



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

101162
RECEBIDA
1
20

**MODELO UNIDIMENSIONAL DE SIMULACION
NUMERICA PARA DRENAJE AGRICOLA**

VICTOR MANUEL ARROYO CORREA

T E S I S

**PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS
DE POSGRADO DE LA**

**FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE**

MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA

CAMPUS MORELOS

1 9 9 4

**TESIS CON
FALLA LE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIA

Con agradecimiento y respeto, a mis padres: *Gabriel Arroyo y Josefina Correa.*

A mis hermanos

A mis amigos y compañeros

A mis sinodales: *M.I Nahun Hamed García, Dr. Polioptro Martínez Austria, Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares, Dr. Carlos Fuentes Ruiz y Dr. Luis Rendón Pimentel* por su revisión y comentarios a este trabajo.

Al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua por su apoyo económico.

MODELO UNIDIMENSIONAL DE SIMULACION NUMERICA PARA DRENAJE AGRICOLA

INDICE

	NOMENCLATURA	1
	PRESENTACION	3
1	INTRODUCCION	6
	1.1 <i>Justificación del trabajo de tesis</i>	6
	1.2 <i>Estado del arte</i>	9
2	FLUJO DEL AGUA EN SUELOS	11
	2.1 <i>Generalidades</i>	11
	2.2 <i>Descripción fisicomatemática del flujo subsuperficial</i>	23
	2.2.1 Ecuación de Darcy.....	23
	2.2.2 Ecuación de conservación de masa.....	24
	2.2.3 Ecuación de Richards.....	26
	2.2.4 Transporte de solutos en un medio poroso.....	28
	2.2.5 Movimiento del agua en suelos con presencia de cultivos...	31
	2.2.6 Relaciones de van Genuchten.....	33
	2.3 <i>Condiciones de frontera</i>	36
3	MODELO DE SIMULACION NUMERICA	37
	3.1 <i>Esquema en diferencias finitas de la ecuación de Richards</i>	37
	3.2 <i>Análisis de estabilidad y convergencia</i>	45
4	EJEMPLOS DE APLICACION	56
	4.1 <i>Ejemplo con condiciones de frontera fijas</i>	57
	4.2 <i>Ejemplo con flujo de Darcy, variable en frontera superior</i>	63
	4.3 <i>Ejemplo con flujo de Darcy, constante en frontera superior</i>	71
	4.4 <i>Ejemplo con evaporación en frontera superior</i>	79
	4.5 <i>Ejemplo con influencia de rálces</i>	82
	4.6 <i>Ejemplo con transporte de solutos</i>	93
	4.7 <i>Ejemplo para un suelo con condiciones agrícolas</i>	98
	4.8 <i>Ejemplo para un suelo uniformemente seco</i>	106
5	ANALISIS DE RESULTADOS	109
6	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	120
	ANEXO 1	124
	ANEXO 2	127
	ANEXO 3	151
	REFERENCIAS	153

NOMENCLATURA:

C	concentración de soluto [ppm]
C _o	concentración inicial de soluto en el suelo [ppm]
C _r	número de Courant
C _s	concentración de soluto aplicado en la superficie del suelo [ppm]
D _s	coeficiente de dispersión-difusión del soluto en el suelo [L ² /T]
E _t	error de truncado
g	aceleración de la gravedad [L/T ²]
j	índice espacial
K(ψ)	conductividad hidráulica [L/T]
K _o	constante representativa para K [L/T]
K _r	conductividad hidráulica relativa []
L	altura de la columna de suelo analizado [L]
M	mínimo número de intervalos computacionales para L
m	masa de la partícula
n	índice temporal
n _p	índice de distribución del tamaño de los poros del suelo
P	número de péclét
q	flujo de Darcy [L/T]
S	capacidad específica de humedad [L ⁻¹]
S _a	cantidad de soluto absorbido por el suelo [mg/g]
S _o	constante representativa para S [L ⁻¹]
S _s	parámetro específico de almacenamiento del suelo [L ⁻¹]
t	tiempo
T	tiempo de aplicación de soluto en la superficie del suelo
<u>V</u>	vector velocidad [L/T]
Z	coordenada vertical
α _g	exponente en la ecuación de Gardner [L ⁻¹]
λ	parámetro adimensional (C _r /P)
Δ _x	incremento en la dirección x
Δ _y	incremento en la dirección y
Δ _z	incremento en la dirección Z
ψ	potencial mátrico del suelo [L]
ψ _o	constante representativa para ψ [L]
ψ _s	carga de presión capilar [L]

PRESENTACION

El presente trabajo responde al interés que el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua tiene en establecer un programa de recuperación de suelos agrícolas. Este programa contempla la construcción de una área experimental para el estudio del flujo del agua en medios porosos. En esta área, se podrán verificar y calibrar modelos numéricos que simulen, bajo condiciones iniciales y de frontera controladas, situaciones reales que se dan en zonas regables del país.

Para esto, es necesario contar con modelos numéricos que simulen el flujo del agua en medios porosos no saturados, iniciando con un primer modelo para flujo unidimensional y posteriormente ampliarlo para dos dimensiones.

En este trabajo de tesis se presenta el desarrollo de un modelo unidimensional establecido a partir de la ecuación de Richards [*Hanks, 1992; Hillel, 1980; Hillel, 1986; Richards, 1931*].

La tesis consta de 6 capítulos y tres anexos cuyo contenido se describe brevemente a continuación:

NOMENCLATURA:

C	concentración de soluto [ppm]
C_0	concentración inicial de soluto en el suelo [ppm]
C_r	número de Courant
C_s	concentración de soluto aplicado en la superficie del suelo [ppm]
D_s	coeficiente de dispersión-difusión del soluto en el suelo [L^2/T]
E_t	error de truncado
g	aceleración de la gravedad [L/T^2]
j	índice espacial
$K(\psi)$	conductividad hidráulica [L/T]
K_0	constante representativa para K [L/T]
K_r	conductividad hidráulica relativa []
L	altura de la columna de suelo analizado [L]
M	mínimo número de intervalos computacionales para L
m	masa de la partícula
n	índice temporal
n_p	índice de distribución del tamaño de los poros del suelo
P	número de péclét
q	flujo de Darcy [L/T]
S	capacidad específica de humedad [L^{-1}]
S_a	cantidad de soluto absorbido por el suelo [mg/g]
S_0	constante representativa para S [L^{-1}]
S_s	parámetro específico de almacenamiento del suelo [L^{-1}]
t	tiempo
T	tiempo de aplicación de soluto en la superficie del suelo
\underline{V}	vector velocidad [L/T]
Z	coordenada vertical
α_g	exponente en la ecuación de Gardner [L^{-1}]
λ	parámetro adimensional (C_r/P)
Δ_x	incremento en la dirección x
Δ_y	incremento en la dirección y
Δ_z	incremento en la dirección Z
ψ	potencial mátrico del suelo [L]
ψ_0	constante representativa para ψ [L]
ψ_s	carga de presión capilar [L]

- $\theta(\psi)$ contenido de agua en el suelo [L^3 / L^3]
- θ_r Saturación residual [L^3 / L^3]
- θ_s humedad de saturación [L^3 / L^3]
- ρ_s densidad del suelo [gr / L^3]
- ω_{eK} factor de peso en el espacio para K
- ω_{tK} factor de peso en el tiempo para K

PRESENTACION

El presente trabajo responde al interés que el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua tiene en establecer un programa de recuperación de suelos agrícolas. Este programa contempla la construcción de una área experimental para el estudio del flujo del agua en medios porosos. En esta área, se podrán verificar y calibrar modelos numéricos que simulen, bajo condiciones iniciales y de frontera controladas, situaciones reales que se dan en zonas regables del país.

Para esto, es necesario contar con modelos numéricos que simulen el flujo del agua en medios porosos no saturados, iniciando con un primer modelo para flujo unidimensional y posteriormente ampliarlo para dos dimensiones.

En este trabajo de tesis se presenta el desarrollo de un modelo unidimensional establecido a partir de la ecuación de Richards [Hanks, 1992; Hillel, 1980; Hillel, 1986; Richards, 1931].

La tesis consta de 6 capítulos y tres anexos cuyo contenido se describe brevemente a continuación:

En el capítulo 1 se da una justificación del trabajo de tesis y se presenta una breve descripción del estado del arte en esta área.

En el capítulo 2 se describe el estado físico del agua en el suelo, se deduce la ecuación de Darcy y la ecuación de Richards en tres dimensiones.

En este mismo capítulo se adiciona a la ecuación de Richards, los términos que permiten tomar en cuenta la influencia de raíces en un suelo no saturado.

También se establece el modelo unidimensional para simular el transporte de solutos a través del suelo, este modelo considera el transporte de agua y de soluto con los efectos de advección, dispersión, difusión y sorción.

En el capítulo 3, se obtienen los esquemas en diferencias finitas de los modelos considerados en el capítulo 2. Para su obtención, se aplica el método de interpolación integral [García, 1984] el cual es apropiado para tratar ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes variables. El campo de solución se discretiza a través de una malla rectangular con pasos variables en el espacio y tiempo. El sistema de ecuaciones no lineales que resulta, se resuelve aplicando la técnica iterativa de Picard [Aldama et al; Paniconi et al, 1991; Burden y Faires, 1985]. Para encontrar los valores en la frontera superior en el caso de problemas tipo Neumann, se emplea el algoritmo de bisección para su solución.

Se utilizan además, las relaciones de van Genuchten [van Genuchten, 1980; Paniconi et al 1991; Aldama et al] para el cálculo de las propiedades hidráulicas del suelo.

En este capítulo también se estudia el análisis de estabilidad para una versión linealizada de la ecuación de Richards, para ello, se utiliza el método de Von Neumann [Fletcher, 1987; p. 85]; [Fuentes, 1981; p. 136].

El capítulo 4 consta de 8 ejemplos de aplicación, algunos de estos ejemplos han sido tomados de publicaciones y trabajos de investigación con el fin de comparar los resultados obtenidos con el esquema numérico propuesto.

En el capítulo 5 se analizan los resultados obtenidos, además de que se establecen las limitaciones y posibles fallas del modelo.

El capítulo 6, contempla una serie de observaciones y conclusiones. Se analizan las ampliaciones y mejoras que se deben ir haciendo al esquema de manera que nuevas ideas se vayan incorporando.

Por último, en el anexo 1 se presenta el análisis de consistencia para la versión linealizada de la ecuación de Richards; en el anexo 2, un listado del programa de cómputo en versión Quick Basic y; en el anexo 3, la forma de obtener la conductividad hidráulica para el punto intermedio del intervalo de cálculo.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 Justificación del trabajo de tesis

Incrementar el uso eficiente del agua a nivel parcelario, es el objeto de estudio de muchos proyectos de investigación en agricultura. Esta eficiencia no se lograría sin entender el comportamiento físico del agua en el suelo.

Actualmente se cuenta con modelos matemáticos que describen el comportamiento físico del agua en el suelo tanto en condiciones saturadas y no saturadas. Sin embargo, estos modelos carecen de soluciones analíticas generales y las que han sido encontradas, tienen limitaciones prácticas [Angelakis et al, 1993; Barry et al, 1993; Fuentes et al, 1992]. Otra alternativa es solucionar los modelos matemáticos a través de técnicas numéricas y herramientas computacionales, y que desde el punto de vista práctico, es la que promete mayor éxito, tan es así que, hoy en día existen una gran cantidad de soluciones de este tipo [Aldama et al; Celia et al, 1990; Govindaraju et al, 1993; Gracia, 1987; Iturbe, 1986; Jan Diercky, 1986; Paniconi et al, 1991; Ross,

1990; *Taghavi et al*, 1984] que tratan de incorporar la mayor cantidad de variables, como por ejemplo; tipo de cultivo, presencia de sales, suelo estratificado, etc..

El mayor o menor éxito de un modelo numérico depende de la exactitud de los valores iniciales y de frontera que son introducidos, además de las relaciones $K(\psi)$ y $\theta(\psi)$. Aquí juegan un papel importante los instrumentos y las técnicas de medición disponibles así como las condiciones de laboratorio impuestas. Actualmente se cuentan con métodos simples para obtener las propiedades hidráulicas del suelo en laboratorio [*Tamari et al*, 1993; *Ross*, 1993].

La calibración de un modelo bajo condiciones de laboratorio es el enlace para aplicar el modelo numérico a condiciones reales en la práctica, es quizá, la parte que lleva más tiempo ya que constituye la certificación y validación de cualquier modelo numérico.

En el mundo, muchos laboratorios de física de suelos e Institutos de investigaciones agrícolas [p.e., *Celia et al*, 1990; *Jan et al*, 1986; *Jovindaraju et al*, 1993], tienen proyectos encaminados a producir programas de cómputo cada vez más robustos. Estos programas tanto en una como en tres dimensiones, han sido producto de varios años de investigación y sobre todo de proyectos que han dado continuidad a estos estudios.

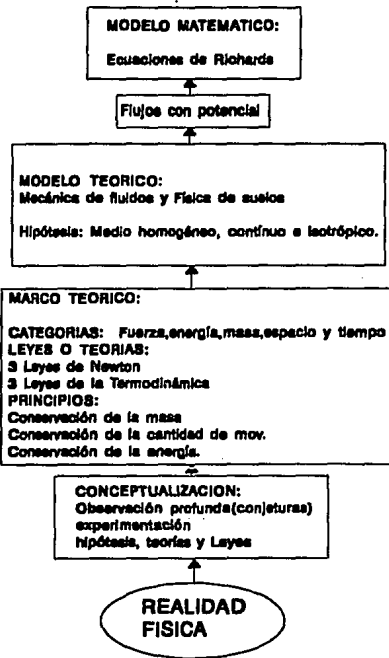
En México, aunque existen programas de cómputo en esta área, estos han carecido de continuidad para hacerlos más completos [*Gracia*, 1987; *Iturbe*, 1986]. Actualmente, Institutos de investigación del sector público, como el IMTA, tienen proyectos guiados a dar continuidad a trabajos de investigación, y una de las áreas más interesadas es la del uso eficiente del agua en las parcelas y la recuperación de suelos agrícolas.

Es cierto que la forma más práctica de resolver un problema es la de adquirir ciertos programas de cómputo y ajustarlos a las condiciones del problema. Este camino, aunque rápido, limita la aplicación ó genera dependencia tecnológica cuando se quiere utilizar el mismo programa a condiciones distintas para las que fue creado. Ahora, si se quiere iniciar realmente un programa de investigación, se tiene que contar con programas de cómputo desde lo más básico, como es la fundamentación física y matemática de la que parte y la forma de incorporar el mayor número de parámetros, para así, ampliarlos y modificarlos de acuerdo con el avance de las herramientas computacionales.

Se pretende que este trabajo de tesis reúna las características arriba señaladas y que sirva de apoyo para que los interesados en esta área se incorporen al estudio del movimiento del agua en un suelo, de tal forma que ayude a fortalecer los métodos con que se cuenta, e incluso, incorporar nuevos.

1.2 Estado del arte

A continuación, se presenta un esquema que explica las bases sobre las que se apoya el estudio del flujo del agua en suelos.



Considerables esfuerzos han sido llevados a lo largo de este siglo, para establecer leyes simples que describan los procesos de transferencia de agua en el suelo. Se encuentran entre ellos, el trabajo pionero de Green y Ampt (1911) quienes, bajo ciertas hipótesis simplificadoras, propusieron por primera vez una ley para la transferencia del agua a partir de la superficie del suelo. Posteriormente Richards en 1931 estableció la ecuación para describir estos procesos.

A partir del reconocimiento del carácter difusivo de los procesos de transferencia por Childs y Collis-George (1950), es cuando los esfuerzos por dar una solución analítica al problema alcanzan su pleno desarrollo. El carácter difusivo reconocido al escurrimiento del agua en un medio poroso parcialmente saturado permite adaptar, para ciertas formas asignadas a la características hidrodinámicas, las soluciones clásicas de la ecuación de calor resumidas en Carslaw y Jaeger (1959).

Trabajos relacionados con el fenómeno de infiltración han sido desarrollados considerando funciones particulares que describen las características hidrodinámicas de los suelos. Por ejemplo, Parlange ha desarrollado en numerosos trabajos las características más importantes del fenómeno de infiltración [*Fuentes*, 1992].

En lo que respecta a la solución de las ecuaciones que rigen el flujo del agua en un medio poroso no saturado a través de esquemas numéricos, se han hecho diversas soluciones aplicando técnicas de diferencias finitas y elemento finito [*Celia et al*, 1990]. Hoy en día, debido al carácter fuertemente no lineal de las ecuaciones, evaluaciones numéricas [*Aldama; Paniconi et al*, 1991; *Ross*, 1990] de métodos iterativos y no iterativos han sido realizados. Sin embargo, hasta ahora, se carece de una teoría general sobre los criterios de estabilidad y convergencia de estos esquemas.

FLUJO DE AGUA EN SUELOS

2.1 Generalidades

2.1.1 El Agua en el suelo

El suelo se considera formado por tres fases: sólida, líquida y gaseosa.

La parte sólida está dispersa y consiste principalmente de partículas de varios minerales de dimensiones que varían generalmente desde pocos milímetros a sub-micras. En suelos orgánicos (turbas), la parte sólida consiste principalmente de residuos vegetales.

La naturaleza dispersa de la parte sólida de el suelo explica dos características esenciales; la primera es que el suelo sea un medio poroso, y la segunda que el suelo tenga una superficie extensiva.

La fase líquida y gaseosa ocupan los poros entre las partículas sólidas en una relación inversa.

La porosidad del suelo, que se define como el índice de relación de vacíos respecto al suelo [Hillel, 1980, p. 11], se expresa principalmente en dos formas: en relación al volumen total de los intersticios o en relación a su tamaño.

La porosidad total del suelo, expresado como porcentaje del volumen total del suelo, es un valor adimensional que en suelos minerales varía entre 25 y 60 % y que usualmente está dentro del 40 y 50 %. En turbas pueden exceder al 90 %.

La mayor variación es debida principalmente a la estructura suelta o compacta del suelo. Tomando un "suelo ideal" que consiste en partículas esféricas de tamaño uniforme, la porosidad total del suelo puede variar desde 48% cuando el suelo está muy suelto (llenado cúbico) a 26% cuando es fuertemente compactado (llenado hexagonal). Podríamos esperar que un llenado hexagonal ocurre más frecuentemente en la naturaleza. Sin embargo, porosidades iguales o cercanas a 26% son características sólo de suelos con horizonte gley⁽¹⁾, en los cuales no hay agregación⁽²⁾, y todas las partículas existen independientemente, mientras que en suelos sin horizonte gley teniendo una micro o macro estructura la porosidad siempre excede del 40 %.

(1) *Un suelo con horizonte gley es generalmente de color gris azulado ó gris olivo, más ó menos pegajoso, compactado, frecuentemente sin estructura definida, desarrollado bajo la influencia de humedad excesiva.*

(2) *La cementación de las partículas en masas llamadas agregados. Esencialmente un proceso de floculación y cementación.*

Las dimensiones de los poros dependen principalmente del tamaño de las partículas y de los micro ó macro agregados. En un "suelo ideal", los diámetros de los poros varían de $0.41R$ a $0.73R$ con llenado cúbico, y de $0.155R$ a $0.288R$ cuando el llenado es hexagonal, donde R es el radio de las partículas.

Un suelo natural consiste en un gran número de partículas con diferentes radios y formas, los diámetros de los poros pueden variar desde unos pocos milímetros a miles de micras, o aun menos.

Los poros entre partículas o agregados están comunicados por estrechos canales, los cuales juntos forman el espacio poroso del suelo. Como resultado, los capilares del suelo toman la forma de cadenas enlazadas con cada uno de los poros, como si fuera un rosario.

Debido a que la materia orgánica y algunas arcillas se expanden cuando están mojadas y se contraen al secarse, el tamaño y forma de los poros depende del contenido de agua en el suelo, o de otra forma, el contenido de agua en el suelo para un nivel de energía dado depende fuertemente de los tamaños y formas de los poros en el suelo. Por lo tanto, no es adecuado considerar las tres fases del suelo independientes.

2.1.2 Contenido de agua en el suelo

El contenido de agua en el suelo puede expresarse de varias formas. Las más comunes son: masa de agua por unidad de masa de suelo seco, masa de agua por unidad de volumen de suelo mojado, y volumen de agua por unidad de volumen de suelo mojado.

Dentro de las diferentes formas con que el agua se mueve ó queda retenida en el suelo destacan las siguientes:

Agua capilar.- Es la retenida por fuerzas de adhesión y de tensión superficial, como una película alrededor de las partículas y en los espacios capilares. Se mueve en cualquier dirección en la cual sea mayor la tensión capilar.

Agua gravitacional.- Es la que se mueve por la acción de la gravedad. No es retenida por el suelo ó se convierte en agua capilar cuando se drena a capas de suelo no saturadas.

Agua higroscópica.- Es la que se ha adsorbido del vapor de agua atmosférica y está retenida en la superficie de las partículas por fuerzas de adhesión.

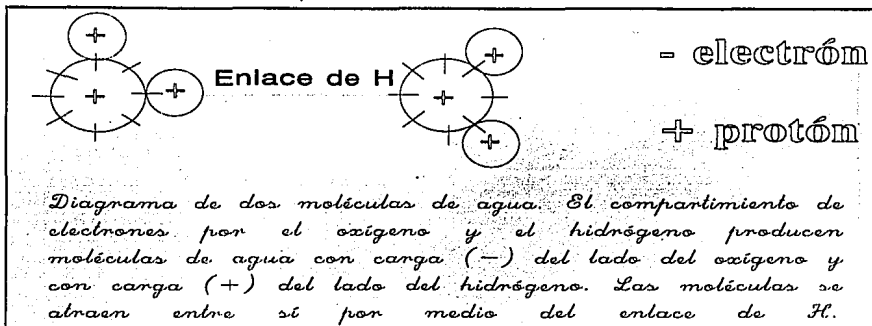
2.1.3 Concepto energético del agua del suelo

El cambio del agua de vapor a líquido (condensación) es acompañado de una gran reducción en el movimiento de las moléculas y su contenido de energía. La energía se libera como calor cuando el agua cambia de vapor a líquido. La liberación de calor que tiene lugar en la formación de gotas de lluvia es una de las principales fuentes de energía para los sistemas de tormenta. Cuando las gotas de lluvia caen en un suelo seco y se adsorben en la superficie de las partículas de suelo, se presenta una reducción en el movimiento y de nuevo en el contenido de energía de sus moléculas de agua. El agua adsorbida puede aún estar en estado líquido, pero la tendencia de las moléculas de agua para moverse se ha reducido aún más. Este cambio en el contenido de energía se puede explicar al considerar las fuerzas que operan entre las partículas de el suelo y las moléculas de agua.

Las moléculas de agua son dipolares y se atraen entre sí a través de enlaces de hidrógeno (H).

Las partículas del suelo también están cargadas y tienen sitios con cargas negativas y positivas. No obstante, la energía de enlace (fuerza de atracción) de los sitios

eléctricamente cargados de las partículas del suelo es mucho mayor que la energía de enlace de las ligaduras de hidrógeno de las moléculas de agua.

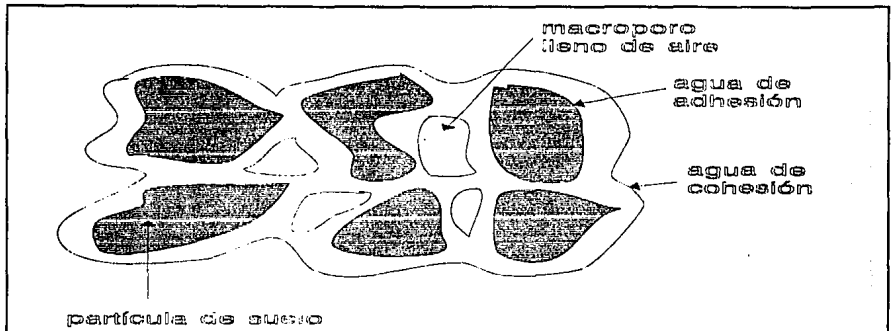


La fuerte atracción del suelo para las moléculas de agua (adhesión), produce una distribución del agua sobre la superficie de las partículas del suelo formando una película cuando el agua líquida se pone en contacto con las partículas secas del suelo. La adsorción del agua en la superficie de las partículas del suelo da lugar a : (1) una reducción en el movimiento de las moléculas de agua, (2) una reducción en el contenido de energía del agua y (3) la liberación de calor asociado con la transformación de agua a un nivel energético más bajo.

Algunas capas de moléculas de agua se adsorben fuertemente a las partículas del suelo básicamente debido a estas fuerzas adhesivas intensas.

Esta agua de adhesión se mueve poco, si lo hace, y algunos científicos [Millar, 1972] creen que las capas más internas de moléculas de agua existen en un estado cristalino similar a la estructura del hielo. El agua de adhesión no es aprovechable por las plantas y está siempre presente en el suelo normal (aún en el polvo del aire), pero el agua de adhesión se puede separar secando el suelo en un horno a altas temperaturas [Hillel, 1980, p 84; Baver L.D., 1972, p 299].

Más allá de la esfera de fuerte atracción de las partículas del suelo, las moléculas de agua se mantienen formando una película de agua por cohesión (enlace de H entre las moléculas de agua), esta película externa de agua se llama agua de cohesión.



Las moléculas del agua de cohesión comparadas con las del agua de adhesión, están en mayor movimiento, tienen un mayor nivel energético y se mueven más fácilmente. La película de agua (incluyendo agua de adhesión y cohesión) en el suelo puede tener hasta 15 ó 20 capas de moléculas de espesor [Millar, 1972].

Aproximadamente las dos terceras partes de la película externa se pueden considerar aprovechables por las plantas y constituyen la fuente principal de agua para el crecimiento de estas [Hillel, 1980, p 9] .

2.1.4 Relaciones entre energía y presión

Se ha expuesto que el agua existe en el suelo bajo una amplia gama de contenidos de energía. Este contenido de energía se puede expresar en términos de presión de agua, debido a que es más fácil determinar la presión de agua en contraste con el nivel o contenido de energía. Mientras mayor sea la presión del agua, mayor será la tendencia del agua a moverse y efectuar trabajo y mayor el contenido de energía del agua. De

esta manera se establece la existencia de una relación entre la presión del agua y la energía de la misma. De aquí que la relación agua-presión en suelos saturados es análoga a la relación agua-presión en un vaso con agua o cualquier cuerpo de agua.

En la superficie libre de un suelo saturado, o nivel freático, la presión con relación a la presión atmosférica es cero, si se supone que los poros del suelo están conectados a la atmósfera (la presión del aire del suelo y la atmósfera son iguales). Esta presión crece a medida que aumenta la profundidad debajo de ella. El agua existente en los macroporos ó poros de aireación de un suelo saturado tiene una presión positiva determinada por la distancia bajo la superficie de la zona saturada. El agua en los macroporos está bajo presión y fluirá libremente a través de estos de regiones de presión más alta a regiones de presiones más bajas (básicamente de elevaciones más altas a elevaciones más bajas). El agua que fluye libremente o se drena en el suelo se llama agua gravitacional. Si un suelo permanece saturado se puede suponer que una capa impermeable está inhibiendo el flujo del agua gravitacional del suelo. Las zonas de drenaje o los tubos de concreto se usan para remover el agua gravitacional en suelos saturados.

Después de que el agua gravitacional se ha drenado del suelo, este pasa a estar no saturado y el agua restante se mantiene por las fuerzas de atracción entre las superficies de las partículas del suelo y las moléculas de agua (adhesión) y entre las mismas moléculas de agua (cohesión).

2.1.5 Presión de agua en un suelo no saturado

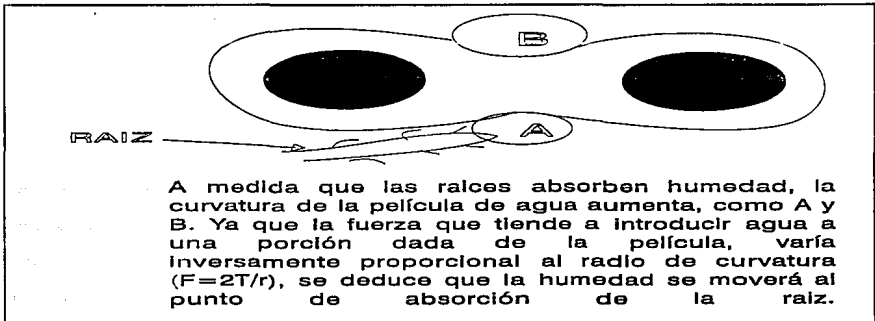
Si la punta de un tubo capilar de vidrio se introduce en el agua contenida dentro de un vaso, la atracción entre el vidrio y las moléculas de agua (adhesión) provoca que las moléculas de agua suban por la pared del capilar. Las fuerzas de cohesión entre las moléculas de agua causa que otras moléculas de agua sean arrastradas hacia el interior del tubo. Como la presión del agua disminuye del fondo a la superficie del agua

y siendo que en esta la presión es cero se concluye que la presión del agua en un tubo capilar es menor que cero; es decir, es negativa al considerar como presión de referencia la presión atmosférica y darle a esta el valor de cero.

Aplicando las consideraciones del agua en un tubo capilar a un suelo no saturado, se pueden establecer las conclusiones siguientes: (1) el agua en un suelo no saturado tiene una presión negativa o está bajo tensión, (2) la presión del agua en un suelo no saturado disminuye con el aumento de la distancia arriba de la superficie de una capa de agua, y (3) el agua en un suelo no saturado, comparado con un suelo saturado, tiene una presión más baja y un nivel energético más bajo.

2.1.6 Movimiento del agua en un suelo no saturado

Se derivan algunas consecuencias importantes de la naturaleza de agua en suelos no saturados. El agua en un suelo no saturado presenta muy poca tendencia a moverse. El movimiento es muy lento y causado principalmente por el ajuste del grosor de las películas de agua en las partículas del suelo [Millar, 1972]. Se da la idea de esa agua como si se presentara en películas superficiales y como cuñas en los ángulos de las partículas de suelo adyacente, como se muestra en la figura siguiente.



Hay una tendencia de estas para formar gotas esféricas en cada superficie como en A y B. Sin embargo, la formación de gotas es evitada debido a que las dos superficies de la partícula sólida están actuando una contra otra. Ahora bien, si la curvatura de una película es incrementada bastante a través de la eliminación de la humedad por la raíz como puede verse en A, su fuerza de retención será incrementada proporcionalmente, ya que la fuerza ejercida por tal película curva es inversamente proporcional al radio de curvatura. Como resultado el agua se moverá hacia A, hasta que la curvatura de las películas A y B sea igual. La ecuación para el movimiento capilar [Baver, 1972, p 323; Millar, 1972] puede escribirse: $f = 2T/r$, en la que "f" es la fuerza, "T" tensión superficial y "r" el radio de curvatura. Si se supone, por ejemplo, que "r" de A sea 1 y de B sea 2, la fuerza ejercida por los dos puntos será $f = 2T/1$ comparada con $f = 2T/2$; como el líquido en los dos casos es agua, T será igual y la fuerza ejercida por la película A será dos veces mayor que la ejercida por B. Por el ajuste de la película se puede explicar el movimiento del agua en suelos no saturados en la dirección de suelos más secos como un resultado de la absorción del agua por las raíces de las plantas. Se presenta un movimiento significativo del agua sobre distancias del orden de menos de una pulgada. La movilidad limitada del agua en suelos bien aireados (suelos no saturados) requiere expansión de las raíces de las plantas en todos los horizontes del suelo de los cuales el agua se absorbe.

2.1.7 Potencial total de agua en un suelo

El potencial de agua en el sistema suelo-planta-atmósfera (SSPA) se integra por varios componentes, siendo la contribución de cada uno de ellos diferente en función de la parte y condición del sistema donde se considere. Por ejemplo, en un suelo con bajo contenido de humedad, la mayor contribución puede deberse al potencial matricial que se define como la presión manométrica negativa que resulta de la interacción de la superficie de las partículas sólidas con el agua [Hillel, 1980, p. 142].

Como el movimiento del agua en el suelo es lento, no se toma en cuenta la energía cinética que es despreciable en comparación con la energía potencial. Por esta razón, para definir el estado energético del agua y de la humedad del suelo se utiliza el concepto de potencial, que es la energía potencial por unidad de masa.

El potencial es una expresión que define la capacidad de una unidad de masa de agua para realizar trabajo respecto a otra unidad de referencia completamente libre, que se toma como potencial cero.

El comité de terminología de física de suelos de la Sociedad Internacional de la Ciencia del Suelo, definió el potencial total del agua del suelo como la cantidad de trabajo que debe ser hecho por una cantidad unitaria de agua pura para transportar reversible e isotermalmente una cantidad infinitesimal de agua, desde un almacenamiento de agua pura a una elevación específica, a la presión atmosférica hasta un punto en el suelo [Hillel, 1980, p 136; Hanks, 1992, p 24]. La diferencia entre el potencial del agua en el almacenamiento de referencia se debe a que la primera está sujeta a varios campos de fuerzas; tales campos se originan por la atracción del agua por la matriz del suelo, así como la presencia de solutos, la presión externa y la gravedad. La diferencia entre la definición de potencial total del agua y la de potencial del agua es que el primero incluye el potencial gravitacional.

En un suelo no saturado las fuerzas que generan el flujo cambian respecto a las de un suelo saturado debido a la introducción de la fase de aire. La gravedad sigue participando, pero la presión en el agua por el peso del líquido se hace negativa con respecto a la presión del gas contiguo. Ahora se hacen más importantes las fuerzas de atracción entre las superficies sólidas y el agua y la tensión superficial en la interfase aire-agua. Estas son las fuerzas matriciales ó tensión de humedad del suelo. Para conservar el carácter de generalidad de la ecuación de flujo conviene tratar estas fuerzas ó esta tensión como potenciales; el gradiente del potencial es una fuerza por unidad de masa ó por unidad de volumen. Sobre esta base, los potenciales

participantes pueden sumarse directamente. Los potenciales pueden expresarse en unidades de altura hidrostática. Si los potenciales son referidos a la unidad de masa, la división por la aceleración gravitacional los convierte en unidades de altura hidrostática. Si los potenciales se dan referidos a la unidad de volumen, la división por la aceleración de la gravedad y la densidad del agua los convierte en unidades de altura hidrostática, es decir, la altura hidrostática representa una energía por unidad de peso. Los gradientes en estas unidades carecen de dimensiones.

El potencial total del agua en el suelo puede expresarse mediante la relación siguiente [Baver, 1986, p 318; Hillel, 1980, p 137; Hanks, 1992, p 32; Martínez, 1986, p 15]:

$$\psi_t = \psi_m + \psi_w + \psi_z + \psi_p \quad (1)$$

donde:

ψ_m es el potencial mátrico ó capilar, el cual resulta de la interacción de la superficie de las partículas sólidas con el agua.

ψ_w es el potencial osmótico, el cual resulta de los solutos disueltos en el agua del suelo.

ψ_z es el potencial gravitacional, resulta de la posición respecto a un nivel de referencia.

ψ_p es el potencial de presión, resulta de presiones externas.

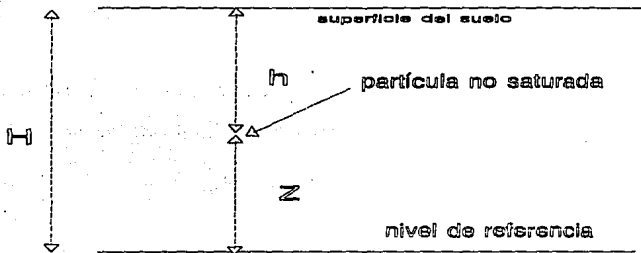
Cabe recalcar que dentro de ψ_p están incluidos potenciales ocasionados por diferencia de temperatura dentro del suelo, potenciales ocasionados por acción de las raíces de las plantas y otros potenciales ocasionados por fuerzas de diferente naturaleza; sin embargo, en la práctica este potencial se asocia con un estado saturado en el suelo (presión hidrostática).

El potencial total por conveniencia se expresa también en la forma: $\psi_t = \psi_m + \psi_z + R$, donde en R quedan incluidos los diferentes potenciales mencionados anteriormente.

El potencial total para el caso de un suelo no saturado se puede escribir entonces:

$$\psi_t = mgZ + \psi_m + R \quad (2)$$

donde:



m = masa de la partícula del suelo

Z = distancia del nivel de referencia a la partícula de suelo

g = aceleración gravitacional.

Si se divide la ecuación (2) entre la unidad de peso (mg):

$$\frac{\psi_t}{mg} = Z + \frac{\psi_m}{mg} + \frac{R}{mg} \quad (3)$$

esta relación indica la energía por unidad de peso en el punto considerado.

El gradiente de la ecuación (3) será entonces:

$$\nabla\left(\frac{\psi_t}{mg}\right) = \nabla(Z) + \nabla(\psi) + W \quad (4)$$

donde se ha hecho:

$$\psi = \psi_m / mg \text{ (potencial m\u00e1trico por unidad de peso)}$$

$$W = \nabla(R / mg)$$

Para el caso particular en que no hay fuerzas externas y el agua no tiene solutos (agua pura), $W=0$ en la ecuaci\u00f3n (4).

2.2 *Descripci\u00f3n fisicomatem\u00e1tica del flujo subsuperficial*

2.2.1 Ecuaci\u00f3n de Darcy

El flujo en un medio poroso como el suelo se puede considerar como flujo permanente donde la suma de fuerzas que provocan el flujo sumadas a la fuerza de resistencia debe ser cero. Por analog\u00eda con fuerzas de resistencia de otros tipos, esta fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad del flujo. Escribiendo esta fuerza como $(1/K)\underline{V}$, donde " \underline{V} " es el volumen de flujo por unidad de \u00e1rea \u00f3 velocidad del flujo y "K" es una constante caracter\u00edstica del flujo y las propiedades del suelo, matem\u00e1ticamente se expresa:

$$\nabla(Z) + \nabla(\psi) + W + \left(\frac{1}{K}\right)\underline{V} = 0 \quad (5)$$

donde:

$$\underline{V} = -K [\nabla(Z + \psi) + W] \quad (6)$$

si $W=0$, la ecuaci\u00f3n (6) queda:

$$\underline{V} = -K \nabla(Z + \psi) \quad (7)$$

La ecuaci\u00f3n (7) es la conocida f\u00f3rmula de Darcy propuesta y verificada experimentalmente por el mismo autor en 1856.

2.2.2 Ecuación de conservación de masa

De la fórmula de Darcy (ecuación 7) se puede observar que el flujo en un medio poroso es un flujo con potencial ó irrotacional, es decir:

$$\underline{V} = -\nabla(\phi) \quad (8)$$

donde ϕ es la función potencial, y \underline{V} es el vector de velocidades.

Dentro de los flujos que ocurren en la naturaleza, el flujo en medios porosos es uno de los que mayormente se simula con la teoría del potencial.

Volviendo a la fórmula de Darcy en su forma general (ecuación 6) se tiene que:

$$\underline{V} = -K \left[\nabla \left(Z + \psi + \frac{R}{mg} \right) \right] \quad (9)$$

desarrollando el gradiente para tres direcciones coordenadas x_1, x_2, x_3 la ecuación (9) resulta [Levi, 1986; p.12]:

$$\begin{aligned} \underline{V} = -K & \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(Z + \psi + \frac{R}{mg} \right) \text{grad}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(Z + \psi + \frac{R}{mg} \right) \text{grad}x_2 \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(Z + \psi + \frac{R}{mg} \right) \text{grad}x_3 \right] \quad (10) \end{aligned}$$

Utilizando un sistema coordenado ortogonal y haciendo corresponder $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = Z$ queda:

$$\underline{V} = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Z + \psi + \frac{R}{mg} \right) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(Z + \psi + \frac{R}{mg} \right) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(Z + \psi + \frac{R}{mg} \right) \hat{k} \right] \quad (11)$$

efectuando las derivadas en el segundo miembro de la ecuación (11) se tiene:

$$\underline{V} = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) \hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) + 1 \right] \hat{k} \right] \quad (12)$$

de la ecuación (12) se ve que:

el flujo vertical en la dirección Z es:

$$V_z = -K \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) + 1 \right] \quad (13)$$

la velocidad del flujo en la dirección x:

$$V_x = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) \right] \quad (14)$$

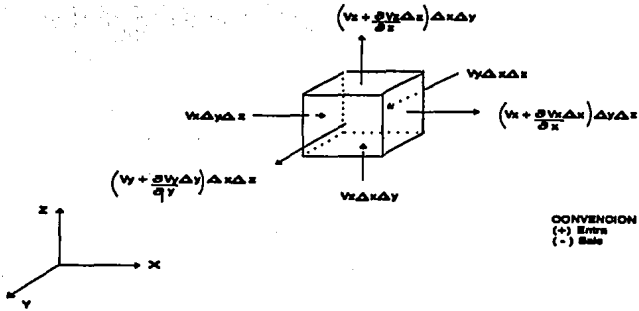
y la velocidad en la dirección y:

$$V_y = -K \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) \right] \quad (15)$$

Los signos se escogen de modo que la velocidad sea positiva cuando el flujo es de dirección x,y ó z positivos. Además "Z" se toma en la dirección hacia arriba, de ahí que un valor negativo de la velocidad denota flujo hacia abajo.

Del principio de conservación de masa:

"La suma de la cantidad de agua que entra en un volumen dado de suelo y la que sale de ese mismo volumen en la unidad de tiempo es igual a la variación (aumento ó disminución) de agua en ese volumen".



Del volumen de control se tiene (considerando que la densidad del agua es constante):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} (\Delta x \Delta y \Delta z) = - \frac{\partial V_x}{\partial x} (\Delta x \Delta y \Delta z) - \frac{\partial V_y}{\partial y} (\Delta x \Delta y \Delta z) - \frac{\partial V_z}{\partial z} (\Delta x \Delta y \Delta z) \quad (16)$$

donde θ es la cantidad de agua almacenada en el volumen por unidad de volumen de suelo.

Eliminando $(\Delta x \Delta y \Delta z)$ de la ecuación (16) queda:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} = - \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (17)$$

esta expresión corresponde a la ecuación de conservación de masa para un suelo no saturado.

2.2.3 Ecuación de Richards

Sustituyendo en la ecuación (17) las ecuaciones de las velocidades (13), (14) y (15) resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[-K \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[-K \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[-K \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi + \frac{R}{mg} \right) - K \right] \quad (18)$$

ordenando (18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial}{\partial x} (\psi) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial}{\partial y} (\psi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial}{\partial z} (\psi) \right] + \frac{\partial K}{\partial z} + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R}{mg} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{mg} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R}{mg} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Además si:

$$W = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R}{mg} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{mg} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R}{mg} \right) \right] \quad (20)$$

la ecuación (19) queda:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial}{\partial x} (\psi) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial}{\partial y} (\psi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial}{\partial z} (\psi) \right] + \frac{\partial K}{\partial z} + W \quad (21)$$

Esta es la ecuación que describe el movimiento del agua en un medio poroso.

Aquí resulta adecuado recordar que (R/mg) es el potencial o energía producido por fuerzas externas por unidad de peso.

Si el medio carece de influencias externas y el agua es limpia (no hay solutos $W=0$) la ecuación (21) se simplifica a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial}{\partial x} (\psi) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial}{\partial y} (\psi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial}{\partial z} (\psi) \right] + \frac{\partial K}{\partial z} \quad (22)$$

Esta ecuación es conocida en la literatura como **ecuación de Richards en tres dimensiones** (Hanks, 1992, p.91; Hillel, 1972, p.21; Richards, 1931).

Para el caso de una dimensión en la dirección "Z", la ecuación (22) se reduce a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[K \frac{\partial}{\partial Z} (\Psi) \right] + \frac{\partial K}{\partial Z} \quad (23)$$

La definición de $S = -\partial\theta/\partial\Psi$ como la capacidad específica de humedad, que representa el cambio de agua contenida en un volumen unitario por unidad de cambio en el potencial mátrico [Hillel, 1980, p.21], permite escribir la ecuación (23), después de utilizar la regla de la cadena en el miembro izquierdo, de la manera siguiente:

$$S \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[K \frac{\partial}{\partial Z} (\Psi) \right] + \frac{\partial K}{\partial Z} \quad (24)$$

Esta es la versión de la ecuación de Richards que será utilizada para el desarrollo del esquema numérico que se propone en este trabajo.

2.2.4 Transporte de solutos en un medio poroso

A través de un medio poroso, en un volumen de control, el transporte de soluto se establece mediante el principio de la conservación de la masa, de la forma siguiente [Hillel 1980, p 242; Iturbe, 1986]:

tasa de cambio del soluto en el volumen de control	=	soluto que sale del volumen	-	soluto que entra al volumen	±	pérdida ó ganancia del soluto debido a reacciones fisicoquímicas
---	---	-----------------------------------	---	-----------------------------------	---	---

Los procesos físicos relativos al flujo dentro y fuera del volumen de control son advección y dispersión hidrodinámica; la pérdida o ganancia de soluto depende de las reacciones químicas, bioquímicas, decaimiento reactivo, sorción, etc.

La advección es el proceso por el cual el soluto se transporta por el movimiento del flujo del agua subterránea, por lo que depende de la velocidad y de la porosidad del

suelo.

Existe una tendencia del soluto a esparcirse fuera del patrón de flujo; este fenómeno se denomina dispersión hidrodinámica, y ocurre por el mezclado mecánico y por la difusión molecular, la que sólo es significativa a muy bajas velocidades.

La sorción es el proceso fisicoquímico por el cual las partículas de suelo inmovilizan algunos iones contenidos en el agua que entra al suelo; la remoción de contaminantes por dicho proceso depende de que la concentración en solución esté en equilibrio dinámico con el componente de suelo adsorbido.

El modelo que se presenta a continuación considera el transporte de agua y de soluto con los efectos de advección, difusión y sorción en la dirección "Z".

La ecuación unidimensional para flujo de agua en estado transitorio y para condiciones no saturadas como se vio anteriormente es (ecuación 23):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[K \frac{\partial}{\partial Z} (\psi) \right] + \frac{\partial K}{\partial Z} \quad (25)$$

Respecto a la ecuación correspondiente que gobierna el transporte del soluto [Turbe, 1986] se tiene:

$$\rho_s \frac{\partial S_a}{\partial t} + \frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} (\theta D_s \frac{\partial C}{\partial Z}) - \frac{\partial(VC)}{\partial Z} \quad (26)$$

Al reemplazar la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (27)$$

en la ecuación (26), y reordenando términos resulta:

$$\frac{\rho_s}{\theta} \frac{\partial S_a}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - A \frac{\partial C}{\partial z} \quad (28)$$

donde

$$A = \frac{1}{\theta} \left[V - D_s \frac{\partial \theta}{\partial z} - \theta \frac{\partial D_s}{\partial z} \right] \quad (29)$$

La cantidad del contaminante que adsorben las partículas del suelo es función de la concentración en solución, $S_a = f(C)$, por lo que:

$$\frac{\rho_s}{\theta} \frac{\partial S_a}{\partial t} = \frac{\rho_s}{\theta} \frac{\partial S_a}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} \quad (30)$$

donde $(\partial S_a / \partial C)$ representa la separación del contaminante entre la solución y el sólido.

La separación del soluto entre la fase líquida y sólida en un medio poroso se determina en laboratorio, con lo cual se obtienen gráficas de cuánto soluto adsorbe el suelo, S_a , así como la concentración en solución, C . Esta relación y su expresión matemática equivalente se define como isoterma cuyo nombre implica que los experimentos de adsorción se realizan a temperatura constante.

De acuerdo con lo anterior, la ecuación (28) se simplifica, a:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \bar{D} \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} - \bar{A} \frac{\partial C}{\partial Z}$$

$$\bar{D} = \frac{D_s}{R(C)}$$

$$\bar{A} = \frac{A}{R(C)}$$

$$R(C) = 1 + \frac{\rho_s k(C)}{\theta}$$

(31)

donde

$R(C)$ factor de retardo

$k(C)$ función de distribución del soluto (se obtiene de la isoterma de adsorción).

2.2.5 Movimiento del agua en suelos con presencia de cultivos.

Cuando el suelo tiene un cierto contenido de agua y existe una extracción de humedad (E) efectuada por las raíces de las plantas, ésta ocasiona la influencia de una fuerza externa al volumen de control que se analiza, y de acuerdo a la ecuación (23) la forma matemática de representar lo antes expuesto para la dirección Z es [Gracia, 1987; Govindaraju et al, 1993]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[K \frac{\partial}{\partial Z} (\psi) \right] + \frac{\partial K}{\partial Z} - E \quad (32)$$

El término E es difícil de representar, ya que depende de varios factores como:

- Distribución de la humedad en el suelo
- Profundidad y densidad de la raíz, las cuales cambian con el tiempo
- Condiciones de aireación

- Posición del nivel freático
- Presencia de sales en el suelo.
- Metabolismo de la planta, que a su vez depende de la distribución de nutrientes, condiciones atmosféricas, incidencia de plagas, la variedad del cultivo, etc.

En diversos trabajos se ha representado analíticamente cómo es la variación del sistema radicular en el tiempo y en el perfil del suelo; sin embargo, aún no se dispone de un criterio único ni general. Aquí se usará un criterio [Gracia, 1987] que considera la extracción radicular igual a la evapotranspiración (que puede ser calculada), y se expresa de la manera siguiente: "La cantidad de humedad extraída ($E(\psi_i)$), en un estrato de suelo Δz , depende de la tensión de humedad en el suelo (ψ_i) y de la densidad radicular (DR) contenida en dicho estrato", por lo que se establece:

$$E(\psi_i) = f(\psi_i, DR, \Delta z) \quad (33)$$

La relación funcional propuesta es:

$$E(\psi_i) = \left[\frac{E_r}{E_{tp}} \right]_i \frac{E_{tp}}{\Delta z_i} \quad (34)$$

donde:

DR_i = Densidad radicular en el nodo i

Δz_i = incremento en Z .

E_{tp} = Evapotranspiración potencial

E_r = Evapotranspiración real

Se hace notar que $[E_r/E_{tp}]_i$ depende únicamente de (ψ_i) y E_{tp} .

2.2.6 Relaciones de van Genuchten

Como se puede apreciar, la ecuación (32) es una ecuación con tres variables independientes ψ , K y θ , es decir, tres incógnitas; por lo que se hace necesario para su solución expresarla en función de una sola variable. Para esto se han propuesto en la literatura especializada varias funciones empíricas que relacionan una variable con las otras [Hillel, 1980, p 200; van Genuchten, 1980; Fuentes, 1992]

Las ecuaciones características usadas en este trabajo son una extensión de las curvas $\theta(\psi)$, $K(\psi)$, de van Genuchten [Paniconi et al, 1991]. Las cuales se escriben de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \theta(\psi) &= \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(1 + \beta)^{-m_p} & \psi &\leq 0 \\
 \theta(\psi) &= \theta_s & \psi &\geq 0 \\
 K_r(\psi) &= (1 + \beta)^{-\frac{5m_p}{2}} [(1 + \beta)^{m_p} - \beta^{m_p}]^2 & \psi &\leq 0 \\
 K_r(\psi) &= 1 & \psi &\geq 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

donde

θ_s = humedad de saturación

θ_r = humedad residual

K_r = conductividad relativa definida por $K_r = K/K_s$

$K_s = K(\psi = 0)$ es la conductividad saturada

$$\beta \equiv \left(\frac{\psi}{\psi_s} \right)^{n_p} \tag{36}$$

ψ_s = parámetro empírico con unidades de presión

n_p = índice de distribución del tamaño de los poros ($n_p > 1$)

$m_p = 1 - 1/n_p$, ($0 < m_p < 1$)

$1.25 < n_p < 6$ (rango de validación)

Diferenciando de la ecuación (35) las relaciones de $\theta(\psi)$ se tiene:

$$S(\psi) = -\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{(n_p-1)(\theta_s-\theta_r)|\psi|^{(n_p-1)}}{|\psi_s|^{n_p(1+\beta)}^{(m_p+1)}} \quad \psi \leq 0 \quad (37)$$

$$S(\psi) = -\frac{d\theta}{d\psi} = 0 \quad \psi \geq 0$$

Aunque $(d\theta/d\psi)$ es usualmente tomado como cero para cargas de presión en capilaridad y regiones saturadas, es a veces conveniente que la capacidad específica de humedad $S(\psi)$ no sea nula en estas regiones. Una función no nula [Pariconi et al, 1991] puede adaptarse a dilataciones y contracciones en suelos arcillosos a la vez que permite la simulación en zonas saturadas y no saturadas sin tener que introducir explícitamente un término específico de almacenamiento. Numéricamente, preserva el carácter parabólico de la ecuación diferencial, salvando así dificultades en la convergencia y que pueden surgir si la ecuación llega a ser elíptica en regiones saturadas y en problemas tipo Neumann no garantizar una solución única.

De acuerdo con esto, las relaciones de van Genuchten (ecuación 37) se modifican de la forma siguiente:

$$S(\psi) = -\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{(n_p-1)(\theta_s-\theta_r)|\psi|^{(n_p-1)}}{|\psi_s|^{n_p(1+\beta)}^{(m_p+1)}} \quad \psi \leq \psi_0 \quad (38)$$

$$S(\psi) = -\frac{d\theta}{d\psi} = S_s \quad \psi \geq \psi_0$$

donde S_s es un valor positivo no nulo, llamado parámetro específico de almacenamiento.

Imponiendo un requerimiento de continuidad en las ecuaciones (38), para un valor dado de S_s el valor ψ_0 se puede conocer. Es decir, se resuelve para ψ_0 la ecuación

siguiente:

$$\frac{(n-1)(\theta_s - \theta_r) |\psi|^{n_p - 1}}{|\psi_s|^{n_p} (1 + \beta)^{m_p + 1}} \Big|_{\psi = \psi_o} = S_s \quad (39)$$

La ecuación (39) puede ser resuelta aplicando una técnica numérica, por ejemplo, el método de bisección. Con S_s conocida e integrando las ecuaciones (38) de $S(\psi)$ modificadas se tiene:

$$\begin{aligned} \theta(\psi) &= \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(1 + \beta)^{-m_p} & \psi &\leq \psi_o \\ \theta(\psi) &= \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(1 + \beta_o)^{-m_p} + S_s(\psi - \psi_o) & \psi &\geq \psi_o \end{aligned} \quad (40)$$

donde

$$\beta_o \equiv \beta(\psi_o) = \left(\frac{\psi_o}{\psi_s} \right)^{n_p} \quad (41)$$

Obsérvese que, seleccionando $S_s = 0$ en las expresiones (40) da $\psi_o = 0$, y las ecuaciones modificadas de van Genuchten son reducidas a las relaciones originales (ecuación 35).

La expresión para la conductividad hidráulica relativa es dejada en su forma original, aunque en teoría, la ecuación podría ser modificada a partir de las relaciones $K(\psi)$ como se describió anteriormente.

2.3 Condiciones de frontera

Las condiciones iniciales y de frontera que se utilizan en el modelo matemático son:

$$\psi = \psi(t) \quad Z=0, t=0$$

$$V = -K \frac{\partial}{\partial Z}(\psi + Z) \quad Z=L, t>0$$

$$C = C_0(Z) \quad Z \geq 0, t=0 \quad (42)$$

$$C = C_s \quad Z=L, 0 < t \leq T$$

$$D_s \frac{\partial C}{\partial Z} + \frac{VC}{\theta} = 0 \quad Z=L, t \geq T$$

La concentración C_s se aplica en la superficie del suelo ($Z=L$) durante un tiempo T , la cual puede variar, y un flujo de agua, V , se mantiene durante todo el tiempo en la superficie.

Las condiciones de frontera abarcan, en general, las situaciones que se presentan en la realidad. Por ejemplo, en la superficie del suelo las condiciones que se encuentran principalmente son, la evaporación y la lluvia ó riego. En la frontera inferior, las posibilidades son la existencia de un nivel de humedad conocido, o bien la presencia de un nivel freático que pueda o no variar con el tiempo.

CAPITULO 3

MODELO DE SIMULACION NUMERICA

3.1 Ecuación Unidimensional de Richards en diferencias finitas, método de interpolación integral. Coordenadas rectangulares (dirección Z)

La ecuación de Richards en su versión unidimensional para la dirección vertical según la ecuación (24) es:

$$S \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) + \frac{\partial K}{\partial Z} \quad (43)$$

Llamando

$$P = S \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (44)$$

$$M = K \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (45)$$

utilizando las ecuaciones (44) y (45) en la ecuación (43) queda:

$$P = \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial K}{\partial z} \quad (46)$$

integrando la ecuación (46) entre los límites ($Z_{j-1/2}$ a $Z_{j+1/2}$) y (t^n a t^{n+1}) y adoptando por comodidad para marcar los límites de integración la notación siguiente:

$$\begin{aligned} j + \frac{1}{2} &\doteq Z_{j+\frac{1}{2}} \\ j &\doteq Z_j \\ j - \frac{1}{2} &\doteq Z_{j-\frac{1}{2}} \\ n + 1 &\doteq t_{n+1} \\ n &\doteq t_n \end{aligned} \quad (47)$$

la ecuación (46) se puede escribir como:

$$\int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_n^{n+1} P \, dt \, dZ = \int_n^{n+1} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \frac{\partial M}{\partial z} \, dZ \, dt + \int_n^{n+1} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \frac{\partial K}{\partial z} \, dZ \, dt \quad (48)$$

Integrando en la dirección "Z" y considerando que P adquiere un valor constante de P_j en el intervalo $Z_{j-1/2}$ a $Z_{j+1/2}$, resulta:

$$\int_n^{n+1} P_j (Z_{j+1/2} - Z_{j-1/2}) \, dt = \int_n^{n+1} (M_{j+1/2} - M_{j-1/2}) \, dt + \int_n^{n+1} (K_{j+1/2} - K_{j-1/2}) \, dt \quad (49)$$

De la ecuación (44) se cumple:

$$\frac{P}{S} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (50)$$

y al integrar la ecuación (50) respecto al tiempo se tiene:

$$\int_n^{n+1} \frac{P}{S} dt = \psi^{n+1} - \psi^n \quad (51)$$

si de acuerdo con el método de interpolación integral [García, 1984] se considera que P es constante en el intervalo de tiempo, resulta:

$$P = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{S}\right) dt} \quad (52)$$

Si al integrar numéricamente el denominador de la ecuación (52), se emplea la aproximación dada por la siguiente expresión:

$$\int_{\xi}^{\xi+1} f d\xi = (\omega f^{\xi+1} + (1-\omega) f^{\xi}) \Delta\xi \quad (53)$$

en donde:

f es una función cualquiera

ω es un factor de peso que varía entre [0,1]

la ecuación (52) queda:

$$P = \frac{(\psi^{n+1} - \psi^n)(S^{n+1} S^n)}{\Delta t (\omega_{tS} S^{n+1} + (1-\omega_{tS}) S^n)} \quad (54)$$

siendo:

ω_{tS} = factor de peso respecto al tiempo (t) para la variable S.

Al reemplazar la expresión (54) en el primer miembro de la ecuación (49), se obtiene:

$$\int_n^{n+1} P_j (Z_{j+1/2} - Z_{j-1/2}) dt = \frac{(\psi_j^{n+1} - \psi_j^n) S_j^{n+1} S_j^n}{\omega_{tS} S_j^{n+1} + (1 - \omega_{tS}) S_j^n} (Z_{j+1/2} - Z_{j-1/2}) \quad (55)$$

Aplicando aproximaciones del tipo de la relación (53) para el segundo miembro de la ecuación (49), resulta:

$$\begin{aligned} & \int_n^{n+1} (M_{j+1/2} - M_{j-1/2}) dt + \int_n^{n+1} (K_{j+1/2} - K_{j-1/2}) dt = \\ & = \Delta t \left[\omega_{tM} (M_{j+1/2}^{n+1} - M_{j-1/2}^{n+1}) + (1 - \omega_{tM}) (M_{j+1/2}^n - M_{j-1/2}^n) \right] + \\ & + \Delta t \left[\omega_{tK} (K_{j+1/2}^{n+1} - K_{j-1/2}^{n+1}) + (1 - \omega_{tK}) (K_{j+1/2}^n - K_{j-1/2}^n) \right] \end{aligned} \quad (56)$$

donde:

ω_{tM} = factor de peso en el tiempo para M

ω_{tK} = factor de peso en el tiempo para K

Un procedimiento semejante al empleado para deducir la ecuación (54), permite obtener de la ecuación (45) las expresiones siguientes:

$$M_{j+1/2} = \frac{(\psi_{j+1} - \psi_j)(K_{j+1} K_j)}{(Z_{j+1} - Z_j)(\omega_{eK} K_{j+1} + (1 - \omega_{eK}) K_j)} \quad (57)$$

$$M_{j-1/2} = \frac{(\psi_j - \psi_{j-1})(K_{j-1} K_j)}{(Z_j - Z_{j-1})(\omega_{eK} K_j + (1 - \omega_{eK}) K_{j-1})} \quad (58)$$

donde:

ω_{tK} = factor de peso en el espacio para K

Al introducir las ecuaciones (57) y (58) en la ecuación (56), ésta queda:

$$\begin{aligned}
 & \int_n^{n+1} (M_{j,\frac{1}{2}} - M_{j-\frac{1}{2}}) dt + \int_n^{n+1} (K_{j,\frac{1}{2}} - K_{j-\frac{1}{2}}) dt = \\
 & = \Delta t \omega_{IM} \left(\frac{(\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^{n+1})(K_{j+1}^{n+1} K_j^{n+1})}{(Z_{j+1} - Z_j)(\omega_{eK} K_{j+1}^{n+1} + (1-\omega_{eK})K_j^{n+1})} - \frac{(\psi_j^n - \psi_{j-1}^n)(K_{j-1}^n K_j^n)}{(Z_j - Z_{j-1})(\omega_{eK} K_j^n + (1-\omega_{eK})K_{j-1}^n)} \right) + \\
 & + \Delta t (1-\omega_{IM}) \left(\frac{(\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^{n+1})(K_{j+1}^{n+1} K_j^{n+1})}{(Z_{j+1} - Z_j)(\omega_{eK} K_{j+1}^{n+1} + (1-\omega_{eK})K_j^{n+1})} - \frac{(\psi_j^n - \psi_{j-1}^n)(K_{j-1}^n K_j^n)}{(Z_j - Z_{j-1})(\omega_{eK} K_j^n + (1-\omega_{eK})K_{j-1}^n)} \right) + \\
 & + \Delta t \omega_{IK} \left(K_{j,\frac{1}{2}}^{n+1} - K_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + \Delta t (1-\omega_{IK}) \left(K_{j,\frac{1}{2}}^n - K_{j-\frac{1}{2}}^n \right)
 \end{aligned} \tag{59}$$

Sustituyendo la ecuación (55) y (56) y pasando Δt al primer miembro en la ecuación (49) se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{Z_{j,\frac{1}{2}} - Z_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right) \left[\frac{(\psi_j^{n+1} - \psi_j^n)(S_j^{n+1} S_j^n)}{(\omega_{IS} S_j^{n+1} + (1-\omega_{IS})S_j^n)} \right] = \\
 & = \omega_{IM} \left[\frac{(\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^{n+1})(K_{j+1}^{n+1} K_j^{n+1})}{(Z_{j+1} - Z_j)(\omega_{eK} K_{j+1}^{n+1} + (1-\omega_{eK})K_j^{n+1})} - \frac{(\psi_j^{n+1} - \psi_{j-1}^{n+1})(K_{j-1}^{n+1} K_j^{n+1})}{(Z_j - Z_{j-1})(\omega_{eK} K_j^{n+1} + (1-\omega_{eK})K_{j-1}^{n+1})} \right] + \\
 & + (1-\omega_{IM}) \left[\frac{(\psi_{j+1}^n - \psi_j^n)(K_{j+1}^n K_j^n)}{(Z_{j+1} - Z_j)(\omega_{eK} K_{j+1}^n + (1-\omega_{eK})K_j^n)} - \frac{(\psi_j^n - \psi_{j-1}^n)(K_{j-1}^n K_j^n)}{(Z_j - Z_{j-1})(\omega_{eK} K_j^n + (1-\omega_{eK})K_{j-1}^n)} \right] + \\
 & + \omega_{IK} \left(K_{j,\frac{1}{2}}^{n+1} - K_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + (1-\omega_{IK}) \left(K_{j,\frac{1}{2}}^n - K_{j-\frac{1}{2}}^n \right)
 \end{aligned} \tag{60}$$

denotando

$$Z_1 = (Z_{j,\frac{1}{2}} - Z_{j-\frac{1}{2}})$$

$$Z_2 = (Z_{j+1} - Z_j) \tag{61}$$

$$Z_3 = (Z_j - Z_{j-1})$$

y agrupando términos e igualando a cero en la ecuación (60) resulta:

$$\begin{aligned}
 & \psi_j^{n+1} \left[\frac{Z_1}{\Delta t} \frac{S_j^{n+1} S_j^n}{\omega_{IS} S_j^{n+1} + (1-\omega_{IS}) S_j^n} + \frac{\omega_{IM}}{Z_2} \frac{K_{j-1}^{n+1} K_j^{n+1}}{\omega_{eK} K_{j-1}^{n+1} + (1-\omega_{eK}) K_j^{n+1}} + \frac{\omega_{IM}}{Z_3} \frac{K_j^{n+1} K_{j-1}^{n+1}}{\omega_{eK} K_j^{n+1} + (1-\omega_{eK}) K_{j-1}^{n+1}} \right] + \\
 & + \psi_j^n \left[-\frac{Z_1}{\Delta t} \frac{S_j^{n+1} S_j^n}{\omega_{IS} S_j^{n+1} + (1-\omega_{IS}) S_j^n} + \frac{(1-\omega_{IM})}{Z_2} \frac{K_{j-1}^n K_j^n}{\omega_{eK} K_{j-1}^n + (1-\omega_{eK}) K_j^n} + \frac{(1-\omega_{IM})}{Z_3} \frac{K_j^n K_{j-1}^n}{\omega_{eK} K_j^n + (1-\omega_{eK}) K_{j-1}^n} \right] + \\
 & + \psi_{j-1}^{n+1} \left[\frac{\omega_{IM}}{Z_2} \frac{K_{j-1}^{n+1} K_j^{n+1}}{\omega_{eK} K_{j-1}^{n+1} + (1-\omega_{eK}) K_j^{n+1}} \right] + \psi_{j-1}^n \left[\frac{\omega_{IM}}{Z_3} \frac{K_j^{n+1} K_{j-1}^{n+1}}{\omega_{eK} K_j^{n+1} + (1-\omega_{eK}) K_{j-1}^{n+1}} \right] + \\
 & + \psi_{j-1}^n \left[-\frac{(1-\omega_{IM})}{Z_2} \frac{K_{j-1}^n K_j^n}{\omega_{eK} K_{j-1}^n + (1-\omega_{eK}) K_j^n} \right] + \psi_{j-1}^n \left[\frac{(1-\omega_{IM})}{Z_3} \frac{K_j^n K_{j-1}^n}{\omega_{eK} K_j^n + (1-\omega_{eK}) K_{j-1}^n} \right] + \\
 & + \omega_{IK} \left(-K_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + K_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + (1-\omega_{IM}) \left(-K_{j-\frac{1}{2}}^n + K_{j-\frac{1}{2}}^n \right) = 0
 \end{aligned} \tag{62}$$

simplificando la ecuación (62) se tiene:

$$A \psi_j^{n+1} + B \psi_j^n + C \psi_{j-1}^{n+1} + D \psi_{j-1}^{n+1} + E \psi_{j-1}^n + F \psi_{j-1}^n + G = 0 \tag{63}$$

en donde se ha hecho

$$\begin{aligned}
A &= \left[\frac{Z_1}{\Delta t} \frac{S_j^{n+1} S_j^n}{\omega_{IM} S_j^{n+1} + (1-\omega_{IM}) S_j^n} + \frac{\omega_{IM}}{Z_2} \frac{K_{j+1}^{n+1} K_j^{n+1}}{\omega_{eK} K_{j+1}^{n+1} + (1-\omega_{eK}) K_j^{n+1}} + \frac{\omega_{eK}}{Z_3} \frac{K_j^{n+1} K_{j-1}^{n+1}}{\omega_{eK} K_j^{n+1} + (1-\omega_{eK}) K_{j-1}^{n+1}} \right] \\
B &= \left[\frac{Z_1}{\Delta t} \frac{S_j^{n+1} S_j^n}{\omega_{IM} S_j^{n+1} + (1-\omega_{IM}) S_j^n} + \frac{(1-\omega_{IM})}{Z_2} \frac{K_{j+1}^n K_j^n}{\omega_{eK} K_{j+1}^n + (1-\omega_{eK}) K_j^n} + \frac{(1-\omega_{IM})}{Z_3} \frac{K_j^n K_{j-1}^n}{\omega_{eK} K_j^n + (1-\omega_{eK}) K_{j-1}^n} \right] \\
C &= \left[-\frac{\omega_{IM}}{Z_2} \frac{K_{j+1}^{n+1} K_j^{n+1}}{\omega_{eK} K_{j+1}^{n+1} + (1-\omega_{eK}) K_j^{n+1}} \right] \\
D &= \left[-\frac{\omega_{IM}}{Z_3} \frac{K_j^{n+1} K_{j-1}^{n+1}}{\omega_{eK} K_j^{n+1} + (1-\omega_{eK}) K_{j-1}^{n+1}} \right] \\
E &= \left[\frac{(1-\omega_{IM})}{Z_2} \frac{K_{j+1}^n K_j^n}{\omega_{eK} K_{j+1}^n + (1-\omega_{eK}) K_j^n} \right] \\
F &= \left[\frac{(1-\omega_{IM})}{Z_3} \frac{K_j^n K_{j-1}^n}{\omega_{eK} K_j^n + (1-\omega_{eK}) K_{j-1}^n} \right]
\end{aligned} \tag{64}$$

$$G = \omega_{IK} \left(-K_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + K_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + (1-\omega_{IK}) \left(-K_{j+\frac{1}{2}}^n + K_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

despejando de la ecuación (63) a ψ_j^{n+1} :

$$\psi_j^{n+1} = -\frac{\gamma}{A} \tag{65}$$

donde:

$$\gamma = B \psi_j^n + C \psi_{j+1}^{n+1} + D \psi_{j-1}^{n+1} + E \psi_{j+1}^n + F \psi_{j-1}^n + G \tag{66}$$

Las conductividades del término G son calculadas de acuerdo al anexo 3.

La ecuación (65) aplicada a cada uno de los nodos de la región de análisis, genera el sistema de ecuaciones no lineal cuya solución dará los valores de la carga de presión correspondientes para el nivel de tiempo analizado.

Para calcular la carga de presión en la frontera superior cuando se tiene un flujo de Darcy, se procede de la forma siguiente:

De la ecuación de conservación se tiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial Z} \quad (67)$$

al integrarla entre los límites que se indican queda:

$$\int_n^{n+1} \int_{j-1}^j \frac{\partial \theta}{\partial t} dZ dt = -\int_n^{n+1} \int_{j-1}^j \frac{\partial q}{\partial Z} dZ dt \quad (68)$$

el subíndice j corresponde a la superficie del suelo y el subíndice $(j-1)$, al nodo de la malla inmediatamente abajo.

Resolviendo de manera exacta y aplicando el método del trapecio además de igualar a cero la ecuación (68) resulta en:

$$(\Delta Z) [\theta_j^{n+1} - \theta_j^n + \theta_{j-1}^{n+1} - \theta_{j-1}^n] + [q_j^{n+1} - q_{j-1}^{n+1} + q_j^n - q_{j-1}^n] (\Delta t) = 0 \quad (69)$$

donde:

$$q_{j-1}^{n+1} = -K_{j-1}^{n+1} \left[\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_{j-1}^{n+1}}{Z_j - Z_{j-1}} + 1 \right] \quad (70)$$

$$q_{j-1}^n = -K_{j-1}^n \left[\frac{\Psi_j^n - \Psi_{j-1}^n}{Z_j - Z_{j-1}} + 1 \right] \quad (71)$$

La ecuación (69) se resuelve para ψ_j^{n+1} por cualquier método iterativo de solución, por ejemplo, aplicando el método de bisección.

Análisis semejantes pueden ser aplicados cuando el flujo de Darcy es aplicado en la base.

La ecuación (65) y la ecuación (69) en problemas tipo Neumann generan el sistema de ecuaciones no lineales. En problemas tipo Dirichlet, la ecuación (65) es la que se aplica para generar este sistema. Las soluciones se encuentran aplicando la técnica iterativa de Picard.

3.2 Análisis de estabilidad y convergencia

3.2.1 Función de respuesta continua

Del teorema de equivalencia de Lax [*Fletcher*, 1987; p. 74] "Si en un problema de valor inicial la ecuación en derivadas es aproximada mediante diferencias finitas y si la condición de consistencia es satisfecha, entonces la condición de estabilidad es suficiente y necesaria para que la aproximación en diferencias sea convergente." Es decir:

$$\text{CONSISTENCIA} + \text{ESTABILIDAD} = \text{CONVERGENCIA}$$

La mayoría de problemas de flujo son no lineales con condiciones de frontera combinados de modo que el teorema de equivalencia de Lax no puede siempre ser aplicado rigurosamente. Consecuentemente este teorema se debe interpretar como una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia [*Fletcher*, 1987; p. 75].

Tomando en cuenta lo anterior, a continuación se presenta un análisis lineal de estabilidad para una versión linealizada de la ecuación de Richards mediante el análisis convencional de Von Neumann.

De acuerdo a la expresión (24) la ecuación de Richards para la dirección "Z" es:

$$S \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) + \frac{\partial K}{\partial Z} \quad (72)$$

Si se considera que K se puede expresar en función de ψ de acuerdo a la siguiente relación [Gardner, 1958]

$$K = K_g e^{\alpha_g \psi} \quad (73)$$

al reemplazar en el último término de la ecuación (72) se obtiene:

$$S \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) + \alpha_g K_g e^{\alpha_g \psi} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (74)$$

si en la ecuación (74) se sustituye la expresión (73) resulta:

$$S \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) + \alpha_g K \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (75)$$

Si ahora se considera que cada variable se puede representar por un valor constante representativo de la misma más una pequeña variación, es decir

$$\begin{aligned} S &= S_o + S' \\ K &= K_o + K' \\ \psi &= \psi_o + \psi' \end{aligned} \quad (76)$$

al sustituir las expresiones (76) en la ecuación (75) lleva a

$$(S_o + S') \frac{\partial(\psi_o + \psi')}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left((K_o + K') \frac{\partial(\psi_o + \psi')}{\partial Z} \right) + \alpha_g (K_o + K') \frac{\partial(\psi_o + \psi')}{\partial Z} \quad (77)$$

considerando que el producto de variaciones pequeñas es despreciable en comparación con los demás términos y como K_o , S_o y ψ_o son constantes; la ecuación (77) se reduce a:

$$S_o \frac{\partial \psi'}{\partial t} = K_o \frac{\partial^2 \psi'}{\partial Z^2} + \alpha_g K_o \frac{\partial \psi'}{\partial Z} \quad (78)$$

al dividir la ecuación (78) entre S_o , y asignar

$$u = -\frac{\alpha_g K_o}{S_o} \quad (79)$$

$$v = \frac{K_o}{S_o}$$

la ecuación (78) queda

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} + u \frac{\partial \psi'}{\partial Z} = v \frac{\partial^2 \psi'}{\partial Z^2} \quad (80)$$

donde u y v son constantes.

Del principio de superposición, la función de respuesta continua de la ecuación (80) es [Abbott, 1990; p.138]:

$$R_o = \exp(-i\omega\tau - v\tau k^2) \quad (81)$$

donde:

ω = frecuencia de onda

τ = incremento en el tiempo

k = No. de onda ($0 \leq k \leq \pi$)

$$i = \sqrt{-1}$$

v = constante, obtenida de la ecuación (79).



Al introducir las siguientes cantidades adimensionales

$\theta_0 = \omega \Delta t$ (frecuencia de onda adimensional)

$\alpha = k \Delta z$ (No. de onda adimensional)

$\lambda = v \Delta t / \Delta z^2$ (coeficiente adimensional)

$C_r = \theta_0 / \alpha$ (No. de Courant)

en la ecuación (81) esta se reduce en forma adimensional a:

$$R_\theta = \exp(-i\theta_0 - \lambda \alpha^2) \quad (82)$$

o también

$$R_\theta = \exp(-iC_r \alpha - \lambda \alpha^2) \quad (83)$$

Para cualquier C_r y λ de la ecuación (83) se obtiene:

$$|R_\theta(\alpha)| = \exp(-\lambda \alpha^2) \quad (84)$$

$$Q = \frac{-\arg R_\theta(\alpha)}{C_r \alpha} = 1 \quad (85)$$

Para fines prácticos la ecuación (84) se puede escribir como:

$$|R_e(\alpha)| = \exp\left(-\frac{K_o \Delta t}{S_o} k^2\right) \quad (86)$$

en función del número de onda (k). En función del número de intervalos computacionales por longitud de onda (M) será:

$$|R_e(\alpha)| = \exp\left(-\lambda \frac{4\pi^2}{M^2}\right) \quad (87)$$

donde : $M = 2\pi/k\Delta Z$

La ecuación (85) y (86 u 87) proporcionan las funciones de fase y amplitud respectivamente con las que se deben comparar el factor de ampliación del esquema en diferencias, esta comparación se hará a través de los retratos de amplitud y de fase la cual servirá para conocer el grado de exactitud de los resultados obtenidos.

3.2.2 Factor de ampliación

Al integrar la expresión (78) entre los límites considerados en la ecuación (48) se tiene:

$$S_o \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_n^{n+1} \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = K_o \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_n^{n+1} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial Z^2} + \alpha_g K_o \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_n^{n+1} \frac{\partial \Psi'}{\partial Z} \quad (88)$$

recuerde que S_o , K_o y α_g son constantes y por comodidad se hará $A_o = \alpha_g K_o$; en el primer miembro se considera que $(\partial \Psi' / \partial t)$ permanece constante en el intervalo $(j + 1/2, j - 1/2)$ e igual a $(\partial \Psi' / \partial t)_j$; para el segundo miembro al integrar en el tiempo se usará una forma como lo indica la expresión (53), por lo tanto:

$$S_0[\psi_j^{n+1} - \psi_j^n] \Delta Z = K_0 \Delta t \left[\omega_t \frac{\psi_{j+1}^{n+1} - 2\psi_j^{n+1} + \psi_{j-1}^{n+1}}{\Delta Z} + (1-\omega_t) \frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{\Delta Z} \right] + A_0 \left[\omega_t (\psi_{j+1/2}^{n+1} - \psi_{j-1/2}^{n+1}) + (1-\omega_t) (\psi_{j+1/2}^n - \psi_{j-1/2}^n) \right] \quad (89)$$

donde ω_t es el factor de peso en el tiempo $[0,1]$.

En el anexo 1 se comprueba la consistencia del esquema de la expresión (89).

Sin considerar las condiciones de frontera (o suponiendo que son del tipo Dirichlet) [Aldama, et al.] se puede emplear el método de Neumann [Fletcher, 1987; p.85. Fuentes, 1981; p.136] para obtener el análisis de estabilidad del esquema linealizado representado en la ecuación (89). Es decir, una solución de cualquier esquema en diferencias puede ser escrito como una serie de Fourier en su forma compleja para cualquier nivel de tiempo "n" en la forma [Abbott, 1990; cap. 3]:

$$\psi_j^n = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k^n e^{i(j\sigma_k \Delta Z + n\beta_k \Delta t)} \quad (90)$$

donde:

Ψ_k^n es el factor de Fourier

σ_k es el número de onda

β_k es la frecuencia de onda

El método de análisis de estabilidad lineal determina como cada coeficiente de Fourier se comporta en el tiempo para cualquier número de onda k, es decir:

$$\psi_j^n = \Psi_k^n e^{i(j\sigma_k \Delta Z + n\beta_k \Delta t)} \quad (91)$$

sustituyendo la expresión (91) en la ecuación (89) y al reducir algebraicamente se tiene:

$$e^{i\beta_k \Delta t} = \frac{1 + \lambda(1-\omega_i)[2\cos(\sigma_k \Delta Z) - 2] + 2i\lambda(1-\omega_i)\text{sen}\left(\frac{\sigma_k \Delta Z}{2}\right)}{1 - \lambda\omega_i[2\cos(\sigma_k \Delta Z) - 2] - 2i\lambda\omega_i\text{sen}\left(\frac{\sigma_k \Delta Z}{2}\right)} \quad (92)$$

Esta expresión representa en forma general para cualquier factor de peso ω_i , el factor de ampliación para cualquier número de onda de la serie de Fourier del esquema lineal correspondiente a la ecuación (89).

Si $\omega_i = 0.5$ (con este valor se obtiene el mínimo error de truncado, ver anexo1) la ecuación (92) se reduce a:

$$e^{i\beta_k \Delta t} = \frac{1 + \lambda \cos(\sigma_k \Delta Z) - \lambda + iC_r \text{sen}\left(\frac{\sigma_k \Delta Z}{2}\right)}{1 - \lambda \cos(\sigma_k \Delta Z) + \lambda - iC_r \text{sen}\left(\frac{\sigma_k \Delta Z}{2}\right)} \quad (93)$$

Por simplificación se asignará

$$A_1 = 1 + \lambda \cos(\sigma_k \Delta Z) - \lambda$$

$$B_1 = C_r \text{sen}\left(\frac{\sigma_k \Delta Z}{2}\right) \quad (94)$$

$$C_1 = 1 - \lambda \cos(\sigma_k \Delta Z) + \lambda$$

por lo que la ecuación (93) se puede escribir como:

$$e^{i\beta_k \Delta t} = \frac{A_1 + iB_1}{C_1 - iB_1} \quad (95)$$

al multiplicar ambos miembros de la ecuación (95) por el complejo conjugado del denominador, es fácil probar que el cuadrado del módulo de la expresión (95) es:

$$|e^{i\beta_k \Delta t}|^2 = \frac{(A_1 C_1 - B_1^2)^2 + (A_1 B_1 + B_1 C_1)^2}{(C_1^2 + B_1^2)^2} \quad (96)$$

y para estabilidad se debe satisfacer que

$$C_1 \geq A_1 \quad (97)$$

La relación anterior siempre es satisfecha independientemente de cualquier valor de los parámetros utilizados, por lo que se concluye que el esquema es incondicionalmente estable; sin embargo, esta aseveración es a través de analizar una versión linealizada de la ecuación de Richards por lo que se debe de tomar como una condición necesaria pero no suficiente para asegurar que los resultados utilizando cualquier ΔZ y Δt sean suficientemente aceptables. De acuerdo a lo anterior, para asegurar la exactitud de los resultados se deben de analizar los retratos de amplitud y de fase.

3.2.3 Retratos de amplitud y de fase

De la ecuación (96) se deduce que el módulo del factor de ampliación del esquema numérico es:

$$A_m = |e^{i\beta_k \Delta t}| = \left(\frac{A_1^2 + B_1^2}{C_1^2 + B_1^2} \right)^{1/2} \quad (98)$$

De esta ecuación se observa que la condición más desfavorable se presenta cuando $B_1 \rightarrow 0$, de donde en este trabajo se considera esta condición para crear los retratos de amplitud (R_a) en base a la gráfica de la ecuación siguiente:

$$R_a = \frac{|R_a|}{|e^{i\beta_k \Delta t}|} = \frac{|R_a|}{A_m} = \frac{C_1}{A_1 e^{\alpha^2 \lambda}} \quad (99)$$

En la lámina 1 se presentan los retratos de amplitud considerando diferentes valores de λ , como se puede apreciar a cada λ se le puede asignar un mínimo número de intervalos computacionales (M) a partir del cual el valor de R_a es prácticamente igual a la unidad; al respecto en la lámina 2 se muestra una gráfica a través de la cual se puede seleccionar el M para garantizar un valor de $R_a = 0.98$.

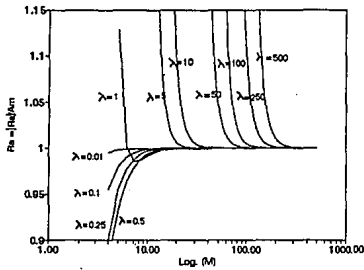


Lámina 1 Retratos de amplitud para diferentes λ .

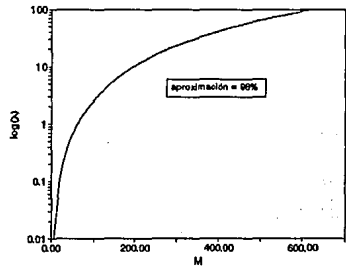


Lámina 2 Selección de M respecto a λ .

Por otro lado, también de la ecuación (95) se obtiene el argumento del factor de ampliación y , de acuerdo a la expresión (85) el retrato de fase (R_f) del modelo numérico es:

$$R_f = \frac{-\tan^{-1} \left\{ \frac{2C_r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\lambda^2 [\cos(\alpha) - 1]^2 + C_r^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1} \right\}}{\alpha C_r} \quad (100)$$

En la lámina 3a y 3b se presenta un ejemplo de los retratos de fase, en este se consideró un $Cr=0.5$ y una variación $0.3 \leq \lambda \leq 0.45$; como se puede apreciar para $\lambda=0.45$ se presentan discontinuidades para ciertos números de onda, para $\lambda=0.35$ el esquema transfiere la información más rápido que la ecuación diferencial ($R_f > 1$), para $\lambda=0.3$ el R_f en general es menor o igual a la unidad.

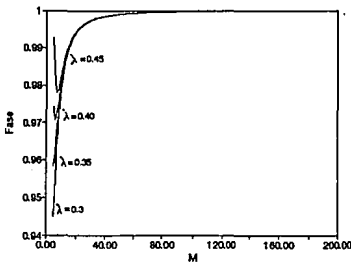


Lámina 3a Retratos de fase para $Cr=0.5$ y diferentes λ .

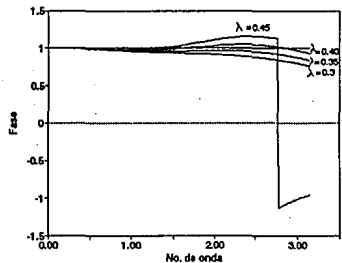


Lámina 3b Retratos de fase para $Cr=0.5$ y diferentes λ .

Aquí es conveniente recordar que en la medida en que R_f se acerque a la unidad la exactitud del esquema es mejor, por esta razón fué necesario realizar una cuidadosa inspección de los retratos de fase para poder establecer las siguientes condiciones que garantizan una precisión aceptable desde el punto de vista numérico:

$$\lambda \leq 0.25 \quad C_r \leq 0.5 \quad P \leq 2 \quad (101)$$

En donde P es el número de Péclét que en este caso esta dado por:

$$P = \frac{C_r}{\lambda} = \alpha_g \Delta Z \quad (102)$$

Las relaciones (101) se aceptarán como las condiciones que garantizan una buena precisión de los resultados obtenidos a través del modelo numérico aquí propuesto.

CAPITULO 4

EJEMPLOS DE APLICACION

En la tabla siguiente, se muestran los parámetros para las relaciones de van Genuchten, correspondientes a cada uno de los ejemplos analizados.

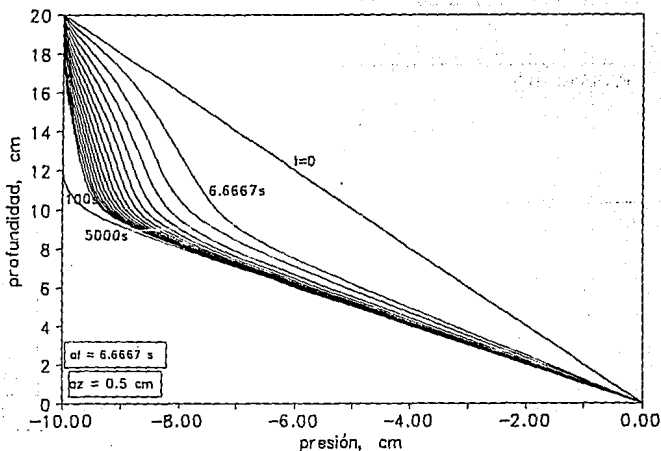
PARAMETRO	EJEMPLO			
	4.1,4.3,4.5 ,4.6,4.7	4.2	4.4	4.8
Humedad residual, θ_r	0.026	0.08	0.15	0.15
Humedad de saturación, θ_s	0.35	0.45	0.38	0.38
Parámetro empírico, ψ_s	-7.69 cm	- 3 m	-1.2 m	-1.2m
Índice de distribución de tamaño de poros, n_p	7.94	3	4	4
Conductividad hidráulica saturada, K_s	0.281 cm/s	5 m/h	0.01 m/h	0.0004 m/h
Parámetro específico de almacenamiento, S_s	0	0.001	0.0001	0.0001

4.1 Ejemplo con condiciones de frontera fijas

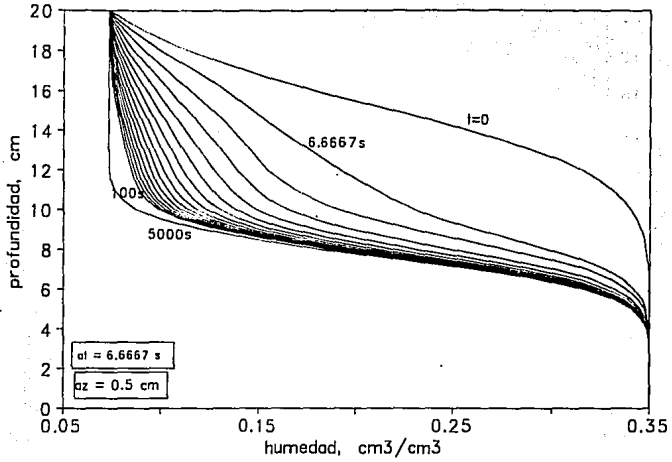
En este primer ejemplo, se considera una carga de presión fija de -10 cm en la frontera superior y en la base una carga de cero, correspondiente a un estado de saturación del suelo. La columna de suelo mide 20 cm de altura. Los datos para este ejemplo fueron obtenidos de *Aldama, et al.*

A continuación, las gráficas muestran los valores de carga de presión, contenido de humedad, conductividad hidráulica (K) y flujo de Darcy q, a través de todo el perfil del suelo para los tiempos indicados. También se da una gráfica del error en conservación de masa acumulado e instantáneo (por nivel de tiempo) a lo largo del tiempo de análisis.

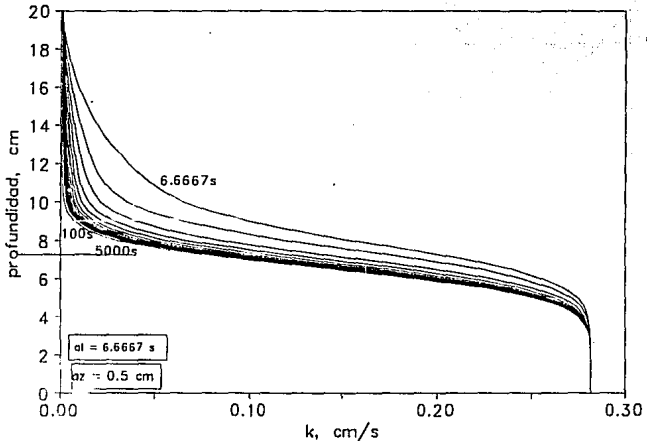
Gráfica 1 Carga de presión.



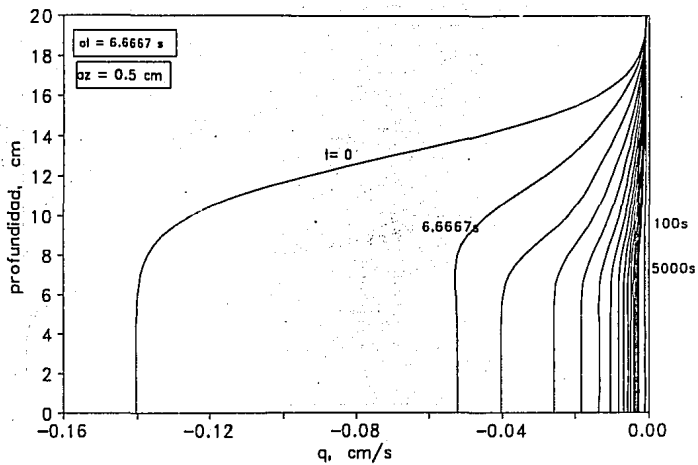
Gráfica 2 Contenido de humedad



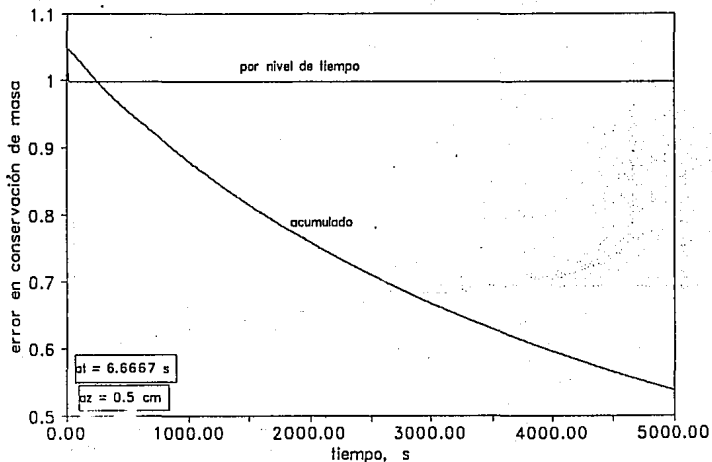
Gráfica 3 Conductividad hidráulica



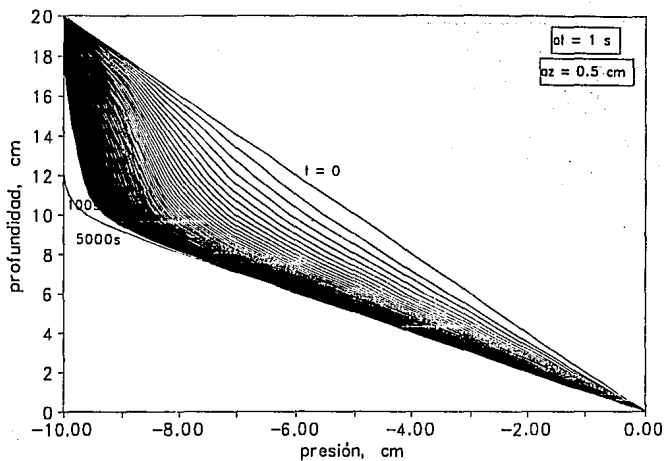
Gráfica 4 Flujo de Darcy



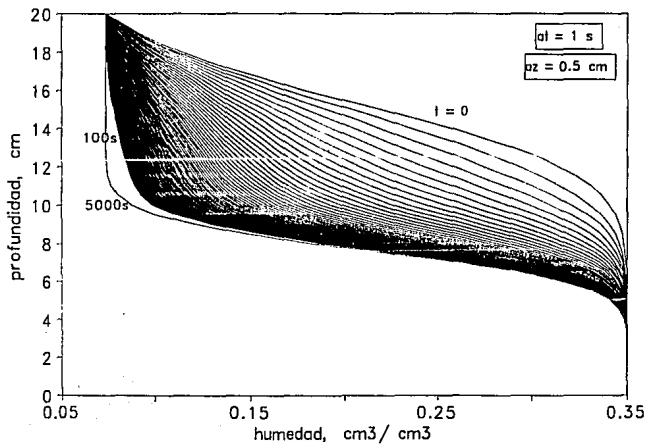
Gráfica 5 Error en conservación de masa



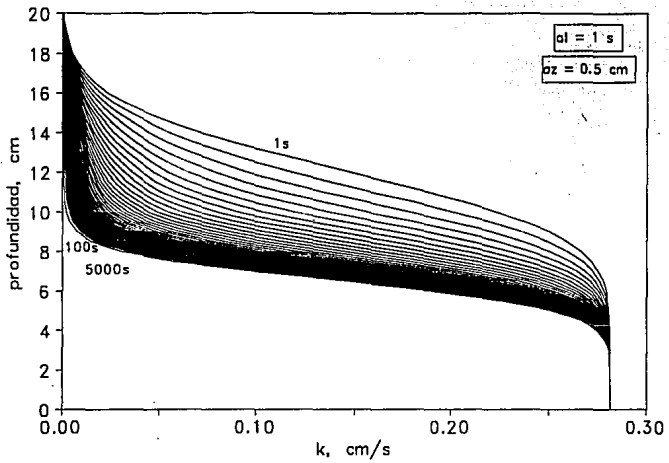
Gráfica 6 Carga de presión



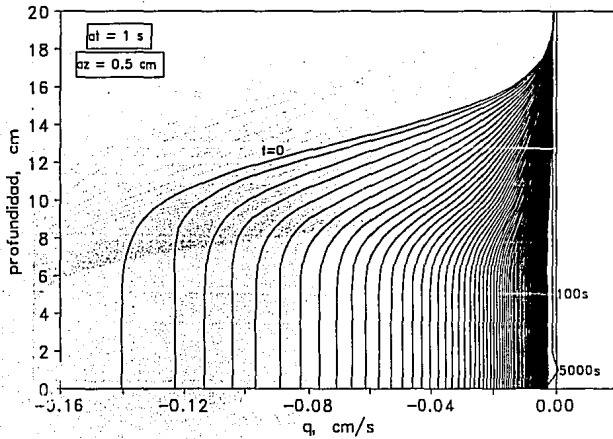
Gráfica 7 Contenido de humedad



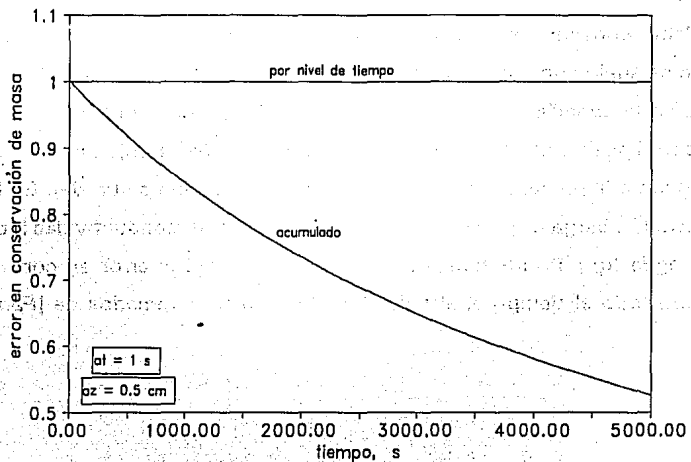
Gráfica 8 Conductividad hidráulica



Gráfica 9 Flujo de Darcy



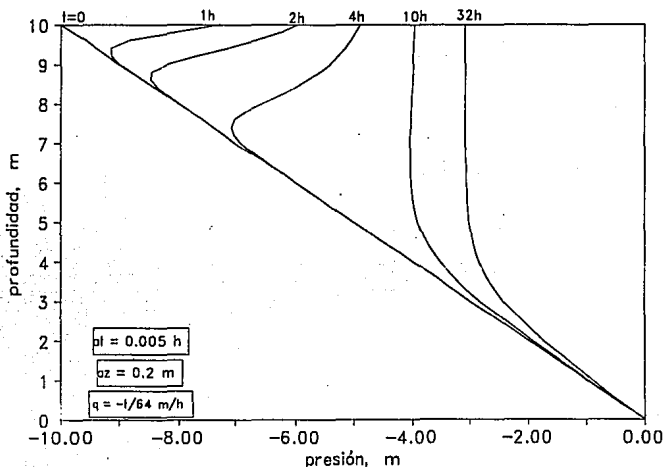
Gráfica 10 Error en conservación de masa



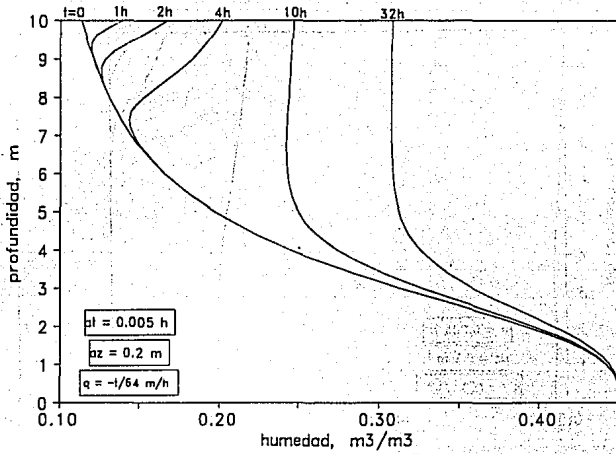
4.2 Ejemplo con flujo de Darcy variable en frontera superior

El problema considera simultáneamente infiltración y redistribución dentro de una columna de suelo con una condición inicial de equilibrio hidrostático. La condición de frontera en la superficie, es un flujo de Darcy (q) [Paniconi et al, 1991] el cual se incrementa linealmente a través del tiempo ($q = -t/64$ m/h), en la base, la carga corresponde a la presencia de un nivel freático (condición saturada). En las gráficas se presentan la carga de presión, contenido de humedad, conductividad hidráulica (K), flujo de agua (q) para los tiempos indicados, así como el error en conservación de masa para todo el tiempo analizado. Los datos fueron tomados de [Paniconi et al, 1991].

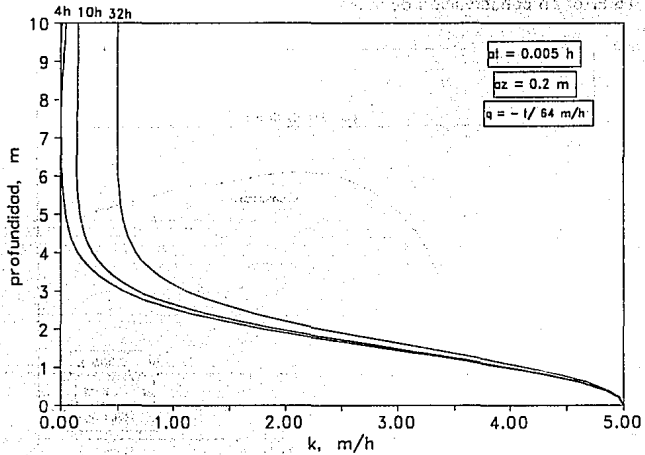
Gráfica 11 Carga de presión



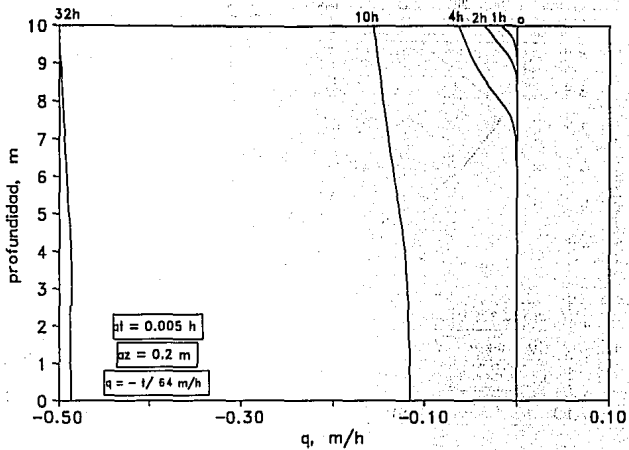
Gráfica 12 Contenido de humedad



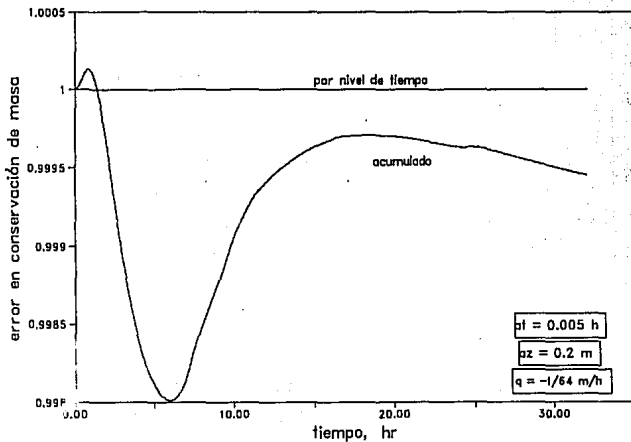
Gráfica 13 Conductividad hidráulica



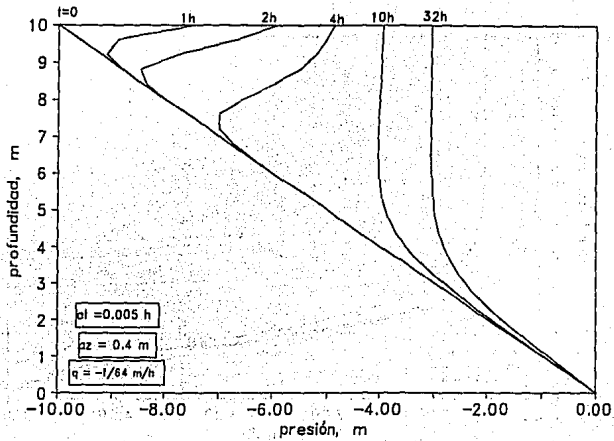
Gráfica 14 Flujo de Darcy



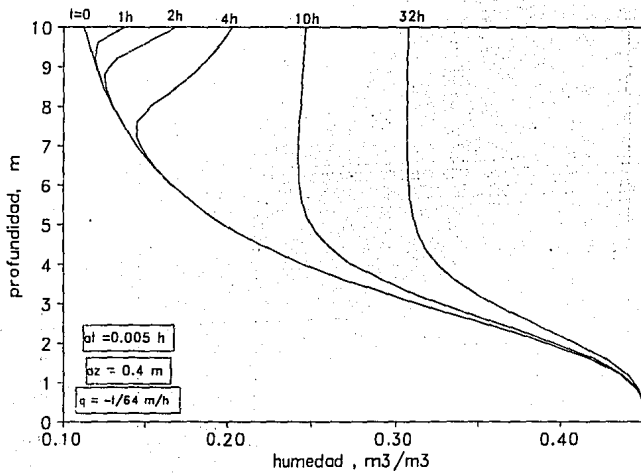
Gráfica 15 Error en conservación de masa



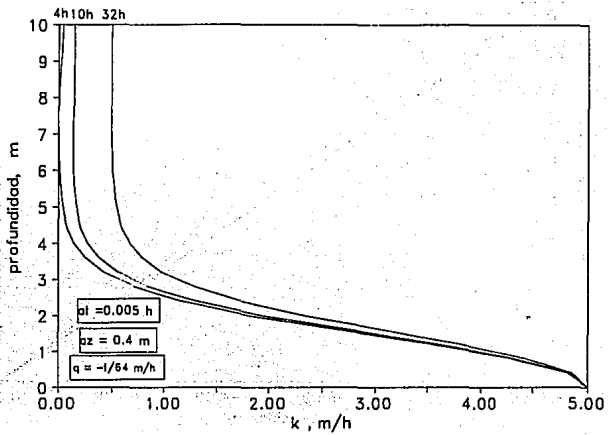
Gráfica 16 Carga de presión



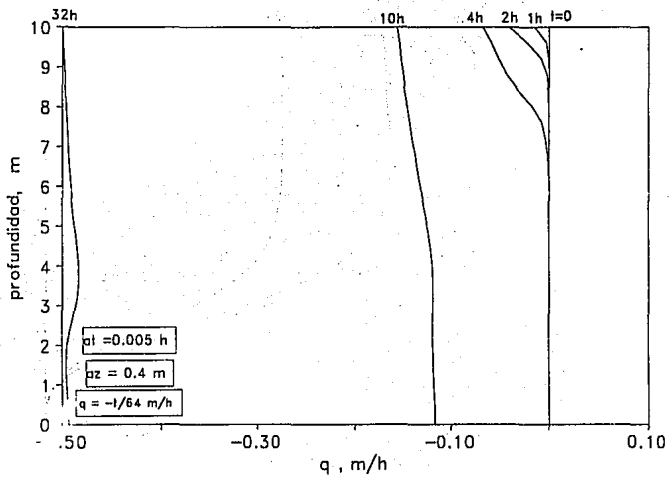
Gráfica 17 Contenido de humedad



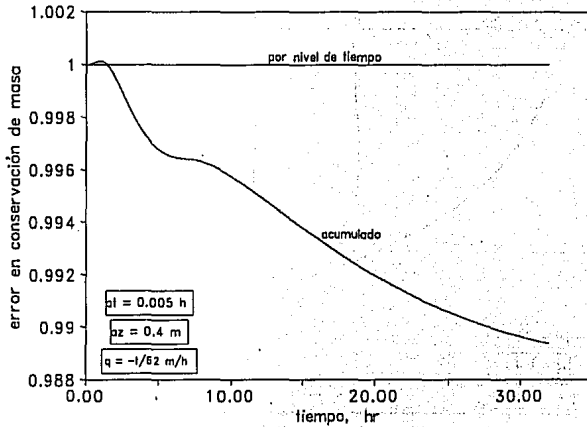
Gráfica 18 Conductividad hidráulica



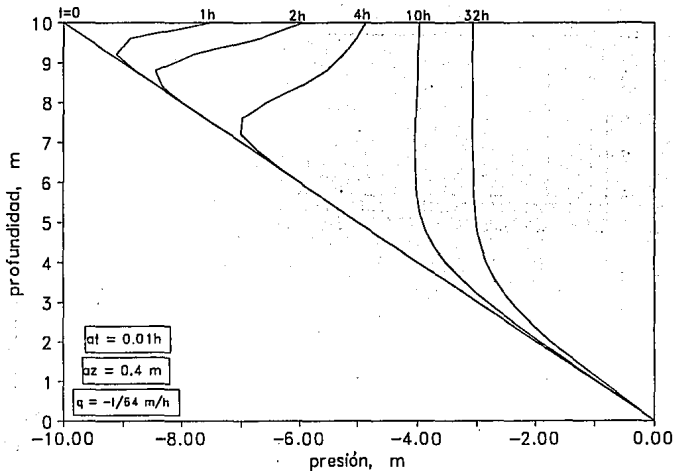
Gráfica 19 Flujo de Darcy (q) vs profundidad (m).



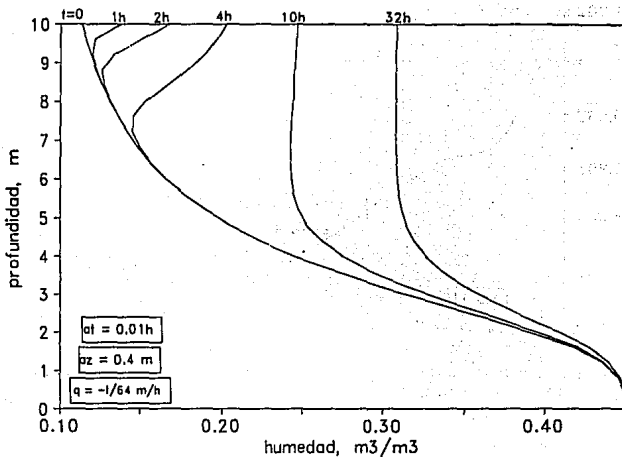
Gráfica 20 Error en conservación de masa



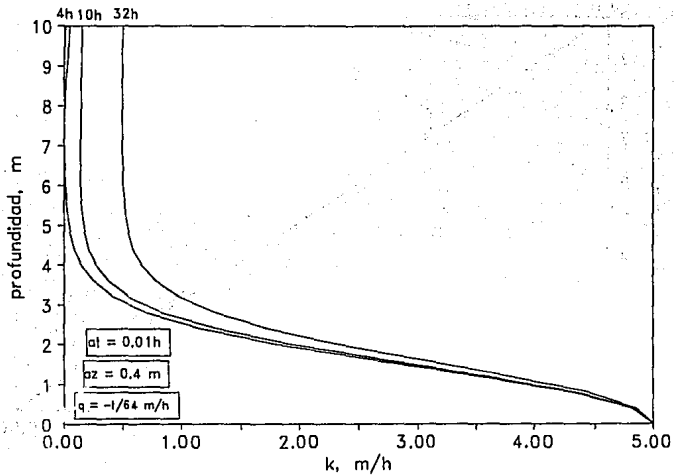
Gráfica 21 Carga de presión



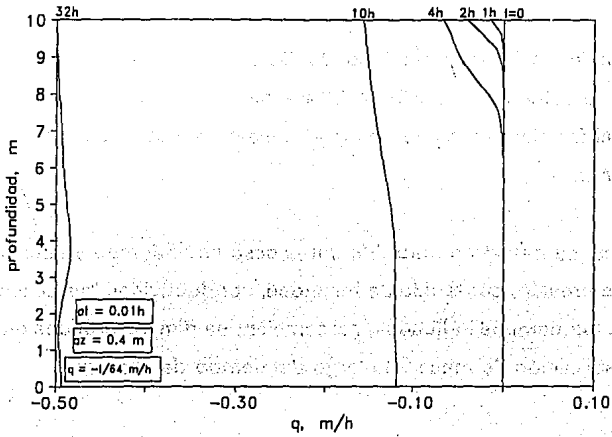
Gráfica 22 Contenido de humedad



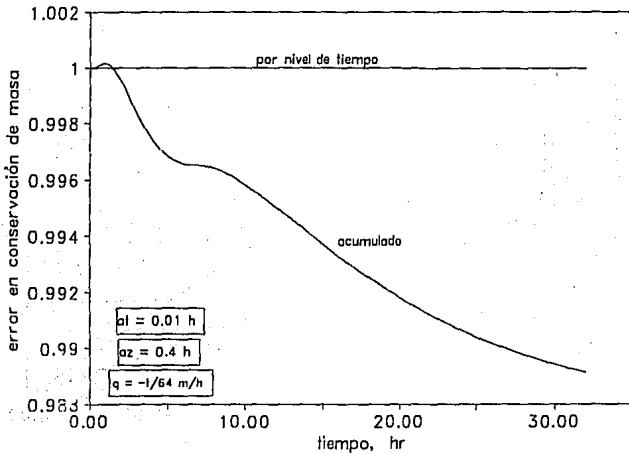
Gráfica 23 Conductividad hidráulica



Gráfica 24 Flujo de Darcy



Gráfica 25 Error en conservación de masa

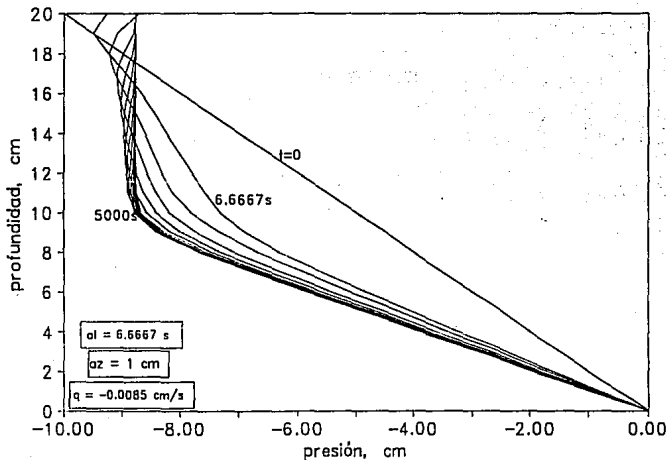


4.3 Ejemplo con flujo de Darcy constante en frontera superior

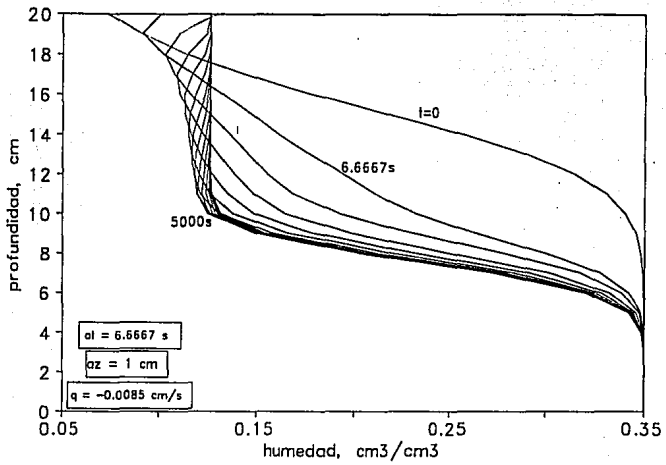
En este ejemplo se impone un flujo de Darcy constante $q=0.0085$ cm/s en la superficie de la columna de suelo de 20 cm de altura, en la base, se considera que existe un nivel freático fijo por lo que $\psi=0$ en este punto. Los datos fueron tomados de Aldama et al.

En las gráficas, se muestran para diferentes paso en el tiempo y espacio, los valores de la carga de presión, contenido de humedad, conductividad hidráulica (K) y flujo de agua (q) para los tiempos indicados, así también, se dan las gráficas que muestran el error en conservación de masa a lo largo del tiempo de análisis.

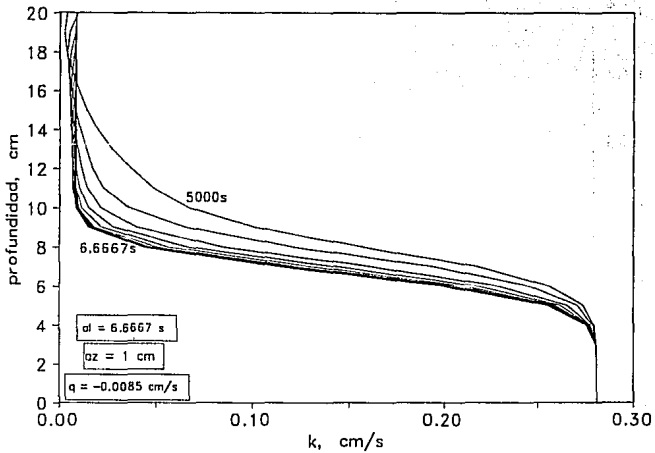
Gráfica 26 Carga de presión



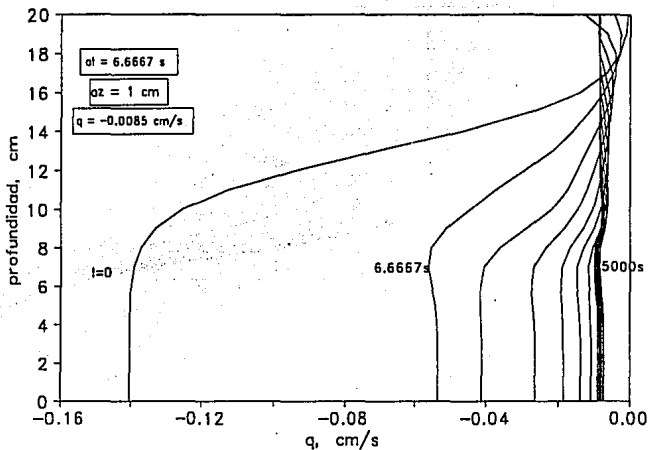
Gráfica 27 Contenido de humedad



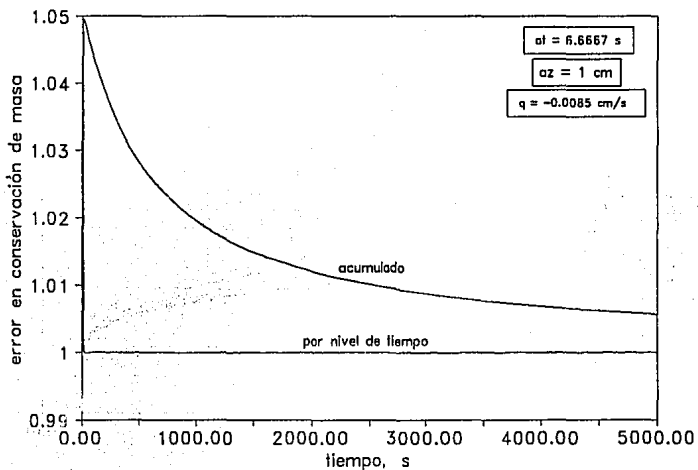
Gráfica 28 Conductividad hidráulica



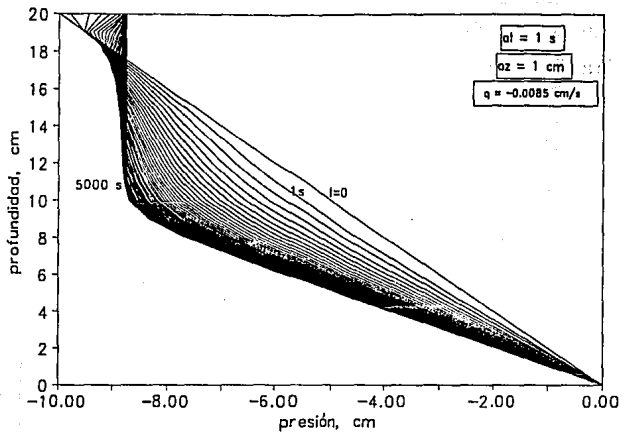
Gráfica 29 Flujo de Darcy



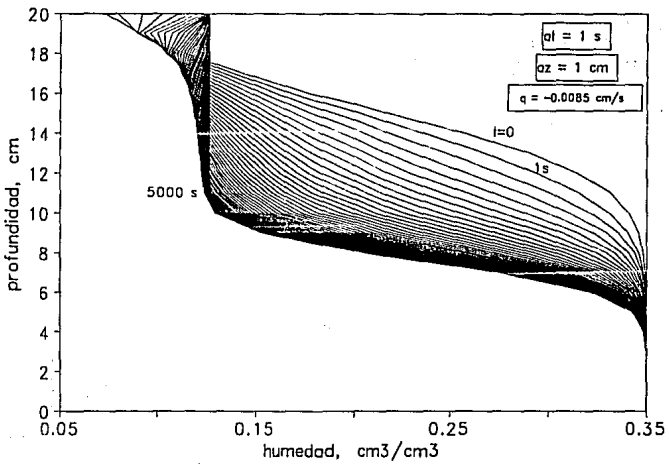
Gráfica 30 Error en conservación de masa



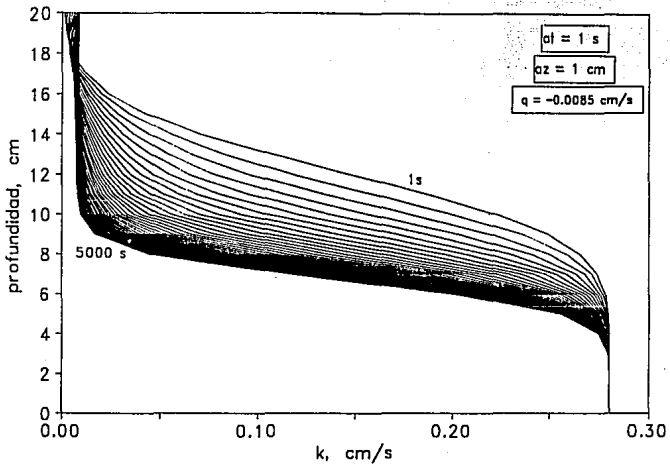
Gráfica 31 Carga de presión



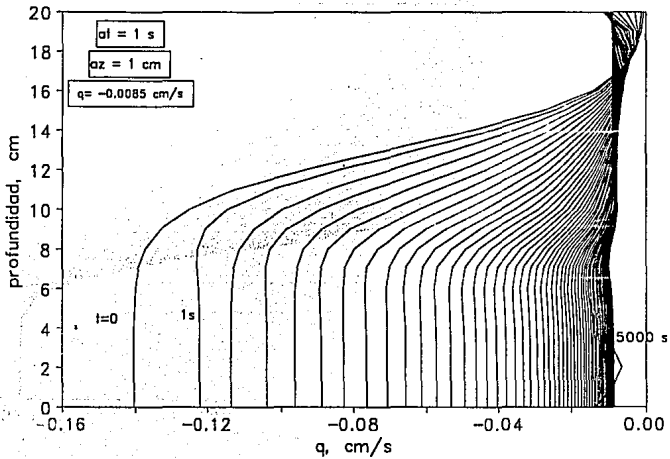
Gráfica 32 Contenido de humedad



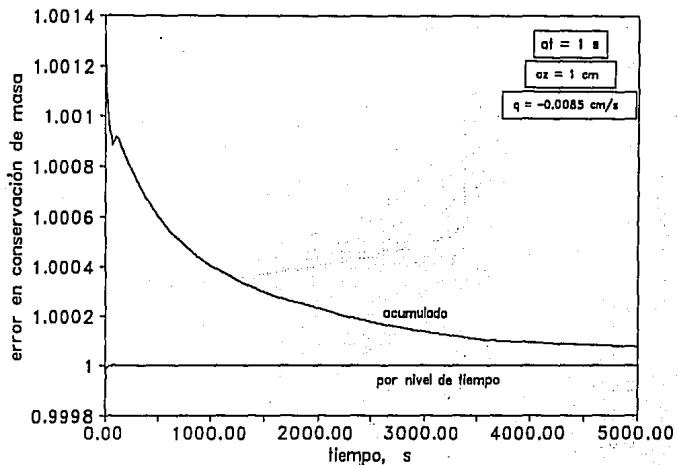
Gráfica 33 Conductividad hidráulica



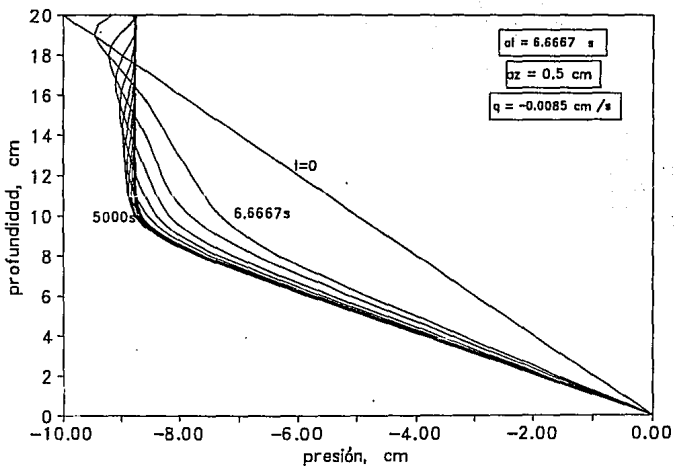
Gráfica 34 Flujo de Darcy



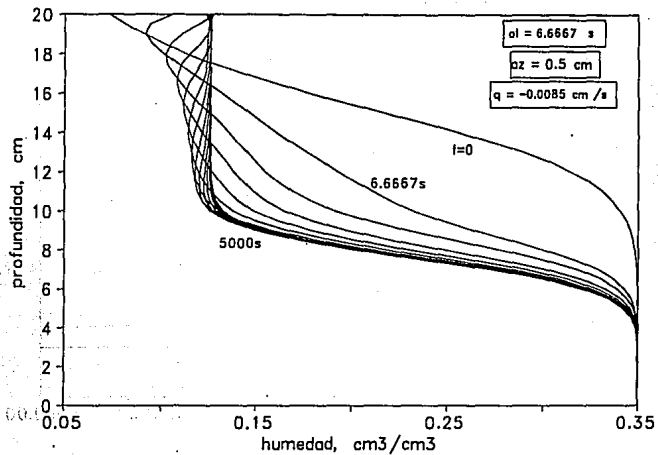
Gráfica 35 Error en conservación de masa



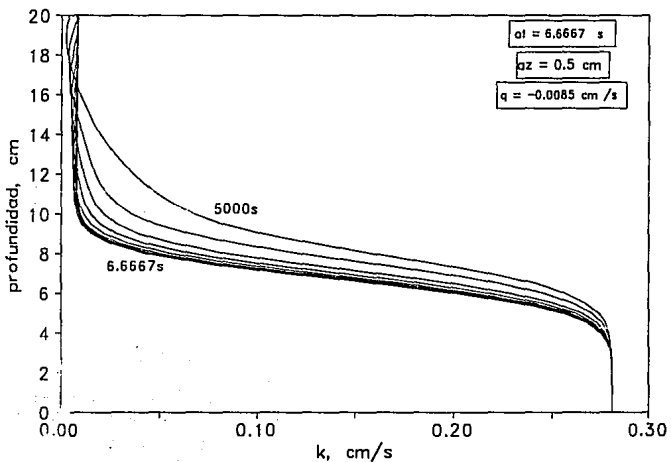
Gráfica 36 Carga de presión



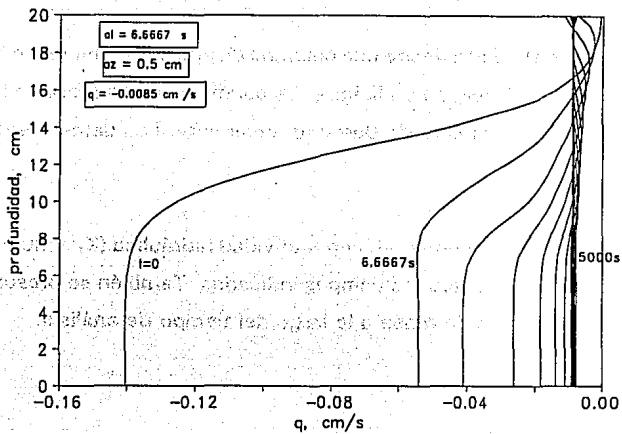
Gráfica 37 Contenido de humedad



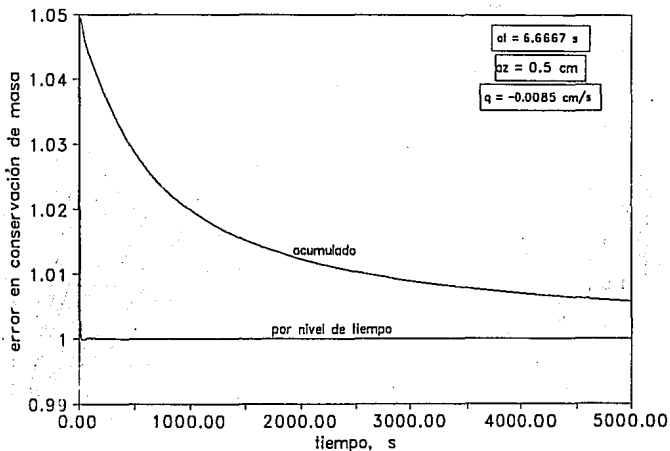
Gráfica 38 Conductividad hidráulica



Gráfica 39 Flujo de Darcy



Gráfica 40 Error en conservación de masa



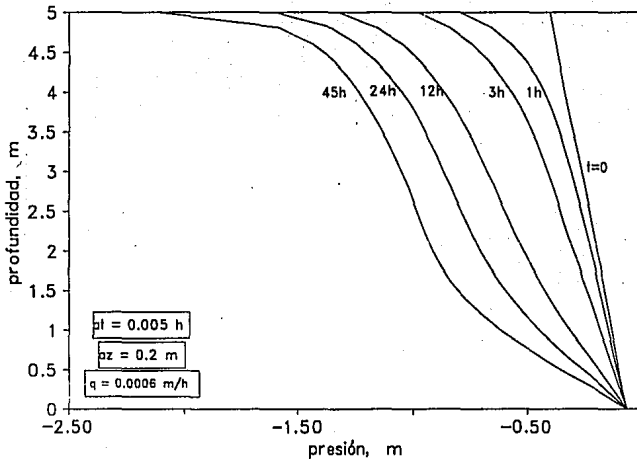
ESTADO DE GUATEMALA
 INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA
 Y CENSO

4.4 Ejemplo con evaporación en frontera superior

Aquí se simula evaporación desde una columna de suelo inicialmente húmeda con una condición fija de nivel freático en la base. La condición de frontera en la superficie se especifica a través de un flujo de Darcy (q) constante. Los datos fueron obtenidos de [Paniconi et al, 1991].

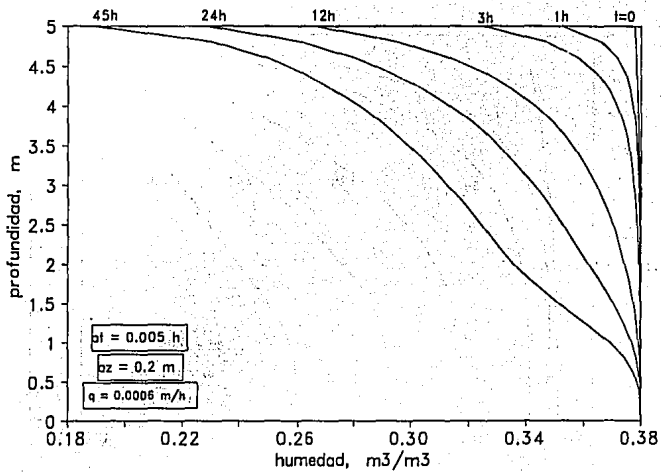
La presión, contenido de humedad, conductividad hidráulica (K) y flujo de agua (q) se muestran en las gráficas para los tiempos indicados. También se presenta la curva de error en la conservación de masa a largo del tiempo de análisis.

Gráfica 41 Carga de presión

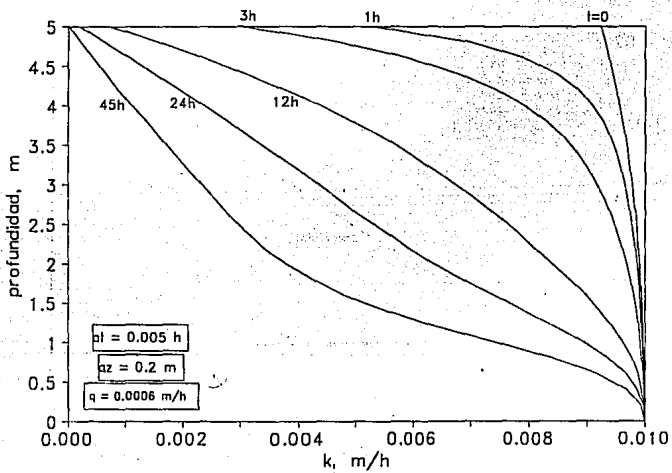


ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

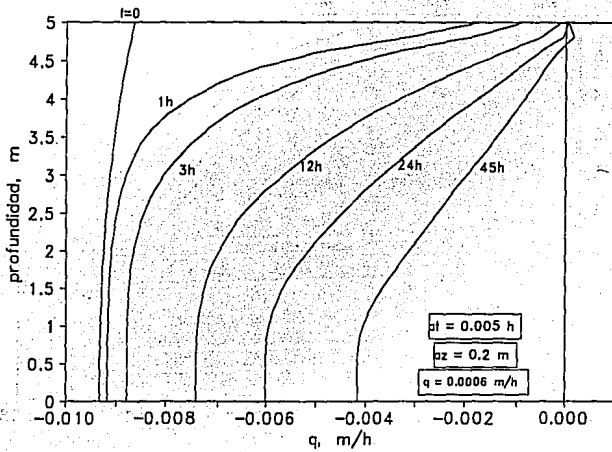
Gráfica 42 Contenido de humedad



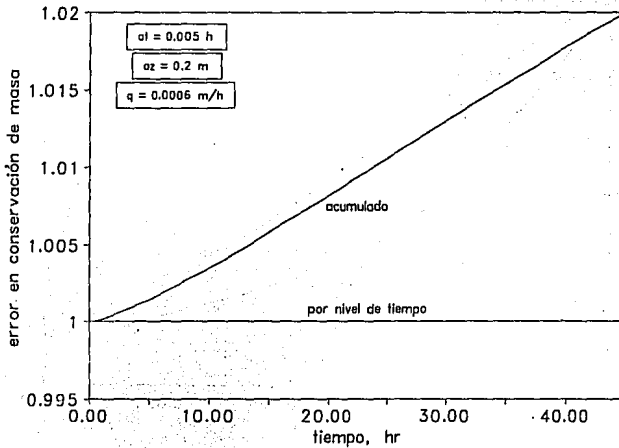
Gráfica 43 Conductividad hidráulica



Gráfica 44 Flujo de Darcy



Gráfica 45 Error en conservación de masa



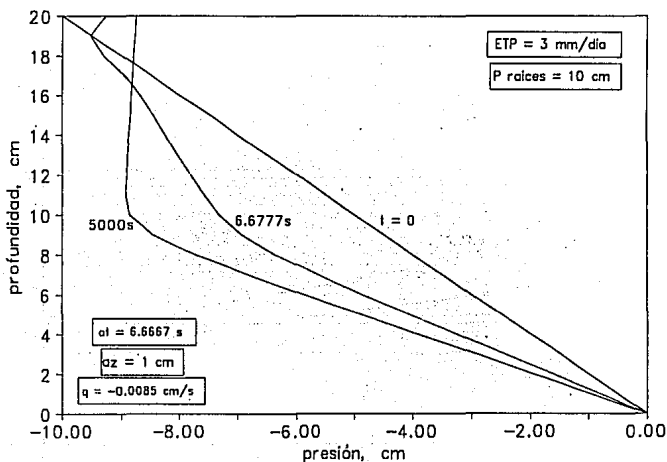
4.5 Ejemplo con influencia de raíces

Este ejemplo es similar al ejemplo 4.3 con la salvedad de que se ha introducido influencia de raíces a lo largo de 10 cm de profundidad. Se emplean las mismas condiciones del ejemplo 4.3 con el fin de apreciar que el modelo numérico responde a la incorporación de una nueva variable como es la presencia de raíces.

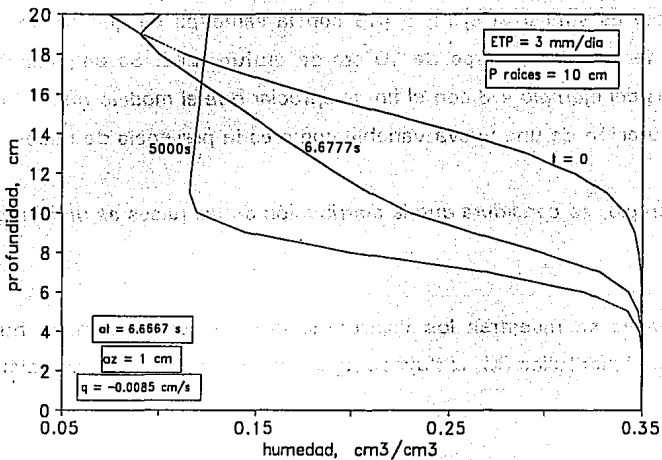
En este ejemplo, se considera que la distribución de las raíces es uniforme en los 10 cm.

En las gráficas se muestran los valores de la carga de presión, la humedad, la conductividad hidráulica (K), el flujo de agua (q) y el error en conservación de masa.

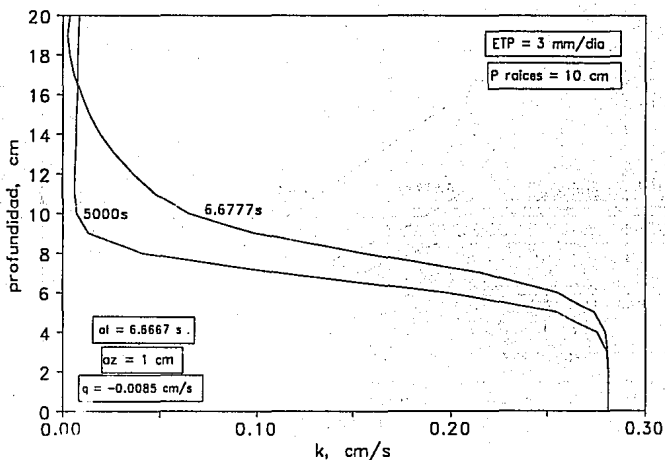
Gráfica 46 Carga de presión



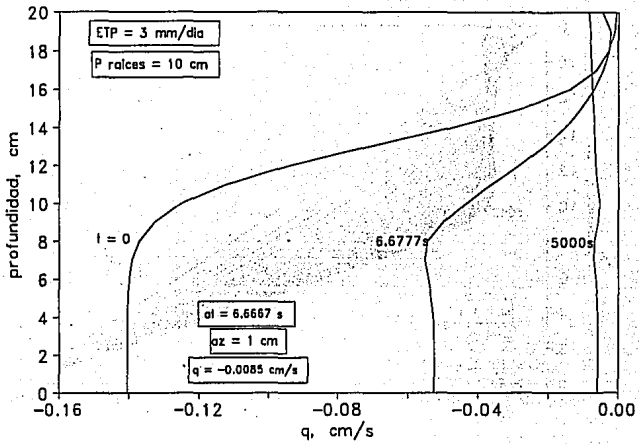
Gráfica 47 Contenido de humedad



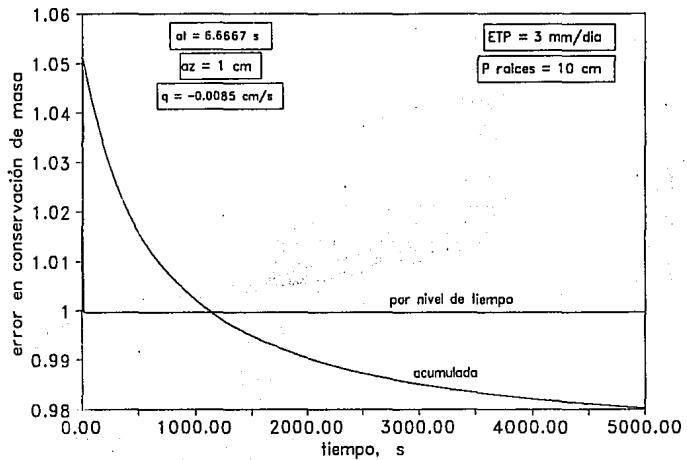
Gráfica 48 Conductividad hidráulica



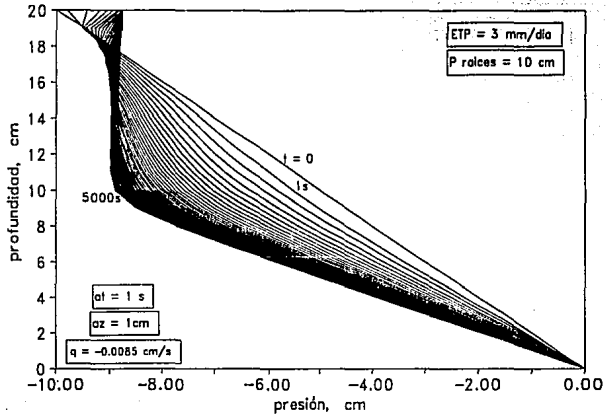
Gráfica 49 Flujo de Darcy



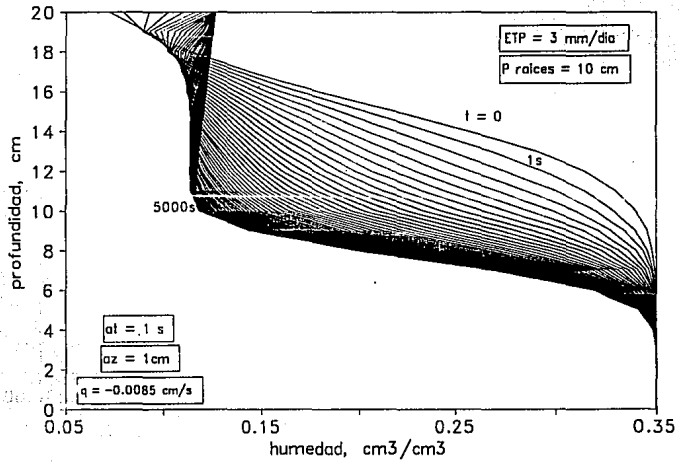
Gráfica 50 Error en conservación de masa



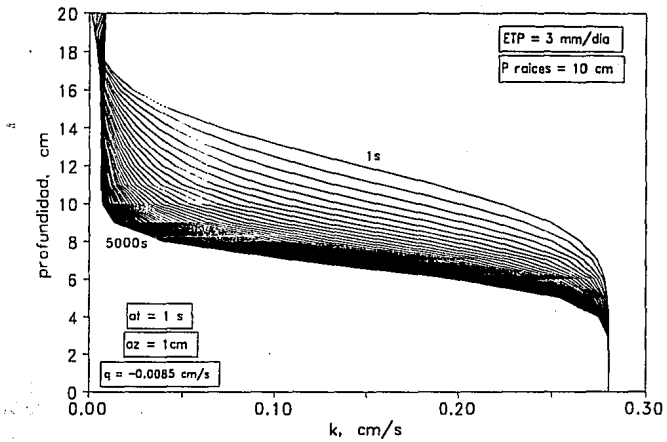
Gráfica 51 Carga de presión



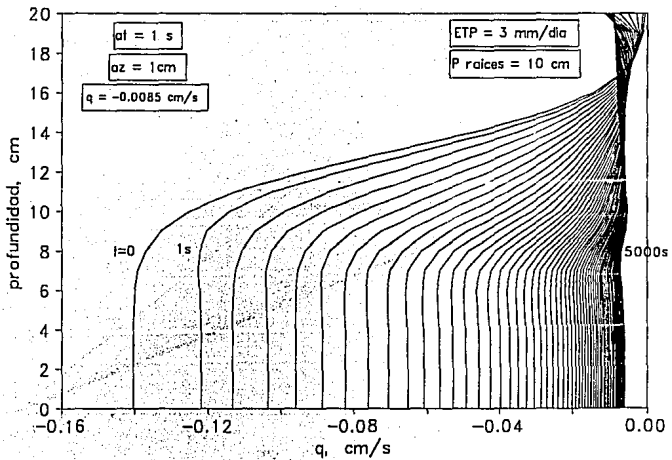
Gráfica 52 Contenido de humedad



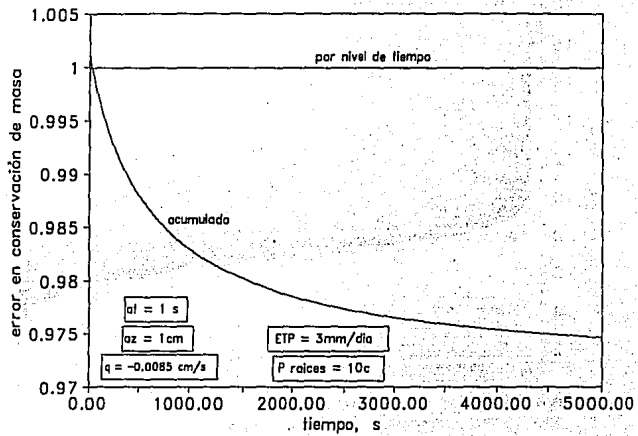
Gráfica 53 Conductividad hidráulica



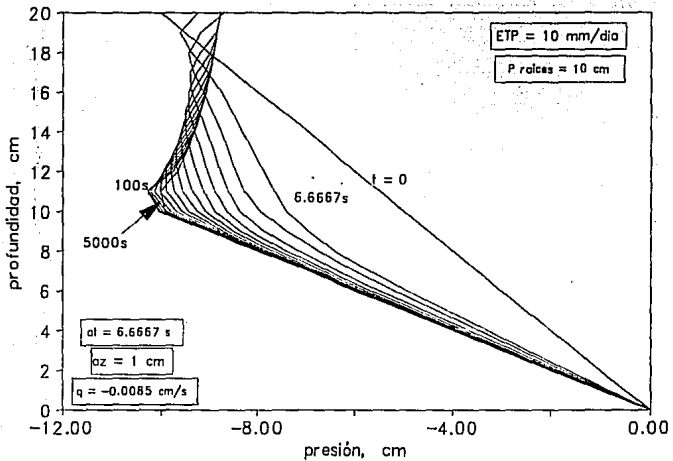
Gráfica 54 Flujo de Darcy



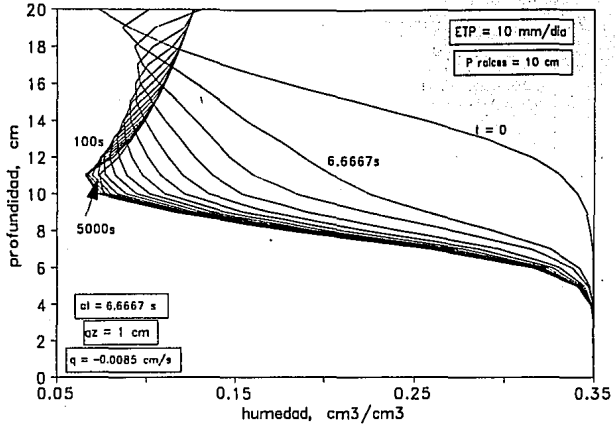
Gráfica 55 Error en conservación de masa



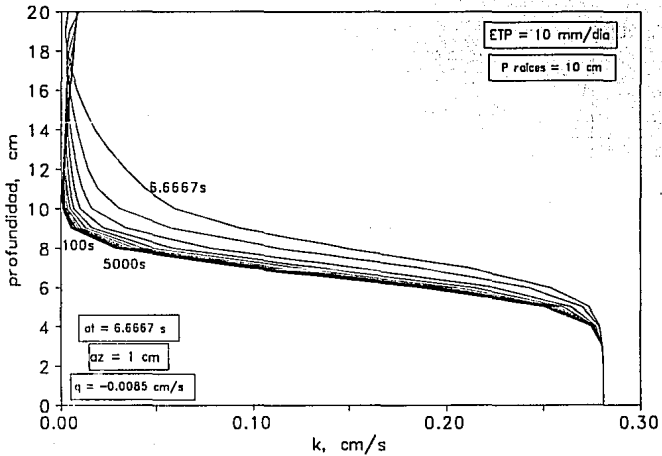
Gráfica 56 Carga de presión



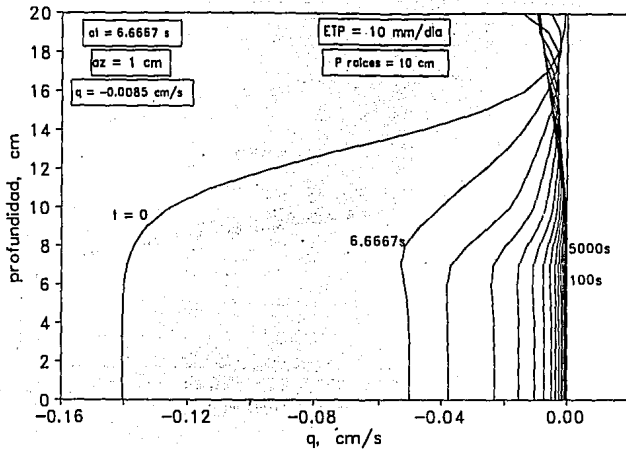
Gráfica 57 Contenido de humedad



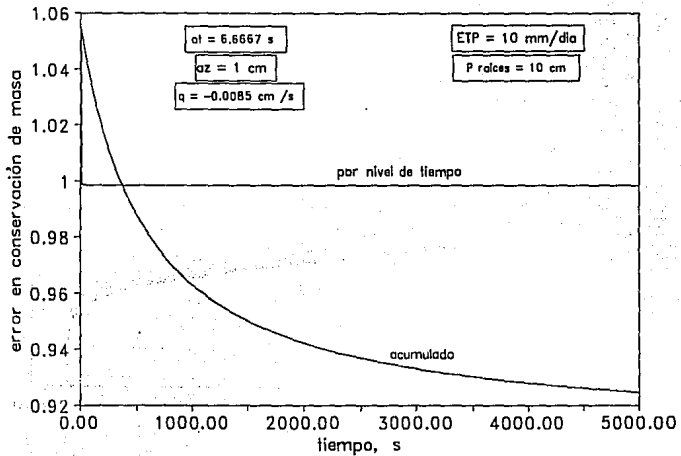
Gráfica 58 Conductividad hidráulica



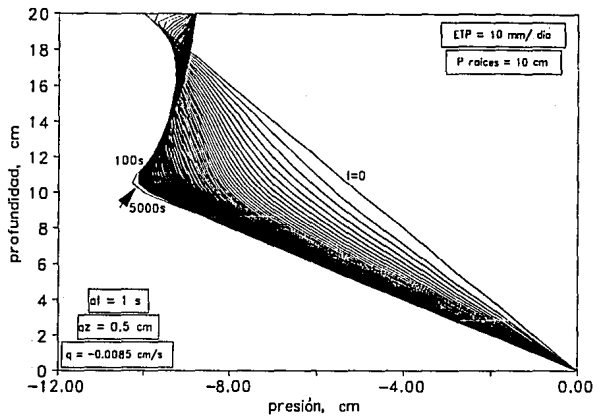
Gráfica 59 Flujo de Darcy



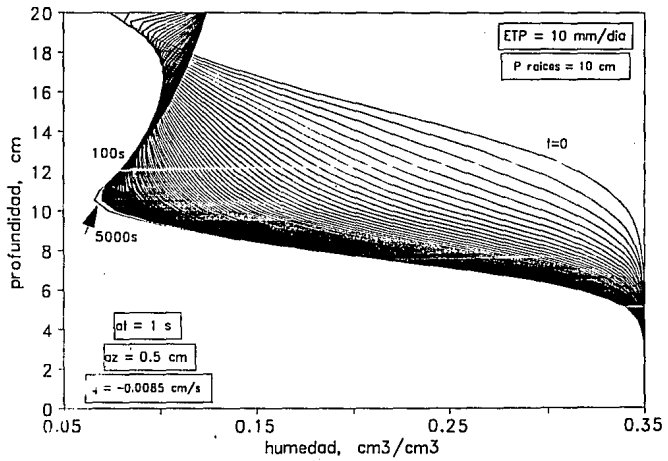
Gráfica 60 Error en conservación de masa



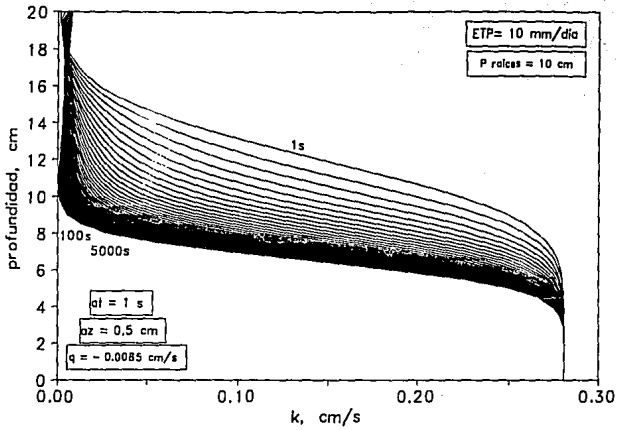
Gráfica 61 Carga de presión



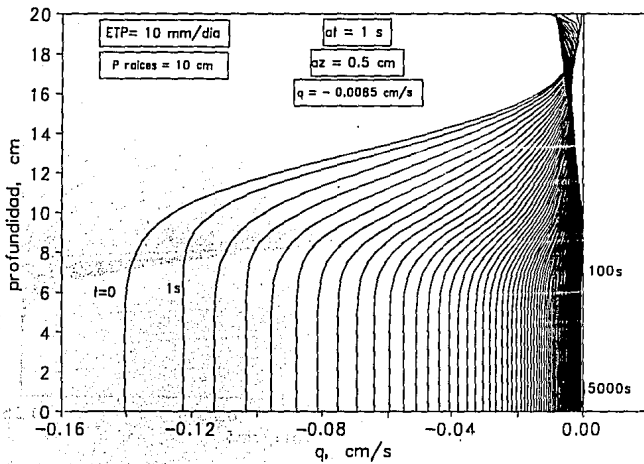
Gráfica 62 Contenido de humedad



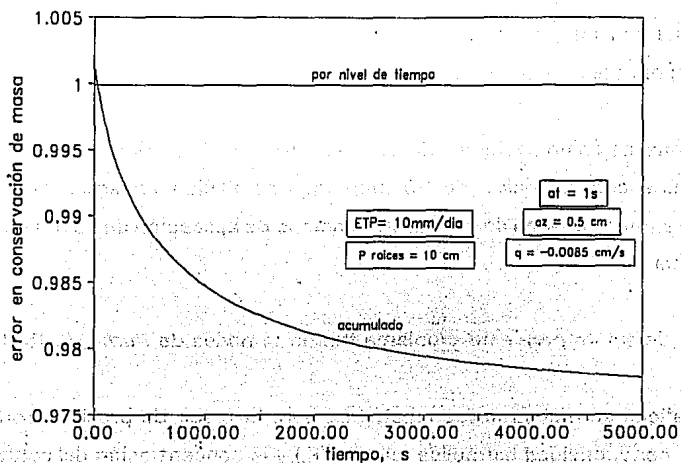
Gráfica 63 Conductividad hidráulica



Gráfica 64 Flujo de Darcy



Gráfica 65 Error en conservación de masa



4.6 Ejemplo con transporte de solutos

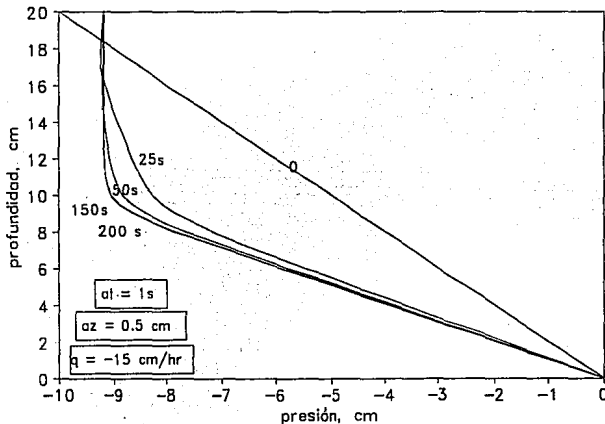
El problema consiste en conocer el transporte del agua y de un soluto dado, en un perfil de suelo bajo cierta intensidad de infiltración.

El suelo consiste en una columna de 20 cm de profundidad, sobre el que se agregó un soluto a una concentración de 50 ppm (mg/ml) diluido en agua infiltrada en la superficie a una velocidad de 15 cm/hr. El tiempo de aplicación de soluto corresponde a 50s y 80s.

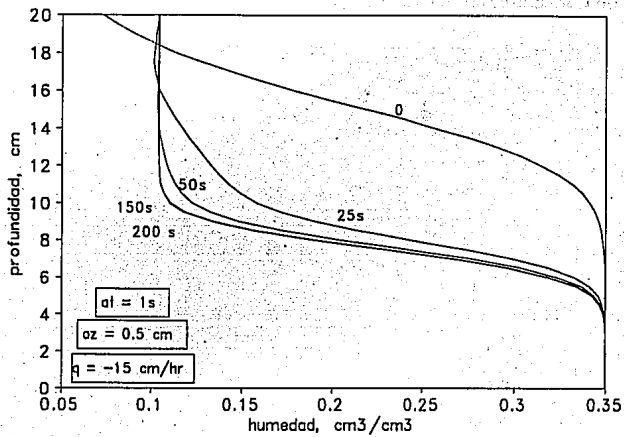
Los datos de soluto para este problema fueron tomados de *Iturbe*, (1986).

En las gráficas se muestran los resultados para la carga de presión, contenido de humedad, conductividad hidráulica relativa (K_r) y la concentración del soluto para los tiempos indicados.

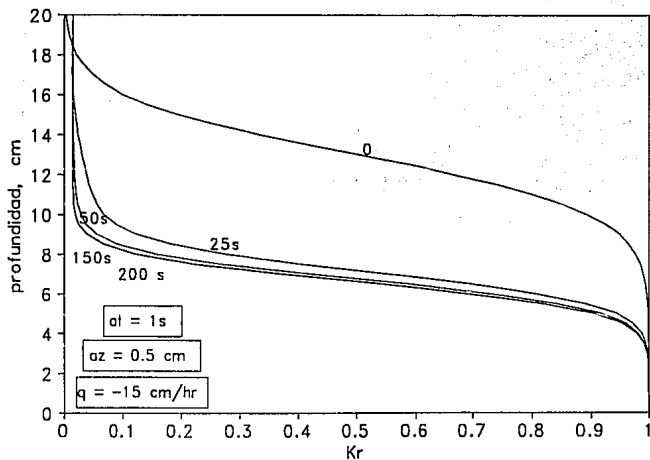
Gráfica 66 Carga de presión



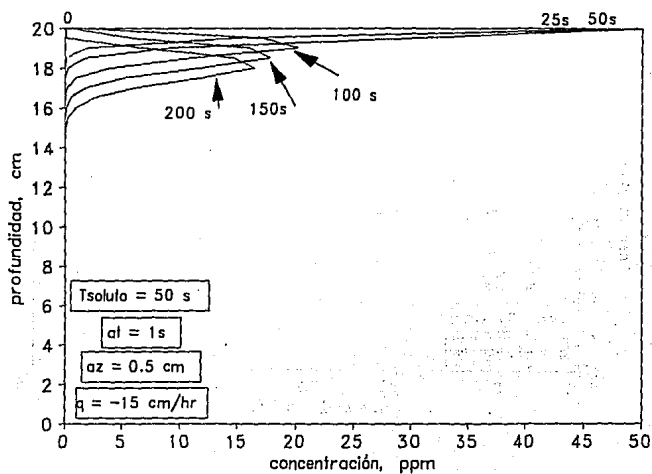
Gráfica 67 Contenido de humedad



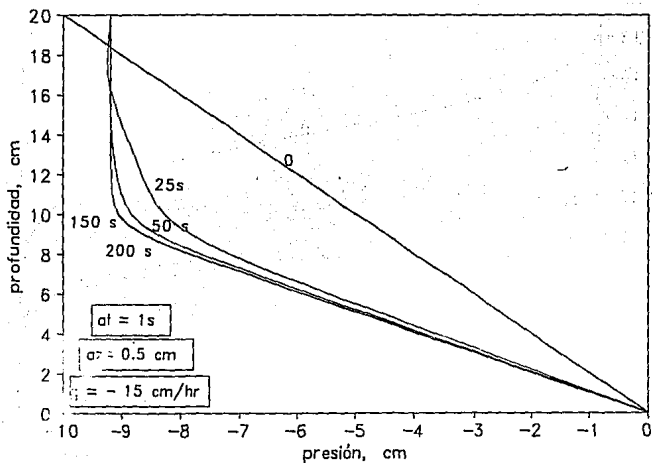
Gráfica 68 Conductividad hidráulica relativa



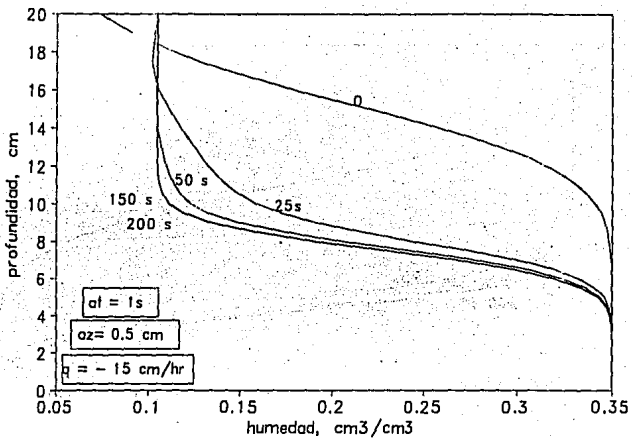
Gráfica 69 Concentración del soluto, $T_{\text{soluto}} = 50\text{s}$



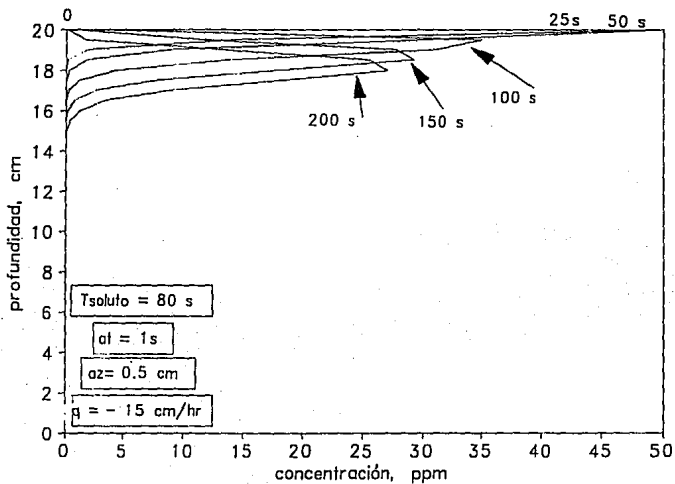
Gráfica 70 Carga de presión



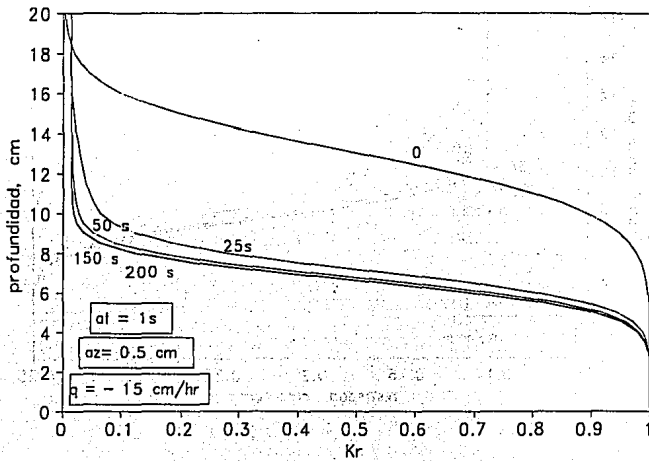
Gráfica 71 Contenido de humedad



Gráfica 72 Concentración del soluto, $T_{\text{soluto}} = 80$ s



Gráfica 73 Conductividad hidráulica relativa

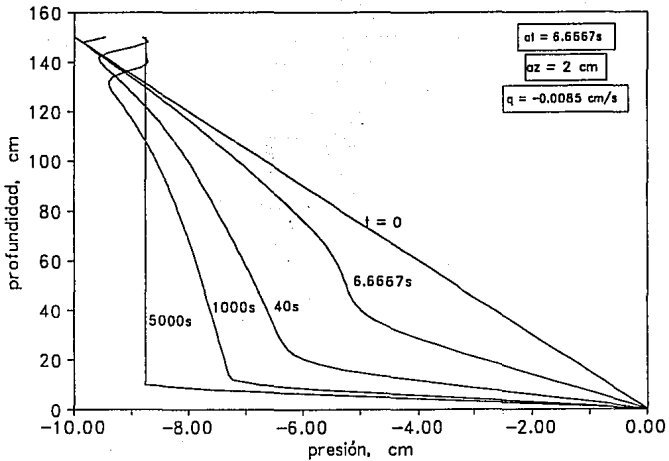


4.7 Ejemplo para un suelo con condiciones agrícolas

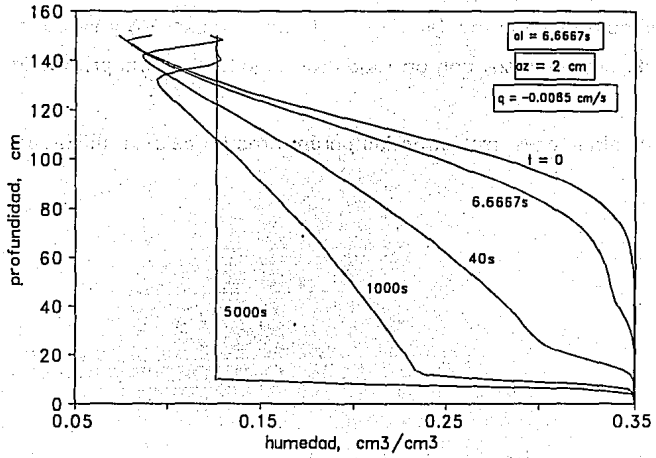
En este ejemplo se usan los datos de suelo del ejemplo 4.3 y se considera un suelo de 1.5 m de profundidad, con un tubo dren colocado a esta profundidad.

Las gráficas siguientes, muestran los parámetros de cálculo utilizados.

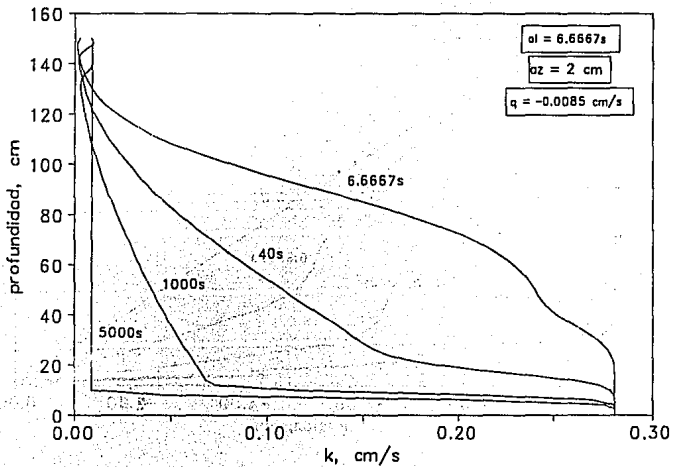
Gráfica 74 Carga de presión



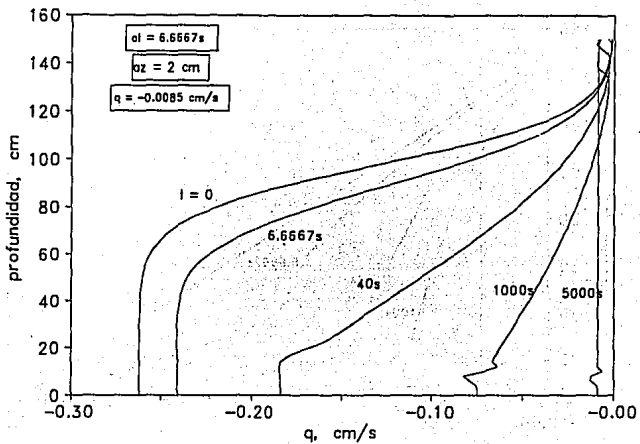
Gráfica 75 Contenido de humedad



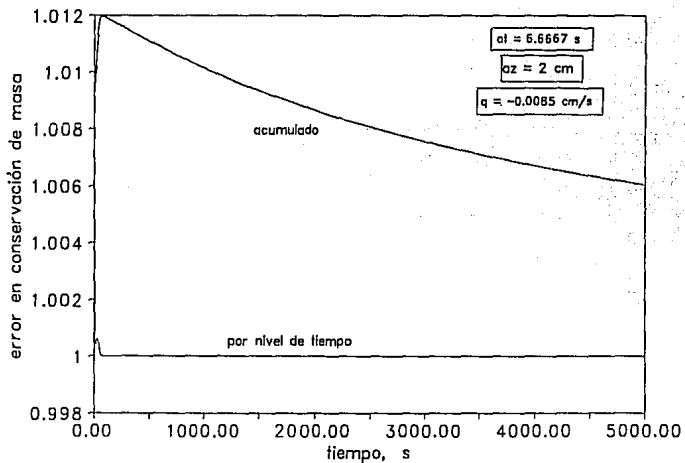
Gráfica 76 Conductividad hidráulica



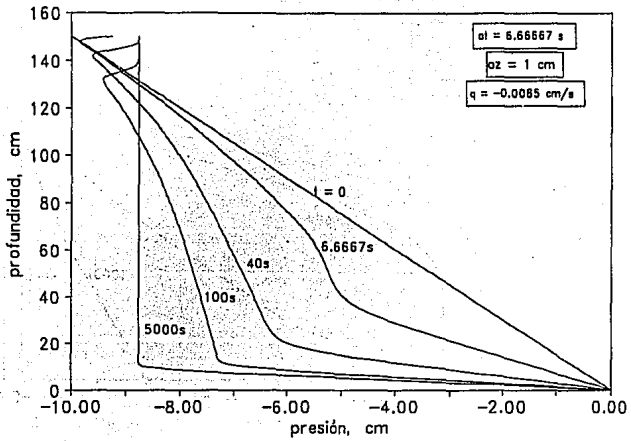
Gráfica 77 Flujo de Darcy



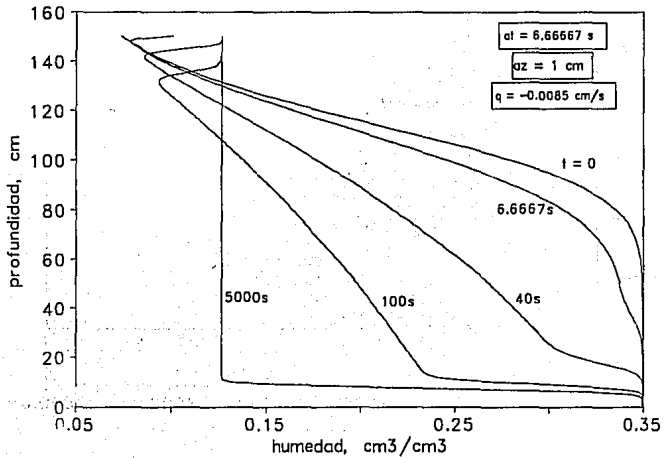
Gráfica 78 Error en conservación de masa



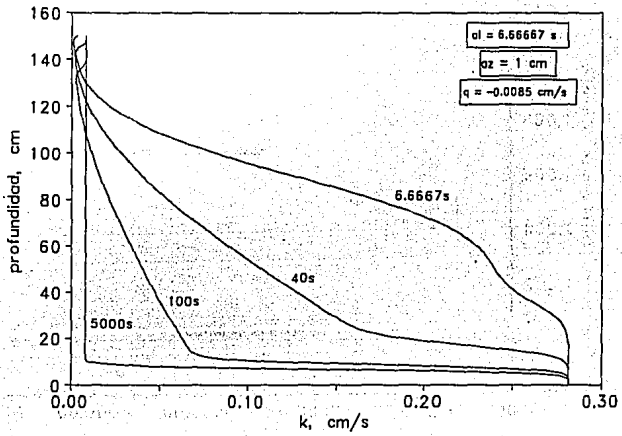
Gráfica 79 Carga de presión



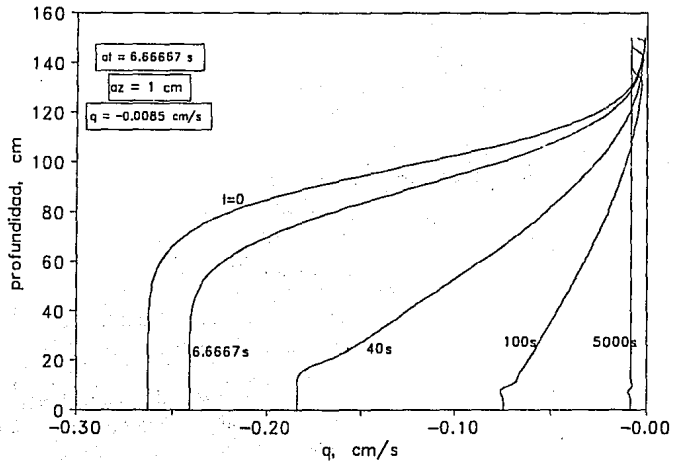
Gráfica 80 Contenido de humedad



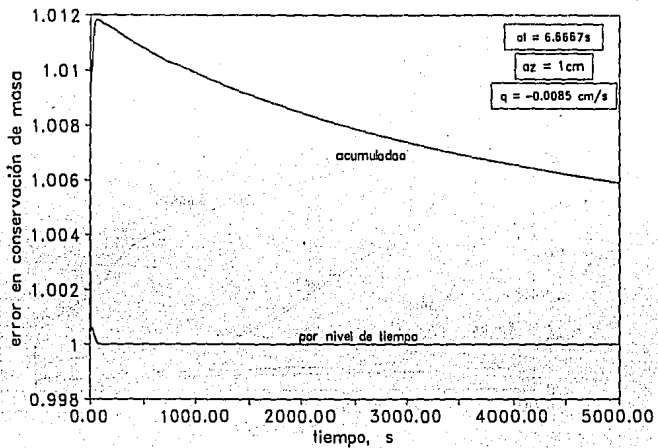
Gráfica 81 Conductividad hidráulica



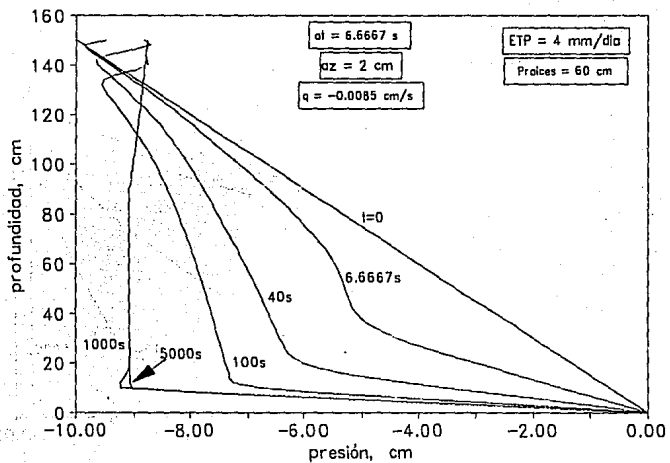
Gráfica 82 Flujo de Darcy



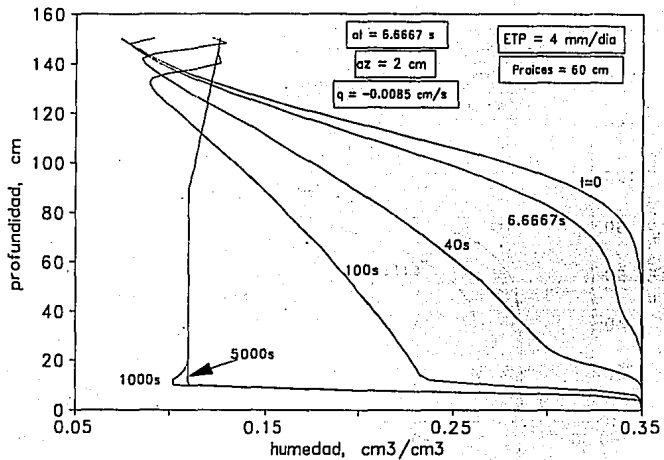
Gráfica 83 Error en conservación de masa



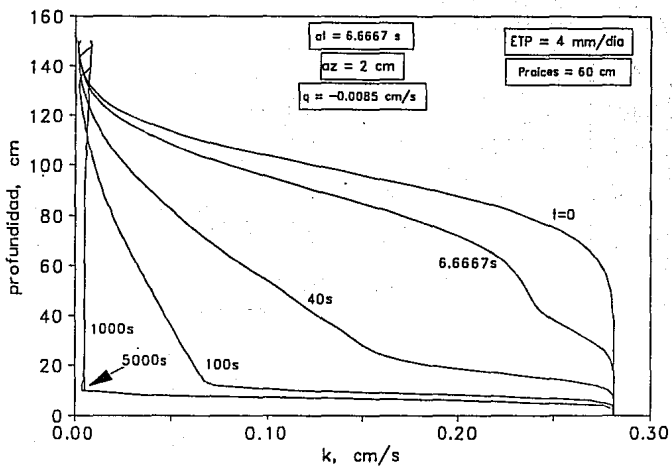
Gráfica 84 Carga de presión



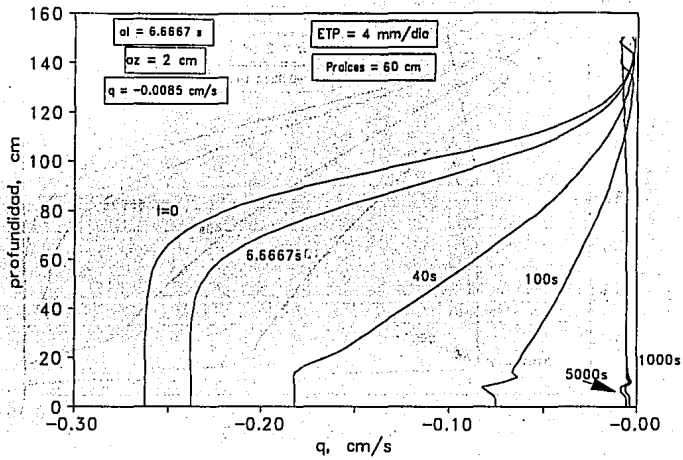
Gráfica 85 Contenido de humedad



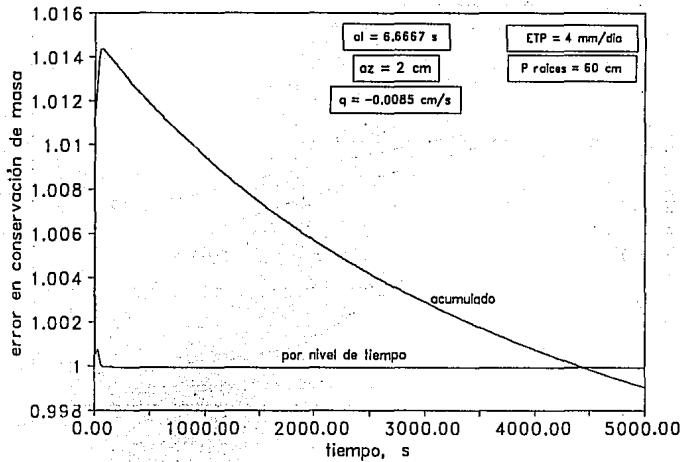
Gráfica 86 Conductividad hidráulica



Gráfica 88 Flujo de Darcy



Gráfica 88 Error en conservación de masa

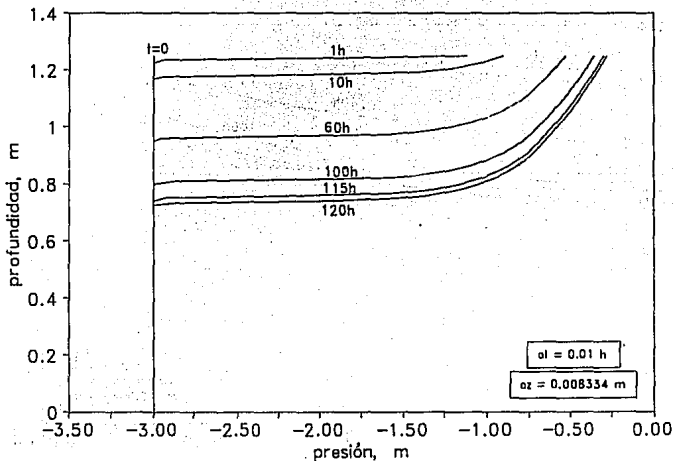


4.8 Ejemplo para un suelo uniformemente seco

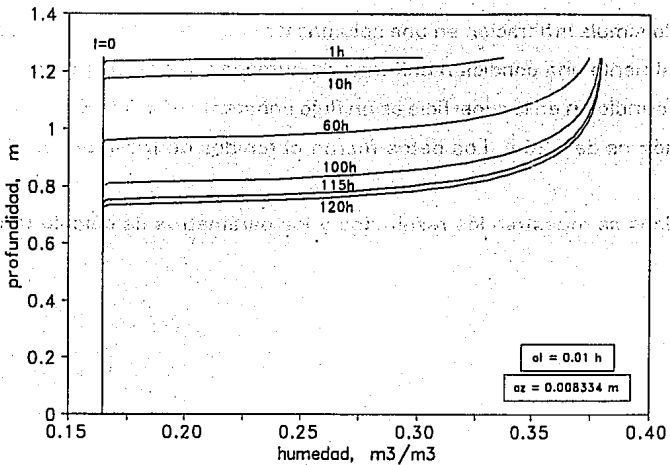
Este ejemplo simula infiltración en una columna de suelo de 1.25 m de altura en la que existe inicialmente una condición uniforme de humedad que corresponde a una carga $\psi = -3\text{m}$, la condición en la superficie es un flujo constante ($q = 0.0008\text{ m/h}$). El tiempo de simulación es de 120 h. Los datos fueron obtenidos de [Paniconi et al, 1991].

En las gráficas se muestran los resultados y los parámetros de cálculo utilizados.

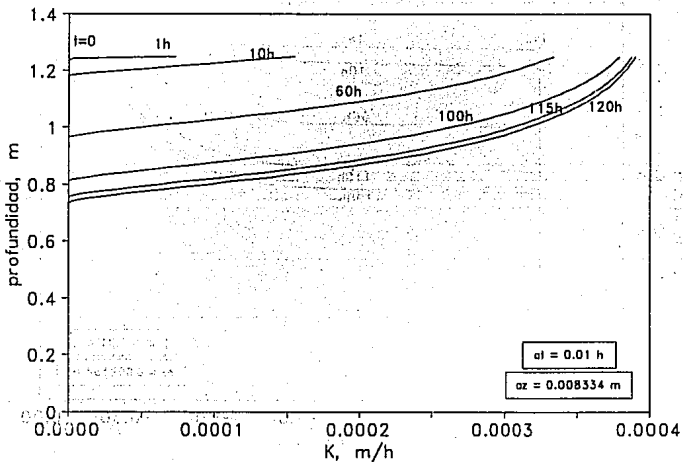
Gráfica 89 Carga de presión



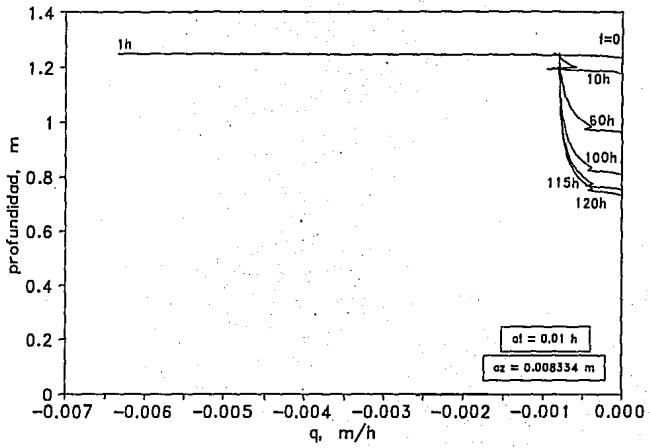
Gráfica 90 Contenido de humedad



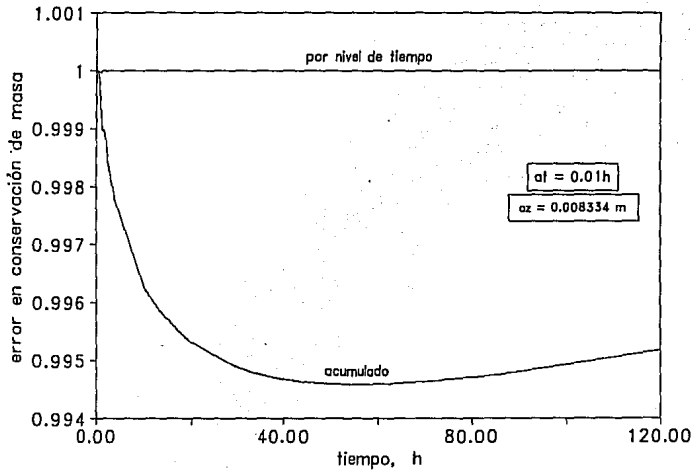
Gráfica 91 Conductividad hidráulica



Gráfica 92 Flujo de Darcy



Gráfica 93 Error en conservación de masa



ANALISIS DE RESULTADOS

En todos los ejemplos que se analizan en este trabajo, se usaron factores de peso en el espacio y tiempo de 0.5 ya que como se demuestra en el anexo 1, con este valor se obtiene el mínimo error de truncado.

En el análisis de estabilidad se consideran como constantes representativas (ψ_0 , S_0 , K_0), al valor de la carga de presión, correspondiente a la mitad del rango total de variación del tiempo analizado.

Para los cálculos se utilizó una computadora 486DX a 40 MHz.

El ejemplo 4.1 es un problema tipo Dirichlet [Aldama, et al] donde la condición en la frontera superior es mantener una carga fija de presión $\psi = -10$ cm y en la base de $\psi = 0$, correspondiente a un estado de saturación del suelo debido a la presencia de un nivel freático. La condición inicial es una condición hidrostática de presiones. Se

muestran las gráficas correspondientes a dos cálculos, en donde $\Delta z = 0.5$ cm se mantiene fijo y el Δt se ha variado de $\Delta t = 6.667$ s para el primer ejemplo, a $\Delta t = 1$ s en el segundo.

Las gráficas del 1 al 10 indican que el esquema es estable para todo el tiempo de análisis en los dos cálculos; sin embargo, al comparar los resultados en los valores de la carga de presión (gráficas 1 y 6), se observa que a la mitad de la columna (10 cm) existen inconsistencias que desaparecen a medida que transcurre el tiempo, llegando al final del análisis a la misma solución que corresponden a una condición permanente. Ahora, si se comparan los resultados de la carga de presión con los de la citada referencia, se obtienen los mismos resultados indicando desde este punto de vista la validez del modelo.

Las inconsistencias encontradas se deben a que utilizando un $\Delta t = 6.667$ s se cometen fuertes errores de precisión para los tiempos iniciales que disminuyen cuando el fenómeno se hace permanente. Observando las gráficas de gastos (gráficas 4 y 9), estos errores se hacen más significativos ya que esta variable al depender del gradiente de presiones y la conductividad hidráulica (Ley de Darcy), absorbe ahora, errores de redondeo, es decir, si de nuevo se observan las gráficas de presiones (gráficas 1 y 6), se ve que la carga de presión tiende a una línea a 45° , indicando con esto, que el potencial mátrico se equilibra con el potencial de la fuerza de gravedad y que físicamente se manifestará, para un tiempo infinito, como una condición de "no flujo". La fuerte influencia de errores de redondeo y discretización para este problema de redistribución, se manifiesta considerablemente en las gráficas que muestran los errores en la conservación de masa (gráficas 5 y 10), donde al final del análisis el error es alrededor del 46%.

Desde el punto de vista de precisión, ninguno de los dos cálculos cumple con las condiciones de la expresión (101) ya que para el primer ejemplo son : ($\lambda = 481.03$, $C_r = 5.58$, $P = 0.0116$); y para el segundo: ($\lambda = 72.15$, $C_r = 0.8373$, $P = 0.0116$). Las

constantes representativas para ambos cálculos fueron: ($\psi_0 = -5 \text{ cm}$, $K_0 = 0.2505 \text{ cm/s}$, $S_0 = 0.01387 \text{ cm}^{-1}$, $\alpha_0 = 0.02321 \text{ cm}^{-1}$)

El tiempo de máquina utilizado para el primer cálculo ($\Delta t = 6.667\text{s}$, $T_{\text{max}} = 5000\text{s}$) fue aproximadamente de 28 minutos y para el segundo cálculo ($\Delta t = 1\text{s}$, $T_{\text{max}} = 5000\text{s}$) fue alrededor de 2 horas.

El ejemplo 4.2 es un ejemplo más interesante desde el punto de vista práctico ya que se analiza infiltración y redistribución simultánea. Aquí la columna de suelo parte de una condición inicial en donde existe una distribución hidrostática de presiones. La condición en la base es la presencia de un nivel freático fijo permitiendo flujo de humedad a través de ella. La condición en la frontera superior es suministrada a través de un flujo de Darcy que varía linealmente con el tiempo.

Para este ejemplo se han hecho tres cálculos, el primero con $\Delta t = 0.005\text{h}$, $\Delta z = 0.2\text{m}$, el segundo con $\Delta t = 0.005\text{h}$, $\Delta z = 0.4\text{m}$ y el tercero con $\Delta t = 0.01\text{h}$, $\Delta z = 0.4\text{m}$. En los dos primeros se ha usado el mismo Δt que el caso 2 de *Paniconi* (1991), y para el tercero se usó un Δt del doble. Respecto al Δz , en el primer cálculo se usó un valor del doble y para el segundo y tercero un valor cuatro veces mayor.

Sobreponiendo los valores de la carga de presión (gráficas 11, 16 y 21) de los tres ejemplos con los de la citada referencia, se observan prácticamente los mismos resultados, asegurando así la validez del modelo. Si se observan ahora las gráficas del gasto (gráficas 14, 19 y 24), entre el cálculo 2 y 3 no existen diferencias en ningún momento y que comparadas con la gráfica del cálculo 1 aparecen pequeñas diferencias. De nuevo, se concluye que a pesar de que los errores de redondeo y discretización no influyen significativamente en las demás variables, en el cálculo del gasto llegan a ser considerables. En las gráficas de error en conservación de masa, esto se manifiesta en el error acumulado, en el primer cálculo (gráfica 15) se tiene un error acumulado máximo de 0.2% para 6 horas, mientras que para el cálculo 2 y 3

(gráficas 20 y 25) el error máximo acumulado es de 1.2% al final (32 horas).

Para este ejemplo los tres cálculos cumplen con las condiciones de precisión dadas por la expresión (101), es decir, para el primero se tiene: ($\lambda = 0.136$, $C_r = 0.025$, $P = 0.19$); en el segundo: ($\lambda = 0.034$, $C_r = 0.0129$, $P = 0.38$) y en el tercero: ($\lambda = 0.068$, $C_r = 0.0259$, $P = 0.38$). Las constantes representativas son: ($\psi_o = -5$ m, $K_o = 0.0419$ m/h, $S_o = 0.0384$ m⁻¹, $\alpha_g = 0.9559$ m⁻¹)

El tiempo de máquina para el primer cálculo fue de aproximadamente de 6 horas ,y para el segundo y tercero alrededor de 1 h 10 min. Desde el punto de vista práctico los pasos Δt y Δz del ejemplo 2 y 3 son los mejores ya que un error acumulado en conservación de masa de 1.2% se considera aceptable.

En el tercer ejemplo 4.3, se considera la misma columna de suelo que el ejemplo 4.1 variando únicamente en la condición de frontera superior, siendo en este caso, un flujo de Darcy constante $q = 0.0085$ cm/s en todo el tiempo de cálculo.

Los valores fueron comparados con el ejemplo 2 de [Aldama, et al], permitiendo de nuevo establecer la validez del esquema.

Aquí se hicieron 3 cálculos, el primero con $\Delta t = 6.667$ s, $\Delta z = 1$ cm; el segundo con $\Delta t = 1$ s, $\Delta z = 1$ cm y el tercero con $\Delta t = 20/3$ s, $\Delta z = 0.5$ cm. Los resultados son muy similares a los del ejemplo 4.1 con la diferencia que ahora la frontera superior se libera de acuerdo al gasto $q = 0.0085$ cm/s. Observando las gráficas de presión (gráficas 26, 31 y 36), de nuevo se presentan pequeñas inconsistencias debidas a que el $\Delta t = 6.667$ s comete errores de precisión para los primeros tiempos disminuyendo a medida que el fenómeno se hace permanente. Las gráficas del gasto (q) (gráficas 29 , 34 y 39) y de error en conservación de masa (gráficas 30, 35 y 40) demuestran que, a pesar de que los errores por redondeo y discretización no son tan fuertes como los del ejemplo 4.1, siguen influyendo. Para el primer cálculo se tiene un error máximo

en conservación de 5% al inicio del análisis, para el segundo, se tiene un error máximo de 0.12% también al inicio y para el tercero, el error es del 5% igual que el primero (como era de esperarse ya que se está usando el mismo Δt). Se observa también que el error se acota en un valor pequeño a medida que avanza el cálculo, esto es debido a que el fenómeno se hace permanente originando que el gasto sea uniforme a lo largo de la columna e igual a 0.0085 cm/s como lo señalan las gráficas del flujo (q) (gráficas 29, 34 y 39). También se observa que la curva de error en conservación de masa por nivel de tiempo para el cálculo 1 y 3 (gráficas 30 y 40), presenta pequeñas protuberancias a lo largo del tiempo, no ocurriendo así para el cálculo 2 (gráfica 35) que presenta continuidad en todo tiempo, salvo los primeros segundos de análisis.

Al igual que en el ejemplo 4.1, en este ejemplo tampoco ninguno de los tres cálculos cumple con los requisitos de precisión. Para el primer ejemplo se tiene: ($\lambda = 120.25$, $C_r = 2.79$, $P = 0.02321$); en el segundo: ($\lambda = 18.03$, $C_r = 0.418$, $P = 0.02321$); y en el tercero: ($\lambda = 481.03$, $C_r = 5.58$, $P = 0.0116$). Las constantes representativas son: ($\psi_0 = -5$ cm, $K_0 = 0.2502$ cm/s, $S_0 = 0.01387$ cm⁻¹, $\alpha_0 = 0.02321$ cm⁻¹).

El tiempo de máquina para el cálculo 1 fue de 13 min., para el segundo de 1 hora y para el tercero de 37 min.

El ejemplo 4.4 simula evaporación desde una columna de suelo inicialmente húmeda con una carga de presión fija en la base. La condición de frontera en la superficie de suelo se da a través de un flujo de Darcy constante en el tiempo.

Los datos fueron obtenidos del caso 3 de *Paniconi*, (1991). Al comparar resultados de la carga de presión (gráfica 41) se observa que hay diferencias a partir del tiempo de 12h, sin embargo estas diferencias se suponen sean debidas a las condición inicial de la que se parte, ya que, para este ejemplo, fueron obtenidas a partir de forma gráfica. El Δt usado es el mismo que el de la citada referencia y el Δz es cuatro veces mayor.

Las gráficas de gasto (q) (gráfica 44) y de error en conservación de masa (gráfica 45) sugieren de nuevo que los errores de redondeo y discretización siguen influyendo, aunque al final del análisis el error es aceptable (2%), la gráfica tiende a crecer.

Para este ejemplo, las condiciones de precisión si cumplen con las relaciones de la expresión (101), es decir, ($\lambda=0.00208$, $C_r=5.30 \times 10^{-4}$, $P=0.25$). Las constantes representativas son: ($\psi_o=-1$ m, $K_o=2.79 \times 10^{-3}$ m/h, $S_o=0.167$ m⁻¹, $\alpha_g=1.27$ m⁻¹).

Para el ejemplo 4.5 se usan los datos y condiciones de frontera del ejemplo 4.3, esto con la finalidad de observar que el esquema responde al término de extracción de humedad.

Se han realizado 4 cálculos: el primero con $\Delta t=6.667$ s, $\Delta z=1$ cm, ETP=3mm/día; el segundo con $\Delta t=1$ s, $\Delta z=1$ cm, ETP=3mm/día; el tercero con $\Delta t=20/3$ s, $\Delta z=1$ cm, ETP=10mm/día y el cuarto con $\Delta t=1$ s, $\Delta z=0.5$ cm, ETP=10mm/día ; en todos ellos se considera una profundidad de raíces de 10 cm con distribución uniforme.

Obsérvese que en primera instancia, el esquema parece responder bien a la presencia de un término de extracción. Sin embargo, estos valores no han sido validados por lo que se deben tomar con cierta reserva.

En las gráficas de flujo para una ETP=10mm/día (gráfica 59) se observa que en los 8 cm de suelo del lado del nivel freático, el valor de q casi es nulo, y así lo demuestra la gráfica de cargas de presión que toma una inclinación de 45° (gráfica 56). En el caso de ETP=3 mm/día (gráfica 54) el flujo después de la zona de raíces aún es considerable debido a que las extracciones no son tan fuertes como en ese caso.

Las gráficas de error en conservación de masa muestran que los errores de redondeo y discretización aún siguen influyendo, sin embargo para los casos en que $\Delta t=1$ s

(gráfica 55) se tienen errores del 2.5 % que resultan aceptables desde el punto de vista práctico. Cuando se usa $\Delta t = 6.667s$ (gráficas 50 y 60) se tienen errores entre el 5% y 8% que ya se consideran significativos, por lo que un Δt arriba de este valor no se considera recomendable.

Respecto a las condiciones de precisión, este ejemplo tiene las mismas condiciones de precisión del ejemplo 4.1 y 4.3.

El tiempo de máquina para el primer cálculo fue de 18 min., para el segundo de 1 h 38 min, para el tercero de 22 min y para el cuarto de 3h 28min.

El ejemplo 4.6 es un problema con transporte de solutos en un suelo. Aquí de nuevo se han usado los mismos parámetros de suelo del problema 4.3, los datos de soluto fueron tomados de *Iturbe*, (1986).

El problema consiste en una columna de suelo de 20 cm de altura, sobre la cual se agrega un soluto a una concentración de 50 $\mu g/ml$ diluido en agua infiltrada a una velocidad de 15 cm/hr.

La concentración se aplica en la superficie del suelo durante un tiempo T_{soluto} , el cual puede variar, y un flujo de agua se mantiene durante todo el tiempo en la superficie del suelo.

Fueron realizados dos cálculos variando únicamente el T_{soluto} , el primero es para 50s, y el segundo para 80s.

Obsérvese en las gráficas la influencia del tiempo de aplicación del soluto. Para un $T_{soluto} = 50s$ para una profundidad de 2cm y un tiempo de 200s (gráfica 69) el máximo de concentración de soluto en el suelo es de 16, mientras que para un $T_{soluto} = 80s$, para las mismas coordenadas (gráfica 72), el máximo es de 27.

Estos valores no han sido validados hasta ahora, por lo que se deben de tomar con cierta reserva.

Para este ejemplo las curvas de gasto (q), de error en conservación de masa y las condiciones de precisión no se dan, debido a que son iguales a las del ejemplo 4.3.

El ejemplo 4.7 considera un espesor de suelo de 1.5m, que es por lo general, la profundidad que en la práctica interesa estudiar ya que es en donde se desarrollan las raíces de los cultivos. Los problemas fueron analizados considerando un suelo sin raíces, y uno donde se supone una profundidad de raíces de 60 cm, uniformemente distribuidas, la evapotranspiración usada para este caso fue de 4 mm/día. Comparando las gráficas para los dos datos, se observa muy poca influencia de las raíces para los tiempos cortos, pero a medida que se avanza en el tiempo, su influencia parece ser considerable.

En este ejemplo se hicieron 3 cálculos: uno con $\Delta t = 6.667s$, $\Delta z = 2$ cm; en el segundo con $\Delta t = 20/3s$, $\Delta z = 1$ cm ; y para el tercero un $\Delta t = 20/3s$, $\Delta z = 2$ cm; en los tres casos se consideran los mismos datos y condiciones de frontera que el ejemplo 4.3, con la salvedad que para el tercer ejemplo se considera la presencia de raíces de 60 cm de profundidad uniformemente distribuida.

Se observa en la gráficas de gasto (gráficas 77, 82 y 87), pequeñas inestabilidades debidas a un cambio brusco en la curvas de presión. Sin embargo, esto no parece influenciar mucho en la curva de errores ya que a lo mucho se tiene un error máximo del 1.2% para los cálculos 1 y 2 (gráficas 78 y 83) y del 1.4% para el tercero (gráfica 88). Una cosa importante a observar es que un Δt mayor a 6.667s pudiera aun ser aceptable en este problema, contrariamente a lo que se dijo en el ejemplo 4.5. De nuevo, las condiciones de precisión corresponden a las del ejemplo 4.3

Los tiempos de máquina para estos cálculos fueron de 49 min para el primero, de 3h

54 min para el segundo, y para el tercero de 1 h 2 min.

En el último ejemplo 4.8 se considera una columna de suelo uniformemente seca de 1.25 m de altura en la que hay un flujo de Darcy constante ($q=0.0008$ m/h) en la frontera superior.

Esta clase de problemas con suelos inicialmente secos resulta interesante, por el hecho de considerar mallas muy espesas que requieren tiempos de cómputo grandes.

Para este ejemplo se utilizó un $\Delta t=0.01$ h y un $\Delta z=0.008334$ m, el paso en el tiempo corresponde al utilizado en *Paniconi*, (1991) y el Δz al doble del utilizado en la misma referencia.

Al comparar los resultados obtenidos por el modelo y los mostrados por *Paniconi*, (1991) no se notan diferencias numéricas, excepto que la referencia reporta pequeñas oscilaciones en el frente húmedo. A manera de paréntesis conviene comentar que en *Celia*, (1990) también reportan oscilaciones para problemas tipo Dirichlet cuando emplean la técnica de elemento finito para solucionar la ecuación de Richards.

Al observar las gráficas de resultados (gráficas de 89 a 93), se ve que las características en la superficie del suelo cambian rápidamente originando que el suelo empiece a mojarse muy lentamente hacia puntos más profundos. El flujo casi imperceptible en la superficie de la columna hace el fenómeno extremadamente lento originado que el frente de humedad avance casi 53 cm en 120 horas. La gráfica de gasto (gráfica 92) de nuevo muestra irregularidades a la altura del frente de avance debido al cambio brusco de presiones en esta zona. En la superficie de la columna las condiciones de flujo permanente se manifiestan desde el inicio del cálculo, avanzando hacia abajo a medida que el tiempo transcurre.

La gráfica de errores en conservación de masa (gráfica 93) muestra un error máximo

acumulado de casi 0.55% y que tiende a disminuir en el tiempo, el error por nivel de tiempo es nulo en todo el tiempo de análisis.

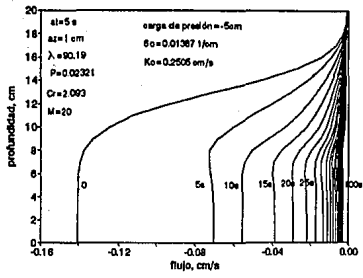
En este ejemplo, las condiciones de precisión si cumplen con las relaciones de la expresión (101), es decir, ($\lambda = 1.19 \times 10^{-4}$, $C_r = 2.26 \times 10^{-6}$, $P = 0.019$). Las constantes representativas son: ($\psi_0 = -1.5$ m, $K_0 = 1.29 \times 10^{-5}$ m/h, $S_0 = 0.129$ m⁻¹, $\alpha_0 = 2.28$ m⁻¹).

El tiempo de cálculo para este ejemplo fue de 13 horas.

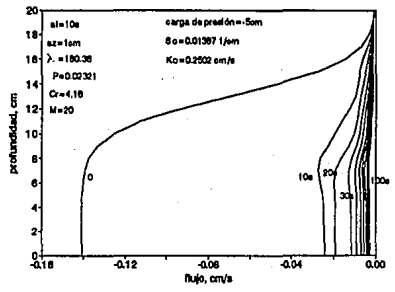
Como se mostró en los ejemplos anteriores, existen fuertes imprecisiones en los resultados utilizando los parámetros del ejemplo 4.1 debido a que no cumplen las condiciones de la expresión (101). Para mostrar bajo que condiciones se cumplen estas relaciones, se realizó un experimento numérico cuyos resultados se muestran en las gráficas 94, 95, 96, 97 y 98.

Las gráficas 94, 95, 96; fueron realizados sin cumplir con las condiciones de precisión de la expresión (101). Obsérvese como varían entre ellas el flujo para los mismos tiempos de análisis.

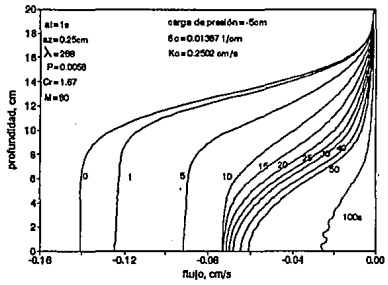
Las gráficas 97 y 98 fueron obtenidas cumpliendo con las condiciones de precisión de la expresión (101). En estas gráficas obsérvese que no existe ninguna variación del flujo entre ellas a lo largo del tiempo de análisis.



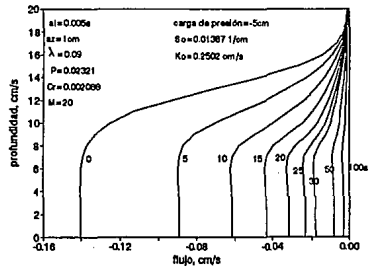
Gráfica 94 Resultados con una precisión baja.



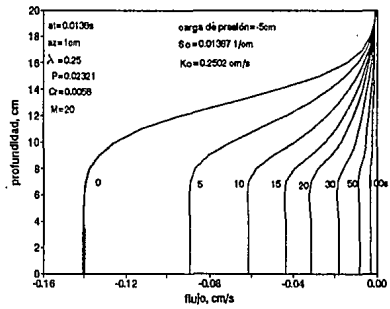
Gráfica 95 Resultados con una precisión baja.



Gráfica 96 Resultados con una precisión muy baja.



Gráfica 97 Resultados con una precisión alta.



Gráfica 98 Resultados con una precisión alta.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se presenta un esquema numérico para simular el movimiento del agua en un medio poroso, tomando en cuenta la influencia de raíces. Alternativamente se presenta otro esquema que predice el transporte de soluto en un suelo. Se considera, en general, que los resultados obtenidos son correctos y que el modelo es confiable; sin embargo, es deseable comparar los resultados del modelo con datos de campo reales que permitan dar una idea del grado de confianza de los resultados.

Se usa el método de interpolación integral para obtener el esquema en diferencias finitas del modelo matemático de Richards. Las integrales se evalúan expresándolas con factores de peso en sus extremos. El esquema así obtenido, es un esquema en diferencias implícito.

El campo de solución es discretizado en una malla rectangular con pasos variables en espacio y tiempo. De esta forma, el modelo matemático es transformado en un sistema de ecuaciones no lineales, el cual es resuelto aplicando la técnica iterativa de

Picard.

Se usan las relaciones de van Genuchten para especificar las propiedades hidráulicas del suelo, ya que estas relaciones pueden introducirse en un modelo numérico como expresiones empíricas ajustadas a datos observados. De esta forma, se obvia la necesidad de medidas de la conductividad hidráulica no saturada, permitiendo que las relaciones se ajusten usando sólo medidas del contenido de humedad, conductividad hidráulica saturada y carga de presión, las cuales son más fáciles de obtener y más confiables. Estas relaciones son continuas sobre un mayor rango de cargas de presión, permitiendo de esta forma implementarlas en otros métodos de solución, como por ejemplo, un método iterativo de Newton o en otros esquemas que requieran derivadas.

El programa de cómputo incluido, permite modificaciones y ampliaciones de manera fácil. De esta forma, puede adaptarse a otros lenguajes de computación y a computadoras de más capacidad.

Los resultados obtenidos en los problemas de aplicación, muestran la confiabilidad del esquema, permitiendo así, aplicarlos a condiciones más reales en la práctica.

En el caso de presencia de raíces y transporte de solutos, se recomienda primeramente, que los datos sean validados con ejemplos reportados en la literatura, ya que, en el momento de realizar esta tesis, no se contaba con los datos necesarios.

Dentro de las aplicaciones prácticas de este modelo están por ejemplo, utilizarlo a los problemas de riego, a los problemas de drenaje agrícola, a la recuperación de suelos salinos y a la determinación de relaciones lluvia-escurrimiento.

En los problemas de riego permitirá establecer calendarios de riego más óptimos dentro de un ciclo agrícola. Además de conocer los perfiles de humedad en el transcurso del desarrollo del cultivo.

En los problemas de drenaje, permitirá el diseño óptimo para espaciamiento entre drenes, además, de obtener las variaciones del nivel freático indispensable para incorporarlos a modelos de producción del cultivo.

Para la recuperación de suelos salinos, un modelo de simulación numérica será necesario para establecer patrones óptimos de infiltración y tomar decisiones de acuerdo con la relación entre las concentraciones simuladas y la posible afectación del agua y del suelo, de esta manera, se puede saber el tiempo durante el cual se alcanzan niveles de salinidad que perjudiquen los cultivos y lo vuelvan improductivo, de tal forma, se podrán establecer las láminas de lavado requeridas para bajar los niveles de sales a un suelo antes de ser cultivado.

Se entiende que antes de aplicar en forma general el esquema a cualquiera de los problemas antes citados, se deberá ampliarlo a un modelo bidimensional. Sin embargo, hasta ahora, se concluye que el esquema cumple uno de sus objetivos, que es la de establecer las bases para su futuro desarrollo.

Respecto al análisis de estabilidad se demuestra que a través de la utilización de criterios de coeficientes congelados y la adopción de una relación exponencial entre la conductividad hidráulica y el potencial mátrico se obtiene una versión linealizada de la ecuación de Richards, posteriormente se genera su correspondiente esquema en diferencias finitas y sobre este se analiza la consistencia, el error de truncado, la estabilidad y la precisión del esquema no lineal. Con esto se concluye que el esquema es consistente e incondicionalmente estable. Con la evidencia numérica, resultante de la simulación de diversos problemas y el análisis de los retratos de fase y amplitud, se demuestra que las condiciones de precisión del esquema lineal (expresión 101) son aplicables para el modelo no lineal.

Por otro lado se nota que los problemas de redistribución donde el flujo es demasiado lento, deben ser resueltos con la mayor precisión numérica debido a que los errores

por redondeo y precisión pueden ser muy significativos.

Actualmente se pretende simular ejemplos con suelo estratificado y empezar la calibración del modelo con pruebas de laboratorio. También se está tomando como base la experiencia obtenida en este modelo para hacer su versión bidimensional.

Por último, es importante señalar que muchos aspectos relacionados con el modelo propuesto como: el fenómeno de histéresis del movimiento del agua en el suelo, la evolución de los sistemas radiculares con el tiempo y la evaporación del agua de la capa superficial del suelo, deben ser incorporados.

ANÁLISIS DE CONSISTENCIA

Al expandir en series de Taylor alrededor del nodo (j,n) las funciones siguientes:

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n + \Delta t \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{\Delta t^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} \right)_j^n + \frac{\Delta t^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} \right)_j^n + \dots$$

$$\psi_{j+1}^{n+1} = \psi_j^{n+1} + \Delta Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^{n+1} + \dots$$

$$\psi_{j+1}^n = \psi_j^n + \Delta Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \dots$$

$$\psi_{j-1}^{n+1} = \psi_j^{n+1} - \Delta Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^{n+1} - \frac{\Delta Z^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^{n+1} + \dots$$

$$\psi_{j-1}^n = \psi_j^n - \Delta Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n - \frac{\Delta Z^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \dots$$

$$\psi_{j+1/2}^{n+1} = \psi_j^{n+1} + \frac{\Delta Z}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^3}{48} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^4}{384} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^{n+1} + \dots$$

$$\psi_{j-1/2}^{n+1} = \psi_j^{n+1} - \frac{\Delta Z}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^{n+1} - \frac{\Delta Z^3}{48} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^{n+1} + \frac{\Delta Z^4}{384} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^{n+1} + \dots$$

$$\psi_{j-1/2}^n = \psi_j^n + \frac{\Delta Z}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^3}{48} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^4}{384} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \dots$$

$$\psi_{j-1/2}^n = \psi_j^n - \frac{\Delta Z}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n - \frac{\Delta Z^3}{48} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^4}{384} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \dots$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \dots$$

$$\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \dots$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \dots$$

$$\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \dots$$

y sustituirlas en la expresión (89) se llega a:

$$S_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_j^n = K_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + A_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + E_t$$

donde E_t es el error de truncado e igual a:

$$E_t = S_0 \left[\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} \right)_j^n + \dots \right] - K_0 \left\{ \omega \left[\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right)_j^n + \dots + \frac{\Delta Z^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^2 \Delta t}{12} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \dots \right] + (1-\omega) \left[\frac{\Delta Z^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial Z^4} \right)_j^n + \dots \right] \right\} - A_0 \left\{ \omega \left[\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)_j^n + \dots + \frac{\Delta Z^2}{24} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \frac{\Delta Z^2 \Delta t}{24} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \dots \right] + (1-\omega) \left[\frac{\Delta Z^2}{24} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right)_j^n + \dots \right] \right\}$$

es claro ver que cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta Z \rightarrow 0$, $E_t = 0$ comprobándose la consistencia del esquema.

Por otro lado, si en la ecuación que da el error de truncado se consideran únicamente los términos de mayor magnitud y al utilizar:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\right)_j = \frac{K_0}{S_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}\right)_j + \frac{A_0}{S_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\right)_j$$

que es simplemente la derivada respecto al tiempo de la ecuación (78), se llega a:

$$\begin{aligned} E_t = & \Delta t \left[\frac{S_0}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\right)_j - K_0 \omega_t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}\right)_j - A_0 \omega_t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\right)_j \right] + \\ & + \Delta t^2 \left[\frac{S_0}{6} \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3}\right)_j - \frac{K_0}{2} \omega_t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}\right)_j - \frac{A_0}{2} \omega_t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\right)_j \right] - \\ & - \frac{K_0 \Delta Z^2 \Delta t \omega_t}{12} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial Z^4}\right)_j - \frac{K_0 \Delta Z^2}{24} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial Z^4}\right)_j - \\ & - \frac{A_0 \Delta Z^2 \Delta t \omega_t}{12} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial Z^3}\right)_j - \frac{A_0 \Delta Z^2}{24} \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial Z^3}\right)_j + \dots \end{aligned}$$

donde si $\omega_t = 0.5$, el error de truncado es el mínimo siendo del orden de $O(\Delta t^2, \Delta Z^2)$.

PROGRAMA DE COMPUTO

A continuación se da una versión en Quick Basic del programa de cómputo, esta versión está estructurada de tal forma que cualquier cambio ó modificación se haga de forma clara y sencilla.

El programa consta de una parte principal y 20 subrutinas, todas ellas realizan una operación específica de manera que es posible entender de forma fácil su estructura general, destacan entre ellas, las subrutinas de datos y de propiedades hidráulicas del suelo que albergan las relaciones de van Genutchen, y que como se dijo en la presentación, se pueden cambiar por otras cuyos parámetros sean más fácil de obtener.

La salida de datos es hacia la unidad de disco y con el nombre del archivo que se especifica al inicio de la operación. Esto permite manipular los datos de manera de obtener las gráficas correspondientes. Los datos pueden ser grabados para todo el tiempo de cálculo ó bien para ciertos tiempos de interés.

'Programa principal

DECLARE SUB genutchen solo ()

DECLARE SUB genutchen medio ()

DECLARE SUB extraccion4 ()

DECLARE SUB extraccion3 ()

DECLARE SUB decidir ()

DECLARE SUB extraccion1 ()

DECLARE SUB extraccion2 ()

DECLARE SUB datosraiz ()

DECLARE SUB biseccion2 ()

DECLARE SUB grabar ()

DECLARE SUB genutchenai ()

DECLARE SUB genutchenini ()

DECLARE SUB genutchenfs ()

DECLARE SUB genutchenfb ()

DECLARE SUB comparacion ()

DECLARE SUB genutchen ()

DECLARE SUB aproxinicial ()

DECLARE SUB condinicial ()

DECLARE SUB esquemaarranque ()

DECLARE SUB fronteras ()

DECLARE SUB resultados ()

DECLARE SUB dimensionamiento ()

DECLARE SUB biseccion1 ()

DECLARE SUB prophid ()

DECLARE SUB hora ()

DIM kr(150, 2), teta(150, 2), q(150, 2), ext(150, 2), dr(150), R(150, 2)

DIM y(150, 2), s(150, 2), k(150, 2), ya(150, 2), flujo(150, 2)

DIM va(150, 2), vs(150), vbase(2, 2)

COMMON SHARED tetar, tetas, ys, np, ss, m, y0, intervalosz, intervalost, at, tmax, archivo\$, disco\$

COMMON SHARED y, beta, betao, noincognitas, az, lz, flujo(), archivo1\$, archivo2\$

COMMON SHARED y(), s(), k(), z(), t(), ya(), n, j, ks, kr(), teta(), iteracion, vea, vsa

```
COMMON SHARED dr(), R(), etp, das, daa, izr, ext(), ex, clave$, va(), vs(), vta0, vta1
COMMON SHARED vicial, vbase(), q(), pt, ped1, pea1, ped0, pea0, ym, km, pphi, pts,
extracacum
COMMON SHARED tiempo1, tiempo
```

```
CLEAR
```

```
CALL prophid
```

```
CALL dimensionamiento
```

```
CALL decidir
```

```
CALL biseccion1
```

```
CALL condinicial
```

```
tiempo1 = TIMER
```

```
FOR n = 1 TO intervalost
```

```
CALL fronteras
```

```
CALL aproxinicial
```

```
CALL esquemaarranque
```

```
NEXT n
```

```
CALL hora
```

```
END
```

```
SUB aproxinicial
```

```
FOR j = 1 TO noincognitas
```

```
  y(j, 1) = y(j, 0)
```

```
NEXT j
```

```
CALL genutchenai
```

```
IF clave$ = "raiz" THEN
```

```
  FOR j = (intervalosz - izr) TO intervalosz
```

```
    CALL extraccion2
```

```
  NEXT j
```

```
ELSE
```

```
END IF
```

```
END SUB
```

```
SUB biseccion1
```

```
m = 1 - (1 / np)
```



```

y1 = -1
y2 = 0
inicio:
beta1 = (y1 / ys) ^ np
beta2 = (y2 / ys) ^ np
funcion1 = (np - 1) * (tetras - tetar) * ABS(y1) ^ (np - 1)
funcion1 = ss * (ABS(ys) ^ np * (1 + beta1) ^ (m + 1)) - funcion1
funcion2 = (np - 1) * (tetras - tetar) * ABS(y2) ^ (np - 1)
funcion2 = ss * (ABS(ys) ^ np * (1 + beta2) ^ (m + 1)) - funcion2

IF (funcion1 * funcion2) < 0 THEN
  aprox = (y1 + y2) / 2
  y = aprox
  beta = (y / ys) ^ np
  funcion = (np - 1) * (tetras - tetar) * ABS(y) ^ (np - 1)
  funcion = ss * (ABS(ys) ^ np * (1 + beta) ^ (m + 1)) - funcion: PRINT funcion
  IF ABS(funcion) <= 9E-09 THEN
    y0 = aprox: PRINT y0
  ELSE
    IF (funcion * funcion1) > 0 THEN
      y1 = aprox: GOTO inicio
    ELSE
      y2 = aprox: GOTO inicio
    END IF
  END IF
ELSE
  PRINT "propon otros valores"
  INPUT "y1=", y1
  INPUT "y2=", y2
  GOTO inicio
END IF
END SUB

SUB biseccion2
j = intervalosz

```

y1 = -100

y2 = -.1

c1 = (at * n) - (at * (n - 1))

z1 = (az * j) - (az * (j - 1))

z2 = (az * j) - (az * (j - 2))

inicio1:

y(j, 1) = y1

CALL genutchenfs

IF clave\$ = "raiz" THEN

CALL extraccion3

CALL extraccion4

ELSE

END IF

flujo(j - 1, 1) = (y(j, 1) - y(j - 1, 1)) / z1

flujo(j - 1, 1) = (flujo(j - 1, 1) + 1) * (-k(j - 1, 1)): 'PRINT flujo(j - 1, 1)

flujo(j - 1, 0) = (y(j, 0) - y(j - 1, 0)) / z1

flujo(j - 1, 0) = (flujo(j - 1, 0) + 1) * (-k(j - 1, 0)): 'PRINT flujo(j - 1, 1)

funcion1 = (flujo(j, 1) - flujo(j - 1, 1) + flujo(j, 0) - flujo(j - 1, 0)) * (c1)

funcion1 = funcion1 + ((teta(j, 1) - teta(j, 0) + teta(j - 1, 1) - teta(j - 1, 0)) * z1): 'PRINT funcion1

funcion1 = funcion1 + ((at / 2) * (ext(j, 1) + ext(j, 0)))

inicio2:

y(j, 1) = y2

CALL genutchenfs

IF clave\$ = "raiz" THEN

CALL extraccion3

CALL extraccion4

ELSE

END IF

flujo(j - 1, 1) = (y(j, 1) - y(j - 1, 1)) / z1

flujo(j - 1, 1) = (flujo(j - 1, 1) + 1) * (-k(j - 1, 1)): 'PRINT flujo(j - 1, 1)

flujo(j - 1, 0) = (y(j, 0) - y(j - 1, 0)) / z1

flujo(j - 1, 0) = (flujo(j - 1, 0) + 1) * (-k(j - 1, 0)): 'PRINT flujo(j - 1, 1)

funcion2 = (flujo(j, 1) - flujo(j - 1, 1) + flujo(j, 0) - flujo(j - 1, 0)) * (c1)

funcion2 = funcion2 + ((teta(j, 1) - teta(j, 0) + teta(j - 1, 1) - teta(j - 1, 0)) * z1): 'PRINT funcion1

funcion2 = funcion2 + ((at / 2) * (ext(j, 1) + ext(j, 0)))

IF (funcion1 * funcion2) < 0 THEN

 aprox = (y1 + y2) / 2

 y(j, 1) = aprox

 CALL genutchens

IF clave\$ = "raiz" THEN

 CALL extraccion3

 CALL extraccion4

ELSE

END IF

flujo(j - 1, 1) = (y(j, 1) - y(j - 1, 1)) / z1

flujo(j - 1, 1) = (flujo(j - 1, 1) + 1) * (-k(j - 1, 1)): 'PRINT flujo(j - 1, 1)

flujo(j - 1, 0) = (y(j, 0) - y(j - 1, 0)) / z1

flujo(j - 1, 0) = (flujo(j - 1, 0) + 1) * (-k(j - 1, 0)): 'PRINT flujo(j - 1, 1)

funcion = (flujo(j, 1) - flujo(j - 1, 1) + flujo(j, 0) - flujo(j - 1, 0)) * (c1)

funcion = funcion + ((teta(j, 1) - teta(j, 0) + teta(j - 1, 1) - teta(j - 1, 0)) * z1): 'PRINT funcion1

funcion = funcion + ((at / 2) * (ext(j, 1) + ext(j, 0)))

IF ((ABS(y1) - ABS(y2)) / ABS(y2)) * 100 <= .001 THEN

' IF ABS(funcion) <= .000001# THEN

 'PRINT funcion

 ya(j, 1) = aprox: 'PRINT y0: STOP

 PRINT "ya("; j; ", "; n; ")="; ya(j, 1): STOP

 y(j, 1) = ya(j, 1)

CALL genutchenfs

IF clave\$ = "raiz" THEN

CALL extraccion3

CALL extraccion4

ELSE

END IF

ELSE

IF (funcion * funcion1) > 0 THEN

y(j, 1) = aprox: y1 = aprox: GOTO inicio1

ELSE

y(j, 1) = aprox: y2 = aprox: GOTO inicio2

END IF

END IF

ELSE

PRINT "propon otros valores"

INPUT "y1 =", y1

INPUT "y2 =", y2

GOTO inicio1

END IF

END SUB

SUB condinicial

n = 0

'print "*****CONDICIONES INICIALES*****"

'FOR j = 0 TO 7

' y(j, 0) = -.5 + (az * (j) / .07)

'NEXT j

FOR j = 0 TO intervalosz

y(j, 0) = ((5 - (j * az)) / 5) * .3325 - .4

NEXT j

```
'FOR j = 0 TO intervalosz
' y(j, 0) = -10 * (az * j) / 150
' ya(j, 0) = y(j, 0)
'NEXT j
```

```
'FOR j = 0 TO intervalosz
' y(j, 0) = -10 * (az * j) / 10
'NEXT j
```

```
CALL genutchenini
```

```
IF clave$ = "raiz" THEN
  FOR j = (intervalosz - izr) TO intervalosz
    CALL extraccion1
  NEXT j
ELSE
END IF
```

```
*****VOLUMENES DE SALIDA*****
```

```
j = 0
vs = y(j + 1, 0) + ((j + 1) * az)
vs = vs - (y(j, 0) + (j * az))
vs(j) = -k(j, 0) * (vs / (((j + 1) * az) - (j * az)))
vbase(j, 0) = vs(j)
```

```
FOR j = 1 TO noincognitas - 1
vs = y(j + 1, 0) + ((j + 1) * az)
vs = vs - (y(j - 1, 0) + ((j - 1) * az))
vs(j) = -k(j, 0) * (vs / (((j + 1) * az) - ((j - 1) * az)))
```

```
NEXT j
```

```
j = noincognitas
```

```

vs = y(j, 0) + (j * az)
vs = vs - (y(j - 1, 0) + ((j - 1) * az))
vs(j) = -k(j, 0) * (vs / ((j * az) - ((j - 1) * az)))

```

```

FOR j = 1 TO intervalosz

```

```

    va(j, 0) = ((teta(j, 0) + teta(j - 1, 0)) / 2) * az
    vta0 = vta0 + va(j, 0)

```

```

NEXT j

```

```

vínicial = vta0

```

```

OPEN disco$ + ":" + archivo$ FOR APPEND AS #1

```

```

FOR j = 0 TO intervalosz

```

```

    WRITE #1, n * at, j * az, y(j, 0), teta(j, 0), va(j, 0), vta0, (flujo(intervalosz, 0) * at * n), vs(j),
k(j, 0)

```

```

NEXT j

```

```

CLOSE #1

```

```

ern = 1

```

```

era = 1

```

```

OPEN disco$ + ":" + archivo1$ FOR APPEND AS #2

```

```

    WRITE #2, n * at, ern, era

```

```

CLOSE #2

```

```

END SUB

```

```

SUB datosraiz

```

```

CLS :

```

```

LOCATE 5, 12: PRINT "Da los datos siguientes:"

```

```

PRINT "Evapotranspiración potencial [m/día]..... =": INPUT etp

```

```

PRINT "Densidad aparente del suelo [gr/cm3]..... =": INPUT das

```

```

PRINT "Densidad del agua [gr/cm3]..... =": INPUT daa

```

```

PRINT "Cúantos AZ caen dentro de la zona radicular.. =": INPUT izr

```

```

PRINT "Da la densidad radicular respectiva dr(j)"

```

```

FOR j = (intervalosz - izr) TO intervalosz

```

```

    INPUT dr(j)

```

```
NEXT j
END SUB
```

```
SUB decidir
```

```
CLS
```

```
LOCATE 5, 15: PRINT "Deseas Influencia de raicas S/N ?": INPUT a$
```

```
IF a$ = "S" THEN
```

```
    CALL datosraiz
```

```
    clave$ = "raiz"
```

```
ELSE
```

```
END IF
```

```
END SUB
```

```
SUB dimensionamiento
```

```
CLS
```

```
LOCATE 5, 30: PRINT "***tiempo: "; n
```

```
LOCATE 11, 7: PRINT "los datos estan siendo grabados para los tiempos indicados"
```

```
LOCATE 13, 30: PRINT "Nombre del archivo: "; archivo$
```

```
LOCATE 14, 30: PRINT "Unidad de disco: "; disco$
```

```
'INPUT "Longitud en Z a analizar. = ";
```

```
lz = 5 'INPUT "No. de intervalos en Z... = ",
```

```
intervalosz = 25
```

```
'INPUT "Tiempo de cálculo ..... = ",
```

```
tmax = 45
```

```
'INPUT "No. de intervalos en T... = ",
```

```
intervalost = 9000
```

```
noincognitas = intervalosz
```

```
noincognitas = intervalosz
```

```
az = lz / intervalosz 'incremento en z
```

```
at = tmax / intervalost 'incremento en t
```

```
END SUB
```

SUB esquemaarranque

```
'print "*****Aproximaciones calculadas*****"  
  'print "*****N=****", n  
  iteracion = 0  
uno: CLS  
LOCATE 12, 35: PRINT "calculando..."; n * at  
iteracion = iteracion + 1  
  ' OPEN disco$ + ".:" + archivo2$ FOR APPEND AS #3  
  FOR j = 1 TO noincognitas - 1
```

```
z1 = ((j * az) - ((j - 1) * az)): 'print c2
```

```
z2 = ((j + 1) * az) - (j * az): 'print c2
```

```
z3 = ((j * az) - ((j - 1) * az)): 'print c2
```

```
c1 = z1 / at: 'PRINT c1, y(j, n), y(j + 1, n + 1), n
```

```
'***** Cálculo de factores de peso *****
```

```
IF k(j + 1, 1) <> k(j, 1) THEN
```

```
  km = SQR(k(j, 1) * k(j + 1, 1))
```

```
  ped1 = (km - k(j, 1)) / (k(j + 1, 1) - k(j, 1))
```

```
ELSE
```

```
  ped1 = 1
```

```
END IF
```

```
IF k(j, 1) <> k(j - 1, 1) THEN
```

```
  km = SQR(k(j, 1) * k(j - 1, 1))
```

```
  pea1 = (km - k(j - 1, 1)) / (k(j, 1) - k(j - 1, 1))
```

```
ELSE
```

```
  pea1 = 1
```

```
END IF
```

```
IF k(j + 1, 0) <> k(j, 0) THEN
```

```
  km = SQR(k(j, 0) * k(j + 1, 0))
```

```
  ped0 = (km - k(j, 0)) / (k(j + 1, 0) - k(j, 0))
```


ELSE

ped0 = 1

END IF

IF k(j, 0) <> k(j - 1, 0) THEN

km = SQR(k(j, 0) * k(j - 1, 0))

pea0 = (km - k(j - 1, 0)) / (k(j, 0) - k(j - 1, 0))

ELSE

pea0 = 1

END IF

k1 = (ped1 * k(j + 1, 1)) + ((1 - ped1) * k(j, 1))

k2 = (pea1 * k(j, 1)) + ((1 - pea1) * k(j - 1, 1))

k3 = (ped0 * k(j + 1, 0)) + ((1 - ped0) * k(j, 0))

k4 = (pea0 * k(j, 0)) + ((1 - pea0) * k(j - 1, 0))

ae = z1 * s(j, 1) * s(j, 0) / at

ae = ae / ((pts * s(j, 1)) + (1 - pts) * s(j, 0))

ae = ae + ((pt * k(j + 1, 1) * k(j, 1)) / (z1 * ((ped1 * k(j + 1, 1)) + ((1 - ped1) * k(j, 1))))

ae = ae + ((pt * k(j, 1) * k(j - 1, 1)) / (z1 * ((pea1 * k(j, 1)) + ((1 - pea1) * k(j - 1, 1))))

be = -z1 * s(j, 1) * s(j, 0) / at

be = be / ((pts * s(j, 1)) + (1 - pts) * s(j, 0))

be = be + (((1 - pt) * k(j + 1, 0) * k(j, 0)) / (z1 * ((ped0 * k(j + 1, 0)) + ((1 - ped0) * k(j, 0))))

O))))

be = be + (((1 - pt) * k(j, 0) * k(j - 1, 0)) / (z1 * ((pea0 * k(j, 0)) + ((1 - pea0) * k(j - 1, 0))))

O))))

ce = (-pt * k(j + 1, 1) * k(j, 1)) / (z1 * ((ped1 * k(j + 1, 1)) + ((1 - ped1) * k(j, 1))))

de = (-pt * k(j, 1) * k(j - 1, 1)) / (z1 * ((pea1 * k(j, 1)) + ((1 - pea1) * k(j - 1, 1))))

ee = (-(1 - pt) * k(j + 1, 0) * k(j, 0)) / (z1 * ((ped0 * k(j + 1, 0)) + ((1 - ped0) * k(j, 0))))

$$fe = -(1 - pt) * k(j, 0) * k(j - 1, 0) / (z1 * ((pea0 * k(j, 0)) + ((1 - pea0) * k(j - 1, 0))))$$

$$ge = (pt * (-k1 + k2)) + ((1 - pt) * (-k3 + k4))$$

$$ex = (az / 2) * (ext(j, 1) + ext(j, 0))$$

$$gama = y(j, 0) * be + y(j + 1, 1) * ce + y(j - 1, 1) * de$$

$$gama = gama + y(j + 1, 0) * ee + y(j - 1, 0) * fe + ge + ex$$

$$y(j, 1) = -gama / ae$$

CALL genutchensolo

NEXT j

' valores para frontera superior

CALL biseccion2

FOR jj = 1 TO noincognitas

IF y(jj, 1) = 0 THEN

$$y(jj, 1) = -.00001$$

ELSE

END IF

IF ABS((y(jj, 1) - ya(jj, 1)) / y(jj, 1)) * 100 <= .001 THEN

$$y(jj, 1) = y(jj, 1)$$

ELSE

FOR kk = 1 TO noincognitas

$$y(kk, 1) = y(kk, 1)$$

$$ya(kk, 1) = y(kk, 1)$$

NEXT kk

CALL genutchen

IF clave\$ = "raiz" THEN

FOR j = (intervalosz - izr) TO intervaloz

CALL extraccion2

```

NEXT j
ELSE
END IF

```

```

GOTO uno
END IF

```

```

NEXT jj

```

```

*****VOLUMENES DE SALIDA*****

```

```

j = 0

```

```

vs = y(j + 1, 1) + ((j + 1) * az)

```

```

vs = vs - (y(j, 1) + (j * az))

```

```

vs(j) = -k(j, 1) * (vs / (((j + 1) * az) - (j * az)))

```

```

vbase(j, 1) = vs(j)

```

```

FOR j = 1 TO noincognitas - 1

```

```

vs = y(j + 1, 1) + ((j + 1) * az)

```

```

vs = vs - (y(j - 1, 1) + ((j - 1) * az))

```

```

vs(j) = -k(j, 1) * (vs / (((j + 1) * az) - ((j - 1) * az)))

```

```

NEXT j

```

```

j = noincognitas

```

```

vs = y(j, 1) + (j * az)

```

```

vs = vs - (y(j - 1, 1) + ((j - 1) * az))

```

```

vs(j) = -k(j, 1) * (vs / ((j * az) - ((j - 1) * az)))

```

```

grab = INT(at * n * 100 + .5) / 100: PRINT grab': STOP

```

```

FOR j = 1 TO intervalosz

```

```

va(j, 1) = ((teta(j, 1) + teta(j - 1, 1)) / 2) * az

```

```

vta1 = vta1 + va(j, 1)
NEXT j

IF n = 200 OR n = 600 OR n = 2400 OR n = 4800 OR n = 9000 THEN
  OPEN disco$ + ":" + archivo$ FOR APPEND AS #1

  v1 = (vta1 - vta0) - (vsb * at)
  FOR j = 0 TO intervalosz
    WRITE #1, at * n, j * az, y(j, 1), teta(j, 1), v1, vta1, vsb, vs(j), v2, k(j, 1)

  NEXT j

```

```

CLOSE #1
ELSE
END IF

```

'Cálculo de la humedad acumulada extraida por las raices

```

FOR j = (intervalosz - izr) TO intervalosz
  extraccion = extraccion + (ext(j, 1) * az * at)
NEXT j
extracacum = extracacum + extraccion

```

flujo(intervalosz, 0) = flujo(intervalosz, 1)

ve = (flujo(intervalosz, 1) + flujo(intervalosz, 0)) / 2
ve = ve * ((at * n) - (at * (n - 1)))
vea = vea + ve

vs = (vbase(0, 1) + vbase(0, 0)) / 2
vs = vs * ((at * n) - (at * (n - 1)))
vsa = vsa + vs

ern = (ABS(ve) + ABS(vta0)) / (ABS(vta1) + ABS(vs - extraccion))
era = (ABS(vea) + ABS(vinicial)) / (ABS(vta1) + ABS(vsa - extracacum))

OPEN disco\$ + ":" + archivo1\$ FOR APPEND AS #2

WRITE #2, n * at, ern, era

CLOSE #2

FOR j = 0 TO intervalos

y(j, 0) = y(j, 1)

teta(j, 0) = teta(j, 1)

s(j, 0) = s(j, 1)

kr(j, 0) = kr(j, 1)

k(j, 0) = k(j, 1)

va(j, 0) = va(j, 1)

NEXT j

vta0 = vta1

vta1 = 0

vbase(0, 0) = vbase(0, 1)

extraccion = 0

END SUB

SUB extraccion1

IF etp > 0 OR etp <= .002 THEN

R(j, 0) = 1 / (1 + (y(j, 0) / (4188 - 1613 * etp) ^ 2))

ELSE

END IF

IF etp > .002 OR etp <= .0041 THEN

R(j, 0) = 1 / (1 + (y(j, 0) / (1386 - 250 * etp) ^ 2))

ELSE

END IF

IF etp > .0041 OR etp <= .007 THEN

R(j, 0) = 1 / (1 + (y(j, 0) / (888 - 128 * etp) ^ 2))

ELSE

CLS

LOCATE 10, 12: PRINT "La ETP tiene un valor mayor de 7mm/día para ser"

LOCATE 11, 12: PRINT "utilizado por las fórmulas"

```

END
END IF
ext(j, 0) = ((dr(j) * etp * daa) / (az * das)) * R(j, 0)
END SUB

```

SUB extraccion2

```

IF etp > 0 OR etp <= .002 THEN
  R(j, 1) = 1 / (1 + (y(j, 1) / (4188 - 1613 * etp) ^ 2))
ELSE
END IF

```

```

IF etp > .002 OR etp <= .0041 THEN
  R(j, 1) = 1 / (1 + (y(j, 1) / (1386 - 250 * etp) ^ 2))
ELSE
END IF

```

```

IF etp > .0041 OR etp <= .007 THEN
  R(j, 1) = 1 / (1 + (y(j, 1) / (888 - 128 * etp) ^ 2))
ELSE

```

```

CLS
LOCATE 10, 12: PRINT "La ETP tiene un valor mayor de 7mm/día para ser"
LOCATE 11, 12: PRINT "utilizado por las fórmulas"
END
END IF
ext(j, 1) = ((dr(j) * etp * daa) / (az * das)) * R(j, 1)
END SUB

```

SUB extraccion3

```

yp = (y(j, 0) + y(j - 1, 0)) / 2
IF etp > 0 OR etp <= .002 THEN

  R(j, 0) = 1 / (1 + (yp / (4188 - 1613 * etp) ^ 2))
ELSE
END IF

```

IF etp > .002 OR etp <= .0041 THEN

$R(j, 0) = 1 / (1 + (yp / (1386 - 250 * etp) ^ 2))$

ELSE

END IF

IF etp > .0041 OR etp <= .007 THEN

$R(j, 0) = 1 / (1 + (yp / (888 - 128 * etp) ^ 2))$

ELSE

CLS

LOCATE 10, 12: PRINT "La ETP tiene un valor mayor de 7mm/dia para ser"

LOCATE 11, 12: PRINT "utilizado por las fórmulas"

END

END IF

$ext(j, 0) = ((dr(j) * etp * daa) / (az * das)) * R(j, 0)$

END SUB

SUB extraccion4

$yp = (y(j, 1) + y(j - 1, 1)) / 2$

IF etp > 0 OR etp <= .002 THEN

$R(j, 1) = 1 / (1 + (yp / (4188 - 1613 * etp) ^ 2))$

ELSE

END IF

IF etp > .002 OR etp <= .0041 THEN

$R(j, 1) = 1 / (1 + (yp / (1386 - 250 * etp) ^ 2))$

ELSE

END IF

IF etp > .0041 OR etp <= .007 THEN

$R(j, 1) = 1 / (1 + (yp / (888 - 128 * etp) ^ 2))$

ELSE

CLS

LOCATE 10, 12: PRINT "La ETP tiene un valor mayor de 7mm/dia para ser"

LOCATE 11, 12: PRINT "utilizado por las fórmulas"

```

END
END IF
ext(j, 1) = ((dr(j) * etp * daa) / (az * das)) * R(j, 1)
END SUB

```

SUB fronteras

```

'condición de frontera en la superficie
'PRINT "**** FRONTERA SUPERFICIE ****"
j = intervalosz
' flujo(j, 1) = -(at * n / 64) 'funcion del tiempo (n)
flujo(j, 1) = .0006 'funcion del tiempo (n)
''print "f("; j; ", "; n; ")="; flujo(j, 1): ' STOP
'condición de frontera en la base
'PRINT "**** FRONTERA BASE ****"
j = 0
y(j, 1) = -.0675 'funcion del tiempo (n)
CALL genutchenfb
IF clave$ = "raiz" THEN
    CALL extraccion2
ELSE
END IF
END SUB

```

SUB genutchen

```

'Relaciones de Van Genutchen
FOR j = 1 TO noincognitas
beta = (y(j, 1) / ys) ^ np
betao = (y0 / ys) ^ np
m = 1 - (1 / np)
IF y(j, 1) <= y0 THEN
    teta(j, 1) = tetar + (tetas - tetar) * (1 + beta) ^ (-m) 'para y <= y0
    s(j, 1) = ABS(y(j, 1)) ^ (np - 1)
    s(j, 1) = s(j, 1) * (tetas - tetar) * (np - 1)
    s(j, 1) = s(j, 1) / ABS(ys) ^ np
    s(j, 1) = s(j, 1) / ((1 + beta) ^ (m + 1))'para y <= y0

```



```

ELSE
    teta(j, 1) = (1 + betao) ^ (-m)          'para y >= y0
    teta(j, 1) = teta(j, 1) * (tetas - tetar) + tetar
    teta(j, 1) = teta(j, 1) + (ss * (y(j, 1) - y0))    'para y >= y0
    s(j, 1) = ss 'para y >= y0
END IF

IF y(j, 1) <= 0 THEN
    kr(j, 1) = (1 + beta) ^ (-5 * m / 2)
    kr(j, 1) = kr(j, 1) * ((1 + beta) ^ m - beta ^ m) ^ 2
ELSE
    kr(j, 1) = 1
END IF
k(j, 1) = ks * kr(j, 1)
NEXT j
END SUB

SUB genutchenai
'Relaciones de Van Genutchen
FOR j = 1 TO noincognitas
    beta = (y(j, 1) / ys) ^ np
    betao = (y0 / ys) ^ np
    m = 1 - (1 / np)
    IF y(j, 1) <= y0 THEN
        teta(j, 1) = tetar + (tetas - tetar) * (1 + beta) ^ (-m)    'para y <= y0
        s(j, 1) = ABS(y(j, 1)) ^ (np - 1)
        s(j, 1) = s(j, 1) * (tetas - tetar) * (np - 1)
        s(j, 1) = s(j, 1) / ABS(ys) ^ np
        s(j, 1) = s(j, 1) / ((1 + beta) ^ (m + 1)) 'para y <= y0
    ELSE
        teta(j, 1) = (1 + betao) ^ (-m)          'para y >= y0
        teta(j, 1) = teta(j, 1) * (tetas - tetar) + tetar
        teta(j, 1) = teta(j, 1) + (ss * (y(j, 1) - y0))    'para y >= y0
        s(j, 1) = ss 'para y >= y0
    END IF

```

```

IF y(j, 1) <= 0 THEN
  kr(j, 1) = (1 + beta) ^ (-5 * m / 2)
  kr(j, 1) = kr(j, 1) * ((1 + beta) ^ m - beta ^ m) ^ 2
ELSE
  kr(j, 1) = 1
END IF
k(j, 1) = ks * kr(j, 1)
NEXT j
END SUB

```

SUB genutchenfb

'Relaciones de Van Genutchen

'FOR n = 1 TO 2

beta = (y(j, 1) / ys) ^ np

betao = (y0 / ys) ^ np

m = 1 - (1 / np)

IF y(j, 1) <= y0 THEN

teta(j, 1) = tetar + (tetas - tetar) * (1 + beta) ^ (-m) 'para y <= y0

s(j, 1) = ABS(y(j, 1)) ^ (np - 1)

s(j, 1) = s(j, 1) * (tetas - tetar) * (np - 1)

s(j, 1) = s(j, 1) / ABS(ys) ^ np

s(j, 1) = s(j, 1) / ((1 + beta) ^ (m + 1)) 'para y <= y0

ELSE

teta(j, 1) = (1 + betao) ^ (-m) 'para y >= y0

teta(j, 1) = teta(j, 1) * (tetas - tetar) + tetar

teta(j, 1) = teta(j, 1) + (ss * (y(j, 1) - y0)) 'para y >= y0

s(j, 1) = ss 'para y >= y0

END IF

IF y(j, 1) <= 0 THEN

kr(j, 1) = (1 + beta) ^ (-5 * m / 2)

kr(j, 1) = kr(j, 1) * ((1 + beta) ^ m - beta ^ m) ^ 2

ELSE

kr(j, 1) = 1

END IF

$k(j, 1) = ks * kr(j, 1)$

END SUB

SUB genutchens

$beta = (y(j, 1) / ys) ^ np$

$betao = (y0 / ys) ^ np$

$m = 1 - (1 / np)$

IF $y(j, 1) <= y0$ THEN

$teta(j, 1) = tetar + (tetas - tetar) * (1 + beta) ^ (-m)$

$s(j, 1) = ABS(y(j, 1)) ^ (np - 1)$

$s(j, 1) = s(j, 1) * (tetas - tetar) * (np - 1)$

$s(j, 1) = s(j, 1) / ABS(ys) ^ np$

$s(j, 1) = s(j, 1) / ((1 + beta) ^ (m + 1))$ 'para $y <= y0$

ELSE

$teta(j, 1) = (1 + betao) ^ (-m)$ 'para $y >= y0$

$teta(j, 1) = tetaj, 1) * (tetas - tetar) + tetar$

$teta(j, 1) = tetaj, 1) + (ss * (y(j, 1) - y0))$ 'para $y >= y0$

$s(j, 1) = ss$ 'para $y >= y0$

END IF

IF $y(j, 1) <= 0$ THEN

$kr(j, 1) = (1 + beta) ^ (-5 * m / 2)$

$kr(j, 1) = kr(j, 1) * ((1 + beta) ^ m - beta ^ m) ^ 2$

ELSE

$kr(j, 1) = 1$

END IF

$k(j, 1) = ks * kr(j, 1)$

END SUB

SUB genutchenini

'Relaciones de Van Genutchen

FOR $j = 0$ TO intervalos

$beta = (y(j, 0) / ys) ^ np$

$betao = (y0 / ys) ^ np$

$m = 1 - (1 / np)$

```

IF y(j, 0) <= y0 THEN
    teta(j, 0) = tetar + (tetas - tetar) * (1 + beta) ^ (-m) 'para y <= y0
    s(j, 0) = ABS(y(j, 0)) ^ (np - 1)
    s(j, 0) = s(j, 0) * (tetas - tetar) * (np - 1)
    s(j, 0) = s(j, 0) / ABS(ys) ^ np
    s(j, 0) = s(j, 0) / ((1 + beta) ^ (m + 1)) 'para y <= y0
ELSE
    teta(j, 0) = (1 + betao) ^ (-m) 'para y >= y0
    teta(j, 0) = teta(j, 0) * (tetas - tetar) + tetar
    teta(j, 0) = teta(j, 0) + (ss * (y(j, 0) - y0)) 'para y >= y0
    s(j, 0) = ss 'para y >= y0
END IF

IF y(j, 0) <= 0 THEN
    kr(j, 0) = (1 + beta) ^ (-5 * m / 2)
    kr(j, 0) = kr(j, 0) * ((1 + beta) ^ m - beta ^ m) ^ 2
ELSE
    kr(j, 0) = 1
END IF
k(j, 0) = ks * kr(j, 0)
NEXT j
END SUB

SUB hora
tiempo = TIMER - tiempo1
PRINT "tiempo de cálculo:"; tiempo / 3600; "hr"
END SUB

SUB prophiid
'Características hidráulicas del suelo.
CLS
'INPUT "Permeabilidad Ks [L/T].....=";
ks = .01
'INPUT "Saturación residual [adim.].....=";
tetar = .15

```

```
'INPUT "Contenido de humedad saturada [adim]..=",:
tetas = .38
'INPUT "Carga capilar [L].....=",:
ys = -1.2
'INPUT "Indice de distribución de poros [adim]..=",:
np = 4
'INPUT "Almacenamiento específico [L-1].....=",:
ss = .0001
INPUT "Factor de peso en el tiempo =" ; pt
INPUT "Factor de peso en el tiempo para S=" ; pts
'INPUT "Factor de peso en el potencial mátrico =" ; pphi
INPUT "nombre del archivo de resultados" ; archivo$
INPUT "nombre del archivo de errores" ; archivo1$
INPUT "unidad de disco " ; disco$
END SUB
```

ANEXO 3

De acuerdo a la ecuación (73) la conductividad hidráulica se puede calcular como:

$$K_{j+1/2} = e^{\alpha_g \left(\frac{\psi_j + \psi_{j+1}}{2} \right)}$$

al tomar logaritmos en ambos miembros es:

$$\ln K_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\alpha_g \psi_j + \alpha_g \psi_{j+1})$$

de la ecuación (73) también resulta:

$$\ln K_j = \alpha_g \psi_j$$

$$\ln K_{j+1} = \alpha_g \psi_{j+1}$$

de donde:

$$\ln K_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\ln K_j + \ln K_{j+1})$$

por lo tanto:

$$K_{j+1/2} = (K_j K_{j+1})^{1/2}$$

Análogamente:

$$K_{j-1/2} = (K_j K_{j-1})^{1/2}$$

Estas dos últimas relaciones son las que se usan para calcular la conductividad hidráulica en el punto medio del intervalo $(j, j + 1)$ y $(j-1, j)$ respectivamente.

REFERENCIAS

- Abbott, M.B., Basco, D.R. *Computational fluid Dynamics: an introduction for engineers*. Longman Scientific and Technical. 1990
- Aguilera Mauricio. *Relaciones agua-suelo-planta-atmósfera*. U.A.CH. 1986
- Aldama A. A., and Paniconi C., *An Analysis of the Convergence of Picard Iterations for Implicit Approximations of Richard's Equation*. Department of Civil Engineering and Operations Research, Princeton University, Princeton, New, Jersey, U.S.A.
- Angelakis A.N., Kadir T. N., and Rolston D.E., *Analytical Solutions for Equations Describing Coupled Transport of Two Solutes and Gaseous Product in Soil*. Water Res. Res. Vol. 26 No. 7 (1483-1496), July 1990.
- Aparicio Mijares F., Javier. *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. Cap. 7. Ed. Limusa . México. 1989.
- Barry D.A., Parlange J.-Y., Sander G.C., and Sivaplan M., *A Class of Exact Solutions for Richard's Equation*. Journal of Hydrology (142) 29-46, 1993
- Baver L.D., *Física de Suelos*. Ed. UTHEA, 1972.
- Burden R. L., Faires J.D. *Análisis Numérico*. Cap. 9. Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.
- Celia M. A., Bouloutas E.T., and Zarba R. L., *A General Mass- Conservative Numerical Solutions for the Unsaturated Flow Equation*. Water Res. Res. Vol. 26 No. 7. (1483-1496), July 1990.
- Daily Harleman. *Dinámica de los fluidos*. Ed. Trillas. México. 1969
- Fuentes R. C. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de Doctor en Mecánica de la Universidad Joseph Fourier. Grenoble, Francia. 1992
- Fuentes, Haverkamp, and Parlange J.-Y. *Parameter constraints an closed-form soilwater relationships*. Journal of Hidrology, 134 (1992) 117-142.
- Fletcher, C.A.J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*. Springer-Verlag. 1987.

- García V. Nahun H. Trabajo de Investigación. DEPFI. UNAM. 1984
- Gardner, W.R. *Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application from a water table.* Soil Sci., 1958.
- Govindaraju Rao S., and Kavas M. Levent. *Development of an approximate model for Unsaturated flow with root water uptake under rectangular water content profiles assumptions.* Journal of Hydrology (146) 321-339 (1993).
- Gracia Jesús. *Simulación del Movimiento del Agua en Suelos con presencia de cultivos.* Series: Instituto de Ingeniería de la UNAM. No. 507. Septiembre 1987.
- Green W Heber, and Ampt G.A. *Studies on Soil Physics.* Journal of Agricultural Science. Vol. IV . May. 1911.
- Hanks J. R., *Applied Soil Physics.* Second Edition. Springer-Verlag.1992.
- Hillel Daniel. *Aplications of soils physics.* Academic press. Cap, 6. 1972.
- Hillel Daniel. *Fundamentals of Soil Physics.* Academic Press. 1980.
- Iturbe Rosario. *Salinidad y Disposición de Aguas Residuales en Suelos.* Series: Instituto de Ingeniería. UNAM. No. 500. Noviembre, 1986.
- Jan Dierckx, Chris Belmans, and Pascal Pauwels. *A computer package for modelling the field water balance.* Laboratory os Soils and Water Engineering Faculty of Agricultural Sciences. Belgium. February, 1986.
- Juárez Badillo Eulalio y Rico Rodríguez Alfonso. *Mecánica de Suelos.* Tomo 1. Cap. 9. Ed. Limisa. México. 1974.
- Levi Enzo. *Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas.* División de Estudios de Posgrado. Facultad de Ingeniería. UNAM. 1986
- Levi Enzo. *Mecánica de Fluidos.* Apuntes de clase. DEPFI. UNAM. Campus Morelos. 1990.
- Martínez Beltrán Julián. *Drenaje Agrícola.* Vol. 1. Cap.2. Secretaria General Técnica. Madrid , España. 1986.
- Millar C. E., Turk L. M., Forth H. D., *Fundamentos de la Ciencia del Suelo.* Cap. 4. Ed. CECSA. 1972.

- Paniconi Claudio, Aldama A. Alvaro, and Wood F. Eric. *Numerical Evaluation of Iterative and Noniterative Methods for the Solution of the Nonlinear Richard's Equation*. Water Resources Research. Vol. 27, No. 6, Pages 1147-1163, June 1991.
- Philip J. R. *Hydrostatics and Hidrodinamics in Swelling Soils*. Water Res. Res. (5) 1070-1077. October 1969.
- Richards, L.A. Capillary conduction of liquids trough porous mediums. Physics V.I., pp. 318-333, 1931.
- Ross P. J., *Efficient Numerical Methods for Infiltration Using Richard's Equation*. Water Resources Research, Vol. 26, No. 2, Pages 279-290, February 1990.
- Ross P. J., *A method of deriving soil hidraulic properties from field water contents for applications in water balance studies*. Journal of Hydrology, (144) 143-153, 1993.
- Taghavi S. A. , Marino A. Miguel, and Rolston E. *Infiltration from Trickle Irrigation Source*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Vol. 110, No.4, December, 1984.
- Tamari S., Bruckler L., Halbersman J, and Chadoeuf J. *A Simple Method for Determining Soil Hydraulic Properties in the Laboratory*. Soil Sci. Soc. Am. J.57: 642-651 (1993).
- Van Genuchten, M. Th. 1980. *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*. Soil Sci. Soc. Am. J. 44: 892-898.
- White M. Frank. *Mecánica de Fluidos*. Mc. Graw Hill. 1990.
- Xie, C.-H., Zou, Z. *An Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method for the Richard's Equation*. Department of Mathematics and Department of Earth Sciences. University, Nanjing 210008, P.R. China.