



11161  
UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
CUAUTITLAN

**"DISEÑO DE SISTEMAS MECANICOS PARA  
CONDUCCION DE CUERPO RIGIDO"**

T E S I S

P R E S E N T A D A

P A R A O B T E N E R E L G R A D O D E

**MAESTRO EN INGENIERIA**

*(Metal - Mecánica)*

P O R

**ING. MARCO ANTONIO ALARCON RAMIREZ**

1994

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **H. JURADO ASIGNADO**

<b>Presidente</b>	<b>Dr. Angel Rojas Salgado</b>
<b>Vocal</b>	<b>Dr. Jaime Hinojosa Torres</b>
<b>Secretario</b>	<b>M. en I. Juan Leonardo Hernández De Anda</b>
<b>Primer Suplente</b>	<b>Dr. Alejandro F. Romero López</b>
<b>Segundo Suplente</b>	<b>M. en I. Héctor Enrique Curiel Reyna</b>

**SITIO DONDE SE DESARROLLARÁ EL TEMA:**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN  
CENTRO DE ASIMILACIÓN TECNOLÓGICA**

**SUSTENTANTE:**

**Ing. Marco Antonio Alarcón Ramírez**

**ASESOR DEL TEMA:**

**M. en I. Juan Leonardo Hernández De Anda**

# I N D I C E

TEMA	PAGINA
INTRODUCCION	
1. ECUACION DE SINTESIS PARA CONDUCCION DE CUERPO RIGIDO	4
- Ecuación de Síntesis	8
2. SOLUCION POR EL ALGORITMO DE NEWTON RAPHSON	14
- Algoritmo de Newton Raphson	15
3. SOLUCION DE LA ECUACION DE SINTESIS MEDIANTE CUASILINEALIZACION	24
- Cuasilinealización de la Ecuación de Síntesis	26
4. SINTESIS MEDIANTE CUASILINEALIZACION CON UN GRADO DE LIBERTAD	30
4.1 Priemer caso. Fijando $x_B$	33
4.2 Segundo caso. Fijando $y_B$	37
5. APLICACION PRACTICA	41
5.1 Planteamiento del problema	41
5.2 Solución mediante el algoritmo de Newton-Raphson	44
5.2.1 1ra. configuración	44
5.2.2 2da. configuración	49
5.2.3 n-ésima configuración	53
5.3 Solución por cuasilinealización	54
5.3.1 1ra. configuración	54
5.3.2 2da. configuración	63
5.3.3 n-ésima configuración	65
- Conclusión	66

(Continuación...)

## I N D I C E

TEMA	PAGINA
5.4 Solución por cuásilinealización con un grado de libertad.	
5.4.1 1ra. configuración	67
5.4.1.1 Primer Caso. Fijando $x_B$	67
- Mecanismos posibles	75
5.4.1.2 Segundo Caso. Fijando $y_B$	76
- Mecanismos posibles	81
5.4.2 2da. configuración	82
- Mecanismos posibles	86
5.4.3 n-ésima configuración	92
RESUMEN	97
CONCLUSIONES	98
APENDICE A	100
APENDICE B	110
APENDICE C	113
APENDICE D	124
BIBLIOGRAFIA	

# INTRODUCCION

En esta tesis se presenta un estudio comparativo de varios métodos de Síntesis Cinemática de Mecanismos Planos R R R para Generación de Trayectorias, con la finalidad de conocer las ventajas y desventajas de cada uno de ellos, y una aplicación práctica de los resultados del mismo.

Esta aplicación estriba en diseñar un mecanismo para resolver el problema de sacar y meter manualmente la llanta de refacción de los camiones ligeros tipo "pick up", desde su lugar de alojamiento en la parte inferior trasera del vehículo hasta un lugar accesible en la parte posterior.

La idea para desarrollar este trabajo, surgió al observar la dificultad que le presenta al operador, de estos vehículos, el cambio de la llanta de refacción y los daños físicos que puede causarle el sobreesfuerzo al sacarla manualmente.

La Síntesis para Conducción de Cuerpo Rígido de este tipo de mecanismos, consiste en desarrollar un sistema de ecuaciones algebraicas que represente en forma matemática cada una de las configuraciones sucesivas por las que debe pasar un Cuerpo Rígido, con la finalidad de obtener las dimensiones de las barras del mecanismo y así poder construirlo.

El principio para obtener este sistema se basa en la característica que tiene un cuerpo rígido de conservar inalterable, durante su movimiento, la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos <sup>(1)</sup>, y al aplicarse da como resultado un conjunto de ecuaciones algebraicas NO LINEALES.

Este sistema de ecuaciones no lineales, puede resolverse mediante métodos iterativos, como el de Newton-Raphson, o bien, usando cambios de variable que permitan linealizar las ecuaciones y resolverlas como tales.

En el Capítulo 1 se muestra la forma de obtener las Ecuaciones de Síntesis, después de hacer una breve descripción de los mecanismos de pares inferiores.

El Capítulo 2, describe la forma de resolver las ecuaciones de síntesis utilizando el método numérico de Newton Raphson y su aplicación en la solución del problema de la llanta de refacción.

Dos metodos para resolver estas ecuaciones mediante cuasilinealización. son mostrados en los Capítulos 3 y 4, así como la forma de resolver el problema en cuestión y la selección de los resultados.

En el capítulo 5, se presenta la síntesis de un mecanismo para sacar la llanta de refacción de la parte inferior de la caja de los camiones ligeros tipo "pick up", donde se hace una aplicación práctica de toda esta teoría.

Los resultados obtenidos dan una amplia visión de la gran flexibilidad que tienen los mecanismos para resolver este tipo de problemas.

Cuando se le da libertad al modelo matemático, se puede conseguir que los mecanismos adapten su geometría para dar mejores resultados, comparados con los obtenidos mediante sistemas totalmente restringidos como lo son los determinados, en los que se obtiene una solución que muchas veces, como en este caso, no es la más adecuada.

ECUACION DE SINTESIS DE  
MECANISMOS  
R R R R PARA CONDUCCION  
DE CUERPO RIGIDO .

Un mecanismo ha sido definido, como un conjunto de cuerpos rígidos conectados de tal forma que uno se mueva respecto a otro.

Un cuerpo rígido, por definición es un cuerpo poco flexible, en el cual la distancia entre dos puntos cualesquiera de su superficie permanece casi invariable durante su movimiento, es decir que sus deformaciones sean infinitesimales.

En Cinemática, una conexión es una junta o unión entre dos cuerpos, que permite una clase particular de movimiento. Dependiendo de la forma de la conexión; éstas se dividen en 2 clases (2):

- Pares Cinemáticos inferiores.
- Pares Cinemáticos superiores.

Los pares cinemáticos inferiores son aquellos en los que la conexión se hace por medio de superficies y en los pares cinemáticos superiores se hace por medio de líneas o puntos.

Asimismo, dependiendo de los grados de libertad que permite una conexión o acoplamiento, hay 5 clases diferentes de pares cinemáticos. La clase I tiene un grado de libertad, la clase II tiene dos grados de libertad y así sucesivamente.

Dependiendo del número de grados de libertad que permiten los Pares Cinemáticos Inferiores (3), estos pueden ser :

De Revolución: Permiten sólo el movimiento de rotación y tienen un grado de libertad, su símbolo es R.

Prismático: Permiten sólo el movimiento de traslación por deslizamiento, tienen un grado de libertad y su símbolo es P.

**Tornillo:** Permiten el movimiento de traslación a través de un giro y tienen un grado de libertad, su símbolo es H.

En los pares cinemáticos superiores, la conexión es por medio de puntos o por medio de líneas.

Por medio de puntos, como en las balas de los rodamientos.

Por medio de líneas, como en las transmisiones de movimiento o potencia que usan levas o engranes.

Bajo esta circunstancia los pares cinemáticos superiores no tienen una clasificación simple como la de los pares inferiores.

Un cuerpo rígido con dos ó mas pares cinemáticos es llamado "eslabón". El tipo de eslabón se identifica mediante el número de pares cinemáticos que pueden ser colocados en él.

Un eslabón que tiene dos pares cinemáticos es un "eslabón binario", uno que tiene tres es un eslabón ternario y así sucesivamente.

Un eslabón binario también es conocido con el nombre de DIADA.

Una cadena cinemática es un conjunto de eslabones conectados por medio de pares cinemáticos, formando un circuito cerrado. Cuando la cadena cinemática tiene un eslabón fijo recibe el nombre de Mecanismo.

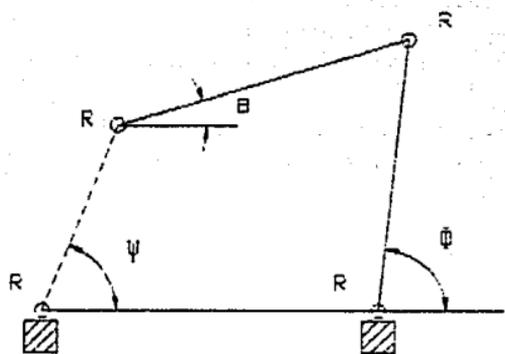


FIG 1.1

MECANISMO RRRR

Una cadena cinemática simplemente cerrada, está formada sólo por eslabones binarios (Diadas) y está completamente descrita si cada conexión es designada por su propio símbolo, sin importar el orden.

Entonces, la designación de un mecanismo de 4 barras articuladas por medio de pares de revolución es: Mecanismo RRRR (ver figura 1.1). Al eslabón fijo se le conoce como barra de tierra, las barras unidas a la tierra son las de la entrada y la de salida, y a la barra que une a estas dos se le conoce como barra acopladora.

Si para la conducción de un cuerpo se desea utilizar este tipo de mecanismo, éste se construirá usando el cuerpo rígido montado en la barra acopladora.

Las articulaciones (R) de esta barra se conectarán con las barras de entrada y de salida en los puntos de éstas que describan trayectorias circulares. A estos puntos se les llama puntos circulares (A y A\*), según pertenezcan a la barra de entrada o a la de salida. Asimismo, los puntos que están en el centro de estas trayectorias, reciben el nombre de puntos centrales (B y B\*) respectivamente.

La barra que une los puntos A y B es la barra de entrada y la que une los puntos A\* y B\*, la barra de salida.

## ECUACION DE SINTESIS

La Síntesis Cinemática consiste en diseñar un mecanismo que conduzca a un cuerpo rígido por  $n$  configuraciones sucesivas, como el de la figura 1.2.

En esta figura se muestra el cuerpo rígido en su posición inicial, indicada por el vector  $r_0$ , con una inclinación  $\theta_0$  con respecto al sistema de referencia. Sus configuraciones sucesivas durante el movimiento están designadas por los vectores  $r_j$ , donde el subíndice  $j$  representa la posición del punto por donde pasa el cuerpo ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

De la condición de cuerpo rígido, se tiene que :

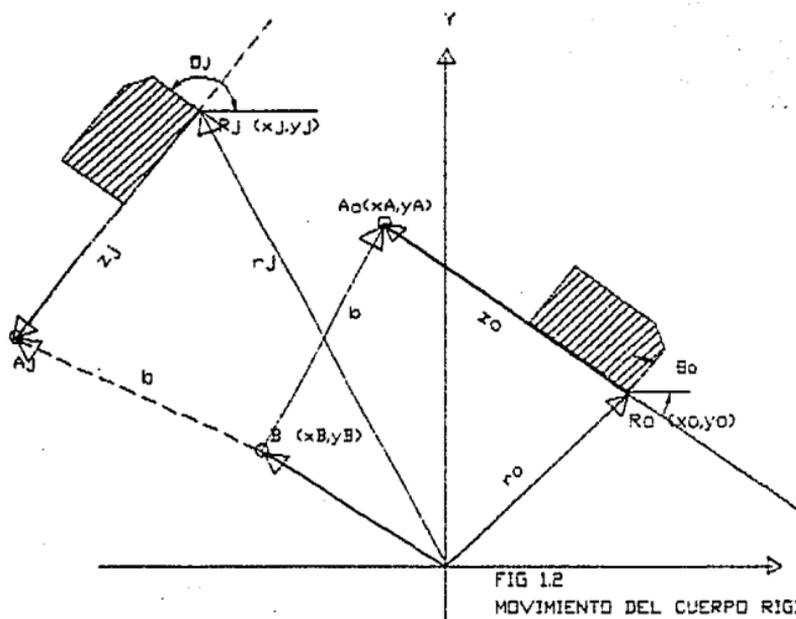
$$|z_j| = |z_0|, \quad (1.1)$$

y como los puntos A y R pertenecen a la barra acopladora, entonces permanecen a la misma distancia durante todo el movimiento, por lo tanto:

$$[z_j] = [Q] [z_0], \quad (1.2)$$

Donde  $[Q]$  es la matriz de rotación del vector  $z_0$ , que lo hace girar un ángulo  $\theta_j = \theta_j - \theta_0$ .

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\text{sen } \theta_j \\ \text{sen } \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix} \quad (1.3)$$



Pero también se tiene que:

$$[z_0] = [a_0] - [r_0] \quad (1.4)$$

Y:

$$[z_j] = [a_j] - [r_j] \quad (1.5)$$

donde:

$$[r_0] = [x_0 \quad y_0]^T \quad (1.6)$$

$$[r_j] = [x_j \quad y_j]^T \quad (1.7)$$

Y como el punto A es el punto circular de la barra de entrada, y toma las posiciones desde  $A_0$  hasta  $A_j$ , entonces  $A_0$  y  $A_j$  están en la misma circunferencia, y por lo tanto,

$$|a_j - b| = |a_0 - b| \quad (1.8)$$

donde:

$$[a_0] = [x_A \quad y_A]^T \quad (1.9)$$

$$[b] = [x_B \quad y_B]^T \quad (1.10)$$

Despejando  $a_j$  de la ecuación (1.5) se tiene que:

$$[a_j] = [z_j] + [r_j]$$

y sustituyendo  $[z_j]$  de la ecuación (1.2), obtenemos:

$$[a_j] = [Q] [z_0] + [r_j]$$

Por último sustituyendo  $[z_0]$  de la ecuación (1.4), en la ecuación anterior, se puede escribir

$$[a_j] = [Q]([a_0] - [r_0]) + [r_j] \quad (1.11)$$

Si en la ecuación (1.8) se sustituye  $\{a_j\}$  de la ecuación (1.11), y se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación para eliminar radicales, resulta :

$$|\{r\} \{a_0 - r_0\} + \{r_j\} - \{b\}|^2 = |\{a_0 - b\}|^2 \quad (1.12)$$

que es la ecuación de diseño que nos permite conocer las componentes de los vectores  $a_0$  y  $b$ , (ecuaciones (1.9) y (1.10)).

El desarrollo de esta ecuación en forma matricial es como sigue:

De las ecuaciones (1.3), (1.6), (1.7), (1.9) y (1.10), se obtiene

$$\left| \begin{bmatrix} c\theta'_j & -s\theta'_j \\ s\theta'_j & c\theta'_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A - x_0 \\ y_A - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_j - x_B \\ y_j - y_B \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \begin{bmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{bmatrix} \right|^2$$

o bien,

$$\left| \begin{bmatrix} x_j - x_B + (x_A - x_0) \cos \theta'_j - (y_A - y_0) \sin \theta'_j \\ y_j - y_B + (x_A - x_0) \sin \theta'_j + (y_A - y_0) \cos \theta'_j \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \begin{bmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{bmatrix} \right|^2$$

y desarrollando, se tiene:

$$\begin{aligned} & \kappa_1^2 + \kappa_B^2 - 2\kappa_1\kappa_B + \kappa_A^2 + \kappa_D^2 - 2\kappa_A\kappa_D + y_A^2 + y_D^2 - 2y_A y_D + \\ & y_1^2 + y_B^2 - 2y_1 y_B + 2[(\kappa_1 - \kappa_B)(\kappa_A - \kappa_D) + (y_1 - y_B)(y_A - y_D)] \cos \theta'_j \\ & 2[(y_1 - y_D)(\kappa_A - \kappa_D) - (\kappa_1 - \kappa_B)(y_A - y_D)] \operatorname{sen} \theta'_j = \\ & \kappa_A^2 + \kappa_B^2 - 2\kappa_A \kappa_B + y_A^2 + y_B^2 - 2y_A y_B \end{aligned}$$

Y simplificando e igualando a cero esta ecuación, se puede escribir, como una función no lineal homogénea de las variables independientes  $x_A, y_A, x_B, y_B$ , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_j = & \kappa_D^2 + y_D^2 + \kappa_1^2 + y_1^2 + 2[\kappa_A(\kappa_B - \kappa_D) + y_A(y_B - y_D) - \kappa_1\kappa_B - y_1 y_B] + \\ & 2[(\kappa_1 - \kappa_B)(\kappa_A - \kappa_D) + (y_1 - y_B)(y_A - y_D)] \cos \theta'_j + \\ & 2[(y_1 - y_B)(\kappa_A - \kappa_D) - (\kappa_1 - \kappa_B)(y_A - y_D)] \operatorname{sen} \theta'_j = 0 \end{aligned}$$

(1.13)

donde  $j$  representa cada una de las configuraciones por donde se desea que pase el cuerpo rígido durante su movimiento,  $j=1, 2, \dots, n$ .

Es decir, se tiene una ecuación para cada uno de los valores de  $j$ ;  $f_1$  para  $j=1$ ,  $f_2$  para  $j=2$ , y así sucesivamente hasta  $j=n$ . Sin embargo el sistema de ecuaciones, así formado, es un sistema algebraico no lineal y para resolverlo existen tres casos posibles, dependiendo del número de ecuaciones ( $n$ ) y del número de incógnitas ( $m$ ):

PRIMER CASO, CUANDO  $n = m$ :

Los sistemas no lineales, en general, presentan mayores dificultades para resolverse que los sistemas lineales. Si en este caso los sistemas lineales tendrían solución única, en los no lineales no hay garantía de que exista, y si existe no necesariamente es única.

El método más popular que existe para resolver los sistemas algebraicos no lineales es el de Newton Raphson (5), que es el que se utiliza en el capítulo N°2 para resolver la ecuación de síntesis.

Otra forma de resolver los sistemas no lineales, consiste en hacer cambios de variable que permitan linealizarlos y resolverlos como tales, y aunque no siempre es fácil encontrarlos, en el capítulo N°3 se presenta un método para hacerlo.

#### SEGUNDO CASO, PARA $n > m$ :

En este caso el sistema es sobredeterminado, y no es posible en general encontrar el valor de las incógnitas que satisfagan todas las ecuaciones, sin embargo se puede minimizar el error que surge al sustituir los valores de las incógnitas en cada una de las ecuaciones, es decir que aunque  $f(x)$  sea distinta de cero, el cuadrado de su norma sea mínima (5).

Minimizar el cuadrado de la norma de  $f(x)$  conduce a resolver un problema no lineal de mínimos cuadrados, y las soluciones así obtenidas son aproximadas. Este caso no es objeto de estudio de esta tesis.

#### TERCER CASO, $n < m$ :

Por último si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado y puede esperarse la existencia de muchas soluciones.

Una de estas soluciones puede escogerse de tal forma que su norma sea mínima y el problema se transforma en uno de programación cuadrática no lineal y puede resolverse con el método de los multiplicadores de Lagrange.

Otro método que puede utilizarse para escoger una de estas soluciones, es el de la Optimización, utilizando el método Complex, o el de Funciones de penalización.

En el capítulo N°4 de esta tesis se presenta, también, un método para encontrar la solución que cumpla con las necesidades de diseño.

## 2

# SOLUCION DE LA ECUACION DE SINTESIS POR EL METODO DE NEWTON RAPHSON

La solución de la ecuación (1.13), se presenta en este capítulo utilizando el Algoritmo de Newton-Raphson.

El número máximo de incógnitas que tiene esta ecuación es 4, que son las coordenadas de los puntos circular  $(x_A, y_A)$  y central  $(x_B, y_B)$  de la diada que se sintetiza mediante esta ecuación.

Por lo tanto se necesita elaborar un sistema de 4 ecuaciones para que éste sea determinado, es decir que  $n$  sea igual que  $m$ .

Como cada configuración del cuerpo, además de la original, permite formar una ecuación  $f(x_j)=0$ , se necesitan 4 configuraciones para tener un sistema de 4 ecuaciones, que es el número máximo para hacer síntesis exacta (6).

#### ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON .

Este algoritmo<sup>(3)</sup> se usa para encontrar las raíces de una ecuación de la forma  $f(x) = 0$ , como la de la figura 2.1.

La primera aproximación de la raíz es  $x_0$ . Si en  $x = x_0$  se traza una línea tangente a la curva, esta cortará al eje de las  $x$  en  $x_k$ , la cual es una mejor aproximación de la raíz.

La pendiente de la línea tangente a la curva en  $x_k$  es:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

y la nueva aproximación de la raíz se obtiene de

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.1)$$

el valor de la función y el de su derivada son calculadas en  $x = x_k$ . El proceso se repite hasta encontrar la mejor aproximación de la raíz, es decir hasta que:

$$|\Delta x_k| = |x_{k+1} - x_k| < \epsilon,$$

$$y$$

$$|f(x_k)| < \epsilon \quad (2.2)$$

Donde  $\epsilon$  es un valor tal que controle el error permisible de la raíz.

Si solamente  $|\Delta x_k|$  decrece hasta la tolerancia impuesta, NO acepte el valor  $x_k$  como solución.

El proceso debe detenerse y tomar nuevos valores iniciales  $x_0$  si:

i) Muchas iteraciones han sido realizadas.

ii)  $|\Delta x_k| \leq \epsilon$  pero  $|f(x_k)| > \epsilon$

Sin embargo la curva no siempre es lisa, como la mostrada en la figura, por lo tanto en  $x_{k+1}$  puede ser que  $|f(x_k)|$  se incremente así como  $|\Delta x_k|$ , esto significa que la función tiene un cambio en su tendencia y posiblemente diverja, en este caso

$$|f(x_k)| > |f(x_{k-1})|$$

y en lugar de utilizar todo el incremento  $\Delta x_k$  se utiliza sólo una parte de él, introduciendo en la ecuación (2.1) un factor de amortiguamiento  $\alpha$ (4).

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

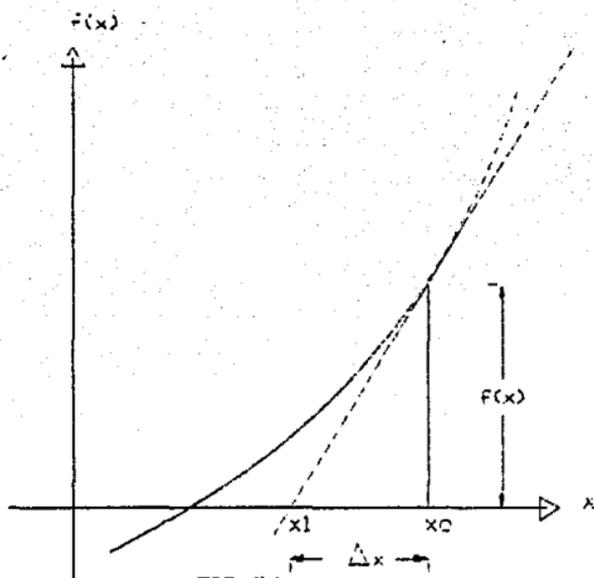


FIG 2.1

ALGORITHM DE NEWTON - RAPHSON

tal que:

$$0 < \alpha < 1.$$

Con  $\alpha = 0$ , el proceso es totalmente amortiguado y con  $\alpha = 1$  no tiene amortiguamiento.

El proceso debe dejar de amortiguarse cuando  $|f(x_k)| < |f(x_{k-1})|$ , y regresar al proceso normal hasta que se cumplan las condiciones (2.2), para hallar la solución.

Sin embargo, como  $x$  es un vector, el esquema iterativo para hallar las raíces aproximadas del sistema de ecuaciones  $f(x) = 0$  es:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha [J^{-1}(x_k) f(x_k)] \quad (2.3)$$

donde  $x_k$  es la  $k$ -ésima aproximación de la raíz de  $f(x)$  y  $J(x)$  es la matriz Jacobiana de  $f(x)$ <sup>(6)</sup>, cuyo elemento  $j, k$  representado por  $a_{jk}$  está dado por:

$$a_{jk} = \frac{\delta f_j}{\delta x_k}$$

Pero como  $x$ , el vector solución, esta formado por las coordenadas de los puntos centrales y circulares de la diada:

$$[x] = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

y las componentes  $a_{jk}$  de  $J(x)$  quedan:

$$a_{j1} = \frac{\delta f_j}{\delta x_A}$$

$$a_{j2} = \frac{\delta f_j}{\delta y_A}$$

$$a_{j3} = \frac{\delta f_j}{\delta x_B}$$

$$a_{j4} = \frac{\delta f_j}{\delta y_B}$$

pero como:

$$[x_{k+1}] - [x_k] = [\Delta x_k]$$

la ecuación (2.3) queda:

$$[\Delta x_k] = -J^{-1}([x_k]) [f(x_k)]$$

O bien:

$$[J(x_k)] [\Delta x_k] = -[f(x_k)] \quad (2.4)$$

donde:

$$[\Delta x_k] = [\Delta x_A \quad \Delta y_A \quad \Delta x_B \quad \Delta y_B]^T$$

y

$$[f(x_k)] = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4]^T$$

Que es una ecuación de la forma<sup>(5)</sup>:

$$[A] [x] = [b] \quad (2.5)$$

donde:

$$[A] = [J(x_k)]$$

$$[x] = [\Delta x_k]$$

$$[b] = - [f(x_k)]$$

Por lo tanto, la ecuación (2.5) queda:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_A \\ \Delta y_A \\ \Delta x_B \\ \Delta y_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Para despejar  $\Delta x$  y evitar el cálculo de  $[A]^{-1}$ , ya que utiliza mucho espacio de memoria en la compilación, se utiliza la descomposición Gaussiana:  $[A] = [L][U]$ , donde  $[L]$  es la matriz triangular inferior con unos sobre la diagonal,

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

Y  $\{U\}$  la triangular superior:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

las componentes de  $L$  son:

$$m_{j1} = \frac{a_{j1} - \sum_{p=1}^{j-1} m_{jp} u_{pk}}{u_{11}} \quad (2.7)$$

$j = 1 + 1, 1 + 2, \dots, n$

y las de  $U$ :

$$u_{jk} = a_{jk} - \sum_{p=1}^{j-1} m_{jp} u_{pk} \quad (2.8)$$

$$k = j, j+1, j+2, \dots, n$$

De esta forma la ecuación (2.5), se puede escribir:

$$\{L\}\{U\}\{x\} = \{b\} \quad (2.9)$$

o bien:

$$\{L\}\{U\}\{\Delta x\} = -\{f\}$$

y haciendo:

$$\{U\}\{\Delta x\} = \{z\} \quad (2.10)$$

se obtiene:

$$[L][z] = -[f] \quad (2.11)$$

cuyo desarrollo es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Se despeja  $z_j$ , haciendo la eliminación anterior resultando:

$$z_j = -f_j - \sum_{l=1}^{j-1} m_{jl} z_l \quad (2.13)$$

que sustituyendo en la ecuación (2.10):

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_A \\ \Delta y_A \\ \Delta x_B \\ \Delta y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$\Delta x$  Se puede obtener fácilmente con la sustitución posterior,

$$\Delta y_B = \frac{z_4}{u_{44}} \quad (2.15)$$

$$\Delta x_B = \frac{z_3 - u_{34} \Delta y_B}{u_{33}} \quad (2.16)$$

$$\Delta y_A = \frac{x_2 - u_{23} \Delta x_B - u_{24} \Delta y_B}{u_{22}} \quad (2.17)$$

$$\Delta x_A = \frac{z_1 - u_{12} \Delta y_A - u_{13} \Delta x_B - u_{14} \Delta y_B}{u_{11}} \quad (2.18)$$

Por último se calculan los nuevos valores de  $x_k$ :

$$[x_{k+1}] = [x_k] + [\Delta x] \quad (2.19)$$

Con estos nuevos valores se repite el procedimiento hasta que se cumplan las condiciones (2.2).

Los valores del vector solución, así obtenido:

$$[x_{k+1}] = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

son las coordenadas del punto central B y del punto circular A de la diada de entrada del mecanismo.

Las coordenadas de los puntos central B\* y circular A\* de la diada de salida se obtienen de cualquier otra solución del sistema, ya que como es no lineal puede tener varias

soluciones, que se encuentren a partir de valores iniciales de  $x_0^*$  distintos a los anteriores, entonces:

$$[x_{k+1}^*] = \begin{bmatrix} x_A^* \\ y_A^* \\ x_B^* \\ y_B^* \end{bmatrix}$$

La única dificultad para encontrar, con este método las soluciones de los sistemas algebraicos no lineales, es el número de iteraciones que algunas veces tienen que hacerse para llegar a la solución.

## 3

# SOLUCION DE LA ECUACION DE SINTESIS MEDIANTE CUASILINEALIZACION

Otra forma de resolver las ecuaciones de Síntesis, consiste en hacer una transformación no lineal de sus parámetros, que transformen el sistema no lineal en uno lineal. Es decir, si en una ecuación general no lineal de la forma<sup>(4)</sup>:

$$f(x_i, y_i, p) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde  $x_i, y_i$  es el conjunto de pares de valores relacionados con el  $i$ -ésimo valor de entrada "x", y el de salida "y", y "p" es un vector de dimensiones que contiene los parámetros del mecanismo en consideración, se introduce una transformación no lineal

$$q = q(p)$$

que transforma el sistema no lineal en uno lineal,

$$f(x_i, y_i, q) = 0$$

de la forma:

$$A q = b$$

y al resolverse mediante la transformación [L][U] obtenemos los valores de q, que al sustituirse en la ecuación:

$$q = q(p)$$

se obtienen las soluciones del sistema de ecuaciones de Síntesis.

Esta linealización no siempre es muy simple desde el punto de vista algebraico, pues puede implicar varios cambios de variable para llegar al final, como es el caso de la ecuación (1.13) que es la ecuación de síntesis que nos ocupa.

### CUASILINEALIZACION DE LA ECUACION DE SINTESIS

A partir de la ecuación (1.13) sacando como factor común  $x_A$ ,  $y_A$  y  $x_B$ ,  $y_B$  y dividiendo entre 2 se llega a (7):

$$\begin{aligned} f_j = & (x_j \cos \theta'_j + y_j \sin \theta'_j - x_0) x_A + (y_j \cos \theta'_j - x_j \sin \theta'_j - y_0) y_A + \\ & (x_0 \cos \theta'_j - y_0 \sin \theta'_j - x_j) x_B + (y_0 \cos \theta'_j + x_0 \sin \theta'_j - y_j) y_B + \\ & \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - (x_0 x_j + y_0 y_j) \cos \theta'_j + (x_j y_0 - x_0 y_j) \sin \theta'_j + \\ & (x_B y_A - x_A y_B) \sin \theta'_j + (x_A x_B + y_A y_B) (1 - \cos \theta'_j) = 0, \\ j = & 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1)$$

Agrupando las variables con valores conocidos como:

$$c'_j = \sin \theta'_j \quad (3.2)$$

$$d'_j = 1 - \cos \theta'_j \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} e'_j = & \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} - (x_0 x_j + y_0 y_j) \cos \theta'_j + \\ & (x_j y_0 - x_0 y_j) \sin \theta'_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} f_j = & (x_j \cos \theta'_j + y_j \sin \theta'_j - x_0) x_A + (y_j \cos \theta'_j - x_j \sin \theta'_j - y_0) y_A \\ & + (x_0 \cos \theta'_j - y_0 \sin \theta'_j - x_j) x_B + (y_0 \cos \theta'_j + x_0 \sin \theta'_j - y_j) y_B \\ & + (x_B y_A - x_A y_B) c'_j + (x_A x_B + y_A y_B) d'_j + e'_j = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para linealizar esta ecuación se introduce un nuevo cambio de variable que agrupa la parte no lineal de la misma:

$$\lambda = x_B y_A - x_A y_B \quad (3.6)$$

$$\mu = x_A x_B + y_A y_B \quad (3.7)$$

y la ecuación (3.5) se puede escribir en forma matricial,

$$[A][x] = - [\lambda[c'] + \mu[d'] + [e']] \quad (3.8)$$

que es la ecuación de Síntesis linealizada, ya que  $\lambda$  y  $\mu$  agrupan los valores de las variables no lineales, y los coeficientes de las variables independientes están en la matriz  $[A]$ , formada por los elementos  $a_{jk}$ :

$$a_{j1} = x_j \cos \theta'_j + y_j \operatorname{sen} \theta'_j - x_0 \quad (3.9)$$

$$a_{j2} = y_j \cos \theta'_j - x_j \operatorname{sen} \theta'_j - y_0 \quad (3.10)$$

$$a_{j3} = x_0 \cos \theta'_j - y_0 \operatorname{sen} \theta'_j - x_j \quad (3.11)$$

$$a_{j4} = y_0 \cos \theta'_j + x_0 \operatorname{sen} \theta'_j - y_j \quad (3.12)$$

$$j = 1, 2, 3, 4,$$

Para despejar  $[x]$  de la ecuación (3.8) se premultiplican ambos miembros por  $[A]^{-1}$  y tenemos:

$$[x] = - \{ \lambda[A]^{-1}[c'] + \mu[A]^{-1}[d'] + [A]^{-1}[e'] \} \quad (3.13)$$

Haciendo un nuevo cambio de variable como:

$$[c] = -[A]^{-1}[c'] \quad (3.14)$$

$$[d] = -[A]^{-1}[d'] \quad (3.15)$$

$$[e] = -[A]^{-1}[e'] \quad (3.16)$$

podemos escribir (3.13) de la siguiente forma:

$$[x] = \lambda[c] + \mu[d] + [e] \quad (3.17)$$

Sustituyendo esta ecuación en las ecuaciones (3.6) y (3.7) se obtiene un sistema de 2 ecuaciones de 2o. grado en  $\lambda$  y  $\mu$  (Ver apéndice A), que son:

$$r_1\mu^2 + (r_2\lambda + r_3)\mu + r_3\lambda^2 + r_5\lambda + r_6 = 0 \quad (3.18)$$

$$s_1\mu^2 + (s_2\lambda + s_3)\mu + s_3\lambda^2 + s_5\lambda + s_6 = 0 \quad (3.19)$$

#### RESOLUCION SIMULTANEA.

La solución de las ecuaciones (3.18) y (3.19), se obtiene aplicando la fórmula general de resolución de las ecuaciones cuadráticas a cada una de ellas e igualandolas, dando como resultado un polinomio de cuarto grado en  $\lambda$  (Ver apéndice A), que es:

$$\alpha_5\lambda^4 + \alpha_4\lambda^3 + \alpha_3\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_1 = 0 \quad (3.20)$$

Los 4 valores de  $\lambda$  que satisfacen esta ecuación pueden ser todos reales o todos imaginarios, o bien dos reales y dos complejos.

Por cada valor real de  $\lambda$  que se sustituye en las ecuaciones (3.18) y (3.19), se obtienen dos valores distintos de  $\mu$ .

El valor de  $\mu$  que sea común a las dos ecuaciones es el único que las satisface biunivocamente y de esta forma se obtiene uno y sólo un valor de  $\mu$  para cada valor real de  $\lambda$ .

El número máximo de pares de valores reales de  $\lambda$  y  $\mu$  así obtenidos es 4, y al sustituirse cada pareja en la ecuación (3.17) se hallan las componentes del vector solución  $[x]$ , una solución por cada par.

Como cada vector solución representa una diada y un mecanismo simple esta formado por dos diadas, la combinación de 4 diadas forma hasta 6 mecanismos distintos, que cumplen con las condiciones establecidas en la conducción del cuerpo rígido.

El sistema de ecuaciones algebraicas que compone la ecuación matricial (3.8), es un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, ( $\lambda$  y  $\mu$  son parametros que linealizan el sistema). es decir es un sistema determinado cuya solución es única.

## 4

# SINTESIS MEDIANTE CUASILINEALIZACION CON UN GRADO DE LIBERTAD

Como los sistemas de ecuaciones algebraicos determinados tienen soluciones únicas que muchas veces no se adecúan totalmente a las condiciones físicas del problema y en algunos casos se requiere tener varias soluciones para poder seleccionar la que más convenga, estos sistemas pueden flexibilizarse haciéndolos indeterminados, dejando una o dos variables libres.

En el caso de la ecuación de síntesis que nos ocupa, ésta puede tener libertad reduciendo el número de puntos por los que pasa el cuerpo rígido, de cuatro que genera un sistema determinado como el del caso anterior, a tres puntos de precisión, con lo que se logra tener un sistema indeterminado de tres ecuaciones con cuatro incógnitas ( $x_A$ ,  $y_A$ ,  $x_B$ ,  $y_B$ ).

Esto significa que una de estas variables es libre y para resolver el sistema, se le asigna un valor a una de ellas.

Así el sistema resultante, de tres ecuaciones con tres incógnitas, se hace determinado y puede resolverse de forma semejante al caso anterior.

Sin embargo, como por cada valor que se le asigne a esa variable se obtiene una solución del sistema, éste tiene un número muy grande de soluciones y es necesario escoger la que mejor satisfaga las condiciones del problema.

De entre los métodos que hay para escoger la mejor solución, en esta tesis se usa un método gráfico para hacerlo.

La razón de ello es que aunque pueden escogerse, matemáticamente, cualquiera de las cuatro variables antes mencionadas, desde el punto de vista cinemático no es factible hacerlo, ya que las variables ( $x_A, y_A$ ) son las coordenadas del punto circular, A, y éste no está fijo durante el movimiento del mecanismo, dificultando la localización del punto B que es donde se fija a su base.

Esta razón hace que el número de variables libres del sistema se reduzca a dos , las coordenadas del punto central  $B(x_B, y_B)$ , ya que al darle valores a  $x_B$ , a lo largo del eje de las  $x$  , podremos graficar el lugar geométrico de  $B$  en el plano cartesiano y completarlo al darle valores a  $y_B$  a lo largo del eje de las abscisas o viceversa,

Esta gráfica del punto central o gráfica de Burmester, al indicar la posición de todas las diadas, facilita la selección de la que mejor cumpla con las necesidades de diseño del mecanismo.

En este caso la solución de la ecuación de síntesis, se hace linealizandola de una forma semejante al caso anterior.

4.1 PRIMER CASO: FIJANDO  $x_B$ 

La ecuación (3.1), se transforma en<sup>(7)</sup>:

$$\begin{aligned}
 f_i = & [(x_j - x_B) \cos \theta'_j + y_j \sin \theta'_j + x_B - x_0] x_A + \\
 & [y_j \cos \theta'_j + (x_B - x_j) \sin \theta'_j - y_0] y_A + \\
 & (y_0 \cos \theta'_j + x_0 \sin \theta'_j - y_j) y_B + \\
 & \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} \cdot [x_0 (x_j - x_B) + y_0 y_j] \cos \theta'_j + \\
 & [y_0 (x_j - x_B) - x_0 y_j] \sin \theta'_j - x_j x_B + \\
 & x_A x_B (-\sin \theta'_j) + y_A y_B (1 - \cos \theta'_j) = 0
 \end{aligned}$$

Expresión que puede linealizarse mediante el cambio de variables:

$$\lambda' = x_A \quad y_B \quad (4.1)$$

$$\mu' = y_A \quad y_B \quad (4.2)$$

Obtendiéndose la ecuación matricial linealizada:

$$[B][x] = - [\lambda' \{p'\} + \mu' \{q'\} + \{t'\}] \quad (4.3)$$

donde:

$$[x] = (x_A \quad y_A \quad y_B)^T$$

y la matriz B esta formada por los elementos  $b_{jk}$ :

$$\begin{aligned}
 b_{j1} &= (x_j - x_B) \cos \theta'_j + y_j \sin \theta'_j + x_B - x_0 \\
 b_{j2} &= y_j \cos \theta'_j + (x_B - x_j) \sin \theta'_j - y_0 \\
 b_{j3} &= y_0 \cos \theta'_j + x_0 \sin \theta'_j - y_j
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

y las componentes de los vectores  $[p']$ ,  $[q']$  y  $[t']$  son:

$$p'_j = -\text{sen } \theta'_j \quad (4.5)$$

$$q'_j = 1 - \text{cos } \theta'_j \quad (4.6)$$

$$t'_j = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + r_0^2}{2} \cdot [x_0(x_j - x_0) + y_0 y_j \text{cos } \theta'_j + \\ [y_0(x_j - x_0) \cdot \text{sen } \theta'_j - z_0 z_j] \quad (4.7)$$

Premultiplicando la ecuación (4.3) por  $[B]^{-1}$  para despejar  $[x]$  y haciendo:

$$[p] = -[B]^{-1} [p']$$

$$[q] = -[B]^{-1} [q']$$

$$[t] = -[B]^{-1} [t']$$

podemos escribirla:

$$[x] = \lambda' [p] + \mu' [q] + [t] \quad (4.8)$$

que escrita en forma de sistema algebraico, se tiene:

$$x_A = p_1 \lambda' + q_1 \mu' + t_1 \quad (4.9)$$

$$y_A = p_2 \lambda' + q_2 \mu' + t_2 \quad (4.10)$$

$$y_B = p_3 \lambda' + q_3 \mu' + t_3 \quad (4.11)$$

Este sistema es más fácil de resolver que en el caso anterior (ecuación (3.8)), porque  $\lambda'$  y  $\mu'$  sólo son producto de dos variables, entonces eliminando  $\mu'$  de las ecuaciones (4.9) y (4.11), y sustituyendo en la ecuación resultante a  $\lambda'$  (de la ecuación (4.1)), se tiene que:

$$x_A = \frac{q_1 y_B + q_3 t_1 - q_1 t_3}{(p_3 q_1 - p_1 q_3) y_B + q_3} \quad (4.12)$$

y eliminando  $\lambda'$  de las ecuaciones (4.10) y (4.11) y sustituyendo en la ecuación resultante a  $\mu'$  (de la ecuación (4.2)), resulta:

$$y_A = \frac{p_2 y_B + p_3 t_2 - p_2 t_3}{(p_2 q_3 - p_3 q_2) y_B + p_3} \quad (4.13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.12) y (4.13) en las ecuaciones (4.1) y (4.2), se obtienen los valores de  $\lambda'$  y de  $\mu'$  en función de  $y_B$ , que al sustituirlos en la ecuación (4.11), resulta:

$$\begin{aligned} & (p_2 q_1 - p_1 q_2) y_B^3 + [p_1 + q_2 + p_1 (q_2 t_3 - q_3 t_2) + p_2 (q_3 t_1 - q_1 t_3) + \\ & p_3 (q_1 t_2 - q_2 t_1)] y_B^2 + [p_3 t_1 - p_1 t_3 + q_3 t_2 - q_2 t_3 - 1] y_B + t_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

que agrupando los coeficientes de  $y_B$  en:

$$\beta_4 = p_2 q_1 - p_1 q_2$$

$$\beta_3 = p_1 + q_2 + p_1(q_2 t_3 - q_3 t_2) + p_2(q_3 t_1 - q_1 t_3) + p_3(q_1 t_2 - q_2 t_1)$$

$$\beta_2 = p_3 t_1 - p_1 t_3 + q_3 t_2 - q_2 t_3 - 1$$

$$\beta_1 = t_3 \quad (4.15)$$

obtendremos un polinomio de 3er. grado en  $y_B$  que es:

$$\beta_4 y_B^3 + \beta_3 y_B^2 + \beta_2 y_B + \beta_1 = 0 \quad (4.16)$$

Este polinomio puede tener una o tres raíces reales.

Por cada raíz real de  $y_B$  que se obtenga de esta ecuación y con el valor fijado a  $x_B$ , se forman las coordenadas del punto central, B, de la diada sobre la correspondiente vertical ( $x_B = \text{constante}$ ).

Las coordenadas del punto circular, se calculan sustituyendo el valor real de  $y_B$  y las componentes de los vectores  $[p]$ ,  $[q]$  y  $[t]$ , en las ecuaciones (4.12) y (4.13).

Con cada una de las raíces reales del polinomio (4.16), se puede formar una diada. Si tiene sólo una raíz real, no es posible formar un mecanismo, pero si tiene tres, pueden formarse hasta tres mecanismos con la combinación de las tres diadas resultantes.

4.2 SEGUNDO CASO FIJANDO  $y_B$ :

En este caso la ecuación (3.1), se transforma en:

$$\begin{aligned} f: & [x_j \cos \theta'_j + (y_j - y_B) \sin \theta'_j - x_0] x_A + \\ & [(y_j - y_B) \cos \theta'_j - x_j \sin \theta'_j + y_B - y_0] y_A + \\ & [x_0 \cos \theta'_j - y_0 \sin \theta'_j - x_j] x_B + x_A x_B (1 - \cos \theta'_j) + \\ & \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2}{2} + \\ & x_B y_A \sin \theta'_j + \\ & [y_0 (y_B - y_j) - x_0 x_j] \cos \theta'_j + [x_0 (y_B - y_j) + x_j y_0] \sin \theta'_j - y_j y_B \end{aligned}$$

que linealizando mediante el cambio de variables

$$\lambda'' = x_A x_B \quad (4.17)$$

$$\mu'' = x_B y_A \quad (4.18)$$

podemos escribirla en forma matricial como:

$$[C][x] = -(\lambda'' [u'] + \mu'' [v'] + [w']) \quad (4.19)$$

donde:

$$[x] = [x_A \ y_A \ x_B]^T \quad (4.20)$$

y las componentes de la matriz [C] son:

$$c_{j1} = x_j \cos \theta'_j + (y_j - y_B) \sin \theta'_j - x_0 \quad (4.21)$$

$$c_{j2} = (y_j - y_B) \cos \theta'_j - x_j \sin \theta'_j + y_B - y_0 \quad (4.22)$$

$$c_{j3} = x_0 \cos \theta'_j - y_0 \sin \theta'_j - x_j \quad (4.23)$$

y las componentes de los vectores  $\{u'\}$ ,  $\{v'\}$ ,  $\{w'\}$ , son:

$$u'_j = 1 - \cos \theta'_j \quad (4.24)$$

$$v'_j = \frac{\text{sen } \theta'_j}{x_0^2 + y_0^2 + x_j^2 + y_j^2} \quad (4.25)$$

$$w'_j = \frac{-(x_0 x_j + y_0 (y_j - y_B)) \cos \theta'_j + [x_j y_0 - x_0 (y_j - y_B)] \text{sen } \theta'_j - y_j y_B}{2} \quad (4.26)$$

y despejando  $\{x\}$  de la misma forma que en el caso anterior, y teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} \{u\} &= -\{C\}^{-1} \{u'\} \\ \{v\} &= -\{C\}^{-1} \{v'\} \\ \{w\} &= -\{C\}^{-1} \{w'\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

la ecuación (4.19) puede escribirse matricialmente, como:

$$\{x\} = \lambda'' \{u\} + \mu'' \{v\} + \{w\} \quad (4.28)$$

o en forma de sistema algebraico:

$$x_A = u_1 \lambda'' + v_1 \mu'' + w_1 \quad (4.29)$$

$$y_A = u_2 \lambda'' + v_2 \mu'' + w_2 \quad (4.30)$$

$$x_B = u_3 \lambda'' + v_3 \mu'' + w_3 \quad (4.31)$$

Como este sistema tiene la misma forma general que las ecuaciones (4.9) y la (4.11); entonces:

$$x_A = \frac{v_1 x_B + v_3 w_1 - v_1 w_3}{(u_3 v_1 - u_1 v_3) x_B + v_3} \quad (4.32)$$

y:

$$y_A = \frac{u_2 x_B + u_3 w_1 - u_1 w_3}{(u_2 v_3 - u_3 v_1) x_B + u_3} \quad (4.33)$$

que al sustituirse en la ecuación (4.31), resulta:

$$(u_2 v_1 - u_1 v_2) x_B^3 + [u_1 + v_2 + u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2 (v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)] x_B^2 + [u_3 w_1 - u_1 w_3 + v_3 w_2 - v_2 w_3 - 1] x_B + w_3 = 0 \quad (4.34)$$

y haciendo:

$$\delta_4 = u_2 v_1 - u_1 v_2$$

$$\delta_3 = u_1 + v_2 + u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_1 v_3 w_2 - u_3 v_2 w_1 \quad (4.35)$$

$$\delta_2 = u_3 w_1 - u_1 w_3 + v_3 w_2 - v_2 w_3 - 1$$

$$\delta_1 = w_3$$

la ecuación (4.34) se transforma en el polinomio:

$$\delta_4 x_B^3 + \delta_3 x_B^2 + \delta_2 x_B + \delta_1 = 0 \quad (4.36)$$

También como el primer caso, la o las soluciones de  $x_B$  del polinomio (4.36) con la coordenada  $y_B$  supuesta, forman las coordenadas del punto central de la diada, las coordenadas del punto circular se calculan sustituyendo los valores de  $x_B$  en las ecuaciones (4.32) y (4.33).

Y de la misma forma que en el primer caso, pueden formarse hasta tres mecanismos distintos con la combinación de las tres diadas resultantes.

Al graficarse en el plano el lugar geométrico del punto central de las diadas, se pueden seleccionar fácilmente las que mejor se adaptan a las condiciones del problema.

## 5

## APLICACION PRACTICA

Toda la teoría mencionada en esta tesis tiene una amplia aplicación en el diseño de sistemas mecánicos, como los mecanismos para la apertura y cierre automáticos de tapas de hornos de fundición, en líneas de producción automáticas, automóviles y camiones de pasajeros, en aviones, también se utilizan en el transporte de barras de acero en los trenes de laminación.

#### 5.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El objetivo de este capítulo es diseñar cinemáticamente mecanismos que sustituyan al operador en el desmontaje de la llanta de refacción de los camiones ligeros (pick up) .

La obtención de estos mecanismos se hará mediante los tres métodos de síntesis descritos anteriormente:

NEWTON RAPHSON  
CUASILINEALIZACION  
CON UN GRADO DE LIBERTAD

Los mecanismos deben cumplir con las siguientes restricciones:

- Poder colocarse dentro de la parte inferior de la caja del camión.
- No tener interferencia con los elementos fijos y móviles de la unidad durante su movimiento
- No tener interferencia con el suelo.

Para poder establecer la trayectoria del movimiento de la llanta de refacción, es necesario hacer un análisis de la posibilidad de salida de la misma, teniendo en cuenta que se dispone de un área para alojar la llanta, en la parte inferior de la caja del camión, con las dimensiones mostradas en la fig. 5.1.

Si se define el origen del sistema coordenado en la posición donde la llanta de refacción esta alojada y en este punto se inicia su transportación, entonces la posición inicial es  $R_0(0,0)$  con una inclinación de  $0^\circ$ , y la final puede ser cualquiera que este en un lugar accesible en la parte posterior del vehículo como  $R_4(-0.695, -0.275)$  también con inclinación  $0^\circ$ .

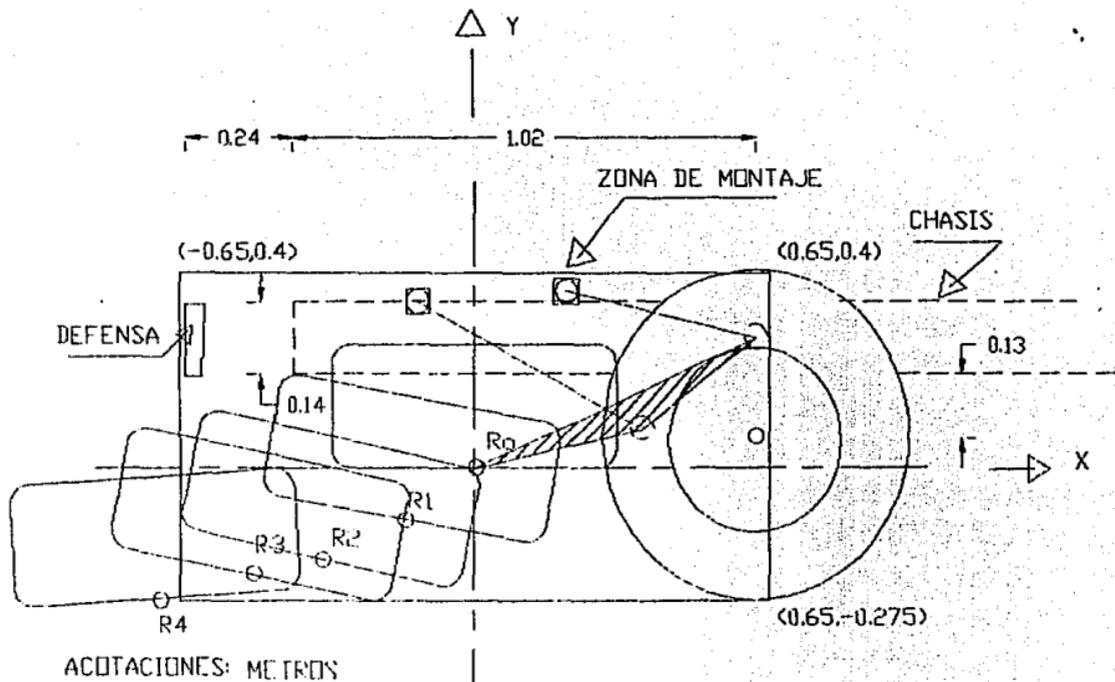


FIG. 5.1

ZONA DE MONTAJE DE LA LLANTA

Proponiendo tres puntos intermedios  $R_1(-0.155, -0.110)$ ,  $R_2(-0.340, -0.190)$  y  $R_3(-0.490, -0.220)$ , se completa la trayectoria por donde puede salir la llanta de refacción y se muestra en la tabla T 5.1. y en la Fig. 5.2 .

TABLA T 5.1 CONFIGURACION INICIAL DE LA TRAYECTORIA DE LA LLANTA DE REFACCION

Posición	x[m]	[m]	$\theta[^\circ]$
$R_0$	0	0	0
$R_1$	- 0.155	- 0.110	- 5
$R_2$	- 0.340	- 0.190	0
$R_3$	- 0.490	- 0.220	5
$R_4$	- 0.695	- 0.275	0

Por último para saber donde podemos colocar el mecanismo y por donde se puede mover, el área de alojamiento esta limitada al frente por el eje de las ruedas traseras, arriba por la caja y el chasis y abajo por el suelo, es importante tener en cuenta que los puntos centrales del mecanismo deben estar soportados en el chasis. Las dimensiones de los límites se muestran en la figura 5.3.

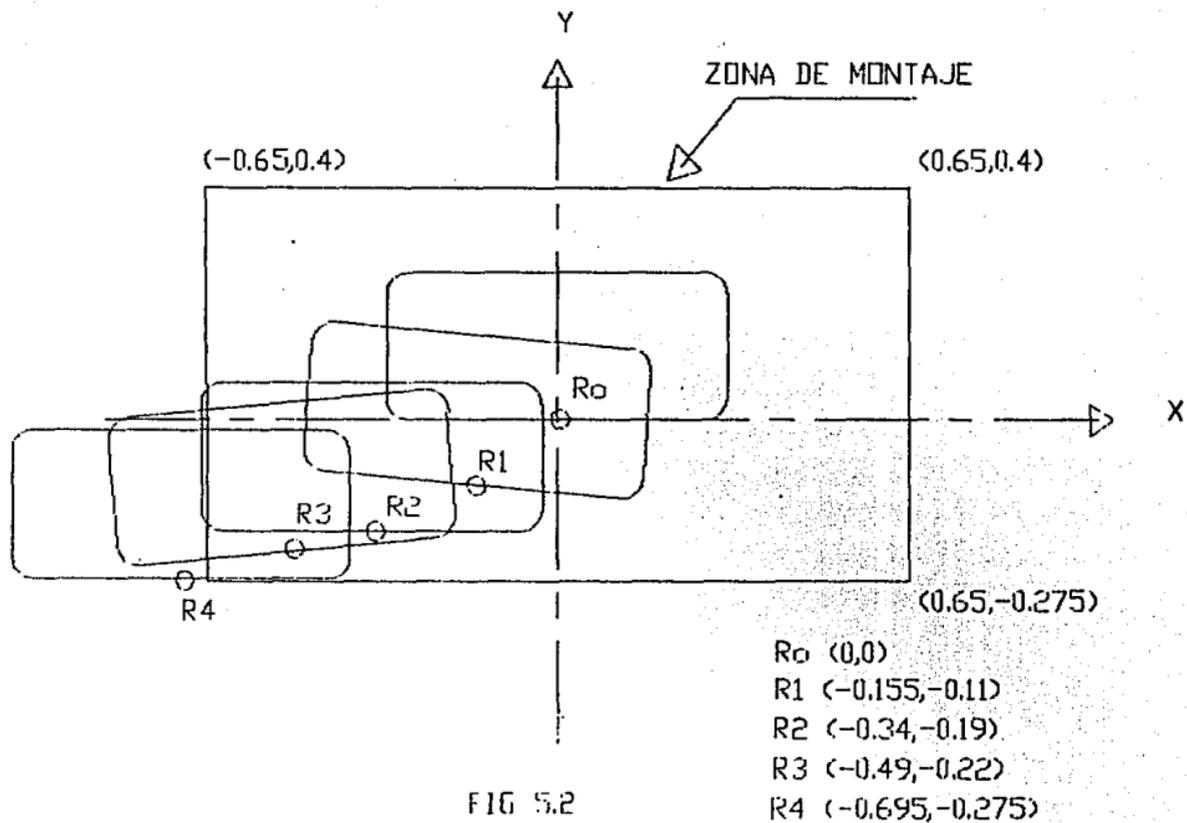


FIG 5.2

TRAYECTORIA DE SALIDA DE LA LLANTA

## 5.2 SOLUCION DEL PROBLEMA MEDIANTE EL METODO DE NEWTON RAPHSON

### 5.2.1 PRIMERA CONFIGURACION

Tomando en cuenta la ecuación (1.13) y sustituyendo en ella los valores de los puntos  $R_j$  para  $j=1, 2, 3, 4$ , de la tabla T 5.1, se observa que la ecuación se simplifica notablemente porque

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0, \text{ resultando:}$$

$$f_1 = (x_A x_B + y_A y_B) [1 \cdot \cos \theta_1] + (x_B y_A - x_A y_B) \text{sen } \theta_1 + \\ (x_1 \cos \theta_1 + y_1 \text{sen } \theta_1) x_A + (y_1 \cos \theta_1 - x_1 \text{sen } \theta_1) y_A - x_1 x_B - \\ y_1 y_B + (x_1^2 + y_1^2) / 2$$

Para  $j=1$ :

$$f_1 = (x_A x_B + y_A y_B) [1 \cdot \cos \theta_1] + (x_B y_A - x_A y_B) \text{sen } \theta_1 + \\ (x_1 \cos \theta_1 + y_1 \text{sen } \theta_1) x_A + (y_1 \cos \theta_1 - x_1 \text{sen } \theta_1) y_A - x_1 x_B - \\ y_1 y_B + (x_1^2 + y_1^2) / 2$$

Como  $\theta_2 = 0$ , entonces para  $j=2$ , se tiene:

$$f_2 = x_2 (x_A - x_B) + y_2 (y_A - y_B) + (x_2^2 + y_2^2) / 2$$

Para  $j=3$ :

$$f_3 = (x_A x_B + y_A y_B) [1 \cdot \cos \theta_3] + (x_B y_A - x_A y_B) \text{sen } \theta_3 + \\ (x_3 \cos \theta_3 + y_3 \text{sen } \theta_3) x_A + (y_3 \cos \theta_3 - x_3 \text{sen } \theta_3) y_A - \\ x_3 x_B - y_3 y_B + (x_3^2 + y_3^2) / 2$$

Como  $\theta_4 = 0$ , entonces para  $j=4$ :

$$f_4 = x_4 (x_A - x_B) + y_4 (y_A - y_B) + (x_4^2 + y_4^2) / 2$$

Aplicando el algoritmo de Newton-Raphson (ecuación 2.4), con los valores iniciales de los puntos A(x<sub>A</sub>, y<sub>A</sub>) y B(x<sub>B</sub>, y<sub>B</sub>); x<sub>A</sub>= 2, y<sub>A</sub>= 1, x<sub>B</sub>= 1.5, y<sub>B</sub>= 1.3, se obtiene la ecuación matricial para la primera iteración que es:

$$\begin{bmatrix} -0.0258 & -0.2488 & 0.0754 & 0.2881 \\ -0.34 & -0.19 & 0.34 & 0.19 \\ -0.6149 & -0.0407 & 0.5847 & 0.0494 \\ -0.695 & -0.275 & 0.695 & 0.275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_A \\ \Delta y_A \\ \Delta x_B \\ \Delta y_B \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} 0.0930 \\ -0.0371 \\ -0.1053 \\ 0.0149 \end{bmatrix}; \text{ de donde } |f(x)| = 0.14608$$

Se aplica la descomposición [L][U], y su determinante es:

$$\det [L][U] = 6.227 * 10^{-5}$$

pero:

$$\det [A] = \det [L][U] \text{ entonces:}$$

$$\det [A] = 6.2272 * 10^{-5}$$

y su solución es:

$$[\Delta x] = \begin{bmatrix} -7.9723 \\ 2.5142 \\ -8.3079 \\ 3.3104 \end{bmatrix} = 12.2418$$

Pero:  $x$  nuevo =  $x$  inicial +  $\bar{u} \Delta x$ , por lo tanto, para  $\bar{u} = 1$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1.5 \\ 1.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7.9723 \\ 2.5142 \\ -8.3079 \\ 3.3104 \end{bmatrix}$$

y los nuevos valores de  $[x]$  son:

$$x_A = -5.9737$$

$$y_A = 3.5142$$

$$x_B = -6.8079$$

$$y_B = 4.6104$$

El proceso iterativo de Newton-Raphson se repite hasta que  $\Delta x < 10^{-3}$  y  $f(x_k) < 10^{-6}$ , en caso contrario, el proceso diverge y debe amortiguarse (ver la tabla T 5.2).

TABLA T 5.2 PRIMERA RAIZ DE LA CONDUCCION DE LA LLANTA.

Iter.	$\Delta x$	$x_A$	$y_A$	$x_B$	$y_B$	$ f(x_k) $
Inic.	----	2	1	1.5	1.3	0.14608
1	12.2410	-5.9723	3.5142	-6.8079	4.6104	0.78807*

\*Como el proceso diverge, se amortigua con  $\alpha = |f(x_0)|/|f(x_1)|$

2	7.863	-2.006	3.089	-2.842	4.185	0.19014
3	3.482	-0.59	1.075	-1.425	2.171	0.03263
4	1.096	-0.297	0.357	-1.133	1.453	0.00323
5	0.135	-0.261	0.269	-1.097	1.365	0.00005
6	0.002	-0.261	0.267	-1.096	1.363	$10^{-8}$

Los valores de la última iteración en la tabla anterior son las coordenadas de los puntos de una de las diadas del mecanismo. A(- 0.261, 0.267) y B(- 1.096, 1.363)

Para obtener la segunda diada del mecanismo, se inicia nuevamente el proceso iterativo de NR con otros valores distintos y distantes de los anteriores:  $x_A = 2$ ,  $y_A = -3$ ,  $x_B = 4$ ,  $y_B = -5$ . Las iteraciones se muestran en la tabla T 5.3.

TABLA T 5.3 SEGUNDA RAIZ DE LA CONDUCCION DE LA LLANTA.

Iter.	$\Delta x$	$x_A$	$y_A$	$x_B$	$y_B$	$ f(x_k) $
Inic.	----	2	- 3	4	- 5	1.3287
1	3.3703	3.1914	- 3.4426	2.3557	- 2.3465	0.3004
2	4.7369	2.5929	- 6.7383	1.7573	- 5.6422	0.0604
3	1.7536	2.1251	- 5.5899	1.2895	- 4.4938	0.0083
4	0.3311	2.0368	- 5.3730	1.2012	- 4.2769	0.0003
5	0.0127	2.0334	- 5.3647	1.1978	- 4.265	$4 \times 10^{-7}$
6	0.0000	2.0334	- 5.3647	1.1978	- 4.2686	

Y las coordenadas de los puntos de la 2a. diada son: A(2.033,-5.364), B(1.198,-4.269)

El mecanismo formado con estas dos diadas, se muestra en la fig. (5.4).

En esta figura se observa que el mecanismo tiene sus barras con dimensiones mayores que las del área de montaje, por tanto, es necesario buscar otros mecanismos con dimensiones tales que puedan moverse dentro de ella.

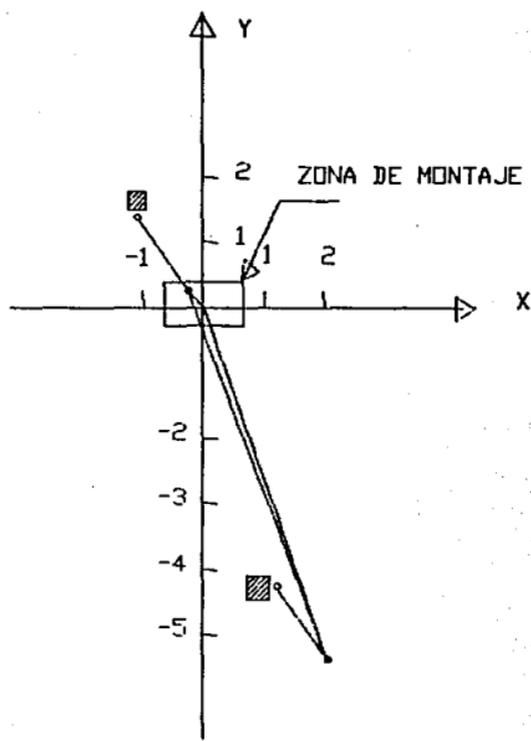


FIG 5.4  
 MECANISMO PARA GENERAR  
 LA PRIMERA CONFIGURACION

Una alternativa para poder obtener soluciones distintas a la anterior, con el objeto de ver cual es el mecanismo que cumpla con las limitantes de espacio disponible y que no tenga interferencia con ninguna parte del camión, sería cambiar algunos de los parámetros de la trayectoria, pero de tal forma que ésta no se altere sensiblemente, y comparar el o los mecanismos resultantes con el anterior hasta encontrar el más adecuado.

## 5.2.2 SEGUNDA CONFIGURACION

Los parámetros de una trayectoria alterna, donde sólo se modifican los ángulos de inclinación de cuerpo rígido, con respecto a los puntos de la trayectoria original, se muestran en la tabla T5.4.

TABLA T 5.4 SEGUNDA CONFIGURACION PROPUESTA.

Posición	x[m]	y[m]	$\theta$ [°]
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 10
R <sub>2</sub>	- 0.340	- 0.190	- 12
R <sub>3</sub>	- 0.490	- 0.220	- 11
R <sub>4</sub>	- 0.695	- 0.275	4

La solución de la ecuación de síntesis con estos nuevos parámetros de la trayectoria, iniciando el ciclo iterativo de Newton Raphson con  $x_A = 2$ ;  $y_A = 1$ ;  $x_B = 1.5$ ;  $y_B = 1.3$ , se obtiene en tabla T 5.5.

TABLA T 5.5 OBTENCION DE LA PRIMERA RAIZ DE LA SEGUNDA CONFIGURACION PROPUESTA.

Iter.	$\Delta x$	$x_A$	$y_A$	$x_B$	$y_B$	$ f(x_k) $
Inicio	---	2	1	1.5	1.3	0.48134
1	1.642	1.032	0.396	0.585	0.553	0.09969
2	0.352	0.803	0.332	0.392	0.380	0.01104
3	0.075	0.841	0.364	0.446	0.369	0.00068
4	0.008	0.837	0.361	0.441	0.369	$5 \times 10^{-6}$

de donde las coordenadas de los puntos de la primera diada son: A(0.837, 0.361), B(0.441, 0.369).

Para obtener la segunda raíz, se hace una segunda serie de iteraciones con otros valores iniciales, mismos que aparecen tabulados en la Tabla T 5.6

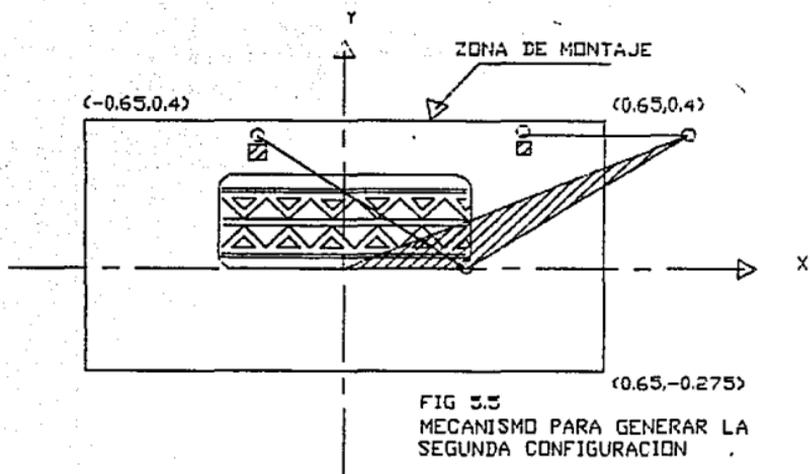
TABLA T 5.6 OBTENCIÓN DE LA 2A. RAÍZ DE LA SEGUNDA CONFIGURACION.

Iter.	$\Delta x$	$x_A$	$y_A$	$x_B$	$y_B$	$ f(x_k) $
Inicio	---	1	- 1	- 1	1	0.71546
1	1.786	0.175	0.057	- 0.239	0.098	0.07106
2	0.620	0.579	0.168	0.100	0.403	0.0344
3	1.867	- 0.510	- 0.546	- 1.237	0.358	0.2603
f(x <sub>k</sub> )  crece, el proceso se amortigua con $\alpha = 0.13216$						
4	0.99	- 0.089	- 0.251	- 0.700	0.340	0.08394
5	0.477	0.191	- 0.070	- 0.359	0.356	0.01635
6	0.163	0.285	- 0.006	- 0.242	0.357	0.00144
7	0.028	0.301	0.004	- 0.222	0.357	$6 * 10^{-5}$
8	0.000	0.301	0.005	- 0.222	0.357	$5 * 10^{-8}$

y las coordenadas de los puntos de la 2a. diada son: A\*(0.301, 0.005), B\*(-0.222, 0.357), obteniéndose el mecanismo de la figura 5.5.

Este mecanismo aunque es de dimensiones menores que el anterior, su punto circular A está fuera de la zona permisible y presenta interferencia,

Sin embargo, el cambio en las dimensiones del mecanismo nos permite suponer que éstas son sensibles a pequeños cambios en la trayectoria.



### 5.2.3 ENESIMA CONFIGURACION.

Esta suposición podrá comprobarse después de hacer varias modificaciones a los parámetros de la trayectoria original y llegar a la n-ésima mostrada en la tabla T 5.7.

TABLA T 5.7 ENESIMA CONFIGURACION

Posición	x[m]	y[m]	$\theta$ [°]
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 9.8
R <sub>2</sub>	- 0.340	- 0.190	- 12.2
R <sub>3</sub>	- 0.490	- 0.220	- 11.2
R <sub>4</sub>	- 0.695	- 0.275	3.6

Para obtener las diadas del mecanismo, nuevamente por el método de Newton-Raphson se obtiene la tabla T 5.8.

TABLA T 5.8 PRIMERA RAIZ DE LA ENESIMA CONFIGURACION

Iter.	$\Delta x$	x <sub>A</sub>	y <sub>A</sub>	x <sub>B</sub>	y <sub>B</sub>	f(x <sub>k</sub> )
Inicio	---	2	1	1.5	1.3	0.48670
1	1.701	0.618	0.215	0.196	0.375	0.09983
2	0.535	0.633	0.279	0.196	0.379	0.01186
3	0.028	0.618	0.267	0.193	0.356	0.00012
4	0.002	0.619	0.268	0.194	0.356	5 * 10 <sup>-7</sup>
5	0.000	0.619	0.258	0.194	0.356	2 * 10 <sup>-11</sup>

En la quinta iteración se obtienen las coordenadas de la primera diada.

Asimismo, para la segunda diada, se obtiene la tabla T 5.9.

TABLA T 5.9 SEGUNDA RAZ DE LA ENESIMA CONFIGURACION

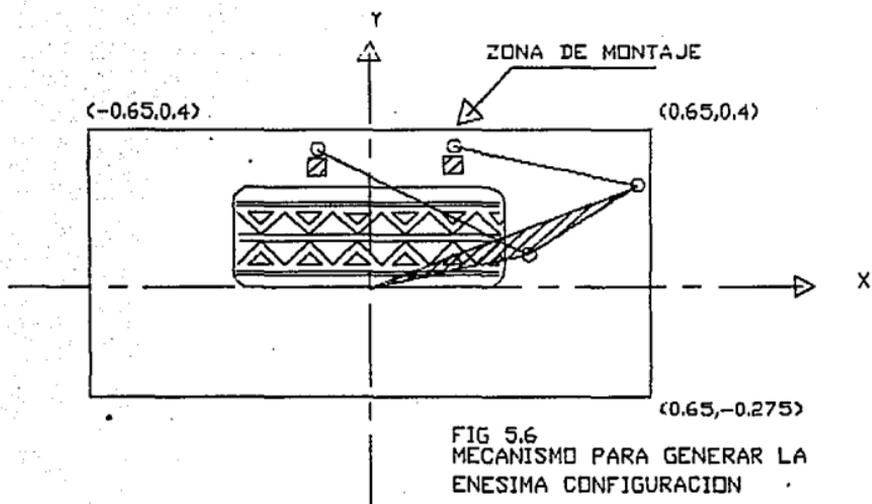
Iter.	$\Delta x$	$x_A$	$y_A$	$x_B$	$y_B$	$ f(x_k) $
Inicio	---	1	- 1	- 1	1	0.70821
1	1.912	0.148	0.167	0.201	0.036	0.09638
2	0.997	- 0.302	- 0.335	- 0.908	0.234	0.14373*
* El proceso se amortigua con $\alpha = 0.67051$						
3	0.918	- 0.123	- 0.255	- 0.724	0.303	0.09414
4	0.541	0.197	- 0.048	- 0.343	0.349	0.01769
5	0.214	0.315	0.044	- 0.190	0.346	0.00435
6	0.079	0.360	0.077	- 0.134	0.348	0.00051
7	0.013	0.367	0.082	- 0.124	0.348	$10^{-5}$
8	0.000	0.367	0.082	- 0.124	0.348	$10^{-8}$

En la octava iteración se obtienen las coordenadas de la segunda diada.

Por lo que las coordenadas de las diadas del mecanismo son: A(0.619, 0.268), B(0.194, 0.356) y A\*(0.367, 0.082), B\*(-0.124, 0.348) y se muestra en la figura 5.6.

Como se puede observar éste mecanismo tiene todas sus dimensiones dentro del rango del área permisible, cumple con todas las condiciones de movilidad y no tiene interferencia.

La gran sensibilidad que tienen las diadas de estos mecanismos a pequeños cambios de los parámetros de la trayectoria, nos permite obtener un gran número de mecanismos solución para poder compararlos y escoger los que mejor cumplan con las condiciones de diseño.



**CONCLUSIONES.**

Tomando en cuenta todos los mecanismos obtenidos en esta Síntesis, se observa que:

- 1.- No se obtiene mecanismo alguno cuando se desea que la inclinación del C.R. sea constante, porque la matriz Jacobiana tiene determinante cero, y el vector genera un sistema inconsistente.
- 2.- Sin variar la trayectoria, esto es, solo modificando los ángulos de inclinación del cuerpo conducido, se obtienen variaciones considerables en las dimensiones de los mecanismos, es decir, las dimensiones de las barras de los mecanismos son sensibles a pequeños cambios en la inclinación del cuerpo.
- 3.- Haber encontrado un mecanismo que cumpla con las necesidades de operación, no implica que sea el mejor de todos los mecanismos que cumplan, ya que este procedimiento no permite ver todos los mecanismos que lo hacen, pues depende mucho de la solución a la que converge el proceso.



con

$$\begin{aligned}c'_1 &= \text{sen } (-5) \\d'_1 &= 1 - \cos (-5) \\e'_1 &= \frac{(-0.155)^2 + (-0.110)^2}{2}\end{aligned}$$

e introduciendo los cambios de variable (3.6) y (3.7),

$$f_1 = -0.1448 x_A - 0.123 y_A + 0.155 x_B + 0.11 y_B + \lambda c'_1 + \mu d'_1 + e'_1$$

donde:

$$\lambda = x_B y_A - x_A y_B$$

$$\mu = x_A x_B + y_A y_B$$

De la misma forma, para  $j=2$ ,

$$f_2 = -0.34 x_A - 0.19 y_A + 0.34 x_B + 0.19 y_B + 0.0758$$

$$c'_2 = \text{sen } 0$$

$$d'_2 = 1 - \cos 0$$

$$e'_2 = 0.0758$$

y de manera análoga, para  $j=3$ :

$$f_3 = -0.5073 x_A - 0.1764 y_A + 0.49 x_B + 0.22 y_B + \lambda (0.0871) + \mu (0.0038) + 0.1442$$

$$c'_3 = \text{sen } 5$$

$$d'_3 = 1 - \cos 5$$

$$e'_3 = 0.1442$$

Y también, para  $j = 4$ :

$$f_4 = -0.695x_A - 0.275y_A + 0.695x_B + 0.275y_B + 0.2793$$

$$c'_4 = \text{sen } 0$$

$$d'_4 = 1 - \text{cos } 0$$

$$e'_4 = 0.2793$$

Estas cuatro ecuaciones expresadas en la forma de la ecuación matricial (3.5) quedan:

$$\begin{bmatrix} -0.1448 & -0.123 & 0.155 & 0.11 \\ -0.34 & -0.19 & 0.34 & 0.19 \\ -0.5073 & -0.1764 & 0.49 & 0.22 \\ -0.695 & -0.275 & 0.695 & 0.275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0.0871 \\ 0 \\ 0.0871 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \mu \begin{bmatrix} 0.0038 \\ 0 \\ 0.0038 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0180 \\ 0.0758 \\ 0.1442 \\ 0.2793 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es la ecuación de Síntesis, linealizada.

En la expresión anterior, se podrá despejar al vector  $[x]$ , siempre y cuando la matriz  $[A]$  sea invertible, lo cual se investiga calculando su determinante, por medio de la descomposición Gaussiana,  $[L][U]$ , de la matriz  $[A]$ , por lo tanto:

$$\det [A] = \det [U]$$

y

$$\det [U] = 8.347 \times 10^{-6}, \text{ entonces:}$$

$$\det [A] = 8.347 \cdot 10^{-6}$$

Como el  $\det[A] \neq 0$ , entonces el vector  $[x]$  se puede despejar, según la ecuación (3.17), mediante los cambios de variable (3.14), (3.15) y (3.16) utilizando la descomposición  $[L][U]$  de la matriz  $[A]$ :

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.3476 & 1 & 0 & 0 \\ 3.5029 & 2.5735 & 1 & 0 \\ 4.7989 & 3.1896 & 3.2091 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} -0.1448 & -0.1230 & 0.155 & 0.11 \\ 0 & 0.0989 & -0.0238 & -0.0682 \\ 0 & 0 & 0.0085 & 0.0103 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0682 \end{bmatrix}$$

Para evitar el cálculo de la matriz inversa de  $[A]$ , se aplica sucesivamente:

$$[L][U][c] = -[c']$$

$$[L][U][d] = -[d']$$

$$[L][U][e] = -[e']$$

Haciendo la eliminación anterior y la sustitución posterior para los vectores  $c$ ,  $d$  y  $e$ , la ecuación de síntesis linealizada es:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 12.2566 \\ 2.8707 \\ 12.2566 \\ 2.8707 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -0.9952 \\ -0.4830 \\ -0.9952 \\ -0.4830 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3780 \\ 0.4022 \\ -1.2137 \\ 2.4983 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Sustituyendo los valores  $x_A, y_A, x_B, y_B$  de esta ecuación matricial en la (3.6), se obtiene la ecuación (A.10), (ver apéndice A)

$$r_1\mu^2 + (r_2\lambda + r_3)\mu + r_4\lambda^2 + r_5\lambda + r_6 = 0 \quad (3.18)$$

donde  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$  son valores que agrupan los vectores  $c, d, e$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$  y se calculan según las ecuaciones (A.4) hasta la (A.9):

$$r_1 = 6.54 * 10^{-11}$$

$$r_2 = - 1.729 * 10^{-9}$$

$$r_3 = 1.4944$$

$$r_4 = 1.031 * 10^{-8}$$

$$r_5 = - 16.8334$$

$$r_6 = 7.8307 * 10^{-2}$$

y sustituyendo los valores de  $r_i$ , la ecuación queda:

$$6.54 * 10^{-11} \mu^2 + (- 1.729 * 10^{-9} \lambda + 1.4944) \mu + 1.031 * 10^{-8} \lambda^2 - 16.833 \lambda + 7.830 * 10^{-2} = 0 \quad (3.18)$$

Al sustituir nuevamente los valores  $x_A, y_A, x_B, y_B$  de la ecuación matricial, pero ahora en la ecuación (3.7), se obtiene la ecuación (3.19):

$$s_1\mu^2 + (s_2\lambda + s_3)\mu + s_4\lambda^2 + s_5\lambda + s_6 = 0 \quad (3.19)$$

donde  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$  son coeficientes que agrupan los componentes de los vectores  $c, d, e$ , y se calculan aplicando las ecuaciones de la (A.12) a la (A.17):

$$\begin{aligned} s_1 &= 1.2237 \\ s_2 &= -27.1672 \\ s_3 &= -0.3338 \\ s_4 &= 158.4677 \\ s_5 &= -14.0539 \\ s_6 &= 1.0615 \end{aligned}$$

y con estos factores la ecuación (3.19) queda:

$$1.2237 \mu^2 + (-27.6672 \lambda - 0.3338) \mu + 158.4677 \lambda^2 - 14.539 \lambda + 1.016 = 0$$

Al hacer simultaneas estas dos últimas ecuaciones para obtener los valores de  $\lambda$  y  $\mu$  que las satisfacen, resulta el polinomio (4.20) en  $\lambda$ :

$$\alpha_5 \lambda^4 + \alpha_4 \lambda^3 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_1 = 0$$

donde  $\alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$  son los coeficientes del polinomio de cuarto grado y agrupan los valores  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ .

Los valores de  $\alpha_5$  a  $\alpha_1$  se calculan según las ecuaciones de la (A.33) a la (A.37), de donde:

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= -3.000 * 10^{-18} \\ \alpha_4 &= 6.8681 * 10^{-9} \\ \alpha_3 &= -21.0444 \\ \alpha_2 &= 48.7461 \\ \alpha_1 &= -2.9584 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de  $\alpha_5, \dots, \alpha_1$ , en la ecuación (4.20) obtenemos:

$$\begin{aligned} & - 3.000 * 10^{-18} \lambda^4 + 6.868 * 10^{-9} \lambda^3 - 21.0444 \lambda^2 \\ & + 48.7460 \lambda - 2.9584 = 0 \end{aligned}$$

Como  $3 * 10^{-18}$  y  $6.868 * 10^{-9}$  son valores pequeños comparados con 21, 48, y 2.95, la ecuación se reduce a:

$$- 21.0444 \lambda^2 + 48.7460 \lambda - 2.9584 = 0$$

y sus soluciones son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6.236 * 10^{-2} \\ \lambda_2 &= 2.2540 \end{aligned}$$

Ahora bien, para obtener los valores de  $\mu$ , se sustituyen los valores de  $\lambda$  en la ecuación (3.18).

y al sustituir el valor  $\lambda_1 = 6.236 * 10^{-2}$  en la ecuación (3.18)':

$$\begin{aligned} \mu_a &= 0.642 \\ \mu_b &= - 2.2851 * 10^{10} \end{aligned}$$

y sustituyendo nuevamente  $\lambda_1$  pero en la ecuación (3.19) :

$$\begin{aligned} \mu_c &= 1.0073 \\ \mu_d &= 0.650 \end{aligned}$$

La solución es la raíz  $\mu$  que satisfaga simultáneamente las ecuaciones (3.18) y (3.19):

$$\mu_a \text{ es aprox} = \mu_1 = 0.65$$

es decir:

$\mu_1 = 0.65$  es el valor de  $\mu$  correspondiente a  $\lambda_1 = 6.236 * 10^{-2}$  que satisfacen estas dos ecuaciones.

Al sustituir  $\lambda_2$  en las ecuaciones (3.18) y (3.19) y obtener sus respectivas raíces, el valor común de  $\mu$  es:

$$\mu_2 = 25.3286 \text{ para } \lambda_2 = 2.2540$$

Por lo que al sustituir  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  en la ecuación de síntesis linealizada, (ec. 3.17), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix} = 6.236 * 10^{-2} \begin{bmatrix} 12.2566 \\ 2.8707 \\ 12.25666 \\ 2.8707 \end{bmatrix} + 0.4461 \begin{bmatrix} -0.9952 \\ -0.4830 \\ -0.9952 \\ -0.4830 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -0.3780 \\ 0.4022 \\ -1.2137 \\ 1.4983 \end{bmatrix}$$

de donde las componentes del vector  $[x]_1$  son:

$$\begin{aligned} x_A &= -0.2566 \\ y_A &= 0.2692 \\ x_B &= -1.0922 \\ y_B &= 1.3653 \end{aligned}$$

Y al sustituir los valores  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$  en la ecuación (3.17), se obtiene el vector  $[x]_2$

$$x_A = 2.0409$$

$$y_A = - 5.3611$$

$$x_B = 1.2053$$

$$y_B = - 4.2650$$

Las soluciones obtenidas son las coordenadas de los puntos circular y central  $A_1(-0.256, 0.269)$ ,  $B_1(-1.092, 1.365)$  y  $A_2(2.040, -5.361)$ ,  $B_2(1.205, -4.265)$  que al conectarse forman la diadas del mecanismo .

Lo anterior nos indica que la solución representa un solo mecanismo, ya que la barra acopladora se obtiene conectando los puntos circulares  $A_1$  y  $A_2$  y la barra fija conectando los puntos centrales  $B_1$  y  $B_2$ .

Para tener facilidad de la lectura de los resultados, el resumen de los mismos se muestra en la tabla T 5.10 .

TABLA T 5.10 MECANISMO OBTENIDO PARA LA PRIMERA CONFIGURACION

Diada	$x_A$	$y_A$	$x_B$	$y_B$
1	- 0.256	0.269	- 1.092	1.365
2	2.040	- 5.361	1.205	- 4.265

Como las coordenadas de los puntos centrales de las dos diadas y el punto circular de la segunda quedan fuera de la zona de montaje, el mecanismo resultante también queda afuera (ver fig 5.4)

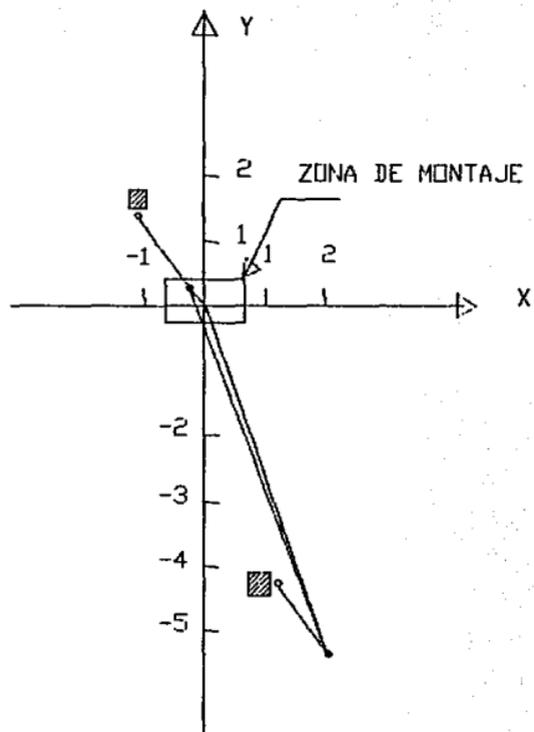


FIG 5.4  
 MECANISMO PARA GENERAR  
 LA PRIMERA CONFIGURACION

## 5.3.2 SOLUCION DE LA 2DA. CONFIGURACION PROPUESTA

Así como en el método iterativo de N.R., para obtener otro u otros mecanismos se modificaron los ángulos de inclinación del cuerpo rígido, pero conservando la misma trayectoria, en este caso se utilizan los mismos parámetros ( ver tabla T 5.4) para comparar las soluciones.

TABLA T 5.4 SEGUNDA CONFIGURACION

Posición	x[m]	y[m]	$\theta(^{\circ})$
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 10
R <sub>2</sub>	- 0.340	- 0.190	- 12
R <sub>3</sub>	- 0.490	- 0.220	- 11
R <sub>4</sub>	- 0.695	- 0.275	4

Siguiendo los mismos pasos de cálculo que para la primera trayectoria, se obtienen las diadas para la segunda configuración, mostradas en la tabla T 5.11.

TABLA T 5.11 DIADAS PARA LA SEGUNDA CONFIGURACION

Diada	x <sub>A</sub>	y <sub>A</sub>	x <sub>B</sub>	y <sub>B</sub>
1	2.146	- 5.653	- 4.973	13.404
2	0.836	0.361	0.440	0.369
3	- 2.140	- 0.920	- 2.532	1.028
4	0.300	0.004	- 0.222	0.358

Como los límites de la zona de montaje son:

$$-0.65 \leq x \leq 0.65; \quad -0.275 \leq y \leq 0.4$$

Entonces la única diada que está dentro de la zona es la cuarta, (ver figura 5.7).

Pero como se necesitan dos diadas para construir un mecanismo, y solamente se tiene una, no existe un mecanismo solución para esta trayectoria que esté dentro de la zona de montaje (fig. 5.7).

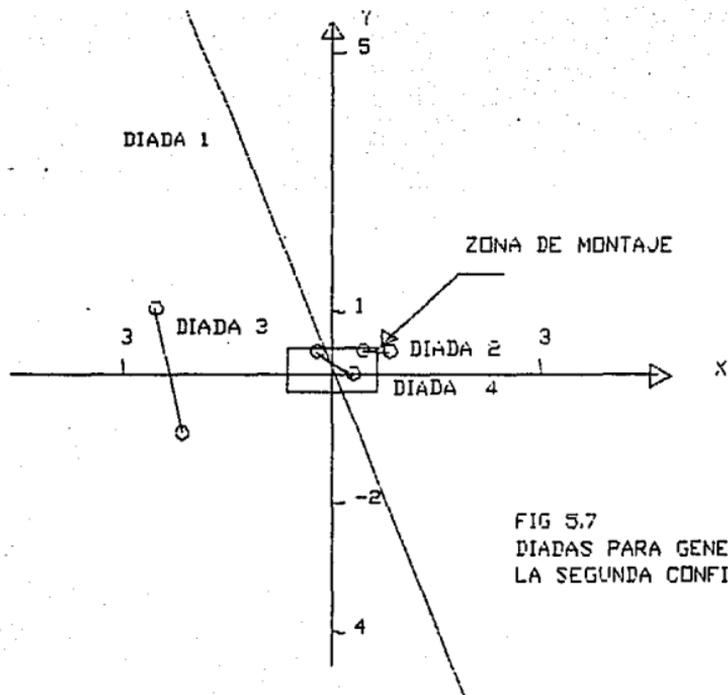


FIG 5.7  
 DIADAS PARA GENERAR  
 LA SEGUNDA CONFIGURACION

### 5.3.3 SOLUCION MEDIANTE CUASILINEALIZACION PARA LA N-ESIMA CONFIGURACION

De manera análoga al método anterior, para obtener al menos una solución, se modificaron algunos parámetros de la trayectoria, obteniendo los parámetros de la tabla T 5.7.

TABLA T.5.7 N-ESIMA CONFIGURACION

Posición	x[m]	y[m]	$\theta$ [°]
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 9.8
R <sub>2</sub>	- 0.340	- 0.190	-12.2
R <sub>3</sub>	- 0.490	- 0.220	-11.2
R <sub>4</sub>	- 0.695	- 0.275	3.6

Y haciendo los mismos cálculos que en los casos anteriores, se obtienen las diadas que se muestran en la tabla siguiente:

TABLA T 5.12 DIADAS PARA LA N-ESIMA CONFIGURACION.

Diada	x <sub>A</sub>	y <sub>A</sub>	x <sub>B</sub>	y <sub>B</sub>
1	2.015	- 5.279	- 3.398	8.570
2	0.619	0.268	0.194	0.356
3	0.367	0.082	- 0.124	0.348
4	- 1.981	- 0.731	- 2.344	- 0.863

De la combinación de éstas cuatro diadas se pueden formar seis mecanismos pero, el único que cabe dentro del espacio disponible, es el formado por la segunda y la tercera diadas, que son las que están dentro de la zona de montaje,  $- 0.65 < x < 0.65$ ;  $- 0.275 < y < 0.4$ .

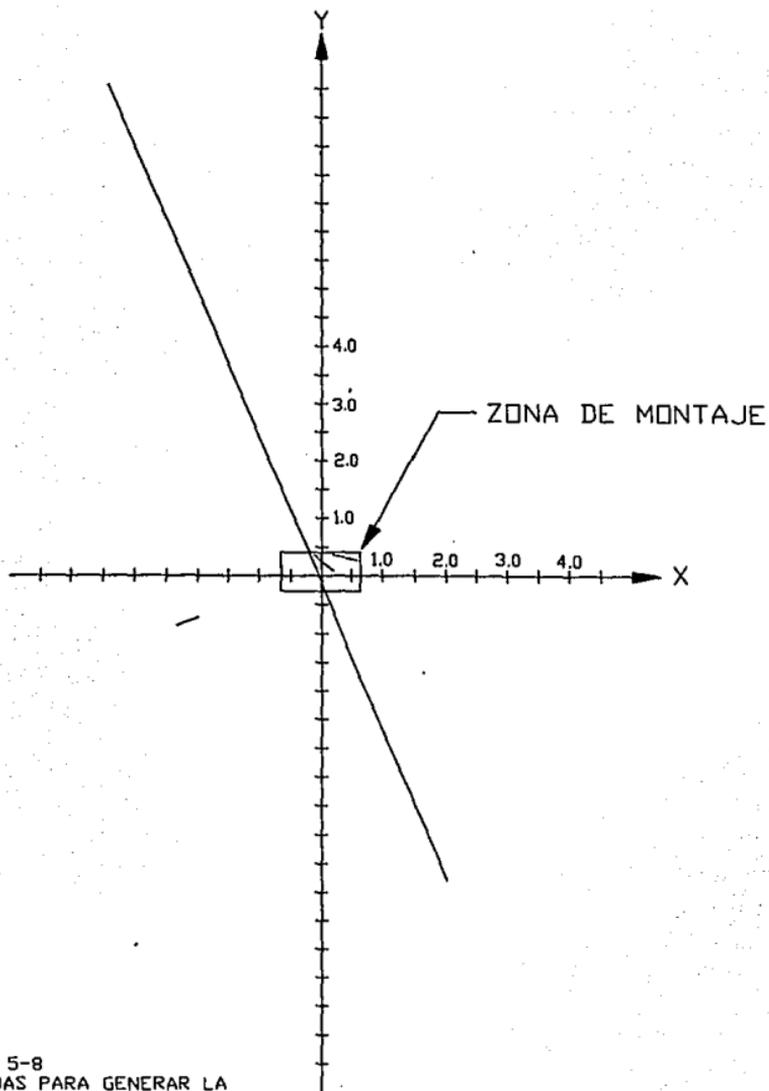


FIG. 5-8  
DIADAS PARA GENERAR LA  
ENESIMA CONFIGURACION.

Como se observa, esta solución coincide con la obtenida por el método iterativo (ver figura 5.6 y tablas T5.8 y T5.9), lo que muestra que con éstos dos métodos se obtienen los mismos mecanismos.

#### CONCLUSIONES.

Bajo esta forma de solución, si la matriz  $[A]$  de la ecuación de Síntesis, es invertible, se obtiene:

- 1.- Ningún mecanismo si el polinomio tiene sus 4 raíces complejas.
- 2.- Un solo mecanismo, si el polinomio tiene dos raíces reales.
- 3.- Hasta 6 mecanismos posibles, si el polinomio tiene sus cuatro raíces reales.

Este método tiene la ventaja de que si existe solución, se sabe cuantas son, sin tener que iterar, en comparación con el método iterativo, el cual, puede converger o no a la solución, ignorando desde un principio cuantas diadas existen.

## 5.4 SOLUCION DEL PROBLEMA MEDIANTE CUASILINELIZACION CON UN GRADO DE LIBERTAD

### 5.4.1 PRIMERA CONFIGURACION

Para aplicar este método, en la solución de la ecuación de Síntesis de mecanismos para la primera trayectoria propuesta (tabla T 5.1), se consideran 4 de las 5 posiciones del cuerpo rígido, y se muestran en la tabla T 5.13.

TABLA T. 5.13 POSICIONES PARA LA PRIMERA CONFIGURACION

Posición	x[m]	y[m]	$\theta$ [°]
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 5
R <sub>2</sub>	- 0.490	- 0.220	5
R <sub>3</sub>	- 0.695	- 0.275	0

#### 5.4.1.1 PRIMER CASO, FIJANDO $x_B$ :

La ecuación de Síntesis linealizada en forma matricial para este caso es la ecuación ( 4.3):

$$[B]\{x\} + \lambda' \{p'\} + \mu' \{q'\} + \{t'\} = 0$$

donde:

$$\lambda' = x_A y_B$$

$$\mu' = y_A y_B$$

y las componentes de  $\{B\}$ ,  $\{p'\}$ ,  $\{q'\}$  y  $\{t'\}$  dadas por las ecuaciones de la (4.4) a la (4.7) son:

Para la matriz [B]:

$$b_{j1} = (1 - \cos \theta_j) x_B + x_j \cos \theta_j + y_j \operatorname{sen} \theta_j$$

$$b_{j2} = (\operatorname{sen} \theta_j) x_B + y_j \cos \theta_j - x_j \operatorname{sen} \theta_j$$

$$b_{j3} = -y_j,$$

resultando su primer renglón:

$$\begin{aligned} b_{11} &= (1 - \cos (-5)) x_B - 0.155 \cos (-5) - 0.110 \operatorname{sen} (-5) \\ &= 0.0038 x_B - 0.1448 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= (\operatorname{sen} (-5)) x_B - 0.110 \cos (-5) + 0.155 \operatorname{sen} (-5) \\ &= -0.0871 x_B - 0.1231 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$b_{13} = 0.110. \quad (5.3)$$

luego, el segundo renglón es:

$$\begin{aligned} b_{21} &= (1 - \cos 5) x_B - 0.490 \cos 5 - 0.220 \operatorname{sen} 5 \\ &= 0.0038 x_B - 0.5073 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} b_{22} &= (\operatorname{sen} 5) x_B - 0.220 \cos 5 + 0.490 \operatorname{sen} 5 \\ &= 0.0871 x_B - 0.1764 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$b_{23} = 0.220 \quad (5.6)$$

y de manera análoga, para el tercer renglón:

$$b_{31} = -0.695 \quad (5.7)$$

$$b_{32} = -0.275 \quad (5.8)$$

$$b_{33} = 0.275 \quad (5.9)$$

o bien, sustituyendo los parámetros de la trayectoria:

$$p'_1 = -\operatorname{sen}(-5) \\ = 0.0871 \quad (5.10)$$

$$p'_2 = 0.0871 \quad (5.11)$$

$$p'_3 = 0 \quad (5.12)$$

Para  $\{q'\}$ :

$$q'_j = 1 - \cos \theta_j$$

y sustituyendo valores:

$$q'_1 = 1 - \cos(-5) \\ = 0.0038 \quad (5.13)$$

$$q'_2 = 0.0038 \quad (5.14)$$

$$q'_3 = 0 \quad (5.15)$$

Para  $\{t'\}$ :

$$t'_j = \frac{x_j^2 + y_j^2}{2} - x_j x_B$$

donde:

$$t'_1 = 0.0180 + 0.155 x_B \quad (5.16)$$

$$t'_2 = 0.1442 + 0.49 x_B \quad (5.17)$$

$$t'_3 = 0.2793 + 0.695 x_B \quad (5.18)$$

Como todas estas expresiones (5.1 a 5.18) están en función de  $x_B$ , que es la variable libre, podemos calcular cada una de ellas, asignándole valores aleatorios a  $x_B$ , y sustituyéndolos en la ecuación (4.3), obteniéndose la ecuación linealizada de Síntesis:

Para  $x_B = -0.650$  la ecuación linealizada es:

$$\begin{bmatrix} -0.1472 & -0.0644 & 0.11 \\ -0.5097 & -0.2338 & 0.22 \\ -0.695 & -0.275 & 0.275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ y_B \end{bmatrix} + \lambda' \begin{bmatrix} 0.0871 \\ -0.087 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu' \begin{bmatrix} 0.0038 \\ 0.0038 \\ 0.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.082 \\ -0.174 \\ -0.172 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el  $\det [B] = -1.0247 \times 10^{-3}$ , entonces la matriz [B] es invertible y despejando el vector [x]:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ y_B \end{bmatrix} = \lambda' \begin{bmatrix} 0.7122 \\ -4.1378 \\ -2.3378 \end{bmatrix} + \mu' \begin{bmatrix} -0.0578 \\ -0.0862 \\ -0.0599 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4726 \\ -1.1034 \\ 0.7182 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los vectores [p], [q] y [t] en las ecuaciones (4.9) a (4.11), se obtienen los coeficientes del polinomio de tercer grado en  $y_B$ .

$$\beta_4 = 0.1780$$

$$\beta_3 = 0.6869$$

$$\beta_2 = -2.6124$$

$$\beta_1 = 0.7182$$

Luego, sustituyendo estos valores de  $\beta_4, \beta_3, \beta_2, \beta_1$  en el polinomio (4.16), éste resulta ser:

$$0.1780 y_B^3 + 0.6869 y_B^2 - 2.6124 y_B + 0.7182 = 0$$

Para resolver este polinomio por el método numérico de Graeffe, se necesita que el coeficiente de  $y_B^3$  sea igual a la unidad, resultando:

$$y_B^3 + 3.8691 y_B^2 - 14.6766 y_B + 4.0349 = 0$$

Este polinomio tiene sus 3 raíces reales (ver apéndice C, ejemplo 2), y son:

$$y_{B1} = -6.2931$$

$$y_{B2} = 2.1335$$

$$y_{B3} = 0.3005$$

Estos valores, de  $y_B$ , al hacer pareja con  $x_B = -0.650$ , forman las coordenadas de los 3 puntos centrales de las correspondientes diadas.

Para calcular los valores de cada punto circular correspondiente a cada uno de los puntos centrales, se sustituye el valor  $y_B$  obtenido y las componentes de los vectores  $\{p\}$ ,  $\{q\}$  y  $\{t\}$ , en las ecuaciones (4.12) y (4.13), obteniéndose  $(x_A, y_A)$ .

para  $y_{B1} = -6.2931$ , de la ecuación (4.12)

$$x_{A1} = -0.3198$$

y de la ecuación (4.13):

$$y_{A1} = - 6.1119$$

De la misma manera  
para  $y_{B2} = 2.1335$  :

$$x_{A2} = - 0.3448$$

$$y_{A2} = 2.3778$$

y por último,  
para  $y_{B3} = 0.3005$

$$x_{A3} = 0.6447$$

$$y_{A3} = - 1.9558$$

Resumiendo, las diadas resultantes con puntos centrales sobre la recta vertical  $x_B = - 0.650$  son:

TABLA T.5.14 DIADAS SOBRE LA VERTICAL  $x_B = - 0.650$

Diada	$x_B$	$y_B$	$x_A$	$y_A$
1	- 0.65	- 6.293	- 0.320	- 6.112
2	- 0.65	2.134	- 0.345	2.378
3	- 0.65	0.301	0.645	- 1.956

Así como se calculan las diadas anteriores, que corresponden a la recta vertical  $x_B = -0.650$ , se calculan las diadas correspondientes a varias rectas verticales, con el objeto de barrer la mayor parte del plano y obtener todas las diadas posibles para formar los mecanismos que conduzcan al cuerpo rígido por la trayectoria propuesta.

El resumen de los valores de las coordenadas de los puntos centrales se muestran en la tabla T 5.15 y el de las coordenadas de las diadas en la tabla T 5.16:

TABLA T 5.15 PUNTOS CENTRALES PARA LA PRIMERA CONFIGURACION.  
(FIJANDO  $x_B$ ):

$x_B$	$y_B$	$y_B$	$y_B$
10	-26.627		
5	-14.007		
4	-11.492	- 4.216	0.0964
2	- 6.726	- 5.696	1.866
0	- 6.400	- 1.317	2.215
- 0.418	- 6.342	- 0.275	2.172
- 0.45	- 6.336	- 0.195	2.167
- 0.5	- 6.326	- 0.071	2.159
- 0.6	- 6.305	0.177	2.142
- 0.65	- 6.293	0.301	2.134
- 2	- 5.719	1.513	3.758
- 4			8.786

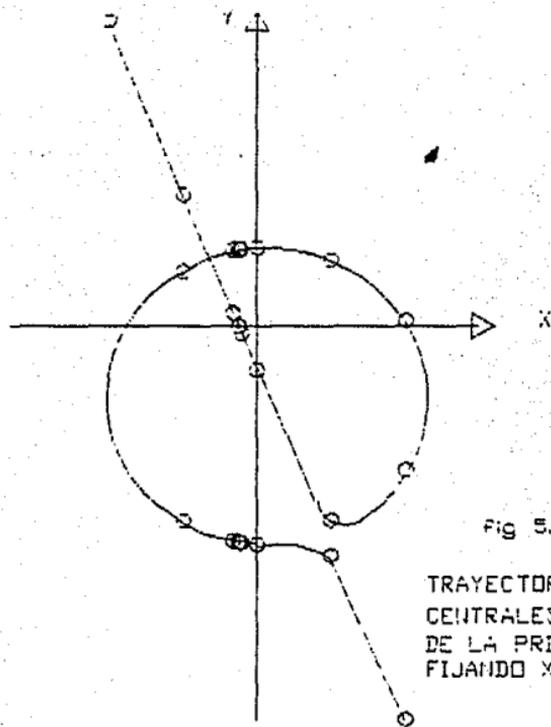


Fig 5.9

TRAYECTORIA DE LOS PUNTOS  
CENTRALES DE LAS DIADAS  
DE LA PRIMERA TRAYECTORIA  
FIJANDO XB

TABLA T 5.16 DIADAS PARA LA PRIMERA CONFIGURACION.  
(FIJANDO  $x_B$ ):

Diada	$x_B$	$y_B$	$x_A$	$y_A$
1	10	-26.627	2.892	- 7.647
2	5	-14.207	2.645	- 7.040
3	4	-11.492	2.548	- 6.806
4	4	- 4.216	4.344	- 4.069
5	4	0.096	4.337	0.261
6	2	- 6.727	2.154	- 6.098
7	2	- 5.696	2.419	- 5.740
8	2	1.866	2.333	2.042
9	0	- 6.400	0.327	- 6.211
10	0	2.215	0.322	2.418
11	0	- 1.317	1.375	- 3.775
12	- 0.418	- 6.342	- 0.089	- 6.159
13	- 0.418	2.172	- 0.104	2.394
14	- 0.418	- 0.275	0.960	- 2.743
15	- 0.45	- 6.336	- 0.121	- 6.153
16	- 0.45	2.170	0.137	2.392
17	- 0.45	- 0.1952	0.948	- 2.646
18	- 0.5	- 6.3264	- 0.170	- 6.144
19	- 0.5	2.159	- 0.189	2.338
20	- 0.5	- 0.071	0.8580	- 2.487
21	- 0.65	- 6.293	- 0.320	- 6.712
22	- 0.65	2.134	- 0.345	2.378
23	- 0.65	0.301	- 0.645	- 1.956
24	- 2	- 5.719	- 1.666	- 5.547
25	- 2	3.758	-10.835	27.103
26	- 2	1.514	- 1.637	1.612
27	- 4	8.787	5.852	-15.097

## MECANISMOS POSIBLES.

Observando los límites permisibles de montaje  
 -  $0.65 < x < 0.65$ ; -  $0.275 < y < 0.4$ , se tiene que:

- Las diadas de la 12 a la 23, están dentro  
 de -  $0.66 < x_B < 0.65$
- Las diadas 14, 17, 20 y 23 están dentro  
 de -  $0.275 < y_B < 0.4$
- Las diadas 15, 16, 18 y 19 están dentro  
 de -  $0.65 < x_A < 0.65$
- Ninguna de estas últimas diadas están dentro  
 del límite -  $0.275 < y_A < 0.4$

Como se puede observar, ninguna diada cumple simultáneamente las premisas anteriores por lo tanto ninguna diada está dentro de la zona de montaje.

Estas conclusiones pueden observarse gráficamente en las figuras 5.9 y 5.10

La figura 5.9 representa el lugar geométrico de los puntos centrales obtenidos en la tabla T 5.15.

En la figura 5.10 están mostradas las diadas cuyos puntos centrales están dentro de la región permisible de montaje (obtenidos en la tabla T 5.16), sin embargo sus puntos circulares están fuera de ella.

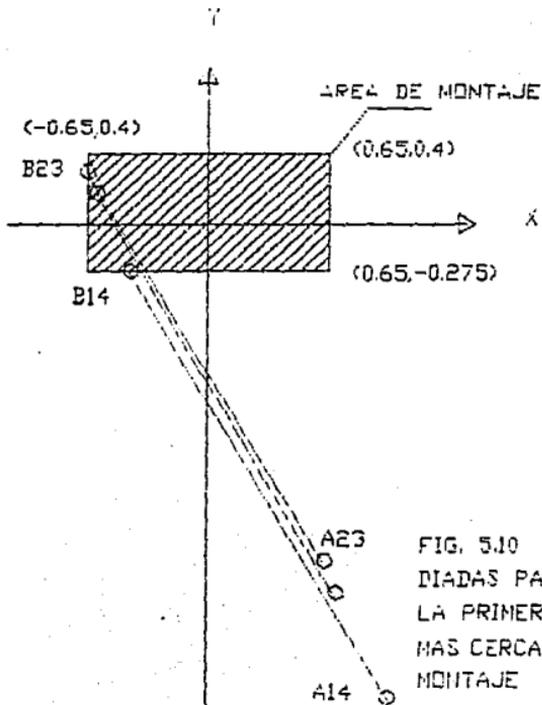


FIG. 5.10  
 DIADAS PARA GENERAR  
 LA PRIMERA TRAYECTORIA  
 MAS CERCANAS AL AREA DE  
 MONTAJE

5.4.1.2 SEGUNDO CASO, FIJANDO  $y_B$ :

La ecuación de síntesis linealizada en forma matricial para este caso es la (4.19):

$$[C][x] + \lambda'' [u'] + \mu'' [v'] + [w'] = 0$$

donde:

$$\lambda'' = x_A x_B$$

$$\mu'' = x_B y_A$$

y las componentes de  $[C]$ ,  $[u']$ ,  $[v']$ , y  $[w']$  están expresadas en las ecuaciones de la (4.21) a la (4.26).

La variable libre es  $y_B$ , y todas las expresiones son función de ésta, entonces se pueden calcular cada una de ellas, asignándole valores aleatorios a  $y_B$ , y al sustituirlos en la ecuación (4.19), se obtiene la ecuación linealizada de Síntesis:

Para  $y_B = 0$  la ecuación linealizada de síntesis es:

$$\begin{bmatrix} -0.1448 & -0.1230 & 0.155 x_A \\ -0.5073 & -0.1764 & 0.490 y_A \\ -0.695 & -0.275 & 0.695 x_B \end{bmatrix} + \lambda'' \begin{bmatrix} 0.0038 \\ 0.0038 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu'' \begin{bmatrix} -0.0871 \\ 0.0871 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0180 \\ 0.1442 \\ 0.2793 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y como el  $\det [C] = -6.197 * 10^{-4}$ , esta matriz es invertible.

Por lo tanto despejando el vector  $[x]$ :

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \end{bmatrix} = \lambda'' \begin{bmatrix} 0.3373 \\ 0.1173 \\ 0.3844 \end{bmatrix} + \mu'' \begin{bmatrix} 4.3331 \\ -0.6972 \\ 4.0573 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.5136 \\ -1.4600 \\ -5.4932 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los vectores  $[u]$ ,  $[v]$  y  $[w]$  en las ecuaciones de la (4.29) a la (4.31), para obtener los coeficientes del polinomio (4.36) que es de tercer grado en  $x_B$ , resulta:

$$\delta_4 = 0.7439$$

$$\delta_3 = -6.0263 \cdot 10^{-2}$$

$$\delta_2 = 10.6318$$

$$\delta_1 = -5.4932$$

Sustituyendo los valores de  $\delta_4$ ,  $\delta_3$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_1$  en el polinomio (4.36), se tiene:

$$0.7439 x_B^3 - 0.0603 x_B^2 - 10.6318 x_B - 5.4932 = 0$$

De igual manera que en el caso anterior, se usa el método de Graeffe para resolver el polinomio,

$$x_B^3 - 0.0810 x_B^2 - 14.2920 x_B - 7.3844 = 0$$

cuyas raíces reales son:

$$x_{B1} = 4.0548$$

$$x_{B2} = -3.4452$$

$$x_{B3} = -0.5286$$

Las correspondientes coordenadas de los puntos circulares, se obtienen de las ecuaciones (4.32) y (4.33), y al hacer las sustituciones numéricas, se obtienen:

$$\begin{aligned} x_{A1} &= 4.3917, & y_{A1} &= 0.1643 \\ x_{A2} &= -3.1016, & y_{A2} &= 0.1473 \\ x_{A3} &= 0.8200, & y_{A3} &= -1.3926 \end{aligned}$$

Las diadas resultantes con puntos centrales sobre la recta horizontal  $y_B = 0$ , son:

TABLA T 5.17 DIADAS SOBRE LA RECTA HORIZONTAL  $y_B = 0$

Diada	$x_B$	$y_B$	$x_A$	$y_A$
1	4.055	0	4.392	0.164
2	-3.445	0	-3.102	0.147
3	-0.529	0	0.820	-1.393

Como en el caso anterior, el conjunto de diadas sobre rectas horizontales, se muestran en la tabla T 5.19, considerando algunas coordenadas correspondientes a la tabla T 5.18, con la finalidad de comprobar la correspondencia con el mismo punto central.

TABLA T 5.18 PUNTOS CENTRALES DE LA PRIMERA CONFIGURACION.  
FIJANDO  $y_B$  .

$y_B$	$x_B$	$x_B$	$x_B$
10	- 4.481		
8.786	- 3.9998		
5	- 2.496		
3.758	- 2		
3	- 1.692		
2.5	- 1.478		
2	1.650		
0.3	3.873	- 0.650	- 3.261
0.177	3.952	- 0.600	- 3.341
0	4.055	- 0.529	- 3.445
- 0.07	4.093	- 0.500	- 3.484
- 0.2	4.158	- 0.448	- 3.550
- 0.275	4.194	- 0.418	- 3.586
- 2	4.586	0.274	- 3.988
- 4	4.119	1.086	- 3.541
-10	2.472		
-14	4.997		
-25	9.356		

ESTÁ TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

TABLA T 5.19' DIADAS PARA LA PRIMERA CONFIGURACION.

Diada	X <sub>B</sub>	Y <sub>B</sub>	X <sub>A</sub>	Y <sub>A</sub>
1	- 4.481	10	5.275	-13.640
2	- 4.000	8.786	5.853	-15.098
3	- 2.496	5	27.163	-68.941
4	- 2	3.758	-10.835	27.101
5	- 1.692	3	- 3.876	9.535
6	- 1.478	2.5	- 2.098	5.083
7	1.650	2	1.981	2.178
8	3.873	0.3	4.209	0.465
9	- 3.261	0.3	- 2.916	0.444
10	- 0.650	0.3	0.645	- 1.957
11	3.008	0.081	4.245	0.383
12	- 3.341	0.177	- 2.996	0.323
13	- 0.600	0.177	0.720	- 2.143
14	4.055	0	4.392	0.164
15	- 3.445	0	- 3.102	0.147
16	- 0.529	0	0.820	- 1.393
17	4.093	- 0.07	4.430	0.094
18	- 3.484	- 0.07	- 3.140	0.078
19	- 0.500	- 0.07	0.858	- 2.486
20	4.158	- 0.2	4.496	- 0.036
21	- 3.550	- 0.2	- 3.207	- 0.051
22	- 0.448	- 0.2	0.924	- 2.652
23	4.194	- 0.275	4.531	- 0.112
24	- 3.586	- 0.275	- 3.243	- 0.126
25	- 0.418	- 0.275	0.961	- 2.744
26	4.586	- 2	4.926	- 1.842
27	- 3.988	- 2	- 3.648	- 1.843
28	0.274	- 2	1.573	- 4.272
29	4.119	- 4	4.462	- 3.851
30	- 3.541	- 4	- 3.204	- 3.836
31	1.086	- 4	1.989	- 5.267
32	3.404	-10	2.472	- 6.629
33	4.997	-14	2.645	- 7.040
34	9.356	-25	2.872	- 7.599

## MECANISMOS POSIBLES

Con referencia a los límites de la zona de montaje,  $-0.65 \leq x \leq 0.65$ ;  $-0.275 \leq y \leq 0.4$ , se hace el siguiente análisis :

De la diada 8 a la 25 están dentro del intervalo  $-0.275 \leq y \leq 0.4$ .

De éstas, sólo las diadas 10, 13, 19, 22 y 25 están dentro de  $-0.65 \leq x \leq 0.65$ .

Y de estas últimas ninguna tiene su punto circular dentro de la zona de montaje.

Por tanto, ninguna diada está dentro de la zona de montaje.

Estas conclusiones se muestran en las figuras 5.11 y 5.12

Por otro lado, comparando las tablas T 5.16 y T 5.19, se observa que la diada 25 de la primera tabla es la diada 4 de la segunda. Pero la diada 6 de la primera tabla no aparece en la segunda, ni la diada 15 de la segunda aparece en la primera.

Sin embargo interpolando con los valores de  $y_B$  en la segunda tabla hallamos el mismo valor de  $x_B$  en la primera, o viceversa.

De lo anterior podemos concluir que estas dos tablas son complementarias pues las diadas que no están en una están en la otra, y agrupándolas se forma el conjunto de todas las diadas que pueden mover el cuerpo rígido por los puntos establecidos.

La fig. 5.13 muestra el lugar geométrico de todos los puntos centrales fijando  $x_B$  y  $y_B$  conjuntamente.

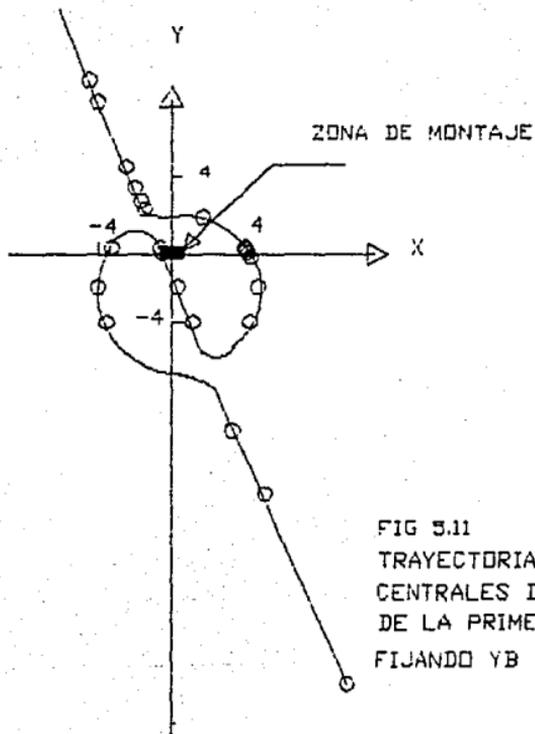


FIG 5.11  
 TRAYECTORIA DE LOS PUNTOS  
 CENTRALES DE LAS DIADAS  
 DE LA PRIMERA CONFIGURACION  
 FIJANDO YB

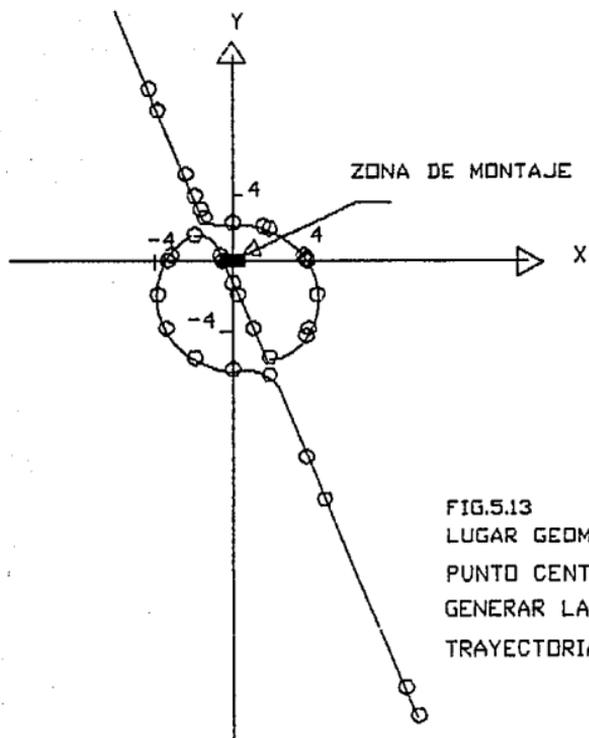


FIG.5.13  
LUGAR GEOMETRICO DEL  
PUNTO CENTRAL PARA  
GENERAR LA PRIMERA  
TRAYECTORIA

#### 5.4.2 SOLUCION MEDIANTE CUASILINEALIZACION CON UN GRADO DE LIBERTAD PARA GENERAR LA SEGUNDA CONFIGURACION

Como el conjunto de diadas de la solución anterior no están dentro de la zona de montaje, es necesario buscar un conjunto que esté dentro de ella.

Para esto, y como en los casos anteriores 5.2.2 y 5.3.2, se investiga qué es lo que sucede con el mecanismo cuando los parámetros de la trayectoria son alterados sin cambiarla sustancialmente.

Estos parámetros son los ángulos de inclinación del cuerpo durante la trayectoria.

La nueva trayectoria se muestra en la tabla T 5.20.

TABLA T 5.20 SEGUNDA CONFIGURACION.

Posición	x[m]	y[m]	$\theta(^{\circ})$
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 10
R <sub>2</sub>	- 0.490	- 0.220	- 11
R <sub>3</sub>	- 0.695	- 0.275	4

Siguiendo el procedimiento efectuado en la trayectoria anterior, al hacer el barrido sobre el eje de las "x" se hallan los distintos valores de  $y_B$ , y se muestran en la tabla T 5.21 .

Asimismo, haciendo el barrido sobre el eje de las "y" se hallan los distintos valores de " $x_B$ ", que se muestran en la tabla T 5.22.

TABLA T 5.21 LUGAR GEOMETRICO DEL PUNTO CENTRAL PARA GENERAR LA SEGUNDA CONFIGURACION (FIJANDO  $x_B$ )

$x_B$	$y_B$	$y_B$	$y_B$
-30	115.762		
-15	51.186	14.005	-41.218
-10	31.343	- 6.441	-52.523
- 5	13.492	- 2.337	-62.257
- 1	1.448	- 0.571	-70.765
- 0.6	0.642	- 0.661	-71.688
- 0.4	0.448	- 0.999	-72.155
- 0.3	0.388	- 1.174	-72.390
- 0.2	0.351	- 1.371	-72.626
- 0.1	0.332	- 1.584	-72.863
0	0.324	- 1.809	-73.101
0.1	0.327	- 2.041	-73.340
0.2	0.335	- 2.278	-73.580
0.3	0.347	- 2.520	-73.821
0.4	0.362	- 2.763	-74.063

TABLA T 5.22 LUGAR GEOMETRICO DEL PUNTO CENTRAL PARA GENERAR LA SEGUNDA CONFIGURACION (Fijando  $y_B$ )

$y_B$	$x_B$	$x_B$	$x_B$
-17	-16.142	7.535	25.845
-15	-15.421	6.231	25.996
-10	-12.808	3.547	25.009
- 1	- 2.466	- 0.399	16.697
0			15.665
0.3			14.444
0.32			13.513
0.35	- 0.196	0.322	13.418
0.4	- 0.325	0.603	13.255
1	- 0.796	3.518	10.683
5	- 2.295		
10	- 3.925		
50	-14.733		

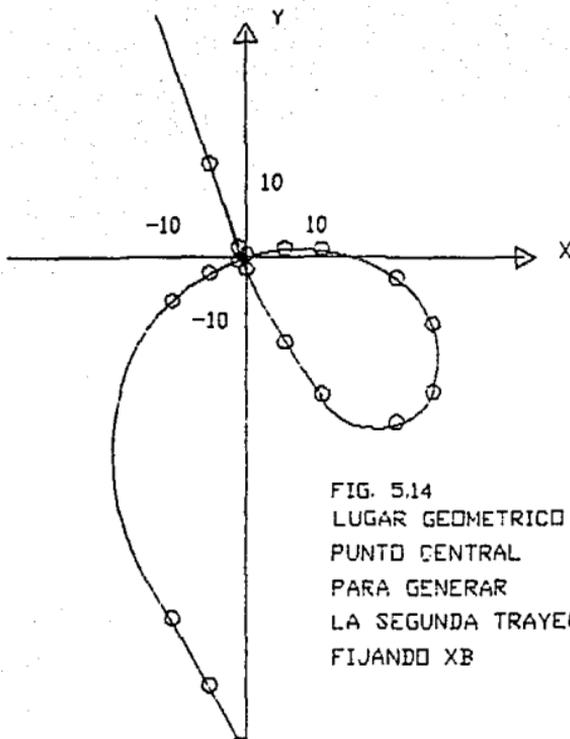
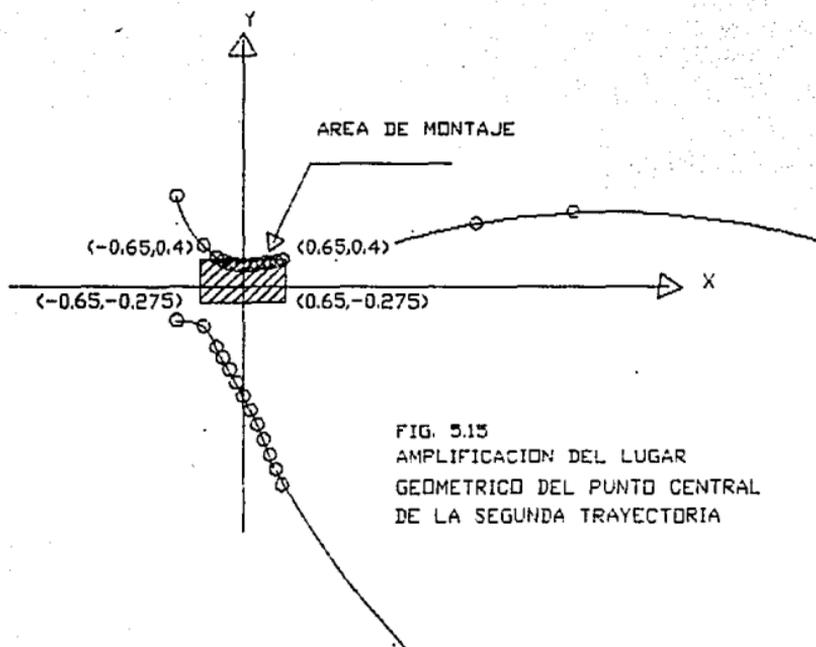


FIG. 5.14  
LUGAR GEOMETRICO DEL  
PUNTO CENTRAL  
PARA GENERAR  
LA SEGUNDA TRAYECTORIA  
FIJANDO XB



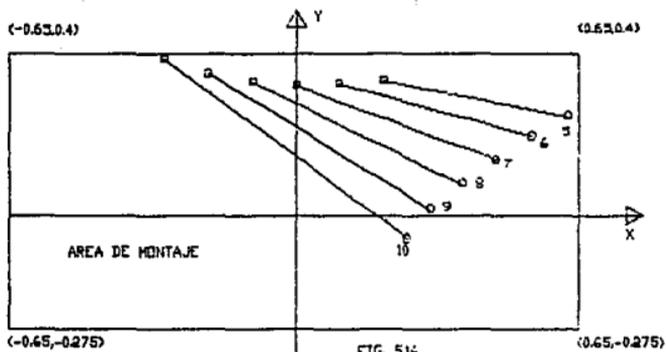


FIG. 516  
 DIADAS PARA GENERAR  
 LA SEGUNDA TRAYECTORIA

La figura 5.14 muestra el trazo de la trayectoria del punto central dentro de la zona de montaje ( $-0.65 \leq x \leq 0.65$  y  $-0.275 \leq y \leq 0.4$ ) y una ampliación de ésta se hace en la fig. 5.15.

Para saber si sus correspondientes puntos circulares estan dentro de la zona, se sustituyen sus valores en las ecuaciones (4.12) y (4.13), el resumen se muestra en la tabla T 5.23.

TABLA T 5.23 DIADAS PARA LA SEGUNDA CONFIGURACION  
FIJANDO  $x_B$

Díada	$x_B$	$y_B$	$x_A$	$y_A$
1	0.6	0.399	0.984	0.432
2	0.5	0.380	0.891	0.388
3	0.4	0.362	0.800	0.343
4	0.3	0.347	0.710	0.296
5	0.2	0.335	0.623	0.247
6	0.1	0.326	0.539	0.196
7	0.0	0.324	0.458	0.142
8	- 0.1	0.332	0.383	0.083
9	- 0.2	0.351	0.315	0.020
10	- 0.3	0.388	0.257	- 0.052
11	- 0.4	0.447	0.212	- 0.133

Las diadas que están en la región de montaje, son de la 5 a la 10 inclusive, y se muestran en la figura 5.16.

## MECANISMOS POSIBLES

Se puede integrar una colección hasta de 15 mecanismos diferentes combinando parejas de estas diadas.

Las longitudes de las barras de los mecanismos, se obtienen a partir de las coordenadas de sus extremos, utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos .

Los mecanismos así formados deben moverse también dentro del área de montaje, y para ello es necesario analizar su movimiento individualmente.

Si cada diada se mueve dentro del área, los mecanismos formados con una combinación de ellas también se moverá dentro de la misma.

El criterio para que la diada se mueva dentro del área de montaje, es que su longitud cumpla con la siguiente restricción:

$$l < L_{\max}$$

$$y$$

$$L_{\max} < y_B + 0.275$$

Aplicando este criterio a cada una de las diadas anteriores, se tiene:

$$\text{PARA LA DIADA 10, } y_B = 0.388$$

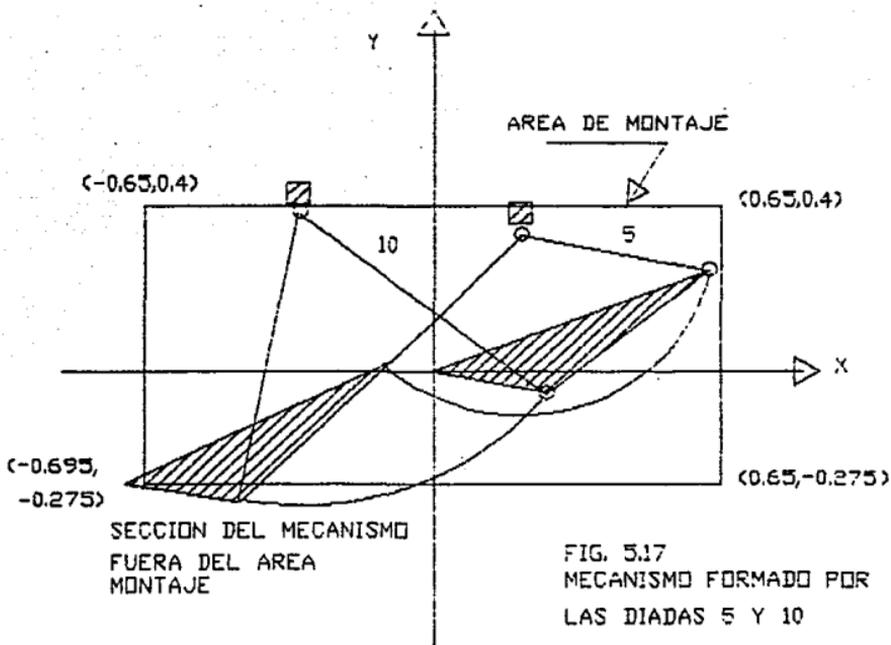
$$L_{\max} < 0.663$$

y

$$l = 0.710$$

entonces:  $l > L_{\max}$

Por lo tanto la diada queda fuera del área de montaje (ver fig. 5.17).



PARA LA DIADA 9,  $y_B = 0.351$

$$L_{\max} < 0.626$$

y

$$l = 0.624$$

entonces:  $l < L_{\max}$

Por lo tanto esta diada y las siguientes quedan dentro del área de montaje, ya que las diadas de la 8 a la 5 son de menor longitud que la 9.

Con este criterio se reduce la cantidad de diadas para la formación de mecanismos, quedando únicamente de la 5 hasta la 9 inclusive.

La combinación de estas 5 diadas nos permite formar hasta 10 mecanismos.

De estos 10 mecanismos, deben seleccionarse los que tengan las siguientes características:

- 1.- Las dimensiones de sus barras deben ser las más pequeñas.
- 2.- La longitud del brazo de palanca debe ser mínimo.
- 3.- El ángulo de transmisión  $\mu$  debe ser mínimo.

El brazo de palanca es la distancia del punto central de la diada de salida al punto inicial de la trayectoria.

El ángulo de transmisión  $\mu$  se define como el ángulo formado entre la barra acopladora y la barra de salida.

Mientras  $\mu$  sea mas cercano a  $90^\circ$ , la transmisión de fuerza, par, potencia o movimiento será más eficiente, ya que la fuerza transmitida por la barra acopladora a la barra de salida, no tendrá componentes sobre la última, es decir:

$$F \cos 90^\circ = 0$$

Como  $\cos 90^\circ = 0$ ,  $\cos \mu$  debe estar lo mas cercano posible a este valor, es decir,  $\cos \mu$  debe ser mínimo.

Ahora bien, como el  $\cos \mu$  esta variando con respecto al ángulo  $\psi$ , será necesario que la suma de todos los valores de éste, sea mínima durante el movimiento del mecanismo dentro del área de operación.

Pero los valores del coseno estan entre 1 y -1, y si sumamos todos estos valores, la suma siempre será igual a cero.

Sin embargo utilizando  $\cos^2 \mu$ , el cual varia entre 0 y 1, se elimina esta trivialidad, de tal forma que el valor mínimo de  $\cos \mu$  lo podemos encontrar, de la expresión:

$$S = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos^2 \mu \, d\psi$$

Los valores de esta expresión, para los mecanismos resultantes se calculan en el apéndice (D).

Si la ventaja mecánica de un mecanismo se define como la relación entre fuerza de salida ( $F_B$ ) y la fuerza de entrada ( $F_E$ ), es decir:

$$V_m = \frac{F_s}{F_e} < 1$$

donde  $F_s = F_e \text{ sen } \mu$

$F_s$  será máxima cuando  $\text{sen } \mu$  sea máximo, o bien, cuando  $\text{cos } \mu$  sea mínimo.

Pero el  $\text{cos } \mu$  será mínimo cuando el valor de

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \text{cos}^2 \mu \, d\psi$$

sea mínimo.

Por lo tanto  $F_s$  será máximo cuando el valor de la integral sea mínimo.

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores, los mecanismos que se pueden formar con las diadas obtenidas por el método del polinomio, se muestran a continuación:

**MECANISMO # 1.** Es el mecanismo formado por las diadas 5 y 9, y se muestra en la figura 5.18, donde:

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \text{cos}^2 \mu \, d\psi = 0.8495$$

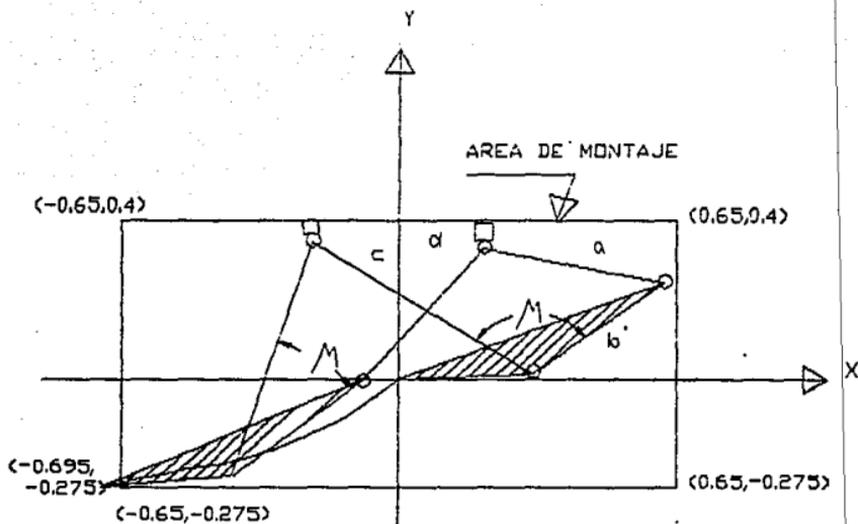


FIG. 5.18  
MECANISMO # 1

MECANISMO # 2. Es el formado con las diadas 5 y 7 (ver figura 5.19), donde:

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos^2 \mu \, d\psi = 0.9159$$

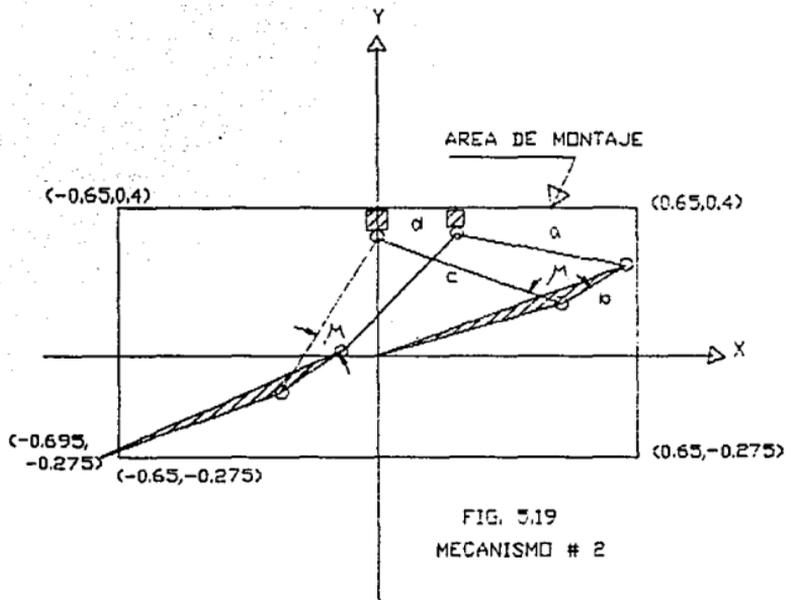
MECANISMO # 3. Es el formado con las diadas 5 y 6 (ver figura 5.20), donde:

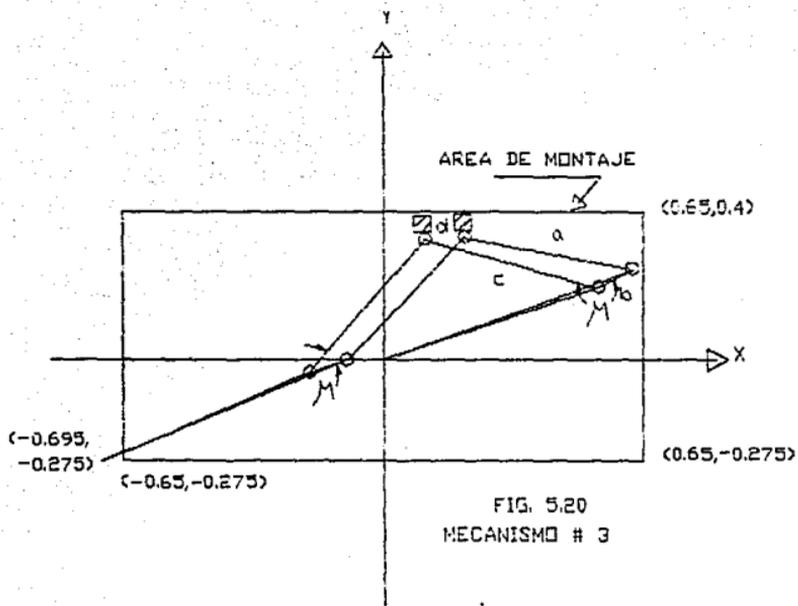
$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos^2 \mu \, d\psi = 0.9672$$

El resumen de los parámetros de los 3 mecanismos propuestos se muestra en la tabla T 5.24.

TABLA T 5.24 PARAMETROS DE LOS MECANISMOS # 1, 2 Y 3.  
DIMENSIONES

Mec#	a	b	c	d	f	$\psi_{\min}$	$\psi_{\max}$	$\Sigma$
1	432	383	613	400	316	50.04	171.05	0.8495
2	432	196	493	200	480	44.72	165.69	0.9158
3	432	98	456	100	574	42.89	164.34	0.9672





De los tres mecanismos formados:

- El mecanismo # 3 tiene las menores dimensiones en sus barras, pero su brazo de palanca es el más grande.

- El mecanismo que tiene el brazo de palanca mas corto es el # 1, pero las dimensiones de sus barras son las más grandes.

- El mecanismo # 2 es un mecanismo intermedio entre los mecanismos # 1 y 3, ya que sus dimensiones, su brazo de palanca y su ventaja mecánica tienen valores intermedios.

De los tres mecanismos, se concluye que el mejor mecanismo es el # 1 porque tiene el menor brazo de palanca y la mejor ventaja mecánica, es decir, es el mecanismo que consume menos energía a pesar de que las dimensiones de sus barras no son las mas pequeñas. Más aún, de todos estos mecanismos se puede ver que mientras mas pequeñas sean sus barras, la ventaja mecánica disminuye.

A pesar de haber hallado una solución para esta segunda configuración, con este método, se procederá a resolver la ecuación de síntesis para la enésima configuración y poder comparar los resultados con los de los métodos anteriores.

## 5.4.3 SOLUCION PARA LA ENESIMA CONFIGURACION

Con el objeto de obtener mecanismos que tengan mejores propiedades, y también poder comparar resultados con los de las configuraciones anteriores, se propone la enésima configuración mostrada en la tabla T 5.25.

TABLA T 5.25 ENESIMA CONFIGURACION.

Posición	x(m)	y(m)	$\theta(^{\circ})$
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 9.8
R <sub>2</sub>	- 0.490	- 0.220	-11.2
R <sub>3</sub>	- 0.695	- 0.275	3.6

Siguiendo el procedimiento de solución descrito en las 2 trayectorias anteriores, los valores obtenidos de las coordenadas de los puntos centrales, se resumen en la tabla T 5.26, cuando se fija  $x_B$ , para poder dibujar el lugar geométrico del punto central.

TABLA T 5.26 LUGAR GEOMETRICO DEL PUNTO CENTRAL DE LA  
ENESIMA CONFIGURACION FIJANDO  $x_B$ .

$x_B$	$y_B$	$y_B$	$y_B$
100	1264.8		
75	1050.3		
65	963.8		
64	955.12		
63	946.435	-23.478	- 31.159
60	920.33	-15.18	- 38.426
55	876.777	- 8.510	- 43.327
50	832.870	- 4.259	- 45.462
40	744.489	0.956	- 45.882
30	654.789	3.474	- 42.269
20	563.096	4.008	- 34.689
15	516.127	3.635	- 29.146
10	468.101	2.859	- 22.146
5	418.555	1.696	- 13.20
1	377.344	0.540	- 4.267
0.65	373.650	0.447	- 3.406
0.6	373.122	0.435	- 3.283
0.5	372.063	0.412	- 3.037
0.4	371.002	0.391	- 2.791
0.3	369.940	0.372	- 2.546
0.2	368.877	0.357	- 2.304
0.194	368.814	0.356	- 2.289
0.1	367.813	0.346	- 2.064
0	366.747	0.341	- 1.829
- 0.1	365.679	0.345	- 1.602
- 0.124	364.423	0.348	- 1.548
- 0.2	364.611	0.361	- 1.385
- 0.3	363.540	0.395	- 1.183
- 0.4	362.469	0.451	- 1.004
- 0.5	361.395	0.538	- 0.853
- 0.6	360.320	0.659	- 0.736

- 0.65	359.783	0.687	- 0.736
- 1	356.005	1.445	- 0.550
- 5	311.184	14.197	- 1.911
-10	248.01	37.950	- 4.285
-15	152.953	94.034	- 7.095
-16			- 7.712
-20			- 10.364
-25			- 14.135
-40			- 28.902
-50			- 42.460
-65			- 71.734
-100			-278.8

El lugar geométrico de la  $n$ -ésima trayectoria se muestra en las figuras 5.21 y 5.22.

La zona de montaje esta entre  $-0.65 \leq x \leq 0.65$ ; y  $-0.275 \leq y \leq 0.4$ ; los puntos centrales que están dentro de esta zona se muestran en la tabla T 5.26 para  $-0.3 \leq x_B \leq 0.4$  y  $-0.345 \leq y_B \leq 0.04$ . Las diadas correspondientes se muestran en la tabla T 5.27 y se grafican en la figura 5.23.

De las diadas mostradas, las únicas que tienen su punto circular dentro de la zona de montaje y que durante su movimiento tampoco se salen de ella, son de la # 3 a la # 9.

Nótese que las diadas 4 y 8 son idénticas a las obtenidas por el método de cuasilinealización.

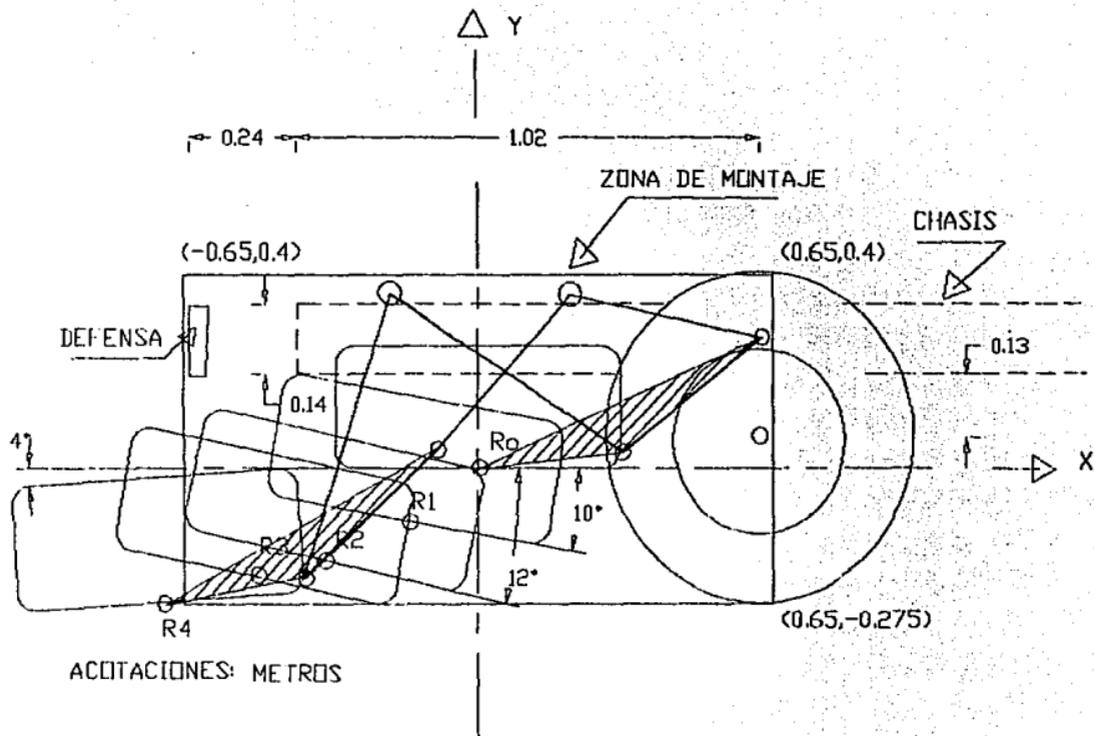
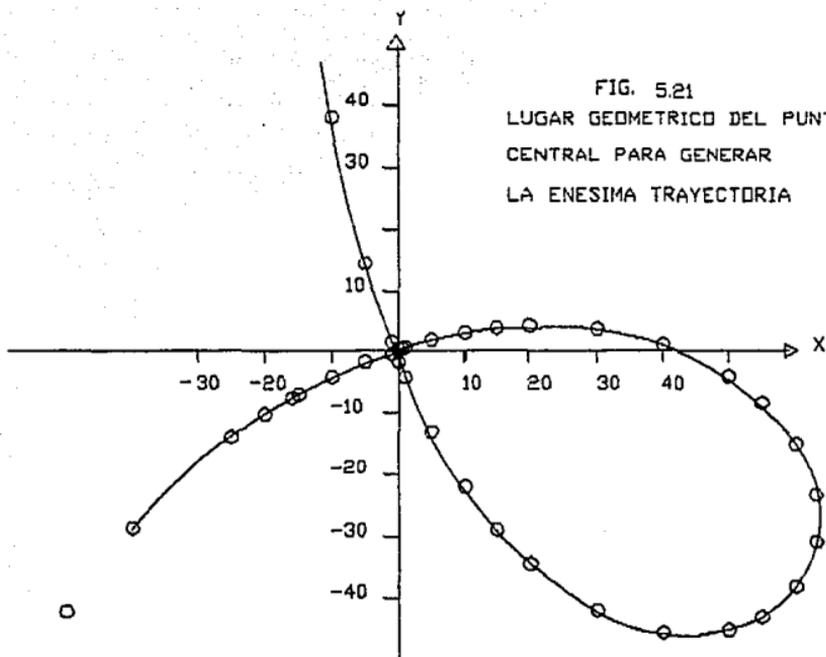


FIG. 5.26

MECANISMO RRRR PARA SACAR  
LA LLANTA DE REFACCION

FIG. 5.21  
LUGAR GEOMETRICO DEL PUNTO  
CENTRAL PARA GENERAR  
LA ENESIMA TRAYECTORIA



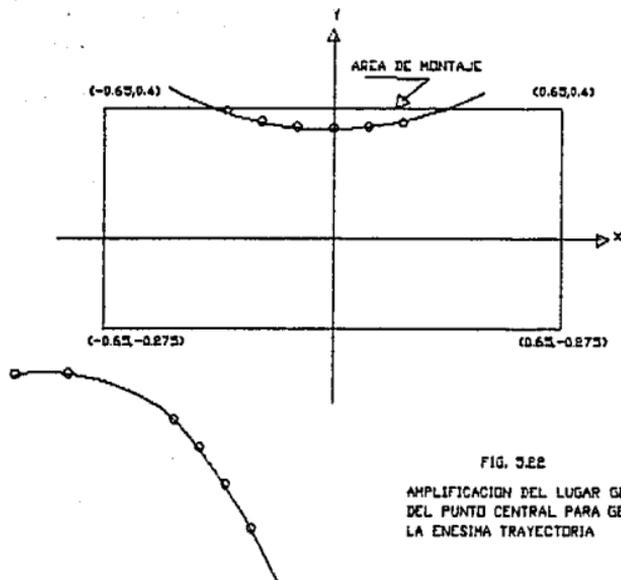


FIG. 3.22

AMPLIFICACION DEL LUGAR GEOMETRICO  
 DEL PUNTO CENTRAL PARA GENERAR  
 LA ENCSIMA TRAYECTORIA

TABLA T 5.27 DIADAS PARA LA ENESIMA CONFIGURACION

Diada	$x_B$	$y_B$	$x_A$	$y_A$
1	0.4	0.391	0.801	0.374
2	0.3	0.392	0.711	0.323
3	0.2	0.357	0.624	0.271
4	0.194	0.356	0.619	0.268
5	0.1	0.346	0.540	0.217
6	0	0.341	0.459	0.159
7	- 0.1	0.345	0.384	0.098
8	- 0.124	0.348	0.367	0.083
9	- 0.2	0.361	0.316	0.031
10	- 0.3	0.395	0.258	- 0.044
11	- 0.4	0.451	0.214	- 0.129
12	- 0.5	0.538	0.187	- 0.228

Utilizando estas diadas se pueden formar hasta 21 mecanismos, de los cuales se seleccionan únicamente los que se pueden formar con las diadas de los extremos (#3 y #9), ya que éstos son los que tienen mejor ventaja mecánica (inciso 5.4.2, pág 115).

MECANISMO # 1. Formado por las diadas 3 y 8, con las siguientes características:

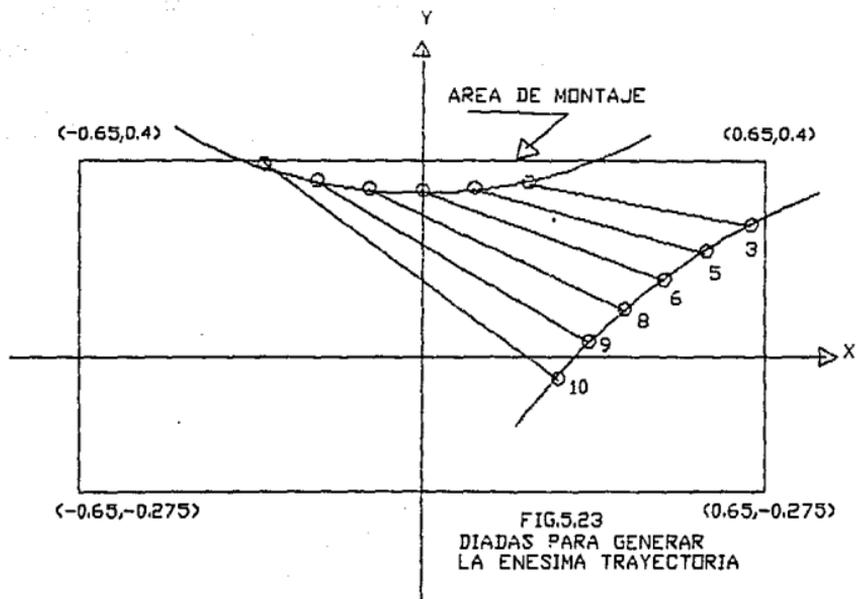
$$S = 0.40195$$

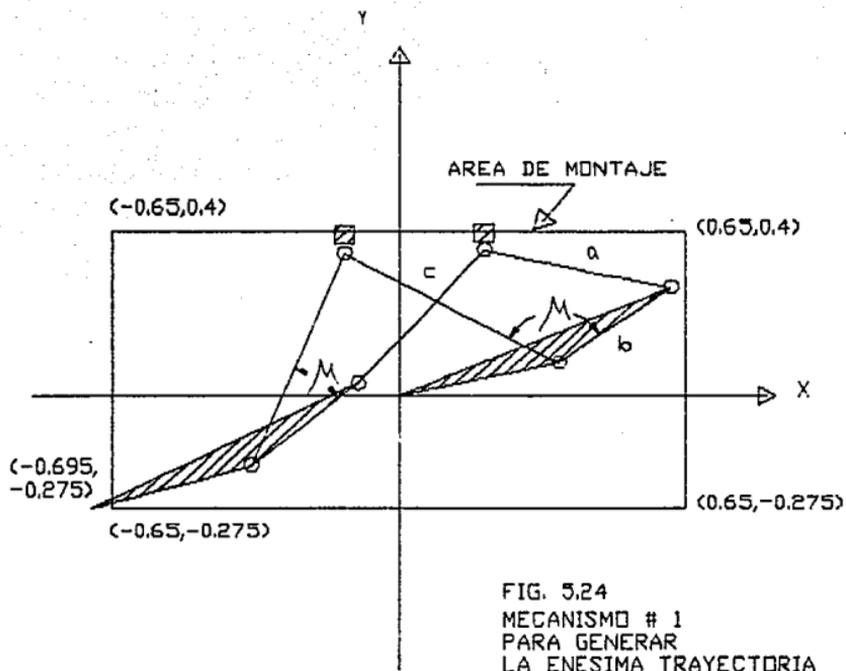
y dimensiones mostradas en la figura 5.24

MECANISMO # 2. Armado con las diadas 3 y 9, con:

$$S = 0.36397$$

y dimensiones mostradas en la figura 5.25.





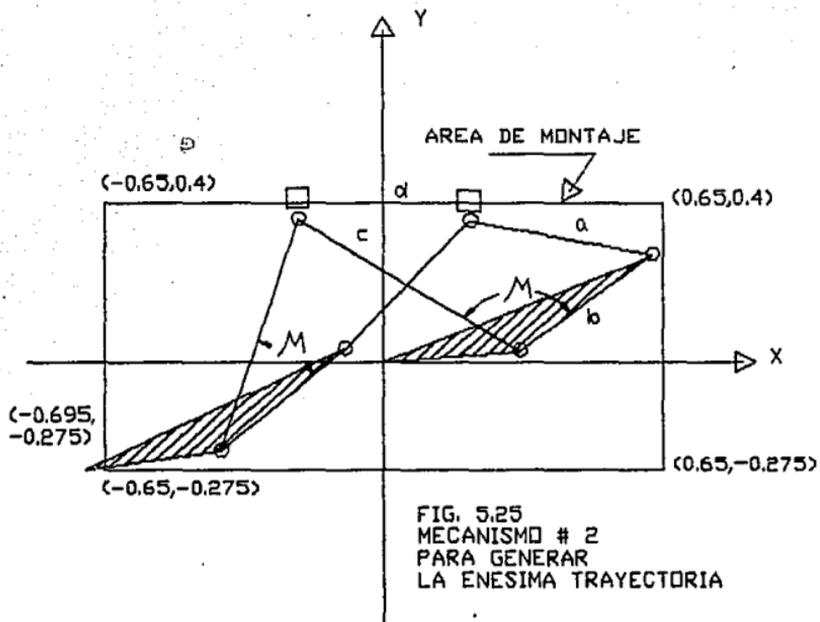


TABLA T 5.28 CARACTERISTICAS DE LOS MECANISMOS PARA GENERAR LA ENESIMA CONFIGURACION

Mec	D I M E N S I O N E S					
	a	b	c	d	f	S
#1	434	313	558	324	376	0.40195
#2	433	390	612	400	318	0.36397

De estos mecanismos, se puede ver en la tabla T 5.28 que:

El primero tiene las barras mas pequeñas y la ventaja mecánica menor (S alta).

El segundo tiene el menor brazo de palanca y la mejor ventaja mecánica (S baja).

Por lo tanto el mejor mecanismo es el # 2, ya que aunque tiene las barras más largas es el que tiene durante su movimiento el ángulo de transmisión mas cercano a los  $90^{\circ}$ .

Por último, comparando el mecanismo solución de la configuración anterior 5.4.2 #1 con el mecanismo solución de esta última trayectoria 5.4.3 #2, se puede ver que este último tiene mejor ventaja mecánica (S más baja).

## RESUMEN

Después de haber obtenido al menos una solución por cada uno de los tres métodos para resolver la ecuación de síntesis, podemos hacer las siguientes comparaciones:

1.- Por el método de Newton Raphson se obtuvo un solo mecanismo, a pesar de haber cambiado los parámetros de la trayectoria tres veces (fig. 5.6)

2.- El método de cuasilinealización para 5 puntos de precisión de la trayectoria, se halló exactamente el mismo mecanismo que el de Newton Raphson y con el mismo número de cambios de parámetros.

3.- El de cuasilinealización con un grado de libertad mostró un cambio radical en cuanto al número de mecanismos solución, ya que gracias a las curvas de Burmester se halló uno desde la segunda configuración (fig. 5.18), mejorándose con el mecanismo obtenido en la última (fig. 5.25).

4.- Por lo tanto el mecanismo que resuelve el problema de sacar la llanta de refaccion del problema en cuestión, es el 5.4.3 #2.

Para poder hacer estas comparaciones estas figuras se muestran a continuación.

En la fig. 5.26 se muestra este mismo mecanismo en todas sus posiciones.

## CONCLUSIONES

La aplicación comparativa de los tres métodos para resolver la ecuación de síntesis de mecanismos ha permitido llegar a las conclusiones siguientes:

-  
Los dos métodos de cuasilinealización tienen la ventaja con respecto al iterativo de poder predecir el número de soluciones que tiene la ecuación de síntesis.

-  
El método de cuasilinealización con un grado de libertad es el que, debido a su flexibilidad, nos permite hallar el mayor número de soluciones de la ecuación de síntesis, facilitando la selección del mecanismo que mejor cumpla con las necesidades de operación.

-  
La solución de la ecuación de síntesis es muy sensible a pequeños cambios de los parámetros de la ecuación, es decir, que las dimensiones de las diadas cambian considerablemente cuando el ángulo de inclinación del cuerpo varía unos grados solamente.

-  
Las curvas de Burmester son fáciles de obtener con el método de cuasilinealización con un grado de libertad.

-  
Si la curva de Burmester, que representa el lugar geométrico de todas las soluciones de cada ecuación de síntesis, no pasa por la región donde se desea instalar o mover un conjunto de diadas, significa que no existe solución para esa aplicación particular del mecanismo.

-

Si se aprovecha la cualidad que tienen las diadas de cambiar totalmente cuando se cambian los parámetros de la trayectoria, se puede hallar una curva de Burmester que satisfaga las restricciones de cada problema.

APENDICE A

El sistema formado por las ecuaciones (3.6), (3.7) y el conjunto de ecuaciones algebraicas en que se descompone la ecuación matricial (3.17)

$$\left. \begin{aligned} x_A &= c_1 \lambda + d_1 \mu + e_1 \\ y_A &= c_2 \lambda + d_2 \mu + e_2 \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_B &= c_3 \lambda + d_3 \mu + e_3 \\ y_B &= c_4 \lambda + d_4 \mu + e_4 \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda = x_B y_A - x_A y_B \quad (3.6)$$

$$\mu = x_A x_B + y_A y_B \quad (3.7)$$

forman un sistema algebraico no lineal de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, y su solución es el objetivo de este apéndice.

Sustituyendo las ecuaciones (A.1) en la ecuación (3.6),

$$\begin{aligned} \lambda &= (c_3 \lambda + d_3 \mu + e_3)(c_2 \lambda + d_2 \mu + e_2) \\ &- (c_1 \lambda + d_1 \mu + e_1)(c_4 \lambda + d_4 \mu + e_4) \end{aligned} \quad (A.2)$$

desarrollando los términos algebraicos dentro de los paréntesis,

$$\begin{aligned} \lambda &= (c_2 c_3 - c_1 c_4) \lambda^2 + (c_2 d_3 + c_3 d_2 - c_1 d_4 - c_4 d_1) \lambda \mu \\ &+ (c_2 e_3 + c_3 e_2 - c_1 e_4 - c_4 e_1) \lambda + (d_2 d_3 - d_1 d_4) \mu^2 \\ &+ (d_3 e_3 + d_3 e_2 - d_1 e_4 - d_4 e_1) \mu + e_2 e_3 - e_1 e_4 \end{aligned}$$

e igualando a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned} &(d_2 d_3 - d_1 d_4) \mu^2 + [(c_2 d_3 + c_3 d_2 - c_1 d_4 - c_4 d_1) \lambda + (d_2 e_3 + d_3 e_2 - d_1 e_4 - d_4 e_1)] \mu \\ &+ (c_2 c_3 - c_1 c_4) \lambda^2 + (c_2 e_3 + c_3 e_2 - c_4 e_1 - c_1 e_4 - 1) \lambda + e_2 e_3 - e_1 e_4 = 0 \end{aligned}$$

(A.3)

Haciendo:

$$r_1 = d_2 d_3 - d_1 d_4 \quad (\text{A.4})$$

$$r_2 = c_2 d_3 + c_3 d_2 - c_1 d_4 - c_4 d_1 \quad (\text{A.5})$$

$$r_3 = d_3 e_2 + d_2 e_3 - d_1 e_4 - d_4 e_1 \quad (\text{A.6})$$

$$r_4 = c_2 c_3 - c_1 c_4 \quad (\text{A.7})$$

$$r_5 = c_2 e_3 + c_3 e_2 - c_4 e_1 - c_1 e_4 - 1 \quad (\text{A.8})$$

$$r_6 = e_2 e_3 - e_1 e_4 \quad (\text{A.9})$$

La ecuación (A.3), se transforma en:

$$r_1 \mu^2 + (r_2 \lambda + r_3) \mu + r_4 \lambda^2 + r_5 \lambda + r_6 = 0 \quad (\text{A.10})$$

Así mismo sustituyendo el sistema de ecuaciones (A.1) en la segunda ecuación, (3.7),

$$\begin{aligned} \mu = & (c_1 \lambda + d_1 \mu + e_1)(c_3 \lambda + d_3 \mu + e_3) \\ & + (c_2 \lambda + d_2 \mu + e_2)(c_4 \lambda + d_4 \mu + e_4) \end{aligned}$$

desarrollando los términos en paréntesis,

$$\begin{aligned} \mu = & (c_1 c_3 + c_2 c_4) \lambda + (c_3 d_1 + c_1 d_3 + c_4 d_2 + c_2 d_4) \lambda \mu \\ & + (c_3 e_1 + c_1 e_3 + c_2 e_4 + c_4 e_2) \lambda + (d_1 d_3 + d_2 d_4) \mu^2 \\ & + (d_1 e_3 + d_3 e_1 + d_2 e_4 + d_4 e_2) \lambda + e_1 e_3 + e_2 e_4 \end{aligned}$$

e igualando a cero se obtiene:

$$\begin{aligned} & (d_1 d_3 + d_2 d_4) \mu^2 + [(c_3 d_1 + c_1 d_3 + c_4 d_2 + c_2 d_4) \lambda \\ & + (d_1 e_3 + d_3 e_1 + d_2 e_4 + d_4 e_2 - 1)] \mu + (c_1 c_3 + c_2 c_4) \lambda^2 \\ & + (c_3 d_1 + c_1 e_3 + c_2 e_4 + c_4 e_2) \lambda + e_1 e_3 + e_2 e_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Por último, haciendo

$$s_1 = d_1 d_3 + d_2 d_4 \quad (\text{A.12})$$

$$s_2 = c_3 d_1 + c_1 d_3 + c_4 d_2 + c_2 d_4 \quad (\text{A.13})$$

$$s_3 = d_1 e_3 + d_3 e_1 + d_2 e_4 + d_4 e_2 - 1 \quad (\text{A.14})$$

$$s_4 = c_1 c_3 + c_2 c_4 \quad (\text{A.15})$$

$$s_5 = c_3 e_1 + c_1 e_3 + c_2 e_4 + c_4 e_2 \quad (\text{A.16})$$

$$s_6 = e_1 e_3 + e_2 e_4 \quad (\text{A.17})$$

la ecuación (A.11) se transforma en:

$$s_1 \mu^2 + (s_2 \lambda + s_3) \mu + s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6 = 0 \quad (\text{A.18})$$

=====

Las ecuaciones (A.11) y (A.18) son ecuaciones de segundo grado en  $\mu$  y  $\lambda$ , y sus raíces deben satisfacer simultáneamente ambas ecuaciones.

Haciendo nuevos cambios de variable para simplificar estas ecuaciones como

$$B = r_2 \lambda + r_3 \quad (\text{A.19})$$

$$C = r_4 \lambda^2 + r_5 \lambda + r_6 \quad (\text{A.20})$$

$$E = s_2 \lambda + s_3 \quad (\text{A.21})$$

$$F = s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6 \quad (\text{A.22})$$

el sistema se transforma en:

$$r_1 \mu^2 + B \mu + C = 0$$

$$s_1 \mu^2 + E \mu + F = 0 \quad (\text{A.23})$$

=====

Sus raíces son respectivamente:

$$\mu = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 r_1 C}}{2 r_1}$$

$$\mu = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4s_1 F}}{2s_1}$$

Igualando ambas raíces.

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4r_1 C}}{2r_1} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4s_1 F}}{2s_1}$$

y eliminando los denominadores, se tiene:

$$s_1(-B \pm \sqrt{B^2 - 4r_1 C}) = r_1(-E \pm \sqrt{E^2 - 4s_1 F})$$

Esta igualdad se puede resolver despejando el radical derecho,

$$r_1 E - s_1 B \pm s_1 \sqrt{B^2 - 4r_1 C} = \pm r_1 \sqrt{E^2 - 4s_1 F}$$

dividiendo entre  $r_1$ ,

$$E - B \frac{s_1}{r_1} \pm \frac{s_1}{r_1} \sqrt{B^2 - 4r_1 C} = \pm \sqrt{E^2 - 4s_1 F}$$

elevando al cuadrado,

$$E^2 + \frac{2s_1^2 B^2}{r_1^2} + \frac{2s_1^2}{r_1^2} (B^2 - 4r_1 C) - 2\frac{s_1}{r_1} B E \pm 2\frac{s_1}{r_1} E \sqrt{B^2 - 4r_1 C}$$

$$\pm \frac{2s_1^2 B}{r_1^2} \sqrt{B^2 - 4r_1 C} = E^2 - 4s_1 F$$

y desarrollando

$$\frac{s_1^2 B^2}{l_1^2} + \frac{s_1^2 B^2}{l_1^2} \cdot \frac{4 s_1^2 C}{l_1} \cdot \frac{2 s_1 B E}{l_1} \pm \frac{2 s_1}{l_1} \left( E \cdot \frac{s_1 B}{l_1} \sqrt{B^2 \cdot 4 l_1 C} \right) = -4 s_1 F$$

Al despejar el término que contiene el radical,

$$\pm \frac{2 s_1}{l_1} \left( E \cdot \frac{s_1 B}{l_1} \right) \sqrt{B^2 \cdot 4 l_1 C} = \frac{4 s_1^2 C}{l_1} + \frac{2 s_1 B E}{l_1} \cdot \frac{2 s_1^2 B^2}{l_1^2} - 4 s_1 F$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $l_1/2s_1$ ,

$$\left( E \cdot \frac{s_1 B}{l_1} \right) \sqrt{B^2 \cdot 4 l_1 C} = 2 s_1 C + B E \cdot \frac{s_1 B^2}{l_1} - 2 l_1 F$$

Y elevando nuevamente al cuadrado para eliminar radicales obtenemos:

$$\begin{aligned} \left( E^2 + \frac{s_1^2 B^2}{l_1^2} \cdot \frac{2 s_1 B E}{l_1} \right) (B^2 \cdot 4 l_1 C) &= 4 s_1^2 C^2 + B^2 E^2 + \frac{s_1^2 B^4}{l_1^2} + 4 l_1^2 F^2 \\ + 4 s_1 B C E \cdot \frac{4 s_1^2 B^2 C}{l_1} \cdot 8 l_1 s_1 C F - 2 \frac{s_1 B^3 E}{l_1} \cdot 4 l_1 B E F + 4 s_1 B^2 F \end{aligned}$$

Por último al desarrollar esta expresión,

$$\begin{aligned}
 B^2 E^2 + \frac{s_1 B^4}{l_1^2} - 2 \frac{s_1 B^3 E}{l_1} - 4 r_1 C E^2 - 4 \frac{s_1 B^2 C}{l_1} + 8 s_1 B C E = 4 s_1^2 C^2 \\
 + B^2 E^2 + \frac{s_1^2 B^4}{l_1^2} + 4 r_1^2 F^2 + 4 s_1 B C E - \frac{4 s_1 B^2 C}{l_1} - 8 r_1 s_1 C F - 2 \frac{s_1 B^3 E}{l_1} \\
 - 4 r_1 B E F + 4 s_1 B^2 F
 \end{aligned}$$

simplificando e igualando a cero,

$$\begin{aligned}
 - 4 r_1 C E^2 + 4 s_1 B C E - 4 s_1^2 C^2 - 4 r_1^2 F^2 \\
 + 8 r_1 s_1 C F + 4 r_1 B E F - 4 s_1 B^2 F = 0
 \end{aligned}$$

y finalmente factorizando, se llega a:

$$\begin{aligned}
 r_1 (B E F + 2 s_1 C F - C E^2 - r_1 F^2) \\
 + s_1 (B C E - s_1 C^2 - B^2 F) = 0
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Para hacer nuevamente esta expresión una función de  $\lambda$ , se hace primero cada término con letras mayúsculas, usando las ecuaciones de la (A.19) a la (A.22).

$$\begin{aligned}
 BEF = (i_2 \lambda + i_3) (s_2 \lambda + s_3) (s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6) \\
 = (i_2 s_2 \lambda^2 + (i_3 s_2 + i_2 s_3) \lambda + i_3 s_3) (s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6) \\
 = i_2 s_2 s_4 \lambda^4 + [(i_3 s_2 + i_2 s_3) s_4 + i_2 s_2 s_5] \lambda^3 \\
 + [i_2 s_2 s_6 + i_3 s_3 s_4 + (i_3 s_2 + i_2 s_3) s_5] \lambda^2 \\
 + [(i_3 s_2 + i_2 s_3) s_6 + i_3 s_3 s_5] \lambda + i_3 s_3 s_6
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
 CF &= (s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6)(s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6) \\
 &= s_4 s_4 \lambda^4 + (s_5 s_4 + s_4 s_5) \lambda^3 + (s_4 s_6 + s_6 s_4 + s_5 s_5) \lambda^2 + (s_6 s_5 + s_5 s_6) \lambda + s_6 s_6
 \end{aligned}$$

(A. 26)

$$\begin{aligned}
 CE^2 &= (s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6)(s_2 \lambda + s_3)^2 \\
 &= (s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6)(s_2^2 \lambda^2 + 2 s_2 s_3 \lambda + s_3^2) \\
 &= s_4 s_2^2 \lambda^4 + (s_5 s_2^2 + 2 s_4 s_2 s_3) \lambda^3 + (s_6 s_2^2 + s_4 s_3^2 + 2 s_5 s_2 s_3) \lambda^2 \\
 &\quad + (2 s_6 s_2 s_3 + s_5 s_3^2) \lambda + s_6 s_3^2
 \end{aligned}$$

(A. 27)

$$\begin{aligned}
 F^2 &= (s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6)^2 \\
 &= s_4^2 \lambda^4 + 2 s_4 s_5 \lambda^3 + (s_5^2 + 2 s_4 s_6) \lambda^2 + 2 s_5 s_6 \lambda + s_6^2
 \end{aligned}$$

(A. 28)

$$\begin{aligned}
 BCE &= (s_2 \lambda + s_3)(s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6)(s_2 \lambda + s_3) \\
 &= [s_2 s_4 \lambda^3 + (s_3 s_4 + s_2 s_5) \lambda^2 + (s_3 s_5 + s_2 s_6) \lambda + s_3 s_6] (s_2 \lambda + s_3)
 \end{aligned}$$

y desarrollando términos entre paréntesis,

$$\begin{aligned}
 BCE &= s_2 s_4 s_2 \lambda^4 + [s_2 (s_3 s_4 + s_2 s_5) + s_2 s_4 s_3] \lambda^3 \\
 &\quad + [s_3 (s_3 s_4 + s_2 s_5) + s_2 (s_3 s_5 + s_2 s_6)] \lambda^2 \\
 &\quad + [s_3 (s_3 s_5 + s_2 s_6) + s_3 s_6 s_2] \lambda + s_3 s_6 s_3
 \end{aligned}$$

(A. 29)

$$\begin{aligned}
 C^2 &= (i_4 \lambda^2 + i_5 \lambda + i_6)^2 \\
 &= i_4^2 \lambda^4 + 2 i_4 i_5 \lambda^3 + (i_5^2 + 2 i_4 i_6) \lambda^2 + 2 i_5 i_6 \lambda + i_6^2
 \end{aligned}
 \tag{A.30}$$

Por último:

$$\begin{aligned}
 B^2 F &= (i_2 \lambda + i_3)^2 (s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6) \\
 &= i_2^2 \lambda^2 + 2 i_2 i_3 \lambda + i_3^2 (s_4 \lambda^2 + s_5 \lambda + s_6) \\
 B^2 F &= i_2^2 s_4 \lambda^4 + (i_2^2 s_5 + 2 i_2 i_3) \lambda^3 + (i_3^2 s_4 + 2 i_2 i_3 s_5 + i_2^2 s_6) \lambda^2 \\
 &\quad + (2 i_2 i_3 s_6 + i_3^2 s_5) \lambda + i_3^2 s_6
 \end{aligned}
 \tag{A.31}$$

Y se sustituyen las ecuaciones en la ecuación (A.24), resultando:

$$\begin{aligned}
 & i_1 (i_2 s_2 s_4 \lambda^4 + [(i_3 s_2 + i_2 s_3) s_4 + i_2 s_2 s_5] \lambda^3 + [i_2 s_2 s_6 + i_3 s_3 s_4 \\
 & + (i_3 s_2 + i_2 s_3) s_5] \lambda^2 + [s_6 (i_3 s_2 + i_2 s_3) + i_3 s_3 s_6] \lambda + i_3 s_3 s_6 \\
 & + 2 s_1 [i_4 s_4 \lambda^4 + (i_5 s_4 + i_4 s_5) \lambda^3 + (i_4 s_6 + i_5 s_4 + i_5 s_5) \lambda^2 + (i_6 s_6 + i_5 s_5) \lambda \\
 & + i_6 s_6] - i_4 s_2^2 \lambda^4 - (i_5 s_2^2 + 2 i_4 s_2 s_3) \lambda^3 - (i_5 s_2^2 + i_4 s_3^2 + 2 i_5 s_2 s_3) \lambda^2 \\
 & \cdot (2 i_6 s_2 s_3 + i_6 s_3^2) \lambda - i_6 s_3^2 \cdot i_1 [s_4^2 \lambda^4 + 2 s_4 s_5 \lambda^3 + (s_5^2 + 2 s_4 s_6) \lambda^2 \\
 & + 2 s_5 s_6 \lambda + s_6^2]) + s_1 (i_2 i_4 s_2 \lambda^4 + [s_2 (i_3 i_4 + i_2 i_5) + i_2 i_4 s_3] \lambda^3 \\
 & + [s_3 (i_3 i_4 + i_2 i_5) + s_2 (i_3 i_5 + i_2 i_6)]) \lambda^2 + [s_3 (i_3 i_5 + i_2 i_6) + i_3 i_5 s_2] \lambda \\
 & + i_3 i_6 s_3 - s_1 [i_4^2 \lambda^4 + 2 i_4 i_5 \lambda^3 + (i_5^2 + 2 i_4 i_6) \lambda^2 + 2 i_5 i_6 \lambda + i_6^2] \cdot i_2^2 s_4 \lambda^4 \\
 & \cdot (i_2^2 s_5 + 2 i_2 i_3 s_4) \lambda^3 - (i_3^2 s_4 + 2 i_2 i_3 s_5 + i_2^2 s_6) \lambda^2 + (2 i_2 i_3 s_6 + i_3^2 s_5) \lambda \\
 & - i_3^2 s_6) = 0
 \end{aligned}$$

Factorizando la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1 \{ (i_2 s_2 s_4 + 2 s_1 i_4 s_4 - i_4 s_2^2 - i_1 s_4^2) \lambda^4 + [s_4 (i_3 s_2 + i_2 s_3) + i_2 s_2 s_6 \\
 & + 2 s_1 (i_5 s_4 + i_4 s_6) - i_5 s_2^2 - 2 i_4 s_2 s_3 - 2 i_1 s_4 s_6] \lambda^3 + [i_2 s_2 s_6 + i_3 s_3 s_4 \\
 & + (i_3 s_2 + i_2 s_3) s_6 + 2 s_1 (i_4 s_6 + i_6 s_4 + i_5 s_6) - i_6 s_2^2 - i_4 s_3^2 - 2 i_5 s_2 s_3 \\
 & - i_1 (s_6^2 + 2 s_4 s_6)] \lambda^2 + [s_6 (i_3 s_2 + i_2 s_3) + i_3 s_3 s_6 + 2 s_1 (i_6 s_6 + i_5 s_6) \\
 & - 2 i_6 s_2 s_3 + i_5 s_3^2 - 2 i_1 s_6 s_6] \lambda + i_3 s_3 s_6 + 2 i_6 s_1 s_6 - i_6 s_3^2 - i_1 s_6^2 \} \\
 & + \lambda_1 \{ (i_2 i_4 s_2 - i_4^2 s_1 - i_2^2 s_4) \lambda^4 + [s_2 (i_3 i_4 + i_2 i_5) + i_2 i_4 s_3 - 2 i_4 i_5 s_1 \\
 & - i_2 (i_2 s_6 + 2 i_3 s_4)] \lambda^3 + [s_3 (i_3 i_4 + i_2 i_5) + s_2 (i_3 i_5 + i_2 i_6) - s_1 (i_6^2 + 2 i_4 i_6) \\
 & - i_3^2 s_4 - 2 i_2 i_3 s_6 - i_2^2 s_6] \lambda^2 + [s_3 (i_3 i_5 + i_2 i_6) + i_3 i_5 s_2 - 2 i_5 i_6 s_1 \\
 & - 2 i_2 i_3 s_6 - i_3^2 s_6] \lambda + i_3 i_5 s_3 - i_6^2 s_1 - i_3^2 s_6 \} = 0
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

y agrupando los coeficientes de  $\lambda$  en:

$$\alpha_6 = i_1 \{ (i_2 s_2 + 2 i_4 s_1 - i_1 s_4) s_4 - i_4 s_2^2 \} + s_1 \{ i_4 (i_2 s_2 - i_4 s_1) - i_4^2 s_4 \} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_4 = i_1 \{ & s_4 (i_3 s_2 + i_2 s_3) + 2 s_1 (i_5 s_4 + i_4 s_6) + s_2 (i_2 s_6 - i_5 s_2 - 2 i_4 s_3) - 2 i_1 s_4 s_6 \\
 & + s_1 \{ s_2 (i_3 i_4 + i_2 i_5) - i_2 (i_2 s_6 + 2 i_3 s_4) + i_2 i_4 s_3 - 2 i_4 i_5 s_1 \} \}
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 = i_1 \{ & s_6 (i_3 s_2 + i_2 s_3) + 2 s_1 (i_4 s_6 + i_6 s_4 + i_5 s_6) + s_2 (i_2 s_6 - i_5 s_2) \\
 & + s_3 (i_3 s_4 - i_4 s_3 - 2 i_5 s_2) - i_1 (s_6^2 + 2 s_4 s_6) \} + s_1 \{ s_3 (i_3 i_4 + i_2 i_5) \\
 & + s_2 (i_3 i_5 + i_2 i_6) - s_1 (i_6^2 + 2 i_4 i_6) - i_3^2 s_4 - 2 i_2 i_3 s_6 - i_2^2 s_6 \}
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 = i_1 \{ & s_6 (i_3 s_2 + i_2 s_3) + i_3 s_3 s_6 + 2 s_1 (i_6 s_6 + i_5 s_6) - 2 i_6 s_2 s_3 - i_5 s_3^2 - 2 i_1 s_6 s_6 \\
 & + s_1 \{ s_3 (i_3 i_5 + i_2 i_6) + i_3 i_5 s_2 - 2 i_5 i_6 s_1 - 2 i_2 i_3 s_6 - i_3^2 s_6 \} \}
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\alpha_1 = i_1 \{ i_3 s_3 s_6 + 2 i_6 s_1 s_6 - i_6 s_3^2 - i_1 s_6^2 \} + s_1 \{ i_3 i_5 s_3 - i_6^2 s_1 - i_3^2 s_6 \} \tag{A.37}$$

La ecuación (A.32) se puede escribir más fácil como:

$$\alpha_5 \lambda^4 + \alpha_4 \lambda^3 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_1 = 0 \tag{A.38}$$

Que es un polinomio en  $\lambda$  cuyas raíces son la solución del sistema (A.23), cuando satisfacen simultáneamente sus dos ecuaciones.

## APENDICE B.

El Sistema formado por las ecuaciones (4.1), (4.2) y de la (4.9) a la (4.11)

$$\lambda' = x_A y_B \quad (4.1)$$

$$\mu' = y_A y_B \quad (4.2)$$

$$x_A = p_1 \lambda' + q_1 \mu' + t_1 \quad (4.9)$$

$$y_A = p_2 \lambda' + q_2 \mu' + t_2 \quad (4.10)$$

$$y_B = p_3 \lambda' + q_3 \mu' + t_3 \quad (4.11)$$

forman un sistema algebraico no lineal de 5 ecuaciones con 5 incognitas, y su solución se presenta en este apéndice.

Sustituyendo las ecuaciones (4.1) y (4.2) en la ecuación (4.11), se tiene:

$$y_B = p_3 x_A y_B + q_3 y_A y_B + t_3 \quad (B.1)$$

Eliminando  $\mu'$  de las ecuaciones (4.9) y (4.11), y haciendo las operaciones necesarias, se llega a:

$$q_3 x_A + (p_3 q_1 - p_1 q_3) \lambda' = q_1 y_B + q_3 t_1 - q_1 t_3$$

Sustituyendo en esta expresión la ecuación (4.1),

$$q_3 x_A + (p_3 q_1 - p_1 q_3) x_A y_B = q_1 y_B + q_3 t_1 - q_1 t_3$$

y despejando  $x_A$ , se tiene:

$$x_A = \frac{q_1 y_B + q_3 t_1 - q_1 t_3}{q_3 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) y_B} \quad (4.12)$$

De la misma manera se elimina  $\lambda'$  de las ecuaciones (4.10) y (4.11), resultando:

$$P_3 Y_A + (P_2 Q_3 - P_3 Q_2) \lambda' = P_2 Y_B + P_3 t_2 - P_2 t_3$$

Asimismo, sustituyendo la ecuación (4.2) en esta última, se tiene:

$$P_3 Y_A + (P_2 Q_3 - P_3 Q_2) Y_A Y_B = P_2 Y_B + P_3 t_2 - P_2 t_3$$

y al despejar  $Y_A$ , resulta:

$$Y_A = \frac{P_2 Y_B + P_3 t_2 - P_2 t_3}{P_3 + (P_2 Q_3 - P_3 Q_2) Y_B} \quad (4.13)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (4.12) y (4.13) en (B.1) e igualando a cero,  $Y_B$  puede expresarse como :

$$P_3 Y_B \frac{Q_1 Y_B + Q_3 t_1 - Q_1 t_3}{Q_3 + (P_3 Q_1 - P_1 Q_3) Y_B} + Q_3 Y_B \frac{P_2 Y_B + P_3 t_2 - P_2 t_3}{P_3 + (P_2 Q_3 - P_3 Q_2) Y_B} \cdot Y_B + t_3 = 0$$

Este polinomio puede simplificarse, sacando común denominador, agrupando los términos comunes y reacomodando los que contienen  $Y_B$ , de la siguiente forma :

$$(P_2 Q_1 - P_1 Q_2) Y_B^3 + (P_1 + P_2 Q_3 t_1 - P_3 Q_2 t_1 + P_1 Q_2 t_3 + Q_2 + P_3 Q_1 t_2 - P_2 Q_1 t_3 - P_1 Q_3 t_2) Y_B^2 + (-Q_2 t_3 + P_3 t_1 - P_1 t_3 - 1 + Q_3 t_2) Y_B + t_3 = 0$$

Por último, si hacemos que el coeficiente de  $y_B^3$  sea  $\beta_4$ ; el de  $y_B^2$ ,  $\beta_3$ ; el de  $y_B$ ,  $\beta_2$ ; y el término independiente  $\beta_1$ , este polinomio resulta:

$$\beta_4 y_B^3 + \beta_3 y_B^2 + \beta_2 y_B + \beta_1 = 0 \quad (4.14)$$

Las raíces de este polinomio se sustituyen en las ecuaciones (4.12) y (4.13) para obtener los valores de  $x_A$  y  $y_A$ , que son la solución del sistema.

### APENDICE C

#### SOLUCION NUMERICA PARA LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS DE GRADO MAYOR QUE 2 POR EL METODO DE GRAEFFE

La forma general de las ecuaciones algebraicas de grado  $n$  puede definirse como una función:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (C.1)$$

$$n = 3, 4, \dots, n$$

Esta expresión tiene  $n$  raíces,  $x_i$  ( $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ), cuando  $n$  es impar tendrá al menos una raíz real, si  $n$  es par puede o no tener raíces reales.

El método de Graeffe se usa para resolver numéricamente este tipo de ecuaciones y se basa en la obtención de polinomios derivados a partir del original.

Los polinomios son del mismo grado, y con coeficientes relacionados con las raíces del original.

Las raíces del  $m$ -ésimo polinomio derivado, son las mismas raíces del polinomio original pero elevadas a la potencia  $m$  y con signo negativo.

#### DERIVACION DEL POLINOMIO ORIGINAL

Multiplicando miembro a miembro el polinomio (C.1), por otro del mismo grado, como:

$$f(-x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} a_1 x^{n-1} + (-1)^{n-2} a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 - a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (C.2)$$

pero con raíces  $-x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), se obtiene un nuevo polinomio pero de grado  $2n$ , que es :

$$\begin{aligned}
 f(x)f(-x) &= (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n-1} (a_1^2 - 2a_2) x^{2n-2} \\
 &\quad + (-1)^{n-2} (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) x^{2n-4} \\
 &\quad + \dots + (a_{n-2}^2 - 2a_{n-3} a_{n-1} + 2a_{n-4} a_n) x^4 \\
 &\quad - (a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} a_n) x^2 + a_n = 0
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Este polinomio tiene las siguientes características:

- 1) Sus exponentes son todos pares.
- 2) Sus coeficientes son el cuadrado de los coeficientes del original, menos el doble producto del coeficiente anterior por el siguiente, más el doble producto del subsiguiente por el penúltimo y así sucesivamente.
- 3) Los signos de sus coeficientes se van alternando, pero el último es siempre positivo.
- 4) Las raíces son el cuadrado negativo del polinomio original.

Para que este polinomio sea del mismo grado que el original, se simplifica haciendo un cambio de variable,

$$y = -x^2$$

resultando el primer polinomio derivado:

$$\begin{aligned}
 f(y) &= y^n + (a_1^2 - 2a_2) y^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) y^{n-2} \\
 &\quad + (a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_6) y^{n-3} + \dots \\
 &\quad + (a_{n-2}^2 - 2a_{n-3} a_{n-1} + 2a_{n-4} a_n) y^2 + (a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} a_n) y + a_n^2 = 0
 \end{aligned}$$

que en forma simplificada, se puede escribir:

$$f(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_{n-2} y^2 + b_{n-1} y + b_n = 0 \quad (C.4)$$

donde:

$$b_1 = a_1^2 - 2 a_2$$

$$b_2 = a_2^2 - 2 a_1 a_3 + 2 a_4$$

$$b_3 = a_3^2 - 2 a_2 a_4 + 2 a_1 a_5 - 2 a_6$$

(C.5)

$$b_{n-1} = a_{n-1}^2 - 2 a_{n-2} a_n$$

$$b_n = a_n^2$$

El polinomio (C.5) es el primer derivado del original, y sus raíces  $y_i$  ( $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ) son los cuadrados negativos del original, por el cambio de variable  $y_i = -x_i^2$ .

Al obtener el segundo derivado, éste tendrá raíces que serán la cuarta potencia del polinomio original, pero con signo negativo,  $-x_i^4$ .

Entonces si  $m$  es el indicador correspondiente a la potencia de las raíces del polinomio derivado, con respecto a las raíces del polinomio original, se tiene que:

$m = 1$  para el original;

$m = 2$  para el primer derivado;

$m = 4$  para el segundo;

$m = 8$  para el tercero y

$m = 2^n$  para el  $n$ -ésimo derivado.

Este procedimiento de derivación, continúa hasta que los coeficientes del último polinomio sean prácticamente el cuadrado de los coeficientes del penúltimo.

## OBTENCION DE RAICES.

Como el polinomio (C.1) tiene  $n$  raíces  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), puede factorizarse como:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = 0$$

y su desarrollo es

$$\begin{aligned} f(x) = & x^n \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x^{n-1} + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 \\ & + \dots + x_2 x_n + x_3 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n) x^{n-2} - (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 \\ & + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) x^{n-3} + \dots + (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n = 0 \end{aligned} \quad (C.6)$$

Comparando las expresiones (C.1) y (C.5), se puede ver que existe la siguiente relación entre los coeficientes y las raíces del polinomio:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -x_1 - x_2 - \dots - x_n \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \\ a_3 &= -x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_4 - \dots - x_{n-2} x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \end{aligned} \right\} (C.7)$$

Si se introduce un nuevo cambio de variable,

$$x_i = -r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

para evitar que los signos de los coeficientes se alternen durante el proceso de obtención de los polinomios derivados, las relaciones (C.6), quedan:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= r_1 + r_2 + \dots + r_n \\
 a_2 &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n \\
 a_3 &= r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n \\
 &\vdots \\
 a_n &= r_1 r_2 r_3 \dots r_n
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{aligned}} \right\} \quad (C.8)$$

Sustituyendo esta última relación en (C.5), y desarrollando el algebra, se obtienen las relaciones de los coeficientes del último polinomio derivado con las raíces del polinomio original :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= r_1^m + r_2^m + \dots + r_n^m \\
 b_2 &= r_1^m r_2^m + r_1^m r_3^m + \dots + r_{n-1}^m r_n^m \\
 b_3 &= r_1^m r_2^m r_3^m + r_1^m r_2^m r_4^m + \dots + r_{n-2}^m r_{n-1}^m r_n^m \\
 &\vdots \\
 b_n &= r_1^m r_2^m \dots r_n^m
 \end{aligned}
 \quad (C.9)$$

Tomando en cuenta que los valores absolutos de las raíces  $r_i$ , están ordenadas de tal forma que:

$$|r_1| > |r_2| > |r_3| > \dots > |r_n|,$$

y que para la  $m$ -ésima potencia se cumple:

$$r_1^m \gg r_2^m \gg r_3^m \gg \dots \gg r_n^m$$

entonces esto significa que sólo el primer término de cada coeficiente  $b_i$  es el predominante, y por lo tanto (C.9) se reduce a:

$$b_1 \cong r_1^m$$

$$b_2 \cong r_1^m r_2^m$$

$$b_3 \cong r_1^m r_2^m r_3^m$$

$$b_n \cong r_1^m r_2^m r_3^m \dots r_n^m$$

Despejando los valores  $r_i$  de manera sucesiva, se tiene que:

$$r_1 = \pm (b_1)^{1/m}$$

$$r_2 = \pm (b_2/b_1)^{1/m}$$

$$r_3 = \pm (b_3/b_2)^{1/m}$$

$$r_n = \pm (b_n/b_{n-1})^{1/m}$$

Una vez halladas las raíces  $r_i$  del  $m$ -ésimo polinomio derivado, es sencillo obtener las raíces del polinomio original mediante la relación:

$$x_i = -r_i$$

Para conocer si las raíces son positivas o negativas, se sustituyen con el signo supuesto ( $\pm$ ) en el polinomio original (C.1), si lo satisfacen, la solución es la correcta, si no, se usa el signo contrario.

Ejemplo C1.- El polinomio de cuarto grado en  $\lambda$  obtenido en la trayectoria:

Posición	x[m]	y[m]	$\theta(^{\circ})$
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 10
R <sub>2</sub>	- 0.340	- 0.190	- 12
R <sub>3</sub>	- 0.490	- 0.220	- 11
R <sub>4</sub>	- 0.695	- 0.275	4

es:

$$22.0497\lambda^4 + 17.4955\lambda^3 + 1.6575\lambda^2 - 0.2604\lambda - 2.849 \cdot 10^{-2} = 0$$

y para resolverlo por el método numérico de Graeffe, se necesita que el coeficiente de la variable en su más alto grado sea 1, por lo tanto debe dividirse entre el coeficiente de  $\lambda^4$ , 22.0497, quedando:

$$\lambda^4 + 0.7934\lambda^3 + 7.517 \cdot 10^{-2}\lambda^2 - 1.185 \cdot 10^{-2}\lambda - 1.292 \cdot 10^{-3} = 0$$

Sus polinomios derivados, se pueden obtener por medio de una tabulación como la de la tabla T 5.

TABLA T C.1 SOLUCION NUMERICA DEL POLINOMIO

$$\lambda^4 + 0.793455439\lambda^3 + 7.517 \cdot 10^{-2}\lambda^2 - 1.181 \cdot 10^{-2}\lambda - 1.292 \cdot 10^{-3} = 0$$

m	$A\lambda^4$	$B\lambda^3$	$C\lambda^2$	$D\lambda$	E
1	1	0.793455439	$7.517 \cdot 10^{-2}$	$- 1.181 \cdot 10^{-2}$	$- 1.292 \cdot 10^{-3}$
2	1	0.479225107	0.0218079287	$3.337 \cdot 10^{-4}$	$1.670 \cdot 10^{-6}$
4	1	0.186040846	$1.590 \cdot 10^{-4}$	$3.385 \cdot 10^{-9}$	$2.789 \cdot 10^{-12}$
8	1	$3.429 \cdot 10^{-2}$	$1.094 \cdot 10^{-8}$	$6.000 \cdot 10^{-16}$	$7.778 \cdot 10^{-24}$
16	1	$1.175 \cdot 10^{-3}$	$7.864 \cdot 10^{-17}$	$1.897 \cdot 10^{-31}$	$6.051 \cdot 10^{-47}$
32	1	$1.382 \cdot 10^{-6}$	$5.739 \cdot 10^{-33}$	$2.647 \cdot 10^{-62}$	$3.661 \cdot 10^{-93}$

La tabla se construye colocando en cada columna los coeficientes de cada término del polinomio, empezando por el de más alto grado y terminando con el independiente.

En el primer renglón se pondrá en orden sucesivo los coeficientes del polinomio original,  $m = 1$ ; y los coeficientes de los polinomios derivados se colocan a partir del segundo renglón,  $m = 2, 4, \dots, n$ .

Cada uno de los coeficientes del polinomio derivado se obtiene elevando al cuadrado el mismo coeficiente del polinomio anterior menos el doble del producto de los coeficientes vecinos del mismo polinomio, más el doble del producto de los siguientes y así sucesivamente, pero alternando los signos, es decir:

$$A_2 = 1;$$

$$B_2 = B_1^2 - 2 A_1 C_1;$$

$$C_2 = C_1^2 - 2 B_1 D_1 + 2 A_1 E_1$$

y así sucesivamente.

En esta tabla se puede identificar fácilmente si existen raíces complejas, esto sucede si en algún polinomio derivado aparece un coeficiente con signo negativo.

Como en este caso no aparece ninguno, entonces todas las raíces son reales, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= B(1/m) \\ &= (1.382 * 10^{-6})(1/32) \\ &= \pm 0.6559\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= (C/B)(1/m) \\ &= (5.739 * 10^{-33}/1.382 * 10^{-6})(1/32) \\ &= \pm 0.1498\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= (D/C)(1/m) \\ &= (2.647 * 10^{-62}/5.739 * 10^{-33})(1/32) \\ &= \pm 0.1211\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= (E/D)(1/m) \\ &= \pm 0.1085\end{aligned}$$

Para comprobar cuál es el signo real de la raíz, se hace la división sintética, es decir, que la ecuación:

$$f(\lambda) = A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E$$

se transforma en:

$$f(\lambda) = \lambda(\lambda(\lambda(A\lambda + B) + C) + D) + E$$

después se sustituyen los valores de  $\pm\lambda_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), y el signo que satisface  $f(\lambda)=0$ , es el correcto, resultando:

$$\lambda_1 = -0.6559$$

$$\lambda_2 = -0.1498$$

$$\lambda_3 = 0.1211$$

$$\lambda_4 = -0.1086$$

Ejemplo C2.- El polinomio resultante para la trayectoria:

Posición	x[m]	y-[m]	$\theta(^{\circ})$
R <sub>0</sub>	0	0	0
R <sub>1</sub>	- 0.155	- 0.110	- 5
R <sub>2</sub>	- 0.490	- 0.220	5
R <sub>3</sub>	- 0.695	- 0.275	0

Cuando  $x_B = -0.650$ , resulta:

$$y_B^3 + 3.8591 y_B^2 - 14.6766 y_B + 4.0349 = 0$$

Los polinomios derivados de esta ecuación se muestran en la tabla T C.2.

TABLA T C.2 SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION:

$$y_B^3 + 3.8591 y_B^2 - 14.6766 y_B + 7.0349 = 0$$

m	A	B	C	D
1	1	3.8590	- 14.6766	4.03492
2	1	44.2456	184.2605	16.2807
4	1	1589.1539	32511.2575	265.0621
8	1	2260398.615	1056139416	70257.9520
16	1	6.051 * 10 <sup>12</sup>	1.115 * 10 <sup>18</sup>	4.936 * 10 <sup>9</sup>

Sus raíces son:

$$y_{B1} = \pm 6.2931$$

$$y_{B2} = \pm 2.1335$$

$$y_{B3} = \pm 0.3005$$

Por medio de división sintética, se comprueba el signo correcto de cada raíz, resultando:

$$y_{B1} = - 6.2931$$

$$y_{B2} = 2.1335$$

$$y_{B3} = 0.3005$$

APENDICE D

CALCULO DEL VALOR DE LA INTEGRAL S

El ángulo de transmisión  $\mu$ , se obtiene en función de las barras, a, b, c, d y del ángulo de entrada  $\psi$ , aplicando la ley de los cosenos a los dos triángulos en los que se divide el mecanismo mostrado en la fig. D.1, mediante la expresión:

$$a^2 + d^2 - 2 a d \cos \psi = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \mu$$

Despejando  $\cos \mu$ , se tiene:

$$\cos \mu = \frac{b^2 + c^2 + 2 a d \cos \psi - a^2 - d^2}{2 b c} \quad (D.1)$$

El valor mínimo de  $\cos \mu$  lo podemos encontrar mediante la expresión

$$S = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos^2 \mu \, d\psi \quad (D.3)$$

Para poder calcular esta integral se separan los términos de la ecuación (D.1), de la siguiente forma:

$$\cos \mu = \frac{a d}{b c} \cos \psi + \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2 b c}$$



Elevando al cuadrado esta expresión,

$$\cos^2 \mu = \frac{a^2 d^2}{b^2 c^2} \cos^2 \Psi + \frac{ad (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{b^2 c^2} \cos \Psi + \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} \right)^2$$

e integrando, se obtiene

$$\int \cos^2 \mu d\Psi = \frac{a^2 d^2}{b^2 c^2} \int \cos^2 \Psi d\Psi + \frac{ad (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{b^2 c^2} \int \cos \Psi d\Psi + \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} \right)^2 \int d\Psi \quad (D.4)$$

Para calcular la expresión (D.4), se debe calcular primero:

$$\int \cos^2 \Psi d\Psi,$$

que al integrarse por partes resulta:

$$\int \cos^2 \Psi d\Psi = \frac{\Psi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\Psi}{4} \quad (D.5)$$

Sustituyendo (D.5) en (D.4),

$$\int \cos^2 \mu d \Psi = \left(\frac{a d}{b c}\right)^2 \left(\frac{\Psi}{2} + \frac{\text{sen } 2\Psi}{4}\right) + \frac{a d (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{(b c)^2} \text{sen } \Psi + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2 b c}\right)^2 \Psi$$

y finalmente integrando entre límites, la expresión (D.3) resulta:

$$\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \cos^2 \mu d \Psi = \left(\frac{a d}{b c}\right)^2 \left(\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{2} + \frac{\text{sen } 2\Psi_2 - \text{sen } 2\Psi_1}{4}\right) + \frac{a d (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{(b c)^2} (\text{sen } \Psi_2 - \text{sen } \Psi_1) + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2 b c}\right)^2 (\Psi_2 - \Psi_1) \quad (\text{D.6})$$

La expresión (D.6), se puede reescribir más fácilmente haciendo:

$$K = b^2 - c^2 - a^2 - d^2 \quad (\text{D.7.1})$$

$$L = b c \quad (\text{D.7.2})$$

$$M = a d \quad (\text{D.7.3})$$

lo que da como resultado:

$$\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \cos^2 \mu \, d\Psi = \left(\frac{M}{L}\right)^2 \left( \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)\pi}{360} + \frac{\sin 2\Psi_2 - \sin 2\Psi_1}{4} \right) + \frac{M K}{L^2} (\sin \Psi_2 - \sin \Psi_1) + \left(\frac{K}{L}\right)^2 \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{720} \quad (D.8)$$

Como  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son los ángulos formados por la barra a en las posiciones inicial y final del mecanismo, durante la conducción del cuerpo rígido, con la barra de tierra d, entonces se pueden calcular haciendo el producto escalar entre los vectores a y d de la siguiente forma:

$$[a] \cdot [d] = a d \cos \Psi$$

y despejando,

$$\Psi = \cos^{-1} \frac{[a] \cdot [d]}{a d}$$

Esta ecuación, para la posición 1 es:

$$\Psi_1 = \cos^{-1} \frac{[a]_1 \cdot [d]}{a d} \quad (D.9)$$

y para la 2:

$$\Psi_2 = \cos^{-1} \frac{[a]_2 \cdot [d]}{a d} \quad (D.10)$$

El vector [d], que es la barra de tierra se calcula de la ecuación vectorial:

$$[d] = \begin{bmatrix} x_B^* - x_B \\ y_B^* - y_B \end{bmatrix} \quad (D.11)$$

y  $[a]_1$  a partir de las coordenadas de los puntos circular y central de la diada de entrada ( fig. D2), mediante

$$[a]_1 = [z]_1 - [u] \quad (D.12)$$

donde

$$[z]_1 = [x_A \ y_A]^T \quad y \quad (D.13)$$

$$[u] = [x_B \ y_B]^T \quad (D.14)$$

Sustituyendo (D.13) y (D.14) en (D.12)

$$[a]_1 = [x_A \ y_A]^T - [x_B \ y_B]^T \quad (D.15)$$

El vector  $[a]_2$  se obtiene girando  $[a]_1$  hasta que el punto  $R_1$  llega al final de su trayectoria en  $R_2(x_2, y_2)$  y se calcula de:

$$[a]_2 = [r]_2 + [z]_2 - [u] \quad (D.16)$$

donde:

$$[r]_2 = [x_2 \ y_2]^T \quad (D.17)$$

$$[z]_2 = [Q]_{21} [z]_1 \quad (D.18)$$

y

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (D.19)$$

es la matriz de rotación del vector  $[z]$  desde su posición 1 hasta la 2.

Sustituyendo las ecuaciones (D.14), (D.17), (D.18) y (D.19) en la (D.15), se pueden conocer las componentes del vector  $[a]$  girado  $\theta = \psi_2 - \psi_1$  grados, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [a]_2 &= [x_2 - x_B + x_A \cos\theta - y_A \operatorname{sen}\theta] & (D.20) \\ [y_2 - y_B + x_A \operatorname{sen}\theta + y_A \cos\theta] \end{aligned}$$

El producto escalar entre los vectores  $[a]_1$  y  $[a]_2$  con  $[d]$ , así como el producto de sus magnitudes, se sustituyen en las ecuaciones (D.9) y (D.10), para hallar los valores del ángulo de entrada  $\psi$  en las posiciones inicial y final del mecanismo durante su trayectoria.

Los valores de  $\psi_1$  y  $\psi_2$  así obtenidos, se sustituyen en la ecuación (D.8) para conocer el valor de la integral.

Las constantes (D.7) pueden calcularse con

$$[b] = [x_A^* - x_A \quad y_A^* - y_A]^T \quad (D.21)$$

$$[c] = [x_A^* - x_B^* \quad y_A^* - y_B^*]^T \quad (D.22)$$

mediante la fórmula de la distancia.

D.1 CALCULO DEL VALOR DE S PARA LOS MECANISMOS 1, 2 y 3.  
QUE GENERAN LA SEGUNDA CONFIGURACION

PARA EL MECANISMO # 1.

Datos:

De la tabla T 5.24 tenemos, para la posición inicial:

$$x_A = 0.623$$

$$y_A = 0.247$$

$$x_B = 0.2$$

$$y_B = 0.334$$

$$x_{A^*} = 0.315$$

$$y_{A^*} = 0.020$$

$$x_{B^*} = -0.2$$

$$y_{B^*} = 0.351$$

y sustituyendolos en la ecuación (D.14)

$$[a]_1 = [0.423 \quad -0.087]^T$$

y

$$a = 0.432$$

El vector [d], se halla de la ecuación (D.10)

$$[d] = [-0.4 \quad 0.017]^T$$

y

$$d = 0.4$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación (D.9) y haciendo operaciones, se tiene:

$$\Psi_1 = \cos^{-1} \frac{-0.423 * 0.4 - 0.087 * 0.01}{0.432 * 0.4}$$

resultando:

$$\Psi_1 = 171.01^\circ$$

Para su posición final, usando los valores de  $a$  y  $d$ , que son constantes, la ecuación (D.20) con los valores de la tabla T 5.24 que son:

$$x_2 = - 0.695$$

$$y_2 = - 0.275$$

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$\theta = 4^\circ$$

se obtiene:

$$\{a\}_2 = [-0.291 \quad -0.319]^T$$

y de la ecuación (D.9)

$$\Psi_2 = 50.04^\circ$$

Con los valores de  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ , y los de las constantes (D.7) calculadas a partir de las ecuaciones (D.21) y (D.22),

$$b = 0.383$$

$$c = 0.612$$

$$\begin{aligned} K &= b^2 + c^2 - a^2 - d^2 \\ &= 0.383^2 + 0.612^2 - 0.432^2 - 0.4^2 \\ &= 0.174609 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= b c \\ &= 0.383 * 0.612 \\ &= 0.234396 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M &= a d \\ &= 0.432 * 0.4 \\ &= 0.1728 \end{aligned}$$

se calcula el valor de la integral S en la ecuación (D.8):

$$\begin{aligned}
 S_1 = & \left( \frac{0.1738}{0.234396} \right)^2 \left( \frac{(171.01 - 50.04) \pi}{360} \right. \\
 & \left. \frac{\text{sen } 342.02 - \text{sen } 100.08}{4} \right. \\
 & + \frac{0.1728 * 0.174609}{0.237396^2} (\text{sen } 171.01 - \text{sen } 50.04) \\
 & \left. + \left( \frac{0.174609}{0.234696} \right)^2 \frac{(171.01 - 50.04) \pi}{720} \right)
 \end{aligned}$$

$$S_1 = 0.3558$$

#### PARA EL MECANISMO # 2

Datos:

De la tabla T 5.24

$$x_A = 0.623$$

$$y_A = 0.247$$

$$x_B = 0.2$$

$$y_B = 0.334$$

$$x_{A^*} = 0.458$$

$$y_{A^*} = 0.142$$

$$x_{B^*} = 0.0$$

$$y_{B^*} = 0.324$$

$$\theta = 4^\circ$$

como la diada de entrada es igual a la del mecanismo #1

$$[a]_1 = [0.423 \quad -0.087]^T$$

$$[a]_2 = [-0.291 \quad -0.319]^T$$

y

$$a = 0.432$$

asimismo de la ecuación (D.10)

$$[d] = [-0.2 \quad -0.01]^T$$

que sustituyendo en (D.9) y (D.10):

$$\Psi_1 = 165.71^\circ$$

$$\Psi_2 = 44.72^\circ$$

Para obtener el valor de la integral S, se hacen sustituciones en las ecuaciones (D.21), (D.22) y (D7):

$$b = 0.196$$

$$c = 0.493$$

$$K = b^2 + c^2 - a^2 - d^2$$

$$= 0.196^2 + 0.493^2 - 0.432^2 - 0.2^2$$

$$= 0.054841$$

$$L = 0.096628$$

$$M = 0.0864$$

y sustituyendo en (D.8)

$$S_2 = 0.48694$$

PARA EL MECANISMO # 3.

Datos, de la tabla T 5.24:

$$x_A = 0.623$$

$$y_A = 0.247$$

$$x_B = 0.2$$

$$y_B = 0.334$$

$$x_{A^*} = 0.539$$

$$y_{A^*} = 0.196$$

$$x_{B^*} = 0.1$$

$$y_{B^*} = 0.326$$

$$\theta = 4^\circ$$

Haciendo todos los cálculos de la misma manera que para los dos primeros mecanismos, se obtienen los valores siguientes:

$$[a]_1 = [0.423 \quad -0.087]^T$$

$$[a]_2 = [-0.291 \quad -0.319]^T$$

$$a = 0.432$$

$$b = 0.098$$

$$c = 0.458$$

$$[d] = [-0.2 \quad -0.01]^T$$

$$d = 0.1$$

$$\psi_1 = 164.38^\circ$$

$$\psi_2 = 42.89^\circ$$

y el valor de la integral es:

$$S_3 = 0.5666$$

D.2 CALCULO DEL VALOR DE S PARA LOS MECANISMOS 1, y 2.  
QUE GENERAN LA ENESIMA CONFIGURACION

Así como se desarrollaron los cálculos para conocer los parámetros de los mecanismos que generan la segunda trayectoria, se hacen los mismos cálculos para conocer los parámetros de los mecanismos que generan la enésima configuración.

PARA EL MECANISMO # 1

Datos:

De la tabla T 5.28

$$x_A = 0.624$$

$$y_A = 0.271$$

$$x_B = 0.2$$

$$y_B = 0.357$$

$$x_{A^*} = 0.367$$

$$y_{A^*} = 0.083$$

$$x_{B^*} = -0.124$$

$$y_{B^*} = 0.348$$

$$\theta = 3.6^\circ$$

Del desarrollo de los cálculos se obtienen:

$$[a]_1 = [0.424 \quad 0.086]^T$$

$$[a]_2 = [-0.289 \quad -0.322]^T$$

$$a = 0.433$$

$$[d] = [-0.324 \quad -0.009]^T$$

$$d = 0.324$$

$$b = 0.318$$

$$c = 0.558$$

$$\Psi_1 = 169.97^\circ$$

$$\Psi_2 = 46.52^\circ$$

y el valor de la integral

$$S_1 = 0.4153$$

PARA EL MECANISMO #2

Datos:

De la tabla T 5.28

$$x_A = 0.624$$

$$y_A = 0.271$$

$$x_B = 0.2$$

$$y_B = 0.357$$

$$x_{A^*} = 0.316$$

$$y_{A^*} = 0.031$$

$$x_{B^*} = -0.2$$

$$y_{B^*} = 0.361$$

$$\theta = 3.6$$

Como la diada de entrada es igual a la del mecanismo #1,

$$[a]_1 = [0.424 \quad 0.086]^T$$

$$[a]_2 = [-0.289 \quad -0.322]^T$$

$$a = 0.433$$

$$[d] = [-0.4 \quad 0.004]^T$$

$$d = 0.4$$

$$b = 0.39$$

$$c = 0.612$$

$$\Psi_1 = 167.75$$

$$\Psi_2 = 48.7$$

con:

$$S_2 = 0.361$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Angeles Alvarez, F. J., Análisis y Síntesis Cinemáticos de Sistemas Mecánicos. Limusa, 1978.
- [2] Hatenberg, S. P., Denavit J. Kinematics Synthesis of Linkages. Mc. Graw Hill, 1964.
- [3] James, M. L., Smith G. M., Wolford J. C. Applied Numerical Methods for Digital Computation with Fortrand., International Texbook Company, 1967.
- [4] Angeles Alvarez, F. J., Spatial Kinematics Chains Springer Verlag, 1979.
- [5] Strang, G. Algebra Lineal y sus Aplicaciones. Addison Wesley Iberoamericana, 1988.
- [6] Forsythe, G., Moler, O. B., Computer Solution of Linear Algebraic Systems. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs New Jersey, 1967.
- [7] Rojas
- [8] Rojas
- [9] Bottema O., Roth B., Theoretical Kinematics., North Holland Publishing Company, 1979.
- [10] Ortega, James M., Matrix Theory (2nd Courses). Plenum Press (New York and London), 1987.