

28  
2ej



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Aplicaciones de Haces Fibrados a un problema de convexidad:  
La conjetura de Gromov

T E S I S  
Que para obtener el Título de  
M A T E M A T I C O  
p r e s e n t a

FRANCISCO XAVIER PEREZCANO DIAZ



México, D. F.



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECRETARÍA DE CIENCIAS

1994

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE**

Jefe de la División de Estudios Profesionales

Facultad de Ciencias

Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) Francisco Xavier Perezcano Díaz

con número de cuenta 9052363-4 con el Título:

Aplicaciones de Haces Fibrados a un problema de convexidad:

La conjetura de Gromov

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Dr.	Luis	Montejano Peimbert	
Director de Tesis	Mat.	Luis Briseño Aguirre	
Dr.	Francisco Javier	González Acuña	
Dra.	Silvia de Neymet	Urbina	
Suplente	Dr.	Max Neumann Coto	
Suplente			

**A mis maestros,  
por haber trascendido los muros del salón de clase.**

**Y por supuesto, a mis hermanos.**

## Agradecimientos

Si nombrara a toda la gente a quien tengo que agradecer correría el riesgo de que los agradecimientos fueran mas largos que la tesis. Sin embargo hay algunos que no pueden quedar en el anonimato. Gracias a Richy y a Mariel, sin los cuales la carrera resulta impensable. A Luis Briseño, a pesar del año pseudo-sabático. A Luis Montejano y a Roli, con los que descubrí que es una bendición vivir en  $\mathfrak{R}^3$ . A mis papás, porque ellos me enseñaron que es una bención vivir.

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1 Hazes Fibrados</b>	<b>3</b>
1.1 Motivación . . . . .	3
1.2 Definición de Haz Fibrado . . . . .	6
1.3 Equivalencias de Hazes Fibrados . . . . .	10
1.4 Reducción del Grupo de un Haz . . . . .	17
1.5 Clasificación de Hazes sobre $S^n$ . . . . .	23
<b>2 Tomografía</b>	<b>28</b>
2.1 La Conjetura de Gromov . . . . .	28
2.2 Definiciones y Notación . . . . .	29
2.3 Demostración de la Conjetura de Gromov . . . . .	33
2.4 Algunos resultados adicionales. . . . .	37
<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>

# Introducción

Supongamos por un momento que el lector es al menos tan ocioso como yo. Jugando con una naranja puede darse cuenta de que no importa en que dirección la cortemos, el corte siempre resulta circular. Lejos de impresionarse, el lector en breve llegará a la conclusión de que este fenómeno se atribuye a que la naranja es redonda. Cabe entonces preguntar si los cuerpos redondos son los únicos con la propiedad de que todos sus cortes son iguales, círculos en el caso de la esfera. Después de hacer algunos experimentos quizá termine con la firme convicción de que la esfera es la única con esta propiedad y dedique su tiempo a la fructífera tarea de hacer jugo de naranja. Sin embargo, seguir este camino en matemáticas resulta sumamente peligroso, toda afirmación, sin importar que tan obvia pueda parecer, tiene que demostrarse.

Basta con ver un par de ejemplos. Cualquiera quedaría contento con la afirmación de que toda superficie tiene dos lados, uno "arriba" y otro "abajo"; cuando en la primera mitad del siglo pasado Möbius construyó una superficie con un solo lado. O bien decir que en un mapa no podemos dibujar tres países de tal modo que la frontera de los tres sea exactamente la misma. Hoy sabemos gracias a L. E. J. Brouwer que existen no sólo tres, sino hasta un número infinito de ellos, de tal manera que la frontera de todos coincide. Hay ocasiones en que lo obvio resulta ser verdadero. Sin embargo demostrar lo obvio puede ser sumamente complicado, como ejemplo tenemos el teorema de la curva de Jordan, que sostiene que cualquier curva cerrada simple divide al plano en dos regiones, la que se encuentra adentro y la de afuera. Este teorema por muy obvio que pueda parecer no pudo demostrarse hasta este siglo.

Algo similar sucede con nuestro problema inicial. La conjetura de Gromov afirma que efectivamente el único cuerpo con la propiedad de que cualesquiera dos de sus cortes son iguales, es la esfera. Para demostrar esto tendremos que usar matemáticas muy avanzadas: la teoría de haces fibrados. Esta teoría representa avances fundamentales en topología algebraica, y no surge el concepto preciso de haz fibrado sino hasta los años cincuenta. Con esta enorme herramienta intentaremos dar una respuesta a la conjetura. Como adelanto, el lector puede estar tranquilo, al menos en el espacio tridimensional en que vivimos, su intuición no falló.

# Capítulo 1

## Haces Fibrados

### 1.1 Motivación

La herramienta principal en el desarrollo de este trabajo será el uso de la teoría de haces fibrados. Para una mejor comprensión de las secciones siguientes daremos aquí una breve exposición de la teoría básica de haces fibrados así como de los resultados más relevantes en lo que concierne al presente trabajo. El planteamiento que seguiremos será aquel de Steenrod[10], que se ha vuelto el texto clásico sobre haces fibrados, aunque complementaremos a éste con referencias a los trabajos posteriores de Eilenberg y Steenrod[2], de Husemoller[6], y de Porter[9].

Definimos un haz como una tríada  $\{E, X, p\}$  donde  $E$  y  $X$  son espacios topológicos y  $p: E \rightarrow X$  es una función continua. A  $X$  le llamamos *espacio base*, a  $E$  *espacio total* y a  $p$  *proyección*. Para cada  $x \in X$ , el conjunto  $p^{-1}(x)$  es llamado la fibra del haz sobre  $x$ .

El ejemplo más sencillo de un haz es el producto topológico  $\{A \times B, A, p\}$ , donde  $p$  es la proyección sobre la primera coordenada. Además, en este ejemplo particular, cada fibra es de la forma  $\{a\} \times B$ . Denotaremos por  $A \times B$  a este haz.

Ahora definiremos una sección de un haz  $\{E, X, p\}$  como una función continua,  $\sigma: X \rightarrow E$ , que es un inverso por la derecha de  $p$ . Es decir que la composición  $p\sigma$  es la identidad en  $X$ . Se sigue inmediatamente de la definición que  $\sigma(x) \in p^{-1}(x)$ . En nuestro ejemplo anterior las secciones son precisamente las gráficas de funciones

continuas de  $A$  en  $B$ . Mas explícitamente cada sección de  $\{A \times B, A, p\}$  es de la forma  $(x, f(x))$  donde  $f : A \rightarrow B$  es una función continua.

Un problema relevante en este trabajo será determinar cuando una sección definida *solamente* sobre un subconjunto cerrado de la base, puede extenderse a una sección global definida sobre la base en su totalidad.

Ahora bien, el ejemplo de haz producto se puso con toda intención, para permitirnos dar una primera aproximación a la definición de haz fibrado. Notemos que en el producto todas las fibras son canónicamente homeomorfas. Pediremos que todas las fibras sean homeomorfas entre sí y que el haz sea *localmente* un producto. Es decir que alrededor de cada punto de la base deba existir un abierto,  $V$ , que lo contenga, de tal manera que el haz  $\{p^{-1}(V), V, p\}$  sea "homeomorfo" al haz  $\{V \times Y, V, \pi_1\}$ , donde  $Y$  es la fibra y  $\pi_1$  es la proyección sobre la primera coordenada. Esta noción de "homeomorfismo" de haces fibrados quiere decir lo siguiente: pedimos que exista un homeomorfismo  $h : V \times Y \rightarrow p^{-1}(V)$  de tal manera que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times Y & \xrightarrow{h} & p^{-1}(V) \\
 \pi_1 \searrow & & \nearrow p \\
 & V &
 \end{array}$$

Ejemplos de "fibrados" según esta definición son lógicamente los espacios producto, pero además otra gama de espacios, por ejemplo la banda de Möbius, que localmente es homeomorfa a  $I \times I$ , o la botella de Klein, localmente homeomorfa a  $I \times S^1$ .

En principio, esta primera definición, puede parecer satisfactoria, sin embargo la verdadera fuerza que tiene la teoría, es el asociarle un grupo a cada haz fibrado. Extendamos esta idea. Definamos a  $B = S^1 \times I$  la banda normal, y como  $M$  a la banda de Möbius, y sean  $V_1$  y  $V_2$  dos vecindades abiertas conexas contenidas propiamente en  $S^1$  pero de tal manera que  $S^1 = V_1 \cup V_2$ . Si nos restringimos a cualquiera de las  $V_i$  entonces tanto  $B$  como  $M$  se ven como el producto  $I \times I$ . Lo que determina entonces

cual de las dos bandas obtendremos es la manera de identificar la fibra ( $I$ ) a lo largo de la intersección de las  $V_i$ . Para obtener  $B$  identificaremos por ambos lados por la identidad, mientras que para  $M$  identificaremos por la identidad de un lado y por el homeomorfismo del intervalo  $t \mapsto 1 - t$  en el otro extremo.

Con este ejemplo podemos ver que la manera de distinguir dos haces fibrados con la misma base y fibra depende de la manera de identificar la fibra con sí misma según un homeomorfismo en las vecindades donde el espacio total es homeomorfo a un producto. Además notemos que los homeomorfismos de un espacio topológico forman un grupo bajo la composición. De esta manera asociaremos a un haz fibrado un grupo isomorfo a un subgrupo de los homeomorfismos de la fibra, que nos indicará las maneras permitidas de pegar las vecindades producto del haz. El caso más general es cuando el grupo consiste de todos los homeomorfismos de la fibra, y el más restringido cuando el grupo está representado únicamente por la identidad, entonces es claro que el haz es *globalmente* homeomorfo a un producto y en este caso diremos que el haz es trivial.

Con estos elementos podemos decir que el grupo de  $B$  es  $\{e\}$  y el de  $M$  es  $Z_2$ , además este último es irreducible, es decir, no podemos construir una banda de Möbius con menos de dos homeomorfismos del intervalo, aunque nada nos impide hacerlo si tomamos un grupo mayor de homeomorfismos. El grupo de un haz fibrado nos da mucho control sobre el tamaño de clases de equivalencia de cada haz, cosa que topológicamente es muy fácil perder. Topológicamente, cuando dos espacios son homeomorfos podemos considerarlos idénticos, no así con haces fibrados, pongamos un ejemplo.

1. *La botella de Klein*: Construimos un cilindro  $I \times S^1$  e identificamos sus extremos por la reflexión a lo largo de uno de los diámetros de  $S^1$ . Tanto la base como la fibra de este espacio son  $S^1$  y su grupo es  $Z_2$  generado por la reflexión.
2. *El toro torcido*: Se modifica la construcción anterior al identificar por la rotación de  $180^\circ$  de  $S^1$ , de nuevo la base y la fibra son  $S^1$  y el grupo es  $Z_2$  ahora generado por la rotación.

Estos dos haces, no obstante la coincidencia de los elementos que lo forman no son equivalentes, pues sus espacios totales son distintos, pero aunque el espacio total del toro torcido es homeomorfo como espacio a  $S^1 \times S^1$ , como haces fibrados con grupo  $Z_2$  son distintos pues no se puede llegar de uno al otro por medio de rotaciones de  $180^\circ$ , que es la restricción impuesta por el grupo, decimos que son equivalentes en el grupo entero de rotaciones de  $S^1$ .

## 1.2 Definición de Haz Fibrado

El dar una definición precisa de haz fibrado nos llevará un poco de trabajo. Primero será necesario precisar el concepto de grupo topológico, y de la acción de un grupo sobre un conjunto. Una vez hecho esto definiremos haz coordinado, para finalmente definir haz fibrado como una clase de equivalencia de estos últimos. Sin más preliminares tenemos las siguiente:

**Definición 1** Un grupo topológico es un grupo  $(G, \circ)$  dotado de una topología tal que:

- i. la operación  $\circ : G \times G \rightarrow G$  es continua,
- ii. el mapeo  $g \mapsto g^{-1}$  es continuo.

Ejemplos de grupos topológicos son:

1. Los grupos abelianos finitos,  $Z_n$ , con la topología discreta.
2. El grupo general lineal de orden  $n$ , denotado por  $GL_n$ . Este grupo se puede representar por las matrices reales de  $n \times n$ , que a su vez pueden verse como elementos de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , con la topología inducida por la métrica en  $\mathbb{R}^{n^2}$ .
3. Los grupos ortogonal y de rotaciones de  $\mathbb{R}^n$ , denotados por  $O_n$  y  $SO_n$  respectivamente. A  $O_n$  lo podemos representar por las matrices de determinante  $\pm 1$ , mientras que los elementos de  $SO_n$  son únicamente las matrices con determinante 1. Tenemos que  $SO_n \subset O_n \subset GL_n$ , por lo que podemos asignarles la topología inducida.

4. Cualquier grupo de Lie. (Un grupo de Lie es un grupo topológico que además tiene estructura de variedad diferenciable, y las operaciones de grupo son diferenciables.)
5. El grupo  $SO_2 \times SO_2$  es un grupo de Lie. A este grupo lo podemos visualizar como el toro de revolución ya que  $SO_2$  se puede representar por la circunferencia  $S^1$ . En vista de que  $SO_2$  es un grupo topológico a  $SO_2 \times SO_2$  le damos la topología producto. Esta coincide con la topología del toro como subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .

Queremos además ver que es lo que significa que un grupo actúe sobre un conjunto. En nuestro contexto tanto el grupo como el conjunto estarán dotados de una topología.

**Definición 2** Si  $G$  es un grupo topológico y  $Y$  es un espacio topológico entonces decimos que  $G$  es un grupo topológico de transformaciones de  $Y$  si  $G$  actúa en  $Y$  homeomorfante. i.e. existe  $\eta : G \times Y \rightarrow Y$  continua tal que:

$$i. \eta(e, y) = y,$$

$$ii. \eta(g_1 g_2, y) = \eta(g_1, \eta(g_2, y)),$$

Además decimos que  $G$  es efectivo si

$$iii. \eta(g, y) = y \quad \forall y \in Y \Rightarrow g = e.$$

Estas condiciones se pueden escribir de una forma más sugestiva. Si denotamos por  $g \cdot y$  al elemento determinado por  $\eta(g, y)$  entonces las condiciones estipuladas en la definición anterior se convierten en:

$$i. e \cdot y = y$$

$$ii. (g_1 \cdot g_2) \cdot y = g_1 \cdot (g_2 \cdot y)$$

$$iii. g \cdot y = y \quad \forall y \in Y \Rightarrow g = e$$

En general usaremos esta notación sin hacer más aclaraciones. Como ejemplos de grupos de transformaciones tenemos los siguientes:

1. Redundantemente, los grupos ortogonal y de rotaciones de  $\mathfrak{R}^n$  actúan sobre  $\mathfrak{R}^n$ .
2. El grupo de matrices de  $n \times n$  con entradas en algún campo  $K$  actúa sobre cualquier espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $K$ . La acción del grupo está representada por la transformación lineal asociada a una matriz elemento del grupo. En particular  $GL_n$  actúa sobre  $\mathfrak{R}^n$ .
3. El grupo  $Z_2$  sobre la circunferencia. La acción de este grupo puede ser esencialmente de dos maneras, la rotación de  $180^\circ$ , que coincide con la función antípoda, o bien la reflexión sobre un diámetro. Más generalmente,  $Z_2$  sobre  $S^n$ , actuando como distintas reflexiones y rotaciones.

Con estos elementos podemos ahora definir un concepto fundamental en la teoría de haces fibrados. Una vez establecida la noción de haz coordenado podremos entonces definir haz fibrado, y muchos de los resultados que conciernen a haces fibrados se resolverán por medio de sus representantes, los haces coordenados.

**Definición 3** Un haz coordenado  $\mathbf{B}$  es una colección de ocho elementos como sigue:

- i. Un espacio topológico  $E$ , llamado espacio total.
- ii. Un espacio topológico  $X$ , llamado espacio base.
- iii. Un mapeo continuo  $p : E \rightarrow X$ , llamado proyección.
- iv. Un espacio topológico  $Y$ , llamado la fibra.
- v. Un grupo topológico efectivo de transformaciones de  $Y$ ,  $G$ , llamado el grupo del haz.
- vi. Una cubierta abierta de  $X$ ,  $\{V_j\}$ , indexada por un conjunto  $J$ , donde cada  $V_j$  es llamado una vecindad coordenada.
- vii. Para cada  $j \in J$  un homeomorfismo  $\phi_j : V_j \times Y \rightarrow p^{-1}(V_j)$ , llamada la función coordenada.

viii. Para cada pareja ordenada  $i, j \in J$  un mapeo continuo  $g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ , llamado la función de cambio de coordenadas de  $i$  a  $j$ .

Requerimos que los elementos de  $\mathbf{B}$  satisfagan lo siguiente:

1. Que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_j \times Y & \xrightarrow{\phi_j} & p^{-1}(V_j) \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow p \\ & & V_j \end{array}$$

conmute, donde  $\pi_1$  es la proyección sobre la primera coordenada. Esto es la condición de que  $E$  sea localmente un producto.

2. Si definimos el mapeo  $\phi_{j,x} : Y \rightarrow p^{-1}(x)$  como  $\phi_{j,x}(y) = \phi_j(x, y)$ , entonces para cada pareja ordenada  $i, j \in J$  el homeomorfismo de  $Y$ , definido por  $\phi_{j,x}^{-1} \phi_{i,x}$  coincide con la función de cambio de coordenadas  $g_{ji}(x)$ . Denotaremos por  $Y_x$  a  $p^{-1}(x)$  la fibra sobre  $x$ .

3. Como consecuencia inmediata de la definición tenemos la condición de cociclo:

$$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x).$$

4. Si hacemos  $i = j = k$  entonces obtenemos como era de esperarse  $g_{ii} = e$ . Además haciendo  $i = k$  y despejando de la condición de cociclo tenemos  $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$ .

Por comodidad definiremos el mapeo  $p_j : p^{-1}(V_j) \rightarrow Y$  como

$$p_j(b) = \phi_{x,j}^{-1}(b),$$

donde  $x = p(b)$ .

Ahora definiremos una relación de equivalencia en la clase de haces coordenados.

**Definición 4** *Dos haces coordenados  $B$  y  $B'$  son equivalentes en el sentido estricto si sus espacios totales, bases, proyecciones, fibras y grupos son iguales, y sus funciones coordenadas  $\{\phi_j\}$  y  $\{\phi'_j\}$  satisfacen:*

$$i. \bar{g}_{kj}(x) = \phi'_{k,x}{}^{-1} \phi_{j,x} \quad \forall x \in V_j \cap V'_k$$

ii. *Las funciones  $\bar{g}_{kj}: V_j \cap V'_k \rightarrow G$  así obtenidas son continuas.*

Esto quiere decir que dos haces son equivalentes en sentido estricto si la unión de sus sistemas de funciones coordenadas forma a su vez un sistema de funciones coordenadas del haz. Podríamos entonces emular la definición de variedad diferenciable según Do Carmo[1] y definir un haz fibrado como un haz coordenado con sistema de funciones coordenadas maximal, tomando como este sistema la unión de todos los sistemas compatibles según la equivalencia estricta. Sin embargo para evitar la ambigüedad inherente al decir *todas* preferimos definir haz fibrado como sigue:

**Definición 5** *Un Haz fibrado es una clase de equivalencia de haces coordenados bajo la relación de equivalencia estricta definida en 4.*

### 1.3 Equivalencias de Haces Fibrados

La definición de equivalencia estricta nos sirve para precisar lo que es un haz fibrado, sin embargo como relación de equivalencia es demasiado restringida y por lo tanto induce una partición muy fina en la clase de haces fibrados. Vamos a debilitar sucesivamente las hipótesis de equivalencia estricta para obtener particiones mas gruesas que permitan mayor libertad a la hora de trabajar con haces fibrados y a su vez nos permitirán obtener resultados de carácter más general. El primer caso será definir cuando dos haces son equivalentes. Con esto podremos decir cuando dos haces con la misma base y fibra son el mismo, algo análogo a un isomorfismo en álgebra o un homeomorfismo en topología. Al igual que en los casos que acabamos de citar necesitaremos definir morfismos entre haces fibrados, de donde la definición de equivalencia saldrá con naturalidad.

**Definición 6** Un mapeo de haces coordenados  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  con grupo  $G$  es un par de funciones continuas  $h: E \rightarrow E'$  y  $\bar{h}: X \rightarrow X'$  donde  $\bar{h}(x) = p'hp^{-1}(x)$  y le llamamos la función inducida por  $h$ , de tal manera que se cumple lo siguiente:

- i.  $h$  lleva la fibra  $Y_x$  homeomorficamente en la fibra  $Y_{\bar{h}(x)}$ .
- ii.  $p'h(b) = \bar{h}p(b)$
- iii. Si  $x \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)$  y denotamos por  $h_x$  la restricción de  $h$  a  $p^{-1}(x)$  entonces la función

$$\bar{g}_{kj}(x) = \phi'_{k, \bar{h}(x)}^{-1} h_x \phi_{j,x} = p'_k h_x \phi_{j,x}$$

coincide con un elemento de  $G$ , y los mapeos así definidos son continuos.

Observaciones sobre esta definición. Dada una función continua entre los espacios totales, esta induce automáticamente a su pareja entre las bases y a las  $\bar{g}_{kj}$  por lo que cuando hablemos de un mapeo de haces, nos referiremos a la función entre sus espacios totales. En vista de la primera condición decimos que  $h$  preserva fibras. Además como consecuencia inmediata de su definición tenemos que las  $\bar{g}_{kj}$  cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{kj}(x)g_{ji}(x) &= \bar{g}_{ki}(x) & \forall x \in V_i \cap V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k), \\ \bar{g}'_{ik}(\bar{h}(x))\bar{g}_{kj}(x) &= \bar{g}_{ij}(x) & \forall x \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k \cap V'_i) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Para ilustrar esta definición y relacionar las  $\bar{g}_{kj}$  de manera mas intuitiva pongamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{\bar{h}} & X' \end{array}$$

Ahora sí, de manera informal podemos interpretar a  $\bar{g}_{kj}$  con la frase "subo en  $j$  bajo en  $k$ ". Esta frase quiere decir que si denotamos por  $\bar{h}_{kj}$  la restricción de  $\bar{h}$  al dominio  $V_j$  y rango  $V'_k$  entonces en el diagrama subo por  $\phi_j$  me traslado por  $h$  y proyecto sobre  $V'_k$ . Estas funciones me dicen como es el cambio de coordenadas inducido por  $h$ . Con esta mnemotecnica las relaciones anteriores se convierten en las siguientes:

1. Cambio de  $i$  a  $j$ , subo en  $j$  y bajo en  $k$ , es igual a si subo en  $i$  y bajo en  $k$ .
2. Subo en  $j$  bajo en  $k$ , cambio de  $k$  a  $l$  es igual que subo en  $j$  y bajo en  $l$ .

**Lema 7** Sean  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  dos haces coordinados con la misma fibra  $Y$  y grupo  $G$ , y sean mapas  $\bar{h}: X \rightarrow X'$  y  $\bar{g}_{kj}: V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k) \rightarrow G$  tales que las  $\bar{g}_{kj}$  cumplen con las condiciones 1.1 entonces existe un único mapeo de haces  $h$  que induce a  $\bar{h}$  y que tiene a las  $\bar{g}_{kj}$  como transformaciones de mapeo.

**DEMOSTRACION:**

Si  $p(b) = x \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)$  defínase  $h_{kj}(b) = \phi'_k(\bar{h}(x), \bar{g}_{kj}(x) p_j(b))$ , entonces  $h_{kj}$  es continua y  $p'h_{kj}(b) = \bar{h}(p(b))$ . Ahora queremos mostrar que las  $h_{kj}$  así definidas son compatibles. Tenemos que si  $x \in V_j \cap V'_i \cap \bar{h}^{-1}(V'_k \cap V'_l)$  entonces:

$$\begin{aligned} \boxed{h_{kj}(b)} &= \phi'_k(\bar{h}(x), \bar{g}_{kj}(x) g_{ji}(x) p_i(b)) = \phi'_k(\bar{h}(x), \bar{g}_{ki}(x) p_i(b)) = \\ \boxed{h_{ki}(b)} &= \phi'_i(\bar{h}(x), g'_{ik}(x) \bar{g}_{ki}(x) p_i(b)) = \phi'_i(\bar{h}(x), \bar{g}_{li}(x) p_i(b)) = \\ \boxed{h_{li}(b)} &= \phi'_l(\bar{h}(x), \bar{g}_{li}(x) g_{ij}(x) p_j(x)) = \phi'_l(\bar{h}(x), \bar{g}_{lj}(x) p_j(x)) = \\ \boxed{h_{lj}(b)} & \end{aligned}$$

Por lo tanto las  $h_{kj}$  son compatibles y como sus dominios forman una cubierta abierta de  $E$  entonces definen una función  $h: E \rightarrow E'$ . Además cumplen con:

1.  $p'h = \bar{h}p$  ya que cada una de las  $h_{kj}$  lo cumplen.
2. Las  $\bar{g}_{kj}$  son sus transformaciones de mapeo.
3. Es única ya que cualquier  $h'$  alterna debe ser compatible con las  $h_{kj}$ .  $\square$

Con esta herramienta estamos en condiciones de dar una definición de equivalencia de haces coordinados. Es sumamente importante notar que cuando decimos que dos haces tienen la misma fibra y grupo, no nos referimos únicamente a la coincidencia de estos elementos por separado, sino que además, la acción del grupo sobre la fibra es la misma. De acuerdo con esto la botella de Klein y el toro torcido no tienen la misma fibra y grupo, ya que el grupo actúa de manera distinta en cada caso. En lo subsecuente usaremos este término sin más aclaraciones.

**Definición 8** Sean  $\mathbf{B} = \{E, X, p, Y, G, \{V_j\}, \{\phi_j\}\}$  y  $\mathbf{B}' = \{E', X, p', Y, G, \{V'_j\}, \{\phi'_j\}\}$  dos haces coordinados. Decimos que  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  son  $G$ -equivalentes, o equivalentes en  $G$  si y solamente si existe  $h: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$  un mapa de haces coordinados que induce la identidad sobre el espacio base.

En general, cuando no exista confusión, al decir que dos haces son equivalentes nos referiremos a equivalencia en  $G$ . Mencionaremos el grupo cuando sea importante. Por ejemplo, el toro torcido no es  $Z_2$ -equivalente al toro normal, pero sí son equivalentes en el grupo entero de rotaciones de  $S^1$ . Es inmediato verificar que la equivalencia de haces coordinados es en efecto una relación de equivalencia. Además es una ampliación de la equivalencia estricta, ya que dos haces estrictamente equivalentes son equivalentes bajo nuestra definición. Veremos ahora algunos resultados que nos permitirán establecer cuando dos haces dados son equivalentes.

**Lema 9** Sean  $\mathbf{B}$ , y  $\mathbf{B}'$  dos haces coordinados con la misma base, fibra y grupo.  $\mathbf{B}$  es equivalente a  $\mathbf{B}'$  si y sólo si existen  $\bar{g}_{kj}: V_j \cap V'_k \rightarrow G$  tales que:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{ki}(x) &= \bar{g}_{kj}(x) g_{ji}(x), & x \in V_i \cap V_j \cap V'_k; \\ \bar{g}_{ij}(x) &= g'_{ik}(x) \bar{g}_{kj}(x), & x \in V_j \cap V'_k \cap V'_i.\end{aligned}$$

DEMOSTRACION:



Si  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  son equivalentes entonces por definición de equivalencia existe una función,  $f: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$ , que induce la identidad sobre  $X$ . Tomemos a las  $\bar{g}_{kj}$  que define  $f$ . Entonces las condiciones 1.1 son precisamente las estipuladas en el enunciado del lema.



Resulta al aplicar el lema 7 con  $\bar{h} = Id_X$

□

**Teorema 10** Sean  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  dos haces coordinados con la misma base, fibra, grupo y vecindades coordinadas.  $\mathbf{B}$  es equivalente a  $\mathbf{B}'$  si y sólo si existe un conjunto de funciones  $\{\lambda_j\}$  tales que:

$$\begin{aligned}\lambda_j &: V_j \rightarrow G, \\ g'_{ji}(x) &= \lambda_j(x)^{-1} g_{ji}(x) \lambda_i(x), & \forall x \in V_i \cap V_j\end{aligned}$$

## DEMOSTRACION:



Si  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  son equivalentes entonces existe  $f : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$  que induce la identidad sobre  $X$ .

Sea  $\lambda_j(x) = \bar{g}_{jj}^{-1}(x)$ . Entonces tenemos que por 1.1  $\bar{g}_{ij}(x)g_{ji}(x) = \lambda_i(x)^{-1}$  y  $g'_{ji}(x)\bar{g}_{ij}(x) = \lambda_j(x)^{-1}$ . Despejando  $g'_{ji}(x)$  de la segunda y substituyendo con la primera concluimos:

$$g'_{ji}(x) = \lambda_j(x)^{-1} g_{ji}(x) \lambda_i(x).$$



Defínase  $\bar{g}_{kj}(x) = \lambda_k(x)^{-1} g_{kj}(x)$ . Es inmediato verificar que estas transformaciones cumplen con las condiciones del lema anterior y esto nos da la equivalencia de los haces.  $\square$

La equivalencia entre haces coordenados nos sirve para identificar haces con la misma base fibra y grupo. Sin embargo en todo lo que hemos dicho hasta ahora la fibra no ha jugado un papel demasiado importante en la construcción de un haz fibrado. Lo que hemos utilizado es que el grupo del haz tiene que ser isomorfo a un subgrupo de homeomorfismos de la fibra, y hemos dejado que el grupo actúe en la fibra por multiplicación por la izquierda. Lo que nos ha sido fundamental son los sistemas de transformaciones coordenados, ya que con estas definimos haz fibrado, y un cambio esencial en estos sistemas sí produce cambios en el haz. Los sistemas de transformaciones coordenados juegan el papel de las instrucciones para armar un haz. Tenemos los pedazos triviales del haz y los pegamos de acuerdo a las instrucciones implícitas en los sistemas de transformaciones. ¿Podremos entonces cambiar una fibra por otra en la que también actúe el grupo? Esta pregunta se contesta afirmativamente con el siguiente:

**Teorema 11** Si  $G$  es un grupo de transformaciones topológicas de  $Y$ , y  $\{\{V_j\}, \{g_{ij}\}\}$  es un sistema de transformaciones coordenadas en el espacio  $X$ , entonces existe un haz coordenado  $\mathbf{B}$  con base  $X$  y fibra  $Y$ , grupo  $G$ , y tal que su sistema de transformaciones coordenadas es precisamente  $\{\{V_j\}, \{g_{ij}\}\}$ .

## DEMOSTRACION:

Veamos a  $J$  el conjunto de índices de la cubierta como un espacio topológico discreto. Sea  $T \subset X \times Y \times J$  el conjunto de triadas  $(x, y, j)$  tal que  $x \in V_j$ . Entonces  $T$  es un espacio topológico que es la unión de los subconjuntos abiertos disjuntos  $V_j \times Y \times j$ . Definimos en  $T$  la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y, j) \sim (x', y', k) \iff x = x', y = y', g_k(x) = y'$$

Sea  $E$  el conjunto de clases de equivalencia así definidas y sea  $q: T \rightarrow E$  la función que le asocia a cada elemento de  $T$  su clase de equivalencia. A  $E$  le damos la topología cociente, de tal manera que  $q$  sea una función continua. Ahora definimos  $p: E \rightarrow X$  tal que  $p(\underline{x, y, j}) = x$ . Si  $U$  es abierto en  $X$ , entonces  $(pq)^{-1}(U) = q^{-1}(p^{-1}(U))$  es la intersección de  $T$  con el abierto  $U \times Y \times J$ , y por lo tanto abierto en  $T$ . Esto nos da la continuidad de  $p$ . Defínase ahora la función coordenada

$$\phi_j(x, y) = q(x, y, j) \quad x \in V_j, y \in Y$$

La continuidad de  $\phi$  se sigue de la continuidad de  $q$ . Como  $p$  es un inverso por la derecha de  $q$  entonces  $\phi_j$  mapea  $V_j \times Y$  inyectivamente en  $p^{-1}(V_j)$ . Ahora si  $b = (x, y, k) \in p^{-1}(V_j)$  entonces  $x \in V_j \cap V_k$  y por tanto  $(x, y, k) \sim (x, g_k(x)y, j)$ . Esto implica que  $b = \phi_j(x, g_k(x)y)$ , lo cual demuestra la suprayectividad de  $\phi_j$ . Con esto demostramos que las  $\phi_j$  así definidas son biyecciones continuas de  $V_j \times Y$  sobre  $p^{-1}(V_j)$ . Además por la definición de  $\phi_j$  obtenemos inmediatamente la conmutatividad al proyectar. Falta demostrar que  $\phi_j$  es de hecho un homeomorfismo, es decir que además  $\phi_j^{-1}$  es una función continua. Para esto tomemos un abierto  $U \in V_j \times Y$ , basta demostrar que la intersección de  $U$  con  $V_k \times Y \times k$  es abierto, ya que la colección de estos últimos forma una cubierta abierta de  $T$ . Esta intersección está contenida en  $(V_j \cap V_k) \times Y \times k$  que es abierto en  $T$ . Por lo tanto  $q$  restringida a este último espacio se puede factorizar en la composición

$$(V_j \cap V_k) \times Y \times k \xrightarrow{r} V_j \times Y \xrightarrow{\phi_j} E$$

donde

$$r(x, y, k) = (x, g_k(x)y).$$

debido a que  $r$  es continua tenemos que  $r^{-1}(U)$  es abierto.

Analizamos ahora los mapeos  $\phi_{j,x}^{-1}$  de  $Y$  en sí misma. Si  $y' = \phi_{j,x}^{-1}\phi_{i,x}(y)$  entonces por la definición tenemos que  $\phi_j(x, y') = \phi_i(x, y)$  o bien  $q(x, y', j) = q(x, y, i)$ , pero esto implica que  $(x, y', j) \sim (x, y, i)$  y por lo tanto  $y' = g_{ji}(x)y$ . Con esto probamos que en efecto las  $\{g_{ji}\}$  son las transformaciones coordenadas y concluimos la demostración  $\square$

Este teorema confirma lo que ya habíamos notado con anterioridad, que la fibra en particular juega un papel poco preponderante en la teoría de haces fibrados. En casos particulares puede cobrar gran importancia, las mismas transformaciones coordinadas nos sirven para construir la banda de Möbius, y la botella de Klein. Sería un exceso de ingenuidad suponer que estos dos haces son iguales, despreciando la fibra. En el caso de Möbius la fibra es el intervalo, mientras que en la botella de Klein es  $S^1$ . En la teoría general sin embargo no tiene mayor importancia que fibra tenga un haz mientras el grupo del haz sea un grupo de transformaciones topológicas de él. Ya que todo grupo topológico es un grupo de transformaciones topológicas de sí mismo, podemos simplificar nuestro estudio a haces cuya fibra sea el mismo grupo. Hacemos esto con el fin de perder detalles superfluos y simplificar nuestro estudio. A los haces de este tipo les llamaremos haces principales. Precizando:

**Definición 12** *Un haz  $\mathbf{B} = \{E, X, p, Y, G\}$  es un haz principal si  $Y = G$  y  $G$  opera en  $Y$  por multiplicación por la izquierda. Además dado un haz coordinado su haz principal asociado es el haz principal que resulta al reemplazar la fibra por el grupo y construir un haz según lo estipulado en el teorema 11.*

Para verificar que no perdemos información esencial al substituir la fibra por el grupo tenemos el siguiente:

**Teorema 13** *Dos haces con la misma fibra y grupo  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  son equivalentes si y sólo si sus haces principales asociados son equivalentes.*

**DEMOSTRACION:**

El lema 9 afirma que la equivalencia de haces depende únicamente de sus transformaciones coordinadas, y por definición utilizamos el método descrito en el teorema 11 para construir los haces principales asociados. En este proceso no se alteran las transformaciones coordinadas, de donde se sigue el teorema.  $\square$

La última equivalencia que daremos entre haces fibrados será en base a sus haces principales. La partición inducida por esta nueva equivalencia será lo bastante gruesa como para satisfacer nuestros propósitos.

**Definición 14** Sean  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  dos haces fibrados con la misma base y grupos  $G$  y  $G'$  respectivamente. Decimos que  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  son asociados si:

- i. Existe un isomorfismo de grupos topológicos de  $G$  en  $G'$ .
- ii. Sus haces principales son equivalentes.

Además si existe un epimorfismo continuo  $\alpha : G \rightarrow G'$  y construimos el haz  $\bar{\mathbf{B}} = \{\bar{E}, X, \bar{p}, G', G', \{V_j\}, \{\phi_j\}\}$ , donde  $\bar{g}_{ij}(x) = \alpha(g_{ij}(x))$ , entonces decimos que  $\mathbf{B}'$  es débilmente asociado  $\mathbf{B}$  si  $\mathbf{B}'$  y  $\bar{\mathbf{B}}$  son asociados.

Las clases de equivalencia de haces asociados son muy grandes, ya que el teorema 11 nos proporciona una manera de construir haces asociados a un haz dado con cualquier fibra, sujeto únicamente a la condición de que  $G$  opere en ella. En particular tenemos que un haz y su haz principal asociado son asociados. Además si dos haces asociados tienen la misma fibra y la misma acción del grupo sobre ésta, entonces los haces son equivalentes. En los ejemplos que hemos venido manejando, la banda de Möbius, la botella de Klein y el toro torcido son todos asociados, aunque entre ellos no son equivalentes.

## 1.4 Reducción del Grupo de un Haz

Ahora probaremos algunos teoremas que nos serán de utilidad mas adelante.

**Teorema 15** Un haz principal  $\mathbf{B}$  con grupo  $G$  es equivalente en  $G$  al haz trivial si y sólo si admite una sección.

DEMOSTRACION:



Si  $\mathbf{B}$  es equivalente en  $G$  al haz trivial entonces existe un mapeo de haces fibrados  $f : X \times G \rightarrow \mathbf{B}$  que induce la identidad sobre la base. En  $X \times G$  cualquier función constante  $g : X \rightarrow G$  es una sección, entonces tenemos que  $\sigma : X \rightarrow E$  definida como  $f \circ g$  es una sección en  $\mathbf{B}$ .



Sea  $\sigma : X \rightarrow E$  una sección. Definimos  $\lambda_i(x) = p_i(\sigma(x))$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} g_{ji}(p(b))p_i(b) &= p_j(b) \\ \Rightarrow g_{ji}(x)\lambda_i(x) &= \lambda_j(x) \\ \Rightarrow g_{ji}(x) &= \lambda_j(x)\lambda_i(x)^{-1} \end{aligned}$$

Definamos ahora al haz trivial  $B' = \{E', X, p', G, \{e\}, \{V_j\}, \{\phi_j\}\}$  entonces por el teorema 10,  $B$  y  $B'$  son equivalentes.  $\square$

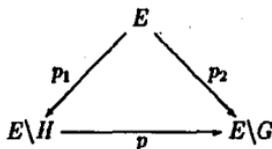
Estamos pidiendo que en un haz principal el grupo actúe en sí mismo por traslaciones izquierdas. Sin embargo la función de  $G$  sobre sí misma que lleva al elemento  $x$  en  $gx$  con  $g$  fija es un homeomorfismo, no un isomorfismo de grupos. Entonces, aunque cada fibra de un haz principal es homeomorfa al grupo, no tenemos multiplicación dentro de la fibra pues no podemos identificar sus elementos. La existencia de una sección en el haz nos permite identificar de manera continua un elemento en cada fibra que hará las veces de la identidad, y nos proporcionará una multiplicación dentro de la fibra. El teorema anterior afirma que esto es posible solamente si el haz es trivial.

Un resultado, de suma importancia, es determinar si un grupo cociente es un haz fibrado bajo la proyección. Para esto definimos una sección local en  $x_0 \in G/H$  como una función definida en una vecindad de  $x_0$  que es un inverso de la proyección. Si  $G/H$  tiene una sección local en cada uno de sus puntos entonces decimos que  $H$  admite una sección local.

**Teorema 16** Sean  $E$  un grupo topológico y  $G$  un subgrupo cerrado de  $E$  que admite una sección local,  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ , y  $p: E/H \rightarrow E/G$  tal que  $p(xH) = xG$ . Entonces  $B = \{E/H, E/G, p, G/H, G/H_0\}$  es un haz fibrado con grupo  $G/H_0$  donde  $H_0 = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$  es el máximo subgrupo de  $H$  invariante en  $G$  bajo conjugación.  $G/H_0$  actúa en  $G/H$  por traslaciones izquierdas.

**DEMOSTRACION:**

Si  $p_1$  y  $p_2$  son las proyecciones canónicas, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:



donde  $p_1$  y  $p_2$  son continuas. Ahora si  $U$  es abierto en  $E/G$  entonces  $p_2^{-1}(U) = p_1^{-1}p^{-1}(U)$  es abierto en  $E$ , pero esto implica que  $p^{-1}(U)$  es abierto en  $E/H$  y por lo tanto  $p$  es continua. Además  $p(G/H) = cG = x_0$ . Denotaremos por  $y$  a los elementos de  $G/H$  y por  $z$  a los elementos de  $E/H$ .

Sea  $f : V \subset E/G \rightarrow E$  una sección local de  $x_0$ . Por definición tenemos que  $p_2 f = Id_V$ . Construimos  $B$  como sigue:

El conjunto de índices  $J$  es el mismo  $E$ . Para cada  $b \in E$  definimos  $V_b = bV \subset E/G$  y  $f_b : V_b \rightarrow E$  como  $f_b(x) = bf(b^{-1}x)$ . Entonces  $f_b$  es continua y  $p_2 f_b(x) = x$  para toda  $x \in V_b$ . Para definir las funciones coordenadas hacemos lo siguiente:

$$\phi_b(x, y) = f_b(x)y.$$

Estas funciones son continuas en ambas variables. En vista de que  $p_1$  es un epimorfismo podemos escoger  $g \in G$  tal que  $p_1(g) = y$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
 p_1(f_b(x)g) &= f_b(x)y, \\
 p_2(f_b(x)g) &= p_2 f_b(x) = x
 \end{aligned}$$

como  $pp_1 = p_2$  se sigue que  $p\phi_b(x, y) = x$ . Definimos ahora

$$p_b(z) = [f_b(p(z))]^{-1}z,$$

donde  $p_b : p^{-1}(V_b) \rightarrow G/H$ . Tenemos que  $p_b$  es continua y

$$\begin{aligned}
 p_b \phi_b(x, y) &= y \\
 \phi_b(p_b(z), p_b(z)) &= z.
 \end{aligned}$$

Con esto demostramos que  $\phi_b$  es un homeomorfismo entre  $V_b \times G/H$  y  $p^{-1}(V_b)$ .

Sea  $x \in V_b \cap V_c$  entonces el cambio de coordenadas

$$p_c \phi_b(x, y) = f_c(x)^{-1} [f_b(x)y] = [f_c(x)^{-1} f_b(x)] y$$

no es mas que una traslación izquierda de  $y$  por el elemento

$$g'_{cb}(x) = f_c(x)^{-1} f_b(x)$$

$g'_{cb} \in G$ , pero si  $H$  no es normal en  $G$  entonces  $G/H$  no es un grupo. Esta es la razón por la que necesitamos que el grupo del haz sea  $G/H_0$ . Finalmente definimos las transformaciones coordinadas  $g_{cb}$  como la proyección canónica de  $g'_{cb}$  sobre  $G/H_0$ . Por todo lo anterior,

$$\mathbf{B} = \{E/H, E/G, p, G/H, G/H_0, \{V_b\}, \{\phi_b\}\}$$

es un haz coordinado. □

**Corolario 16.1** Si  $G$  tiene una sección local en  $E$  entonces  $\mathbf{B} = \{E, E/G, p, G, G\}$  es un haz fibrado, donde  $p$  es la proyección canónica.

**Corolario 16.2** El haz  $\mathbf{B} = \{E/H, E/G, p, G/H, H/H_0\}$  tiene como haz principal  $\bar{\mathbf{B}} = \{E/H_0, E/G, p', G/H_0, G/H_0\}$ .

Este teorema muestra que con ligeras restricciones un cociente de grupos topológicos es un haz fibrado. Este resultado lo utilizaremos ampliamente en lo subsecuente. Ahora trataremos el problema de reducir el grupo de un haz. Hemos visto que aumentar el grupo no trae mayores dificultades, mientras que si logramos reducir el grupo de un haz al grupo trivial entonces el haz es necesariamente un haz trivial. La pregunta que nos planteamos ahora es la siguiente: ¿Dado un subgrupo  $H$  del grupo del haz podemos construir un haz con grupo  $H$  de tal manera que el haz original sea equivalente en  $G$  al haz construido? Y de ser así, ¿que implicaciones tiene esto? Para contestar estas preguntas necesitaremos algunas definiciones adicionales, las cuales damos a continuación.

**Definición 17** Sean  $\mathbf{B} = \{E, X, p, Y, G\}$  un haz fibrado,  $A$  un subespacio cerrado de  $X$  y  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ . Si para toda  $i, j$  y  $x \in V_i \cap V_j \cap A$  la transformación coordinada,  $g_{ji}(x)$  es un elemento de  $H$ , entonces  $\mathbf{B}$  restringido sobre  $A$  es un haz fibrado con grupo  $H$  y decimos que  $\mathbf{B}$  es un  $(G, H)$ -haz relativo sobre la base  $(X, A)$ .

Las nociones de mapeo, equivalencia estricta y equivalencia, son análogas a las ya definidas para haces fibrados, con la condición adicional que al restringir el haz sobre  $A$  el grupo se reduce a  $H$ .

**Definición 18** Sea  $\mathbf{B}$  un  $(G, H)$ -haz sobre  $(X, A)$  y  $\mathbf{B}' = \{E', X, p', G/H, G/H_0\}$  el haz débilmente asociado a  $\mathbf{B}$  con fibra  $G/H$ ; y sea  $e_0 \in G/H$  la clase lateral de la identidad. Definimos la sección canónica sobre  $A$  como

$$f_0(x) = \phi'_j(x, e_0), \quad x \in V_j \cap A.$$

La función  $f_0$  está bien definida, ya que al estar  $g_{ij} \in H$  se cumple que:

$$\phi'_j(x, e_0) = \phi'_i(x, g_{ij}e_0) = \phi'_i(x, e_0), \quad x \in V_i \cap V_j \cap A,$$

de donde se sigue la unicidad de  $f_0$ .

Con estas nuevas definiciones estamos en condición de probar el siguiente

**Teorema 19** Sea  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$  que admite una sección local. Un  $(G, H)$ -haz sobre  $(X, A)$  es  $(G, H)$ -equivalente a un  $(H, H)$ -haz sobre  $(X, A)$  si y sólo si la sección canónica sobre  $A$  se puede extender a una sección definida en toda la base, en el haz débilmente asociado con fibra  $G/H$ .

DEMOSTRACION:



Sea  $\mathbf{B}$  un  $(G, H)$ -haz equivalente en  $G$  a un  $(H, H)$ -haz, y  $\mathbf{B}'$  su haz débilmente asociado con fibra  $G/H_0$ . Por el teorema 10, existen  $\lambda_i : V_i \rightarrow G$  tales que:

1.  $\lambda_i(x) \in H$  si  $x \in V_i \cap A$ ,
2.  $g'_{ji}(x) = \lambda_j(x)^{-1} g_{ji}(x) \lambda_i(x) \in H \quad \forall x, i, j$ .

Sea  $\pi : G \rightarrow G/H$  la proyección canónica. Definimos  $f(x) = \phi'_j(x, \pi(\lambda_j(x)))$ . Entonces si  $x \in V_i \cap V_j$  tenemos que

$$\begin{aligned} \phi'_j(x, \pi(\lambda_j(x))) &= \phi'_i(x, g_{ij}(x) \pi(\lambda_j(x))) = \phi'_i(x, \pi[g_{ij} \lambda_j(x)]) \\ &= \phi'_i(x, \pi[\lambda_i(x) g'_{ij}(x)]) = \phi'_i(x, \pi(\lambda_i(x))), \end{aligned}$$

pues  $g'_{ij}(x) \in H$ . Por lo tanto  $f$  está bien definida sobre todo  $X$ . Además, si  $x \in V_i \cap A$  entonces

$$\phi'_i(x, \pi(\lambda_i(x))) = \phi'_i(x, e_0) = f_0(x).$$

Finalmente,

$$p'(f(x)) = x,$$

por lo que concluimos que  $f$  es una sección de  $B'$  que extiende a la sección canónica sobre  $A$ .



Sea  $f$  una sección de  $B'$  que extiende a la sección canónica sobre  $A$ . Sea  $W$  una vecindad de  $e_0$  en  $G/H$ , y  $d$  una sección local definida sobre  $W$ . Para cada  $g \in G$  definimos

$$d_g(y) = gd(g^{-1}y), \quad \forall y \in W_g,$$

Podemos tomar un refinamiento de la cubierta de  $X$  de tal manera que  $V_j \subset W_g$  para alguna  $g \in G$ .

Para cada  $j$  escogemos una de estas  $g$ , y definimos  $\lambda_j(x) = d_g p'_j f(x)$ . Entonces  $\pi(\lambda_j(x)) = p'_j f(x)$ . Sea  $g''_{ji}(x) = \lambda_j(x)^{-1} g_{ji}(x) \lambda_i(x)$ . Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi(g''_{ji}(x)) &= \lambda_j(x)^{-1} g_{ji}(x) \pi(\lambda_i(x)) = \lambda_j(x)^{-1} g_{ji}(x) p'_i f(x) \\ &= \lambda_j(x)^{-1} p'_j f(x) = \lambda_j(x)^{-1} \lambda_j(x) = e_0 \end{aligned}$$

y entonces  $g''_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow H$ .

Ahora si  $x \in A$ , entonces  $\pi(\lambda_j(x)) = p'_j f_0(x) = p'_j \phi'_j(x, e_0) = e_0$ , de donde se sigue que  $\lambda_j(x) \in H$ . Por lo tanto  $B$  es  $(G/H)$ -equivalente a un  $(H, H)$ -haz  $\square$

**Corolario 19.1** Si  $H$  admite una sección local en  $G$  entonces un  $G$ -haz sobre  $X$  es equivalente en  $G$  a un  $H$ -haz sobre  $X$  si y sólo si su haz débilmente asociado con fibra  $G/H$  admite una sección.

**DEMOSTRACION:**

El corolario es consecuencia inmediata del teorema cuando  $A = \emptyset$ .

Este teorema es muy semejante al teorema 15, de hecho aquel puede tomarse como un corolario del teorema que acabamos de demostrar. La diferencia principal estriba en que mientras en el primero identificábamos un elemento que hacía las veces de la identidad sobre cada fibra, en este caso podemos identificar una banda sobre el haz

que corresponde al subgrupo  $H$ . Aún así, nos es imposible identificar los elementos dentro de esta banda, pero sí podemos identificar perfectamente a las clases laterales de  $H$  en  $G$ . Esto nos da una especie de multiplicación, tan burda como el tamaño de  $H$ . Si  $H$  consta únicamente de la identidad tenemos una multiplicación de grupo bien definida, mientras que si  $H = G$  no tenemos ninguna información nueva.

## 1.5 Clasificación de Haces sobre $S^n$

En esta sección estudiaremos un poco más de cerca los haces sobre la esfera de dimensión  $n$ . Empezaremos por demostrar que todo haz sobre una base contraíble es equivalente a un haz trivial. Este resultado nos indica que los primeros haces interesantes serán los haces sobre  $S^n$ . Debido a que  $S^n$  se puede cubrir de manera natural con dos discos, y estos son contraíbles, entonces se puede dar una trivialización del haz con únicamente dos vecindades coordenadas. Analizando esta situación podremos clasificar los haces sobre  $S^n$  en base a una función definida en el ecuador de la esfera. Este teorema de clasificación será de vital importancia en la segunda parte de este trabajo. Ya que vamos a hablar de espacios contraíbles, empezemos por definir homotopía de haces fibrados.

**Definición 20** Dado un haz coordenado  $\mathbf{B} = \{E, X, p, Y, G, \{V_j\}, \{\phi_j\}\}$  definimos el haz  $\mathbf{B} \times I$  como

$$\mathbf{B} \times I = \{E \times I, X \times I, q, Y, G, \{V_j \times I\}, \{\psi_j\}\}$$

donde  $q(b, t) = (p(b), t)$  y  $\psi_j(x, t, y) = (\phi_j(x, y), t)$ .

Como consecuencia inmediata de la definición tenemos que las transformaciones coordenadas de  $\mathbf{B} \times I$  cumplen que  $g_{ji}(x, t) = g_{ji}(x)$ . Usando el haz  $\mathbf{B} \times I$  podemos definir homotopía de haces fibrados.

**Definición 21** Sean  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$  dos haces con la misma fibra y grupo,  $h_0$  y  $h_1$  dos mapas de haces de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$ . Decimos que  $h_0$  y  $h_1$  son homotópicas si existe un mapa de haces fibrados  $h : \mathbf{B} \times I \rightarrow \mathbf{B}'$  tal que  $h(b, 0) = h_0(b)$  y  $h(b, 1) = h_1(b)$ . A  $h$  le llamamos una homotopía.

Con esto probaremos el siguiente teorema, que será de gran utilidad.

**Teorema 22** *Todo haz sobre una base contraíble es trivial.*

DEMOSTRACION:

Sea  $C$  un espacio contraíble. Queremos demostrar que todo haz principal con base  $C$  admite una sección.

Sea  $\mathbf{B} = \{E, C, p, G, G, \{V_j\}, \{\phi_j\}\}$  un haz principal. Como  $C$  es un espacio contraíble entonces existe una homotopía  $h : \mathbf{B} \times I \rightarrow \mathbf{B}$  tal que  $h(b, 0) = b$  y  $h(b, 1) \subset p^{-1}(V_j)$  para alguna  $j$ . Sabemos que el haz  $\{p^{-1}(V_j), V_j, p, G, G, V_j, \phi_j\}$  es trivial y por lo tanto admite una sección  $\sigma' : V_j \rightarrow p^{-1}(V_j)$ . Definimos  $\sigma : C \rightarrow E$  como  $\sigma(x) = b \in Y_x$  donde  $h(b, 1) = \sigma'(\bar{h}(x, 1))$ , donde  $\bar{h}$  es la homotopía de  $C$  inducida por  $h$ .  $\sigma$  es una función continua y  $p(\sigma(x)) = x$ , por lo tanto  $\sigma$  es una sección de  $\mathbf{B}$ . Entonces por el teorema 15 todo haz asociado a  $\mathbf{B}$  es trivial.  $\square$

**Corolario 22.1** *Todo haz sobre la bola de dimensión  $n$  es trivial.*

Este resultado clásico nos va a permitir caracterizar todos los haces con determinada fibra sobre la esfera de dimensión  $n$ . Acabamos de demostrar que todo haz sobre la bola de dimensión  $n$  es trivial. En particular podemos cubrir a la esfera con dos bolas de dimensión  $n$  de manera natural. Sean  $V_1 = S^n - \{x\}$  y  $V_2 = S^n - \{-x\}$  donde  $x$  es cualquier punto sobre la esfera. Haciendo una analogía, al punto  $x$  le llamaremos polo norte y a  $-x$  polo sur. El ecuador de  $S^n$  será el  $S^{n-1}$  determinado por la intersección de  $S^n$  con el subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ortogonal a  $x$ . Por el teorema anterior cualquier haz restringido a  $V_i$  es trivial. Podemos contraer poco a poco las vecindades coordenadas, de tal manera que su frontera sea un  $S^{n-1}$  paralelo al ecuador. El haz quedará determinado por la manera de pegar a lo largo de una banda determinada por los dos paralelos. Intuitivamente esta banda la podemos hacer tan delgada como queramos, y por consideraciones de continuidad veremos que podremos caracterizar los haces sobre la esfera de acuerdo a la función de pegado a lo largo del ecuador. Precizando, si tomamos  $x_0$  un punto base sobre  $S^{n-1}$ , decimos que un haz coordenado se encuentra en *forma normal* si sus vecindades coordenadas son  $V_1$  y  $V_2$  y  $g_{12}(x_0) = e$ .

**Lema 23** *Todo haz coordenado  $\mathbf{B}$  sobre  $S^n$  es estrictamente equivalente a un haz en forma normal.*

## DEMOSTRACION:

**B** es trivial sobre cada uno de las  $V_i$ , por lo tanto existen mapeos de haces  $\phi'_i : V_i \times Y \rightarrow B_i$ , donde  $B_i$  denota la porción de **B** sobre  $V_i$ . Entonces  $\phi'_1$  y  $\phi'_2$  son funciones coordenadas de un haz **B'** estrictamente equivalente a **B**. Si  $g_{12}(x_0) = a$  entonces construimos un segundo haz estrictamente equivalente a **B'** fijando  $\lambda_1(x) = c$ , y  $\lambda_2(x) = a$  y aplicando el teorema 10. Este haz se encuentra en forma normal y concluye la demostración.  $\square$

**Definición 24** Si **B** es un haz en forma normal sobre  $S^n$  entonces definimos el mapeo característico de **B** como  $\chi = g_{12} |_{S^{n-1}}$ .

**Lema 25** Cualquier función continua  $\chi : (S^{n-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$  es el mapeo característico de algún haz coordinado sobre  $S^n$  en forma normal.

## DEMOSTRACION:

Sea  $r : V_1 \cap V_2 \rightarrow S^{n-1}$  la retracción que proyecta  $x$  sobre la intersección de el meridiano que pasa por  $x$  y  $S^{n-1}$ . Definimos  $g_{12}(x) = \chi(r(x))$ ,  $g_{21}(x) = g_{12}(x)^{-1}$ , y fijamos  $g_{11} = g_{22} = e$ . Entonces el haz construido por el método delincado en el teorema 11 tiene como función característica a  $\chi$ .  $\square$

**Teorema 26** Sean **B** y **B'** haces coordinados sobre  $S^n$  en forma normal, y con la misma fibra y grupo. Sean  $\chi$  y  $\chi'$  sus funciones características. **B** y **B'** son equivalentes si y solamente si existe un elemento  $a \in G$  y una homotopía entre  $\chi'$  y  $a\chi a^{-1}$ .



Si los haces son equivalentes entonces existen  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  estipuladas en el teorema 10. Denotemos por  $\mu_i$  a la restricción de  $\lambda_i$  al ecuador  $S^{n-1}$ . Entonces se sigue que:

$$\chi'(x) = \mu_1(x) \chi(x) \mu_2(x)^{-1}$$

En vista que  $\chi(x_0) = \chi'(x_0) = e$  entonces tenemos que  $\mu_1(x_0) = \mu_2(x_0) = a$ . Ahora bien,  $S^{n-1}$  es contraíble a  $x_0$  sobre cualquiera de los hemisferios. Esta homotopía me induce una segunda homotopía en  $G$  que manda cada una de las  $\mu_i$  en  $a$ . Sea

$$h_i : (S^{n-1} \times I, x_0 \times I) \rightarrow (G, a)$$

la homotopía así determinada, entonces  $h'(x, t) = h_1(x, t) \chi(x) h_2(x, t)^{-1}$  es una homotopía de  $\chi'$  en  $a\chi a^{-1}$  fijando la imagen de  $x_0$  en  $e$ .



Supongamos que existe  $a \in G$  y que tenemos una homotopía entre  $\chi$  y  $a\chi a^{-1}$ . Si definimos  $\lambda_i(x) = a$  para toda  $x \in V_i$ , entonces aplicando el teorema 10 tenemos que existe un haz equivalente a  $\mathbf{B}$  y cuyo mapeo característico es  $a\chi a^{-1}$ , por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $a = e$  y que  $\chi'$  es homotópica a  $\chi$ . Ahora bien, dado que la imagen de las funciones características son elementos del grupo, esta homotopía implica que el mapeo definido por la multiplicación  $\chi'\chi$  es homotópico a un mapeo constante, y por lo tanto la función característica se puede extender del ecuador a la totalidad de el hemisferio norte. Si denotamos por  $N$  y  $S$  a los hemisferios norte y sur respectivamente y por  $\eta : N \rightarrow G$  la extensión que acabamos de mencionar entonces podemos definir una función

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} g'_{12}(x)g_{12}(x)^{-1}, & x \in S \cap V_i; \\ \eta(x), & x \in N \end{cases}$$

$\lambda_1$  es continua ya que sus componentes son compatibles a lo largo del ecuador. Ahora bien, si en un haz sobre  $S^n$  en forma normal restringimos  $V_1$  al interior del hemisferio sur,  $\overset{\circ}{S}$ , con la correspondiente restricción en las funciones coordenadas, obtenemos un haz estrictamente equivalente. Con esta técnica construimos haces  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}'_1$  estrictamente equivalentes a  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}'$ , y definimos

$$\lambda_2(x) = e, \quad x \in \overset{\circ}{S},$$

entonces tenemos que

$$g'_{12}(x) = \lambda_1(x)g_{12}(x)\lambda_2(x)^{-1}, \quad x \in V_1 \cap \overset{\circ}{S}$$

y por el teorema 10, tenemos la equivalencia de  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}'_1$  y por transitividad la de  $\mathbf{B}$  con  $\mathbf{B}'$ .  $\square$

Este teorema nos permite clasificar los haces fibrados sobre  $S^n$ . Acabamos de ver que la equivalencia de dos haces depende de la existencia de una homotopía entre las funciones características de estos. En vista del teorema 13 podemos reducir el estudio a haces principales. Las funciones características son funciones con dominio  $S^{n-1}$  y contradominio  $G$ . Si  $G$  es arcoconexo, entonces por la independencia de punto base estas funciones corresponden a elementos de  $\pi_{n-1}(G)$ , y dos funciones características son homotópicas si y sólo si son representantes del mismo elemento de  $\pi_{n-1}(G)$ . Entonces, el teorema anterior implica que el conjunto de clases de equivalencia de haces

con fibra  $S^n$  están en correspondencia biunívoca con los elementos de  $\pi_{n-1}(G)$ . Ahora bien, hay tantas elecciones esencialmente distintas de punto base como componentes arcoconexas de  $G$ . Es en este punto donde cobra importancia la existencia del elemento  $a$  del grupo en el enunciado del teorema. Este elemento nos sirve para cambiar de una componente a otra, entonces existirán tantas clases de equivalencia de estos haces como componentes tenga el grupo multiplicadas por el  $(n-1)$ -ésimo grupo de homotopía de una de las componentes de  $G$ , en vista de que cualquier componente de un grupo topológico es homeomorfa a la componente que contiene a la identidad.

Con este resultado damos por terminado el capítulo sobre haces fibrados y estamos en condiciones de tratar el problema principal de la tesis.

## Capítulo 2

# Tomografía

### 2.1 La Conjetura de Gromov

El matemático ruso Gromov planteó el siguiente problema: Supongamos que  $K$ , un cuerpo convexo y compacto en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , posee un punto  $p$  tal que cualesquiera dos secciones  $n$ -dimensionales que contengan a  $p$  son congruentes. ¿Es entonces  $K$  la bola de dimensión  $n + 1$ ? La intuición sugiere que la respuesta debe ser afirmativa, sin embargo, hasta la fecha esta pregunta ha sido contestada sólo de manera parcial. Si la dimensión del espacio es par se ha confirmado la conjetura; sin embargo no se ha podido concluir nada cuando esta dimensión es impar. En este trabajo daremos una demostración del primer caso, siguiendo las ideas de Mani[?].

La conjetura es de carácter evidentemente geométrico; ¿Qué es lo que la vincula con la topología y específicamente con la teoría de los haces fibrados? Intentaremos traducir el problema geométrico a uno topológico, para entonces poder aplicar la herramienta desarrollada en la primera parte del trabajo. Supongamos que el circuncentro de  $K$  se encuentra en el origen. Si  $S^n$  es la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $x$  un punto sobre ella, entonces entenderemos por la sección  $n$ -dimensional de  $K$  en la dirección  $x$  como la intersección de  $K$  con el subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ortogonal a  $x$ . Denotaremos por  $s(x)$  a este conjunto. Es claro que las secciones en las direcciones  $x$  y  $-x$  coinciden. Tomemos el conjunto de todos los cuerpos congruentes a  $s(x)$  que son tangentes a  $S^n$  en su circuncentro. La idea principal es que la tríada formada por este conjunto, la

función continua que le asocia a cada copia de  $s(x)$  su circuncentro y  $S^n$  forman un haz. Ahora bien, supongamos que existe  $K$  que cumple con la hipótesis de la conjetura de Gromov. El haz se convierte ahora en un haz fibrado cuya fibra es el conjunto de cuerpos congruentes a  $s(x)$  en  $\mathfrak{R}^n$ . Para cada punto  $x$  traslademos la sección  $s(x)$  de tal manera que sea tangente a  $S^n$  en el punto que determina su dirección. Esto se logra tomando el conjunto  $s(x) + x$ . Si hacemos esta operación para cada punto de  $S^n$  entonces obtendremos una familia de cuerpos congruentes tangentes a  $S^n$ . Por medio de esta operación construimos una sección del haz fibrado que acabamos de mencionar. Probaremos que si  $n$  es par y  $s(x)$  no es la bola de dimensión  $n$  entonces no puede existir una sección del haz. Posteriormente probaremos que si toda sección de  $K$  es la bola de dimensión  $n$  entonces  $K$  es la bola de dimensión  $n + 1$ . Con esto concluimos la demostración.

El observar que la conjetura sólo se ha probado para  $n$  par, puede sugerir una relación con el resultado clásico de topología de que para  $n$  par no se puede "peinar" a la esfera  $S^n$ . La relación, de hecho, existe y obtendremos este teorema como corolario de nuestro trabajo.

## 2.2 Definiciones y Notación

Denotemos por  $I_{n+1}$  al grupo de isometrías de  $\mathfrak{R}^{n+1}$ , por  $O_{n+1}$  a el subgrupo ortogonal, y por  $SO_{n+1}$  al subgrupo de las rotaciones de  $\mathfrak{R}^{n+1}$ . Entonces tenemos que  $SO_{n+1} \subset O_{n+1} \subset I_{n+1}$ . Decimos que un cuerpo en el espacio euclidiano  $\mathfrak{R}^{n+1}$  es un cuerpo plano si su cápsula afín, definida como el euclidiano mínimo que lo contiene, no es todo  $\mathfrak{R}^{n+1}$ . Sea  $K$  un cuerpo convexo y compacto plano en  $\mathfrak{R}^{n+1}$ , y  $\Gamma = \{m(K); m \in I_{n+1}\}$  el conjunto de todos los cuerpos congruentes a  $K$  en  $\mathfrak{R}^{n+1}$ . A  $\Gamma$  le asociaremos una métrica. Para todo  $X \in \Gamma$  definimos el  $\epsilon$ -engrosamiento de  $X$  como:

$$X_\epsilon = \{y \in \mathfrak{R}^{n+1} \mid \|x - y\| < \epsilon \text{ para algún } x \in X\}.$$

Si  $X$  y  $Y$  son elementos de  $\Gamma$  definimos la distancia entre  $X$  y  $Y$  como:

$$d_H(X, Y) = \inf \{\epsilon \mid X \subset Y_\epsilon \text{ y } Y \subset X_\epsilon\}.$$

a esta métrica la conocemos como la métrica de Hausdorff. Definimos  $\tau : \Gamma \rightarrow \mathfrak{R}^{n+1}$  la función continua que le asocia a cada convexo en  $\Gamma$  su circuncentro. Sea  $S^n$  la esfera unitaria en  $\mathfrak{R}^{n+1}$ , y  $S^{n-1} \subset S^n$  el ecuador de  $S^n$  (la última coordenada es cero). Si  $x \in S^n$  denotemos por  $E(x)$  el plano tangente en  $x$ . Llamaremos  $\Gamma_0 = \{K \in \Gamma \mid \tau(K) \in S^n, K \in E(\tau(K))\}$  al subconjunto de  $\Gamma$  de los cuerpos congruentes a  $K$  que son tangentes a  $S^n$  en su circuncentro. Ahora bien, definimos un campo de cuerpos congruentes a  $K$  tangente a  $S^n$  como una función continua  $\gamma : S^n \rightarrow \Gamma_0$  que cumple con la condición de que  $\tau(\gamma(x)) = x$ . Es decir, con  $\gamma$  vamos a escoger un único cuerpo congruente a  $K$  de todos los posibles tangentes para cada punto de la esfera. La tríada  $\{\Gamma_0, S^n, \tau\}$  forma un haz y la existencia de un campo de cuerpos congruentes a  $K$  tangentes a  $S^n$  es equivalente a la existencia de una sección del haz.

Sea  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$  la base canónica de  $\mathfrak{R}^{n+1}$ , y  $\mathfrak{R}^k$  el subespacio generado por los primeros  $k$  elementos de la base,  $O_k$  el subgrupo de  $O_{n+1}$  que actúa como la identidad el subespacio ortogonal a  $\mathfrak{R}^k$ . Tomemos  $K_0 \in \Gamma_0$  un elemento tal que  $\tau(K_0) = e_{n+1}$ , y definimos  $G_0 = \{o \in O_n \mid o(K_0) = K_0\}$ . Decimos que  $K_0$  es totalmente simétrico si y sólo si  $G_0 = O_n$ . Se puede verificar que los únicos cuerpos convexos y compactos totalmente simétricos son los puntos y las bolas de dimensión  $n$ .

La existencia de un cuerpo que cumple con que todas sus secciones son totalmente simétricas equivale a que el haz de cuerpos congruentes a una de sus secciones tangentes a  $S^n$  admita una sección. Es cierto que una sección de un cuerpo centrado en el origen no tiene porque estar centrada en el origen, y por lo tanto el circuncentro de  $s(x) + x$  no tiene porque ser  $x$ . Esto implica que  $s(x) + x$  no es un elemento de  $\Gamma_0$ . Esto no representa problema alguno, ya que con una traslación adecuada podemos hacer coincidir el circuncentro de cada sección con el punto que determina su dirección. En vista de que existe un arco en  $\Gamma$  entre un elemento y cada uno de sus trasladados; si existiera una sección de el haz de cuerpos congruentes tangentes a  $S^n$ , entonces podríamos deformar esta a una sección del haz de cuerpos congruentes tangentes a  $S^n$  en su circuncentro, es decir del haz  $\{\Gamma_0, S^n, \tau\}$ . Demostraremos que si  $n$  es par, este haz admite una sección únicamente en el caso de que  $K_0$  sea totalmente simétrico.

Nos detendremos un poco en dar la definición de una función que será de vital

importancia en el problema. Definiremos  $\phi : S^n - \{-e_{n+1}\} \rightarrow SO_{n+1}$  como la rotación que lleva  $e_{n+1}$  en  $x$  por la geodésica que los une. Matricialmente si  $x = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$  entonces  $\phi$  está determinada por:

$$\phi(x) = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & & & a_2 \\ & & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline & & & a_{n+1} \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n & | & a_{n+1} \end{array} \right)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. La función  $\phi$  tiene las siguientes características:

1.  $\det(\phi(x)) = 1$
2.  $\phi(x)^{-1} = \phi(x)^T$
3. Las columnas de  $\phi(x)$  forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Adicionalmente definimos

$$\lambda = \phi(e_n)^2 = \left( \begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

como la rotación de  $180^\circ$  en el plano de las dos últimas coordenadas. Es inmediato verificar que  $\lambda$  es idempotente.

**Proposición 1** *El espacio cociente  $O_{n+1}/O_n$  de las clases laterales izquierdas es homeomorfo a  $S^n$*

**DEMOSTRACION:**

Definimos  $h : O_{n+1}/O_n \rightarrow S^n$  y  $h' : S^n \rightarrow O_{n+1}/O_n$  como

$$h(o \cdot O_n) = o(e_{n+1})$$

$$h'(x) = \begin{cases} \phi(x) \cdot O_n & x \neq -e_{n+1} \\ \lambda \cdot O_n & x = -e_{n+1} \end{cases}$$

1.  $h$  está bien definida

Sea  $o'$  otro representante de  $o \cdot O_n$ . Entonces  $o' = o \cdot o_1$  para alguna  $o_1 \in O_n$ .

Tenemos que  $o'(e_{n+1}) = o \cdot o_1(e_{n+1}) = o(e_{n+1})$  pues  $o_1$  fija a  $e_{n+1}$ . Además

$h$  es cerrada pues es una función continua de un compacto en un Hausdorff.

2.  $h(h'(x)) = x$ , y  $h'(h(o \cdot O_n)) = o \cdot O_n$  □

Análogamente se prueba la:

**Proposición 2** *El espacio cociente  $O_{n+1}/G_0$  de las clases laterales izquierdas es homeomorfo a  $\Gamma_0$*

Adicionalmente probemos la:

**Proposición 3** *El máximo subgrupo de  $O_n$  invariante en  $O_{n+1}$  es el grupo trivial.*

DEMOSTRACION:

Sea  $a \in O_{n+1}$ , como  $O_n$  fija a  $e_{n+1}$ , entonces tenemos que  $a(e_{n+1})$  queda fijo bajo operaciones de  $aO_n a^{-1}$ . Si  $b \in aO_n a^{-1} \forall a \in O_{n+1}$  entonces  $b \cdot a(e_{n+1}) = a(e_{n+1})$  y en vista de que  $O_{n+1}$  es un grupo transitivo sobre  $S^n$  concluimos que  $b = e$ . □

Juntando estas tres proposiciones podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 O_{n+1} & \xrightarrow{\Pi} & O_{n+1}/G_0 & \xrightarrow{\pi} & O_{n+1}/O_n \\
 \uparrow Id & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 O_{n+1} & \xrightarrow{T} & \Gamma_0 & \xrightarrow{\tau} & S^n
 \end{array}$$

donde  $\Pi$  y  $\pi$  son las proyecciones canónicas y  $T(o) = o(K_0)$ . Por lo tanto podemos trasladar el problema de construir una sección del haz  $\{\Gamma_0, S^n, \tau, O_n(K_0)\}$  a construirla en el haz  $\{O_{n+1}/G_0, S^n, \pi, O_n/G_0\}$ . Para esto daremos la forma normal de este haz y del haz  $\{O_{n+1}/O_n, S^n, p, O_n\}$ .

Construimos los haces coordenados:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \{O_{n+1}, S^n, p, O_n, O_n, \{S^n - \{-e_{n+1}\}, S^n - \{e_{n+1}\}\}, \{\phi_1, \phi_2\}\} \\
 \beta &= \{O_{n+1}/G_0, S^n, \pi, O_n/G_0, O_n/G_0, \{S^n - \{-e_{n+1}\}, S^n - \{e_{n+1}\}\}, \{\psi_1, \psi_2\}\}
 \end{aligned}$$

donde  $G'_0 = \bigcap_{o \in O_n} o \cdot G_0 \cdot o^{-1}$  es el máximo subgrupo de  $G_0$  invariante en  $O_n$  y

$$\begin{aligned}\phi_1 &: S^n - \{-e_{n+1}\} \times O_n \longrightarrow p^{-1}(S^n - \{-e_{n+1}\}) \\ \phi_2 &: S^n - \{e_{n+1}\} \times O_n \longrightarrow p^{-1}(S^n - \{e_{n+1}\}) \\ \psi_1 &: S^n - \{-e_{n+1}\} \times O_n/G_0 \longrightarrow \pi^{-1}(S^n - \{-e_{n+1}\}) \\ \psi_2 &: S^n - \{e_{n+1}\} \times O_n/G_0 \longrightarrow \pi^{-1}(S^n - \{e_{n+1}\})\end{aligned}$$

son las funciones que quedan definidas por la regla de correspondencia

$$\begin{aligned}\phi_1(x, o) &= \phi(x) \cdot o & \psi_1(x, o \cdot G_0) &= \phi(x) \cdot o \cdot G_0 \\ \phi_2(x, o) &= \lambda \cdot \phi(\lambda x) \cdot o & \psi_2(x, o \cdot G_0) &= \lambda \cdot \phi(\lambda x) \cdot o \cdot G_0\end{aligned}$$

Comparando las funciones coordenadas, y recordando la definición 1.14 observamos que  $\beta$  es un haz débilmente asociado a  $\alpha$ . Además para el haz  $\alpha$  tenemos que:

$$g_{12}(x) = [\phi(x)]^{-1} \cdot \lambda \cdot \phi(\lambda x) = \left( \begin{array}{cccc|cc} & & & & -2a_1a_n & 0 \\ & & & & -2a_2a_n & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & -2a_{n-1}a_n & 0 \\ \hline 2a_1a_n & 2a_2a_n & \cdots & 2a_{n-1}a_n & 2a_n^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Donde  $x = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ . Ahora sí, sin más preliminares podemos pasar a nuestro resultado principal.

## 2.3 Demostración de la Conjetura de Gromov

**Teorema 4** Si  $n$  es un número par entonces los únicos campos de cuerpos congruentes tangentes a  $S^n$  son los campos de cuerpos totalmente simétricos.

**DEMOSTRACION:**

Supongamos que por el contrario existe un campo de cuerpos, no totalmente simétricos, congruentes tangentes a  $S^n$ , es decir que  $G_0 \neq O_n$ . Esto implica que el haz coordenado  $\beta$  admite una sección. Como ya hicimos notar antes,  $\beta$  es un haz débilmente asociado de  $\alpha$  con fibra  $O_n/G_0$ ;

y por el corolario del teorema 1.19 esto implica que se puede reducir el grupo del haz  $\alpha$  a  $G_0$ . En otras palabras, existe un haz  $\alpha_0$  con grupo  $G_0$  que es  $O_n$ -equivalente a  $\alpha$ . Si denotamos por  $\chi$  y  $\chi_0$  las funciones características de estos dos haces, entonces por el teorema de clasificación de haces 1.26 existe  $a \in O_n$  y una homotopía  $\chi \simeq a\chi_0 a^{-1}$ . Parametricemos a  $S^{n-1}$  con la siguiente carta; para abreviar adoptaremos la notación  $\cos_{i,j} = \cos \theta_i \cos \theta_{i+1} \dots \cos \theta_j$ :

$$S^{n-1} = \left\{ \begin{array}{l} (\cos_{1,n-2}, \text{sen} \theta_1 \cos_{2,n-2}, \text{sen} \theta_2 \cos_{3,n-2}, \dots, \text{sen} \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \text{sen} \theta_{n-1}) \\ \theta_i \in [0, 2\pi] \quad \theta_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right\}$$

y definimos  $\mu : O_n \rightarrow S^{n-1}$  por  $\mu(o) = o(e_n)$  entonces tenemos que  $\mu\chi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$

$$\mu\chi(x) = (\cos_{1,n-2} \text{sen} 2\theta_{n-1}, \text{sen} \theta_1 \cos_{2,n-2} \text{sen} 2\theta_{n-1}, \dots, \text{sen} \theta_{n-2} \text{sen} 2\theta_{n-1}, -\cos 2\theta_{n-1}).$$

La composición  $\mu\chi$  es la función que mientras recorremos una vez un meridiano en el dominio, recorremos el mismo meridiano en el codominio pero al doble de velocidad, y por lo tanto dos veces. La homotopía entre  $\chi$  y  $a\chi_0 a^{-1}$  induce a su vez una homotopía entre  $\mu\chi$  y  $\mu(a\chi_0 a^{-1})$ . Analicemos más de cerca estas funciones.  $\mu\chi$  cumple las siguientes condiciones:

1.  $\mu\chi(e_n) = e_n$ ,
2.  $\chi(x) = \mu\chi(-x)$ ,
3. Si denotamos por  $S^{n-2}$  al ecuador de  $S^{n-1}$  ( $\theta_{n-1} = 0$ ) entonces  $\mu\chi(S^{n-2}) = -e_n$ .

Vamos a descomponer  $\mu\chi$  en cuatro funciones:  $f_1 : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

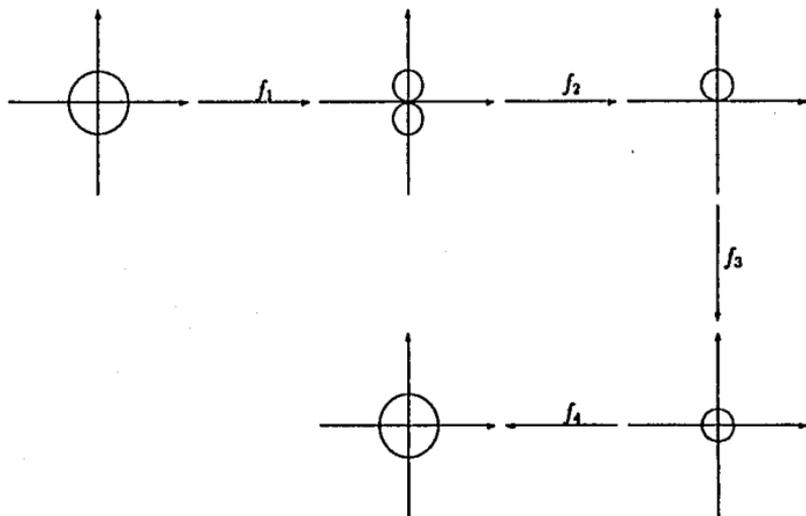
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos_{1,n-2} \text{sen} 2\theta_{n-1}, \text{sen} \theta_1 \cos_{2,n-2} \text{sen} 2\theta_{n-1}, \dots, \text{sen} \theta_{n-2} \text{sen} \theta_{n-1}, 1 - \cos \theta_{n-1}) & \text{si } \theta_{n-1} \geq 0 \\ -\frac{1}{2}(\cos_{1,n-2} \text{sen} 2\theta_{n-1}, \text{sen} \theta_1 \cos_{2,n-2} \text{sen} 2\theta_{n-1}, \dots, \text{sen} \theta_{n-2} \text{sen} \theta_{n-1}, 1 - \cos \theta_{n-1}) & \text{si } \theta_{n-1} < 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = (a_1, a_2, \dots, a_n); a_n \geq 0 \\ -x & \text{si } x = (a_1, a_2, \dots, a_n); a_n < 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - \frac{1}{2}) \text{ donde } x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$f_4(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

tenemos que  $f_4 f_3 f_2 f_1 = \mu_X$ . En un diagrama podemos visualizar la acción de las  $f_i$  como:



$f_1$  sólo cumple con la condición de que el ecuador cae sobre un punto, y hay que notar que  $f_1(-x) = -f_1(x)$ . Las funciones  $f_3$  y  $f_4$  son topológicamente triviales pues son homotópicas a la identidad. La parte crucial se encuentra en  $f_2$ ; está función manda el  $S^{n-1}$  que, después de haber aplicado  $f_1$ , tiene última coordenada negativa sobre el correspondiente  $S^{n-1}$  con última coordenada positiva, mientras que deja a esta última fija. Ahora bien, la función antípoda preserva la orientación en  $\mathbb{R}^n$  si  $n$  es par y la invierte si  $n$  es un número non (y no me refiero a un número muy grande), por lo que "envuelve" a la esfera dos veces en el caso de  $n$  par, y cero en el caso non. Dadas las condiciones que hemos puesto en el teorema podemos afirmar que  $\mu_X$  es una función de grado dos.

Queremos demostrar que  $\mu_X \circ a^{-1}$  no puede ser de grado dos, específicamente demostraremos que su grado es cero, lo que tornaría insustentable nuestra suposición sobre la existencia de una sección del haz  $\beta$ .

En vista de que  $K_0$  no es totalmente simétrico, existe una esfera  $T^{n-1} \in E(e_{n+1})$  de tal manera que  $K_0 \cap T^{n-1} \neq T^{n-1}$ . Sean  $y_1 \in K_0 \cap T^{n-1}$  y  $y_2 \in T^{n-1} - K_0$ . Definimos

$$z_1 = \frac{y_1 - e_{n+1}}{\|y_1 - e_{n+1}\|} \quad z_2 = \frac{y_2 - e_{n+1}}{\|y_2 - e_{n+1}\|}$$

las  $z_i$  no son más que la proyección de las  $y_i$  a  $\mathbb{R}^n$ , normalizadas. Entonces  $z_i \in S^{n-1}$ . Si  $\mu(\alpha\chi_0\alpha^{-1})$  cubriera a  $S^{n-1}$  para alguna  $\alpha$  entonces existirían  $g_1, g_2 \in G_0$  tales que  $ag_1\alpha^{-1}(e_n) = az_1$  y  $ag_2\alpha^{-1}(e_n) = az_2$ . Esto implicaría que  $g_2g_1^{-1}(z_1) = z_2$ , y por lo tanto  $g_2g_1^{-1}(y_1) = y_2$ . Pero esto contradice la definición de  $G_0$ . Por lo tanto la imagen de  $\mu\alpha\chi\alpha^{-1}$  es un subconjunto propio de  $S^{n-1}$ . Se sigue que la imagen de  $\mu\alpha\chi\alpha^{-1}$  es contraíble en  $S^{n-1}$ , y por lo tanto no puede ser homotópica a  $\mu\chi$  que como habíamos visto es de grado dos. Con esto concluimos la demostración.  $\square$

**Corolario 4.1** *Si  $n$  es par, entonces no existe un campo de vectores tangentes a  $S^n$ .*

**DEMOSTRACIÓN:**

Un campo de vectores tangentes a  $S^n$  induce canónicamente un campo de intervalos. Para cada  $x \in S^n$  escogemos el intervalo tangente a  $S^n$  en la dirección del correspondiente vector tangente en  $x$ . El corolario se sigue de que el intervalo no es totalmente simétrico.  $\square$

Este teorema demuestra que las secciones de  $K$  tienen que ser totalmente simétricas. Esto implica que son, o bien puntos, o bien bolas de dimensión  $n$ . Si toda sección consta de un único punto, entonces  $K$  es también un punto. En el otro caso tenemos el siguiente:

**Teorema 5** *Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ . Si toda sección de  $K$  es una bola congruente de dimensión  $n$  entonces  $K$  es la bola de dimensión  $n + 1$ .*

**DEMOSTRACION:**

Supongamos sin pérdida de generalidad que las secciones son de norma 1. Primero demostramos que el circuncentro de cada una de estas secciones coincide. Digamos que este es el origen. Supongamos que existe una sección cuyo centro no es el origen; llamemos  $s(x)$  a esta sección. Sea  $s(x^\perp)$  una sección en dirección ortogonal a la dirección de  $s(x)$ . El diámetro de  $s(x^\perp)$  es igual a la cuerda de  $s(x)$  que pasa por el origen. Como  $s(x)$  no está centrada en el origen, la longitud de esta cuerda es menor que dos. Pero  $s(x^\perp)$  es una bola unitaria y por lo tanto su diámetro es exactamente dos. Esto implica que toda sección de  $K$  está centrada en el origen.

Sea  $x$  un punto sobre la frontera de  $K$ . Entonces  $x$  es también un punto frontera de  $s(x^\perp)$  donde  $x^\perp$  es cualquier punto ortogonal a  $x$ . Pero  $s(x^\perp)$  es la bola unitaria y por lo tanto  $\|x\| = 1$ . Ahora, sea  $y$  un punto tal que  $\|y\| = 1$ . Tenemos que  $y \in s(y^\perp)$  y por lo tanto  $y \in K$ . Esto implica que la frontera de  $K$  es la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y como  $K$  es convexo entonces es toda la bola unitaria  $\square$

## 2.4 Algunos resultados adicionales.

Con lo anterior queda demostrada la conjetura de Gromov, pero podemos sacar aún mas resultados como corolarios de nuestra demostración. Veremos que, al menos en el caso de  $n$  par, la hipótesis de congruencia es demasiado fuerte, podemos concluir el mismo resultado, si únicamente pedimos que las secciones sean similares entre sí. Decimos que dos cuerpos,  $K_1$  y  $K_2$ , en  $\mathbb{R}^{n+1}$  son similares si  $\lambda(K_1)$  es congruente a  $K_2$  para algún real  $\lambda \neq 0$ . Adicionalmente podremos dar una caracterización de las elipsoides. Estos resultados se resumen así:

**Corolario 4.2** *Si  $n$  es un número par, entonces los únicos campos de cuerpos similares tangentes a  $S^n$  son los campos de cuerpos totalmente simétricos.*

DEMOSTRACION:

Sea  $K_0$  como en el teorema. Con la métrica de Hausdorff, ambas componentes del conjunto de cuerpos similares tangentes a  $S^n$  son arco-conexas. Sea  $\Gamma' = \{g(\lambda(K_0)); g \in O_{n+1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$  este conjunto, y  $\tau'$  la función que le asocia a cada punto de  $\Gamma'$  el punto de tangencia con  $S^n$ . Entonces cualquier sección del haz  $\{\Gamma', S^n, \tau'\}$  se puede deformar a una sección de cuerpos congruentes; es decir a una sección del haz  $\{\Gamma_0, S^n, \tau\}$ . El teorema anterior nos demuestra que esto sólo se puede hacer si  $K_0$  es totalmente simétrico.  $\square$

**Corolario 4.3** *Si  $n$  es un número par, entonces los únicos campos de cuerpos afínmente equivalentes tangentes a  $S^n$  son los campos de cuerpos afines a cuerpos totalmente simétricos.*

DEMOSTRACIÓN:

Cada una de las componentes del conjunto de los cuerpos afines a  $K_0$  con la topología inducida por la métrica de Hausdorff es arcoconexa. La demostración sigue de manera idéntica a la del corolario anterior.  $\square$

Usando estos corolarios podemos demostrar los siguientes teoremas:

**Teorema 6** *Sea  $K$  un cuerpo compacto y convexo en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $n \geq 1$ . Si  $K$  contiene un punto  $p$  tal que cualesquiera dos secciones que contengan a este punto son similares, entonces  $K$  es la bola de dimensión  $2n + 1$ .*

**DEMOSTRACION:**

Sabemos por el corolario 4.2 que toda sección debe ser una bola. En vista del teorema 5, basta demostrar que todas estas secciones tienen el mismo radio. Sea  $r : S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  la función que a cada punto  $x$  le asocia el radio de la sección en dirección ortogonal a  $x$ . En vista de que  $S^{2n}$  es compacto existe una sección de radio máximo, sea  $K_0$  esta sección. Sea  $K$  otra sección, entonces el radio de  $K$  es menor o igual que el radio de  $K_0$ . Pero también es mayor o igual que el radio de la sección  $(2n - 1)$ -dimensional de  $K_0$  determinada por el plano que contiene a  $K$ . Esta sección tiene el mismo radio que  $K_0$ , y por lo tanto los radios de  $K$  y  $K_0$  son iguales.  $\square$

**Teorema 7** *Sea  $K$  un cuerpo compacto y convexo en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $n \geq 1$ . Si  $K$  contiene un punto  $p$  tal que cualesquiera dos secciones que contengan a este punto son afines, entonces  $K$  es un elipsoide de dimensión  $2n + 1$ .*

Este último teorema, aunque no es difícil de demostrar, necesitaría que introdujéramos uno o dos conceptos nuevos que salen un poco del esquema de este trabajo. Para aquellos que estén interesados, se les refiere al excelente libro de Gardner[4]. Este resultado, aunque es muy similar a los anteriores tiene mucho mas importancia de la que se puede adivinar a primera vista. En su trabajo original, *Sobre una Hipótesis Geométrica de Banach* [5], Gromov plantea este problema como íntimamente relacionado con el análisis funcional. Dentro de este campo, una pregunta fundamental es saber cuando a un espacio de Banach<sup>1</sup> se le puede definir un producto interior, y

<sup>1</sup>Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo. Es un resultado clasico el que cualquier espacio de Banach de dimension finita es esencialmente  $\mathbb{R}^n$  dotado de una norma.

así convertirlo en un espacio de Hilbert<sup>2</sup>. En dimensión finita, podemos clasificar a los espacios de Banach de acuerdo a su norma. Otra manera de ver a la norma es definiendo un convexo  $K$ , centralmente simétrico y centrado en el origen, y definiendo la norma de  $x$  como:

$$\|x\| = \inf \{r \in \mathbb{R}^+ \mid x \in r \cdot K\}.$$

Esto motiva que a  $K$  lo llamemos la bola unidad del espacio de Banach, ya que cualquier elemento en la frontera de  $K$  tiene norma uno. Se sabe que un espacio de Banach es un espacio de Hilbert sí y solamente sí su bola unidad es un elipsoide. Banach quiere dar una caracterización alterna para identificar cuando a un espacio dado se le pueda proveer de un producto interior. Su hipótesis es que en un espacio de Banach se puede definir un producto interior sí y solamente sí cualesquiera dos subespacios de dimensión  $m$  son isométricos. Decimos que dos espacios,  $X$  y  $X'$ , son isométricos si existe una transformación lineal biyectiva entre ellos que preserva la métrica. Dado que la bola unidad de un subespacio de  $X$  no es más que la intersección de la bola unidad de  $X$  con el subespacio en cuestión, la condición de que dos subespacios sean isométricos implica que la bola unidad de uno de ellos sea una transformación afín de la bola unidad de el otro. Esta es la clave para traducir el problema de análisis funcional a uno de geometría, y es la idea que motiva a Gromov. La bola unidad de un subespacio es una sección de la bola unidad del espacio total. La hipótesis de Banach equivale a saber si dado un convexo  $K \in \mathbb{R}^n$  tal que cualesquiera dos secciones de  $K$  son afines implica que  $K$  es un elipsoide. En este trabajo probamos que si la dimensión del espacio es non, este resultado es cierto.

Este es un ejemplo bellísimo de la interacción entre distintas ramas de las matemáticas. Tenemos un problema de análisis funcional, este se traduce a un problema geométrico, el cual a su vez se contesta utilizando técnicas de topología algebraica avanzada. Problemas como este, proporcionan evidencia de que aunque parezca que las distintas ramas de las matemáticas evolucionan de manera independiente, el cuerpo de las matemáticas es uno, y estas ramas están más íntimamente relacionadas de lo que pensamos.

<sup>2</sup>Un espacio de Hilbert es un espacio de Banach con un producto interior de tal manera que  $(x, x) = \|x\|^2$

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

## Bibliografía

- [1] DO CARMO, Manfredo P., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [2] EILENGERG, S. y STEENROD, N., *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.
- [3] FOMENKO, FUCHS, y GUTENMACHER *Homotopic Topology*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.
- [4] GARDNER, Richard M., *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, Por aparecer en 1995.
- [5] GROMOV, M. L., *On a Geometric Hypothesis of Banach* (en ruso), *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, Vol 31, 1967. *Mathematical Reviews* Vol. 36, No. 655.
- [6] HUSSEMOLLER, Dale, *Fibre Bundles*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [7] MANI, P., *Fields of Planar Bodies Tangent to Spheres*, *Monatshefte für Mathematik* 74, 145-149, 1970.
- [8] MONTEJANO, Luis, *Convex Bodies with Homothetic Sections*, *Bulletin of the London Mathematics Society*, Vol. 23, 381-386, 1991.
- [9] PORTER, Richard, *Introduction to Fiber Bundles*, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Dekker, New York, 1977.
- [10] STEENROD, Norman, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.