00384

3 2ej:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ASPECTOS GEOMETRICOS Y ALGEBRAICOS DE LA INMOVILIZACION DE CUERPOS GEOMETRICOS

T E S I S
Que para optener el grado Académico de
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)
p r e s e n t a

DAVID ARIE MAYER FOULKES

Director de Tesis: Dr. Luis Montejano Peimbert

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

México, D. F. *1994*

Aspectos geométricos y algebraicos de la inmovilización de cuerpos geométricos.

Contenido.

Parte I: Inmovilización de cuerpos geométricos.

1 Introducción.

Los problemas de inmovilización fueron introducidos por W. Kuperberg [K] y Papadimitriou [MNP1]. Estos fueron motivados por problemas en la robótica [MNP1, 2]. Luego se desarrolló el interés en el aspecto puramente geométrico del problema. Tratando el caso de curvas convexas suaves, en [BMU] se obtuvieron las condiciones geométricas de orden nulo, primero y segundo para la inmovilización de figuras planas, y se demostró que figuras convexas analíticas diferentes del disco pueden fijarse con tres puntos. En [BFMM] se trató el problema de fijar tetrahedros, demostrando que la condición suficiente de segundo orden es consecuencia de la condición necesaria de primer orden, en el caso de tres dimensiones.

Nuestro interés en el problema es su perspectiva n dimensional. Damos una caracterización geométrica de la condición de primer orden, y la condición de segundo orden en el caso C^2. Relacionamos los conceptos de atrapar y fijar. Damos un método para fijar genéricamente cuerpos C^1. Mostramos que existe una vecindad $C^{1,1}$ de cuerpos cercanos a la esfera que pueden fijarse con $n+1$ puntos, a menos que admitan una cuerda en su superficie (análoga a la de un tornillo). Mostramos la cercana relación de las condiciones geométricas y mecánicas de la inmovilización. Recapitulamos el teorema de inmovilización de tetrahedros. Finalmente, demostramos la conjectura de Kuperberg en el caso bidimensional: cualquier figura bidimensional C^2 estrictamente compacta que no sea el disco puede fijarse firmemente por tres puntos.

Las ideas principales son las siguientes. Delineamos primero lo que significan las condiciones que determinan si un cuerpo C^2 n dimensional K es fijado por $n+1$ puntos $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$ en su frontera. Determinamos si los puntos fijan K examinando la posibilidad de mover los puntos $\mathbf{p}_i$ (aplicando un camino de isometrías) sin que éstos penetren en el interior de K. La condición de orden nulo dice que ésto es imposible utilizando translaciones unicamente. Si esta condición se cumple, rotemos los puntos compensando la rotación con una translación de tal forma que los puntos

$p_0, \ldots, p_{n-1}$ se deslicen sobre ∂K. La pregunta es si el punto p_n sigue una trayectoria que se mantiene en el exterior de K ó si inevitablemente penetra en el interior. La condición necesaria de primer orden implica que la trayectoria de p_n es inicialmente tangente a ∂K, para cualquier rotación. Es equivalente a la semiconcurrencia (3.4) de las líneas L_i que pasan a través de p_i con dirección normal N_i a ∂K, y en dimensión dos la concurrencia. La condición de segundo orden implica que p_n necesariamente entra en el interior de K.

Alternativamente, podemos pensar que además de rotar y transladar los puntos, les aplicamos un factor de escala. La translación y el factor de escala tienen una definición única a partir del camino de rotaciones que se aplique si pedimos esta vez que todos los puntos $p_0, \ldots, p_n$ se deslicen sobre la superficie. Los puntos fijan K si para cualquier camino de rotaciones se requiere que el factor de escala crezca para poder mantener los puntos sobre la superficie.

Una forma genérica de fijar cuerpos K es la de encontrar la mayor bola inscrita en K. Mostramos que entre los cuerpos C^1, es denso el conjunto que se puede fijar con $n+1$ puntos de esta manera, o que admite una cuerda. Otra forma de fijar cuerpos es deslizar $n+1$ puntos homotéticamente sobre su superficie y encontrar un mínimo en el factor de escala necesario. Esto no siempre funciona pues al deslizarse los puntos se puede perder la condición de orden nulo. Mostramos que para una vecindad $C^{1,1}$ de cuerpos cercanos a la esfera, y de simplejos en una vecindad del equilátero, se mantiene la condición de orden nulo para cualquier deslizamiento, y por lo tanto los cuerpos de esta vecindad pueden fijarse con $n+1$ puntos o admiten una cuerda.

Mostramos también que si un cuerpo K en forma de estrella con respecto a un punto de su interior es atrapado por un conjunto cerrado P, encogiendo y moviendo P homotéticamente podemos fijar K, a menos que admita una cuerda generada por P. Las hipótesis sobre K implican que al encoger y mover P, no se puede escapar de alguna manera, como se escaparían dos puntos que fijaran una "C" desde adentro. De hecho la propiedad de fijar se relaciona con que esxista un valor crítico en las escalas de las imágenes locales homotéticas de P en el exterior de K.

Al examinar la inmovilización de los tetrahedros en $\mathbb{R}^3$ surgió un teorema de matrices, nombradas Móndrigas, que resultaba sorprendentemente difícil de demostrar en tres dimensiones, más aún para los valores propios complejos. La segunda parte de esta tésis se dedica a la generalización y refinación de ese teorema en n dimensiones, y a la demostración de varias aplicaciones que resultaron del mismo método: estimativas de los valores propios de matrices de signos mixtos; estimativas de los valores propios no principales de matrices no negativas; una condición para la no negatividad de la inversa de M-matrices; y un método para modificar los discos de Geršgorin.

Resumimos ahora el método que se utiliza para encontrar tres puntos que fijen una figura bidimensional C^2 estrictamente convexa K, demostrando la conjetura de Kuperberg en dos dimensiones. Analíticamente, el problema es equivalente al de encontrar triples p_0, p_1, p_2 que sean soluciones de una ecuación (la condición de primer orden) y que cumplan ciertas desigualdades (las condiciones de orden nulo y segundo). Primero encontramos triples cercanos a una solución considerando el máximo disco C inscrito en K, que genericamente da tres puntos que fijan K. Para resolver el caso no genérico, escogemos un punto de concurrencia q cercano al centro de C y en un rayo que garantizará la condición de orden nulo. El comportamiento de los conjuntos de soluciones p_i de la condición de primer orden en términos de q resulta equivalente al comportamiento de los conjuntos de nivel de una función C^1, ϕ, definida en ∂K, en términos de un nivel α. El signo de la derivada de ϕ da información sobre la condición de segundo orden (en sí una función contínua que no puede ser tratada por métodos diferenciales). Utilizamos por ello el teorema de Sard para encontrar niveles α para los cuales las soluciones p de $\phi(p) = \alpha$ tengan derivadas no nulas y combinamos éste con el hecho topológico de que, si es sabido que ϕ crece (decrece) entre los extremos de un intervalo (lo cual será implicado por la geometría y la hipótesis de convexidad estricta) entonces, entre estos valores, en algunas de las soluciones p, ϕ debe de tener derivada positiva (negativa). Así, encontramos puntos p_i que satisfacen la condición de primer orden y contribuyen apropiadamente a la condición de segundo orden. En algunos de los casos surge una complicación adicional, cuando la contribución de alguno de los puntos debe de compensar la contribución negativa de alguno de los otros, para lo cual debe obtenerse una estimativa un poco más delicada de las derivadas de ϕ. Una parte importante de la demostración fue la simplificación de la descripción de las curvas estrictamente convexas, que se encuentra en el apéndice de la primera parte.

2 Inmovilización: definiciones.

Comenzaremos precisando los conceptos de figuras ó cuerpos "inmovilizados" y "atrapados". Seguimos la notación que se encuentra en [BFMM]. Sea $\mathcal{E}$ el grupo de Lie de isometrías que preservan la orientación en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$. Dados dos conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos el conjunto de movimientos de X en Y,

$$\mathcal{E}(X,Y) = \{g \in \mathcal{E} \mid g(X) \subset Y\}.$$

A través del escrito, sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto con interior IntK no vacío. Sea $\mathcal{O}K$ el exterior de K, o sea $\mathcal{O}K = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}K$, por lo cual $K \cap \mathcal{O}K = \partial K$.

2.1 Definición. Decimos que P *immoviliza* (ó *fija*) K si $P \subset \mathcal{O}K$ y el mapa identidad $id \in \mathcal{E}$ es un componente conexo aislado (por caminos) de $\mathcal{E}(P,\mathcal{O}K)$. Decimos que P *atrapa* K si $P \subset \mathcal{O}K$ y el componente conexo de $id \in \mathcal{E}$ es compacto.∎

Los casos excepcionales de la inmovilización (como los que plantean las esferas o los tornillos) son casos en que puntos que casi fijan un cuerpo pueden deslizarse sobre su superficie rígidamente. En estos casos decimos que K admite una cuerda.

2.2 Definición. Decimos que K admite una *cuerda global (local)* (en su superficie) si existe un conjunto $P \subset \mathcal{O}K$ que atrapa K y que tiene la propiedad: para toda $g \in \mathcal{E}(P,\mathcal{O}K)$ en el componente conexo de $id \in \mathcal{E}$, (ó en una vecindad de id en su componenete conexo) $g(P) \cap \partial K \neq \emptyset$. En ambos casos decimos que P genera una cuerda.∎

Es claro que cada $g(P)$ atrapa K. La idea es que la unión de los conjuntos $g(P) \cap \partial K$ es lo que en casos sencillos como la superficie de un tornillo llamamos una cuerda.

3 La condiciones de nulo, primer y segundo orden.

Nos interesan las condiciones bajo las cuales un conjunto de $n+1$ puntos $P = \{p_0, \ldots, p_n\}$ fija un cuerpo n dimensional K en puntos diferenciables de la frontera. Sea el conjunto de normales que apuntan hacia el exterior correspondientes a estos puntos $N = \{N_0, \ldots, N_n\}$. La más simple condición para fijar, a la cual nos referimos como condición de orden nulo, es que los puntos bajo consideración fijen el cuerpo cuando sus movimientos se restringen a las translaciones.

3.1 Proposición. Para que el conjunto de puntos P fije un cuerpo C^1, K, para translaciones es necesario y suficiente que cualquier subconjunto propio de N sea linealmente independiente y que existan constantes positivas $a_0, \ldots, a_n > 0$ para las cuales el conjunto N de normales cumpla $\sum_0^n a_i N_i = 0$ *(condición de orden nulo)*.

Demostración. Denotemos las translaciones con vectores b. P fija a K para translaciones si y sólo si para todo b algún punto p_i penetra el interior de K cuando se translada en la dirección b:

$$\forall\, b \neq 0 \quad \exists \quad 0 \leq i \leq n : N_i \cdot b < 0. \qquad (3.1.1)$$

Esto implica que cualquier subconjunto propio de N es linealmente independiente. De lo contrario existe (renumerando si es necesario) algún conjunto $\{N_0, \ldots, N_{n-1}\}$ contenido en un hiperplano, es decir que para algún vector b, $b \cdot N_0 = \ldots = b \cdot N_{n-1} = 0$. Entonces (posiblemente escogiendo $-b$ en lugar de b) $N_n \cdot b \geq 0$, contradiciendo 3.1.1. También, el origen debe de estar en el interior del mínimo conjunto convexo que contiene N, pues de lo contrario existe un hiperplano separador entre N y 0, es decir, un vector b tal que $N_i \cdot b \geq 0$.

Conversamente, si para cualquier $b \neq 0$ 3.1.1 es falso, entonces $N_i \cdot b \geq 0$. Pero la condición de independencia de N implica que estas cantidades no pueden ser todas cero. Por ello $0 = \sum_0^n a_i N_i \cdot b > 0$, una contradicción.■

Para conjuntos de puntos P que cumplan la condición de orden nulo, escribiremos $n_i = a_i N_i$; $\sum_0^n n_i = 0$. Las $a_i > 0$ se encuentran definidas hasta un múltiplo, pero escogeremos

$$a_i = (-1)^i \det\left(N_0 \ \dots \ \hat{N}_i \ \dots \ N_n\right) \tag{3.1.2}$$

(el acento circunflejo significa "omitir"), y el orden se escoge para que $N_1, \dots, N_n$ tenga la orientación canónica.

Para desarrollar las condiciones de primer y segundo orden de inmovilización, consideramos la siguiente construcción geométrica. Supongamos que un conjunto de puntos P fija un cuerpo K para translaciones, y que en una vecindad de puntos P ∂K es dos veces diferenciable, por lo que existe la segunda forma fundamental. Resulta que para cualquier rotación existen translaciones y cambios de escala correspondientes que deslizan a P a lo largo de ∂K. Si para cada camino de rotaciones el cambio de escala necesario es un incremento, P fija K.

Representamos la segunda forma fundamental de la superficie ∂K con normal N con $B(x) = D_x N$; también escribimos $B(x,y) = y^T D_x N$.

3.2 Proposición. Supongamos que $P = \{p_0^0, \dots, p_n^0\}$ fija un cuerpo C^2, K, para translaciones, y que $\sum_0^n n_i^T p_i \neq 0$ en ∂K (esto es verdad para cuerpos en forma de estrella). Para cualquier camino C^2 de transformaciones ortogonales $R(t)$ con $R(0) = I$ defínanse los vectores $p_i(t)$, $b(t)$ y el factor de escala $\sigma(t)$ como sigue.

$$p_i = \sigma R(p_i^0 + b); \quad n_i^T p_i' = 0, \quad i = 0, \dots, n; \quad b(0) = 0; \quad \sigma(0) = 1. \tag{3.2.1}$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$p_i' = \sigma' \sigma^{-1} p_i + A p_i + \sigma R b' \tag{3.2.2}$$

donde $A = R' R^{-1}|_0$ es una transformación antisimétrica,

$$\sigma' = -\sigma \frac{\sum_0^n n_i^T A p_i}{\sum_0^n n_i^T p_i}, \tag{3.2.3}$$

y b' se obtiene resolviendo

$$n_i^T \sigma(R b') = -(\sigma' \sigma^{-1} n_i^T p_i + n_i^T A p_i), \quad i = 0, \dots, n. \tag{3.2.4}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias obtenido al substituir σ' y $\mathbf{b}'$ en 3.2.2 (utilizando 3.1.2 para la definición de a_i) tiene una única solución en una vecindad de $t = 0$.

P fija K si y sólo si para todo camino $R(t)$, $\sigma(t)$ crece arbitrariamente cerca de $t = 0$, para $t > 0$ y $t < 0$, es decir,

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ t_1 > 0, \ t_2 < 0 \ : \ |t_i| < \varepsilon, \ \ \sigma(t_i) > 1, \ \ i = 1, 2.$$

La *condición necesaria de primer orden* para que esto sea el caso es

$$\textstyle\sum_0^n \mathbf{p}_i \wedge \mathbf{n}_i = 0. \tag{3.2.5}$$

Dada esta condición, la *condición suficiente de segundo orden* es

$$\textstyle\sum_0^n a_i \Big((AN_i)\cdot(A\mathbf{p}_i) - B_i(\mathbf{p}_i', \mathbf{p}_i') \Big) > 0, \tag{3.2.6}$$

donde B_i es la segunda forma fundamental en $\mathbf{p}_i^0$, $i = 0, \ldots, n$. En términos de las ecuaciones 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4, podemos definir

$$Q(A,A) = \textstyle\sum_0^n a_i \Big((AN_i)\cdot(A\mathbf{p}_i) - B_i(\mathbf{p}_i', \mathbf{p}_i') \Big). \tag{3.2.7}$$

Q puede extenderse a una forma cuadrática simétrica bilineal.

Demostración. Las condiciones 3.2.1 definen las imágenes de $\mathbf{p}_i^0$ bajo un camino de isometrías precedidas por una translación y seguidas de la aplicación de un factor de escala, ambos definidos únicamente por la condición de que los puntos se mantengan sobre la superficie. La unicidad se debe a la del sistema diferencial, que se obtiene como sigue.

$$\mathbf{p}_i' = \sigma' R(\mathbf{p}_i^0 + \mathbf{b}) + \sigma R'(\mathbf{p}_i^0 + \mathbf{b}) + \sigma R \mathbf{b}'$$

Substituyendo $\mathbf{p}_i^0 = \sigma^{-1} R^{-1} \mathbf{p}_i - \mathbf{b}$ obtenemos 3.2.2. Por lo tanto

$$0 = \mathbf{n}_i^T \mathbf{p}_i' = \sigma' \sigma^{-1} \mathbf{n}_i^T \mathbf{p}_i + \mathbf{n}_i^T A \mathbf{p}_i + \sigma \mathbf{n}_i^T R \mathbf{b}'$$

por lo que

$$0 = \sigma' \sigma^{-1} \textstyle\sum_0^n \mathbf{n}_i^T \mathbf{p}_i + \sum_0^n \mathbf{n}_i^T A \mathbf{p}_i,$$

implicando 3.2.3 y 3.2.4. Mientras que a_i y $\sum_0^n \mathbf{n}_i^T \mathbf{p}_i$ permanezcan diferentes de cero el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para $\mathbf{p}_i$, σ, $\mathbf{b}$, puede obtenerse como expresiones racionales de expresiones con denominadores diferentes de cero (para obtener $\mathbf{b}$ se requiere la matriz inversa de $\begin{pmatrix} N_1 & \ldots & N_n \end{pmatrix}$) asegurando la existencia y unicidad de las soluciones en una vecindad de $t = 0$.

No es difícil ver para cada camino de rotaciones $R(t)$ que existe un camino de isometrías que mueve los puntos p_i^0 sin que penetren el interior de K si y sólo si el factor de escala que los mantiene en la superficie no se incremente en ambos lados de $t = 0$, arbitrariamente cerca.

La condición necesaria de primer orden es $\sigma'(0) = 0$ para todo camino $R(t)$, que es equivalente a la condición $\sum_0^n n_i^T A p_i = 0$ para toda matriz antisimétrica A, lo cual equivale a 3.2.5. Dada la condición de primer orden, la condición suficiente de segundo orden es

$$(\ln\sigma)''|_0 = - \frac{\sum_0^n n_i^T A p_i' + n_i'^T A p_i}{\sum_0^n p_i \cdot n_i}\Big|_0 - \frac{\sum_0^n n_i^T A' p_i}{(\sum_0^n p_i \cdot n_i)^2}\Big|_0 > 0.$$

Examinamos cada término. El primero da

$$\sum_0^n n_i^T A p_i' = \sum_0^n n_i^T A A p_i = - \sum_0^n (A n_i)\cdot(A p_i)$$

El segundo,

$$\sum_0^n n_i'^T A p_i = \sum_0^n (a_i' N_i + a_i N_i')^T p_i' = \sum_0^n a_i B_i(p_i', p_i').$$

El último es cero puesto que $\sum_0^n n_i p_i^T$ es simétrico y

$$(A')^S = (R'R^{-1})'^S = \tfrac{1}{2}(R'R^T + R^T R')' = \tfrac{1}{2}(RR^T)'' = \tfrac{1}{2}I'' = 0.$$

Por lo tanto la condición suficiente de segundo orden equivale a 3.2.6. Q puede extenderse a una forma simétrica bilineal puesto que 3.2.5 equivale a la simetría de la matriz $\sum_0^n n_i p_i^T$.

Para $n = 2$ es suficiente considerar el camino (suave) de rotaciones $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ para el cual $A = R'R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = 0$. El signo de la derivada $(\ln\sigma)''$ coincide con el signo de la expresión 3.2.6. en una vecindad de $t = 0$.∎

3.3 Definición. Decimos que un cuerpo K es fijado *firmemente* por un conjunto de $n+1$ puntos P si se cumplen las condiciones de orden nulo, primero y segundo.∎

La condición de primer orden 3.2.5, en la presencia de la de orden nulo, tiene la siguiente caracterización geométrica. Representamos con $\langle A \rangle$ el subespacio vectorial generado por el conjunto o lista de vectores A.

3.4 Teorema. Sea p_i, n_i, $0 \le i \le n$ un conjunto de $n+1$ puntos y direcciones que definan líneas L_i, y supongamos que las normales cumplen la condición de orden nulo (ver 3.1). Entonces $\sum_0^n p_i \wedge n_i = 0$ si y sólo si cada plano $n-2$ dimensional que intersecta o es paralelo a n de las líneas L_i intersecta o es paralelo a la línea restante.

Demostración. Supongamos que $\sum_0^n p_i \wedge n_i = 0$. Sea Q^{n-2} un plano $n-2$ dimensional que contenga direcciones v_1, ..., v_{n-2} linealmente independientes y un punto $q \in Q^{n-2}$. Supongamos que L_i intersecta Q^{n-2}, $i \neq j$. Entonces $q - p_i \in \langle n_i, v_1, \ldots, v_{n-2} \rangle$ por lo que

$$(q-p_i)\wedge n_i \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-2} = 0.$$

Se obtiene la misma ecuación si L_i es paralelo a Q^{n-2} pues en este caso n_i es una combinación lineal de v_1, ..., v_{n-2}. Por lo tanto

$$(q-p_j)\wedge n_j \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-2} = -\sum_{i \neq j}^{n} (q-p_i)\wedge n_i \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-2} = 0,$$

pues $\sum_0^n n_i = 0$ y $\sum_0^n p_i \wedge n_i = 0$. Inferimos que L_j también intersecta o es paralelo a Q^{n-2}, según si $n_j \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-2}$ es diferente de o igual a cero.

Demostramos el converso para $n = 2$ y luego reducimos el caso general a éste. Para $n = 2$ existe algún punto q en el que L_0 y L_1 se intersectan, puesto que no son paralelos. Por lo tanto L_2 también pasa por q por lo que $p_i = q + \alpha_i n_i$ para $i = 0, 1, 2$, implicando

$$\sum_0^2 p_i \wedge n_i = \sum_0^2 (q + \alpha_i n_i)\wedge n_i = 0.$$

Para $n \ge 3$ exprésese $\omega = \sum_0^n p_i \wedge n_i$ en términos de la base n_1, ..., n_n. Si tuviésemos $\omega \neq 0$, renumerando si fuera necesario, $n_1 \wedge n_2$ tendría un coeficiente diferente de cero, por lo que $\pi(\omega) \neq 0$, siendo $\pi : E^n \to E^2$ la projección a lo largo de $\langle n_3, \ldots, n_n \rangle^{\perp}$. Por la condición de independencia lineal de las normales, $\pi(L_0)$, $\pi(L_1)$, $\pi(L_2)$ cumplirían la hipótesis de intersección para $n = 2$, por lo que concluiríamos que $0 = \sum_0^2 \pi(p_i)\wedge\pi(n_i) = \pi(\omega)$, lo cual sería una contradicción.∎

En una comunicación con el autor, el Profesor Elmer Reese señala que una interpretación alternativa de la condición de primer orden es que las coordenadas proyectivas de Plucker de las líneas L_i son linealmente dependientes.

Decimos que las líneas L_i correspondientes a puntos que cumplen la condición de primer orden son *concurrentes* para $n = 2$ y *semiconcurrentes* para $n \geq 3$.

Un resultado interesante es que las condiciones geométricas para fijar coinciden con las mecánicas.

3.5 Teorema. Sea $K \subset R^3$ un cuerpo para el que un conjunto de 4 puntos P cumple las condiciones de orden nulo y primero. Si se aplican fuerzas F_i en el sentido contrario a las normales N_i en los puntos P, de tal forma que sumen cero, éstas deben de ser proporcionales a n_i, y la tuerca resultante es cero. Supongamos adicionalmente que el sistema mecánico que aplica las fuerzas F_i está sujeto a movimientos de P y K, y que P se encuentra restringido a movimientos homotéticos, de tal modo que F_i continúan siendo aplicadas sobre la superficie en el sentido contrario a las normales N_i. Entonces, si se cumple la condición de segundo orden, cualquier movimiento de K realiza trabajo contra las fuerzas F_i.

Demostración. Si $F_i = \phi_i N_i$ y $\sum_0^3 F_i = 0$, ϕ_i deben ser un múltiplo de a_i, puesto que N_i cumplen la condición de orden nulo. La tuerca resultante es un múltiplo de $\sum_0^3 p_j \wedge n_i = 0$. La geometría de la condición de segundo orden implica que cualquier movimiento de K requerirá un cambio positivo de escala de P, que realizará trabajo contra las fuerzas F_i.■

Para $n = 2$, tenemos una simplificación de la condición de segundo orden.

3.6 Proposición Para $n = 2$, supóngase que P cumple la condición de primer orden y que $\sum_0^2 n_i^T p_i \neq 0$. Defínanse $r_i = p_i \cdot N_i$, $\alpha_i = a_i r_i \left(\sum_0^2 a_j r_j\right)^{-1}$. La condición de segundo orden 3.2.6 es equivalente a

$$\sum_0^n \alpha_i k_i r_i < 1$$

donde k_i es la curvatura en p_i. Si $r_i \neq 0$ entonces el triple (α_i) es un múltiplo de $(\beta_i r_i^2)$, donde β_i son las coordenadas barycéntricas del punto de concurrence de las líneas L_i con respecto a p_i.

Demostración. $\sum_0^2 a_i r_i = \sum_0^2 n_i^T p_i \neq 0$ por lo que α_i están bien definidas. Puesto que asumimos la condición de primer orden, las líneas L_0, L_1, L_2 son concurrentes. Fijamos el origen en el punto de intersección (único en la presencia de la condición de orden nulo). Para la rotación en el sentido de las manecillas del reloj en $\mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y podemos calcular $\sigma' = 0$; $n_i^T b' = -(n_i^T A p_i) = 0$, por lo que $b' = 0$; $p_i' = Ap_i$. Ahora,

$$0 < \sum_0^n a_i \Big((AN_i)\cdot(Ap_i) - B_i(p_i', p_i') \Big) = \sum_0^n a_i r_i (1 - k_i r_i)$$
$$= \Big(\sum_0^2 a_i r_i\Big) \sum_0^n \alpha_i (1 - k_i r_i) = \Big(\sum_0^2 a_i r_i\Big)\Big(1 - \sum_0^n \alpha_i k_i r_i\Big).$$

Esto muestra la equivalencia afirmada. Como $\sum_0^2 a_i r_i^{-1} p_i = \sum_0^2 a_i N_i = 0$, $a_i r_i^{-1}$ son proporcionales a las coordenadas baricéntricas del punto de concurrencia con respect a p_i.■

4 Algunos teoremas generales en el caso de n dimensiones.

Relacionamos primero los conceptos de fijar y atrapar. Si un cuerpo en forma de estrella es atrapada por un conjunto cerrado P, disminuyendo la escala de P y aplicando isometrías eventualmente fijamos K, a menos que existan peculiaridades en la superficie de K, que hemos llamado cuerdas.

Escribamos $D_x(r) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para dilaciones de escala r centradas en x: $D_x(r)(y) = r(y-x) + x$. Recordamos que cualquier $\theta \in \mathcal{E}$ puede escribirse $\theta x = Rx + b$ donde R es orthogonal, y b representa una translación.

4.1 Teorema. Sea K un cuerpo con forma de estrella con respecto a algún punto en su interior, que tomamos como el origen, por lo que $D_0(r)K \subset K$. Supongamos que un conjunto cerrado $P \subset \mathbb{R}^n$ atrapa K. Entonces existe una isometría $\phi \in \mathcal{E}$ y un factor de escala $r \in (0,1]$ tal que, ya sea que la imagen reducida $P' = \phi(D_0(r)P)$ de P inmoviliza K ó ésta genera una cuerda global en la superficie de K.

Demostración. Sea $r = \inf\{s \in [0,1] \mid \exists\ \phi \in \mathcal{E} : \phi(D_0(s)P)$ atrapa $K\}$ el ínfimo del conjunto de factores de escala para los que alguna imagen reducida de P se encuentra en el exterior de K y atrapa a K. Existen secuencias $s_i \in [r,1]$ con límite r, y $\phi_i \in \mathcal{E}$, donde $i \in \mathbb{N}$, tales que $\phi_i(D_O(s_i)P) \subset \mathcal{O}K$ y atrapa K. La secuencia $\{\phi_i\}$ claramente pertenece a un subconjunto compacto de $\mathcal{E}$ por lo que existe una subsecuencia convergente con límite $\phi \in \mathcal{E}$, para la que $P' = \phi(D_O(r)P) \subset \mathcal{O}K$. Puesto que $O \in \text{int}K$, $r > 0$. Por lo tanto P' es homotética a P. Mostramos que P' atrapa K. Pues si existiera un camino $\theta : [0,\infty) \to \mathcal{E}(P',\mathcal{O}K)$ con $\theta(0) = id$ para el cual $\theta(t) \to \infty$ (o sea que θ tendría un componente grande de translación), puesto que K tiene forma de estrella con respecto a O, $\mathcal{O}K \subset \mathcal{O}(D_O(r)K)$, por lo que

$$\theta(t)\circ\phi(D_O(r)P) \subset \mathcal{O}K \subset \mathcal{O}(D_O(r)K).$$

Existen $R(t)$, $b(t)$ para los cuales $\theta(t)\circ\phi x = R(t)x + b(t)$. Entonces

$$R(t)rP + b(t) \subset rK,$$

lo que implica

$$R(t)P + r^{-1}b(t) \subset K.$$

Definiendo $\chi(t)x = R(t)x + r^{-1}b(t)$, tendríamos un camino $\chi : [0,\infty) \to \mathcal{E}(P,\mathcal{O}K)$ que mostraría que P no atrapa K.

Supongamos ahora que $\{id\}$ no forma un componente conexo de $\mathcal{E}(Q,\mathcal{O}K)$. Si para cualquier $g \in \mathcal{E}$ en el component de id, $g(P) \cap \partial K = \emptyset$, entonces existiría un factor de escala menor que r, pues P es cerrado. En este caso P' genera una cuerda global.$\blacksquare$

El siguiente teorema muestra que un método de fijar cuerpos K aplicable genéricamente a cuerpos C^1, es el de encontrar la máxima bola inscrita en ∂K. Lo utilizaremos como punto de entrada para el teorema general de inmovilización de figuras convexas en dimension 2.

4.2 Teorema. (a) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo C^1 que contenga una bola cerrada que lo toca solamente en una semi-esfera abierta. Entonces existe una bola mayor contenida en K.
(b) Sea K un cuerpo C^1 con una bola cerrada inscrita que contiene en su intersección con ∂K un conjunto de $n+1$ puntos $P = \{p_0^0, \ldots, p_n^0\}$ cuyas normales correspondientes N_i cumplen la condición de orden nulo. Entonces P fija K ó le genera una cuerda local.
(c) Los cuerpos K compactos, C^1, con interiores no vacíos, cuyas

máximas bolas inscritas tienen intersecciones con ∂K que contienen $n+1$ puntos P que fijan K son C^1 densos.

Demostración. (a) Fijamos el origen en el centro de la bola B. Por hipótesis existe una dirección h tal que $B \cap \partial K \subseteq \{x \mid x \cdot h < 0\}$. Defínase en la semiesfera superior $\{x \in \partial B \mid x \cdot h \geq 0\}$ la función contínua $\rho(x) = \sup\{r \mid rx \in K\}$. ρ alcanza su mínimo $\rho_0 \neq 0$. Sea C el mínimo conjunto convexo que contien

$$\{x \in B \mid x \cdot h < 0\} \cup \{\rho_0 x \mid x \in B\} \subseteq K.$$

Como K es convexo, $C \subseteq K$. Es claro que C contiene una bola ligeramente mayor que B.

(b) Mostraremos que P fija la esfera para translaciones; por lo tanto K se encuentra atrapado a fortiori. Puesto que la esfera es invariante bajo rotaciones, los únicos caminos de isometrías relevantes con un extremo en la transformación identidad son los caminos de translaciones. Pero en cualquier dirección de translación h, como las normales cumplen la condición de orden nulo, por lo menos algún $h \cdot N_i > 0$, lo cual implica que $p_i(t)$ penetra la esfera. Se sigue que si P no genera una cuerda local en K, debe fijar K, porque si un camino de rotaciones $R(t)$ define un camino de factores de escala $\sigma(t)$, éste no puede ni decrecer (pues entonces algún camino p_i entra en la bola, que es subconjunto de K) ni permanecer constante (esto definiría una cuerda local), por lo que debe incrementarse arbitrariamente cerca de $t = 0$ en ambos lados.

(c) Cualquier cuerpo compacto K con interior no vacío tiene una máxima bola inscrita B. La intersección $I = \partial B \cap \partial K$ no puede estar contenida en una semiesfera abierta por (a). Si está contenida en una semiesfera cerrada, pueden seleccionarse $n+1$ puntos de B, cada uno arbitrariamente cercano a puntos de I, que no estén contenidos en una semiesfera. Luego puede modificarse K a un cuerpo C^1 arbitrariamente cerca del original de tal modo que B sea su máxima bola inscrita, sin que los puntos generen una cuerda. Los $n+1$ puntos cumplen la condición de orden nulo por construcción y por (b) fijan K.■

El siguiente teorema muestra una condición general bajo la cual, dado algún simplejo S, existe un conjunto de $n+1$ puntos P que forma un simplejo homotético a S (con la misma orientación) y que fija K, a menos que K admita una cuerda generada por P.

4.3 Teorema. Sea K un cuerpo C^1 y $S = \{s_0, \ldots, s_n\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de puntos que definen un simplejo. Supongamos que para todo conjunto de puntos $P = \{p_0, \ldots, p_n\} \subset \partial K$ que definan un simplejo inscrito homotético a S y con la misma orientación, el conjunto correspondientes de normales N cumple la condición de orden nulo. Entonces por lo menos uno de estos conjuntos P fija K, ó K admite una cuerda generada por P.

Demostración. Para cada rotación, existe un máximo factor de escala σ al cual corresponda alguna isometría (que preserve orientación) ϕ tal que $\sigma\phi(S) \subset K$. Por lo tanto el conjunto de simplejos inscritos homotéticos a S y con la misma orientación no es vacío. Tómese el ínfimo

$$\sigma = \inf\{\sigma > 0 \mid \exists\, \phi \in \mathcal{E} : \sigma\phi(S) \subset \partial K\}.$$

Tomando como antes una subsecuencia convergente, existe alguna $\phi \in \mathcal{E}$ correspondiente para la cual $P = \sigma\phi(S) \subset \partial K$. Ahora, para todo deslizamiento de P (ver §3.2) generado por un camino de rotaciones $R(t)$, el factor de escala $\sigma(t)$ tiene un mínimo global en $t = 0$. Si para algún camino, σ es constante en alguna vecindad de 0, K admite una cuerda generada por P. De otro modo para todo camino $R(t)$, $\sigma(t)$ crece arbitrariamente cerca de $t = 0$ por lo que P fija K.■

4.4 Teorema. Sea $S = \{s_0, \ldots, s_n\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de puntos que definen un simplejo cuyas imágenes orientadas homotéticas $P = \{p_0, \ldots, p_n\}$ inscritas en la esfera tienen conjuntos de normales N que cumplen la condición de orden nulo. Existe una vecindad $C^{1,1}$ de cuerpos cercanos a la esfera S^n para los cuales S tiene la misma propiedad.

Demostración. Las propiedades de la esfera implican que tiene una vecindad $C^{1,1}$ de cuerpos cercanos que son convexos y que forman un dominio simplemente conexo en $\mathbb{R}^{n+1}$. Restringimos nuestra atención a estos cuerpos K, para los que existe una función $C^{1,1}$ cóncava ϕ en $\mathbb{R}^{n+1}$ que cumple $\partial K = \phi^{-1}(1)$, $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$. Una forma de encontrar ϕ es considerar la primera función propia θ del Laplaciano con condiciones de frontera de Dirichlet, que es convexa [C, Chp I, §5 remark 3] y tiene un único máximo en algún punto del interior, que asumimos toma el valor 1, multiplicando por alguna constante. Situando el origen en el máximo tomamos $\phi = 1 - \theta$ y la extendemos a una función $C^{1,1}$ cóncava en $\mathbb{R}^{n+1}$ que cumple las condiciones deseadas. Defínase

$$\psi(t) = t\phi + (1-t)|x|^2, \qquad t \in [0,1].$$

Entonces $\psi(t)(0) = 0$, $\nabla\psi(t)(0) = 0$. Deformamos K a la esfera definiendo $\partial K(t) = \psi(t)^{-1}(1)$. Supongamos ahora dados algunos puntos $P = \{p_0^1, \ldots, p_n^1\}$ que formen un simplejo inscrito en ∂K. Deseamos encontrar un camino de simplejos paralelos inscritos dados por $p_i(t)$ con $p_i(1) = p_i^1$, $p_i(0) \in S^n$. Para ello requerimos

$$p_i(t) = \sigma(t)(p_i^1 + b(t))$$

que implica

$$p_i' = \sigma'\sigma^{-1}(p_i + b')$$

Tenemos

$$0 = \frac{d}{dt}\psi(t,p_i(t)) = \psi_t + \nabla\psi\cdot p_i',$$

por lo que

$$-\psi_t|\nabla\psi|^{-1} = N_i\cdot p_i' = \sigma'\sigma^{-1}(N_i\cdot p_i + N_i\cdot b')$$

Por tanto

$$\sigma' = -\sigma\sum_{i=0}^{n} a_i(\psi_t|\nabla\psi|^{-1})(p_i)\left(\sum_{i=0}^{n} n_i\cdot p_i\right)^{-1}$$

y $b' = F((\psi_t|\nabla\psi|^{-1})(p_i), p_i, N_i, \sigma)$ (que incluye la inversa de alguna matriz compuesta de vectores N_i). Substituyendo, obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias bien definido, que tiene soluciones locales pues $\nabla\psi$ es Lipchitz por ser ψ $C^{1,1}$.

$$|\nabla\psi|^2 = |t\nabla\phi + 2(1-t)x|^2 = t^2|\nabla\phi|^2 + 4t(1-t)\langle\nabla\phi, x\rangle + 4(1-t)^2|x|^2$$

es positivo en $\partial K(t)$ pues cada uno de sus términos es positivo en cada punto excepto por el origen, que nunca se encuentra en $\partial K(t)$.

Si resolvemos el sistema con $\phi = |x|^2$, la solución existe en el intervalo $[0,1]$, y es dada por $\sigma(t) = 1$, $b(t) = 0$. Esta solución tiene la propiedad a_i = constantes > 0. Por la continuidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias uniformemente Lipchitz, y la compacidad del conjunto de simplejos inscritos P, existe una vecindad $C^{1,1}$ de funciones ϕ cercanas a $|x|^2$ cuyas soluciones cumplen $a_i > 0$ y existen sobre todo el intervalo, para cualquier P. Pero estas funciones ϕ definen una vecindad $C^{1,1}$ de cuerpos cercanos a la esfera, cada uno con la propiedad deseada.∎

4.5 Corolario. Para cualquier simplejo S con la propiedad de que cualquier copia orientada homotética inscrita en la esfera tiene normales que cumplen la condición de orden nulo (esto sucede en una vecindad del simplejo equilátero), existe una vecindad $C^{1,1}$ de cuerpos K cercanos a la esfera S^n, cualquiera de cuyos elementos, ó es fijado por alguna copia orientada homotética P de S, ó admite una cuerda generada por P.∎

En el problema general de inmovilización, la frontera de deslizamientos formada por la condición de orden nulo juega un papel importante.

5 Fijando tetrahedros: el caso de dimensión tres.

Consideramos la inmovilización de un tetrahedro en R^3. Puntos en los interiores de las caras tienen normales que cumplen la condición de orden nulo. Demostramos que la condición de primer orden implica la del segundo utilizando el siguiente teorema que citamos de [BFMM]. Su generalización a n dimensiones se obtiene en la Parte III de este trabajo.

5.1 Teorema. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz 3x3 que cumpla

$$a_{jj} > 0 \quad \sum_{i=1}^{3} a_{ij} > 0, \quad 1 \le j \le 3; \quad a_{ij} < a_{ii} \quad 1 \le i \ne j \le 3$$

(A es una matriz Móndriga de dimensión 3). Entonces para cada valor propio λ de A,

$$|\lambda| < \operatorname{tr}(A).∎$$

5.2 Teorema Sean $P = (p_0, \ldots, p_3)$ puntos en los interiores de cada cara de un tetrahedro. Si cumplen la condición de primer orden de inmovilización, también cumplen la de segundo orden.

Demostración. En este caso la condición de segundo orden es

$$\forall \text{ matrices antisimétricas } A, \ \textstyle\sum_0^3 (An_i)\cdot(Ap_i) > 0$$

Puesto que se cumple la condición de primer orden, la matriz $S = \sum_0^3 n_i p_i^T$

es simétrica. Escójanse ejes coordenados que diagonalicen la matriz. Para cualquier matriz antisimétrica A,

$$\sum_0^3 (An_i)\cdot(Ap_i) = -\sum_0^3 n_i^T AAp_i = -S_{ab}A_{ac}A_{cb} = \sum_{1\le a,\,c\le 3} \lambda_a A_{ac}A_{ac}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1\le a,\,b\le 3} (\lambda_a+\lambda_b)A_{ab}^2$$

es positiva si la suma de cada par de valores propios de S es positiva, lo cual en dimensión 3 es cierto si y sólo si $\lambda_a < \mathrm{tr}S$. Mostramos que S tiene los valores propios de una matriz Móndriga, para la cual es válida esta propiedad. Escojemos el origen en p_0, y escribimos

$$P_0 = \left(p_1, p_2, p_3\right), \quad N_0 = \left(n_1, n_2, n_3\right).$$

Entonces $S = P_0N_0^T$ tiene los mismos valores propios que $S' = N_0^TP_0$, que es Móndriga por las desigualdades $p_i\cdot n_j < p_j\cdot n_j$, $0 \le i\neq j \le 3$, $p_i\cdot n_i > 0$, $1 \le i \le 3$.∎

6 Fijando cuerpos estrictamente convexos: el caso bidimensional.

En esta sección $n = 2$ y K es una figura C^2 estrictamente convexa (sus tangentes la tocan en un único punto). Por lo tanto la curvatura existe y es no-negativa. Es decir que permitimos que la curvatura sea cero en algunos puntos de ∂K. r está definida en casi toda la imagen del mapa de Gauss, y es integrable. (Para la diferenciabilidad excepto en conjuntos de medida cero de las funciones absolutamente continuas ver [A, §3.36]).

Demostramos primero una proposición analítica sencilla.

6.1 Proposición. (1) Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función contínua en el intervalo cerrado, C^1 y positiva en el abierto, y supóngase $\phi(a) = 0$. Sea $\phi_{max} = \sup_{[a,b]}\phi > 0$. Entonces, exceptuando posiblemente un conjunto denumerable, para cualquier $\alpha \in (0,\phi_{max})$ existe $p \in (a,b)$ que cumple $\phi(p) = \alpha$ y $\phi'(p) > 0$.

(2) Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función contínua en el intervalo cerrado, C^1 y positiva en el abierto, con $\phi(a) = 0$.

$$\forall\ c > 0,\ \beta \in (a,b]\ \ \exists\ \ S \subset [a,\beta],\ \text{abierto} : \phi' > c\phi \ \ \text{en}\ \ S.$$

Por lo tanto $\forall\ \ \alpha_1 \in (0,\phi_{max})\ \ \exists\ \ A \subseteq (0,\alpha_1)$, abierto :

$$\forall\ \ \alpha \in A\ \ \exists\ \ p \in (a,b)\ :\ \phi(p) = \alpha\ \ \text{y}\ \ \phi'(p) > c\alpha.$$

Demostración. (1) Por el teorema de Sard, exceptuando posiblemente un conjunto denumerable, para cualquier $\alpha \in (0,\beta)$, cada punto $p \in (a,b)$ con $\phi(p) = \alpha$ tiene $\phi'(p) \neq 0$. Claramente por lo menos uno de estos puntos tiene derivada positiva, pues de lo contrario ϕ no llega a β.

(2) Supongamos contrariamente que existen $c > 0$, $\beta \in (a,b]$ para los que $\phi' \leq c\phi$ en $(a,\beta]$. Entonces $(\ln\phi)' \leq c$ en (a,β), por lo que $[\ln\phi]_a^\beta \leq c(\beta-a)$. Pero entonces $\ln\phi(x)$ no tiende a $-\infty$ según $x \to a$, lo cual contradice $\phi(0) = 0$.

Escójase ahora cualquier $\alpha_1 \in (0,\phi_{max})$, y β suficiente chica para que $\phi(0,\beta) \subseteq (0,\alpha_1)$. Por lo que se acaba de demostrar, existe un conjunto abierto $S \subset [a,\beta]$ en el que $\phi' > c\phi$. Sea $A = \phi(S)$.∎

Nos encaminamos ahora a demostrar un lema que nos permitirá encontrar puntos para fijar figuras convexas. Los cálculos han sido simplificados por el uso de ciertas funciones definidas en el apéndice, del cual depende esta sección completamente (y que debe ser leído primero), pero que se ha expuesto aparte pues corresponde a un tema diferente.

Para cualquier punto con coordenada de Gauss θ sea $L(\theta)$ la línea que pasa por $\mathbf{f}(\theta)$ en la dirección normal $\mathbf{N}$. Como $n = 2$, la condición de primer orden implica que las líneas $L_i = L(\theta_i)$ que pasan por $\mathbf{p}_i$ concurren en algún punto $\mathbf{q} = \alpha(\cos\xi,\sin\xi)^T$. Variaremos α. Defínanse las funciones g^α, h^α fijando el origen en $\mathbf{q}$, es decir, requiriendo

$$\mathbf{f} - \mathbf{q} = g^\alpha\mathbf{N} + h^\alpha\mathbf{T}. \qquad (6.2.1)$$

Entonces

$$g^\alpha = g - \alpha\cos(\theta-\xi),\quad h^\alpha = h + \alpha\sin(\theta-\xi). \qquad (6.2.2)$$

Se sigue que $h_i^\alpha = h^\alpha(\theta_i) = 0$, $i = 0, 1, 2$. Encontrar puntos que cumplan la condición de primer orden es equivalente a encontrar un origen $\mathbf{q}$ y valores de θ_i para los que $h_i^\alpha = 0$. Escribamos ahora la condición de segundo orden en estos términos. Esta toma la forma

$$\sum_0^2 a_i \left(g_i^\alpha - k_i (g_i^\alpha)^2 \right) = \sum_0^2 a_i g_i^\alpha \frac{d}{ds}(h_i^\alpha) > 0 \qquad (6.2.3)$$

pues $(An_i)\cdot(Ap_i) = n_i^T p_i = g_i$ y $B_i(p_i', p_i') = k_i g_i^2$.

Defínase ahora la función

$$\phi(\theta) = -\frac{h(\theta)}{\sin(\theta-\xi)}. \qquad (6.2.4)$$

Supongamos que θ^α resuelve $\phi(\theta^\alpha) = \alpha$. Entonces $h^\alpha(\theta^\alpha) = 0$, y

$$\phi'(\theta^\alpha) = -\frac{h'(\theta^\alpha)}{\sin(\theta^\alpha-\xi)} + \frac{h(\theta^\alpha)}{\sin^2(\theta^\alpha-\xi)}\cos(\theta^\alpha-\xi) = -\frac{h^{\alpha\prime}(\theta^\alpha)}{\sin(\theta^\alpha-\xi)}$$

Por ello la contribución del punto $f(\theta^\alpha)$ a la condición de segundo orden es su a_i (que depende de los demás puntos) multiplicada por $-(g^\alpha \phi_s \sin(\theta-\xi))|_{\theta=\theta^\alpha}$. Podemos ahora enunciar nuestro lema.

Proposiciones como "$|f| > 1$ en un conjunto I arbitrariamente cerca de $\theta \in \bar{I}$" significarán que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \chi \in I : |\chi-\theta| < \varepsilon$ y $|f(\chi)| > 1$.

6.2 Lema. (a) Sea dado un punto $p \in K$ con coordenada de Gauss ω, para el que $|f(\omega)| = 1$, y para el que existe una vecindad $(\omega, \omega+\varepsilon)$ en la que $|f| > 1$ arbitrariamente cerca de ω. Sea $\xi \in (\omega, \omega+\pi)$.
(b) Alternativamente, $|f| > 1$ en $(\omega-\varepsilon, \omega)$ arbitrariamente cerca de ω, y $\xi \in (\omega-\pi, \omega)$.

En vez, supóngase $|f(\omega)| = 1$, $h(\omega) = h_\theta(\omega) = 0$, y $|f| > 1$ en (c) $(\omega, \omega+\varepsilon)$ ó (d) $(\omega-\varepsilon, \omega)$, arbitrariamente cerca de ω. Sea $\xi = \omega+\pi$.

Sea ϕ la función definida por 6.2.4. Podemos concluir que:

(1) $\exists\ \alpha_0 > 0$ tal que, exceptuando posiblemente un conjunto denumerable, para cualquier $\alpha \in (0, \alpha_0)$ existe un punto $\theta^* \in (\omega, \omega+\varepsilon)$ (hipótesis **a**,**c**) ó $\theta^* \in (\omega-\varepsilon, \omega)$ (**b**,**d**) tal que $\phi(\theta^*) = \alpha$ y $\phi_s(\theta^*) > 0$ (hipótesis **a**,**c**) ó $\phi_s < 0$ (**b**,**d**).

(2) Dada cualquier $c > 0$, existe $\alpha_0 > 0$ tal que $\forall\ \alpha_1 \in (0, \alpha_0)\ \exists\ S \subset (0, \alpha_1)$, abierto : $\forall\ \alpha \in S$

$$\exists \begin{cases} \theta^* \in (\omega,\omega+\varepsilon) & (a,c) \\ \theta^* \in (\omega-\varepsilon,\omega) & (b,d) \end{cases} \quad : \quad \phi(\theta^*) = \alpha^*, \begin{cases} \phi_s(\theta^*) > c\alpha^* & (a,c) \\ \phi_s(\theta^*) < -c\alpha^* & (b,d) \end{cases}$$

(el paréntesis indica los casos a los que se aplica la proposición).

Demostración. (a) Como h es el gradiente de $\frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2$, debe haber algún valor $\omega_1 \in (\omega, \min(\omega+\varepsilon,\xi))$ para el que $h > 0$. Por lo tanto, utilizando la función ϕ definida en 6.2.4, y las hipótesis, que implican $h(\omega) = 0$, tenemos $\phi(\omega) = 0$, $\alpha_1 = \phi(\omega_1) > 0$. Aplicando la proposición 6.1(1) a ϕ considerada como función de s, obtenemos la conclusion (1). Para demostrar (2), sea χ el supremo de aquellos números ζ para los que ϕ es positivo en $(\zeta,\omega_1]$ y $\phi(\zeta) = 0$. Aplíquese la proposición 6.1(2) a ϕ en $[\chi,\omega_1]$, considerada como función de s. Existe un conjunto abierto $S \subset [\chi,\omega_1] : \phi_s > c\phi$ en S. En el caso alternativo (b) el signo de las derivadas de ϕ se revierte pues h debe de ser negativa para que $|\mathbf{r}|$ crezca cuando θ decrece.

Para los casos (c), (d), que cumplen las hipótesis $h(\omega) = h_\theta(\omega) = 0$, $\xi = \omega+\pi$, la función ϕ puede considerarse contínua en $\theta = \omega$, pues por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{\theta\to\omega} \phi(\theta) = \lim_{\theta\to\omega} \frac{h'(\theta)}{\cos(\theta-\omega)} = 0.$$

El resto del argumento es similar.■

Obsérvese para las aplicaciones que $h(\theta^*) = -\sin(\theta^*-\xi)\phi'(\theta^*) > 0$ en todos los casos mientras que la derivada $\phi_s(\theta^*)$ tiene el signo que implica $h_s(\theta^*) > 0$. También,

$$g^{\alpha^*}(\theta^*) = g(\theta^*) - \alpha^*\cos(\theta^*-\xi) \to 1 \quad \text{según} \quad \alpha^* \to 0.$$

Por lo tanto la contribución a la condición de segundo orden del punto θ^*, cuya $L(\theta^*)$ pasa por $\mathbf{q} = \alpha^*(\cos\xi,\sin\xi)^T$, es positiva. Tenemos además una estimativa que utilizaremos en algunos casos delicados.

Antes de continuar examinamos los coeficientes a_i que relacionan las normales $\mathbf{N}_i$. Supondremos que los puntos $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ se encuentran dispuestos en el sentido contrario a las manecillas del reloj y que sus normales no se encuentran en una semi-circunferencia. Los números a_i para los que $\sum_0^2 a_i N_i = 0$ pueden escojerse como en 3.1.2:

$$a_i = \begin{vmatrix} N_k & N_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_k & \cos\theta_j \\ \sin\theta_k & \sin\theta_j \end{vmatrix} = \sin(\theta_k - \theta_j) > 0 \qquad (6.2.5)$$

donde (i,j,k) es la permutación par de $(1,2,3)$ principiando con una i.

Hemos preparado la demostración del teorema:

6.3 Teorema. Sea K una figura bidimensional C^2 estrictamente compacta que no admita cuerdas (locales). K puede ser fijada por tres puntos.

Demostración. Con nuestra definición de estrictamente compacto, hemos admitido la posibilidad de que r quede indefinida. Sin embargo, el mapa de Gauss tiene una inversa contínua. Por lo tanto la función $s(\theta)$ existe y es absolutamente contínua en conjuntos compactos, por lo que su derivada $r = k^{-1}$ existe en casi todo S^1 y es integrable. (ver [A, §3.36]). Las ecuaciones A.7 y A.10 son válidas donde exista r.

Sea ρ el supremo de los radios de círculos estrictamente contenidos en K. Por la compacidad de K existe algún círculo inscrito C de este radio. Consideramos el conjunto $I = C \cap \partial K$. Sea $\mathcal{P}$ la proposición:

"$\exists\ Q = (q_1, q_2, q_3) \subseteq I$: $N(Q)$ cumple la condición de orden nulo".

El teorema 4.2 muestra que $\mathcal{P}$ implica que Q fija K.

El resto de la demostración está dedicada al caso en que $\mathcal{P}$ es falso: $\forall$ $Q = (q_1, q_2, q_3) \subseteq I$, $N(Q)$ se encuentra en una semicircunferencia cerrada (en el resto del escrito las semiesferas y semicircunferencias se asumirán cerradas a menos que se diga explícitamente lo contrario). Mostramos primero que deben de existir dos puntos en I con normales opuestas.

Sea ϕ la coordenada de Gauss en ∂K y S^1. Tómense dos puntos de I con normales $\theta_1, \theta_2 \in S^1$, que no sean opuestas. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\theta_2 \in (\theta_1, \theta_1+\pi)$, en lugar de $\theta_2 \in (\theta_1, \theta_1-\pi)$ (donde θ pertenece a un conjunto de ángulos si en el conjunto existe un ángulo que difiere de θ en un múltiplo entero de 2π). Entonces I debe de estar contenido en $[\theta_2-\pi,\theta_1+\pi]$, porque cualquier punto del complemento, junto con θ_1, θ_2, forma un conjunto de tres puntos cuyas normales no se encuentran en una semicircunferencia. Como I es cerrado tenemos en I

$$\theta_i = \inf[\theta_2-\pi,\theta_1+\pi]\cap I, \quad \theta_s = \sup[\theta_2-\pi,\theta_1+\pi]\cap I$$

e $I \subseteq [\theta_i,\theta_s]$. Este intervalo no puede cubrir más de una semicircunferencia pues entonces θ_i, θ_s y uno de θ_1, θ_2 formarían un conjunto de tres puntos que cumple la condición de orden nulo. Tampoco puede cubrir menos que una semicircunferencia, pues en ese caso C no es máximo, por 4.2(a). Por lo tanto θ_i y θ_s difieren en π.

Por lo tanto, al consideraro el máximo círculo inscrito C, ó existen tres puntos en $C\cap\partial K$ que fijan K ó bien hay dos puntos q_1, q_2 en $C\cap\partial K$ con normales opuestas. Estas deben corresponder a un diámetro de C. Es fácil ver por casos, que si $\mathcal{P}$ es falso entonces I puede consistir de 4 puntos con normales opuestas por pares, ó se encuentra contenido en una semicircunferencia.

Escogemos ahora el eje x sobre el segmento que une q_1, q_2, con origen en su centro. Introducimos las funciones f, N, T, g, h, θ definidas en el apéndice. Entonces q_1, q_2 tienen coordenadas $\theta = 0, \pi$, respectivamente. Hacemos también un cambio de escala para que ρ, el radio del máximo círculo inscrito, sea 1.

En el caso en que I se encuentre contenido en una semicircunferencia, suponemos que ésta corresponde a $[\pi,2\pi]$. Por lo tanto en todos los casos existen vecindades $(0,\omega_1)$, (ω_2,π) en las que $|f| > 1$, ya sea que ambos intervalos son $(0,\pi)$, ó que $\omega_1 = \omega_2$.

Completaremos la demostración mostrando la existencia de tres puntos p_0, p_1, p_2 en ∂K que cumplen las condiciones de orden nulo, primero y segundo (y que fijan a K firmemente). Para ello consideramos varios casos de la curvatura en q_1, q_2. El primero es

$$r(0) > 1. \qquad \textbf{(Caso 1)}$$

(El radio de curvatura es mayor o igual a 1 de por sí. De lo contrario ∂K intersectaría el interior del círculo inscrito). El segundo,

$r(0) = 1$ y $|f| > 1$ arbitrariamente cerca de 0 para $\theta < 0$ (**Caso 2**)

El tercero,

$$r(0) = 1, \quad |f(\theta)| \equiv 1 \quad \text{para} \quad \theta \in (-\delta, 0] \qquad \textbf{(Caso 3)}$$

Caso 1. $r(0) > 1$. En este caso fijaremos K con tres puntos escogidos como sigue: p_1, p_2 ligeramente arriba de q_1 y q_2, y p_0 con normal en la semi-circunferencia abierta inferior (para estos puntos a_1, a_2, $a_3 > 0$).

Observe que $h(0) = h(\pi) = 0$, $g(0) = g(\pi) = 1$, y $\frac{dg}{d\theta} = h$. Por el teorema del valor medio existe $\zeta \in (\pi, 2\pi)$ con $h(\zeta) = 0$. Sea p_0 el punto con coordenada ζ, y sea $\xi = \zeta - \pi$. Consideramos puntos de concurrencia en el rayo

$$\{q = \alpha(\cos\xi, \sin\xi)^T \mid \alpha > 0\}.$$

Sea $Q(\theta_1, \theta_2) = \sum_0^2 a_i(g_i - k_i g_i^2)$ la condición de segundo orden en los puntos dados por ζ, θ_1, θ_2 situados aproximadamente como se ha dicho. Q es contínua en θ, $a_0 = \sin(\theta_2 - \theta_1)$, $a_1 = \sin(\zeta - \theta_2)$, $a_2 = \sin(\theta_1 - \zeta)$, $k(0) < 1$ y $k(1) \leq 1$,

$$Q(0,0) = \sin(\xi)\Big(2 - k(0) - k(1)\Big) > 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $|f| > 1$ en los intervalos $(0, \varepsilon)$, $(\pi - \varepsilon, \pi)$, y $Q(\theta_1, \theta_2) > 0$ en $(0, \varepsilon) \times (\pi - \varepsilon, \pi)$. Aplicando el lema 6.2a(1) a los puntos p_1, p_2, obtenemos números positivos α^1, α^2 tales que

$$\text{a.a. } \alpha^* \in (0, \alpha^1) \ \exists \ \theta_1^* \in (0, \varepsilon) : \phi(\theta_1^*) = \alpha^*, \ \phi_S(\theta_1^*) > 0;$$
$$\text{a.a. } \alpha^* \in (0, \alpha^2) \ \exists \ \theta_2^* \in (\pi - \varepsilon, \pi) : \phi(\theta_2^*) = \alpha^*, \ \phi_S(\theta_2^*) < 0.$$

(donde a.a. significa "para casi todo"). Es suficiente ver que, por construcción, para casi cualquier $\alpha^* \in (0, \alpha^1) \cap (0, \alpha^2)$ existen líneas $L(\theta_1^*)$, $L(\theta_2^*)$, $L(\zeta)$ que concurren en $q = \alpha^*(\cos\xi, \sin\xi)^T$, con $Q(\theta_1^*, \theta_2^*) > 0$. Se cumplen las condiciones de orden nulo, primero y segundo y cada conjunto de tres puntos correspondientes a cada α^* admisible fija firmemente a K.

Caso 2. $r(0) = 1$, y $|f(\theta)| > 1$ arbitrariamente cerca a 0 para $\theta < 0$. (Recuérdese que también tenemos $|f(\theta)| > 1$ arbitrariamente cerca de 0 para $\theta > 0$). En este caso escogeremos tres puntos para fijar K como sigue: p_1, p_2 ligeramente debajo y arriba de q_1, y p_0 en q_2 (cumpliendo la condición de orden nulo). Consideramos puntos de concurrencia en el rayo

$$\{q = \alpha(\cos\pi, \sin\pi)^T = (-\alpha, 0) : \alpha > 0\}.$$

Aplicamos el lema 6.2c(1), 6.2d(1) con $\omega = 0$, $\xi = \pi$ encontrando que existe $\alpha_0 > 0$ tal que para casi toda $\alpha^* \in (0, \alpha_0)$

$$\text{(i)} \quad \exists\ \theta_1^* \in (0,\varepsilon) : \phi(\theta_1^*) = \alpha^*, \quad \phi_s(\theta_1^*) > 0,$$

$$\text{(ii)} \quad \exists\ \theta_2^* \in (-\varepsilon,0) : \phi(\theta_2^*) = \alpha^*, \quad \phi_s(\theta_2^*) < 0.$$

Ahora sean p_1, p_2 los puntos definidos por θ_1^*, θ_2^*. Cada uno da una contribución positiva a la condición de segundo orden como también p_0, pues el punto de concurrencia $q = (-\alpha^*, 0)$ se encuentra más cercano a p_0 que el origen. Por lo tanto los tres puntos correspondientes a cada α aceptable fijan firmemente a K.

Caso 3. $r(0) = 1$, $|f(\theta)| \equiv 1$ para $\theta \in (-\delta, 0]$. Escojeremos puntos como en el Caso 1, tomando $\zeta < 0 \in (-\delta, 0]$ para definir p_0, $\xi = \zeta + \pi$. Sin embargo, esta vez tendremos que estimar la condición de segundo orden más cuidadosamente. Sean ε, $\bar{\alpha} > 0$ tales que para $\theta_1 \in (0,\varepsilon)$, $\theta_2 \in (\pi-\varepsilon, \pi)$, $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$,

$$g^\alpha(\theta_1),\ g^\alpha(\theta_2) > \tfrac{1}{2}; \quad \sin(\xi - \theta_1) > \tfrac{1}{2}\sin\xi; \quad \sin(\theta_2 - \xi) > \tfrac{1}{2}\sin\xi.$$

Aplicando el lema 6.2a(1) y 6.2b(2) con $c > 8\varepsilon(1+\bar{\alpha})/\sin^2\xi$, respectivamente a $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, obtenemos valores α^1, α^2 tales que, escribiendo $\alpha^0 = \min(\alpha^1, \alpha^2, \bar{\alpha})$, a.a. $\alpha^* \in (0, \alpha^0)$

$$\exists\ \theta_1^* \in (0,\varepsilon) : \phi(\theta_1^*) = \alpha^*, \quad \phi_s(\theta_1^*) > 0$$

y $\exists$ $S \subset (0, \alpha^0)$, abierto : $\forall$ $\alpha \in S$

$$\exists\ \theta_2^* \in (\pi-\varepsilon, \pi) \quad : \quad \phi(\theta_2^*) = \alpha^*, \quad \phi_s(\theta_2^*) < -c\alpha^*.$$

Como $a_0 = \sin(\theta_2^* - \theta_1^*)$, $a_1 = \sin(\zeta - \theta_2^*)$, $a_2 = \sin(\theta_1^* - \zeta)$, la condición de segundo orden es válida para casi toda $\alpha^* \in S$ porque

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_0^2 a_i g_i^\alpha \frac{d}{ds}(h_i^\alpha) &> \sin(\theta_2^* - \theta_1^*)(1+\alpha^* - (1+\alpha^*)^2) + \tfrac{1}{8}c\alpha^* \sin^2\xi \\ &> \left(\tfrac{1}{8}c\sin^2\xi - \varepsilon(1+\bar{\alpha})\right)\alpha^* > 0. \end{aligned}$$

FALTA

PAGINA

26

Fijamos el origen en el centro del círculo. Sea p_0 el punto correspondiente a $\theta = 0$, p_i a θ_i, $i = 1, 2$. Entonces $|f| > 1$ para valores de θ arbitrariamente cerca de y mayores que θ_1 y arbitrariamente cerca de y menores que θ_2. Alejaremos p_1, p_2 ligeramente de p_0, que mantendremos fijo. Este caso es más delicado porque el movimiento tiende a disminuir la contribución de p_0 a la condición de segundo orden, por lo que debemos demostrar que existen puntos p_1 y p_2 cuya mayor contribución compensa este efecto. Consideramos puntos de concurrencia en el rayo definido por $\xi = \pi$. Un análisis similar al Caso 3 del teorema previo muestra que podemos obtener puntos para los cuales la condición de segundo orden es positiva.

Los casos restantes, con y sin cuerdas, se reducirán a los casos I y II.

Caso III. $|f|$ no es localmente constante únicamente en un punto p_0 (de ambos lados). Tenemos a p_0, p_1, p_2 dispuestos en el sentido contrario a las manecillas del reloj. $|f|$ debe ser 1 en el arco corto de p_1 a $-p_0$ (los puntos p_1' de este arco junto con p_0, p_2 fijan K), de otra manera obtendríamos puntos en el Caso I (con punto de referencia a p_2). Similarmente $|f| = 1$ en el arco corto abierto arco que une p_2 a $-p_0$. Si el máximo arco que contiene el arco corto que une p_1 a p_2 y que tiene $|f| = 1$ es menos que una semicircunferencia, obtenemos el Caso I (con punto de referencia p_0). Si es igual a una semicircunferencia, sean q_1, q_2 sus extremos. Estamos ahora en uno de los casos tratados en el teorema 6.3. Si el arco tiene longitud entre π y 2π, se pueden escoger tres puntos que se encuentren en el Caso II.

Hemos agotado los casos, pues si en cada uno de los tres puntos $|f|$ no es localmente constante ya sea en la dirección ascendente ó en la descendente, entonces encontramos ambos casos I y II.

Examinamos ahora el caso en que ∂K admite cuerdas locales. Podemos suponer que p_0, p_1, p_2 se encuentran en arcos del máximo círculo inscrito; de lo contrario tendríamos casos como los que recién examinamos. Supongamos que el arco en que se encuentra p_0 no contiene p_1 ni p_2. Si el extremo más próximo a p_0 del arco que contiene p_1 y el extremo más próximo a p_0 del arco que contiene p_2 forma un arco opuesto a p_0 con ángulo menor a π, entonces tenemos el Caso II. Si la longitud es igual a π, tenemos une de los casos del teorema 6.3. Si la longitud es mayor a π existen punto en el caso III. Queda el caso en que los tres puntos se encuentran sobre un mismo arco, que debe tener longitud mayor que π. Es fácil generar el caso II, a menos de que K sea el disco.■

Apéndice.

A El cálculo de curvas de curvatura positiva.

Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un dominio simplemente conexo compacto cuya frontera ∂K es una curva C^2 cerrada de longitud L. Sea $N : \partial K \to S^1$ el mapa de Gauss. Asumimos que la curvatura es estrictamente positiva. Escribimos

$$f : S^1 \to \partial K \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{A.1}$$

para la inversa C^2 de N. Utilizaremos el ángulo θ para denotar los puntos de S^1 y ∂K y le llamaremos coordenada de Gauss. Entonces

$$N = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Definiendo un parámetro de longitud de arco s, con $s = 0$ en $\theta = 0$ y $\frac{ds}{d\theta} > 0$, podemos escribir

$$\frac{dN}{ds} = kT, \quad \frac{dT}{ds} = -kN. \tag{A.3}$$

donde k es la curvatura. Combinando A.2 y A.3,

$$\frac{dN}{ds} = T\frac{d\theta}{ds} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{d\theta}{ds}. \tag{A.4}$$

Defínanse ahora las funciones g y h (de s ó θ) como sigue:

$$f = gN + hT. \tag{A.5}$$

Entonces

$$T = \frac{df}{ds} = \frac{d}{ds}(gN + hT) = (\frac{dg}{ds} - kh)N + (\frac{dh}{ds} + kg)T. \tag{A.6}$$

Por lo tanto

$$\frac{dg}{ds} = kh, \qquad \frac{dh}{ds} = 1 - kg. \tag{A.7}$$

También

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|f|^2 = gg' + hh' = kgh + h(1 - kg) = h. \tag{A.8}$$

Podemos cambiar la variable de las ecuaciones A.7 a θ. Definiendo

$$r = k^{-1} = \frac{ds}{d\theta} \tag{A.9}$$

(el radio de curvatura), tenemos

$$\frac{dg}{d\theta} = h, \qquad \frac{dh}{d\theta} = r - g. \tag{A.10}$$

Como la curva es cerrada tenemos algunas identidades integrales:

$$\int_0^L h\,ds = \int_0^L \tfrac{1}{2}(|\mathbf{f}|^2)'\,ds = \left[\tfrac{1}{2}|\mathbf{f}|^2\right]_0^L = 0 \qquad (\mathbf{A.11})$$

$$\int_0^L k\,ds = \int_0^L \frac{d\theta}{ds}ds = \left[\theta\right]_0^L = 2\pi \qquad (\mathbf{A.12})$$

$$\int_0^{2\pi} h\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{dg}{d\theta}d\theta = \left[g\right]_0^{2\pi} = 0 \qquad (\mathbf{A.13})$$

$$\int_0^{2\pi} g\,d\theta = \int_0^L kg\,ds = \int_0^L\left(1-\frac{dh}{ds}\right)ds = L - \left[h\right]_0^L = L \qquad (\mathbf{A.14})$$

$$\int_0^{2\pi} r\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{ds}{d\theta}d\theta = L. \qquad (\mathbf{A.15})$$

Podemos integrar el sistema A.10, que puede escribirse

$$\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} g \\ h\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\end{pmatrix}. \qquad (\mathbf{A.16})$$

Sea $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Puede verificarse que

$$\frac{dP}{d\theta}P^{-1} = P^{-1}\frac{dP}{d\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}. \qquad (\mathbf{A.17})$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{d\theta}\left(P\begin{pmatrix} g \\ h\end{pmatrix}\right) = P\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} g \\ h\end{pmatrix} + \frac{dP}{d\theta}\begin{pmatrix} g \\ h\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ r\end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{A.18})$$

así es que

$$\left[P\begin{pmatrix} g \\ h\end{pmatrix}\right]_0^{\theta} = \int_0^{\theta} P(\omega)\begin{pmatrix} 0 \\ r(\omega)\end{pmatrix}d\omega = \int_0^{\theta} r(\omega)\begin{pmatrix} -\sin\omega \\ \cos\omega\end{pmatrix}d\omega. \qquad (\mathbf{A.19})$$

g y h son periódicas (correspondiendo a una curva cerrada) si y sólo si

$$\int_0^{2\pi} r(\omega)\begin{pmatrix} -\sin\omega \\ \cos\omega\end{pmatrix}d\omega = 0. \qquad (\mathbf{A.20})$$

Las soluciones homogeneas del sistema A.15 son

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ h_0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -\cos(\theta-\theta_0) \\ \sin(\theta-\theta_0)\end{pmatrix} \qquad (\mathbf{A.21})$$

Estas corresponden a cambiar el origen a $\alpha(\cos\theta_0,\sin\theta_0)^T$ puesto que añadirlas a la solución original desplaza $\mathbf{f}$ por

$$g_0\mathbf{N} + h_0\mathbf{T} = \alpha\left\{\sin(\theta-\theta_0)\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} - \cos(\theta-\theta_0)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}\right\} = -\alpha\begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0\end{pmatrix}.$$

Parte II: Una factorización del polinomio característico: Extendiendo algunas estimativas de valores propios.

7 Introducción.

En esta sección presentamos varios teoremas de matrices. El primero, sobre las matrices Móndrigas, tuvo su origen en el estudio de la inmovilización de figuras y cuerpos en el espacio Euclídeo. En ese contexto el teorema proveé la herramienta que permite demostrar que si un tetrahedro cumple la condición de primer orden de inmovilización, también cumple la de segundo orden. Las primeras demostraciones involucraron el estudio de muchos casos (dados por las caras de polihedros n-dimensionales). Luego encontramos una factorización del polinomio característico que dió el resultado de forma sencilla. De ésta obtuvimos varios teoremas entre los que pareciera haber poca relación.

8 La factorización del polinomio característico.

Sea $\mathbb{C}^{n\times m}$ el conjunto de matrices de n renglones y m columnas de números complejas. Sea $p_M(z) = \det(zI-M)$ el polinomio característico de cualquier matriz cuadrada M, σ_M su espectro.

8.1 Teorema. Sean $G, P \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y supóngase

$$A = E - PG^T \in \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{8.1.1}$$

Para cualquier $J \in \mathbb{C}^{m\times m}$, sea $K = J - G^TP$ y

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} J-G^TP & G^T \\ PJ-EP & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & G^T \\ PK-AP & A+PG^T \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}. \tag{8.1.2}$$

Por lo tanto

$$p_J(z)p_A(z) = p_{\mathcal{E}}(z), \tag{8.1.3}$$

$$\sigma_A \cup \sigma_J = \sigma_{\mathcal{E}}. \tag{8.1.4}$$

Los valores propios de A son los de $\mathcal{E}$ menos los de J.

Demostración. Las siguientes identidades pueden verificarse directamente:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} I & G^T \\ P & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 \\ -P & I \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} J & JG^T \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ -P & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & G^T \\ P & E \end{pmatrix}.$$

Como $p_{MN}(z) = p_{NM}(z)$ para cualquier par de matrices M, N, obtenemos la ecuación 8.1.3.■

Ahora supongamos dad una matriz A. Escogiendo G, P, y J (or K), podemos estimar los valores propios de A estimando los de $\mathcal{E}$. Las secciones siguientes dan varias aplicaciones a casos generales de interés.

9 Matrices Móndrigas.

Las matrices que aparecen naturalmente en la condición de segundo orden de inmovilización de cuerpos en el espacio, son las siguientes (ver el capítulo 5).

9.1 Definición. Una matriz Móndriga es una matriz $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ cuyas entradas diagonales son no negativas y son las máximas entradas de cada columna, y la suma de cuyos renglones es no negativa:

$$\textstyle\sum_j a_{ij} \geq 0, \quad a_{ij} \leq a_{jj}, \quad a_{jj} \geq 0,$$

donde $1 \leq i,j \leq n$.■

Sea $B_R(C) = \{z \in \mathbb{C} : |z-C| \leq R\}$ el disco en el plano complejo con radio R y centro C.

9.2 Teorema. Para cualquier matriz Móndriga A, $\sigma_A \subset B_{trA}(0)$.

Demostración. Utilizando la notación del teorema 8.1, sea $m = 1$,

$$P = (1,\ldots,1)^T, \quad G = (a_{11},\ldots,a_{nn})^T, \quad E = a_{jj} - a_{ij} \geq 0, \quad J = (trA).$$

Entonces $-A = E - PG^T$ y

$$G^TP = J, \quad (PJ-EP)_i = trA - \textstyle\sum_j(a_{jj}-a_{ij}) = \sum_j a_{ij} \geq 0.$$

Por lo tanto en el teorema 8.1 $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & G^T \\ PJ-EP & E \end{pmatrix}$. Esta es un matriz no negativa con entradas diagonales cero, y cada uno de cuyos renglones tiene suma menor ó igual a trA. Aplicando el teorema de discos de Geršgorin o el teorema de Perron Frobenius obtenemos $\sigma_{\mathcal{E}} \subset B_{trA}(0)$. Por lo tanto

$$\sigma^{\cdot}_{-A} \subset \sigma_{\mathcal{E}} \subset B_{trA}(0) \quad \text{por lo que} \quad \sigma_A \subset B_{trA}(0).\blacksquare$$

El valor propio adicional introducido por $\mathcal{E}$ es trA, que coincide con el valor propio positivo dado por el teorema de Perron Frobenius, que por lo tanto no proveé información adicional sobre A.

10 Aplicaciones a matrices de signos mixtos.

El resultado sobre matrices Móndriga dado en la sección anterior puede ser refinado, como corolario de un teorema más general. Utilizaremos un vector de pesos general $p > 0$. Para aplicar la descomposición del teorema 8.1, dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definimos $g \geq 0$ para que

$$E = (e_{ij}) = A + pg^T \geq 0. \qquad (10.1.1)$$

Es decir, definimos

$$g_j = \max\Big(\max_{1\leq i\leq n}(- p_i^{-1}a_{ij}) ,0\Big) \geq 0. \qquad (10.1.2)$$

También, sean

$$\begin{gathered} \gamma = g^T p, \quad e = \min(e_{11}, \dots, e_{nn}), \\ j_0 = \max_{1\leq i\leq n} p_i^{-1}(Ep)_i \geq e, \quad k_0 = \max_{1\leq i\leq n} p_i^{-1}(Ap)_i = j_0 - \gamma \end{gathered} \qquad (10.1.3)$$

Obsérvese que E, e, γ, j_0, k_0, son funciones de los pesos p que son independientes de la norma $|p|$.

10.1 Teorema. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cualquier matriz. Para cada $p > 0$

$$\sigma_A \subset \begin{cases} B_{k_0+\gamma-e}(e) & e \leq k_0 \\ B_\gamma(k_0) \cap B_\gamma(e) & e \geq k_0 \end{cases} \qquad (10.1.5)$$

(donde k_0, e, γ dependen de p).

Demostración. Sea $j \geq j_0$. Aplicando el teorema 2.2 con $G = g$, $P = p$, excepto por una j, A tiene los valores propios de

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} j-\gamma & g^T \\ jp-Ep & E \end{pmatrix}.$$

que es una matriz con entradas no negativas excepto posiblemente por $j-\gamma$. Aplicando el teorema de discos de Geršgorin con pesos $(1,p)$ [HJ] obtenemos que los valores propios de $\mathcal{E}$ se encuentran en los discos

$$B_{j-e_{ii}}(e_{ii}), \qquad i = 1,\dots,n, \qquad B_\gamma(j-\gamma)$$

puesto que

$$\rho_i = \left|j - p_i^{-1}\sum_{j=1}^{n} p_j e_{ij}\right| + p_i^{-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_j e_{ij} = j - e_{ii}.$$

Cada uno de los discos del primer conjunto está contenido en el mayor, que tiene centro en e y radio $j-e$. Por lo tanto

$$\sigma_A \subset \bigcap_{j\geq j_0}\left(B_{j-e}(e) \cup B_\gamma(j-\gamma)\right).$$

Para cada j tenemos un par de circunferencias, cuya unión es

$$B_{j-e}(e) \cup B_\gamma(j-\gamma) = \begin{cases} B_{j-e}(e) & j \geq \gamma+e \\ B_\gamma(j-\gamma) & j \leq \gamma+e \end{cases}$$

Sea $I_1 = \{j \mid j_0 \leq j \leq \gamma+e\}$ (vacío si $\gamma + e < j_0$), y sea $I_2 = [\max(j_0,\gamma+e),\infty)$. Tenemos

$$\sigma_A \subset \bigcap_{j\in I_1} B_\gamma(j-\gamma) \cap \bigcap_{j\in I_2} B_{j-e}(e)$$

Por lo tanto si $\gamma+e \leq j_0$

$$\sigma_A \subset \bigcap_{j\in I_2} B_{j-e}(e) = B_{j_0-e}(e)$$

mientras que si $\gamma+e \geq j_0$

$$\sigma_A \subset B_\gamma(j_0-\gamma) \cap B_\gamma(e) \cap B_{j_0-e}(e) \subset B_\gamma(j_0-\gamma) \cap B_\gamma(e). \blacksquare$$

El siguiente corolario de teorema 4.1 refina el teorema sobre matrices Móndriga de la sección anterior.

10.2 Corolario. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz que cumpla, para alguna $p > 0$, $Ap \geq 0$. Si también

$$p_i^{-1}a_{ij} \leq p_j^{-1}a_{jj} \quad y \quad p_j^{-1}a_{jj} \geq 0, \quad 1 \leq i,j \leq n, \qquad \textbf{(10.1.6)}$$

entonces

$$\sigma_A \subset B_{\mathrm{tr}A}(\delta) \cap B_{\mathrm{tr}A}(0).$$

donde $\delta = \min_{1\le i\le n} p_i^{-1}(Ap)_i \ge 0.$

Demostración. Aplicamos el teorema 4.1 a $-A$, utilizando

$$k_0 = \max_{1\le i\le n} p_i^{-1}(-Ap)_i \le 0, \quad g_j = \max_{1\le i\le n} \{\max(p_i^{-1}a_{ij}),0\} = p_j^{-1}a_{jj},$$

$\gamma = \mathrm{tr}A$, $e_{ii} = 0$, $e = 0$.∎

11 Aplicaciones a matrices no negativas.

Para matrices no negativas A puede obtenerse del teorema 10.1 la estimativa del teorema de Perron Frobenius. En este case, para cualquier $p > 0$, $g = 0$ por lo que $E = A$, $\gamma = 0$, $j_0 = k_0 = \max\{p_i^{-1}(Ap)_i \mid 1 \le i \le n\}$, y $e = \min(a_{ii}) \le k_0$. Del teorema 10.1,

$$\sigma_A \subset \bigcap_{p>0} B_{k_0-e}(e) = B_{r-e}(e), \quad \text{donde} \quad r = \inf_{p>0} k_0,$$

que es la estimativa obtenida aplicando el teorema de Perron-Frobenius [HJ] a $A - eI$.

Obtenemos ahora una estimativa para los valores propios restantes.

11.1 Teorema. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz no negativa irreducible con radio espectral r correspondiente a un vector propio derecho positivo $p > 0$. Defínase el máximo vector $g \ge 0$ para el cual $E = (e_{ij}) = A - pg^T \ge 0$, es decir,

$$g = (g_i) \in \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad g_j = \min_{1\le i\le n} p_i^{-1}a_{ij} \ge 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Sea $j = r - g^Tp$, $e = \min(e_{11}, \dots, e_{nn})$. Los valores propios de A diferentes a r se encuentran en el disco

$$\sigma_A \setminus \{r\} \subset B_{j-e}(e).$$

Demostración. $0 \le Ep = Ap - pg^Tp = jp$ implica $j > 0$. Aplicamos ahora el teorema 8.1 con $m = 1$, $P = -p \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $G = g \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Este implica que excepto por una j, los valores propios de A son los valores propios de $\mathcal{E}$, donde

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} j-G^TP & G^T \\ Pj-EP & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -g^T \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto los valores propios de A son r y los de E excepto por una j. Aplicando el teorema de discos de Geršgorin con pesos p a la matriz E, encontramos que sus valores propios están en los discos

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - e_{ii}| \leq \rho_i\}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

donde $\rho_i = p_i^{-1}\sum_{j\neq i}p_j e_{ij} = j - e_{ii} \geq 0$. Pero cada uno de estos discos está contenido en el mayor, que tiene centro e y radio $j - e$.∎

12 Matrices con diagonal no negativa y demás entradas no positivas.

En la siguiente aplicación consideramos matrices con un signo en la diagonal y el opuesto en las demás entradas, que es el caso en que γ puede ser calculado facilmente y que da un resultado sobre M-matrices.

12.1 Teorema. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz para la cual

$$a_{ii} \geq 0, \quad a_{ij} \leq 0 \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

Sea r el radio espectral de la matriz no negativa $\alpha I - A$, donde $\alpha = \sup_{1\leq i\leq n} a_{ii}$. Entonces A tiene un valor propio $\alpha - r$ de multiplicidad uno con vector propio no negativo y

$$\sigma_A \setminus \{\alpha - r\} \subset B_{j-e}(\alpha - e) \cap B_{r+\mathrm{tr}A-\alpha}(0) \subset B_r(\alpha) \cap B_{r+\mathrm{tr}A-\alpha}(0)$$

donde j y e son las cantidades no negativas definidas en el teorema 5.1 para la matriz $\alpha I - A$.

Demostración. Usando la notación del teorema 10.1 aplicada a $-A$, para cada $p > 0$, $g_i = p_i^{-1}a_{ii}$. Por lo tanto $\gamma = g^T p = \mathrm{tr}A$. Pero $Ep = (\mathrm{tr}AI - A)p$, por lo que

$$\begin{aligned} s &= \inf_{p>0}\max_{1\leq i\leq n} p_i^{-1}(E(p)p)_i = \mathrm{tr}A - \alpha + \inf_{p>0}\max_{1\leq i\leq n} p_i^{-1}((\alpha I - A)p)_i \\ &= \mathrm{tr}A - \alpha + r. \end{aligned}$$

Fijamos p como el vector propio no negativo de $\alpha I - A$. Entonces

$$Ep = sp, \qquad Ap = (\mathrm{tr}A - s)p.$$

$E = pg^T - A$ es irreducible pues A lo es, así es que s coincide con el radio espectral dado por el teorema de Perron-Frobenius (premultiplique por el vector propio izquierdo). Aplicando el teorema 8.1 con $j = s$ se muestra que, excepto para una s, $-A$ tiene los valores propios de

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} s-\mathrm{tr}A & g^T \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\sigma_{-A} \setminus \{s - \mathrm{tr}A\} = \sigma_{\mathcal{E}} \setminus \{s\} \subset B_s(0).$$

Por otra parte, aplicando el teorema 5.1 a $\alpha I - A$ obtenemos

$$\sigma_{-A} \setminus \{r-\alpha\} = (\sigma_{\alpha I-A} \setminus \{r-\alpha\}) - \mathrm{tr}A \subset B_{j-e}(e-\alpha).\blacksquare$$

Las matrices con diagonal no negativa y demás entradas no positivas son llamadas M-matrices si su inversa es no negativa.

12.2 Corolario. En términos de la notación anterior, si

$$\{\alpha-r\} \cup \left(B_{j-e}(\alpha-e) \cap B_{r+\mathrm{tr}A-\alpha}(0)\right) \subset \mathrm{Int}(B_R(0)),$$

donde $R > 0$, entonces $RI - A$ es una M-matriz.

Demostración. Esta es consecuencia de un teorema conocido (ver Teorema 2, §15.2 de [LT]).$\blacksquare$

13 Modificando los discos de Geršgorin.

Sea dada una matriz A para la que conocemos parte de su forma de Jordan. Podemos encontrar el espectro de A en discos de Geršgorin modificados.

13.1 Teorema. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y supóngase que $A\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{J}$ donde $\mathcal{P} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $\mathcal{J} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ es un bloque de Jordan. Para cualquier $G \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $q > 0$,

$$\sigma_A \setminus \sigma_{\mathcal{J}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\rho_i(G)}(e_{ii}(G))$$

donde $\rho_i(G) = q_i^{-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} q_j|e_{ij}|$, $E(G) = (e_{ij}(G)) = A + PG^T$.

Proof. En el teorema 8.1 sea $P = \mathcal{P}$, $J = \mathcal{J} + G^TP$, $E = A + PG^T$. Entonces $EP = (A + PG^T)P = P(\mathcal{J} + G^TP) = PJ$. Por tanto $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{J} & G^T \\ 0 & E \end{pmatrix}$, por lo que $\sigma_A \setminus \sigma_{\mathcal{J}} \subseteq \sigma_{\mathcal{E}}$. Aplíquese el teorema de discos de Geršgorin con pesos q.$\blacksquare$

Bibliografía.

A *Libro.* Thierry Aubin. *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 252. Springer Verlag, 1982. New York, Hidelberg, Berlin.

BFMM *Artículo.* J. Bracho, H. Fetter, D. Mayer, L. Montejano. *Immobilization of solids and Mondriga Quadratic Forms.* Preprint, 1993. Aparecerá en el Journal of the London Mathematical Society.

BMU *Artículo.* J. Bracho, L. Montejano and J. Urrutia. *Immobilization of smooth convex figures.* Preprint, 1992.

C *Libro.* Isaac Chavel. *Eigenvalues in Reimannian Geometry.* Academic Press Inc, 1984, EEUU.

CSU *Reportes.* J. Czyzowicz, I. Stojmenovic and Jorge Urrutia. *Immobilizing a shape.* Department d'Informatique, Universite du Quebec a Hull, RR90/11-18, 1990.

HC *Libro.* D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and Imagination.* Chelsea Publishing Company, New York, 1952.

HJ *Libro.* R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

K *Reportes.* W. Kuperberg. *DIMACS Workshop on Polytopes.* Rutgers University, Jan. 1990.

LT *Libro.* Peter Lancaster and Miron Tismenetsky, *The Theory of Matrices, Second Edition,* Academic Press, Inc, Orlando, Florida, USA.

MNP1 *Revista.* X. Markenscoff, L. Ni and Ch. H. Papadimitriou. *Optimal grip of a polygon,* Int. J. Robotics Research, 8, 2, 1989, 17-29.

MNP2 *Revista.* X. Markenscoff, L. Ni and Ch. H. Papadimitriou. *The geometry of Grasping,* Int. J. Robotics Research, 9, 1, 1990, 61-74.