

00384

5

leg.



# Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

División de Estudios de Postgrado

## ALGUNOS RESULTADOS EN LA TEORIA DE NUCLEOS EN DIGRAFICAS.

T E S I S

Que para obtener el Grado Académico de:  
DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P r e s e n t a :

M. en C. Hortensia Galeana Sánchez

México, D. F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# EJEMPLAR UNICO



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Mat. Víctor Neumann Lara el haberme guiado y haber colaborado en el presente trabajo.

Agradezco a los doctores:

- . Dr. Javier Bracho Carpizo
- . Dr. Gilberto Calvillo Vives
- . Dra. Mónica Clapp Jiménez Labora
- . Dr. Luis Montejano Peimbert
- . Dr. Carlos Prieto de Castro
- . Dra. Zenaida Elvira Ramos Zúñiga

Por haber aceptado integrar la comisión dictaminadora para la revisión del presente trabajo, así como sus valiosos comentarios y preguntas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## I N D I C E

- Capítulo 0. INTRODUCCION.
- Capítulo 1. CONCEPTOS Y RESULTADOS PRELIMINARES.
- Capítulo 2. UN TEOREMA A CERCA DE UNA CONJETURA DE H. MEYNIEL SOBRE  $R$ -DIGRAFICAS.  
ALGUNAS CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE UNA DIGRAFICA SEA  $R$ -DIGRAFICA.
- Capítulo 3.  $\delta$ -SISTEMAS Y  $\delta$ -EXTENSIONES.
- Capítulo 4.  $t$ -SISTEMAS Y  $t$ -EXTENSIONES.
- Capítulo 5.  $R^-$ -DIGRAFICAS Y NUMERO DICROMATICO.

## 1. INTRODUCCION,

El concepto de núcleo de una digráfica fue introducido por John Von Neumann y Oskar Morgenstern [18] en 1953 como herramienta de interés en la Teoría de Juegos.

Demostraron que toda digráfica finita sin ciclos posee un núcleo único. Posteriormente y ya con un enfoque puramente gráfico, Richardson [14], [15], [16] investigó diversas clases de digráficas que poseen núcleo. En particular encontró los siguientes resultados:

i) Las digráficas bipartitas (finitas o infinitas) tienen núcleo.

ii) Las digráficas finitas sin ciclos impares tienen núcleo.

La demostración original del Teorema de Richardson ii) es bastante complicada; en el año 1971 Victor Neumann Lara [12] introdujo el concepto de seminúcleo que permitió una nueva demostración mucho más simple.

En 1975 Romanowicz, Zbigniew [17] demostró que una digráfica en la cual cada ciclo impar no simétrico tiene una diagonal simétrica que es imparmente acíclica, tiene núcleo.

En 1976 H. Meyniel conjeturó que una digráfica en la cual cada ciclo impar posee dos pseudodiagonales es R-digráfica. Durante los años 1979, 1980 y 1981 P. Duchet y H. Meyniel [2], [3], [4] investigaron diversas clases de digráficas que son R-digráficas, analizando algunos casos particulares de la conjetura de H. Meyniel

y en particular encontraron los siguientes resultados:

Si todo ciclo impar de  $D$  posee dos cuerdas cortas cruzadas (es decir de la forma  $(x_k, x_{k+2})$  y  $(x_{k+1}, x_{k+3})$  para un ciclo  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ), entonces  $D$  es  $R$ -digráfica.

Si todo ciclo impar de  $D$  de longitud  $\geq 5$  posee dos cuerdas cortas no cruzadas entonces  $D$  es  $R$ -digráfica.

Si todo ciclo de  $D$  posee una flecha simétrica, entonces  $D$  es  $R$ -digráfica.

Si todo ciclo impar de  $D$  posee dos flechas simétricas, entonces  $D$  es  $R$ -digráfica.

En el presente trabajo, en el capítulo 2 se demuestra que si todo ciclo impar de  $D$  posee dos cuerdas cortas (es decir de la forma  $(x_k, x_{k+2})$  y  $(x_j, x_{j+2})$  para un ciclo  $(x_1, \dots, x_p)$  y  $D$  no contiene triángulos dirigidos, entonces  $D$  es  $R$ -digráfica. También se dan algunas condiciones sobre las diagonales de los ciclos impares de  $D$ , que son suficientes para que  $D$  sea  $R$ -digráfica. En el capítulo 3 se demuestra que no es posible caracterizar a las  $R^-$ -digráficas por medio de subdigráficas inducidas prohibidas ya que toda  $R$ -digráfica tiene una copia isomorfa que es subdigráfica inducida de alguna  $R^-$ -digráfica. En el capítulo 4 se dan algunas construcciones que están cercanamente relacionadas con la conjetura de H. Meyniel y algunas extensiones también relacionadas con la conjetura. En el capítulo 5 se demuestra que existen  $R^-$ -digráficas y  $R$ -digráficas de número dicromático dado y cuello 4.

### 1.1 CONCEPTOS PRELIMINARES.

Una *digráfica* o *gráfica dirigida*  $D$  es un par  $(V, F)$  donde  $V$  es un conjunto no vacío y  $F$  un subconjunto de  $V^2$  que no contiene pares de la forma  $(v, v)$ . Los elementos de  $V$  son los *vértices* de  $D$  y los de  $F$ , *las flechas*,

Si  $f = (v_1, v_2) \in F$  diremos que  $f$  va de  $v_1$  a  $v_2$  y que  $v_1$  y  $v_2$  son los *puntos terminales* de  $f$ , diremos que  $v_1$  es el *punto terminal inicial* de  $f$  y  $v_2$  es el *punto terminal final* de  $f$ , cuando no haya ambigüedad denotaremos también  $f = v_1 v_2$ . Si además  $v_1 \in S_1 \subseteq V$  y  $v_2 \in S_2 \subseteq V$ , se dirá que  $f$  va de  $v_1$  a  $S_2$ , de  $S_1$  a  $v_2$  y de  $S_1$  a  $S_2$ . Cuando  $(v_2, v_1) \in F$  diremos que  $f = (v_1, v_2)$  es una *flecha simétrica* de  $D$ .

En general se denotará por  $V(D)$  (o simplemente por  $V$ , si no hay ambigüedad] al conjunto de vértices de la digráfica  $D$  y por  $f(D)$  (ó  $F$ ) al de sus flechas.

Sea  $u \in V(D)$ , denotaremos por  $\Gamma_D^+(u)$  al conjunto de los vértices terminales finales de las flechas que tienen a  $u$  como vértice terminal inicial y  $\delta_D^+(u)$  denotará la cardinalidad de  $\Gamma_D^+(u)$  es decir  $\delta_D^+(u) = |\Gamma_D^+(u)|$ ,  $\Gamma_D^-(u)$  denotará al conjunto de los vértices terminales iniciales de flechas con vértice terminal final  $u$  y  $\delta_D^-(u) = |\Gamma_D^-(u)|$ .

Denotaremos por  $F_u^+(D)$  al conjunto de flechas de  $D$  con vértice terminal inicial  $u$  y  $F_u^-(D)$  al conjunto de flechas de  $D$  con

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

vértice terminal final  $u$ ,

Sea  $H$  una digráfica; diremos que  $H$  es una *subdigráfica* de  $D$  cuando  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ . Sea  $V_0 \subseteq V$ ,  $V_0 \neq \emptyset$ ; la *subdigráfica*  $D_0$  de  $D$  inducida por  $V_0$  se define como sigue:  $V(D_0) = V_0$  y  $F(D_0) = F(D) \cap V_0^2$  y se denota por  $D_0 = D[V_0]$ . Se dirá que  $D_0$  es una *subdigráfica plena o inducida* de  $D$  si es la subdigráfica de  $D$  inducida por  $V(D_0)$ . Una *subdigráfica generadora* es una subdigráfica de  $D$  cuyo conjunto de vértices es  $V(D)$ .

Sean  $S_1 \subseteq V(D)$ ,  $S_2 \subseteq V(D)$ ;  $S_1 \neq \emptyset$  y  $S_2 \neq \emptyset$ ; denotaremos por  $D[S_1, S_2]$  a la subdigráfica de  $D$  cuyo conjunto de vértices es  $S_1 \cup S_2$ , y cuyas flechas son las  $S_1 S_2$ -flechas de  $D$ .

La parte asimétrica de  $D$ , que se denotará  $\text{asim}(D)$  ó  $\text{asim}D$ , es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas de  $D$  que no son simétricas, es decir sus flechas son las flechas asimétricas de  $D$ , y  $\text{sim}(D)$  ó  $\text{sim}D$  es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas simétricas de  $D$ .

Un conjunto  $I \subseteq V(D)$  es independiente si  $F(D[I]) = \emptyset$ . Dadas dos digráficas  $D$  y  $H$  denotaremos  $D \cup H$  la unión de  $D$  y  $H$  que es la digráfica definida como sigue;

$$F(D \cup H) = F(D) \cup F(H) \quad \text{y} \quad V(D \cup H) = V(D) \cup V(H).$$

Si  $D_0$  es una subdigráfica de  $D$ , una flecha de  $D$  que no es flecha de  $D_0$  es una *pseudodiagonal* de  $D_0$  siempre que ambos puntos terminales de la flecha sean vértices de  $D_0$ . Si

$f = (v_1, v_2)$  con  $v_1 \in S_1 \subseteq V(D_0)$ ,  $v_2 \in S_2 \subseteq V(D_0)$  es una pseudodiagonal, se dirá que  $f$  es una  $v_1 S_2$ -pseudodiagonal de



$D_0$ , una  $S_1 S_2$ -pseudodiagonal de  $D_0$  ó una  $S_1 S_2$ -pseudodiagonal de  $D_0$ .

Sea  $f = (v_1, v_2)$  una pseudodiagonal de  $D_0$ , se dirá que  $f$  es una *diagonal* de  $D_0$  cuando  $(v_2, v_1) \notin F(D_0)$ .

Un *camino* es una sucesión  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  de vértices tal que  $(v_{i-1}, v_i) \in F$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  si  $v_0 = v_n$  el camino se llamará *camino cerrado*. La *longitud* del camino es  $n$  y si

$C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  es un camino denotamos su longitud por  $l(C)$ ; así  $l(C) = n$ .

Una *trayectoria* es un camino en el cual ningún vértice se repite, una trayectoria  $(u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  se dice que conecta o une  $u$  y  $v$  y la llamamos una *uv-trayectoria*.

Un *ciclo* es un camino cerrado  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  tal que cuando  $i \neq 0, n$  se tiene que  $v_i \neq v_j$  para toda  $i \neq j$ .

Diremos que un ciclo es un *ciclo impar* si su longitud es impar y un ciclo es un *ciclo par* cuando su longitud es par.

Sea  $D$  una digráfica, consideramos en  $V(D)$  la siguiente relación binaria  $\sim$ ;  $u, v \in V(D)$   $u \sim v$  si y sólo si existe una *uv-trayectoria* en  $D$  y una *vu-trayectoria* en  $D$ ;  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $V(D)$ ; las clases de equivalencia son las *componentes fuertemente conexas* de  $D$  ó *componentes fuertes* de  $D$ ; si  $D$  tiene una única componente fuerte se dirá que  $D$  es *fuertemente conexa*.

Se dirá que  $D$  es *conexa* si dados  $u, v \in V(D)$  existe una *uv-trayectoria* o una *vu-trayectoria*.

Una *gráfica*  $G$  consiste de un conjunto finito no vacío  $V = V(G)$  de  $p$  puntos (o vértices) junto con un conjunto  $X$  de  $q$  pares no ordenados de distintos puntos de  $V$ .

Cada par  $x = \{u, v\}$  de puntos tal que  $x \in X$  es una *arista* de  $G$ .

La *gráfica subyacente* de una digráfica  $D$  es la gráfica que se obtiene de  $D$  reemplazando cada flecha de  $D$  por una arista.

El *cuello* de una digráfica  $D$  es el cuello de la gráfica subyacente de  $D$  y es la mínima longitud de un ciclo en tal gráfica.

Un *punto de corte* de una digráfica  $D$  es un punto de corte de la gráfica subyacente de  $D$ .

Un *bloque* de una digráfica  $D$  es un bloque de la gráfica subyacente de  $D$ .

Un *corte lineal* de una digráfica  $D$  es un conjunto  $A \subseteq F(D)$  tal que  $D - A$  no es conexa.

Un *corte lineal fuente* de una digráfica  $D$  es un conjunto  $A \subseteq F(D)$  tal que  $D - A$  no es fuertemente conexa.

De acuerdo a la definición de digráfica tenemos que dados dos vértices  $u, v$  de la digráfica a lo más existe una  $uv$ -flecha.

Si ahora aceptamos la posibilidad de tener más de una  $uv$ -flecha pero sólo un número finito de  $uv$ -flechas, el resultado es llamado una *multidigrapha*, si existen dos o más  $uv$ -flechas estas son llamadas flechas múltiples.

Si  $D$  es una multidigrapha y  $A \subseteq F(D)$  diremos que existe  $uv \in A$  cuando alguna  $uv$ -flecha está en  $A$  y denotaremos  $uv \notin A$  cuando ninguna  $uv$ -flecha está en  $A$ .

Si  $D$  es una digráfica o multidigráfica, el número cromático de  $D$ , denotado  $\chi(D)$  es el número cromático de la gráfica subyacente de  $D$ , que es el mínimo número de colores necesario para colorear los vértices de la gráfica o multidigráfica de tal manera que cualesquiera dos vértices adyacentes tengan asignado distinto color.

Para conceptos generales no definidos aquí ver [1].

## 1.2 CONCEPTOS Y RESULTADOS FUNDAMENTALES.

Definición 1.2.1. (Von Neumann y Morgenstern[18]).

Sea  $D$  una digráfica  $S \subseteq V$ ,  $S$  es un núcleo de  $D$  si se satisfacen las dos siguientes propiedades:

- (a)  $S$  es independiente
- (b) Para todo  $x \in V - S$  existe una flecha de  $x$  a  $S$ .

El resto de los conceptos y teoremas presentados en esta sección fueron obtenidos por Victor Neumann Lara [12].

Definición 1.2.2.

Sea  $D$  una digráfica. Diremos que  $S \subseteq V$  es un seminúcleo de  $D$  si las dos siguientes condiciones se cumplen:

- (a)  $S$  es independiente
- (b) Para cada flecha  $f$  que va de  $S$  a  $x$  (en virtud de la

condición anterior  $x \in V - S$  existe una flecha  $f'$  que va de  $x$  a  $S$ .

Claramente  $\emptyset$  es un seminúcleo de  $D$ .

Teorema 1.2.1.

Sea  $S$  un seminúcleo de la digráfica  $D$ .

$B = \{v \in V - S \mid \text{No existe flecha de } v \text{ a } S\}$ , y  $S'$  un seminúcleo de la subdigráfica  $\bar{B}$  de  $D$  inducida por  $B$ . Entonces  $S \cup S'$  es seminúcleo de  $D$ .

Y como consecuencia del Teorema 1.2.1 tenemos:

Teorema 1.2.2.

Sea  $S$  un seminúcleo de una digráfica  $D$ .

$B = \{v \in V - S \mid \text{No existe flecha de } v \text{ a } S\}$ , y  $N'$  núcleo de la subdigráfica  $\bar{B}$  de  $D$  inducida por  $B$ . Entonces  $S \cup N'$  es núcleo de  $D$ .

Definición 1.2.3.

Diremos que  $D$  es *R-digráfica* si toda subdigráfica inducida de  $D$  posee un seminúcleo no trivial (es decir no vacío).

Observación 1.2.1.

Es claro que si  $D$  es *R-digráfica* y  $D_0$  es subdigráfica inducida de  $D$ , entonces  $D_0$  también es *R-digráfica*.

Teorema 1.2.3.

Toda R-digráfica posee al menos un núcleo.

1.3 RESULTADOS PRELIMINARES.

Los resultados presentados en esta sección fueron obtenidos por Victor Neumann y Hortensia Galeana Sánchez.

Definición 1.3.1 [8].

Una digráfica  $D$  es  $R^-$ -digráfica si  $D$  no tiene núcleo y para cada  $u \in V(D)$ ,  $D - u$  es R-digráfica.

Notamos que si  $D$  no es R-digráfica, entonces  $D$  contiene una  $R^-$ -subdigráfica inducida

Teorema 1.3.1 ([7] ver también [10]).

Si  $D_1$  y  $D_2$  son subdigráfica inducidas de  $D$  tales que  $D = D_1 \cup D_2$ ,  $D_1 \cap D_2 = \{u\}$ , entonces  $D$  es R-digráfica si y sólo si  $D_1$  y  $D_2$  son R-digráficas.

Corolario 1.3.1.

$D$  es R-digráfica si y sólo si todo bloque de  $D$  es R-digráfica.

Corolario 1.3.2.

Si  $D$  es  $R^-$ -digráfica,  $D$  no tiene puntos de corte.

como una consecuencia inmediata de los Corolarios 1.3.1 y 1.3.2 tenemos:

Teorema 1.3.2.

Sea  $A$  un árbol, para cada  $f = w_1 w_2 \in F(A)$  sean  $\gamma_f$  una digráfica tal que  $w_1, w_2 \in V(\gamma_f)$ ,  $V(\gamma_f) \cap V(A) = \{w_1, w_2\}$  y las digráficas  $(\gamma_f - V(A))$  son ajenas dos a dos para  $f \in F(A)$ . La digráfica  $D = \bigcup_{f \in F(A)} \gamma_f$  es R-digráfica si y sólo si para cada  $f \in F(A)$ ,  $\gamma_f$  es R-digráfica.

Demostración

Se sigue del Teorema 1.3.1 procediendo por inducción sobre  $V(A)$ .

## 2.1 INTRODUCCION.

En este capítulo se demuestra que una digráfica  $D$  sin triángulos dirigidos tal que todos sus ciclos impares  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$  poseen dos cuerdas cortas (esto significa que existen dos flechas de la forma  $(q, q+2)$  y  $(q', q'+2)$ ) es una  $R$ -digráfica. También se dan algunas condiciones más generales sobre las pseudodiagonales de ciclos impares en una digráfica que son suficientes para que una digráfica sea  $R$ -digráfica. Además se da una condición sobre el número de ciclos impares ajenos en vértices de  $D$ , que es suficiente para que una digráfica sea  $R$ -digráfica.

Sea  $C = (1, 2, \dots, m, 1)$  un ciclo de  $D$ , denotaremos por  $l(C)$  su longitud.

1) Para  $i \neq j$ ,  $i, j \in V(C)$  denotamos  $(i, C, j)$  la  $ij$ -trayectoria dirigida contenida en  $C$  y denotamos  $l(i, C, j)$  su longitud. Tomaremos  $(i, C, i) = (i)$  y  $l(i, C, i) = 0$ .

2)  $f = (i, j) \in (F(D) - F(C))$  es una diagonal de  $C$ , si y sólo si  $i \neq j$ ,  $i, j \in V(C)$  y  $l(i, C, j) = \text{longitud}(f) < l(C) - 1$ .

3)  $f = (i, j) \in (F(D) - F(C))$  es una pseudodiagonal de  $C$ , si y sólo si  $i \neq j$ ,  $i, j \in V(C)$  y  $l(i, C, j) \leq l(C) - 1$ .

Denotaremos:

$P(C) = \{f \in F(D) \mid f \text{ es una pseudodiagonal de } C\}$ .

4) Una *cuerda corta* de  $C$  es una pseudodiagonal de  $C$  de longitud dos.

5) Denotaremos:

$t(C) = \{z \in V(C) \mid \text{existe } (w, z) \text{ una pseudodiagonal de } C\}$ .

$i(C) = \{z \in V(C) \mid \text{existe } (z, w) \text{ una pseudodiagonal de } C\}$ .

6) Para  $C$  un ciclo impar (e.d.  $\ell(C) = 2n+1 = m$ ) y para  $i \in t(C)$  denotamos

$F_i^1(C) = \{(i+2k, i+2k+1) \mid 0 \leq k \leq n\}$  (notación módulo  $m$ ) y denotamos

$$F^1(C) = \bigcup_{v \in t(C)} F_v^1(C).$$



## 2.2 CONCEPTOS Y RESULTADOS PRELIMINARES.

En esta sección se establecen algunos resultados que fueron demostrados por Victor Neumann Lara y Hortensia Galeana Sánchez en [8] y que serán útiles para el desarrollo del presente capítulo.

### Teorema 2.2.1.

Sean  $D$  una digráfica, si existe  $T \subseteq V(D)$  tal que  $F(C) = F^1(C)$  para cada ciclo impar  $C$  de  $D$  con  $V(C) \cap T \neq \emptyset$ , entonces  $D$  es  $R$ -digráfica si y sólo si  $D - T$  es  $R$ -digráfica.

### Observación 2.2.1.

Si  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$  es un ciclo impar de una digráfica  $D$  y  $t(C) = \{i_1, \dots, i_k\}$   $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ , entonces  $F(C) = F^1(C)$  si y sólo si al menos una de las dos siguientes condiciones se satisface.

- i)  $i_{j+1} = i_j + 1$  para algún  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$
- ii)  $\ell(i_j, C, i_{j+1}) \equiv (i_s, C, i_{s+1}) \equiv 1 \pmod{2}$ . (Notación módulo  $k$ )

### Observación 2.2.2.

Si  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$  es un ciclo impar de una digráfica  $D$  y  $i, j \in t(C)$  (sin pérdida de generalidad podemos suponer  $i = 1$ , y  $j = 2k \leq 2n$ ).

Entonces  $F_1^i(C) \cup F_j^1(C) = F(2k, C, 1) \cup \{(2t-1, 2t) \mid 1 \leq t \leq k\}$ .

### 2.3 UN TEOREMA ACERCA DE UNA CONJETURA

DE H. MEYNIEL SOBRE R-DIGRAFICAS.

En 1976 H. Meyniel conjeturó que una digráfica en la cual cada ciclo impar posee dos pseudodiagonales es una R-digráfica, en esta sección se demuestra un caso particular de tal conjetura.

Denotaremos por  $\mathcal{Q}$  la clase de las digráficas  $D$  que satisfacen las siguientes propiedades:

Q.1  $D$  no contiene triángulos dirigidos

Q.2 Todos los ciclos impares de  $D$  poseen dos cuerdas cortas.

#### Teorema 2.3.1.

Si  $C$  es un ciclo impar en una digráfica  $D$  de la clase  $\mathcal{Q}$ , entonces existe un conjunto de diagonales de  $C$  en  $D$ , (que denotaremos  $d_D(C)$ ),  $d_D(C) = \{(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n) \mid n \geq 2\}$  tal que  $F(C) = \bigcup_{i=1}^n F_{v_i}^1(C)$ .

#### Demostración

Procederemos por inducción sobre  $\ell(C)$ , donde  $C$  es un ciclo impar de una digráfica  $D$  perteneciente a la clase  $\mathcal{Q}$ .

Cuando  $\ell(C) = 5$ , consideramos  $f$  y  $g$  dos cuerdas cortas de  $C$ , se sigue de Q.1 y la Observación 2.2.1 que  $d_D(C) = \{f, g\}$  satisface las propiedades requeridas.

Supongamos que hemos demostrado la existencia de  $d_D(C')$  para todos los ciclos impares  $C'$  de alguna digráfica  $D'$  perteneciente a la clase  $Q$ , cuando  $\ell(C') < m = 2n+1$ .

Sea  $C = (1, 2, 3, 4, \dots, 2n+1, 1)$  un ciclo impar de alguna digráfica  $D$  que pertenece a la clase  $Q$ , con  $\ell(C) = 2n+1 = m$ , demostraremos que existe  $d_D(C)$ .

Denotaremos por  $E = \{w \in V(C) \mid \text{existe } (v, w) \text{ cuerda corta de } C\}$

y  $a = \min. \left\{ \ell(A) \mid \begin{array}{l} A \text{ es una } xy\text{-trayectoria dirigida impar} \\ \text{contenida en } C \text{ y con } V(A) \cap E = \{x, y\} \end{array} \right\}$

Analizamos ahora algunos casos:

Caso 1  $a = 1$

Considerando  $A = (x, y)$  tal que  $\ell(A) = a = 1$ , tenemos  $f$  una cuerda corta de  $C$  con terminal final  $x$  y tenemos  $g$  una cuerda corta de  $C$  con terminal final  $y$ ; se sigue de la Observación 2.2.1 que podemos tomar  $d_D(C) = \{f, g\}$ .

Caso 2  $a = 3$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a = \ell(A)$  donde  $A = (1, 2, 3, 4)$ , así  $d_1 = (2n, 1)$  y  $d_2 = (2, 4)$  son diagonales de  $C$ ; por la Observación 2.2.2 tenemos que  $F_1^1(C) \cup F_4^1(C) = F(C) - (2, 3)$ .

Nota 1. Nótese que por la Observación 2.2.1 podemos suponer que para todo  $i \in \{2\} \cup \{2t+1 \mid 1 \leq t \leq n\}$ ,  $i$  no es punto terminal final de alguna diagonal de  $C$ . Ya que si tal diagonal  $f$  existe,

entonces podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f\}$ .

Ahora consideramos el ciclo impar

$C' = (1, 2, 4, 5, 6, \dots, 2n, 1)$ , para  $f = (z, w) \in d_D(C')$  tal que  $(1, 2) \in F_W^1(C')$  tenemos  $w \in \{1, 2\} \cup \{2t+1 \mid 2 \leq t \leq n-1\}$ , se sigue de la Nota 1 que podemos suponer  $w=1$  y por Q.1  $5 \leq z \leq 2n-1$  y entonces definimos:  $r = \min.\{z \mid 5 \leq z \leq 2n-1 \text{ y } (z, 1) \text{ es diagonal de } C'\}$ , ahora analizamos los dos posibles casos.

Caso 2.a  $\ell(r, C', 1)$  es par.

En este caso  $\ell(r, C, 1)$  es impar y así  $r = 2j + 1$  para algún  $2 \leq j \leq n-1$ ; considerando el ciclo impar  $C'' = (1, C, r) \cup (r, 1)$  vemos que, para  $f'' = (u, v) \in d_D(C'')$  tal que  $(2, 3) \in F_V^1(C'')$  tenemos que  $v \in \{2\} \cup \{2t+1 \mid 1 \leq t \leq j\}$ , y se sigue de la Nota 1 que podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f''\}$ .

Caso 2.b  $\ell(r, C', 1)$  es impar.

En este caso  $r = 2j$  para algún  $3 \leq j \leq n-1$ , considerando el ciclo impar  $C'' = (r, 1, 2, 4, 5, 6, \dots, r-1, r)$  vemos que para  $f'' = (u, v) \in d_D(C'')$  tal que  $(1, 2) \in F_V^1(C'')$  tenemos que  $v \in \{1, 2\} \cup \{2t+1 \mid 2 \leq t \leq j-1\}$ ; si  $v=1$ , entonces obtenemos una contradicción a la definición de  $r$  así se sigue de la Nota 1 que podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f''\}$ .

Caso 3  $a = 5$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a = \ell(A)$  donde  $A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ , así  $d_1 = (2n, 1)$  y  $d_2 = (4, 6)$  son diagonales de  $C$ ; por la Observación 2.2.2 tenemos que

$$F_1^1(C) \cup F_6^1(C) = F(C) - \{(2,3), (4,5)\}.$$

Nota 2. Nótese que en vista de la Observación 2.2.1, podemos suponer que para todo  $i \in \{2\} \cup \{2t+1 \mid 2 \leq t \leq n\}$   $i$  no es punto terminal final de alguna diagonal de  $C$ . Ya que si una tal diagonal  $f$  existe, podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f\}$ .

Nota 3. Podemos suponer que el punto 4 de  $C$  no es un punto terminal final de alguna diagonal de  $C$ . Porque de otro modo existe  $k \in V(C)$  tal que  $(k,4)$  es una diagonal de  $C$  y para todo  $i \in (V(4,C,k) - \{5\})$   $(i,4) \notin F(D)$ , claramente por Q.1  $k \notin \{2,3,5,6,7\}$ , y analizamos ahora los dos posibles casos:

Caso 3.a  $\ell(k,C,4)$  es par.

En este caso  $k = 2s+1$  para alguna  $4 \leq s \leq n$ ; considerando el ciclo impar  $C' = (k,4,6,7,8,\dots,k)$  vemos que para  $f' = (u,v) \in d_D(C')$  tal que  $(k,4) \in F_V^1(C')$  tenemos que  $v \in \{4\} \cup \{2t+1 \mid 3 \leq t \leq s\}$ ; si  $v = 4$ , entonces obtenemos una contradicción a la definición de  $k$ , así que se sigue de la Nota 2 que podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f'\}$ .

Caso 3.b  $\ell(k,C,4)$  es impar.

En este caso  $k \in \{1\} \cup \{2t \mid 4 \leq t \leq n\}$ , considerando el ciclo impar  $C' = (4,C,k) \cup (k,4)$ , tenemos para  $f' = (u,v) \in d_C(C')$  con  $(4,5) \in F_V^1(C')$  los siguientes dos casos:

i)  $k = 1$ , en este caso tenemos

$$v \in \{4\} \cup \{2j+1 \mid 2 \leq j \leq n\}.$$

ii)  $k = 2t$ , en este caso tenemos

$$v \in \{4\} \cup \{2j+1 \mid 2 \leq j \leq t-1\}.$$

Si  $v=4$  obtendríamos una contradicción a la definición de  $k$ . Así, en vista de la Nota 2 podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f'\}$ . Así la Nota 3 queda probada.

Nota 4. Podemos suponer que el vértice 3 de  $C$  no es un punto terminalfinal de alguna diagonal de  $C$ .

De otro modo definimos:

$$k = \min. \{i \in V(C) \mid (i,3) \text{ es una diagonal de } C\}.$$

Claramente por Q.1  $7 \leq k \leq 2n+1$ , analizamos ahora los dos posibles casos:

Caso 3.c  $\ell(k,C,3)$  es par.

Consideramos el ciclo impar  $C' = (k,3,4,6,7,\dots,k-1,k)$  y análogamente el Caso 3.a vemos que en vista de las Notas 2 y 3 para  $f' = (i,j) \in d_D(C')$  tal que  $(3,4) \in F_j^1(C')$  podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f'\}$ .

Caso 3.d  $\ell(k,C,3)$  es impar.

Considerando el ciclo impar  $C' = (3,C,k) \cup (k,3)$ , análogamente al Caso 3.b vemos que para  $f' = (u,v) \in d_D(C')$  tal que  $(k,3) \in F_v^1(C')$ , podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f'\}$ . Así la Nota 4 queda demostrada:

$$\text{Sea } D' = D[V(C) - \{2,3\}] \cup (1,4).$$

Nota 5. Podemos suponer que  $D'$  no tiene triángulos dirigidos. De otra forma; un triángulo dirigido de  $D'$  es de la forma  $C' = (1,4,p,1)$ , entonces  $G = (1,2,3,4,p,1)$  es un ciclo impar de  $D$ ; y por la Nota 2 y Q.2 podemos suponer  $p \neq 5$  y también  $p = 2r$  para algún  $3 \leq r \leq n$ ; se sigue de Q.2, y de las Notas 2, 3 y 4 que  $(3,p) \in F(D)$ . Considerando el ciclo impar  $C'' = (p,C,3) \cup (3,p)$  vemos que para  $f'' = (u,v) \in d_D(C'')$  tal que  $(2,3) \in F_V^1(C'')$  tenemos que  $v \in \{2,3\} \cup \{2j+1 \mid r \leq j \leq n\}$ , se sigue de la Nota 2 que podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f''\}$ .

Nota 6. Podemos suponer que todo ciclo impar de  $D'$  tiene dos cuerdas cortas en  $D'$ .

Sea  $H = (1,4,i_1,i_2,\dots,1)$  un ciclo impar de  $D'$  tal que  $(1,4) \in F(H)$ , consideramos

$G = (1,2,3,4,i_1,i_2,\dots,1)$  y demostraremos que las dos cuerdas cortas de  $G$  en  $D$  son dos cuerdas cortas de  $H$  en  $D'$ , para esto, en vista de la definición de  $a$  y de las Notas 2, 3 y 4 es suficiente demostrar que el vértice 3 de  $G$  no es punto terminal inicial de una cuerda corta de  $G$ . Supongamos que  $(3,i_s) \in F(D)$ , entonces por Q.1, la Nota 5, la definición de  $a$  y la Nota 2, podemos suponer que  $i_s = 2t$  para alguna  $3 \leq t \leq n-1$ . Considerando el ciclo impar  $G' = (i_s,C,3) \cup (3,i_s)$  vemos que para  $q' = (u,v) \in d_D(G')$  tal que  $(2,3) \in F_V^1(G')$  tenemos que,  $v \in \{2,3\} \cup \{2t+1 \mid s \leq t \leq n\}$ , se sigue de las Notas 2 y 4 que podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, q'\}$ . Así la Nota 6 queda demostrada.

Ya que  $D'$  es una digráfica de la clase  $Q$  (Notas 5 y 6) y  $C' = (4, C, 1) \cup (1, 4)$  es un ciclo impar de  $D'$  con  $\ell(C') < m$ , entonces existe  $g' = (u, v) \in d_{D'}(C')$  tal que  $(4, 5) \in F_V^1(C')$ ; así que  $v \in \{4\} \cup \{2t+1 \mid 2 \leq t \leq n\}$  y de las Notas 2 y 3 se sigue que podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, g'\}$ .

Caso 4  $a \geq 7$ ;  $a = 2q+1$ ,  $3 \leq q \leq n-1$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a = \ell(A)$  donde  $A = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, a, a+1)$ ; así  $d_1 = (2n, 1)$  y  $d_2 = (a-1, a+1)$  son diagonales de  $C$ .

Nota 7. Por la Observación 2.2.1 podemos suponer que para todo  $i \in \{2\} \cup \{2t+1 \mid q \leq t \leq n\}$   $i$  no es punto terminal final de alguna diagonal de  $C$ ; ya que si  $f$  es una tal diagonal, entonces podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f\}$ .

Ahora consideremos:

$$D' = D[V(C) - \{i \in V(C) \mid 3 \leq i \leq a-3\}] \cup (2, a-2).$$

Nota 8. Podemos suponer que  $D'$  no tiene triángulos dirigidos. Ya que si  $C'$  fuera un triángulo dirigido de  $D'$ , entonces, de Q.1 y la Nota 7, deberíamos tener  $C' = (2, a-2, 1, 2)$  y entonces por la definición de  $a$ , las dos cuerdas cortas del ciclo impar  $C'' = (1, C, a-2) \cup (a-2, 1)$  son  $d_1'' = (a-3, 1)$  y  $d_2'' = (a-2, 2)$ . Así, de la Observación 2.2.1 se sigue que podemos tomar  $d_C(C) = \{d_1'', d_2''\}$ .

Nota 9. Podemos suponer que cada ciclo impar de  $D'$  posee dos cuerdas cortas en  $D'$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Sea  $H' = (2, a-2, i_1, i_2, \dots, i_r, 2)$  un ciclo impar de  $D'$  tal que  $(2, a-2) \in F(H')$ , consideramos

$H = (2, 3, 4, 5, \dots, a-2, i_1, i_2, \dots, i_r, 2)$ , probaremos que las dos cuerdas cortas de  $H$  en  $D$  también son cuerdas cortas de  $H'$  en  $D'$ . Para demostrar esto, en vista de que  $i_r = 1$  (Nota 7), la definición de  $a$  y la Nota 7; es suficiente demostrar que  $a-3$  no es punto terminal inicial de una cuerda corta de  $H$ . Supongamos que  $(a-3, i_1) \in F(D)$ , por la Nota 7 y la definición de  $a$ , podemos suponer que  $i_1 = 2s$  para algún  $q+1 \leq s \leq n$ ,  $\ell(a-3, C, i_1)$  es par, por lo tanto  $G = (i_1, C, a-2) \cup (a-2, i_1)$  es un ciclo impar de  $D$  con  $\ell(G) < m$ .

Nota 9.a. Podemos suponer que para todo  $i \in \{2s \mid 1 \leq s \leq q\}$   $i$  no es punto terminal final de alguna diagonal de  $C$ . Ya que si  $f$  es una tal diagonal, podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f\} \cup d_D(G)$ . Ahora; notemos que si no existe  $f = (z, a-2) \in d_D(G)$ , entonces se sigue de la Observación 2.2.1 que podemos tomar  $d_D(C) = d_D(G)$ . Supongamos ahora que existe  $f = (z, a-2) \in d_D(G)$ .

En vista de las Observaciones 2.2.1 y 2.2.2 tenemos que entonces  $F(C) - (a-1, a) \subset F_1^1(C) \cup_{a+1} F_2^1(C) \cup \bigcup_{(u,v) \in d_D(G)} F_V^1(C)$ . También tenemos que existe  $k \in V(C)$ , tal que  $(k, a-2)$  es una diagonal de  $C$ , pero para todo  $i \in (V(a-2, C, k) - \{k, a-2, a-1\})$ ,  $(i, a-2) \notin F(D)$ ; ahora analizamos los dos posibles casos:

Caso 4.a  $\ell(k, C, a-2)$  es par.

En este caso  $k \in \{2t+1 \mid 0 \leq t \leq q-3\} \cup \{2t' \mid q+2 \leq t' \leq n\}$ , considerando el ciclo impar de  $D$ ,



$B = (k, a-2, a-1, a+1) \cup (a+1, C, k)$  vemos que para  $f = (u, v) \in d_D(B)$  tal que  $(a-2, a-1) \in F_V^1(B)$  tenemos que  $v \in \{a-1, a-2\} \cup \{r \mid r \equiv 0 \pmod{2} \text{ y } 2 \leq r \leq k-1\} \cup \{r' \mid r' \equiv 1 \pmod{2} \text{ y } a+2 \leq r' \leq m\}$ ; si  $v = a-2$ , obtenemos una contradicción a la definición de  $k$ ; así se sigue de las Notas 7, 9.a y la Observación 2.2.1 que podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f\} \cup d_D(G)$ .

Caso 4.b  $\ell(k, C, a-2)$  es impar.

En este caso  $k \in \{2t+1 \mid q+1 \leq t \leq n\} \cup \{2t' \mid 1 \leq t' \leq q-2\}$ , considerando el ciclo impar  $B' = (a-2, C, k) \cup (k, a-2)$  vemos que para  $f' = (u', v') \in d_D(B')$  tal que  $(a-1, a) \in F_V^1(B')$  tenemos que  $v' \in \{a-1\} \cup \{z \mid z \equiv 0 \pmod{2} \text{ y } 2 \leq z \leq k\} \cup \{z' \mid z' \equiv 1 \pmod{2} \text{ y } a \leq z' \leq m\}$ . Y en vista de las Notas 7 y 9.a podemos tomar  $d_D(C) = \{d_1, d_2, f'\} \cup d_D(G)$ . Así la Nota 9 queda demostrada.

Ahora bien, ya que  $D'$  es una digráfica de la clase  $Q$  (Notas 8 y 9) y  $C' = (2, a-2) \cup (a-2, C, 2)$  es un ciclo impar de  $D'$  (con  $\ell(C') < m$ ). Existe  $g^1 = (u, v) \in d_D(C')$  tal que  $(2, a-2) \in F_V^1(C')$ ; y así tenemos  $v \in \{2, a-2\} \cup \{2t+1 \mid q \leq t \leq n\}$ ; y de la Nota 7 se sigue que podemos suponer  $v = a-2$ . También existe  $g^2 = (z, w) \in d_D(C')$  tal que  $(a-1, a) \in F_W^1(C')$ , así  $w \in \{a-1, 2\} \cup \{2t+1 \mid q \leq t \leq n\}$ , por la Nota 7 podemos suponer que  $w = a-1$ . Entonces se sigue de la Observación 2.2.1 que podemos tomar  $d_D(C) = \{g^1, g^2\}$ . Así, el Teorema 2.3.1 queda demostrado.

Teorema 2.3.2.

Sea  $D$  una digráfica, si existe  $T \subseteq V(D)$  tal que

$$D \left[ \left\{ z \in V(D) \mid \begin{array}{l} z \text{ está en algún ciclo impar } C \text{ de } D \\ \text{con } V(C) \cap T \neq \emptyset \end{array} \right\} \right]$$

pertenece a la clase  $Q$ . Entonces  $D$  es  $R$ -digráfica si y sólo si  $D - T$  es  $R$ -digráfica.

Se sigue directamente de los Teoremas 2.2.1 y 2.3.1.

Corolario 2.3.1

Si  $D$  es una digráfica de la clase  $Q$ , entonces  $D$  es una  $R$ -digráfica.

El Corolario 2.3.1 es un caso particular de la interesante conjetura propuesta por H. Meyniel a cerca de la cual se trabajará más en el Capítulo 4.

Conjetura 2.3.1 (H. Meyniel 1976)

Sea  $D$  una digráfica, si todo ciclo impar de  $D$  posee dos pseudodiagonales entonces  $D$  es una  $R$ -digráfica.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

2.4 ALGUNAS CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE  
UNA DIGRAFICA SEA R-DIGRAFICA.

En esta sección se dan algunas condiciones sobre las pseudodigonales de los ciclos impares de una digráfica, que son suficientes para que una digráfica sea R-digráfica. También se da una condición sobre el número de ciclos impares ajenos en vértices de  $D$ , que es suficiente para que una digráfica sea R-digráfica.

Consideremos una digráfica  $D$ ,  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$  un ciclo impar de  $D$  y  $T_C = (j, j+1, \dots, j+r)$  (notación módulo  $2n+1$ ) una trayectoria dirigida de máxima longitud contenida en  $C - (t(C) \cup i(C))$ . Cuando  $2 \leq \ell(T_C) \leq \ell(C) - 2$  definimos  $D(C, T_C)$  y  $C(T_C)$  como sigue:

Caso a  $\ell(T_C)$  es par.

Si  $(j, j+r+1) \in F(D)$  entonces  $D(C, T_C) = D$  y

$C(T_C) = (j+r+1, C, j) \cup (j, j+r+1)$ .

Si  $(j, j+r+1) \notin F(D)$  entonces  $D(C, T_C) = D \cup (j, j+r+1)$  y

$C(T_C) = (j+r+1, C, j) \cup (j, j+r+1)$ .

Caso b  $\ell(T_C)$  es impar.

Si  $(j+1, j+r+1) \in F(D)$  entonces  $D(C, T_C) = D$  y

$C(T_C) = (j+r+1, C, j+1) \cup (j+1, j+r+1)$ .

Si  $(j+1, j+r+1) \notin F(D)$  entonces  $D(C, T_C) = D \cup (j+1, j+r+1)$  y

$C(T_C) = (j+r+1, C, j+1) \cup (j+1, j+r+1)$ .

Teorema 2.4.1

Sea  $D$  una digráfica, si  $C$  es un ciclo impar de  $D$  con  $2 \leq \ell(T_C) \leq \ell(C) - 2$  entonces  $F(C) = F^1(C)$  si y sólo si  $F(C(T_C)) = F^1(C(T_C))$ .

Demostración

Sea  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$  un ciclo impar y supongamos que  $T_C = (j, j+1, \dots, j+r)$  (notación módulo  $2n+1$ ), así que  $C(T_C) = (j_1, j_2, \dots, j_{2s+1}, j_1)$  donde  $j_1 = j$  cuando  $r$  es par y  $j_1 = j+1$  cuando  $r$  es impar,  $j_2 = j+r+1$ ,  $j_3 = j+r+2$  etc.; claramente  $j_1 \notin t(C(T_C))$ , así:

i)  $j_i, j_{i+1} \in t(C(T_C))$  si y sólo si  $j_{i+1} = j_i+1$  con  $j_i, j_{i+1} \in t(C)$  y notación módulo  $2n+1$ .

ii) Existen  $j_i \in t(C(T_C))$  para  $i \in \{r, k, t, s\}$  con  $\ell(j_r, C(T_C), j_k) \equiv \ell(j_t, C(T_C), j_s) \equiv 1 \pmod{2}$  si y sólo si existen  $j_i \in t(C)$  para  $i \in \{r, k, t, s\}$  con  $\ell(j_r, C, j_k) \equiv \ell(j_t, C, j_s) \equiv 1 \pmod{2}$ .

Así el Teorema 2.4.1 se sigue directamente de la Observación 2.2.1

De manera análoga se demuestra el siguiente

Teorema 2.4.2.

Sea  $C$  un ciclo impar de una digráfica  $D$ , si existe  $f = (u, v) \in P(C)$  tal que  $\ell(u, C, v)$  es impar y  $\{u, v\} \not\subseteq t((v, C, u) \cup f)$ , entonces  $F(C) = F^1(C)$  si y sólo si  $F((v, C, u) \cup f) = F^1((v, C, u) \cup f)$ .

Teorema 2.4.3

Sea  $D$  una digráfica tal que para cada ciclo impar  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$ ;  $P(C) = \{(u(j), v(j)) \mid 1 \leq j \leq k\}$  satisfice las dos siguientes propiedades:

$$(3.1) \quad v(1) < \dots < v(k), \quad k \geq 2$$

$$(3.2) \quad u(j) \in (v(i), C, v(i+1)) \text{ implica que } \ell(v(i), C, u(j)) \equiv \ell(u(j), C, v(j)) \pmod{2}, \text{ donde } v(k+1) = v(1).$$

Entonces  $F(C) = F^1(C)$  para cada ciclo impar  $C$  de  $D$ .

Demostración

Hacemos una demostración por inducción sobre  $\ell(C)$ ,  $C$  un ciclo impar de  $D$ .

Cuando  $\ell(C) = 3$ , claramente la hipótesis 3.1 implica la condición i) de la Observación 2.2.1.

Supongamos que hemos demostrado que para cualquier ciclo impar  $C'$  de  $D$  con  $\ell(C') \leq 2n-1$  tenemos  $F(C') = F^1(C')$ .

Sea  $C = (1, 2, \dots, 2n+1)$  un ciclo impar de  $D$  con

$P(C) = \{(u(j), v(j)) \mid 1 \leq j \leq k\}$ ; considerando

$f = (u(r+1), v(r+1)) \in P(C)$  tal que  $\ell(v(r), C, v(r+1))$  es impar tenemos que  $u = u(r+1) \in (v(s), C, v(s+1))$  para algún  $1 \leq s \leq k$ , por 3.2 tenemos que  $\ell(v(s), C, u) \equiv \ell(u, C, v(r+1)) \pmod{2}$ .

Si  $\ell(u, C, v(r+1)) \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces  $u \notin t(C)$ ; en otro caso  $u = v(i)$  para algún  $1 \leq i \leq k$  así que  $u \in (v(i), C, v(i+1))$  y por lo tanto  $\ell(v(i), C, u) \not\equiv \ell(u, C, v(r+1)) \pmod{2}$  lo cual contradice 3.2. Así que cuando  $\ell(u, C, v(r+1)) \equiv 1 \pmod{2}$   $\{u, v(r+1)\} \not\subseteq t(C)$ , y considerando  $C' = (v(r+1), C, u) \cup f$ , en

en vista del Teorema 2.4.2 y la hipótesis inductiva tenemos que  $F(C) = F^1(C)$ .

Por lo tanto podemos suponer  $\ell(u, C, v(r+1)) \equiv 0 \pmod{2}$ , así  $\ell(v(s), C, u) \equiv 0 \pmod{2}$  lo cual implica por 3.2 que  $u \notin (v(r), C, v(r+1))$ , entonces  $s \neq r, v(r) \in (v(s), C, v(r+1))$  y  $\ell(v(s), C, v(r))$  es impar por 3.2; así; el Teorema 2.4.3 se sigue de las Observaciones 2.2.1 y 2.2.2.

Diremos que un ciclo impar  $C$  de una digráfica  $D$  tiene la propiedad  $D_0$  si para cada  $f = (u, v) \in P(C)$  con  $\ell(u, C, v)$  impar, tenemos  $u, v \notin t(u, C, v) \cup f$  y diremos que una digráfica  $D$  tiene la propiedad  $D_0$  cuando cada ciclo impar de  $D$  tiene la propiedad  $D_0$ .

Teorema 2.4.4.

Sea  $D$  una digráfica que tiene la propiedad  $D_0$ . Si para cada ciclo impar  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$  de  $D$  existe  $B(C) \neq \emptyset$   $B(C) = \{(u(j), v(j)) \mid 1 \leq j \leq k\} \subseteq P(C)$  con las dos siguientes propiedades:

(4.1)  $v(1) < \dots < v(k), \quad k \geq 2$ .

(4.2) Si  $\ell(u(j), C, v(j))$  es par y  $u(j) \in (v(s), C, v(s+1))$  entonces  $\ell(v(s), C, u(j))$  es par.

Entonces  $f(C) = F^1(C)$  para cada ciclo impar de  $D$ .

La demostración es esencialmente la misma que la del Teorema



2.4.3, considerando que por el Teorema 2.4.2, la propiedad  $D_0$  y la hipótesis de inducción podemos suponer que  $\ell(u(r+1), v(r+1))$  es par.

Teorema 2.4.5.

Sea  $D$  una digráfica que tiene la propiedad  $D_0$ . Si para cada ciclo impar  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$  de  $D$  existe  $B_1(C) \neq \emptyset$   $B^1(C) = \{(f(j), g(j)) \mid 1 \leq j \leq k\} \subseteq P(C) \times P(C)$  con las dos siguientes propiedades:

$$(5.1) \quad f(j) = (u(j), v(j)), \quad g(j) = (v(j), z(j)) \\ v(1) < \dots < v(k), \quad k \geq 2$$

$$(5.2) \quad z(j) \notin (V(v(j), C, v(j+1)) - \{v(j+1)\}) \quad 1 \leq j \leq k$$

donde  $v(k+1) = v(1)$ .

Entonces para cada ciclo impar  $C$  de  $D$ ,  $F(C) = F^1(C)$ .

Demostración

Hacemos la demostración por inducción sobre  $\ell(C)$ ,  $C$  ciclo impar de  $D$ . Cuando  $\ell(C) = 3$ , claramente la hipótesis (5.1) implica la propiedad (i) de la Observación 2.2.1.

Supongamos que hemos demostrado que para cualquier ciclo impar  $C'$  de  $D$  con  $\ell(C') \leq 2n-1$  tenemos que  $F(C') = F^1(C')$ .

Sea  $C = (1, 2, \dots, 2n+1)$  un ciclo impar de  $D$  con  $\ell(C) = 2n+1$ , consideramos  $1 \leq s \leq k$  tal que  $\ell(v(s), C, v(s+1))$  es impar. Analizamos los dos posibles casos, si  $\ell(v(s), C, z(s))$  es impar, consideramos  $C'' = (z(s), C, v(s)) \cup g(s)$  y ya que  $D$  tiene la



propiedad  $D_0$ , se sigue de la hipótesis inductiva y del Teorema 2.4.2 que  $F(C) = F^1(C)$ . Si  $\ell(v(s), C, z(s))$  es par, se sigue de (5.2) que  $z(s) \notin (v(s), C, v(s+1))$  y  $\ell((v(s+1), C, z(s)))$  es impar y así, por las Observaciones 2.2.1 y 2.2.2, tenemos que  $F(C) = F^1(C)$ .

De manera completamente análoga, considerando  $1 \leq s \leq k$  tal que  $\ell(v(s-1), C, v(s))$  es impar y analizando las dos posibles paridades de  $\ell(u(s), C, v(s))$  se demuestra el siguiente Teorema.

Teorema 2.4.6.

Sea  $D$  una digráfica que tiene la propiedad  $D_0$ . Si para cada ciclo impar  $C = (1, 2, \dots, 2n+1, 1)$  de  $D$  existe  $B^2(C) \neq \emptyset$   $B^2(C) = \{(g(j), f(j)) \mid 1 \leq j \leq k\} \subseteq P(C) \times P(C)$  que tiene las dos siguientes propiedades:

$$(6.1) \quad g(j) = (z(j), u(j)), \quad f(j) = (u(j), v(j))$$

$$v(1) < \dots < v(k), \quad k \geq 2.$$

$$(6.2) \quad u(j) \notin (V(v(j-1), C, v(j)) - \{v(j-1)\}) \text{ donde } v(0) = v(k).$$

Entonces  $F(C) = F^1(C)$  para cada ciclo impar de  $D$ .

Teorema 2.4.7

Sea  $D$  una digráfica que tiene la propiedad  $D_0$ . Si para cada ciclo impar  $C$  de  $D$  existe  $B^3(C) = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  una trayectoria dirigida de  $D$  con las dos siguientes propiedades:

$$(7.1) \quad (u_i, u_{i+1}) \in P(C) \text{ para cada } i \in \{0, 1, 2\}.$$

(7.2)  $\ell(u_1, C, u_2) = \ell(C) - k_1$  y  $\ell(u_2, C, u_3) = \ell(C) - k_2$  con  $1 \leq k_1 + k_2 \leq \ell(C)$ .

Entonces  $F(C) = F^1(C)$  para cada ciclo impar  $C$  de  $D$ .

Demostración

Hacemos la demostración por inducción sobre  $\ell(C)$ ,  $C$  ciclo impar de  $D$ . Cuando  $\ell(C) = 3$  ya que  $C$  tiene tres pseudodigonales, claramente se satisface la propiedad (i) de la Observación 2.2.1.

Supongamos que hemos demostrado que para cada ciclo impar  $C'$  de  $D$  con  $\ell(C') \leq 2n-1$ ,  $F(C') = F^1(C')$ .

Sea  $C$  un ciclo impar de  $D$  con  $\ell(C) = 2n+1$ , podemos suponer  $k_1 \equiv k_2 \equiv 1 \pmod{2}$ , ya que de otro modo  $k_i \equiv 0 \pmod{2}$  para algún  $i \in \{1, 2\}$  y entonces, considerando  $(u_{i+1}, C, u_i) \cup (u_i, u_{i+1})$  se sigue de (7.2), la hipótesis inductiva y el Teorema 2.4.2 que  $F(C) = F^1(C)$ . Más aún tenemos que  $u_3 \notin (u_2, C, u_1)$  ya que  $u_3 \in (u_2, C, u_1)$  implica que  $k_1 + k_2 \geq \ell(C) + 1$ . Así,  $\ell(u_3, C, u_2) \equiv \ell(u_2, C, u_1) \equiv 1 \pmod{2}$ . Así; el Teorema 2.4.7 se sigue de las Observaciones 2.2.1 y 2.2.2.

Teorema 2.4.8 [8].

Sea  $D$  una  $R^-$ -digráfica, entonces cada  $z \in V(D)$  está en al menos  $\Delta_D(z) + 1$  ciclos impares de  $D$ , donde  $\Delta_D(z) = \max. \{\delta_D^+(z), \delta_D^-(z)\}$ .

Teorema 2.4.9

Sea  $D$  una digráfica. Si existe  $T \subseteq V(D)$  tal que para cada subdigráfica inducida fuertemente conexa  $H$  de  $D$  con  $H \cap T \neq \emptyset$  tenemos  $\text{c.i.}(H) - \text{c.i.d.}(H) + 1 \leq \Delta(H)$ , entonces  $D$  es una  $R$ -digráfica si y sólo si  $D - T$  es una  $R$ -digráfica.  $\text{c.i.}(H) =$  al Número de ciclos impares de  $H$ .

$\text{c.i.d.}(H) =$  Número de ciclos impares puntualmente ajenos dos a dos de  $H$ .

$$\Delta(H) = \text{máx.} \{ \Delta_H(z) \mid z \in V(H) \}.$$

Demostración

Si  $D$  no es  $R$ -digráfica entonces existe una subdigráfica inducida  $H$  de  $D$  que es  $R^-$ -digráfica, por lo tanto  $H$  es fuertemente conexa [9] y  $H \cap T \neq \emptyset$ , ahora consideramos  $z_0 \in V(H)$  tal que  $\Delta(H) = \Delta_H(z_0)$ , claramente  $z_0$  está en a lo más  $(\text{c.i.}(H) - \text{c.i.d.}(H) + 1)$  ciclos impares de  $H$ , así obtenemos una contradicción al Teorema 2.4.8.

El recíproco es obvio.

Usando el Teorema 2.2.1 y algunos de los teoremas probados en esta sección, obtenemos condiciones suficientes para que una digráfica sea  $R$ -digráfica.

2.5 UN CONTRAEJEMPLO A UNA CONJETURA DE H. MEYNIEL  
SOBRE R-DIGRAFICAS.

La construcción presentada en esta sección fue publicada en 1982 [6].

Conjetura 2.5.1 (H. Meyniel 1976)

Sea  $D$  una digráfica; si todo ciclo impar de  $D$  posee dos pseudodiagonales, entonces  $D$  es  $R$ -digráfica.

Claramente el siguiente teorema resuelve la Conjetura 2.5.1.

Teorema 2.5.1.

Para todo  $k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , existe una digráfica sin núcleo tal que todo ciclo impar tiene al menos  $k$  pseudodiagonales.

Demostración

En la demostración todas las sumas son tomadas módulo  $8k+4$ .

Sea  $D$  una digráfica con  $V(D) = \{0, 1, \dots, 8k+3\}$  como conjunto de vértices y con flechas  $(i, i+1)$ ,  $(i_0+2i, 4k+2+i_0)$  para todo  $0 \leq i \leq k$  y para todo  $i_0 \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}$ .

Sea  $C = (0, 1, \dots, 8k+3)$  el ciclo generador de  $D$ ; es fácil ver que los ciclos impares de  $D$  son:

$(4k+2+i_0, C, i_0+2i) \cup (i_0+2i, 4k+2+i_0)$  para todo  $0 \leq i \leq k$  y

para todo  $i_0 \in \{0, 2k+1, 4k+2, 6k+3\}$ .

Claramente el ciclo impar

$$(4k+2+i_0, C, i_0+2i) \cup (i_0+2i, 4k+2+i_0)$$

tiene las diagonales  $(4k+2+i_0+2j, i_0)$  para todo  $0 \leq j \leq k$ .

$D$  no tiene núcleo; ya que de otro modo, si  $N$  es un núcleo de  $D$ . Entonces

$$0 \in N \Rightarrow (4k+2 \notin N, 2k+1 \notin N, 6k+3 \in N), \quad 6k+3 \notin N \text{ y } 4k+2 \notin N \Rightarrow 2k+2 \notin N.$$

Así,  $0 \in N \Rightarrow (2k+1 \notin N, 2k+2 \notin N \text{ y } 6k+3 \notin N)$ . Esto es imposible,

y concluimos que  $0 \notin N$ . Similarmente, podemos demostrar que

$$2k+1 \notin N, \quad 4k+2 \notin N \text{ y } 6k+3 \notin N. \text{ También } 0 \notin N \text{ y } 4k+2 \notin N \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2k \notin N$ . Así, obtenemos  $2k \notin N, 2k+1 \notin N \text{ y } 4k+2 \notin N$ , lo cual también es imposible.

Concluimos que  $D$  no tiene núcleo.

Más aún, es fácil ver que  $D$  es  $\bar{R}$ -digráfica y que  $D-(0,1)$

es  $R$ -digráfica.

### 3.1 INTRODUCCION.

El trabajo presentado en este capítulo fue hecho en colaboración con Victor Neumann Lara.

En este capítulo se demuestra que cualquier R-digráfica se puede extender a una  $R^-$ -digráfica. Como una consecuencia se demuestra que existen  $R^-$ -digráficas orientadas con número dicromático arbitrariamente grande.

Durante la demostración se desarrolla un método general que permite la construcción de una gran variedad de  $R^-$ -digráficas y  $R^-$ -gráficas orientadas.

Ahora presento algunas definiciones y algunos resultados previos.

Una digráfica  $D$  es llamada quasi R-digráfica si toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo, por lo tanto, una quasi R-digráfica  $D$  es una R-digráfica o una  $R^-$ -digráfica dependiendo de que  $D$  tenga núcleo o no.

Denotaremos por  $C = \vec{C}_n(j_1, j_2, \dots, j_k)$  a la digráfica definida como sigue:

$$V(C) = \{0, 1, \dots, n-1\},$$

$$F(C) = \{uv \mid v-u \equiv j_s \pmod{n}, \quad s = 1, 2, \dots, k\}.$$

Una función  $f: V(D) \rightarrow V(D')$  se dice que es un *homomorfismo*

(resp:  $v$ -homomorfismo) de  $D$  en  $D'$  si y sólo si  $uv \in F(D)$  implica que  $f(u)f(v) \in F(D')$  (resp:  $f(u) = f(v)$  ó  $f(u)f(v) \in F(D')$ ).

Si  $D$  y  $D'$  son digráficas isomorfas escribimos  $D \cong D'$ .

Durante el presente capítulo usaremos los siguientes resultados que fueron demostrados en [9] por Victor Neumann Lara y Hortnesia Galeana.

Teorema 3.1.1.

Sea  $D$  una digráfica, suponiendo que  $V(D)$  tiene una partición  $\{V_1, V_2\}$  tal que toda  $V_1V_2$ -flecha en  $D$  es simétrica y  $D[V_1]$  y  $D[V_2]$  son  $R$ -digráficas. Entonces  $D$  es una  $R$ -digráfica.

Teorema 3.1.2.

Si  $D$  es una  $R^-$ -digráfica entonces no existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que  $D[V_1, V_2] \subset \text{sim}(D)$ ; es decir  $\text{Asim}(D)$  es fuertemente conexa.

Teorema 3.1.3.

Si  $2 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , entonces  $C = \vec{C}_n(1, \underline{+2}, \underline{+3}, \dots, \underline{+r})$  es una  $R$ -digráfica ó una  $R^-$ -digráfica de acuerdo a que  $n \equiv 0 \pmod{r+1}$  ó  $n \not\equiv 0 \pmod{r+1}$ .

Corolario 3.1.1.

$\vec{C}_n(1, \underline{+2}, \dots, \underline{+ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$  es  $R^-$ -digráfica para  $n \geq 4$ .

Sea  $D$  una digráfica, si  $f = uv \in F(D)$ ,  $D(f/P_n)$  denotará cualquier digráfica  $D'$  tal que  $D' = (D-f) \cup P_n(u,v)$  donde  $P_n(u,v)$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud  $n$  tal que  $V(P_n(u,v) \cap D) = \{u,v\}$ .

Teorema 3.1.4.

$D(f/P_{2k+1})$  tiene núcleo si y sólo si  $D$  tiene núcleo.

Teorema 3.1.5.

Suponiendo que  $D-f$  es una  $R$ -digráfica. Entonces  $D(f/P_{2k+1})$  es una  $R$ -digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica) si y sólo si  $D$  es una  $R$ -digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica).

Teorema 3.1.6.

Sean  $\phi \neq F_0 \subset F(D)$  y  $D'$  una digráfica obtenida a partir de  $D$  reemplazando cada  $uv \in F_0$  por una  $uv$ -trayectoria dirigida  $P(u,v)$  de longitud impar y tal que  $V(D \cap P(u,v)) = \{u,v\}$  y  $V(P(u,v) \cap P(u',v')) = \{u,v\} \cap \{u',v'\}$  siempre que  $uv \neq u'v'$ ,  $uv, u'v' \in F_0$ . Supongamos además que  $D-F'$  es una  $R$ -digráfica siempre que  $\phi \neq F' \subset F_0$ . Entonces  $D'$  es una  $R$ -digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica) si y sólo si  $D$  es una  $R$ -digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica).



### 3.2 CONCEPTOS Y RESULTADOS PRELIMINARES.

En esta sección se establecen algunos resultados auxiliares y se introducen las  $\vec{P}_2$ -digráficas y las  $\vec{P}_3$ -digráficas que son digráficas que tienen un comportamiento similar al de  $\vec{P}_2$  y  $\vec{P}_3$  respectivamente con respecto a núcleos independientes módulo el par de puntos extremos.

#### Definición 3.2.1

Si  $D$  es una digráfica y  $N, Q \subset V(D)$ ; se dice que  $N$  es núcleo independiente módulo  $Q$  (n.i. mód.  $Q$ ) de  $D$  si y sólo si

- i)  $N$  es independiente.
- ii) Para todo  $w \in N^C \cap Q^C$  existe alguna  $wN$ -flecha.

#### Lema 3.2.1.

Sea  $\theta: D \rightarrow D_0$  un homomorfismo suprayectivo en vértices y en flechas,  $N_0^C \subset V(D_0)$ ,  $M \subset \theta^{-1}(N_0^C)$  tal que:

- i)  $\theta(M) = N_0^C$
- ii) Para cualesquiera  $u_0, w_0, u$  tales que  $u_0 \in N_0^C$ ,  $u_0 w_0 \in FD_0(N_0^C, N_0)$  y  $u \in M \cap \theta^{-1}(u_0)$  existe  $w \in \theta^{-1}(w_0)$  tal que  $uw \in F(D)$ .

Entonces

$N_0$  es núcleo de  $D_0$  si y sólo si  $\theta^{-1}(N_0)$  es un n.i.

mod  $(\theta^{-1}(N_0^C) - M)$  de  $D$ .

Demostracion

Ya que  $\theta$  es un homomorfismo suprayectivo en flechas, tenemos que  $N_0$  es independiente si y sólo si  $\theta^{-1}(N_0)$  es independiente.

Supongamos primero que  $N_0$  es núcleo de  $D_0$  y sea  $u \in [(\theta^{-1}(N_0^C))^C \cap (\theta^{-1}(N_0^C) - M)^C] = M$ , denotemos  $u_0 = \theta(u)$ , como  $N_0$  es núcleo de  $D_0$ , existe  $w_0 \in N_0$  tal que  $u_0 w_0 \in FD_0[N_0^C, N_0]$  y por (ii) tenemos que existe  $w \in \theta^{-1}(w_0)$  tal que  $uw \in FD$ , así que  $uw \in FD[M, \theta^{-1}(N_0)]$ . Se sigue que  $\theta^{-1}(N_0)$  es n.i. mod  $(\theta^{-1}(N_0^C) - M)$ .

Supongamos ahora que  $\theta^{-1}(N_0)$  es un n.i. mod  $(\theta^{-1}(N_0^C) - M)$ . Si  $u_0 \in N_0^C$  tomamos  $u \in (\theta^{-1}(u_0) \cap M)$ , sabemos que existe  $uw \in FD[M, \theta^{-1}(N_0)]$ . Claramente  $u_0 \theta(w) \in FD_0[N_0^C, N_0]$ . Entonces  $N_0$  es un núcleo de  $D_0$ .

Definicion 3.2.2.

Sea  $\theta: D \rightarrow D_0$  un homomorfismo suprayectivo en vértices y en flechas, diremos que  $\theta$  satisface la propiedad cubriente p.c. ó que tiene la propiedad del cubrimiento si  $u_0, w_0 \in V(D_0)$  y  $u \in V(D)$  tales que  $\theta(u) = u_0$  y  $u_0 w_0 \in F(D_0)$  existe  $w \in V(D)$  tal que  $\theta(w) = w_0$  y  $uw \in F(D)$ .

Corolario 3.2.1.

Sea  $N_0 \subset V(D_0)$ . Si  $\theta: D \rightarrow D_0$  satisface la propiedad cubriente



entonces  $N_O$  es núcleo de  $D_O$  si y sólo si  $\theta^{-1}(N_O)$  es un núcleo de  $D_O$ .

Demostración

Tomamos  $M = \theta^{-1}(N_O^C)$  y aplicamos el Lema 3.2.1.

Definición 3.2.3.

Una digráfica 2-punteada (d.d.p.) es una terna ordenada  $(W; w_1, w_2)$  donde  $W$  es una digráfica y  $\{w_1, w_2\}$  es un par ordenado de distintos vértices de  $W$ .

Dos digráficas 2-punteadas  $T_1 = (W_1; w_{11}, w_{12})$  y  $T_2 = (W_2; w_{21}, w_{22})$  son isomorfas  $(T_1 \cong T_2)$  si existe un isomorfismo de  $W_1$  en  $W_2$  que manda a  $w_{11}$  y  $w_{12}$  en  $w_{21}$  y  $w_{22}$  respectivamente. Si  $T'_1 = (W'_1; w'_{11}, w'_{12})$  y  $T'_2 = (W'_2; w'_{21}, w'_{22})$  son digráficas dos punteadas tales que  $V(W'_1) \cap V(W'_2) = \{w'_{12}\} = \{w'_{21}\}$ , la concatenación  $T'_1 \circ T'_2$  de  $T'_1$  y  $T'_2$  es por definición  $T' = (W'_1 \cup W'_2; w'_{11}, w'_{22})$ . Si  $T_1 = (W_1; w_{11}, w_{12})$  y  $T_2 = (W_2; w_{21}, w_{22})$  son cualesquiera d. d.p., la concatenación  $T_1 \circ T_2$  de  $T_1$  y  $T_2$  es por definición, la d.d.p.  $T' = T'_1 \circ T'_2$  obtenida como se ha descrito a partir de cualquier par de d.d.p.  $T'_1 \cong T_1$  y  $T'_2 \cong T_2$ . Nótese se que  $T_1 \circ T_2$  está definida salvo por isomorfismo.

Definición 3.2.4.

Una d.d.p.  $(W; w_1, w_2)$  será llamada una  $\vec{P}_3$ -digráfica si satisface las propiedades Propiedades  $\vec{P}_3$ .i,  $\vec{P}_3$ .ii y  $\vec{P}_3$ .iii.

$\vec{P}_3$ .i. Existen núcleos independientes módulo  $\{w_1, w_2\}$  de

$D, N^i \quad i=0,1$  tales que  $\{w_1, w_2\} \subset N^0, \{w_1, w_2\} \subset (N^1)^c$ .

$\vec{P}_3$ .ii. Si  $N$  es n.i. mod  $\{w_1, w_2\}$  de  $W$  entonces  $N$  satisface las siguientes tres propiedades:

a)  $w_1 \in N$  implica  $w_2 \in N$ .

b) Si  $w_1 \notin N$  y no hay  $w_1N$  flecha entonces  $w_2 \in N$ .

c) Si  $w_1 \notin N$  y existe  $w_1N$ -flecha entonces  $w_2 \notin N$ , y no existe  $w_2N$ -flecha.

$\vec{P}_3$ .iii. No existe una  $R^-$ -digráfica  $D$  que contenga subdigráficas inducidas  $D'$  y  $D''$  y vértices  $w'_1$  y  $w'_2$  y que satisfaga las siguientes dos propiedades:

a)  $D' \cup D'' = D; \quad V(D') \cap V(D'') = \{w'_1, w'_2\};$

$V(D') \neq \{w'_1, w'_2\}, \quad V(D'') \neq \{w'_1, w'_2\}.$

b)  $(D'; w'_1, w'_2) \cong (W'; w'_1, w'_2)$  donde  $W'$  es una subdigráfica inducida propia de  $W$  que contiene a  $w'_1$  y  $w'_2$ .

Nótese que cualquier copia isomorfa de una  $\vec{P}_3$ -digráfica también es una  $\vec{P}_3$ -digráfica.

### Ejemplos de $\vec{P}_3$ -digráficas.

E.1.  $(\vec{P}_3; 0, 2)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica; de hecho las  $\vec{P}_3$ -digráficas están definidas de tal manera que generalizan a  $(\vec{P}_3; 0, 2)$  manteniendo el comportamiento de  $(\vec{P}_3; 0, 2)$  con respecto a n.i. mod  $\{0, 2\}$  (y la propiedad  $\vec{P}_3$ .iii.)

E.2.  $(\vec{P}_{2m+1}; 0, 2m)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica.

E.3. Sea  $1 \leq i_j \leq n-1$ ,  $j=1, \dots, s$ . Agregando a  $\vec{P}_n$  el conjunto de flechas  $\{uv \mid v-u=i_j \text{ para alguna } j\}$  obtenemos una digráfica que se denotará por  $\vec{P}_n(i_1, i_2, \dots, i_s)$ .

La d.d.p.  $(\vec{P}_n(1, +2, +3, \dots, +(n-2)); 0, n-1)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica. (Para demostrar que satisface  $\vec{P}_3$ .ii(c) nótese que  $0 \notin N$  y existe  $0N$ -flecha implica que  $(n-2) \in N$  y la propiedad  $\vec{P}_3$ .iii se sigue directamente del Teorema 3.1.2.

Una variedad grande de ejemplos de  $\vec{P}_3$ -digráficas se puede construir usando las notas 3.2.1 y 3.2.2.

Nota 3.2.1.

La concatenación de dos  $\vec{P}_3$ -digráficas también es una  $\vec{P}_3$ -digráfica.

Nota 3.2.2.

Dada una digráfica  $D$  y  $v \in V(D)$  en [4] se definió la digráfica  $\alpha(D, v)$  como sigue:

$$V(\alpha(D, v)) = (V(D) - \{v\}) \cup \{v^-, v^0, v^+\}$$

$$E(\alpha(D, v)) = E(D - \{v\}) \cup \{zv^- \mid zv \in E(D)\} \cup \{v^+z \mid vz \in E(D)\} \\ \cup \{v^-v^0, v^0v^+\}.$$

Ahora, sea  $(W; w_1, w_2)$  cualquier  $\vec{P}_3$ -digráfica. Si  $w \neq w_1$ ,  $w \neq w_2$  entonces  $(\alpha(W, w); w_1, w_2)$  también es una  $\vec{P}_3$ -digráfica,  $(\alpha(W, w_1); w_1^-, w_2)$  y  $(\alpha(W, w_2); w_1, w_2^+)$  son  $\vec{P}_3$ -digráficas.

### $\vec{P}_2$ -digráficas

#### Definición 3.2.6.

Una d.d.p.  $(W; w_1, w_2)$  se dice que es una  $\vec{P}_2$ -digráfica siempre que satisfice las propiedades  $\vec{P}_2$ .i,  $\vec{P}_2$ .ii y  $\vec{P}_3$ .iii

$\vec{P}_2$ .i. Existen núcleos independientes módulo  $\{w_1, w_2\}$ ,  $N^i$  para  $i = 1, 2, 3$ , tales que  $w_1 \in N^1$ ,  $w_2 \notin N$ ;  $w_1 \notin N^2$ ,  $w_2 \in N^2$ ;  $w_1, w_2 \notin N^3$ .

$\vec{P}_2$ .ii. Todo n.i. mód  $\{w_1, w_2\}$   $N$  de  $W$  satisfice las siguientes tres propiedades.

- a) Si  $w_1 \in N$  entonces  $w_2 \notin N$  y no existen  $w_2N$ -flechas.
- b) Si  $w_1 \notin N$  y existe alguna  $w_1N$ -flecha entonces  $w_2 \notin N$ .
- c) Si  $w_1 \notin N$  y no existen  $w_1N$ -flechas entonces  $w_2 \notin N$  y no existen  $w_2N$ -flechas.

Es claro que copias isomorfas de una  $\vec{P}_2$ -digráfica también son  $\vec{P}_2$ -digráficas.

#### Ejemplos de $\vec{P}_2$ -digráficas.

E.1.  $(\vec{P}_{2m}; 0, 2m-1)$  es una  $\vec{P}_2$ -digráfica, en particular  $(\vec{P}_2; 0, 1)$  es una  $\vec{P}_2$ -digráfica. En realidad las  $\vec{P}_2$ -digráficas son ternas que tienen el mismo comportamiento que  $(\vec{P}_2; 0, 1)$  con respecto a núcleos independientes de la digráfica básica módulo los puntos distinguidos.

E.2 Usando la nota 3.2.4 podemos construir una variedad grande de  $\vec{P}_2$ -digráficas.

Nota 3.2.4.

La concatenación de dos  $\vec{P}_2$ -digráficas es una  $\vec{P}_3$ -digráfica.

Si  $T_1$  y  $T_2$  son d.d.p. una de las cuales es una  $\vec{P}_2$ -digráfica y la otra una  $\vec{P}_3$ -digráfica, entonces  $T_1 \circ T_2$  y  $T_2 \circ T_1$  son  $\vec{P}_2$ -digráficas.

Para finalizar esta sección damos algunas propiedades importantes de las  $\vec{P}_2$ -digráficas.

Sea  $D$  una digráfica,  $uv \in F(D)$  y  $T_{uv} = (W_{uv}; u, v)$  cualquier  $\vec{P}_2$ -digráfica que satisface  $V(D) \cap W_{uv} = \{u, v\}$ . Tomando  $D(uv|T_{uv}) = (D-uv) \cup T_{uv}$  tenemos que los teoremas, Teorema 3.1.4, Teorema 3.1.5 y el Teorema 3.1.6 se pueden generalizar de la siguiente manera:

Teorema 3.2.1.

$D(uv|T_{uv})$  tiene núcleo si y sólo si  $D$  tiene núcleo.

Teorema 3.2.2.

Suponiendo que  $D-uv$  es una  $R$ -digráfica. Entonces  $D(uv|T_{uv})$  es una  $R$ -digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica) si y sólo si  $D$  es  $R$ -digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica).

Teorema 3.2.3.

Sea  $\phi \neq \emptyset \subset F(D)$  y  $D'$  una digráfica obtenida de  $D$  reemplazando cada  $uv \in F_\phi$  por  $W_{uv}$  donde  $(W_{uv}; u, v)$  es una  $\vec{P}_2$ -digráfica que es R-digráfica y tal que  $V(D \cap W_{uv}) = \{u, v\}$  y  $W_{uv} \cap W_{u',v'} = \{u, v\} \cap \{u', v'\}$  siempre que  $uv \neq u'v'$ ,  $uv, u'v' \in F_\phi$ . Suponiendo que  $D - F'$  es una R-digráfica siempre que  $\phi \neq F' \subset F_\phi$ . Entonces  $D'$  es una R-digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica) si y sólo si  $D$  es una R-digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica).



3.3.  $\Delta$ -SISTEMAS Y  $\Delta$ -EXTENSIONES DE R-DIGRAFICAS A  $R^-$ -DIGRAFICAS

$\Delta_0$ -SISTEMAS Y  $\Delta_0$ -CONSTRUCCIONES.

Definición 3.3.1.

Una cuaterna  $S_0 = (D_0, U, j_+, j_-)$  será llamada un  $\Delta_0$ -sistema si  $D_0$  es una digráfica,  $U \subset V(D_0)$  y  $j_+ : U_+ \rightarrow U$  y  $j_- : U_- \rightarrow U$  son biyecciones tales que  $U_+$ ,  $U_-$  y  $V(D_0)$  son conjuntos ajenos dos a dos.

Si  $u \in U$  escribiremos  $u_+$  y  $u_-$  en lugar de  $j_+^{-1}(u)$  y  $j_-^{-1}(u)$  respectivamente.

Si  $S_0 = (D_0, U, j_+, j_-)$  es un  $\Delta_0$ -sistema, denotaremos por  $\Delta_0(S_0)$  a la digráfica definida como sigue:

$$V(\Delta_0(S_0)) = V(D_0 - U) \cup U_+ \cup U_-.$$

$$F_{\Delta_0(S_0)} = FD[V(D_0) - U] \cup \{z u_- \mid z u \in FD, z \notin U, u \in U\} \cup$$

$$\cup \{u_+ z \mid u z \in FD, z \notin U, u \in U\} \cup \{u'_+ u''_- \mid u', u'' \in U, u' u'' \in FD\}.$$

Nótese que  $\Delta_0(S_0)$  está definida salvo por isomorfismo.

También definimos  $p_0 : V(\Delta_0(S_0)) \rightarrow V(D_0)$  de la siguiente manera:

$$p_0|_{V(D) - U} = \text{identidad}, p_0|_{U_+} = j_+, p_0|_{U_-} = j_-.$$

Claramente  $p_0$  es un homomorfismo de  $\Delta_0(S_0)$  a  $D_0$  que es suprayectivo en flechas y en vértices.



$\delta$ -SISTEMAS.

Definición 3.3.2.

Un  $\delta$ -sistema es una cuaterna  $(S_0, \beta, u_+, u_-)$  donde

i)  $S_0 = (D_0, U, j_-, j_+)$  es un  $\delta_0$ -sistema y  $u_-$  y  $u_+$  son digráficas tales que  $v(u_-) = u_-$ ,  $v(u_+) = u_+$ .

ii)  $\beta = (\beta_u)_{u \in U}$  es una familia de  $\vec{P}_3$ -digráficas  $\beta_u = (B_u; u_-, u_+)$ .

El  $\delta$ -sistema será llamado *propio* siempre que  $v(B_u) \cap v(\delta_0(S_0)) = \{u_-, u_+\}$ .

Definición 3.3.3.

Si  $S = (S_0, \beta, u_+, u_-)$  es un  $\delta$ -sistema propio, entonces las digráficas  $\delta(S)$  y  $\delta_1(S)$  están definidos como sigue:

$$\delta(S) = \delta_0(S_0) \cup \bigcup_{u \in U} B_u \cup u_+ \cup u_-.$$

$$\delta_1(S) = \delta_0(S_0) \cup \bigcup_{u \in U} B_u.$$

Nótese que si  $F(u_+) = F(u_-) = \emptyset$  entonces  $\delta(S) = \delta_1(S)$ .

También definimos  $p: v(\delta(S)) \rightarrow v(D_0)$  de la siguiente manera:

$p|v(\delta_0(S_0)) = p_0$  y  $p|v(B_u) \equiv u$  para todo  $u \in U$ . Claramente  $p$  es un  $v$ -homomorfismo de  $\delta(S)$  sobre  $D_0$ .

Nota 3.3.1.

Nótese que  $\delta(S)$  y  $\delta_1(S)$  están definidas salvo por isomorfismo. Es conveniente extender el significado de  $\delta(S)$  y  $\delta_1(S)$  para cualquier  $\Delta$ -sistema  $S$ . En el caso general  $\delta(S)$  y  $\delta_1(S)$  están definidas salvo por isomorfismo como  $\delta(S')$  y  $\delta_1(S')$  respectivamente donde  $S'$  es cualquier  $\Delta$ -sistema propio obtenido de  $S$  reemplazando cada  $B_u$  por una copia isomorfa de  $B_u$ .

Teorema 3.3.1.

Sea  $S = (S_0, \beta, u_+, u_-)$  un  $\Delta$ -sistema propio donde  $S_0 = (D_0, U, j_+, j_-)$ . Suponiendo que  $j_+$  y  $j_-$  son homomorfismos de  $u_+$  y  $u_-$  sobre  $D_0[U]$  respectivamente y que cada  $\beta_u = (B_u; u_-, u_+)$  satisficé las condiciones  $\vec{P}_3.i$  y  $\vec{P}_3.ii$  de la definición 3.2.4. Entonces  $\delta(S)$  tiene núcleo si y sólo si  $D_0$  tiene núcleo.

Demostración

Sea  $\rho_0 : V(\delta_0(S_0)) \rightarrow V(D_0)$  como se definió en la definición 3.3.1.

i) Supongamos primero que  $D_0$  tiene núcleo, y sea  $N_0$  un núcleo de  $D_0$ , ya que cada  $\beta_u = (B_u; u_-, u_+)$  satisficé  $\vec{P}_3.i$  tomamos para cada  $u \in U$  un núcleo independiente módulo  $\{u_-, u_+\}$   $N_u$  de  $B_u$  que que satisfaga  $\{u_-, u_+\} \subset N_u$  si  $u \in N_0 \cap U$  y  $\{u_-, u_+\} \subset N_u^c$  si  $u \in N_0^c \cap U$ , además por  $\vec{P}_3.ii$  podemos suponer que  $N_u$  es n.i. mód  $\{u_+\}$  de  $B_u$ , y usando

la hipótesis de que  $j_-$  y  $j_+$  son homomorfismos es fácil ver que  $N = p_0^{-1}(N_0) \cup \bigcup_{u \in U} N_u$  es núcleo de  $\delta(S)$ .

ii) Supongamos ahora que  $\delta(S)$  tiene núcleo y sea  $N$  un núcleo de  $\delta(S)$ , claramente  $N_u = N \cap V(B_u)$  es un n.i. mod  $\{u_-, u_+\}$  de  $B_u$ . Ahora demostramos que  $\{u_-, u_+\} \subset N_u$  ó  $\{u_-, u_+\} \subset N_u^c$ . Por la propiedad  $\vec{P}_3$ .ii de la definición 3.2.4. tenemos que si  $u_- \in N_u$  entonces  $u_+ \in N_u$ . Supongamos ahora que  $u_- \notin N_u$ , tomamos  $w \in N$  tal que  $u_- w \in F\delta(S)$  y analizamos los dos posibles casos.

ii.1) Si  $w \in V(B_u)$  entonces  $N_u$  es un n.i. mod  $\{u_+\}$  de  $B_u$ , y por  $\vec{P}_3$ .ii  $u_+ \notin N_u$  y no existe  $uN_u$ -flecha.

ii.2) Si  $w \notin V(B_u)$  entonces por la construcción de  $\delta(S)$  tenemos que  $w \in U_-$  y  $u_j_-(w) \in F(D_0[U])$ . Por lo tanto  $u_+ w \in F(\delta(S))$  y se sigue que  $u_+ \notin N_u$ . Así hemos demostrado que  $\{u_-, u_+\} \subset N_u$  ó  $\{u_-, u_+\} \subset N_u^c$ .

Obviamente  $N_1 = N \cap V(\delta_0(S_0))$  es un n.i. mod  $U_- \cup U_+$  de  $\delta_0(S_0)$  y demostraremos que además  $N_1$  es un n.i. mod  $U_- \cap N^c$  de  $\delta_0(S_0)$ . Supongamos que  $u_+ \in U_+ \cap N^c$  y tomamos  $w \in N$  tal que  $u_+ w \in F(\delta(S))$ , es suficiente demostrar ahora que existe alguna flecha en  $\delta_0(S_0)$  de  $u_+$  a  $N_1$ . Como  $u_+ \in N^c$  y hemos demostrado que  $\{u_+, u_-\} \subset N_u$  ó  $\{u_+, u_-\} \subset N_u^c$  se sigue que  $u_- \notin N_u$  y por  $\vec{P}_3$ .ii tenemos que  $w \notin B_u$ .

Si  $w \in U_+$  entonces  $j_+(u_+)j_+(w) \in F(D_0[U])$  y por lo tanto  $u_+j_-^{-1}(j_+(w)) \in F(\delta_0(S_0))$  con  $j_-^{-1}(j_+(w)) \in N_1$  pues  $w \in N_1$ .

Se sigue que  $N_1$  es un n.i. mod  $U_- \cap N_1^C$  de  $\Delta_0(S_0)$ .

Ahora; claramente  $N_1 = p_0^{-1}(p_0(N_1))$ . Tomando  $M = N_1^C - (U_- \cap N_1^C)$  y  $N_0 = p_0(N_1)$ . Ya que para cada  $u \in U$ ,  $\{u_-, u_+\} \subset N_1$  ó  $\{u_-, u_+\} \subset N_1^C$ ,  $N_1 = p_0^{-1}(p_0(N_1)) = p_0^{-1}(N_0)$  y  $M \subset N_1^C = p_0^{-1}(N_0^C)$ .  
Aplicando el Lema 3.2.1 concluimos que  $N_0$  es núcleo de  $D_0$ .

Teorema 3.3.2:

Sea  $S = (S_0, \beta, u_+, u_-)$  un  $\Delta$ -sistema propio,  $S_0 = (D_0, U, j_+, j_-)$ .  
Suponiendo que cada  $\beta_u$  es una  $P_3$ -digráfica tal que  $B_u$  es  $R$ -digráfica,  $u_+$  y  $u_-$  son  $R$ -digráficas y  $j_+$  y  $j_-$  son homomorfismos de  $u_+$  y  $u_-$  en  $D_0[U]$  tales que

- i)  $j_+(u_+) \subset \text{sim}(D_0[U])$ ,  $j_-(u_-) \subset \text{sim}(D_0[U])$ .
- ii) Si  $w_1, w_1' \in F(u_-)$  y  $w_2, w_2' \in F(u_+)$  entonces  $j_+(w_2) \neq j_-(w_1)$ .

Entonces  $\Delta(S)$  es una quasi  $R$ -digráfica siempre que  $D_0$  sea una quasi  $R$ -digráfica.

Demostración

Supongamos que el teorema es falso y sea  $H$  una  $R^-$ -digráfica tal que  $H \not\subseteq^* \Delta(S)$ .

Sea  $p: V(\Delta(S)) \rightarrow V(D_0)$  el  $v$ -homomorfismo de  $\Delta(S)$  sobre  $D_0$  definido en 3.3.3. Tomamos ahora  $H' = D_0[p(V(H))]$  y definimos  $p_H: V(H) \rightarrow V(H')$  por  $p_H(z) = p(z)$  para cada  $z \in V(H)$ . Veremos que el  $v$ -homomorfismo  $p_H$  satisface

$$p_H^{-1}(w) = \begin{cases} w_+, w_- \text{ ó } V(B_w) & \text{si } w \in U. \\ w & \text{si } w \notin U. \end{cases}$$

Por la construcción de  $\delta(S)$   $p_H^{-1}(w) = w$  cuando  $w \notin U$ .

Si  $w \in U$ , tomamos  $H_w = p_H^{-1}(w) \cap V(B_w)$ . Claramente  $H_w \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $H_w \neq V(B_w)$ ,  $\{w_-\}$ ,  $\{w_+\}$ . Observamos que  $w_+ \in H$  ya que  $H$  es  $R^-$ -digráfica y por lo tanto es conexa y sin puntos de corte (Teorema 3.1.2 y Teorema 1.3.1) similarmente se demuestra que  $w_- \in H$ . Ahora bien,  $\{w_+, w_-\} \subsetneq H_w$  es imposible por la propiedad  $P_3$ , iii, y por otra parte si  $H_w = \{w_+, w_-\}$  se sigue de la hipótesis (ii) que  $d_H^+(w_-) = 0$  ó  $d_H^-(w_+) = 0$  lo cual no es posible ya que  $H$  es una  $R^-$ -digráfica y por lo tanto es fuertemente conexa (Teorema 3.1.2.).

Definimos  $H'_-, H'_+, H'_0 \subset U$  y  $w'$  como sigue:

$$H'_- = \{u \in V(H') \cap U \mid p_H^{-1}(u) = \{u_-\}\}$$

$$H'_+ = \{u \in V(H') \cap U \mid p_H^{-1}(u) = \{u_+\}\}$$

$$H'_0 = \{u \in V(H') \cap U \mid p_H^{-1}(u) = V(B_u)\}$$

$$w' = V(H') - (H'_- \cup H'_+ \cup H'_0).$$

Claramente  $H'_-, H'_+$  y  $H'_0$  son ajenos dos a dos y  $H'_- \cup H'_+ \cup H'_0 = V(H') \cap U$ .

Las dos siguientes propiedades se siguen directamente de las hipótesis.

- i)  $H'[\{H'_-\}] = j_-(u_-[p_H^{-1}(H'_-)]) \cong u_-[p_H^{-1}(H'_-)]$ .
- ii)  $H'[\{H'_+\}] = j_+(u_+[p_H^{-1}(H'_+)]) \cong u_+[p_H^{-1}(H'_+)]$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Probaremos algunas otras propiedades que serán útiles para el resto de la demostración.

$$\text{iii) } H'[H'_-, V(H') - H'_-] \subset j_-(U_-) \subset \text{sim}(D_0[U]).$$

Demostramos solamente la primera contención ya que la segunda es hipótesis.

Sea  $zw \in F(H'[H'_-, V(H') - H'_-])$ , como  $p_H$  es un  $v$ -homomorfismo suprayectivo en vértices y flechas tenemos que existe  $w' \in p_H^{-1}(w)$  tal que  $z_- w' \in F(H)$  ya que además  $p_H^{-1}(z) = \{z_-\}$ . Ahora, como  $H \subset^* \Delta(S)$  y por la definición de  $\Delta(S)$  tenemos que  $w' \in U_-$ , así que  $w = j_-(w')$  por lo que  $zw \in F(j_-(U_-))$ .

$$\text{iv) } H'[V(H') - V(H'_+), V(H'_+)] \subset j_+(U_+) \subset \text{sim}(D_0[U]).$$

Sea  $zw \in F(H'[V(H') - V(H'_+), V(H'_+)])$ , como  $p_H$  es un  $v$ -homomorfismo suprayectivo en vértices y en flechas y como  $p_H^{-1}(w) = \{w_+\}$  existe  $z' \in p_H^{-1}(z)$  tal que  $z'_+ w_+ \in F(H)$ , como  $H \subset^* \Delta(S)$  y por la definición de  $\Delta(S)$  tenemos que  $z' \in U_+$  y por lo tanto  $zw \in F(j_+(U_+))$ , la otra contención es hipótesis.

$$\text{v) } F(H'[H'_-, VH']) \subset F(\text{sim}(H')).$$

Sea  $uz \in F(H'[H'_-, V(H') - H'_-])$ , por iii)  $uz \in F(\text{sim}(D_0[U]))$ ; esto implica que  $z \in U - H'_-$  y así que  $p_H^{-1}(z) \neq \{z_-\}$ . Más aún  $p_H^{-1}(z) \neq \{z_+\}$  porque  $p_H^{-1}(z) = \{z_+\}$  implica que  $u_- z_+ \in F(H)$  por ser  $p_H$  un  $v$ -homomorfismo suprayectivo en vértices y en flechas, pero esto contradice el hecho de que por la construcción de  $\Delta(S)$   $u_- z_+ \notin F(\Delta(S))$ . Por lo tanto  $p_H^{-1}(z) = \{V(B_z)\}$ ,  $z_+ u_- \in F(H)$  y  $zu \in F(H')$  ya que  $z_+ u_- \in F(\Delta(S))$ .

vi)  $F(H'[V(H')-V(H'_+), H'_+]) \subset F(\text{sim}(H'))$ .

Sea  $zw \in F(H'[V(H')-V(H'_+), H'_+])$ , por iv)  $zw \in F(\text{sim}(D_0[U]))$ ; esto implica que  $z \in U-H'_+$  y así que  $p_H^{-1}(z) \neq \{z_+\}$ . También tenemos que  $p_H^{-1}(z) \neq \{z_-\}$  porque  $p_H^{-1}(z) = \{z_-\}$  implica que  $z_w \in F(H)$  lo cual es imposible por la definición de  $\delta(S)$ . Así que  $p_H^{-1}(z) = V(B_z)$ ,  $w_+z_- \in F(H)$  y  $wz \in F(H')$  ya que  $w_+z_- \in F(\delta(S))$ .

y Así tenemos la siguiente propiedad.

vii)  $H'[H'_0 \cup W'] = D_0[H'_0 \cup W']$ .

Ahora observamos que:

a) La propiedad i) y la hipótesis que  $U_-$  es R-digráfica implican que  $H'_-$  es R-digráfica.

b) La propiedad vii) y la hipótesis  $D_0$  es R-digráfica implican que  $(H'-H'_+)[H'_0 \cup W']$  es R-digráfica.

c) La propiedad v) y las observaciones a) y b) muestran que la descomposición  $(H'_-, H'_0 \cup W')$  de  $H'-H'_+$  satisface las hipótesis del Teorema 3.1.1. y por lo tanto  $H'-H'_+$  es una R-digráfica.

d) La propiedad ii) y la hipótesis  $U_+$  es R-digráfica implican que  $H'_+$  es R-digráfica.

e) La propiedad vi) y el hecho demostrado en c) de que  $H'-H'_+$  es una R-digráfica muestran que  $(H'-H'_+, H'_+)$  es una descomposición de  $H'$  que satisface las hipótesis del Teorema 3.1.1.



Así concluimos que  $H'$  es una R-digráfica.

Ahora bien, ya que:

$H \cong \Delta(H, H'_0, \beta | H'_0, u_+[j_+^{-1}(H'_0)], u_-[j_-^{-1}(H'_0)])$ , aplicando el Teorema 3.3.1 concluimos que  $H$  tiene núcleo lo cual contradice la suposición de que  $H$  es  $R^-$ -digráfica.

Teorema 3.3.3.

Con las mismas hipótesis del Teorema 3.3.2,  $\Delta(S)$  es una  $R^-$ -digráfica (resp. R-digráfica) si y sólo si  $D_0$  es una  $R^-$ -digráfica (resp. R-digráfica).

Demostración

En vista de los Teoremas 3.3.1 y 3.3.2 es suficiente demostrar que si  $\Delta(S)$  es una quasi R-digráfica, entonces  $D_0$  es una quasi R-digráfica. Supongamos que esto es falso y sea  $H' \not\stackrel{C^*}{\cong} D_0$  una  $R^-$ -digráfica.

Claramente tenemos:

$$p^{-1}(H') = \Delta(H', V(H') \cap U, \beta | V(H') \cap U, u_+[j_+^{-1}(V(H') \cap U)], u_-[j_-^{-1}(V(H') \cap U)]).$$

es subdigráfica inducida de  $\Delta(S)$  y por lo tanto es una R-digráfica y por el Teorema 3.3.1, se sigue que  $H'$  es una R-digráfica.

### 3.4 EXTENSIONES DE R-DIGRAFICAS A $R^-$ -DIGRAFICAS.

En esta sección aplicamos los resultados de la sección 3 para establecer el resultado más importante de este capítulo.

#### Teorema 3.4.1.

Toda R-digráfica (resp: R-gráfica orientada) es una subdigráfica inducida de una  $R^-$ -digráfica (resp:  $R^-$ -gráfica orientada).

#### Demostración

Sea  $\alpha$  una R-digráfica dada y sea  $D_0$  una  $R^-$ -digráfica tal que existe un conjunto  $U' \subset V(D_0)$  que satisface las condiciones  $|U'| = |V(\alpha)|$  y  $\text{sim} D_0[U']$  es completa. Sea  $U \subset V(D)$  una transversal de  $F(\text{sim}(D_0))$  que contiene a  $U'$  (se puede tomar por ejemplo  $D_0 = \vec{C}_{2m}(1, \pm 2, \dots, \pm m)$ ,  $m \geq |V(\alpha)|$ ,  $U = V(D_0)$ ,  $U' = \{0, 2, \dots, 2m-2\}$ , aquí notamos que  $D_0$  es una  $R^-$ -digráfica por el Corolario 3.1.1.).

Tomamos ahora  $u_+$  y  $u_-$  de manera que  $\alpha \cong u_+[U']$  y  $F(u_+) = F(u_+[U'])$ ,  $F(u_-) = \phi$  y sea  $\beta_u$  cualquier  $\vec{P}_3$ -digráfica (por ejemplo  $\vec{P}_3$ ). Obtenemos así un  $\delta$ -sistema propio  $S$ .

Por el Teorema 3.3.3.,  $\delta(S)$  es una  $R^-$ -digráfica (resp:  $R^-$ -gráfica orientada) y claramente  $\alpha \cong \delta(S)[U']$ .

#### Corolario 3.4.1.

Existe un número infinito de  $R^-$ -digráficas (resp:  $R^-$ -gráficas

orientadas) que contienen a una R-digráfica (resp; R-gráfica orientada) dada.

Recordamos que el número dicromático  $d_k(D)$  de una digráfica  $D$  fue definido en [13] (ver también [5]) e independientemente en [11] como el mínimo número de subdigráficas inducidas acíclicas en el que  $D$  puede ser particionada. Nótese que  $d_k(D) \geq \chi(D)$ . En [9] fue demostrado lo siguiente:

Teorema 3.4.2

Existen R-gráficas orientadas con número dicromático arbitrariamente grande.

Como una consecuencia directa de los Teoremas 3.4.1 y 3.4.2, obtenemos

Teorema 3.4.3

Existen  $R^-$ -gráficas orientadas con número dicromático arbitrariamente grande.

#### 4.1 INTRODUCCION.

El trabajo presentado en este capítulo fue hecho en colaboración con Victor Neumann Lara.

En este capítulo se expone un método para extender una  $R$ -digráfica a una  $R^{\bar{}}$ -digráfica; partiendo de una  $R^{\bar{}}$ -muldigráfica; este método nos permite encontrar una amplia variedad de  $R^{\bar{}}$ -digráficas en las que cada ciclo impar tiene al menos  $k$  pseudodiagonales, donde  $k$  es un natural dado. La existencia de estas  $R^{\bar{}}$ -digráficas resuelve la conjetura de H. Meyniel y abarca como un caso particular a la primera construcción de este tipo expuesta en [6].

4.2 t-SISTEMAS y t-CONSTRUCCIONES.

$t_0$ -SISTEMAS Y  $t_0$ -CONSTRUCCIONES.

Definición 4.2.1.

Sean  $D$  una multidigráfica y  $u \in V(D)$ ; una partición de  $F_u = F_u^+(D) \cup F_u^-(D)$ ,  $\pi_u = \{u_-^0, u_-^1, \dots, u_-^{m(u)-1}, u_+\}$  será llamada una  $t$ -partición en  $u$  si se satisfacen las dos siguientes condiciones:

- (1)  $u_-^i \subset F_u^-(D)$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, m(u)-1\}$ .
- (2)  $u_+ \subset F_u^+(D)$ .

Nótese que de la Definición 4.2.1 se sigue que  $F_u^+(D) = u_+$ .

Si  $\pi_u$  es una  $t$ -partición en  $u$ ; se define  $\bar{\pi}_u$  como sigue:  
 $\bar{\pi}_u = \{\bar{u}_-^0, \bar{u}_-^1, \dots, \bar{u}_-^{m(u)-1}, \bar{u}_+\}$  donde  $\bar{u}_+ = (u, u_+)$  y  $\bar{u}_-^i = (u, u_-^i)$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, m(u)-1\}$ .

Definición 4.2.2.

Una terna  $t_0 = (D_0, U, A)$  será llamada un  $t_0$ -sistema si satisface las dos siguientes condiciones:

- (1)  $D_0$  es una multidigráfica,  $U \subset V(D_0)$
- (2)  $A = (A_u)_{u \in U}$  es una familia de árboles con corraíz tales que  $V(A_u) = \{\bar{u}_-^0, \bar{u}_-^1, \dots, \bar{u}_-^{m(u)-1}, \bar{u}_+\} = \bar{\pi}_u$  donde  $\pi_u$  es una  $t$ -partición en  $u$  y  $u_+$  es la corraíz de  $A_u$ , y  $|V(A_u)| \geq 2$ .

Para  $u \in U$  y  $f \in F_u$  denotaremos  $\pi_u(f)$  al elemento de  $\pi_u$

al que pertenece  $f$ .

Si  $t_0 = (D_0, U, A)$  es un  $t_0$ -sistema, denotaremos por  $t_0(t_0)$  a la digráfica definida como sigue:

$$V(t_0(t_0)) = (V(D_0) - U) \cup \bigcup_{u \in U} V(A_u).$$

$$F(t_0(t_0)) = \{f^* | f \in F(D_0)\}.$$

donde si  $f = wz \in F(D_0)$  se define  $f^*$  de la siguiente manera:

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } w, z \in (V(D_0) - U). \\ w \overline{\pi_z(f)} & \text{si } w \in (V(D_0) - U) \text{ y } z \in U. \\ \overline{w}_+ z & \text{si } w \in U \text{ y } z \in (V(D_0) - U). \\ \overline{w}_+ \overline{\pi_z(f)} & \text{si } w, z \in U. \end{cases}$$

También definimos  $\psi_0: V(t_0(t_0)) \rightarrow V(D_0)$  de la manera siguiente:

$$\psi_0(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in (V(D_0) - U). \\ u & \text{si } z \in V(A_u). \end{cases}$$

Por construcción  $\psi_0$  es un homomorfismo

$t_1$ -SISTEMAS Y  $t_1$ -CONSTRUCCIONES.

Definición 4.2.3.

Un  $t_1$ -sistema es una pareja  $(t_0, \gamma)$  donde

i)  $t_0 = (D_0, U, A)$  es un  $t_0$ -sistema.

ii)  $\gamma = (\gamma_u)_{u \in U}$  es una familia de funciones  $\gamma_u$  sujetas a las condiciones siguientes:

(1)  $\gamma_u$  asocia a cada  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$  una digráfica  $\gamma_{uf}$  tal que  $w_1, w_2 \in \gamma_{uf}$ .

(2)  $V(\gamma_{uf}) \cap V(A_u) = \{w_1, w_2\}$ ; las digráficas  $(\gamma_{uf} - \bigcup_{u \in U} V(A_u))$  son ajenas dos a dos para  $u \in U$ ,  $f \in F(A_u)$ .

Nótese que ya que  $A_{u_1} \cap A_{u_2} = \emptyset$  para  $u_1 \neq u_2$  se tiene que si  $u_1 \neq u_2$  entonces  $\gamma_{u_1 f_1} \cap \gamma_{u_2 f_2} = \emptyset$  para cualesquiera  $f_1 \in F(A_{u_1})$ ,  $f_2 \in F(A_{u_2})$ .

Definición 4.2.4.

Si  $t_1 = (t_0, \gamma)$  es un  $t_1$ -sistema, entonces la digráfica  $t_1(t_1)$  está definida como sigue:

$$t_1(t_1) = t_0(t_0) \cup \bigcup_{\substack{f \in F(A_u) \\ u \in U}} \gamma_{uf}$$

También definimos  $\psi_1: V(t_1(t_1)) \rightarrow V(D_0)$  por

$$\psi_1(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in (V(D_0) - U) \\ u & \text{si } z \in \gamma_{uf}. \end{cases}$$

Por construcción  $\psi_1$  es un  $v$ -homomorfismo que satisface

$$\psi_1|_{t_0(t_0)} = \psi_0.$$

Si  $D$  es una multidigráfica y  $A, T \subseteq V(D)$ ; diremos que  $T$

es A-homogéneo si  $T \subseteq A$  ó  $T \subseteq (V(D) - A)$ .

Lema 4.2.1.

Sea E un árbol con corraiz  $e_0$ ,  $|V(E)| \geq 2$  y  $(W_f, u_f, v_f)_f, f =$   
 $= u_f v_f \in F(E)$  una familia de digráficas dos punteadas que sa-  
tisfacen  $\vec{P}_3$ .ii y tales que  $(W_f - \{u_f, v_f\}) \cap (W_{f'} - \{u_{f'}, v_{f'}\}) = \emptyset$   
para  $f \neq f'$ . Entonces para todo núcleo independiente módulo  
 $\{e_0\}$  de  $\bigcup_{f \in F(E)} W_f, N; V(E)$  es N-homogéneo. Si además  
 $V(E) \subseteq N^c$  entonces en  $\bigcup_{f \in F(E)} W_f$  no existen  $e_0 N$ -flechas.

Demostración

Haremos la demostración por inducción sobre  $|V(E)|$ .

Si  $|V(E)| = 2$ , el resultado es consecuencia directa de  $\vec{P}_3$ .ii.

Supongamos que  $|V(E)| > 2$  y sean,  $f' = u_{f'}, v_{f'} \in F(E)$  tal  
que  $\delta_E^-(u_{f'}) = 0$ , N un núcleo independiente módulo  $\{e_0\}$   
de  $\bigcup_{f \in F(E)} W_f$  y  $E_0 = E - u_{f'}$ . Claramente se tiene:

(1)  $N \cap \bigcup_{f \in F(E_0)} W_f$  es núcleo independiente módulo  $\{e_0, v_{f'}\}$   
de  $\bigcup_{f \in F(E_0)} W_f$ .

(2)  $N \cap W_{f'}$  es núcleo independiente módulo  $\{v_{f'}\}$   
de  $W_{f'}$ , y por  $\vec{P}_3$ .ii  $\{u_{f'}, v_{f'}\}$  es  
N-homogéneo.

Si  $v_{f'} = e_0$  ó  $\{u_{f'}, v_{f'}\} \subset N$ , se sigue de (1) que  
 $N \cap \bigcup_{f \in F(E_0)} W_f$  es un núcleo independiente módulo  $\{e_0\}$  de



$\bigcup_{f \in F(E_0)} W_f$ , por hipótesis de inducción se tiene que  $V(E_0)$  es N-homogéneo y por (2)  $V(E)$  es N-homogéneo. Además si  $V(E) \subset N^C$ , entonces  $v_{f_1} = e_0$  y por  $\vec{P}_3$ .ii no existen flechas en  $\bigcup_{f \in F(E)} W_f$  de  $e_0$  a N.

Si  $u_{f_1}, v_{f_1} \in N^C$  y  $v_{f_1} \neq e_0$ , entonces por  $\vec{P}_3$ .ii no existe  $v_{f_1}, (W_{f_1} \cap N)$ -flecha en  $W_{f_1}$ , y ya que N es núcleo independiente módulo  $\{e_0\}$  de  $\bigcup_{f \in F(E)} W_f$  usando (1) se concluye que

$N \cap \bigcup_{f \in F(E_0)} W_f$  es núcleo independiente módulo  $e_0$  de  $\bigcup_{f \in F(E_0)} W_f$ . Usando la hipótesis de inducción tenemos que  $V(E_0)$  es N-homogéneo y como  $V(E_0) \subset N^C$  no existen  $e_0$  N-flechas en  $\bigcup_{f \in F(E_0)} W_f$ , se sigue que  $V(E) \subset N^C$  y no existen  $e_0$  N-flechas en  $\bigcup_{f \in F(E)} W_f$ .

Teorema 4.2.1.

Sea  $t = (D_0, U, A, \gamma)$  un  $t_1$ -sistema. Si  $D_0$  tiene núcleo y para toda  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ,  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una digráfica dos punteada que satisface las propiedades  $\vec{P}_3$ .i y  $\vec{P}_3$ .ii entonces  $D = t_1(t_1)$  tiene núcleo.

Demostración.

Sea  $N_0$  un núcleo de  $D_0$  y consideramos el homomorfismo  $\psi_0: V(t_0(D_0, U, A)) \rightarrow D_0$ . Claramente  $\psi_0^{-1}(N_0) = N'$  es un núcleo independiente módulo  $\bigcup_{u \in U} (V(A_u) - \{u_+\})$  de  $t_0((D_0, U, A))$  y  $V(A_u)$  es  $N'$ -homogéneo para cada  $u \in U$ . Por  $\vec{P}_3$ .i y  $\vec{P}_3$ .ii podemos considerar para  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ,  $N'_{uf}$  para

$i = 0, 1$  un núcleo independiente módulo  $\{w_2\}$  de  $\gamma_{uf}$  tal que  $w_1 w_2 \in N_{uf}^0$  ó  $w_1, w_2 \notin N_{uf}^1$  dependiendo de que  $u_0 \in N_0$  y por lo tanto  $w_1, w_2 \in N'$  ó  $u \notin N_0$  y por lo tanto  $w_1, w_2 \notin N'$ . Es fácil ver que:  $N = N' \cup \bigcup_{\substack{u \in N \cap U \\ f \in F(A_u)}} N_{uf}^0 \cup \bigcup_{\substack{u \in N^c \cap U \\ f \in F(A_u)}} N_{uf}^1$  es núcleo de  $t_1(t_1)$ .

Teorema 4.2.2.

Sea  $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$  un  $t_1$ -sistema, supongamos que  $D = t_1(t_1)$  tiene núcleo y que para todo  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ,  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una d.d.p. que satisface la propiedad  $\vec{P}_3$ .ii. Entonces  $D_0$  tiene núcleo.

Demostración.

Sea  $N$  un núcleo de  $D$ , por el Lema 4.2.1,  $V(A_u)$  es  $N$ -homogéneo para cada  $u \in U$ . Sea  $N' = N \cap V(t_0(D_0, U, A))$ ;  $N_0 = \psi_0(N')$ . Se tiene que  $\psi_0^{-1}(N_0) = N'$  por la  $N$ -homogeneidad de  $V(A_u)$  y  $N'$  es n.i. mod  $\bigcup_{u \in U} (V(A_u) - \{u_1\})$  de  $D$ . Tomando  $M = ((V(D_0) - U) \cup \bigcup_{u \in U} \{u_1\}) \cap N'^c$  claramente se satisfacen las hipótesis del Lema 3.2.1, por lo que se tiene que  $N_0$  es núcleo de  $D_0$ .

Si  $T$  es un árbol con corraíz, una sección inicial  $S$  de  $T$  es un subconjunto de  $V(T)$ ,  $S \subseteq V(T)$  tal que si  $s \in S$ ,  $w \in T$  y existe una  $ws$ -trayectoria en  $T$  entonces  $w \in S$ . Claramente  $\emptyset$  es una sección inicial de cualquier árbol con corraíz.

Teorema 4.2.3.

Sea  $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$  un  $t_1$ -sistema tal que para toda  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ,  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica,  $\gamma_{uf}$  es R-digráfica y para toda familia no trivial  $S = (S_u)_{u \in U}$  donde  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ , la digráfica  $D_0 - \bigcup_{u \in U} \{f \in F(D_0) \mid \text{en } t_0(D_0, U, A) \text{ } f \text{ incide en } S_u\}$  es R-digráfica. Si toda subdigráfica inducida propia de  $D_0$  tiene núcleo entonces toda subdigráfica inducida propia de  $D = t_1(t_1)$  tiene núcleo.

Demostración

Supongamos que el teorema es falso y sea  $H$  una  $R^-$ -subdigráfica inducida propia de  $D$ .

Primero demostraremos que  $H \cap D[\bigcup_{f \in F(A_u)} V(\gamma_{uf})] = D[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_{uf})]$  para cada  $u \in U$  y donde  $S = (S_u = V(A_u) - V(H))_{u \in U}$ , es una familia tal que  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ .

Sea  $u \in U$ . Si  $H \cap D[\bigcup_{f \in F(A_u)} V(\gamma_{uf})] = D[\bigcup_{f \in F(A_u)} V(\gamma_{uf})]$  entonces  $S_u = \emptyset$  satisface las propiedades requeridas. Si  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$  tal que  $H \cap D[V(\gamma_{uf})] \subsetneq D[V(\gamma_{uf})]$ .

Sea  $A_u^{w_1} = A_u \setminus \{z \in V(A_u) \mid \text{existe alguna } zw \text{-trayectoria en } A_u\}$  y  $H_{w_1} = H \cap D[\bigcup_{f \in F(A_u^{w_1})} V(\gamma_{uf})]$ , demostramos primero que  $H_{w_1} = \emptyset$  ya que si  $H_{w_1} \neq \emptyset$  entonces

$H = H[V(H) - V(H_{w_1})]$  es R-digráfica, como  $\gamma_{uf}$  es R-digráfica para cada  $f \in F(A_u)$ , se sigue que  $H \cap \gamma_{uf}$  es R-digráfica y

como  $A_u^{W_1}$  es un árbol, usando el Teorema 1.3.2 se tiene que  $H_{W_1}$  es R-digráfica y como H es  $R^-$ -digráfica,  $H_2 \neq \emptyset$ , además por la construcción de  $t_1(t_1)$  y ya que por  $\vec{P}_3$ .iii tenemos que  $H \cap D[V(\gamma_{uf})] \subseteq \{w_1, w_2\}$  se sigue que no existen  $H_{W_1} H_2$ -flechas en H y usando el Teorema 3.1.1 se concluye que H es R-digráfica lo cual contradice la definición de H. Así que  $H_{W_1} = \emptyset$  y como  $H \cap D[V(\gamma_{uf})] \subseteq \{w_1, w_2\}$  se tiene que  $H \subseteq D[\bigcup_{f \in F(A_u - A_u^{W_1})} V(\gamma_{uf})]$  y esto se tiene para cada  $f \in F(A_u)$  tal que  $H \cap D[V(\gamma_{uf})] \not\subseteq D[V(\gamma_{uf})]$ . Así que  $H \cap D[\bigcup_{f \in F(A_u)} V(\gamma_{uf})] = D[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_{uf})]$  para  $S_u = S_u^1 \cup S_u^2$   $S_u^1 = \{w \in V(A_u) \mid \text{para } f = wz \in F(A_u), H \cap D[V(\gamma_{uf})] \not\subseteq D[V(\gamma_{uf})]\}$  y  $S_u^2 = \bigcup_{u \in S_u^1} V(A_u^W)$ . Claramente  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ .

Consideremos ahora el v-homomorfismo  $\psi_1: D \rightarrow D_0$  que es suprayectivo en vértices y en flechas y sean  $H_0 = \psi_1(H)$  y  $U_0 = U \cap V(H_0)$ ; claramente  $H = t_1(H_0, U_0, (A_u - S_u)_{u \in U}, \gamma_0)$ ,  $\gamma_0 = \gamma \mid_{\bigcup_{u \in U} F(A_u - S_u)}$ .

Mostraremos ahora que  $H_0$  tiene núcleo.

Si  $S_u = \emptyset$  para toda  $u \in U$ . Entonces como H es subdigráfica inducida propia de D se sigue que existe

$z \in (V(D) - \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in F(A_u)} V(\gamma_{uf})) \cap (V(D) - V(H))$  y por lo tanto

$H_0$  es una subdigráfica inducida propia de  $D_0$  y por hipótesis  $H_0$  tiene núcleo.

Si  $S_u \neq \emptyset$  para algún  $u \in U$ , sea  $U' = \{u \in U \mid S_u \neq \emptyset\}$  entonces

$H_0$  es subdigráfica inducida de  $D_0 - \bigcup_{u \in U} \{f \in F(D_0) \mid \text{en } t_0(D_0, U, A) \text{ f incide en } S_u\}$  y por hipótesis se tiene que  $H_0$  tiene núcleo.

Ahora bien; ya que  $H_0$  tiene núcleo y  $H = t_1(H_0, U_0, (A_u - S_u)_{u \in U_0}, \gamma_0)$  se sigue del Teorema 4.2.1 que  $H$  tiene núcleo lo cual contradice que  $H$  es  $R^-$ -digráfica.

Teorema 4.2.4.

Sea  $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$  un  $t_1$ -sistema tal que para toda  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ;  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica. Si toda subdigráfica inducida propia de  $D = t_1(t_1)$  tiene núcleo, entonces toda subdigráfica inducida propia de  $D_0$  tiene núcleo.

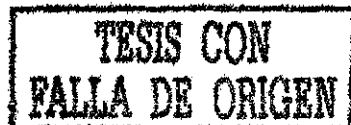
Demostración.

Supongamos que toda subdigráfica inducida propia de  $D$  es  $R$ -digráfica y sea  $D'_0$  una subdigráfica inducida propia de  $D_0$ .  
Sea  $D' = \psi_1^{-1}(D'_0) = t_1(D'_0, U', (A_u)_{u \in U'}, \gamma')$  donde  $U' = U \cap V(D'_0)$  y  $\gamma' = \gamma|_{\bigcup_{u \in U'} F(A_u)}$ ,  $D'$  tiene núcleo por ser una subdigráfica inducida propia de  $D$  y por el Teorema 4.2.2 se sigue que  $D'_0$  tiene núcleo.

Luego toda subdigráfica inducida propia de  $D_0$  tiene núcleo.

Teorema 4.2.5

Sea  $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$  un  $t_1$ -sistema tal que para toda  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ;  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica,  $\gamma_{uf}$



es R-digráfica y para toda familia no trivial  $S = (S_u)_{u \in U}$  donde  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ , la digráfica  $D_0 = \bigcup_{u \in U} \{f \in F(D_0) \mid \text{en } t_0(D_0, U, A) \text{ } f \text{ incide en } S_u\}$  es R-digráfica. Entonces  $t_1(t_1)$  es R-digráfica (resp: R-digráfica) si y sólo si  $D_0$  es R-digráfica (resp: R-digráfica).

Demostración.

Se sigue directamente de los Teoremas 4.2.1., 4.2.2., 4.2.3. y 4.2.4.

4.3  $t_1$ -CONSTRUCCIONES Y LA CONJETURA DE H. MEYNIEL.

En esta sección se demuestra algunos teoremas que nos dan un método para realizar de manera sencilla algunas  $t$ -construcciones y se obtiene una clase amplia de  $R^-$ -digráficas que están cercanamente relacionadas con la conjetura de H. Meyniel.

Sean  $D_0$  una multidigráfica,  $U \subseteq V(D_0)$ ,  $<^P$  un orden total en  $\{v(f) = \{u_1, u_2\} \mid \text{existe } f = u_1 u_2 \in F(\text{sim}(D_0))\}$ , y  $<^{u_1 u_2}$  un orden total en  $\{f \in F(D_0) \mid f \text{ es una } u_1 u_2\text{-flecha}\}$ .

Construimos un orden total en  $\{(v(f), f) \mid f \in F(\text{sim}(D_0)) \cap F_u^-(D_0)\}$  que denotaremos  $<$ , para cada  $u \in U$  de la siguiente manera:  $(v(f), f) < (v(g), g)$  si y sólo si  $v(f) <^P v(g)$  ó  $v(f) = v(g) = \{u_1, u_2\}$  y  $f <^{u_1 u_2} g$ .

Denotaremos por  $P_u = \{u_-(f) \mid u_-(f) = \{f\}, f \in F(\text{sim}(D_0)) \cap F_u^-(D_0)\}$   $u_-^0 = F(\text{asim}(D_0)) \cap F_u^-(D_0)$ .

$u_+ = F_u^+(D_0)$ .

$A_u^<$  denotará a la  $u_-^0 u_+$ -trayectoria.

$(u_-^0, u_-(f_1), u_-(f_2), \dots, u_-(f_r), u_+)$  definida por

$(v(f_1), f_1) < (v(f_2), f_2) < \dots < (v(f_r), f_r)$  ;

$\{f_1, \dots, f_r\} = F(\text{sim}(D_0)) \cap F_u^-(D_0)$ .

$A^< = (A_u^<)_{u \in U}$ .

Teorema 4.3.1.

Si  $D_0$  es una multiplicación que es una cuasi R-digráfica, entonces el  $t_0$ -sistema  $t_0 = (D_0, U, A^<)$  definido al principio de esta sección satisface que para toda familia no trivial  $S = (S_u)_{u \in U}$  de secciones iniciales  $S_u$  de  $A_u^<$ ,  $(D_0 - \bigcup_{u \in U} \{f \in F(D_0) \mid \text{en } t_0(t_0) \text{ f incide en } S_u\}) = D_0(S)$  es R-digráfica.

Demostración.

Supongamos que el teorema es falso y sea  $D_\rho$  una  $R^-$ -subdigráfica inducida de  $D_0(S)$ .

Ya que  $D_0(S)$  es subdigráfica propia de  $D_0$ ,  $D_\rho$  no es subdigráfica inducida de  $D_0$ . Sea  $V_\rho = V(D_\rho)$ .

Si  $f$  es una uv-flecha que está en  $F(D_0[V_\rho] - F(D_\rho))$ , entonces  $S_v$  no es trivial y por lo tanto  $v_-^0 \cap F(D_\rho) = \emptyset$ . Ya que  $D_\rho$  es  $R^-$ -digráfica; por el Teorema 3.1.2 existe alguna wv-flecha en  $F(D_\rho)$  tal que no existe vw-flecha en  $D_\rho$  y como  $v_-^0 \cap F(D_\rho) = \emptyset$ ,  $wv \in F(\text{sim}(D_0))$ . Además si existe  $zw \in F(D_\rho)$  tal que  $wz \notin F(D_\rho)$  y  $wz \in F(D_0)$ , entonces  $S_z \neq \emptyset$  y como  $S_z$  es sección inicial de  $A_z^<$  se sigue que  $z_-^0 \cap F(D_\rho) = \emptyset$ , y como  $D_\rho$  es  $R^-$ -digráfica existe  $xz \in F(D_\rho)$  tal que  $zx \notin F(D_\rho)$  y  $zx \in F(D_0)$ . Esto demuestra que en  $D'_\rho = \text{Asim}(D_\rho) \cap \text{sim}(D_0)$ ,  $\delta_{D'_\rho}^+(z) \neq 0$  implica que  $\delta_{D'_\rho}^-(z) \neq 0$  y demás existe  $w \in V(D'_\rho)$  tal que  $\delta_{D'_\rho}^+(w) \neq 0$ . Se sigue que  $D'_\rho$  contiene algún ciclo dirigido



$C = (w_0, f_0, w_1, f_1, \dots, w_n, f_n, w_0)$ . Ya que  $<^P$  es un orden total en  $\{v(f) \mid f \in \text{sim}(D_0)\}$  y  $C \subseteq D'_\rho$ , se sigue que para algún  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$   $\{w_{i-1}, w_i\} <^P \{w_i, w_{i+1}\}$  (los índices son tomados módulo  $n+1$ ).

Ahora bien, por la construcción, tenemos que  $A_{w_i}^< [\{w_{i-}(g) \mid g \text{ es una } w_{i+1}w_i\text{-flecha}\}]$  es una subtrayectoria de la subtrayectoria de  $A_{w_i}^<$  con extremos  $w_{i-}(f_{i-1})$  y  $w_i^+$ . Como  $f_{i-1} \in F(C)$  se sigue que  $w_{i-}(f_{i-1}) \notin S_{w_i}$  y por lo tanto tenemos que  $\{w_{i-}(g) \mid g \text{ es una } w_{i+1}w_i\text{-flecha}\} \cap S_{w_i} = \emptyset$  y por lo tanto como  $f_i \in C$  existe alguna  $w_{i+1}w_i$ -flecha en  $D_0(S)$  y también tenemos  $f_i$  una  $w_iw_{i+1}$ -flecha en  $D_0(S)$ . Como  $D_\rho$  es una subdigráfica inducida de  $D_0(S)$  y  $f_i \in F(D_\rho)$  se sigue que existe alguna  $w_{i+1}w_i$ -flecha en  $D_\rho$ . Luego  $f_i \in F(\text{sim}(D_\rho))$ , lo que contradice que  $f_i \in F(D'_\rho)$ .

Diremos que una digráfica  $D$  satisface la  $k$ -ésima condición de Meyniel si cada ciclo impar de  $D$  posee al menos  $k$ -pseudodiagonales y escribiremos,  $D$  satisface  $M(k)$ .

Si  $D_0$  es una digráfica, se denotará por  $D_0^{(m)}$  a la multidigráfica obtenida dando a cada flecha simétrica de  $D_0$  multiplicidad  $m$ .

Lema 4.3.1.

Sea  $D_0$  una digráfica tal que todo ciclo posee una pseudodiagonal simétrica. Si  $t_1 = (D_0^{(m)}, v(D_0), A^<, \gamma)$  es un  $t_1$ -sistema

tal que  $\gamma_{uf}$  satisface  $M(k)$  para cada  $u \in V(D_0)$ ,  $f \in F(A_u^<)$ , entonces  $D_0^{(m)t} = t_1(t_1)$  satisface  $M(k)$ .

Demostración

Si  $C$  es un ciclo en  $D_0^{(m)t}$  tal que  $\psi_1(C)$  tiene más de un punto, entonces claramente  $C' = \psi_1(C)$  es un ciclo dirigido  $C' = (w_0, w_1, \dots, w_n, w_0)$  entonces si  $f = w_1 w_j \in F(\text{sim}(D_0))$  es una pseudodiagonal de  $C'$ , es fácil ver que  $\psi_1^{-1}(f)$  son  $m$  pseudodiagonales de  $C$ .

De manera análoga se demuestra el siguiente

Lema 4.3.2.

Sea  $D_0$  una digráfica tal que cada ciclo impar posee una pseudodiagonal simétrica. Si  $t_1 = (D_0^{(m)}, V(D_0), A^<, \gamma)$  es un  $t_1$ -sistema tal que para cada  $u \in V(D_0)$ ,  $f = w_1 w_2 \in F(A_u^<)$  se tiene que  $\gamma_{uf}$  satisface  $M(k)$  y toda  $w_1 w_2$ -trayectoria en  $\gamma_{uf}$  es de longitud par, entonces  $D_0^{(m)t}$  satisface  $M(k)$ .

Teorema 4.3.2.

Sea  $D_0$  una  $R^-$ -digráfica tal que todo ciclo posee una pseudodiagonal simétrica. Si  $t_1 = (D_0^{(m)}, V(D_0), A^<, \gamma)$  es un  $t_1$ -sistema tal que para cada  $u \in V(D_0)$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u^<)$ ,  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es  $\vec{P}_3$ -digráfica,  $\gamma_{uf}$  es  $R$ -digráfica y satisface  $M(k)$  entonces  $D_0^{(m)t} = t_1(t_1)$  es una  $R^-$ -digráfica que satisface  $M(k)$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Demostración

Se sigue directamente de los Teoremas 4.3.1, 4.2.5. y el Lema 4.3.1.

Teorema 4.3.3.

Sea  $D_0$  una  $R^-$ -digráfica tal que todo ciclo impar posee una pseudodiagonal simétrica. Si  $t_1 = (D_0^{(m)}, V(D_0), A^<, \gamma)$  es un  $t_1$ -sistema tal que para cada  $u \in V(D_0)$  y  $f \in F(A_u^<)$ ,  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica,  $\gamma_{uf}$  es una  $R$ -digráfica que satisface  $M(k)$  y toda  $w_1 w_2$ -trayectoria en  $\gamma_{uf}$  tiene longitud par, entonces  $D_0^{(m)t} = t_1(t_1)$  es una  $R^-$ -digráfica que satisface  $M(k)$ .

Demostración

Se sigue directamente de los Teoremas 4.3.1, 4.2.5 y el Lema 4.3.2.

Corolario 4.3.1.

Para cada número natural  $k$  existe  $D_k$  una  $R^-$ -digráfica en la cual cada ciclo impar tiene  $k$  diagonales.

Demostración

Aplicando la construcción descrita en ésta sección para el caso,  $\gamma_{uf}$  una trayectoria de longitud par,

$$D_0 = \vec{C}_n(1, \underline{+2}, \dots, \underline{+r}) \text{ donde } n \not\equiv 0 \pmod{r+1}, U = V(D_0).$$

#### 4.4 $t$ -SISTEMAS Y $t$ -EXTENSIONES.

En esta sección se expone un método para extender una  $R$ -digráfica a una  $R^-$ -digráfica, este método está basado en las  $t_0$ -construcciones y  $t_1$ -construcciones y generaliza parcialmente al expuesto en el capítulo 3.

##### Definición 4.4.1.

Sea  $t_0 = (D_0, U, A)$  un  $t_0$ -sistema, denotaremos por  $t(t_0)$  a la digráfica definida como sigue:

$$V(t(t_0)) = V(t_0(t_0)).$$

$$F(t(t_0)) = F(t_0(t_0)) \cup \{w_+y \mid yz_+ \in F(A_z), wz \in F(\text{sim} D_0[U])\}$$

$$\{z_+y \mid yw_+ \in F(A_w), wz \in F(\text{Sim} D_0[U])\}.$$

También definimos  $\varphi_0: V(t(t_0)) \rightarrow V(D_0)$  haciendo  $\varphi_0 = \psi_0$  y denotamos  $D_0^t = \varphi_0(t(t_0))$ .

Claramente  $t_0^t = (D_0^t, U, A^t)$  es un  $t_0$ -sistema y  $t_0(t_0^t) = t(t_0)$  donde  $A_u^t \cong A_u$  para cada  $u \in U$  y la correspondiente  $t$ -partición en  $u$  está dada por  $\pi_u^t = \{\{f \in F(D_0^t) \mid \text{en } t(t_0) \text{ } f \text{ incide en } x\} \mid x \in V(A_u)\}$ .

##### Definición 4.4.2.

Sea  $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$  un  $t_1$ -sistema, entonces la digráfica  $t(t_1)$  está definida como sigue:

$$t(t_1) = t(t_0) \bigcup_{\substack{f \in F(A_u) \\ u \in U}} \gamma_{uf}.$$

También definimos  $\varphi_1 : V(t(t_1)) \rightarrow V(D_0)$  haciendo  $\varphi_1 = \psi_1$ .

Claramente  $t_1^t = (D_0^t, U, A^t, \gamma)$  es un  $t_1$ -sistema y  $t(t_1) = t_1(t_1^t)$ .

Definición 4.4.3.

Un  $t$ -sistema es una pareja  $t = (t_1, u_+)$  donde  $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$  es un  $t_1$ -sistema,  $u_+$  es una digráfica tal que  $V(u_+) \subseteq \subseteq U_+ = \{u_+ \in V(A_u) \mid u \in U\}$ , y la función  $j_+ : V(u_+) \rightarrow U$  definida por  $j_+(u_+) = u$  es un homomorfismo tal que  $j_+(u_+) \subseteq \text{sim } D_0[U]$ .

Si  $t = (D_0, U, A, \gamma, u_+)$  es un  $t$ -sistema, denotaremos por  $t(t)$  a la digráfica definida por  $t(t) = t(t_1) \cup u_+$ , donde  $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$ .

También definimos  $\varphi : V(t(t)) \rightarrow V(D_0)$  haciendo  $\varphi = \psi_1$ .

Claramente  $t(t) = t_1(t_1^t) \cup u_+$ .

Teorema 4.4.1.

Sea  $t = (D_0, U, A, \gamma, u_+)$  un  $t$ -sistema. Si  $D_0$  tiene núcleo y para toda  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in P(A_u)$ ,  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una digráfica dos punteada que satisface las propiedades  $\vec{P}_3.i$  y  $\vec{P}_3.ii$  entonces  $D = t(t)$  tiene núcleo.

Demostración

Ya hemos observado que  $t(t) = t_1(t_1) \cup u_+$  donde  $t_1^t = (D_0^t, U, A^t, \gamma)$  es un  $t_1$ -sistema. Ya que  $D_0$  tiene núcleo se sigue que  $D_0^t$  tiene núcleo y por el Teorema 4.2.1 tenemos que  $t_1(t_1^t)$  tiene núcleo; sea  $N$  un núcleo de  $t_1(t_1^t)$ , claramente para cada  $u \in U$ ,  $N \cap \bigcup_{f \in P(A_u)} \gamma_{uf} = N_u$  es un núcleo

independiente módulo  $\{a_u^0\}$  de  $\bigcup_{f \in F(A_u)} \gamma_{uf}$  donde  $a_u^0$  es la corraiz de  $A_u$ , se sigue del Lema 4.2.1 que  $V(A_u)$  es  $N_u$ -homogéneo y por lo tanto  $V(A_u)$  es N-homogéneo.

Si  $u_+ w_+ \in F(U_+)$ , por la definición de  $t(t)$  existen  $u' \in V(A_u)$ ,  $w' \in V(A_w)$  tales que  $u' u_+ \in F(A_u)$ ,  $w' w_+ \in F(A_w)$ ,  $u_+ w' \in F(t_1(t_1^t))$  y  $w_+ u' \in F(t_1(t_1^t))$ , por lo tanto al menos una de las dos siguientes contensiones se cumple  $V(A_u) \subseteq N^C$  ó  $V(A_w) \subseteq N^C$ . Así que N también es núcleo de  $t(t)$ .

Teorema 4.4.2.

Sea  $t = (D_0, U, A, \gamma, U_+)$  un  $t$ -sistema, supongamos que  $D = t(t)$  tiene núcleo y que para todo  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ,  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una d.d.p. que satisface la propiedad  $\bar{P}_3$ .ii. Entonces  $D_0$  tiene núcleo.

Demostración

Sea N un núcleo de D y sea  $N_u = N \cap \bigcup_{f \in F(A_u)} \gamma_{uf}$ , claramente  $N_u$  es un núcleo independiente módulo  $\{a_u^0\}$  de  $\bigcup_{f \in F(A_u)} \gamma_{uf}$  donde  $a_u^0$  es la corraiz de  $A_u$ , usando Lemma 4.2.1 tenemos que  $V(A_u)$  es N-homogéneo.

Si  $u_+ w_+ \in F(U_+)$  tal que  $u_+ \notin N$  y  $w_+ \in N$ , por la definición de  $t(t)$  existen  $w' \in V(A_u)$ ,  $w' \in V(A_w)$  tales que  $u' u_+ \in F(A_u)$ ,  $w' w_+ \in F(A_w)$ ,  $u_+ w' \in F(t(t))$  y  $w_+ u' \in F(t(t))$  y como  $V(A_w) \subseteq N$  y  $t(t) = t_1(t_1^t) \cup U_+$  se sigue que N es núcleo de  $t_1(t_1^t)$  y se sigue del Teorema 4.2.2. que  $D_0^t$  tiene núcleo y por lo tanto  $D_0$  tiene núcleo.

Teorema 4.4.3.

Sea  $t = (D_0, U, A, \gamma, u_+)$  un  $t$ -sistema tal que para toda  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ,  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica,  $\gamma_{uf}$  es R-digráfica y para toda familia no trivial  $S = (S_u)_{u \in U}$  donde  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ , la digráfica.

$D_0^t = \{f \in F(D_0^t) \mid \text{en } t_0(D_0^t, U, A^t) \text{ } f \text{ incide en } S_u\}$ , es R-digráfica. Si toda subdigráfica inducida propia de  $D_0$  tiene núcleo entonces toda subdigráfica inducida propia de  $D = t(t)$  tiene núcleo.

Demostración

Supongamos que el Teorema es falso y sea  $H$  una  $R^-$ -subdiráfica inducida propia de  $D$ . De manera completamente análoga a como se hizo en la demostración del Teorema 4.2.3 se demuestra que para cada  $u \in U$   $H \cap D[\bigcup_{f \in F(A_u)} V(\gamma_{uf})] = D[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_{uf})]$ , donde  $(S_u = V(A_u) - V(H))_{u \in U}$  es una familia tal que  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ .

Consideramos ahora el  $v$ -homomorfismo  $\varphi: V(D) \rightarrow V(D_0)$  que es suprayectivo en vértices y en flechas y sean

$H_0 = \varphi(H)$ ,  $U_0 = U \cap V(H_0)$ ,  $u_+^0 = u_+[\{u_+ \in U_+ \mid u \in U_0\}]$ ; claramente  $H = t(H_0, U_0, (A_u - S_u)_{u \in U_0}, \gamma_0, u_+^0)$ , donde  $\gamma_0 = \gamma|_{\bigcup_{u \in U_0} F(A_u - S_u)}$

Demostraremos que  $H_0$  tiene núcleo.

i) Sea  $H_0^+ = H_0[\{z \in U_0 \mid \varphi^{-1}(z) = \{z_+\}\}]$ ;  $H_0^+ \subseteq^* U_+$  por lo tanto  $H_0^+$  es R-digráfica.

ii)  $F(H_0[H_0 - H_0^+, H_0^+]) \subseteq F(\text{sim } H_0)$ .

Sea  $wz \in F(H_0)$  tal que  $w \notin H_0^+$ ,  $z \in H_0^+$ , ya que  $\varphi$  es  $v$ -homomorfismo suprayectivo en vértices y flechas existe  $w' \in \varphi^{-1}(w)$  tal que  $w'z_+ \in F(H)$ , por la definición de  $D$  se sigue que  $w' = w_+$  y como  $w \notin H_0^+$  existe  $w_1 \in A_w$  tal que  $w_1w_+ \in F(A_w)$  y  $z_+w_1 \in F(H)$ , luego  $wz \in F(\text{sim } H_0)$ .

Ahora analizamos los dos posibles casos:

caso a) Si  $H_0^+ \neq \emptyset$ , entonces  $H'_0 = H - \{z \in V(H) \mid \varphi(z) \in H_0^+\}$  es  $R$ -digráfica y ya que

$$H'_0 = t(H_0 - H_0^+, (A_u - S_u)_{u \in (U_0 - H_0^+)}, \gamma'_0, u_+^{0'}), \text{ donde}$$

$$\gamma'_0 = \gamma \mid \bigcup_{u \in U_0 - H_0^+} F(A_u - S_u) \text{ y } u_+^{0'} = u_+^0 [V(u_+^0) - V(\varphi^{-1}(H_0^+))].$$

Se sigue del Teorema 4.4.2 que  $H_0 - H_0^+$  tiene núcleo, sea  $N_1$  núcleo de  $H_0 - H_0^+$  por ii) tenemos que  $N_1$  es seminúcleo no trivial de  $H_0$ , por i) existe  $N_2$  un núcleo de

$H_0^+ \{z \in V(H_0^+) \mid \text{en } H_0 \text{ no existe } zN_1\text{-flecha}\}$ , y entonces por el Teorema 1.2.2, se sigue que  $N_1 \cup N_2$  es núcleo de  $H_0$ .

Caso b) Si  $H_0^+ = \emptyset$  entonces para todo  $u \in U_0$  existe  $u' \in A_u$  tal que  $u'u_+ \in F(A_u)$  y por la construcción de  $D$  tenemos que  $H_0$  tiene núcleo si y sólo si

$\varphi_1(t_1(H_0^t, U, (A_u^t - S_u)_{u \in U}, \gamma_0)) = \varphi_1(H - F(u_+))$  tiene núcleo, donde  $H_0^t = D_0^t \{V(H_0)\}$ . Por otra parte,  $H - F(u_+)$  es subdigráfica inducida propia  $t_1(t_1)$  que por el Teorema 4.2.3 tiene núcleo, y por el Teorema 4.2.2 se sigue que  $\varphi(H - F(u_+))$  tiene núcleo y por lo tanto  $H_0$  tiene núcleo.



Ya que  $H_0$  tiene núcleo y  $H = \tau(H_0, U_0, (A_u - S_u)_{u \in U_0}, \gamma_0, U_+^0)$  se sigue del Teorema 4.4.1 que  $H$  tiene núcleo lo que contradice que  $H$  es  $R^-$ -digráfica.

Teorema 4.4.4.

Sea  $t = (D_0, U, A, \gamma, U_+)$  un  $t$ -sistema tal que para toda  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ;  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica. Si toda subdigráfica inducida propia de  $D = \tau(t)$  tiene núcleo, entonces toda subdigráfica inducida propia de  $D_0$  tiene núcleo.

Demostración.

Supongamos que toda subdigráfica inducida propia de  $D$  es  $R$ -digráfica y sea  $D'_0$  una subdigráfica inducida propia de  $D_0$ . Sea  $D' = \varphi^{-1}(D'_0) = \tau(D'_0, U', (A_u)_{u \in U'}, \gamma', U'_+)$  donde  $U' = U \cap V(D'_0)$ ,  $\gamma' = \gamma|_{U'}$  y  $U'_+ = U_+ \cap V(\varphi^{-1}(U')) \cap U_+$ ;  $D'$  tiene núcleo por ser una subdigráfica inducida propia de  $D$  y por el Teorema 4.4.2 se sigue que  $D'_0$  tiene núcleo. Luego toda subdigráfica inducida propia de  $D_0$  tiene núcleo.

Teorema 4.4.5.

Sea  $t = (D_0, U, A, \gamma, U_+)$  un  $t$ -sistema tal que para toda  $u \in U$  y  $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$ ;  $(\gamma_{uf}, w_1, w_2)$  es una  $\vec{P}_3$ -digráfica,  $\gamma_{uf}$  es  $R$ -digráfica y para toda familia no trivial  $S = (S_u)_{u \in U}$  donde  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ , la digráfica  $D_0^t = \{f \in F(D_0^t) \mid \text{en } \tau_0(D_0^t, U, A^t) \text{ } f \text{ incide en } S_u\}$  es  $R$ -digráfica. Entonces  $\tau(t)$  es  $R$ -digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica)



si y sólo si  $D_0$  es R-digráfica (resp:  $R^-$ -digráfica).

Demostración.

Se sigue directamente de los Teoremas 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4.

Nota 4.4.1

Sea  $t = (D_0, U, A, \gamma, U_+)$  un  $t$ -sistema,  $t_0 = (D_0, U, A)$  denotamos por  $t'_0(t)$  a la digráfica definida como sigue:

$$V(t'_0(t)) = V(t_0(t_0)).$$

$$F(t'_0(t)) = F(t_0(t_0)) \cup \{w_+y \mid yz_+ \in F(A_z), w_+z_+ \in F(U_+)\}$$

$$\cup \{z_+y \mid yw_+ \in F(A_w), w_+z_+ \in F(U_+)\}.$$

También denotaremos por  $\varphi'_0 = \psi_0: V(t'_0(t)) \rightarrow V(D_0)$  y  $D_0^{t'} = \varphi'_0(t'_0(t))$ . Claramente  $t'_0 = (D_0^{t'}, U, A^{t'})$  es  $t_0$ -sistema y  $t_0(t_0^{t'}) = t'_0(t)$  donde  $A_u^{t'} \cong A_u$  para cada  $u \in U$  y la correspondiente  $t$ -partición en  $U$  está dada por:

$$\pi_u^{t'} = \{\{f \in F(D_0^{t'}) \mid \text{en } t'_0(t) \text{ } f \text{ incide en } x\} \mid x \in V(A_u)\}.$$

$t'_1(t_1)$  denotará a la digráfica  $t'_1(t) = t'_0(t) \cup \bigcup_{\substack{f \in F(A_u) \\ u \in U}} \gamma_{uf}$  y

$t'(t)$  denotará a la digráfica

$$t'(t) = t'_1(t) \cup U_+.$$

Los Teoremas 4.4.1, 4.4.2, 4.4.2, 4.4.4 y 4.4.5 son válidos si en los enunciados se sustituyen los  $t(t)$  por  $t'(t)$ ,  $D_0^t$  por  $D_0^{t'}$  y  $t_0(D_0^t, U, A^t)$  por  $t_0(D_0^{t'}, U, A^{t'})$  y las demostraciones son completamente análogas.

Para finalizar esta sección se da un método para realizar de manera sencilla  $t$ -extensiones que son diferentes a las  $s$ -extensiones expuestas en el capítulo 3 y se obtiene así una clase amplia de  $R^-$ -digráficas.

Lemma 4.4.1.

Sea  $D_0 = \vec{C}_n(1, +2, +3, \dots, +r)$ ,  $U = V(D_0)$ , para  $u \in U$   
 $\pi_u = \{u_-^0, u_+, u_-(f) \mid u_-(f) = \{f\}, f \in F(\text{sim } D_0) \cap F^-(D_0)\}$  es una  $t$ -partición en  $u$ , donde  $u_-^0 = F(\text{asim } D_0) \cap F_u^-(D_0)$  y  $u_+ = F_u^+(D_0)$ ,  $A_u$  denotará a la  $u_-^0 u_+$ -trayectoria  $(u_-^0, u_-(f_1), u_-(f_2), \dots, u_-(f_r), u_+)$  donde  $\{f_1, f_2, \dots, f_r\} = F(\text{sim } D_0) \cap F_u^-(D_0)$ .

Para toda familia no trivial  $S = (S_u)_{u \in U}$  donde  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ , la digráfica

$D_0(S) = D_0^t - \{f \in F(D_0^t) \mid \text{en } t_0(D_0^t, U, A^t) \text{ } f \text{ incide en } S_u\}$  es  $R$ -digráfica.

Demostración

Supongamos que el Lema es falso y sea  $H$  una  $R^-$ -subdigráfica inducida de  $D_0(S)$ , para alguna  $S = (S_u)_{u \in U}$  familia no trivial donde  $S_u$  es una sección inicial de  $A_u$ .

Sea  $H^+ = H[\{z \in V(H) \mid S_z = A_z - \{z_+\}\}]$ , como  $F(H^+) = \emptyset$ ,  $H^+$  es  $R$ -digráfica y por la definición de  $D_0^t$

$F(H[V(H) - H^+, H^+]) = \emptyset$  y por el Teorema 3.1.2 se sigue que

$H^+ = \emptyset$ . Sean  $u, v \in V(H)$ , entonces  $|V(A_u)| \geq 2$  y  $|V(A_v)| \geq 2$ ,

luego en  $\psi_0^{-1}(H)$  existen  $u_-(f_n), v_-(f_m)$  tales que  
 $u_-(f_n)u_+ \in F(A_u), v_-(f_m)v_+ \in F(A_v), u_+v_-(f_m) \in F\psi_0^{-1}(H)$  y  
 $v_+u_-(f_n) \in F\psi_0^{-1}(H)$  por lo tanto  $uv \in F(\text{sim } H)$ . Por lo  
tanto  $H$  es subdigráfica indicuda de  $D_0 - A$ , donde  $\phi \neq A \subseteq$   
 $\subseteq F(\text{asim } D_0)$  y  $D_0 - A$  es  $R$ -digráfica por el Teorema 3.1.2.

## 5.1 INTRODUCCION.

El trabajo expuesto en este capítulo fue hecho en colaboración con Victor Neumann Lara.

En [8] fue demostrado por Victor Neumann Lara y Hortensia Galeana Sánchez que existen  $R^-$ -digráficas con número dicromático dado, en la construcción que ahí se da se obtienen digráficas con cuello 3, en este capítulo se desarrolla un método para construir  $R^-$ -digráficas con número dicromático dado y cuello 4.

El número dicromático  $d_k(D)$  de  $D$  fue definido por Victor Neumann Lara en [13] e independientemente por H. Meyniel en [11] como el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de  $D$  de tal manera que las clases cromáticas inducen subdigráficas acíclicas de  $D$ . Claramente  $d_k(D) \geq \chi(D)$ .

El número dicromático es una generalización del número cromático, en particular los dos números coinciden para digráficas simétricas.

5.2 R-DIGRAFICAS Y R<sup>-</sup>-DIGRAFICAS DE NUMERO  
DICROMATICO DADO Y CUELLO 4.

Definición 5.2.1.

Sean  $B$  una digráfica y  $\xi = ((\alpha_v, I_v))_{v \in V(B)}$  una familia de digráficas donde  $\emptyset \neq I_v \subseteq V(\alpha_v)$  y  $\alpha_u \cap \alpha_v = \emptyset$  para cada  $u, v \in V(B)$ ,  $u \neq v$ . Denotaremos por  $\sigma(B, \xi)$  a la digráfica de finida como sigue:

$$V(\sigma(B, \xi)) = \bigcup_{v \in V(B)} V(\alpha_v).$$

$$F(\sigma(B, \xi)) = \bigcup_{v \in V(B)} F(\alpha_v) \cup \{xy \mid x \in I_u, y \in I_v, uv \in F(B)\}.$$

Teorema 5.2.1.

Sean  $B$  una digráfica y  $\xi = ((\alpha_v, I_v))_{v \in V(B)}$  una familia de digráficas donde  $\emptyset \neq I_v \subseteq V(\alpha_v)$  y  $\alpha_u \cap \alpha_v = \emptyset$  para cada  $u, v \in V(B)$ ,  $u \neq v$ . Si  $B$  es R-digráfica y para cada  $v \in V(B)$   $\alpha_v$  es R-digráfica, entonces  $\sigma(B, \xi)$  es R-digráfica.

Demostración

i)  $\sigma(B, \xi)$  tiene núcleo.

Hacemos la demostración de i) por inducción sobre  $|V(B)|$ .

Si  $|V(B)| = 1$  se sigue directamente de las hipótesis, supongamos que si  $|V(B')| < n$  y se satisfacen las hipótesis del Teorema 5.2.1 entonces  $\sigma(B', \xi)$  tiene núcleo y sea  $B$  con  $|V(B)| = n$ .

Si para alguna  $u \in V(B)$  existe  $N_u$  núcleo de  $\alpha_u$  tal que

$N_u \cap I_u = \emptyset$ , entonces  $N \cup N_u$  es núcleo de  $\sigma(B, \xi)$  donde  $N$  es núcleo de  $\sigma(B - \{u\}, (\alpha_x, I_x)_{x \in (V(B) - \{u\})})$ .

Si para toda  $u \in V(B)$  y todo núcleo  $N_u$  de  $\alpha_u$ ,  $N_u \cap I_u \neq \emptyset$ , entonces para  $N$  un núcleo de  $B$  tenemos que  $\bigcup_{u \in N} N_u$  es núcleo de  $\sigma(B, \xi)$ .

Así, en cualquier caso  $\sigma(B, \xi)$  tiene núcleo.

Ahora, supongamos que  $\sigma(B, \xi)$  no es  $R$ -digráfica y sea  $H$  una  $R^-$ -subdigráfica inducida de  $\sigma(B, \xi)$ , denotamos por

$B_H = B[\{u \in V(B) \mid \alpha_u \cap H \neq \emptyset\}]$ , entonces por la construcción de  $\sigma(B, \xi)$  y por el Teorema 3.1.2 se sigue que para cada  $u \in V(B_H)$ ,  $I_u \cap H \neq \emptyset$ , sea  $H_u = \alpha_u \cap H$  para cada  $u \in V(B_H)$ . Claramente  $H = \sigma(B_H, (H_u, I_u \cap H_u)_{u \in V(B_H)})$  donde  $B_H, H_u, u \in U$  es  $R$ -digráfica. Así, por lo que se demostró en i) tenemos que  $H$  tiene núcleo lo cual es imposible pues  $H$  es  $R^-$ -digráfica.

Lema 5.2.1.

Si  $B$  es una digráfica de cuello  $\geq 4$  y  $d_k(B) = n$  y para cada  $v \in V(B)$ ,  $\alpha_v$  es una digráfica de cuello  $\geq 4$ ,  $d_k(\alpha_v) = n$  y tal que  $I_v \subseteq V(\alpha_v)$  es independiente con la propiedad de que toda  $n$ -coloración de  $\alpha_v$  deja al menos dos colores en  $I_v$ . Entonces  $D = \sigma(B, (\alpha_v, I_v)_{v \in V(B)})$  es una digráfica de cuello  $\geq 4$  y  $d_k(D) = n + 1$ .

Demostración.

Primero demostramos que  $d_k(D) > n$ .

Si  $D$  admite una  $n$ -coloración ésta induce una  $n$ -coloración en

$\alpha_u$  para cada  $u \in V(B)$ , fijamos alguno de los colores de la  $n$ -coloración digamos el color  $c_1$ , ya que  $I_u$  no es monocromática, se sigue que en  $I_u$  existe algún color distinto de  $c_1$ ; y esto para cada  $u \in V(B)$ ; sea  $w_u$  un punto de  $I_u$  que tiene color distinto de  $c_1$ , por lo tanto  $D[\{w_u | u \in V(B)\}]$  es isomorfa a  $B$  y admite una  $(n-1)$ -coloración, lo que contradice que  $d_k(B) = n$ .

Damos una  $(n+1)$ -coloración de  $D$  de la siguiente manera: consideramos una  $n$ -coloración de  $B$  y extendemos a  $\bigcup_{v \in V(B)} I_v$  asignando a cada vértice de  $I_v$  el color de  $v$ ; en cada  $\alpha_v$  damos una  $(n+1)$ -coloración manteniendo en  $I_v$  el color antes asignado.

Ya que  $I_v$  es independiente; se sigue directamente de las hipótesis que el cuello de  $D$  es  $\geq 4$ .

#### Lema 5.2.2.

Si  $D$  es una digráfica con  $d_k(D) = n$  y cuello  $\geq 4$  y  $L$  una digráfica bipartita,  $L$  con  $d_k(L) = 2$  entonces existe una digráfica  $D'$  de cuello  $\geq 4$  con  $d_k(D') = n$  y con un independiente  $I' \subseteq V(D')$  tal que para toda  $n$ -coloración de  $D'$ ,  $I'$  tiene vértices de al menos dos colores y  $D'$  contiene a  $D$  y a  $L$  como subdigráficas inducidas.

#### Demostración.

Sea  $L^{\circ}, L$  la bipartición de  $L$ ; para cada  $u \in V(D)$  sea  $L_u$  una digráfica isomorfa a  $L$  y denotamos;  $L_u^{\circ}$  a la imagen



isomorfa de  $L^0$  y  $L_u^1$  a la imagen isomorfa de  $L^1$ , hacemos  $D' = \sigma(D, (L_u, L_u^0)_{u \in V(D)})$ .

Ya que  $L_u^0$  es independiente se sigue que cuello de  $D' \geq 4$ , claramente  $D$  es subdigráfica inducida de  $D'$  y por lo tanto  $d_k(D') \geq n$ ; una  $n$ -coloración de  $D'$  se obtiene a partir de una  $n$ -coloración de  $D$  asignando a cada vértice en  $L_u^0$  el color de  $u$  y dando a  $L_u^1$  algún color distinto del asignado a  $L_u^0$ .

Claramente, podemos suponer que  $\bigcup_{u \in I} L_u^0$  puede incluirse en una clase cromática de alguna  $n$ -coloración de  $D$ , ya que de otro modo hacemos  $I' = \bigcup_{u \in I} L_u^0$ . Ahora observamos que en toda  $n$ -coloración de  $D$ , dado cualquier color  $c_i$  debe existir algún  $L_u^0$  que ha sido coloreado íntegramente de color  $i$ , ya que de otro modo podría tomarse en cada  $L_u^0$  un vértice  $w_u$  de color distinto al color  $c_i$ , obteniendo así  $\tilde{D} = D' \setminus \{w_u \mid u \in V(D)\}$ ,  $\tilde{D}$  isomorfa a  $D$  y  $(n-1)$ -coloreada lo cual es imposible.

Consideramos ahora  $I' = \bigcup_{u \in V(D)} L_u^1$ , para una  $n$ -coloración de  $D$  tenemos que si en  $I'$  existe algún vértice de color  $c_j$  entonces como existe algún  $u \in V(D)$  tal que  $L_u^0$  está íntegramente coloreado de color  $c_j$ , se sigue que en  $L_u^1$  algún vértice tiene color distinto de  $c_j$  y por lo tanto en  $I'$  hay vértices de al menos dos colores.

### Teorema 5.2.2.

Para cada número natural  $n$  existe alguna  $R$ -digráfica  $D_n$  tal

que  $d_k(D_n) = n$  y cuello de  $D_n \geq 4$ .

Demostración.

Claramente  $D_1 = T_k$ ,  $D_2 = C_4$  satisfacen las propiedades requeridas y para  $n \geq 3$  se construye  $D_n$  inductivamente usando el Teorema 5.2.1 y los Lemas 5.2.1 y 5.2.2.

Teorema 5.2.3.

Para cada número natural  $n$  existe alguna  $R^-$ -digráfica  $H_n$  tal que  $d_k(H_n) = n$  y cuello de  $H_n \geq 4$ .

Demostración

Sean  $D_0 = \vec{C}_{2m}(1, \underline{+2}, \dots, \underline{+m})$ , donde  $|V(D_n)| \leq m$

$\beta = (\beta_u = \vec{P}_2)_{u \in U}$   $U = \{0, 2, \dots, 2m-2\}$ ,  $u_+ \cong D_n$  y  $F(u_-) = \emptyset$ ; entonces tenemos que  $\Delta(D_0, U, \beta, u_+, u_-) = H_n$  satisface las propiedades pedidas.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. Berge. Graphs and hypergraphs. (North-Holland, Amsterdam, 1973).
- [2] P. Duchet. Representation; noyaux en theorie des graphes et hypergraphes. These , Paris 1979.
- [3] P. Duchet. Graphes Noyau-parfaits. Annals of Discrete Mathematics 9 (1980), 93-101.
- [4] P. Duchet and H. Meyniel. A note on kernel-critical graphs. Discrete Mathematics 33(1981), 103-105.
- [5] P. Erdos. Problems and results in Number Theory and Graph Theory. In "Proc. Ninth Manitoba Conference on Numerical Math. and Computing". pp 3-21, 1979.
- [6] H. Galeana Sánchez. A counterexample to a conjecture of Meyniel on kernel-perfect graphs. Discrete Mathematics 41(1982), 105-107.
- [7] H. Galeana Sánchez. Núcleos y Seminúcleos en Digráficas. Tesis Profesional, México 1980.
- [8] H. Galeana Sánchez and V. Neumann Lara. On kernels and semikernels of digraphs. Discrete Mathematics 47(1983)\*MS 938.
- [9] H. Galeana Sánchez and V. Neumann Lara. On kernel-perfect critical digraphs. Publicaciones Preliminares del Instituto de Matemáticas, UNAM, No. 66, 1983.
- [10] H. Jacob. Etude Théorique du Nuyau d'un graphe. These , Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1979.
- [11] H. Meyniel. Estension du nombre chromatique et du nombre de stabilité. Preprint.
- [12] V. Neumann Lara. Seminúcleos de una digráfica. Anales del Instituto de Matemáticas II, 1971, UNAM.
- [13] V. Neumann Lara. The dichromatic number of a digraph. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol. 33 No. 3, 1982, 265-270.
- [14] M. Richardson. On weakly ordered systems. Bull. Amer. Math. Soc. 52(1946), 113.

- [15] M. Richardson. Solutions of irreflexive relations. Ann. Math. (2) 58(1953) 573.
- [16] M. Richardson. Extension Theorems for solutions of irreflexive relations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39(1953), 649.
- [17] Romanowicz, Zbigniew. An note on the theorem of Richardson. (Polish, English and Russian Summaries). (1975).
- [18] J. Von Neuman and O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. (Princeton Univ. Press, Princeton).