{\frac{-A^2}{2\,y}\right\}\,dy \\
&= \frac{A\,\sqrt{h}}{\sqrt{2\,\pi}}\int_0^h y^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{\frac{-A^2}{2\,y}\right\}\,dy
\end{aligned}$$

Observese que:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0}\frac{y^{-\frac{3}{2}}}{\exp\left\{\frac{A^2}{2\,y}\right\}} &= \lim_{y\to 0}\frac{(-\frac{3}{2})\,y^{-\frac{5}{2}}}{(-\frac{A^2}{2\,y^2})\,\exp\left\{\frac{A^2}{2\,y}\right\}} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{3\,y^{-\frac{1}{2}}}{A^2\,\exp\left\{\frac{A^2}{2\,y}\right\}} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{(-\frac{3}{2})\,y^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{A^4}{2})\,\exp\left\{\frac{A^2}{2\,y}\right\}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^h y^{-\frac{3}{2}}\,\exp\left\{-\frac{A^2}{2y}\right\}\,dy \le k\,h$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
P^x\{T_A < T_{-B}, V\} &\le \frac{2}{\sqrt{2\,\pi\,h}}\int_A^\infty \exp\left\{\frac{-u^2}{2\,h}\right\}\,du \\
&\le \frac{A\,k\,h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}
\end{aligned}$$

Puesto que $\frac{A k h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ es un $o(h)$ se cumple que $P^x\{T_A < T_{-B}, V\}$ es un $o(h)$. De esta manera se puede escribir

$$F(x) = E^x\{F(X_h)\} + o(h)$$

Sea $Y = X(h) - X(o)$ $(X(h) = X_o + Y)$. Por tanto,

$$E^x\{F(X(h))\} + o(h) = E\{F(Y + x)\} + o(h)$$

Expandiendo $F(Y + x)$ en series de Taylor alrededor de x se tiene que:

$$F(Y + x) = F(x) + F'(x)\,Y + F''(x)\,\frac{Y^2}{2} + \frac{1}{2}\int_x^{X_h} (x - t)^2\, F^{(3)}(t)\, dt$$

donde

$$Y = X(h) - X(o) \sim N(0, h)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E^x\{F(Y + x)\} &= F(x) + F'(x)\,E\{Y\} + F''(x)\,E\left\{\frac{Y^2}{2}\right\} + E\left\{\frac{1}{2}\int_x^{X_h} (x - t)^2\, F^{(3)}(t)\, dt\right\} \\
&= F(x) + F''(x)\,\left[\frac{h}{2!}\right] + E\left\{\frac{1}{2}\int_x^{X_h} (x - t)^2\, F^{(3)}(t)\, dt\right\} \\
&= F(x) + F''(x)\,\left[\frac{h}{2!}\right] + E\left\{\frac{1}{2}\int_x^{X_h} (x - t)^2\, F^{(3)}(t)\, dt\right\}
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que:

$$E\left\{\frac{1}{2}\int_x^{X_h} (x - t)^2\, F^{(3)}(t)\, dt\right\} = 0$$

De donde,

$$\begin{aligned} F(x) &= E\{F(Y+x)\} + o(h) \\ &= F(x) + F''(x)\ \left[\frac{h}{2!}\right] + o(h) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$F(x) = F(x) + F''(x)\ \left[\frac{h}{2!}\right] + o(h)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$F''(x)\ \left[\frac{h}{2!}\right] = -o(h)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$F''(x)\ \left[\frac{1}{2!}\right] = \frac{-o(h)}{h}$$

de donde al tomar el límite cuando $h \to 0$ se cumple que

$$\frac{F''(x)}{2} = 0$$

Integrando esta ecuación se obtiene que:

$$F'(x) = C_1 \ \text{ con } C_1 \in \Re$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$F(x) = C_1\, x + C_2 \ \text{ con } C_2 \in \Re$$

Ahora se obtendrán C_1 y C_2 de las condiciones de frontera:

i) $F(A) = 1$.

ii) $F(-B) = 0$.

Por tanto, se cumple el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= C_1\, A + C_2 \\ 0 &= -C_1\, B + C_2 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} C_2 &= 1 - C_1\, A \\ C_2 &= C_1\, B \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 - C_1\, A = C_1\, B$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{A+B} \\ C_2 &= \frac{B}{A+B} \end{aligned}$$

De donde finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{A+B} + \frac{B}{A+B} \\ &= \frac{x+B}{A+B} \\ &= \frac{x-(-B)}{A-(-B)} \end{aligned}$$

De manera similar, si se asume un comportamiento de un Movimiento Browniano con deriva con parámetro μ se llega a que:

$$F(x) = \frac{\exp\{2\,\mu\,B\} - \exp\{-2\,\mu\,x\}}{\exp\{2\,\mu\,B\} - \exp\{-2\,\mu\,A\}}$$

Observación

Dada la expresión anteriormente obtenida, se puede calcular la probabilidad del evento de que el Movimiento Browniano con deriva $D(t)$ con parámetro μ sea mayor o igual que $A > 0$. Para tal efecto, defínanse:

$$\begin{aligned} G &= \{\omega \in \Omega \mid D(t)(\omega) \geq A, D(0) = 0\} \\ H_B &= \{\omega \in \Omega \mid T_A(\omega) < T_{-B}(\omega), D(0) = 0\} \end{aligned}$$

Entonces,

$$G = \bigcup_{B>0} H_B \quad \text{y que } H_B \subset H_{B+\epsilon} \quad \text{para } \epsilon > 0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P\{G\} &= P\left\{\bigcup_{B>0} H_B\right\} \\ &= \lim_{B\to\infty} P\{H_B\} \\ &= \lim_{B\to\infty}\left[\frac{\exp\{2\,\mu\,B\} - 1}{\exp\{2\,\mu\,B\} - \exp\{-2\,\mu\,A\}}\right] \\ &= \exp\{2\,\mu\,A\} \end{aligned}$$

5.4.2 Una Aplicación

Supóngase que se tiene la opción de comprar, en un tiempo en el futuro, una unidad de un cierto bien a un cierto precio fijo A, independientemente del valor que tenga en el mercado. El precio actual de la unidad del bien se asumirá de cero y supóngase que éste se comporta como de acuerdo a un Movimiento Browniano con deriva $-d\,(d > 0)$. La pregunta es: ¿ En qué momento se debería hacer uso de este derecho de manera que se obtenga el máximo de ganancia esperada ?

Solución

Si el poseedor de la opción ejerce su derecho cuando el precio del percado es x su ganancia esperada (E_x) es:

$$P_x\,(x - A)$$

donde

P_x es la probabilidad de que el proceso alcance el precio x

De la observación anterior se cumple que: $P_x = \exp\{-2\,d\,x\}$.

Por tanto,

$$E_x = \exp\{-2\,d\,x\}\ (x - A)$$

Resolviendo el problema de optimización:

i) Derivando e igualando a cero:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,E_x &= \exp\{-2\,d\,x\} + (x - A)\,\exp\{-2\,d\,x\}\ (-2\,d)\\ &= \exp\{-2\,d\,x\}\ (1 + (x - A)(-2\,d))\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{d}{dx^*}\,E_x = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(1 + (x^* - A)(-2\,d)) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x^* = \frac{1}{2\,d} + A$$

ii) Utilizando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2\,E_x}{dx^2} = -2\,d\ \exp\{-2\,d\,x\}\ (x + 2 - A)$$

Puesto que $-2\,d\,\exp\{-2\,d\,x\} < 0$ para toda $x \geq 0$ se cumple entonces que:

$$\frac{d^2\,E_x}{dx^2} < 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x + 2 - A > 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x > A - 2$$

Claramente $x^* = A + \frac{1}{2d} > A - 2$,por lo que en x^* se alcanza el máximo valor esperado de ganancia.

Nótese que $x^* = A + \frac{1}{2\,d} > A$ lo cual es natural de esperarse, ya que, se busca comprar lo más barato posible con respecto al mercado.

Apéndice

Definición 5.4.1 Variable Aleatoria

Sea (Ω, ℓ) un espacio medible. Se dice que una funci'on $X : \Omega \to \Re$ es una variable aleatoria si

$$X^{-1}(E) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in E\} \in \ell$$

$$para\ E \in B(\Re)$$

donde $B(\Re)$ es la σ-álgebra generada de Borel en $\Re$, es decir, X es una función medible de (Ω, ℓ) a $(\Re, B(\Re))$.

Definición 5.4.2 Vector Aleatorio

Sea (Ω, ℓ, P) un espacio de probabilidad. Se dice que una función $\tilde{X} : \Omega \to \Re^n$ es un vector aleatorio si

$$\tilde{X}^{-1}(E) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in E\} \in \ell$$

$$para\ E \in B(\Re^n)$$

donde $B(\Re^n)$ es la σ-álgebra de Borel de $\Re^n$.

Definición 5.4.3 Distribución de Probabilidad

Dada una variable aleatoria X en (Ω, ℓ, P) se define una medida sobre $B(\Re)$ como:

$$P_X(E) = P\left\{X^{-1}(E)\right\} \quad para\ E \in B(\Re)$$

P_X es una medida de probabilidad y se le conoce como medida inducida por X.

Asi mismo, dado un vector aleatorio $\tilde{X}$ se define una medida sobre $B(\Re^n)$ como:

$$P_{\tilde{X}}(E) = P\left\{\tilde{X}^{-1}(E)\right\} \quad para\ E \in B(\Re^n)$$

siendo $P_{\tilde{X}}$ conocida como la distribución de probabilidad del vector aleatorio $\tilde{X}$.

Definición 5.4.4 *Dada una variable aleatoria X en (Ω, ℓ, P) y su distribución de probabilidad $P_X(\cdot)$ se define la función de distribución de una variable aleatoria X como*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P_X((-\infty, x]) \\ &= P_X(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) \quad con\ x \in \Re \end{aligned}$$

De igual manera para un vector aleatorio $\tilde{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ definido en (Ω, ell, P) con distribución de probabilidad $P_{\tilde{X}}(\cdot)$ se define la función de distribución conjunta del vector aleatorio $\tilde{X}$ como

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P_{\tilde{X}}\left(\{\omega \in \Omega \mid X_j(\omega) \leq x_j \ j \in \overline{1,n}\}\right) \quad con\ x_j \in \Re$$

Definición 5.4.5 *Se dice que una medida inducida de una variable aleatoria X es absolutamente continua si existe $f_X : \Re \to \Re$ no negativa tal que,*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx$$

A esta función f_X se le conoce como la función de densidad de X.

De manera análoga se define la función de densidad de un vector aleatorio $\tilde{X}$ como aquella función $f_{\tilde{X}} : \Re^n \to \Re$ tal que

$$F_{\tilde{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\tilde{X}}(u_1, \ldots, u_n)\, du_n \ldots du_1$$

Definición 5.4.6 *Sean X, Y dos variables aleatorias en (Ω, ℓ, P) tales que tienen función de densidad conjunta $f(x, y)$, la función de densidad de probabilidad condicional de X, dado que $Y = y$ esta definida para toda y tal que $f_Y(y) > 0$ por*

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Definición 5.4.7 *Sea D la clase de todas las funciones $X(t)$ con $0 \leq t \leq 1$ y tal que $\lim_{t \to t_o} X(t)$ exista para todo $t_o \in (0,1)$ y que tanto $\lim_{t \to 0^+} X(t) = X(0)$ como $\lim_{t \to 1^-} X(t) = X(1)$. Defínase $\rho(X(\cdot), Y(\cdot))$ sobre D como:*

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} | X(t) - Y(t) |$$

Definición 5.4.8 *Para $H(X(\cdot))$ definida sobre D, sea G el conjunto de todas las funciones $X(\cdot)$ en D tales que H es discontinua en $X(\cdot)$ en la métrica ρ. Si existe un conjunto $G_1 \in B([0,1])$, la σ-álgebra de Borel en el intervalo $[0,1]$ tal que $G \subset G$ y que para un Movimiento Browniano estándar $\{X(t)\}$, $P\{X(\cdot) \in G_1\} = 0$ entonces se denominará a H como B continua casi seguramente.*

Proposición 5.4.1 Principio de Invarianza

Sea H definida sobre D tal que es B continua casi seguramente. Considerese cualquier proceso del tipo

$$X^{(n)}(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}}$$

donde S_n es la suma de la primeras n variables aleatorias $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ las cuales son independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza σ^2. Asúmase que $H(X^{(n)}(\cdot))$ son variables aleatorias. Entonces

$$H(X^{(n)}(\cdot)) \xrightarrow{d} H(X(\cdot))$$

donde $\{X(t)\}$ es un Movimiento Browniano Estándar.

Teorema de Kolmogorov

Proposición 5.4.2 *Sea* $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)\}$ *con* $t_i \in T \subset \Re$ *y* $t_1 < \ldots < t_n$ *una familia de funciones de distribución finito dimensionales que satisfacen la condicón de consistencia siguiente*

$$\lim_{x_k \uparrow \infty} F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = F_{t_1,\ldots,\hat{t_k},\ldots,t_n}(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n)$$

donde

el simbolo $\hat{}$ *indica que la coordenada es omitida*

Entonces, existe un espacio de probabilidad (Ω,ℓ,P) *y un proceso estocástico* $\{X(t)\}_{t\in T}$ *tal que*

$$P\{\omega \in \Omega \mid X(t_1) \leq x_1,\ldots,X(t_n) \leq x_n\} = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

Bibliografía

[1] Breiman, Leo. (1968).
"Probabilitry".
Addison-Wesley.

[2] Chung, K-L. (1968).
"A Course in Probability Theory".
Harcourt, New York.

[3] Durret, R. (1985).
"Probability: Theory and Examples".
Pacific Grove, California.

[4] Laha, Rohatgi. (1979).
"Probability Theory".
Wiley, New York.

[5] Resnick, Sidney I. (1992).
"Adventures in Stochastic Processes".
Birkhäuser.

[6] Ross, Sheldon M. (1983).
"Stochastic Processes".
John Wiley and Sons Inc.

[7] Rudd and Jarrow. (1983).
"Option Pricing".
Irwin.