36
26

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA INVITACION A LA GEOMETRIA (TEOREMA DE MOHR-MASCHERONI)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A :

GLORIA SAYNEZ MENDOZA

MEXICO, D.F. 1994

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron la pasante(s) Gloria Saynez Mendoza

con número de cuenta 7286660-9 con el Título:

Una invitación a la Geometría (Teorema de Mohr-Mascheroni)

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de Matemático

GRADO **NOMBRE(S)** **APELLIDOS COMPLETOS** **FIRMA**

Dra. María de la Paz Alvarez Scherer
Director de Tesis
Dr. Santiago López de Medrano Sánchez

M en C Francisco Struck Chávez

M en C Pilar Martínez Téllez
Suplente
Mat. Enrique Vega Ramírez
Suplente

A la memoria de mi Padre

A mi Madre

A mis hermanas
Marcela y Norma

A mis hermanos
Mariano y César

A mi compañero
Ramiz

A mi hijo
Akram

Mi más profundo agradecimiento:

a Paz, por lograr lo imposible,

a mi madre y hermanos por su apoyo
incondicional de ahora y siempre,

a Ramiz y Akram por su cariño,
apoyo y paciencia,

a Estela y Francis
por su amistad y apoyo,

a todos mis cuates por sus porras.

Indice.

Una invitación a la Geometría
(Teorema de Mohr-Mascheroni)

Introducción.

Los amantes de la Geometría no necesitan una invitación para acercarse a ella: la estudian, la trabajan y la disfrutan; para ellos que están acostumbrados a su lenguaje, sus construcciones y sus demostraciones, Mascheroni resulta ser un viejo conocido. Sin embargo, dentro del ámbito matemático general, y particularmente en el de la enseñanza, no siempre son consideradas las construcciones geométricas en sí mismas, sino sólo como medios para resolver problemas o realizar investigaciones posteriores.

Esta invitación está más bien dirigida a aquéllos que aún no descubren lo esencial de las construcciones geométricas, a aquéllos, que dedicados a la enseñanza a nivel elemental, medio y medio-superior, no les han proporcionado el lugar que les corresponde dentro de los juegos más ingeniosos que proporcionan un gran reto, que permiten no sólo desarrollar destreza sino que a la vez ofrecen una interesante gama de posibilidades para aprender y utilizar conceptos sumamente importantes de la Geometría.

Este trabajo se realizó con una doble intención; por un lado, las construcciones aquí presentadas resultan ser un pretexto ideal para formalizar y recordar diversas demostraciones a teoremas fundamentales de la Geometría y por otro lado, pretende provocar el interés en que se desarrollen construcciones y/o demostraciones diferentes.

Un poco de historia.

Todos los que tratamos con las matemáticas hemos realizado construcciones con regla y compás, pero cuántos de nosotros nos hemos cuestionado cuáles de ellas podríamos realizar si sólo contáramos con un compás.

El poeta y geómetra italiano Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800) realizó un importante descubrimiento que apareció publicado, en 1797, en su "Geometría del compás": *Todos los problemas de construcción que se resuelven con ayuda del compás y la regla, pueden resolverse con precisión empleando sólo el compás.*

En 1928 el matemático danés Johannes Hjelmslev (1873 - 1950) encontró en una librería de Copenhague una copia de un antiguo libro publicado en Amsterdam en 1672, "Euclides danés" de Georg Mohr en el que, con una solución distinta, el autor demostraba la propuesta que Mascheroni haría 125 años después.

El propósito del presente trabajo es ofrecer una demostración del Teorema de Mohr-Mascheroni y realizar algunas construcciones utilizando sólo compás, para ello haré antes un par de observaciones:

- Dado que una recta no se puede trazar sin una regla, ésta se considera determinada cuando se encuentran cualesquiera dos de sus puntos.

- Cada una de las construcciones propuestas serán justificadas. Para ello haré uso de diversos teoremas de la Geometría Euclidiana. Las líneas que aparecen punteadas son auxiliares para dichas demostraciones, *no participan en las construcciones.*

Capítulo I.

Cuando un problema de construcción en el plano de Euclides se puede resolver con regla y compás, la solución se reduce a una sucesión finita de los cinco problemas fundamentales:

1. Por dos puntos dados trácese una recta.
2. Desde un punto dado como centro descríbase la circunferencia de radio dado.
3. Determínense los puntos de intersección de dos circunferencias dadas.
4. Encuéntrense los puntos de intersección de la circunferencia dada y la recta determinada por dos puntos.
5. Hállense los puntos de intersección de dos rectas, cada una de las cuales queda determinada por dos puntos.

Por lo tanto, para demostrar que todos los problemas de construcción resolubles con regla y compás pueden solucionarse con precisión utilizando sólo un compás, es suficiente demostrar que las cinco operaciones fundamentales lo son.

Para la primera operación demostraré cómo usando sólo compás podemos marcar uno, dos, tres, y en general, cualquier número de puntos en una recta dada; sin embargo, no hay razones para considerar que la recta está construída, en realidad el trazado de una línea recta no está cubierta por la Teoría de Mohr-Mascheroni.

Dado que la segunda y tercera operaciones se realizan mediante compás directamente, aquí realizaré las demostraciones de las restantes por medio de la solución de ocho problemas básicos.

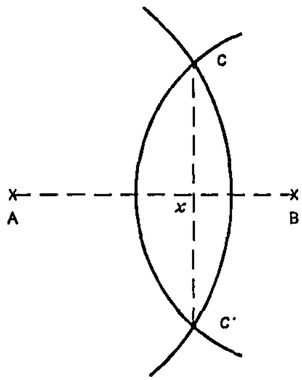
Notación.

La circunferencia con centro en A y radio BC la escribiré (A, BC); en el caso en que la circunferencia sea con centro en A y radio AB, en lugar de escribir (A, AB) escribiré (A, B).

Los números al margen corresponden a las demostraciones generales que se encuentran en el Apéndice.

• **Problema 1.** Construir un punto simétrico al punto dado C respecto a una recta dada AB.

Construcción: Describimos (A, C) y (B, C), en la intersección de las circunferencias obtenemos C' que es el punto simétrico.



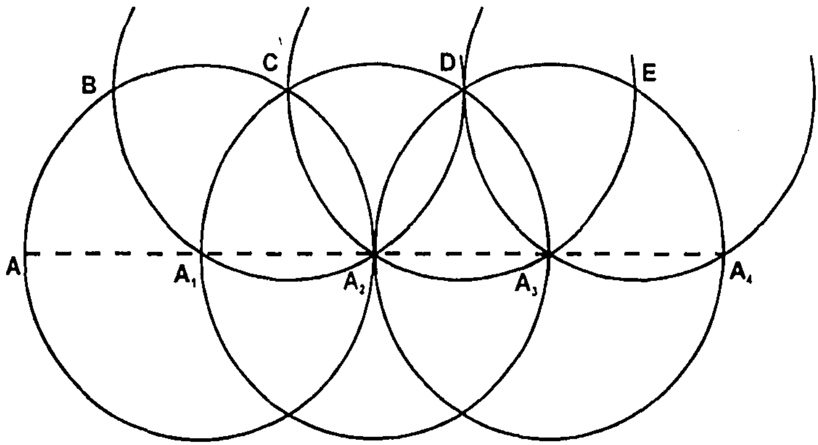
Demostración: Por demostrar que CX = C'X

CB = C'B por ser radios de (B, C)
CA = C'A por ser radios de (A, C)
$\Rightarrow$ A y B están en la mediatriz de CC'
(1) $\Rightarrow$ $AB \perp CC'$
$\Rightarrow$ CX = C'X
i.e. X es el punto medio de CC'.

Observación: Dados tres puntos A, B, X, sabemos que están alineados si, al tomar un punto arbitrario C fuera de AB y al construir su simétrico C', resulta que CX = C'X entonces X está en la recta AB.

• **Problema 2.** Trazar un segmento 2, 3, 4, y en general n veces mayor que el segmento dado $AA_1 = r$ ($n \in N$).

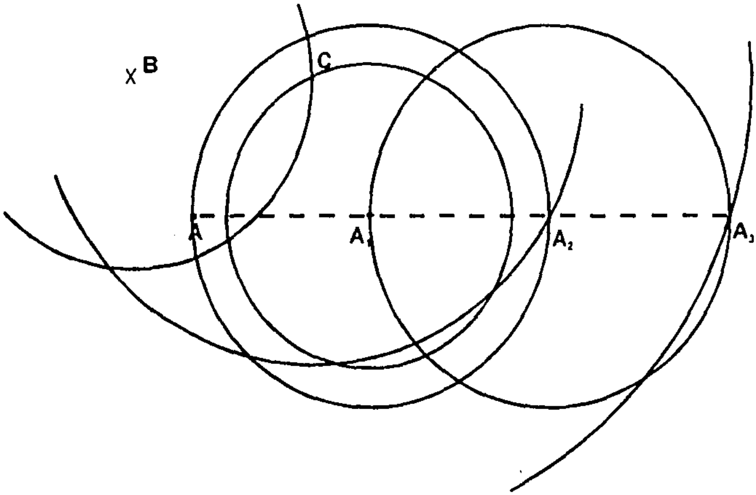
Construcción 1: Trazamos la circunferencia (A_1, r) y las cuerdas tales que $AB = BC = CA_2 = r$, entonces resulta $AA_2 = 2r$, es decir, diametralmente opuesto a A. Describimos ahora (A_2, r) y (C, r) que se intersectarán en D. Trazamos (D, r) y (A_2, r) y en la intersección obtenemos A_3, diametralmente opuesto a A_1, i.e. $A_1A_3 = 2r$, como $AA_3 = AA_1 + A_1A_3$ entonces resulta que $AA_3 = r + 2r = 3r$, etc. Al realizar las construcciones indicadas n veces, trazamos $AA_n = nr$.



Demostración:

(2) El compás con abertura igual al radio de la circunferencia divide a ésta en seis partes iguales.

Construcción 2: Tomamos fuera de la recta AA_1 un punto arbitrario B y trazamos (A_1, AB) y (B, r) hasta su intersección con el punto C. Trazamos (A_1, r) y (C, BA_1) hasta que se corten en el punto A_2. El segmento AA_2 será igual a 2r. Describiendo (A_2, r) y (C, BA_2) obtenemos A_3 tal que AA_3 = 3r, etc.



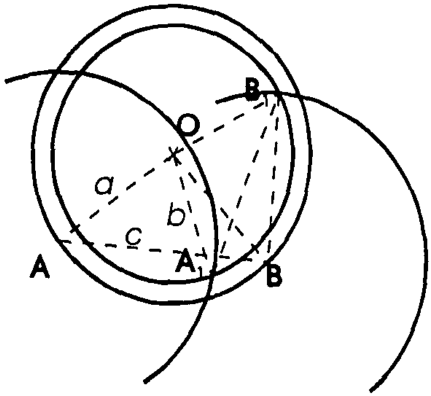
Demostración: Por demostrar que $AA_2 = 2r$.

$AA_1 = r$ por hipótesis
$BC = r$ por construcción
$\Rightarrow AA_1 = BC$
$A_1C = AB$ por construcción
(3) $\Rightarrow ABCA_1$ es paralelogramo
$CA_2 = BA_1$ por construcción
$A_1A_2 = r$ por construcción
$\Rightarrow A_1A_2 = BC$
$\therefore A_1BCA_2$ es paralelogramo
$\Rightarrow BC \parallel AA_1$ y $BC \parallel A_1A_2$
(4) $\Rightarrow A, A_1$ y A_2 son colineales
$\Rightarrow AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = r + r = 2r$
$A_2A_3 = r$ por construcción
$BA_2 = CA_3$ por construcción
$\Rightarrow A_2BCA_3$ es paralelogramo
$\Rightarrow A, A_1, A_2$ y A_3 son colineales
además $AA_3 = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 = 3r$, etc.

• **Problema 3.** Trazar un cuarto segmento que sea proporcional a los tres segmentos dados a, b y c.

Construcción 1. *Caso 1.* Para $c < 2a$.

De un punto arbitrario O trazamos las circunferencias (O, a) y (O, b). En la circunferencia (O, a) trazamos la cuerda AB = c y tomando un radio d, describimos (A, d) y (B, d) tal que intersecten a la circunferencia (O, b) en A_1 y B_1. El cuarto segmento proporcional a los tres segmentos dados es A_1B_1.



Demostración: Considero $\Delta\, AOA_1$ y $\Delta\, BOB_1$

$AO = a = BO$ por ser radios de (O, a)

$A_1O = b = B_1O$ por ser radios de (O, b)

$AA_1 = d = BB_1$ por ser radios de (A, d) y de (B, d)

(LLL) $\Rightarrow \Delta\, AOA_1 \cong \Delta\, BOB_1$

$\Rightarrow \angle AOA_1 = \angle BOB_1$

$\angle AOB = \angle AOA_1 + \angle A_1OB = \angle A_1OB + \angle BOB_1 = \angle A_1OB_1$

$\Delta\, AOB$ y $\Delta\, A_1OB_1$ son isósceles

(5) $\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$ y $\angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1$

$\Rightarrow 2\angle OAB + \angle AOB = 2\angle OA_1B_1 + \angle A_1OB_1 = 180°$

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OA_1B_1$

(I) $\Rightarrow \Delta\, AOB \approx \Delta\, A_1OB_1$

$\therefore\; AO : A_1O = AB : A_1B_1$

i.e., $a : b = c : A_1B_1$ q.e.d.

Construcción 1. *Caso* 2. Para $c \geq 2a$.

Si $b < 2a$ construímos el cuarto segmento proporcional a los segmentos a, c y b (caso 1); si no, trazamos el segmento na (problema 2) tal que $c < 2na$ (o $b < 2na$), de la siguiente manera:

Trazamos el segmento $a_1 = 2a$ (prob. 2). Del punto arbitrario O_1 describimos (O_1, c) y en dirección arbitraria trazamos segmentos $O_1A_1 = a_1$, $O_1A_2 = 2a_1$, $O_1A_3 = 3a_1$, etc. (prob. 2); después de un número finito de pasos llegamos al punto A_n que se encontrará fuera de la circunferencia (O_1, c). Entonces $O_1A_n = na_1 = 2na > c$.

Tracemos el cuarto segmento Y, proporcional a los segmentos na, b y c (caso 1).

Ahora trazamos $X = nY$ (prob. 2).

$na : b = c : Y$

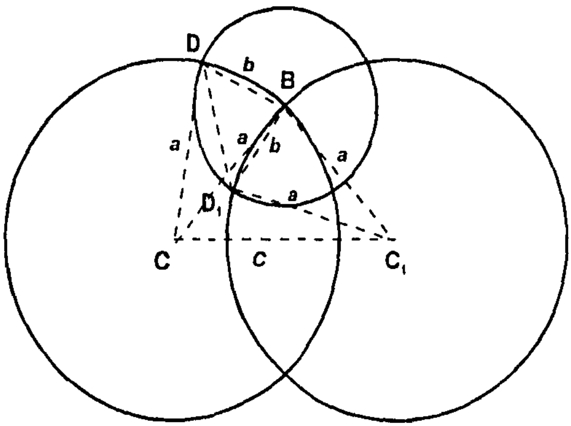
i.e., $naY = bc$

$\Rightarrow\ a : b = c : nY$

$\therefore\ a : b = c : X$

Construcción 2. Para $c < 2a$.

Sean C y C_1 los extremos de c. Trazamos las circunferencias (C, a) y (C_1, a) que se cortarán en B. Sean D y D_1 los puntos de intersección de las circunferencias (C, a) y (C_1, a) con (B, b). El segmento $DD_1 = x$ es el buscado.



Demostración:

Los triángulos isósceles $\Delta\, CBD$ y $\Delta\, C_1BD_1$ son congruentes ya que por construcción sus lados son iguales,
entonces
$\angle CBD = \angle C_1BD_1$.

Ahora
$\angle CBC_1 = \angle CBD_1 + \angle D_1BC_1$
$\angle DBD_1 = \angle DBC + \angle CBD_1$
como
$\angle D_1BC_1 = \angle DBC$
$\Rightarrow\ \angle CBC_1 = \angle DBD_1$
(II) $\Rightarrow\ \Delta\, CBC_1 \approx \Delta\, DBD_1$

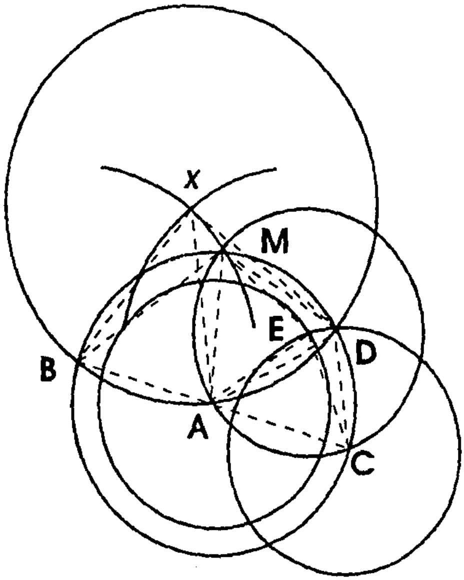
$\therefore\ a : b = c : DD_1$

Si $c \geq 2a$ y $b \geq 2a$, trazamos el cuarto segmento Y, proporcional a los segmentos na, b y c ($c < 2na$); después encontramos el segmento $x = nY$ que es el buscado.
(Observación en la Construcción 1, Caso 2) *.

* ¿Por qué necesitamos considerar casos?

• **Problema 4.** Hallar el centro de la circunferencia dibujada.

Construcción: En la circunferencia dada tomamos un punto A y con d arbitrario describimos (A, d), en las intersecciones de ambas circunferencias obtenemos B y D. En la circunferencia (A, d) marcamos el punto C diametralmente opuesto a B. Describimos (C, D) y (A, CD) hasta su intersección en E. Trazamos (E, CD) hasta su encuentro con (A, d) en el punto M. El segmento BM es igual al radio de la circunferencia dada. Las circunferencias (B, M) y (A, BM) determinan el centro buscado X.



Demostración:

$AE = CD = CE$ por construcción

$\Rightarrow \ \Delta ACE$ es isósceles

$EM = CD = AE$ por construcción

$\Rightarrow \ \Delta AEM$ es isósceles

$AM = AC$ por construcción

(LLL) $\Rightarrow \ \Delta ACE \cong \Delta AEM$

$\Rightarrow \ \angle EAM = \angle EAC = \angle ACE$

$\angle BAE$ es ángulo exterior del ΔACE

(14) $\Rightarrow \ \angle BAE = \angle ACE + \angle AEC$

además

$\angle BAE = \angle BAM + \angle EAM$

$\Rightarrow \ \angle ACE + \angle AEC = \angle BAM + \angle EAM$

$\Rightarrow \ \angle AEC = \angle BAM$

El ΔABM es isósceles ya que $AB = AM$

(I) $\Rightarrow \ \Delta ABM \approx \Delta ACE$

entonces $BM : AB = AC : CE$

como $BM = BX$ y $CE = CD$

$\Rightarrow \ BX : AB = AC : CD$

(III) $\Rightarrow \ \Delta ABX \approx \Delta ACD$

$\Rightarrow \ \angle BAX = \angle ACD$

$\angle BAD + \angle DAC = 180° = \angle DAC + \angle ACD + \angle CDA$

$\Rightarrow \ \angle BAD = \angle ACD + \angle CDA$

pero $\angle ACD = \angle CDA$

$\Rightarrow \ \angle BAD = 2\angle ACD,$

es decir,

$\frac{1}{2}\angle BAD = \angle ACD$

$\angle BAX = \frac{1}{2}\angle BAD$

pero

$\angle BAD = \angle BAX + \angle DAX$

$\Rightarrow \ \angle BAX = \frac{1}{2}\angle BAD = \angle DAX$

$AB = AD$ por construcción

$AX = AX$ lado común

(LAL) $\Rightarrow \ \Delta BAX \cong \Delta DAX$

$\Rightarrow \ BX = DX = AX$

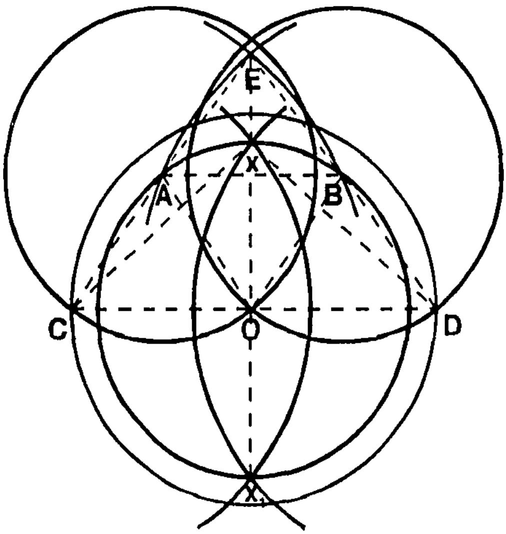
$\therefore$ X es el centro de la circunferencia dada.

• **Problema 5.** Dividir por la mitad el arco dado AB de la circunferencia.

Construcción: Por el problema 4 podemos suponer que conocemos el centro O de la circunferencia.

Sean OA = OB = r y AB = a

Describimos (O, a), (A, r) y (B, r), en las intersecciones obtenemos los puntos C y D. Ahora trazamos (C, B) y (D, A) hasta su intersección en E. Trazamos las circunferencias (C, OE) y (D, OE) y en sus intersecciones obtenemos X y X_1. El punto X es el punto buscado.



Demostración:

CO = a = AB por construcción

AC = r = OB por construcción

(3) $\Rightarrow$ ABOC es paralelogramo

OD = a = AB por construcción

OA = r = BD por construcción

(3) $\Rightarrow$ ABDO es paralelogramo

$\Rightarrow$ $AB \parallel CO$ y $AB \parallel OD$

(4) $\Rightarrow$ C, O y D son colineales.

El Δ CED es isósceles ya que CE = ED,

el Δ CXD es isósceles ya que CX = DX,

como CO = OD

$\Rightarrow$ E, X y O están alineados ya que están en la mediatriz de C y D, además

(5) $\Rightarrow$ $EO \perp CD$

$\Rightarrow$ $\angle COX = \angle COE = 1$ recto

(6) $\Rightarrow$ OX es perpendicular a la cuerda AB, por lo tanto, para demostrar que X divide el arco por la mitad, es suficiente demostrar que OX = r.

Del paralelogramo ABOC:

(7) $$\Rightarrow \overline{OA}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{OB}^2 + 2\overline{AB}^2$$

$$r^2 + \overline{BC}^2 = 2r^2 + 2a^2$$

$$\overline{BC}^2 = 2a^2 + r^2$$

Del triángulo rectángulo COE

(8) $$\Rightarrow \overline{CE}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2$$

pero $CE = BC$ y $OC = a$

$$\Rightarrow 2a^2 + r^2 = a^2 + \overline{OE}^2$$

$$\overline{OE}^2 = a^2 + r^2$$

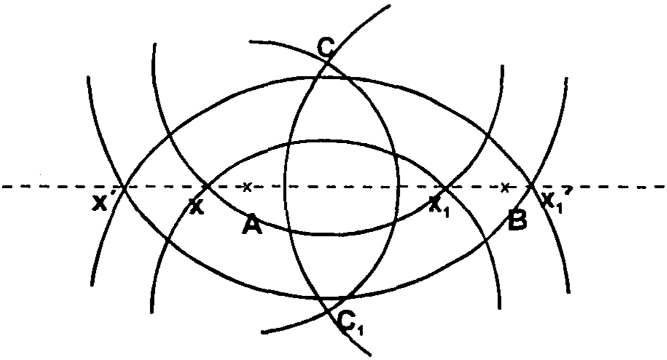
Del triángulo rectángulo COX, y ya que CX = OE

$$OX = \sqrt{\overline{CX}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{a^2 + r^2 - a^2} = r$$

$\therefore$ OX = r q.e.d.

• **Problema 6.** En la recta determinada por dos puntos A y B es necesario obtener uno o varios puntos.

Construcción: Tomamos un punto arbitrario C fuera de la recta AB y encontramos su simétrico C_1 (prob. 1). Con radio $r \geq \frac{1}{2}\ CC_1$, describimos las circunferencias (C, r) y (C_1, r), en las intersecciones obtenemos los puntos X y X_1 que se encuentran en la recta dada AB. Al cambiar el radio r, encontramos otra pareja de puntos, etc.



Demostración:

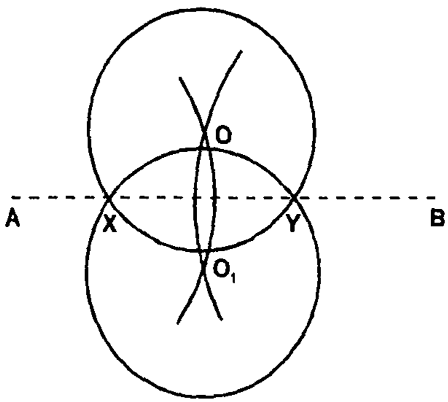
En el problema 1 demostramos que AB determina
la mediatriz de CC_1.
Por construcción
$CX = C_1X$ y
$CX_1 = C_1X_1$
$\therefore$ X y X_1 están en la mediatriz de CC_1.

• **Problema 7.** Trazar los puntos de intersección de la circunferencia dada (O, r) con la recta dada por dos puntos A y B.

Construcción: *Caso 1.*

El centro O se encuentra fuera de la recta dada AB. (La comprobación de este hecho se realiza mediante la observación en el problema 1).

Determinamos el punto O_1 simétrico al centro O (problema 1). Describimos (O_1, r) que intersectará la circunferencia dada en los puntos X, Y. Estos puntos se encuentran en AB.



Demostración:

AB es la mediatriz de OO_1

$OX = r = O_1X$

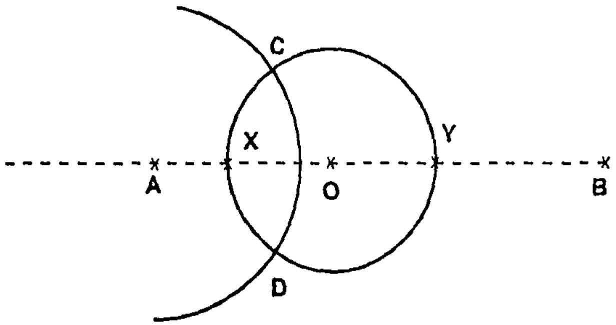
y $OY = r = O_1Y$

$\Rightarrow$ X, Y están en la mediatriz de OO_1

.Construcción: *Caso 2.*

Supongamos que O está en la recta dada AB.

Trazamos (A, d) con d tal que intersecte a (O, r) en C y D. Dividimos a la mitad los arcos CD de la circunferencia (O, r) (prob. 4). Los puntos X, Y son los buscados.



Demostración:

Como A, O y B son colineales y
además
AC = AD y
OC = OD
$\Rightarrow$ AB es la mediatriz de CD
Por construcción X, Y dividen los arcos a la mitad
$\therefore$ están en la mediatriz de CD.

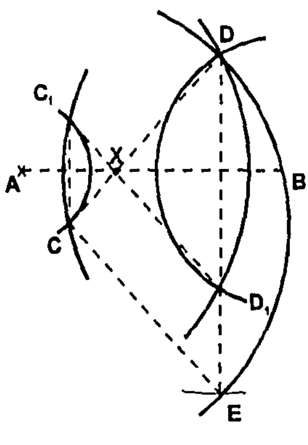
Observación:

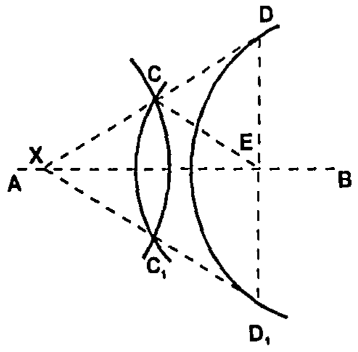
De la construcción se deduce que

AY = AO + OY y AX = AO – OY (OX = OY)

• **Problema 8.** Construir el punto de intersección de dos rectas AB y CD cada una de las cuales queda determinada por dos puntos.

Construcción: Describimos C_1 y D_1 simétricos, respectivamente, a C y D en relación a la recta AB. Trazamos (D_1, CC_1) y (C, D) y designamos con E su intersección. Trazamos el cuarto segmento x que es proporcional a los segmentos DE, DD_1 y CD (prob. 3). Ahora describimos (D, x) y (D_1, x), en su intersección obtenemos el punto buscado X.



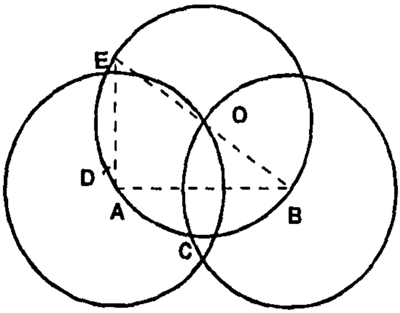


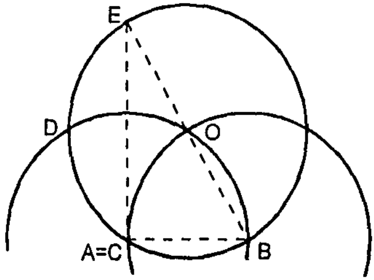
Demostración: Como C_1 y D_1 son simétricos a C y D, encontraremos el punto de intersección de las rectas dadas si encontramos el punto de intersección de las rectas CD y C_1D_1, ya que dicho punto por estar en la intersección de ambas será tal que $CX = C_1X$ y $DX = D_1X$, lo cual implica que está en la mediatriz de CC_1 y DD_1 a la cual pertenecen A y B por construcción.

Consideremos CC_1D_1E que es paralelogramo ya que
$D_1E = CC_1$ por construcción
$C_1D_1 = CD$ por ser simétricos
$CD = CE$ por construcción
$\Rightarrow C_1D_1 = CE$
(3) $\Rightarrow C_1C \,||\, D_1E$ y $C_1D_1 \,||\, CE$
$C_1C \,||\, DD_1$ por ser simétricos
(4) $\Rightarrow$ D, D_1 y E son colineales
Por construcción el cuarto segmento proporcional a
DE, DD_1 y CD es x,
i.e.
$DE : DD_1 = CD : x$
como
$x = DX = D_1X$
tenemos que
$DE : DD_1 = CD : DX = CD : D_1X = CE : D_1X$
$\therefore\ DE : DD_1 = CD : DX = CE : D_1X$
(III) $\Rightarrow \Delta\, CDE \approx \Delta\, XDD_1$
D es vértice común y D, D_1, E están alineados
$\Rightarrow XD_1 \,||\, CE$
y como
$C_1D_1 \,||\, CE$
$\Rightarrow C_1$, X y D_1 son colineales.
Los triángulos son semejantes, D es vértice común y
$XD_1 \,||\, CE$
$\Rightarrow$ C, X y D están alineados
$\therefore$ X está en la intersección de CD y C_1D_1
además
$DX = D_1X$
$\Rightarrow$ X está en AB.

• **Problema 9.** Levantar una perpendicular al segmento AB en el punto A.

Construcción 1: Con una abertura de compás invariable e igual al segmento r $\geq \frac{1}{2}$ AB, trazamos (A, r) y (B, r) hasta que se intersecten en el punto O. Describimos (O, r) y trazamos las cuerdas CD = DE = r donde C es el punto de intersección de (B, r) y (O, r), el punto E es diametralmente opuesto a B. El segmento AE ⊥ AB.





Demostración: Como BC = CD = DE = r, E es diametralmente opuesto a B.

El Δ ABE tiene un lado igual al diámetro de la circunferencia,

(9) $\Rightarrow$ Δ ABE es rectángulo, donde BE es la hipotenusa,

$\therefore$ AE ⊥ AB.

Si tomamos r = AB $\Rightarrow$ AE = $\sqrt{3}$AB y el punto C coincidirá con A.

$$\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BE}^2$$

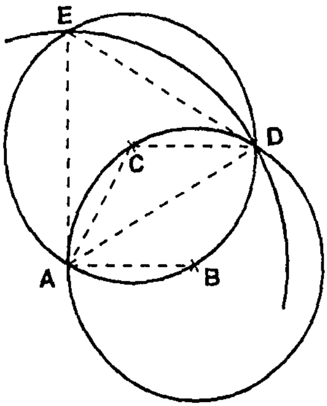
$$\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2$$

como $BE = 2r$ y $AB = r$, entonces

$$\overline{AE}^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

$\therefore$ AE = $\sqrt{3}$AB

Construcción 2: Describimos la circunferencia (B, A) y consideramos en ella un punto C arbitrario, trazamos (C, A) y llamamos D al punto de intersección. Describimos la circunferencia (A, D) hasta su intersección con (C, A) en el punto E. El segmento $AE \perp AB$.



Demostración:

El segmento AC une los centros de las circunferencias (A, D) y (C, A), el segmento DE es su cuerda común,

(10) $\Rightarrow AC \perp DE$ y
$\angle CAD = \angle CAE$ ya que el Δ ADE es isósceles

Por otra parte $\angle CAD = \angle ADC$ ya que el Δ CAD es isósceles

(9) $\Rightarrow \angle ADC = \frac{1}{2}\,\widehat{AC}$

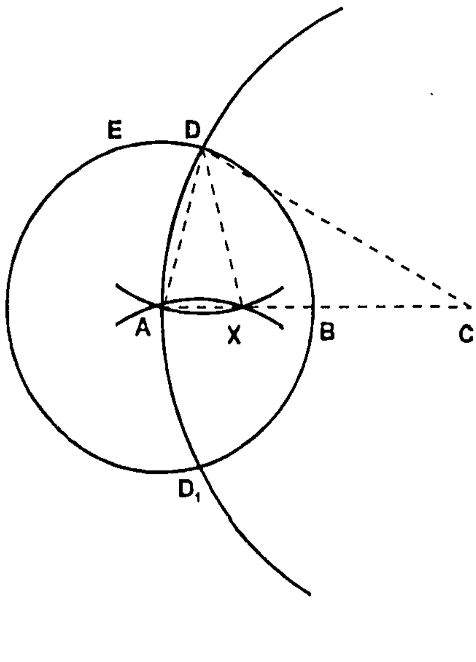
$\angle CAE = \angle CAD = \angle ADC = \frac{1}{2}\,\widehat{AC}$

(15) $\Rightarrow AE \perp AB$,

ie. AE es tangente a (B, A) en el punto A.

• **Problema 10.** Trazar un segmento igual a $\frac{1}{n}$ del segmento dado AB. (Dividir el segmento AB en n partes iguales, n = 2, 3, ...)

Construcción 1: Trazamos AC = nAB (problema 2). Describimos la circunferencia (C, A) y en la intersección con (A, B) obtenemos D y D_1. Las circunferencias (D, A) y (D_1, A) determinarán el punto buscado X. El segmento $AX = \frac{AB}{n}$. Al aumentar el segmento AX, 2, 3, ... , n veces (problema 2), construímos los puntos que dividirán el segmento AB en n partes iguales.



Demostración: El Δ ACD es isósceles ya que

AC = CD por ser radios de (C, A)

El Δ AXD es isósceles ya que

AD = XD por ser radios de (D, A),

$\Rightarrow \angle DAC = \angle CDA$ y

$\angle DAX = \angle DXA$

X está alineado con A y C ya que por construcción:

$DC = D_1C$

$DA = D_1A$ y

$DX = D_1X$

i.e.

A, X y C están en la mediatriz de DD_1

Entonces

$\angle DAC = \angle DAX$

$\Rightarrow \angle DAX = \angle DXA = \angle DAC = \angle CDA$

(I) $\Rightarrow \Delta ACD \approx \Delta AXD$

$\Rightarrow AC : AD = AD : AX$

$$AC \cdot AX = AD \cdot AD = \overline{AD}^2$$

pero

AD = AB

$$AC \cdot AX = \overline{AB}^2$$

como

AC = nAB

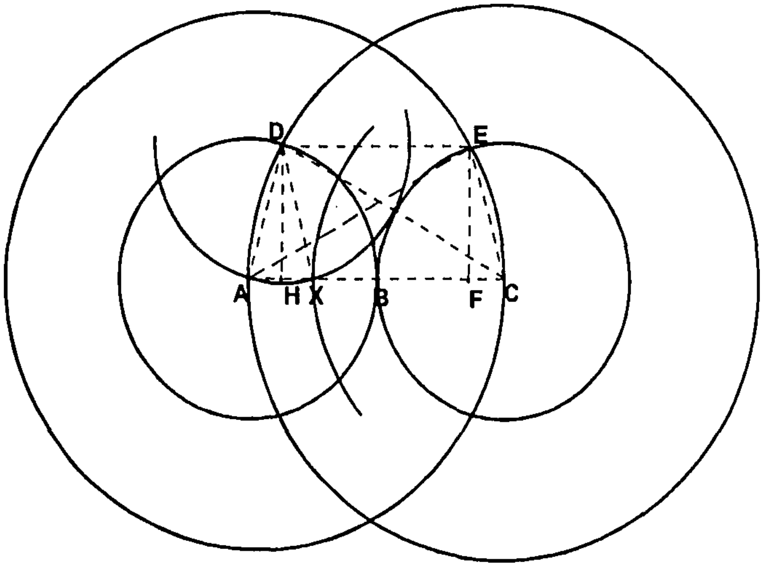
$$nAB \cdot AX = \overline{AB}^2$$

$$AX = \frac{\overline{AB}^2}{nAB}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{1}{n} AB$$

Observación: Si los valores de n son grandes, la determinación de X carece de precisión: los arcos de las circunferencias (D, A) y (D_1, A) se intersectan en el punto X bajo un ángulo muy pequeño. En este caso en vez de la circunferencia (D_1, A) para determinar X, se puede trazar (A, ED) donde E es el punto diametralmente opuesto al punto D_1 de la circunferencia (A, B).

Construcción 2: Trazamos AC = nAB (problema 2). Describimos las circunferencias (A, C), (C, A) y (C, AB) que se intersectarán en los puntos D y E. Ahora trazamos (D, A) y (C, DE), en la intersección obtenemos X tal que AX = $\frac{1}{n}$ AB.



Demostración:

Por construcción
AD = AB,
DC = AC,
CE = AB y
AE = AC
⇒ AE = DC y
AD = CE

$DX = AD$ por construcción
$CX = DE$ por construcción
$\Rightarrow DX = AD = CE$
$\therefore$ CEDX es paralelogramo
$\Rightarrow CX \parallel DE$
Considero ΔDAC y ΔECA
$AD = CE$
$AE = DC$
$AC = AC$ lado común
(LLL) $\Rightarrow \Delta DAC \cong \Delta ECA$

Sean DH la altura del ΔDAC sobre AC y
EF la altura del ΔECA sobre AC
$\Rightarrow DH = EF$
$\Rightarrow DE \parallel AC$

$\therefore CX \parallel DE \parallel AC$
$\Rightarrow$ X, A y C son colineales.

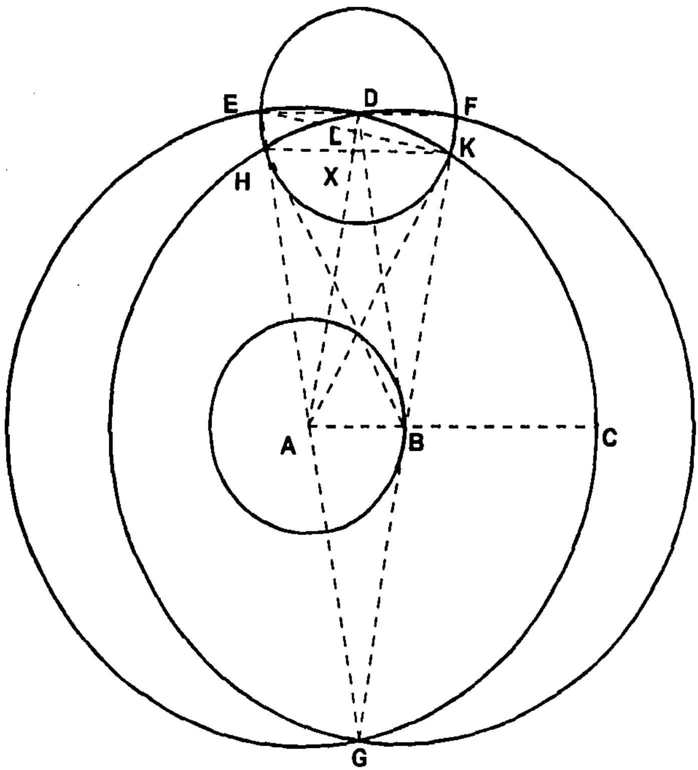
Ahora,
ΔACD y ΔADX son isósceles ya que
$DC = AC$ y $DX = AD$,
entonces
$\angle DXA = \angle DAX = \angle DAC = \angle ADC$
$\Rightarrow \Delta ACD \approx \Delta ADX$
$\Rightarrow AC : AD = AD : AX$
$AC \cdot AX = AD \cdot AD = \overline{AD}^2$
pero
$AD = AB$ y $AC = nAB$
$nAB \cdot AX = \overline{AB}^2$

$$AX = \frac{\overline{AB}^2}{nAB}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{1}{n} AB$$

Construcción 3: Propuesta por el profesor A.S. Smogorzhevski, que a diferencia de las anteriores, la parte buscada $\frac{1}{n}$ del segmento AB, no se encuentra en el segmento dado.

Trazamos AC = nAB (prob. 2). Describimos (A, C) y (B, AC) hasta su intersección en el punto D. La circunferencia (D, AB) cortará a las circunferencias (A, C) y (B, AC) en E y H. El segmento EH = $\frac{1}{n}$ AB.



Demostración: Consideremos ΔABD, ΔADE y ΔBDH,

$AB = DE = DH$ por construcción

$AC = AD = BD = AE = BH$ por construcción

(LLL) $\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta ADE \cong \Delta BDH$

$\Rightarrow \angle ADB = \angle DAE = \angle DBH$

Como los tres triángulos son isósceles, entonces

$\angle BDH = \angle BHD = \angle ADE = \angle AED = \angle DAB = \angle DBA$

$\angle ADE = \angle ADH + \angle HDE$

$\angle BHD = \angle BDH = \angle BDA + \angle ADH$

$\Rightarrow \angle HDE = \angle BDA$

El ΔEDH es isósceles ya que

$DE = DH$

(II) $\Rightarrow \Delta EDH \approx \Delta ADB$

$\Rightarrow EH : ED = AB : AD$

$EH \cdot AD = AB \cdot ED$

pero

$AD = AC = nAB$ y

$ED = AB$

$EH \cdot nAB = AB \cdot AB$

$\therefore \; EH = \frac{1}{n} AB$

Observación: Podemos también notar que

$$HK = \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) AB \quad \text{y}$$

$$EK = \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{n} AB$$

Demostración: Para $n = 3$.

Por demostrar que $HK = \left(2 - \frac{1}{9}\right) AB$

$EA = 3AB$ por construcción

Sea G el simétrico a D con respecto a AB

$\Rightarrow AG = AD = BD = BG$

$\Rightarrow\ \Delta AGB \cong \Delta ADB$
$\Rightarrow\ \angle ADB = \angle AGB$
$\angle DAB = \angle BAG = \angle GBA = \angle ABD$
$\angle EAD + \angle DAB + \angle BAG = \angle AGB + \angle BAG + \angle ABG = 180^\circ$
$\therefore$ E, A y G son colineales
$\Rightarrow\ EG = 6AB$

Ahora,
F es diametralmente opuesto a E
$\Rightarrow\ EF = 2AB,$

además $ED = AB$ y $EH = \frac{1}{3}AB$
$\Delta\, EGF \approx \Delta\, HGK$ ya que por construcción $HG = KG$
F, K y G son colineales (la demostración es análoga a la anterior)
y $\angle EGF$ es común.
(II) $\Rightarrow\ EG : HG = EF : HK$

Considero el $\Delta\, ABH$
$\angle HAB + \angle ABH + \angle BHA = 180^\circ$
$180^\circ = \angle HAD + \angle DAB + \angle ABD - \angle HBD + \angle BHA$
$\angle HAD = \angle HBD$ y $\angle DAB = \angle ABD$
$\Rightarrow 180^\circ = 2\angle DAB + \angle BHA$
pero
$\angle DAB = \angle HED$ y $2\angle HED + \angle HDE = 180^\circ$
entonces
$2\angle DAB + \angle BHA = 2\angle HED + \angle HDE$
$\Rightarrow\ \angle BHA = \angle HDE$

Ahora,
$\angle EHD + \angle DHA = \angle EHD + \angle DHB + \angle BHA =$
$= \angle EHD + \angle HED + \angle HDE = 180^\circ$
$(\angle DHA = \angle DHB = \angle HED$ y $\angle BHA = \angle HDE)$

$\therefore$ E, H y A son colineales

$$\therefore \frac{EG}{HG} = \frac{6AB}{EG \cdot EH} = \frac{6AB}{6AB - \frac{1}{3}AB} =$$

$$=\frac{6AB}{\frac{17}{3}AB}=\frac{EF}{HK}$$

pero $\quad \dfrac{EF}{HK}=\dfrac{2AB}{HK}$

$$\Rightarrow \frac{6AB}{\frac{17}{3}AB}=\frac{2AB}{HK}$$

$$HK \cdot 6AB=\frac{34}{3}\overline{AB}^2$$

$$HK=\frac{\frac{34}{3}\overline{AB}^2}{6AB}=\frac{34}{18}AB=\frac{17}{9}AB$$

$$HK= 2-\frac{1}{9}\ AB= 2-\frac{1}{3^2}\ AB \qquad \text{q.e.d.}$$

Por demostrar $EK=\dfrac{\sqrt{4n^2-1}}{n}AB$, para $n=3$

Considero el Δ AKE, es isósceles ya que
AE = AK por ser radios de (A, C).
AD es la bisectriz del $\angle$EAK
pues $\angle$EAD = $\angle$DAK
$\Rightarrow$ AL es la altura del triángulo sobre EK
$\Rightarrow$ $\angle$ALK = 1 recto y EL = LK
$\Rightarrow$ LK es la altura del Δ DKX

El Δ DKX $\cong$ ΔKDF ya que ADFB es paralelogramo, XK || DF
$\Rightarrow$ DX = FK, DF = XK y DK es lado común

$\therefore$ LK es altura del Δ KDF

Ahora,

EK = 2LK y como

KF = EH

$\Rightarrow \Delta KDF \approx \Delta DAB$ ya que

$KF = \frac{1}{3} AB$

$AB = DF = DK = \frac{1}{3} DA$

Sea h la altura del Δ ADB sobre AB

$$h^2 = \overline{AD}^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2$$

como AD = 3AB

$$h^2 = 9\overline{AB}^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2$$

$$h^2 = \left(9 - \frac{1}{4}\right)\overline{AB}^2$$

$$h = \frac{\sqrt{35}}{2} AB$$

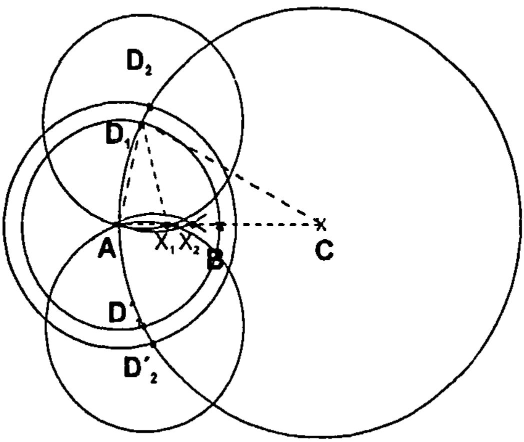
pero $LK = \frac{1}{3} h = \frac{\sqrt{35}}{6} AB$

$$EK = 2LK = \frac{\sqrt{35}}{3} AB$$

$$\therefore EK = \frac{\sqrt{(4x3^2) - 1}}{3} AB \qquad \text{q.e.d.}$$

• **Problema 11.** Trazar un segmento igual a $\frac{1}{2^n}$ del segmento dado AB (dividir el segmento AB en 2^n partes iguales, $n = 2, 3, \ldots$).

Construcción 1: Trazamos el segmento AC = 2AB (prob. 2). Describimos la circunferencia (C, A) y llamamos D_1 y D_1' a los puntos de intersección con (A, B). Dibujamos (D_1, A) y (D_1', A), en su intersección obtenemos X_1. El segmento $BX_1 = AX_1 = \frac{1}{2}$ AB. Ahora describimos (A, BD_1) y en su intersección con (C, A) obtenemos D_2 y D_2'. Trazamos (D_2, A) y (D_2', A) hasta su encuentro en el punto X_2. El segmento $BX_2 = \frac{1}{2^2}$ AB. Si luego dibujamos las circunferencias (A, BD_2), (D_3, A) y (D_3', A), obtendremos el punto X_3 tal que $BX_3 = \frac{1}{2^3}$ AB, etc.



Demostración: Los triángulos ACD_1 y AD_1X_1 son isósceles por construcción ($AC = CD_1$ por ser radios de (C, A) y $AD_1 = D_1X_1$ por ser radios de (D_1, A)).

A, X y C están alineados ya que pertenecen a la mediatriz de D_1D_1'

$AD_1 = AD_1'$; $X_1D_1 = X_1D_1'$ y $CD_1 = CD_1'$

$\angle D_1X_1A = \angle D_1AX_1 = \angle D_1AC = \angle AD_1C$

$\Rightarrow \angle AD_1X_1 = \angle D_1CA$

$\therefore \Delta ACD_1 \approx \Delta AD_1X_1$

$\Rightarrow AD_1 : AC = AX_1 : AD_1$

pero $AD_1 = AB$ y $AC = 2AB$

$AB \cdot AB = AX_1 \cdot 2AB$

$$\therefore \frac{1}{2}AB = AX_1$$

Sean $AB = a$ y $BD_k = m_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

El segmento BD_1 es mediana del ΔACD_1 ya que $AB = BC$

(13) $\Rightarrow 4\overline{BD_1}^2 = 2\overline{AD_1}^2 + 2\overline{CD_1}^2 - \overline{AC}^2$ ó

$$4m_1^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2 + 4\overline{AB}^2$$

$$m_1^2 = \overline{BD_1}^2 = \frac{2\overline{AB}^2 + 4\overline{AB}^2}{4} = \frac{2a^2 + 4a^2}{4} = \frac{1+2}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

i.e. $\overline{BD_1}^2 = \dfrac{3}{2}a^2$

Los triángulos isósceles ACD_2 y AD_2X_2 son semejantes ya que por construcción

$AC = CD_2$ y $AD_2 = D_2X_2$

A, X_2 y C son colineales pues pertenecen a la mediatriz de D_2D_2'

$\angle CD_2A = \angle D_2AC = \angle D_2AX_2 = \angle AX_2D_2$

$\Rightarrow AD_2 : AC = AX_2 : AD_2$

pero $AD_2 = BD_1$ por construcción

$AD_2 \cdot AD_2 = AX_2 \cdot AC$

$$AX_2 = \frac{\overline{AD_2}^2}{AC} = \frac{\overline{BD_1}^2}{2AB}$$

$$AX_2 = \frac{\frac{3}{2}a^2}{2a} = \frac{3}{4}a$$

$$AB = AX_2 + BX_2 \Rightarrow BX_2 = \frac{1}{4}a$$

$$\therefore BX_2 = \frac{1}{2^2}AB$$

De modo análogo

$$\overline{BD_2}^2 = m_2^2 = \frac{1+2+2^2}{2}a^2 \quad y \quad BX_3 = \frac{1}{2^3}AB$$

$AD_3 = BD_2$ por construcción, BD_2 es mediana del $\Delta\ ACD_2$

$\Rightarrow 4\overline{BD_2}^2 = 2\overline{AD_2}^2 + 2\overline{CD_2}^2 - \overline{AC}^2$

pero $\quad CD_2 = AC = 2AB$

$4\overline{BD_2}^2 = 2\overline{AD_2}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD_2}^2 + 4\overline{AB}^2$

pero $\quad AD_2 = BD_1$

$4\overline{BD_2}^2 = 2\overline{BD_1}^2 + 4\overline{AB}^2$

como $\quad 2\overline{BD_1}^2 = 3a^2$

$4\overline{BD_2}^2 = 3a^2 + 4a^2$

$$m_2^2 = \overline{BD_2}^2 = \frac{3a^2 + 4a^2}{4} = \frac{1+2+2^2}{2^2}a^2$$

Consideremos $\Delta\ ACD_3$ y $\Delta\ AD_3X_3$ que son isósceles y semejantes entonces $AD_3 : AC = AX_3 : AD_3$

$$\frac{\overline{AD_3}^2}{AC} = AX_3$$

$$\frac{\overline{BD_2}^2}{2a} = AX_3$$

$$\frac{\frac{1+2+2^2}{2}a^2}{2a} = \frac{1+2+2^2}{2\cdot 2^2}a = \frac{7}{8}a$$

$$\Rightarrow BX_3 = \frac{1}{8}a = \frac{1}{2^3}AB$$

En general:

$$m_{k-1}{}^2 = \frac{1+2+2^2+...+2^{k-1}}{2^{k-1}}a^2 \quad \text{y} \quad BX_k = \frac{1}{2^k}AB$$

$$AB = AX_k + BX_k$$

$$AX_k = \frac{\overline{BD_{k-1}}^2}{2a} = \frac{m_{k-1}{}^2}{2a}$$

$$AX_k = \frac{\frac{1+2+2^2+...+2^{k-1}}{2^{k-1}}a^2}{2a} = \frac{1+2+2^2+...+2^{k-1}}{2^k}a$$

$$\Rightarrow BX_k = \frac{1}{2^k}a$$

i.e. $$\frac{1+2+2^2+...+2^{k-1}}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 1$$

Demostración por inducción:

Para $k = 1$ $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Supongamos que es válido para k, por demostrarlo para k+1

$$\frac{1+2+2^2+...+2^{k-1}}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 1$$

$$\frac{1+2+2^2+...+2^{k-1}+1}{2^k} = 1$$

$$\frac{1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}+1}{2^k}\left(\frac{2}{2}\right)=1$$

$$\frac{2+2^2+2^3+\ldots+2^k+2}{2^{k+1}}=1$$

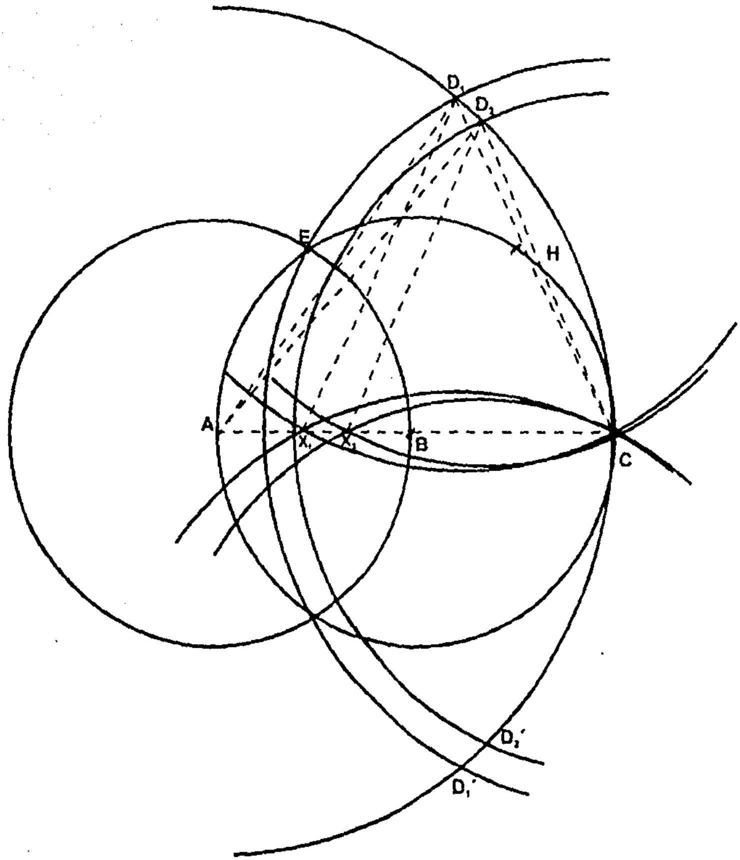
$$\frac{2+2+2^2+2^3+\ldots+2^k}{2^{k+1}}=1$$

$$\frac{1+2+2^2+\ldots+2^k+1}{2^{k+1}}=1$$

$$\frac{1+2+2^2+\ldots+2^k}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=1 \qquad \text{q.e.d.}$$

Entonces, para dividir el segmento AB en 2^n partes iguales, es necesario aumentar 2^n veces el segmento BX_n (problema 2).

Construcción 2: Trazamos el segmento AC = 2AB (prob. 2), describimos (B, A) y en ella trazamos las cuerdas AE = EH = HC = AB = a. Describimos las circunferencias (A, C) y (C, E) hasta su intersección en D_1 y D_1'. Dibujamos (D_1, C) y (D_1', C) y en la intersección encontramos el punto X_1 tal que $BX_1 = \frac{1}{2}$ AB. Describimos (C, BD_1) que intersecta (A, C) en D_2 y D_2', trazamos (D_2, BD_1) y (D_2', BD_1) que al cortarse determinarán el punto buscado X_2 tal que $BX_2 = \frac{1}{2^2}$ AB. Si se describen (C, BD_2), (D_3, BD_2) y (D_3', BD_2) determinamos X_3 tal que $BX_3 = \frac{1}{2^3}$ AB, etc.



Demostración:

Los triángulos isósceles ACD_1 y CD_1X_1 son semejantes ya que por construcción

$AC = AD_1$ y

$D_1C = D_1X_1$

A, X_1 y C son colineales pues pertenecen a la mediatriz de D_1D_1'.
$\angle AD_1C = \angle D_1CA = \angle D_1CX_1 = \angle CX_1D_1$
$\Rightarrow CX_1 : CD_1 = CD_1 : AC$

Como Δ AEC es rectángulo

(9) $\Rightarrow \overline{CE}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AE}^2$

pero $CA = 2AB$ y $AE = AB$

$\overline{CE}^2 = 4\overline{AB}^2 - \overline{AB}^2 = 3\overline{AB}^2$

$CE = \sqrt{3}AB$

como $CD_1 = CE$

entonces

$$CX_1 \cdot AC = CD_1 \cdot CD_1 = \overline{CE}^2$$

$$CX_1 = \frac{\overline{CE}^2}{AC} = \frac{3\overline{AB}^2}{2AB} = \frac{3}{2}AB$$

$$AC = AX_1 + CX_1$$

$$2AB = AX_1 + \frac{3}{2}AB$$

$$AX_1 = 2AB - \frac{3}{2}AB = \frac{1}{2}AB$$

$$AX_1 + BX_1 = AB$$

$$BX_1 = AB - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AB$$

Sea $BD_k = m_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

BD_1 es la mediana del Δ ACD_1 por construcción.

Ahora, en la *Construcción 1* vimos que:

$$4\overline{BD_1}^2 = 4m_1^2 = 2\overline{AD_1}^2 + 2\overline{CD_1}^2 - \overline{AC}^2$$

$$4\overline{BD_1}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CE}^2 - \overline{AC}^2$$

$$4\overline{BD_1}^2 = \overline{AC}^2 + 2\overline{CE}^2 = 4a^2 + 2\cdot 3a^2$$

$$4{m_1}^2 = 4a^2 + 2\cdot 3a^2$$

$${m_1}^2 = \frac{4a^2 + 2\cdot 3a^2}{4} = a^2 + \frac{3}{2}a^2 = \left(1 + \frac{3}{2}\right)a^2$$

Consideremos los triángulos isósceles ACD_2 y CD_2X_2
Por construcción
$AC = AD_2$ y
$D_2X_2 = CD_2 = BD_1$
A, X_2 y C son colineales pues pertenecen a la mediatriz de D_2D_2'
$\angle AD_2C = \angle D_2CA = \angle D_2CX_2 = \angle CX_2D_2$
$\Rightarrow CX_2 : CD_2 = CD_2 : AC$
como $CD_2 = BD_1 = m_1$ y $AC = 2AB = 2a$

$$CX_2 = \frac{\overline{CD_2}^2}{AC} = \frac{{m_1}^2}{2a} = \frac{\frac{5}{2}a^2}{2a} = \frac{5}{4}a = \frac{5}{2^2}a$$

$AC = AX_2 + CX_2;$
$AB = AX_2 + BX_2$
$\Rightarrow AX_2 = AB - BX_2$
$2AB = AB - BX_2 + CX_2$
$BX_2 = CX_2 - AB$

$$BX_2 = \frac{5}{2^2}a - a = \frac{1}{2^2}AB$$

Análogamente se demuestra que:

$${m_2}^2 = \overline{BD_2}^2 = \frac{9}{4}a^2, \quad CX_3 = \frac{9}{8}a \quad \text{y} \quad BX_3 = \frac{1}{2^3}AB$$

y en general:

$${m_{k-1}}^2 = \overline{BD_{k-1}}^2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{3}{2^{k-1}}\right)a^2 \quad \text{y}$$

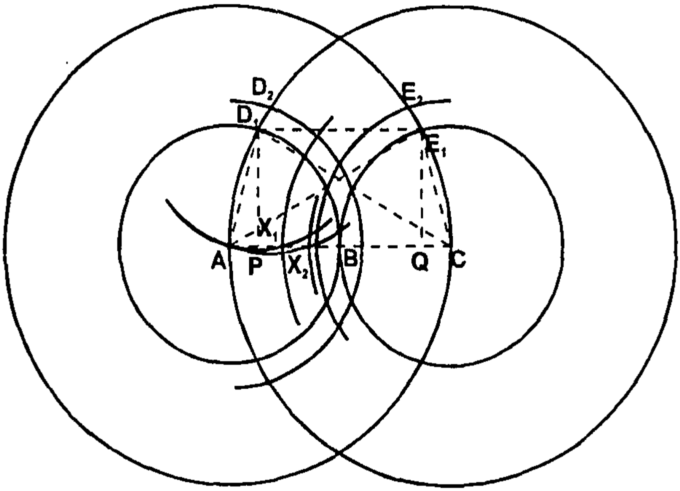
$$BX_k = \frac{1}{2^k}AB$$

En la construcción según el procedimiento 1, para valores grandes de k ($k \leq n$), la determinación de X_k no es precisa, los arcos de las circunferencias que determinan este punto casi tocan uno a otro, entonces es posible resolver este problema de la siguiente manera:

Construcción 3: Trazamos AC = 2AB (prob. 2). Describimos (A, C), (C, A) y (C, AB) y en las intersecciones obtenemos D_1 y E_1. Trazamos las circunferencias (D_1, A) y (C, D_1E_1) y en su intersección obtenemos el punto buscado X_1 tal que $BX_1 = \frac{1}{2}$ AB.

Describimos (A, BD_1) y (C, BD_1) y en las intersecciones con (A, C) y (C, A) obtenemos D_2 y E_2 tales que $AD_2 = CE_2 = BD_1$.

Trazamos (D_2, A) y (C, D_2E_2) hasta su encuentro en X_2. El segmento $BX_2 = \frac{1}{2^2}$ AB, etc.



Demostración:

Por construcción
$AD_1 = AB = D_1X_1$,
$CE_1 = AB$ y
$CX_1 = D_1E_1$

(3) $\Rightarrow AD_1 = CE_1$ y $CX_1 = D_1E_1$
$\therefore X_1D_1E_1C$ es paralelogramo
$\Rightarrow X_1C \parallel D_1E_1$

Considero ΔD_1AC y ΔE_1AC
AC es lado común
$CD_1 = AE_1$ por construcción
$AD_1 = CE_1$ por construcción

(LLL) $\Rightarrow \Delta D_1AC \cong \Delta E_1AC$

Sean P y Q los pies de las alturas de ΔD_1AC y ΔE_1AC, sobre AC, respectivamente
$\Rightarrow D_1P = E_1Q$
$\Rightarrow AC \parallel D_1E_1 \parallel X_1C$
$\therefore X_1$ está en la recta AC.

Análogamente podemos demostrar que $X_2, X_3, \ldots, X_n$ están en la recta AC.
Como AC es la mediatriz de D_1D_1', D_2D_2', etc.
$\Rightarrow D_1X_1 = D_1'X_1$;
$D_2X_2 = D_2'X_2'$; . . . etc.

Entonces por lo demostrado en la *Construcción 1:*

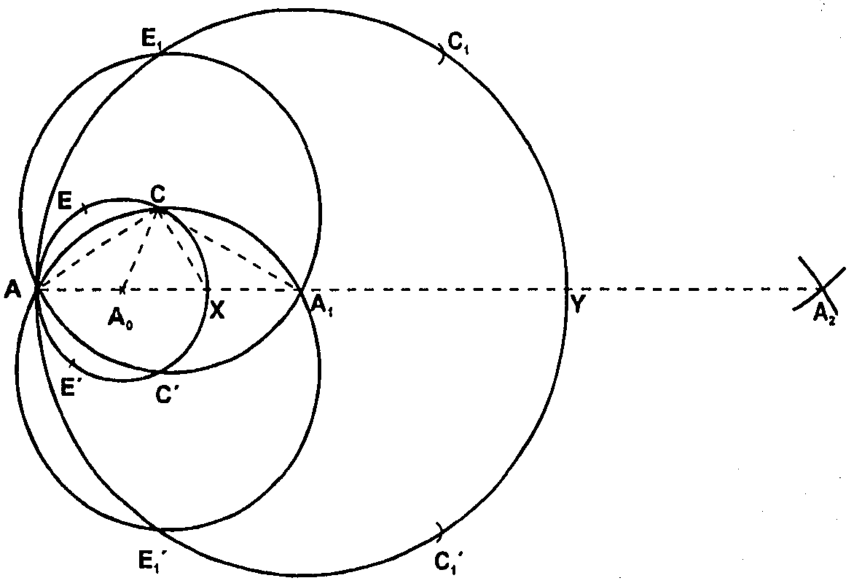
$$BX_1 = \frac{1}{2}AB;$$

$$BX_2 = \frac{1}{2^2}AB;$$

$$BX_3 = \frac{1}{2^3}AB; \quad \text{etc}$$

• **Problema 12:** Trazar un segmento que sea 3^n veces mayor que el segmento dado AA_0 ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Construcción: Describimos la circunferencia (A_0, A) y sin cambiar la abertura del compás trazamos las cuerdas AE = EC, AE' = E'C'. Trazamos las circunferencias (C, A) y (C', A) hasta su intersección en el punto A_1. El segmento $AA_1 = 3AA_0$. Describimos la circunferencia (A_1, A) y trazamos las cuerdas $AE_1 = E_1C_1$, $AE_1' = E_1'C_1'$. En la intersección de (C, A) y (C_1', A) obtenemos el punto A_2. El segmento $AA_2 = 3^2\, AA_0$, etc.



Demostración:

Por construcción

$AE = AE'$

$AC = AC'$

$A_1C = A_1C'$ y

$A_0C = A_0C'$

$\Rightarrow A, A_0$ y A_1 están alineados

ya que pertenecen a la mediatriz de CC'

Sea X tal que $EC = CX$,

i.e. $AX = 2AA_0$

Considero $\Delta\ CAA_0$ y $\Delta\ CXA_1$

Por construcción

$CA = CA_1$ y

$CA_0 = CX$

$\angle CAA_1 = \angle CA_1A$ ya que $\Delta\ CAA_1$ es isósceles

$\Rightarrow \angle A_0CA = \angle CAA_0 = \angle CAA_1 = \angle CA_1A = \angle X A_1C = \angle A_1CX$

$\Rightarrow \angle CA_0A = \angle CXA_1$

$\Rightarrow \Delta\ CAA_0 \cong \Delta\ CXA_1$

$\Rightarrow AA_0 = XA_1$

$AA_1 = AX + XA_1 = 2AA_0 + AA_0 = 3AA_0$

Sea Y tal que $C_1Y = E_1C_1$,

i.e. $AY = 2AA_1$

$A_1C_1 = A_1C_1'$

$YC_1 = YC_1'$

$\Rightarrow A_1$, Y son colineales pues están en la mediatriz de CC_1

$A_1Y = AA_1 = 3AA_0$

Análogamente a la demostración anterior

$A_1Y = YA_2$

$AA_2 = AA_1 + A_1Y + YA_2$

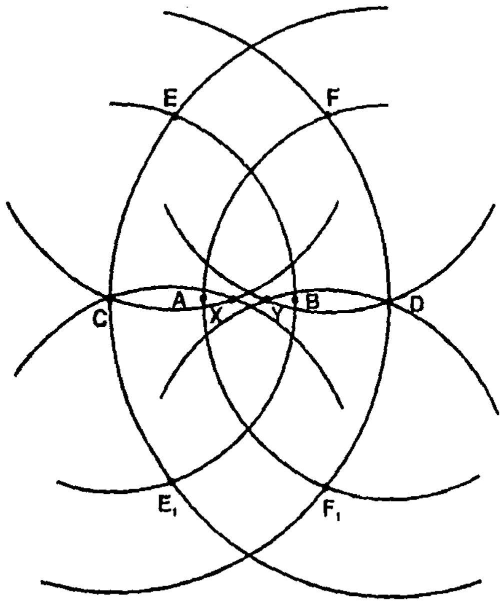
$AA_2 = AA_1 + 2A_1Y$

$AA_2 = 3AA_1$

$AA_2 = 3(3AA_0) = 3^2\ AA_0$

• **Problema 13:** Dividir el segmento AB en tres partes iguales. Propuesta por Lorenzo Mascheroni.

Construcción: Trazamos AC = AB = BD (problema 2). Describimos (C, B), (C, D), (D, A) y (D, C) en cuyas intersecciones obtenemos los puntos E, E_1, F y F_1. Las circunferencias (E, C) y (E_1, C), (F, D) y (F_1, D) determinarán los puntos buscados X, Y que dividen el segmento AB en tres partes iguales.



Demostración:

Considero los triángulos isósceles CEX y CDE.

X, Y están alineados con C y D
por estar en la mediatriz de EE_1 y FF_1

C y D están alineados con A y B por construcción.

$\angle EXC = \angle ECX = \angle ECD = \angle DEC$

$\Rightarrow \Delta\ CEX \approx \Delta\ CDE$

$\Rightarrow CX : CE = CE : DC$

Por construcción

$CE = CB$
$AC = AB$
$CB = 2AB$ y
$AD = 2AB$

$\Rightarrow\ CE = 2AB$

$CD = CA + AD = AB + 2AB = 3AB$

$$CX = \frac{\overline{CE}^2}{DC} = \frac{4\overline{AB}^2}{3AB} = \frac{4}{3}AB$$

$CX = CA + AX = AB + AX$

$$AX = \frac{4}{3}AB - AB = \frac{1}{3}AB$$

Análogamente se demuestra que

$$BY = \frac{1}{3}AB$$

• **Problema 14:** Trazar el segmento $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ AB, donde AB = 1 y n = 1, 2, ..., 25.

Construcción:

Describimos la circunferencia (A, B) y con el radio AB igual a un segmento unitario, para simplificar la notación, trazamos en ella las cuerdas BC = CD = DE. Describimos (B, D) y (E, C) hasta su encuentro en los puntos F y F_1. Trazamos (B, AF) y (E, AF) que intersectarán (A, B) en los puntos H y H_1, y las circunferencias (B, D) y (E, C) en los puntos N y N_1; M y M_1. Describimos (E, A) y (B, A) y en sus intersecciones con las circunferencias (B, AF) y (E, AF) marcamos P, P_1, Q y Q_1.

Las circunferencias (P, B) y (P_1, B) se cortarán en el punto R, mientras que la circunferencia (A, B) la intersectarán en los puntos S y S_1. De igual manera las circunferencias (Q, E) y (Q_1, E) se cortarán en el punto T, mientras que a (A, B) la intersectarán en los puntos O y O_1.

Describimos (R, AB) y (F_1, AB) hasta su encuentro con (A, B) en los puntos L, L_1 y G. La intersección de las circunferencias (O, A) y (O_1, A) determinarán el punto K. Finalmente trazamos (K, AB) y (T, AB) en cuya intersección obtenemos los puntos I e I_1.

Entonces:

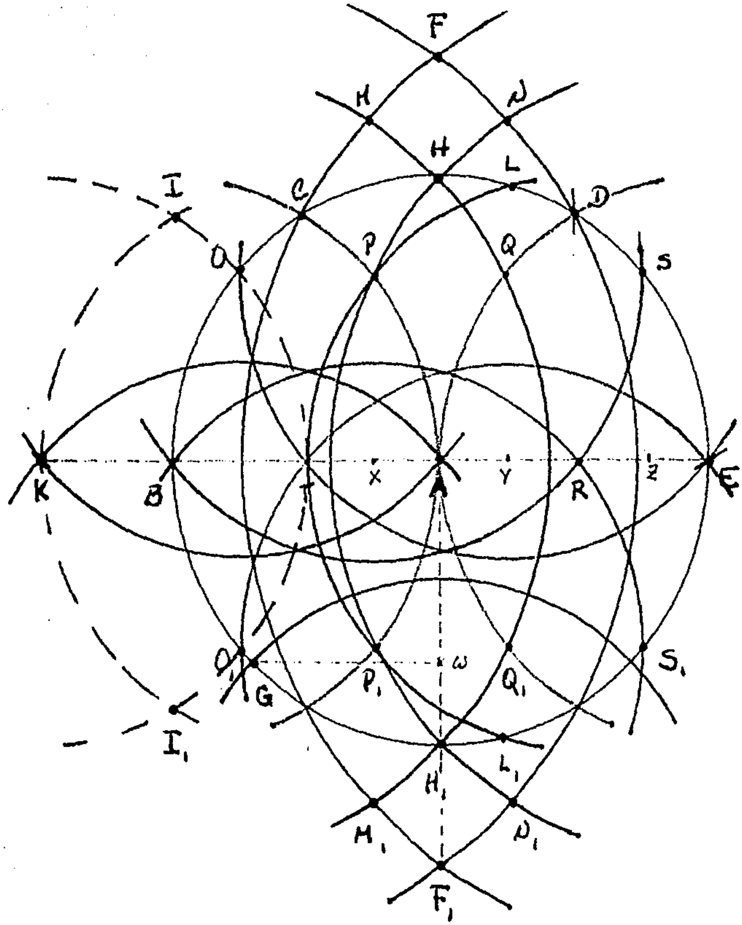
$$AT=\frac{1}{2}\sqrt{1},\quad PT=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad DR=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad AB=\frac{1}{2}\sqrt{4},\quad HT=\frac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$AM=\frac{1}{2}\sqrt{6},\quad QQ_1=\frac{1}{2}\sqrt{7},\quad AF=\frac{1}{2}\sqrt{8},\quad BR=\frac{1}{2}\sqrt{9},\quad BL=\frac{1}{2}\sqrt{10},$$

$$PS_1=\frac{1}{2}\sqrt{11},\quad BD=\frac{1}{2}\sqrt{12},\quad HK=\frac{1}{2}\sqrt{13},\quad BS=\frac{1}{2}\sqrt{14},\quad LL_1=\frac{1}{2}\sqrt{15},$$

$$BE=\frac{1}{2}\sqrt{16},\quad FK=\frac{1}{2}\sqrt{17},\quad KN=\frac{1}{2}\sqrt{18},\quad KD=\frac{1}{2}\sqrt{19},\quad FG=\frac{1}{2}\sqrt{20},$$

$$I_1D=\frac{1}{2}\sqrt{21},\quad KS=\frac{1}{2}\sqrt{22},\quad MM_1=\frac{1}{2}\sqrt{23},\quad MN_1=\frac{1}{2}\sqrt{24},\quad KE=\frac{1}{2}\sqrt{25}$$



○ (A,B)

○ (B,D); (E,C)

○ (B,AF); (E,AF)

○ (B,A); (E,A)

○ (P,B); (P_1,B)

○ (Q,E); (Q_1,E)

○ (R,AB); (F_1,AB)

○ (O,A); (O_1,A)

◌ (K,AB); (T,AB)

Demostración: Por demostrar que K, B, T, A, R y E están alineados.

Por construcción A, B y E están alineados, y
$QT = Q_1T$
$QE = Q_1E$ y
$QB = Q_1B$
$\Rightarrow$ T, E y B están en la mediatriz de QQ_1
$\therefore$ T, E y B son colineales

Por construcción
$PR = P_1R$
$PB = P_1B$ y
$PE = P_1E$
$\Rightarrow$ R, B y E están en la mediatriz de PP_1
$\therefore$ R, B y E son colineales

$OK = O_1K$ por construcción
$OA = O_1A$ por construcción
$\Rightarrow$ K y A están en la mediatriz de OO_1

$KI = KI_1$ por construcción
$TI = TI_1$ por construcción
$\Rightarrow$ K y T están en la mediatriz de II_1,
$\therefore$ K, A y T son colineales
$\therefore$ K, B, T, A, R y E están alineados

Por demostrar que F, H, A, H_1 y F_1 están alineados

$AB = BC = CD = DE = EA = DA = 1$ por construcción
$\Rightarrow$ CDBA y CDEA son paralelogramos
$\Rightarrow CD \parallel BE$
$BF_1 = BF = EF = EF_1$ por construcción
$BH_1 = BH = EH = EH_1$ por construcción
$\Rightarrow \Delta BFE$ y ΔBHE son isósceles
$BA = AE \Rightarrow \Delta BAF \cong \Delta EAF$ y $\Delta BAH \cong \Delta EAH$
$\Rightarrow \angle BAH = \angle EAH$ y $\angle BAF = \angle EAF$
$\angle BAH + \angle EAH = 180^\circ \Rightarrow \angle BAH = 90^\circ$
$\angle BAF + \angle EAF = 180^\circ \Rightarrow \angle BAF = 90^\circ$
$\Rightarrow AF \perp BE$ y $AH \perp BE$
$\therefore$ F, H y A son colineales

De manera análoga se demuestra para F_1, H_1 y A

Como $CD \parallel BE \Rightarrow AH \perp CD$, para demostrar que
$\overset{\frown}{CH} = \overset{\frown}{HD}$
basta con demostrar que H está en la circunferencia (A, B),
i.e. AH = AB
Esta demostración se sigue de la dada en el problema 4, por lo tanto podemos decir que $\overset{\frown}{CH} = \overset{\frown}{HD}$.

Ahora, AH = AB y $AH \perp BE$
$\Rightarrow \Delta$ HAE es rectángulo, entonces
$\overline{HE}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AR}^2$
$\overline{HE}^2 = 1 + 1 = 2$
$HE = \sqrt{2}$

Considero el Δ PBE. Por construcción
$PE = HE = \sqrt{2}$
PB = AB = 1 y
BE = 2
Sean h la altura del Δ PBE sobre BE y X el pie de esa altura
Sean a = BX y b = XE
$a^2 + h^2 = \overline{PB}^2 = 1$
$h^2 + b^2 = \overline{PE}^2 = 2$
pero a + b = 2
entonces
$h^2 = 1 - a^2$
$b^2 + 1 - a^2 = 2$
$b^2 - a^2 = 1$ y $a = 2 - b$
$b^2 - (2 - b)^2 = 1$
$b^2 - 4 + 4b + b^2 = 1$
$4b = 5$

$b = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$

i.e. $BX = \frac{3}{4}$ y $XE = \frac{5}{4}$
pero Δ PBR es isósceles $\Rightarrow$ BX = XR

$$BX + XR = BR = \frac{6}{4}$$

$$BR + RE = BE$$

$$\Rightarrow RE = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = AR$$

De manera análoga se demuestra que

$$BT = TA = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathbf{AT = \frac{1}{2}\sqrt{1}}$$

Considero el Δ BPR, $BX = XR$

$BT + TX = XA + AR$ y $BT = AR$

$$\Rightarrow TX = XA = \frac{1}{4};\ BP = 1 \text{ y } BX = \frac{3}{4}$$

$$\overline{PX}^2 = \overline{BP}^2 - \overline{BX}^2$$

$$\overline{PX}^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\overline{PT}^2 = \overline{PX}^2 + \overline{TX}^2 = \frac{7}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16}$$

$$PT = \frac{\sqrt{8}}{4}$$

$$\therefore \mathbf{PT = \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Considero el Δ ADE que es equilátero y $AR = RE$

$\Rightarrow \Delta$ ADR es rectángulo

$$\overline{DR}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AR}^2$$

$$\overline{DR}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \mathbf{DR} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$AB = 1 \Rightarrow \quad \mathbf{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{4}$$

Considero el Δ THA que es rectángulo

$$\overline{HT}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{TA}^2$$

$$\overline{HT}^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \mathbf{HT} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Por demostrar que MX $\perp$ BE.

Considero el Δ CBE que es rectángulo ya que BE es diámetro;

CB = 1 y BE = 2 $\Rightarrow$ CE = $\sqrt{3}$

Ahora considero el Δ MBE;

BM = AF = $\sqrt{2}$,

EM = EC = $\sqrt{3}$ y

BE = 2

Sea h la altura del triángulo sobre BE y Y el pie de la altura.

Sean BY = a, YE = b

$a + b = 2$;

$a^2 + h^2 = 2$ y

$h^2 + b^2 = 3$

entonces

$b^2 - a^2 = 1$;

$a = 2 - b$

$b^2 - (2 - b)^2 = b^2 - 4 + 4b + b^2 = 1$

$4b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ YE = XE

$\therefore$ X = Y

$\Rightarrow$ MX $\perp$ BE

El Δ MXB es rectángulo, $BM = \sqrt{2}$ y $BX = \frac{3}{4}$

$$\overline{MX}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BX}^2$$

$$\overline{MX}^2 = 2 - \frac{9}{16} = \frac{23}{16}$$

El Δ MXA es rectángulo, $XA = \frac{1}{4}$

$$\overline{AM}^2 = \overline{MX}^2 + \overline{XA}^2$$

$$\overline{AM}^2 = \frac{23}{16} + \frac{1}{16} = \frac{24}{16}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{24}}{4}$$

$$\therefore \mathbf{AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}}$$

Considero el Δ QTE que es isósceles.
Sea Y el pie de la altura sobre TE

$$TY = YE \Rightarrow AY = YR = \frac{1}{4}$$

$$QT = QE = 1, \quad TY = \frac{3}{4}$$

$$\overline{QY}^2 = \overline{QT}^2 - \overline{TY}^2$$

$$\overline{QY}^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{17}{16}$$

$$QY = \frac{\sqrt{7}}{4} = Q_1Y$$

$$\Rightarrow QQ_1 = 2\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \mathbf{QQ_1 = \frac{1}{2}\sqrt{7}}$$

$$AF = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AF = \frac{1}{2}\sqrt{8}}$$

$$BR = BA + AR = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \mathbf{BR = \frac{1}{2}\sqrt{9}}$$

Por demostrar que L, Q, Q_1 y L_1 están alineados

El Δ LAR es isósceles ya que AL = RL
$\Rightarrow \ \angle LAR = \angle LRA$
$180° = \angle LAR + \angle LAT = \angle LRA + \angle LRE$
$\Rightarrow \angle LAT = \angle LRE; \quad AT = RE$
entonces $\Delta\, LTA \cong \Delta\, LER$
$\therefore$ LT = LE
además QT = QE y YT = YE, es decir, L, Q, Y están en la mediatriz de TE
$\therefore$ L, Q, Y son colineales

De manera análoga se demuestra para L_1, Q_1, Y.

Considero el Δ LYR que es rectángulo

$$\overline{LY}^2 = \overline{LR}^2 - \overline{YR}^2, \qquad YR = \frac{1}{4}$$

$$\overline{LY}^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Considero el Δ BLY que es rectángulo

$$\overline{BL}^2 = \overline{LY}^2 + \overline{BY}^2, \qquad BY = \frac{5}{4}$$

$$\overline{BL}^2 = \frac{15}{16} + \frac{25}{16} = \frac{40}{16}$$

$$BL = \frac{\sqrt{40}}{16}$$

$$\therefore \mathbf{BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}}$$

Por demostrar que O, P, Q y S son colineales
Δ PBX $\cong$ Δ QYT ya que
PB = QT, BX = TY y
$\angle$PBE = $\angle$QTE
$\Rightarrow$ QY = PX
Ahora,
PB=AB = AS y PS = AB
$\therefore$ PSBA es paralelogramo
$\Rightarrow$ PS || BE
i.e. P, Q y S están alineados
OA = AB = QE y OQ = AB = AE
$\Rightarrow$ OQAE es paralelogramo
$\Rightarrow$ OQ || BE
$\therefore$ O, P y Q están alineados
$\Rightarrow$ O, P, Q y S son colineales

De manera análoga se demuestra que
O_1, P_1, Q_1 y S_1 están alineados.

Ahora,
$PP_1 \perp P_1S_1$
$\Rightarrow$ el $\Delta\, PP_1S_1$ es rectángulo, $P_1S_1 = 1$

$$PP_1 = QQ_1 = \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$\overline{PS_1}^2 = \overline{PP_1}^2 + \overline{P_1S_1}^2 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$$

$$\therefore \mathbf{PS_1 = \frac{1}{2}\sqrt{11}}$$

El Δ BDE es rectángulo

$\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{DE}^2$

$\overline{BD}^2 = 4 - 1 = 3$

$\Rightarrow BD = \sqrt{3}$

$\therefore \mathbf{BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}}$

El Δ HKA es rectángulo

$\overline{HK}^2 = \overline{KA}^2 + \overline{HA}^2$

$\overline{HK}^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$

$\therefore \mathbf{HK = \frac{1}{2}\sqrt{13}}$

El Δ RSE es isósceles. Sea Z tal que RE $\perp$ SZ entonces el Δ BSZ es rectángulo

$\overline{SZ}^2 = \overline{QY}^2 = \frac{7}{16}, \qquad BZ = \frac{7}{4}$

$\overline{BS}^2 = \overline{SZ}^2 + \overline{BZ}^2$

$\overline{BS}^2 = \frac{7}{16} + \frac{49}{16} = \frac{56}{16}$

$BS = \frac{\sqrt{56}}{4}$

$\therefore \mathbf{BS = \frac{1}{2}\sqrt{14}}$

El Δ LYA es rectángulo

$\overline{LY}^2 = \overline{LA}^2 - \overline{AY}^2, \qquad AY = \frac{1}{4}$

$$\overline{LY}^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$LY = L_1Y \quad \Rightarrow \quad LL_1 = 2\sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\therefore \mathbf{LL_1 = \frac{1}{2}\sqrt{15}}$$

$$BE = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{BE = \frac{1}{2}\sqrt{16}}$$

El Δ FKA es rectángulo, $KA = \frac{3}{2}$

$$\overline{FK}^2 = \overline{KA}^2 + \overline{AF}^2$$

$$\overline{FK}^2 = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$$

$$\therefore \mathbf{FK = \frac{1}{2}\sqrt{17}}$$

Podemos afirmar que N y Y están alineados ya que se demuestra de manera análoga a que M y X están alineados. Entonces NY $\perp$ BE

$$\overline{NY}^2 = \overline{MX}^2 = \frac{23}{16}$$

El Δ NKY es rectángulo

$$\overline{KN}^2 = \overline{NY}^2 + \overline{KY}^2, \qquad KY = \frac{7}{4}$$

$$\overline{KN}^2 = \frac{23}{16} + \frac{49}{16} = \frac{72}{16}$$

$$KN = \frac{\sqrt{72}}{4}$$

$$\therefore \mathbf{KN} = \frac{1}{2}\sqrt{18}$$

El Δ KDR es rectángulo

$$\overline{KD}^2 = \overline{DR}^2 + \overline{KR}^2, \qquad \overline{DR}^2 = \frac{3}{4} \quad y \quad KR = 2$$

$$\overline{KD}^2 = \frac{3}{4} + 4 = \frac{19}{4}$$

$$\therefore \mathbf{KD} = \frac{1}{2}\sqrt{19}$$

Ahora, por construcción $F_1G = AB$ y $AG = AB$
entonces el Δ AGF_1 es isósceles
Sea W tal que $GW \perp AF$
$\Rightarrow AW = WF_1$
$AW + WF_1 = AF_1 = AF = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow AW = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$FW = AF + AW = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

El Δ GAW es rectángulo
$$\overline{GW}^2 = \overline{GA}^2 - \overline{AW}^2$$

$$\overline{GW}^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Considero el Δ FGW que es rectángulo
$$\overline{FG}^2 = \overline{GW}^2 + \overline{FW}^2$$

$$\overline{FG}^2 = \frac{1}{2} + \frac{18}{4} = \frac{20}{4}$$

$\therefore \mathbf{FG = \frac{1}{2}\sqrt{20}}$

El Δ IKT es equilátero

DR = CT = IB

$\Rightarrow$ I, C y D son colineales

El Δ BID es rectángulo

$\overline{ID}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BI}^2$

$\overline{ID}^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$II_1 = BI + BI_1 = \sqrt{3}$

$\overline{I_1D}^2 = \overline{I_1I}^2 + \overline{ID}^2$

$\overline{I_1D}^2 = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$

$\therefore \mathbf{I_1D = \frac{1}{2}\sqrt{21}}$

El Δ KSZ es rectángulo

$\overline{KS}^2 = \overline{KZ}^2 + \overline{SZ}^2$

$\overline{KS}^2 = \frac{81}{16} + \frac{7}{16} = \frac{88}{16}$

$KS = \frac{\sqrt{88}}{4}$

$\therefore \mathbf{KS = \frac{1}{2}\sqrt{22}}$

$MX = \frac{\sqrt{23}}{4}$ entonces, $MM_1 = 2MX$

$$\therefore \mathbf{MM_1} = \frac{1}{2}\sqrt{23}$$

El Δ MM_1N_1 es rectángulo

$$\overline{MN_1}^2 = \overline{MM_1}^2 + \overline{M_1N_1}^2$$

$$\overline{MN_1}^2 = \frac{23}{4} + \frac{1}{4} = \frac{24}{4}$$

$$\therefore \mathbf{MN_1} = \frac{1}{2}\sqrt{24}$$

$$KE = KB + AE = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \mathbf{KE} = \frac{1}{2}\sqrt{25}$$ q.e.d.

Conclusión.

En el Capítulo I se demostró el Teorema de Mohr-Mascheroni y en el Capítulo II se demuestran algunas construcciones particulares. Ahora sabemos que todo lo que se puede construir con regla y compás, se puede hacer sólo con compás, y a pesar de que estas últimas construcciones suelen ser más complicadas, también resultan ser más bonitas e interesantes.

Apéndice.

En esta sección se demuestran los teoremas generales que se usan en los problemas. Los teoremas referentes a congruencia y semejanza de triángulos se enuncian sólamente.

Definición: Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales sus lados y sus ángulos. La relación de congruencia se denotará con el símbolo $\cong$.

Teorema LAL: Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo entre ellos, entonces los triángulos son congruentes.

Teorema ALA: Si dos triángulos tienen un lado y los dos ángulos adyacentes a este lado respectivamente iguales, entonces los otros dos lados son iguales y los triángulos son congruentes.

Teorema LLL: Si dos triángulos tienen respectivamente iguales los tres lados, entonces son congruentes.

Definición: Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. Denotaremos la relación de semejanza mediante el símbolo $\approx$.

Teorema I: Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, tienen sus lados proporcionales.

Corolario: Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.

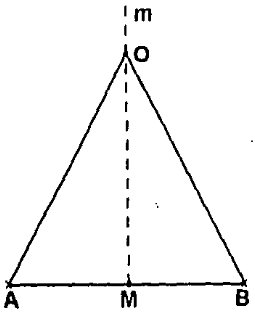
Teorema II: Dos triángulos que tienen un ángulo igual y los dos lados adyacentes a éste proporcionales son semejantes.

Teorema III: Dos triángulos que tienen sus tres lados proporcionales son semejantes.

Definición: La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos del mismo.

(1) La mediatriz de un segmento de recta es la perpendicular al segmento trazada por el punto medio del mismo.

Demostración:

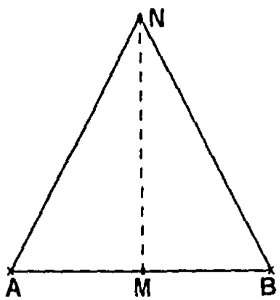


Sean A y B los extremos del segmento dado. Sea M su punto medio y m la perpendicular por M. Sea O un punto cualquiera en m.
Por demostrar que OA = OB.

Considero Δ OAM y Δ OBM
AM = MB por hipótesis
OM = OM lado común
$\angle AMO = \angle BMO = 1$ recto por hipótesis
(LAL) $\Rightarrow \Delta OAM \cong \Delta OBM$
$\Rightarrow OA = OB$

Por lo tanto cualquier punto de m es equidistante de A y B, es decir, está en la mediatriz de AB.

Ahora sólo falta demostrar que todo punto de la mediatriz está en la perpendicular al segmento AB trazada por el punto medio M.



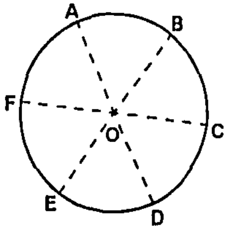
Sea N un punto en la mediatriz de AB, i.e. NA = NB
Sea M el punto medio de AB.

Consideremos Δ ANM y Δ BNM
AN = BN por hipótesis
AM = MB por hipótesis
MN = MN lado común
(LLL) $\Rightarrow \Delta ANM \cong \Delta BNM$
$\Rightarrow \angle AMN = \angle BMN$
como A, M y B son colineales
$\Rightarrow \angle AMN + \angle BMN = 2$ rectos
$\Rightarrow \angle AMN = \angle BMN = 1$ recto

$\therefore$ N está en la perpendicular trazada por M q.e.d.

(2) El compás con abertura igual al radio de la circunferencia la divide en seis partes iguales.

Demostración:



Consideremos (O, A).
Sabemos que
AB = BC = CD = DE = EF = FA = OA
OA = OB = OC = OD = OE = OF
$\Rightarrow$ los triángulos son equiláteros.

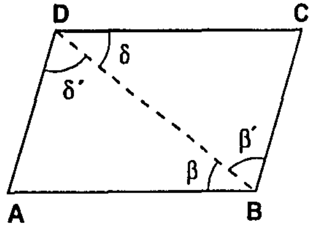
Sabemos que ángulos centrales que subtienden cuerdas iguales, subtienden arcos iguales

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$ q.e.d.

(3) Un cuadrilátero es paralelogramo $\Leftrightarrow$ los lados opuestos son congruentes.

Demostración:

$\models\!\Rightarrow$ Sea ABCD paralelogramo, i.e. $AB \parallel CD$ y $AD \parallel BC$



Consideremos Δ ABD y Δ CBD

$\beta = \delta$
ya que DB es transversal a paralelas
$\beta' = \delta'$
ya que $AD \parallel BC$
BD es lado común a ambos triángulos

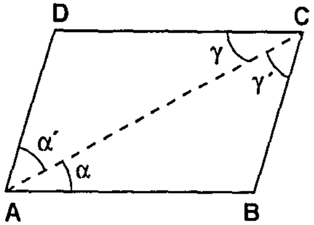
(ALA) $\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CBD$

$\Rightarrow AB = CD$ y $AD = BC$ q.e.d.

Además $\angle DAB = \angle DCB$

$\therefore$ los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

$\Leftarrow$| Sea ABCD un cuadrilátero tal que $AD = BC$ y $AB = DC$



Consideremos ΔABC y ΔADC
$AB = DC$ por hipótesis
$AD = BC$ por hipótesis
$AC = AC$ lado común
(LLL) $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ADC$
$\Rightarrow \alpha = \gamma$ y $\alpha' = \gamma'$

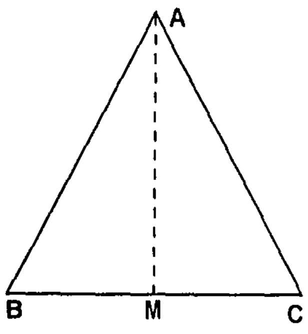
$\therefore AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$

$\Rightarrow$ ABCD es paralelogramo q.e.d.

(4) *Postulado de las paralelas:* Dados una recta *l* y un punto P que no está en la recta *l*, existe sólo una recta a través de P que sea paralela a *l*.

(5) En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a lados iguales son iguales.

Demostración:



Sea ABC un triángulo isósceles,
i.e. $AB = AC$
Trazamos la bisectriz del $\angle BAC$.
Sea M el punto medio donde la bisectriz corta al lado BC.

Consideremos ΔABM y ΔACM
$AB = AC$ por hipótesis
$\angle BAM = \angle MAC$ porque AM es bisectriz
$AM = AM$ lado común
(LAL) $\Rightarrow \Delta ABM \cong \Delta ACM$
$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$ q.e.d.

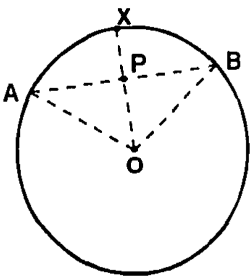
Además

$BM = MC$ y $AM \perp BC$ ya que
$\angle BMA + \angle AMC = 2$ rectos
$\Rightarrow \angle BMA = \angle AMC = 1$ recto

Es decir, en un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo determinado por los lados iguales es perpendicular al otro lado y lo corta en su punto medio.

(6) Si una recta que pasa por el centro de un círculo es perpendicular a una cuerda que no es su diámetro, entonces bisecta a la cuerda y a su arco menor.

Demostración:



Sean AB una cuerda de (O, A) y P tal que $OP \perp AB$.

Consideremos los triángulos AOP y BOP
$AO = BO$ por ser radios
$OP = OP$ lado común
$\angle APO = \angle BPO = 1$ recto
$\Rightarrow \Delta\, AOB$ es isósceles
$\Rightarrow \angle OAP = \angle OBP$

$180° = \angle OAP + \angle APO + \angle POA = \angle OBP + \angle BPO + \angle POB$
$\Rightarrow \angle POA = \angle POB$
$\Rightarrow \widehat{AX} = \widehat{XB}$

La medida de un arco menor es la medida de su ángulo central asociado

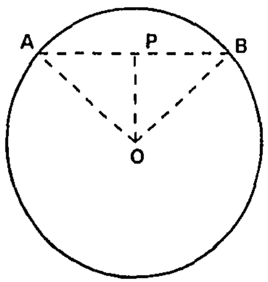
Además

$\Delta\, AOP \cong \Delta\, BOP$
$\Rightarrow AP = PB$

$\therefore$ OP bisecta a la cuerda AB y a su arco menor. q.e.d

Si una recta que pasa por el centro de un círculo bisecta a una cuerda que no es un diámetro, entonces es perpendicular a la recta.

Demostración:



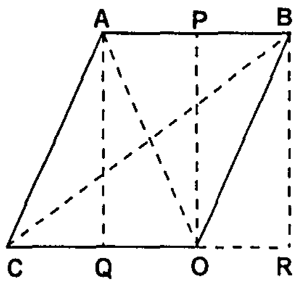
Sean AB una cuerda de (O, A) y OP tal que PA = PB

Considero Δ AOP y Δ BOP
AO = BO por ser radios
$\Rightarrow$ Δ AOB es isósceles
$\Rightarrow$ $\angle BAO = \angle ABO = \angle PAO = \angle PBO$
PA = BP por hipótesis
(LAL) $\Rightarrow$ $\Delta AOP \cong \Delta BOP$
$\Rightarrow$ $\angle APO = \angle BPO$
$\angle APO + \angle BPO = 180°$
$\Rightarrow$ $\angle APO = \angle BPO$ = 1 recto

$\therefore$ $OP \perp AB$ q.e.d.

(7) Sea ABOC paralelogramo tal que OA = OB = r y AC = r, entonces $\overline{OA}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{OB}^2 + 2\overline{AB}^2$

Demostración:



CO = AB por ser paralelogramo
Sean AQ = BR = PO perpendiculares a CO y AB

OA = OB
$\Rightarrow$ Δ OAB es isósceles
AC = r = OA
$\Rightarrow$ Δ ACO es isósceles
$\Rightarrow$ AP = PB y CQ = QO,
además
(LLL) $\Rightarrow$ $\Delta OAB \cong \Delta ACO$
$\Rightarrow$ AP = PB = CQ = QO = OR ya que $BR \perp CO$

Ahora: $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BR}^2 + \overline{CR}^2 \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

pero $BR = PO$ y $CR = CO + OR$

$$\Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{PO}^2 + (CO + OR)^2$$

como $CO = AB$ y $OR = PB$

$$\Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{PO}^2 + (AB + PB)^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \cdot PB + \overline{PB}^2$$

como $PB = \frac{1}{2}AB$

entonces

$$\overline{OA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{PO}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \cdot \frac{1}{2}AB$$

pero $\overline{PO}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{OB}^2$

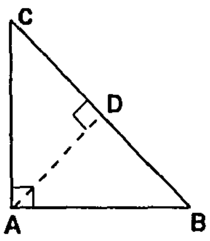
$$\overline{OA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2$$

$\therefore \overline{OA}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{OB}^2 + 2\overline{AB}^2$ q.e.d.

(8) *Teorema de Pitágoras:* Sea ABC un triángulo rectángulo, entonces

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

Demostración: (por semejanza de triángulos).



Sea D tal que $AD \perp BC$

Consideremos Δ ABC y Δ DCA

$\angle CAB = \angle ADC = 1$ recto

$\angle ACB = \angle ACD$ ya que

D, C y B son colineales

$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

$180° = \angle ADC + \angle ACD + \angle DAC$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle DAC$

$\Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta DCA$

$\therefore$ AC : CD = AB : AD = BC : AC

$\Rightarrow \overline{AC}^2 = BC \cdot CD$

Además

Δ ABC $\approx$ Δ DAB ya que

$\angle$CAB = $\angle$BDA = 1 recto

$\angle$CBA = $\angle$DBA y $\angle$DAB = $\angle$DCA

(demostración análoga a la citada arriba)

$\therefore$ AC : AD = AB : BD = BC : AB

$\Rightarrow \overline{AB}^2 = BC \cdot BD$

$\Rightarrow \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = BC \cdot CD + BC \cdot BD$

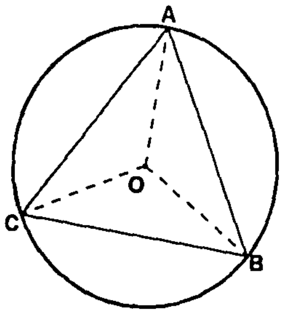
$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = BC(CD + BD)$

$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = BC \cdot BC$

$\therefore \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ q.e.d.

(9) La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

Demostración:



Sean B y C puntos en (O, A), por demostrar que

$\frac{1}{2}\overset{\frown}{CA} = \angle CBA$

$\angle$COA + $\angle$OAC + $\angle$ACO = 180°

$\angle$COA = 180° − $\angle$OAC − $\angle$ACO

además

180° = $\angle$CBA + $\angle$BAC + $\angle$ACB

$\Rightarrow$ $\angle$COA = $\angle$CBA + $\angle$BAC + $\angle$ACB − $\angle$OAC − $\angle$ACO

pero

$\angle$BAC = $\angle$BAO + $\angle$OAC y $\angle$ACB = $\angle$ACO + $\angle$OCB,

entonces

$\angle$COA = $\angle$CBA + $\angle$BAO + $\angle$OAC + $\angle$ACO + $\angle$OCB − $\angle$OAC − $\angle$ACO

$\angle COA = \angle CBA + \angle BAO + \angle OCB$
pero
$\angle BAO = \angle OBA$
pues Δ AOB es isósceles
y $\angle OCB = \angle OBC$ ya que
Δ BOC es isósceles
$\Rightarrow \angle COA = \angle CBA + \angle OBA + \angle OBC$
como
$\angle CBA = \angle OBA + \angle OBC$,
entonces
$\angle COA = \angle CBA + \angle CBA = 2\ \angle CBA$

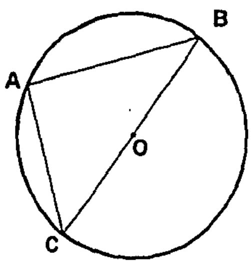
Por definición, la medida de un arco menor es la medida de ángulo central asociado, i.e.

$\overset{\frown}{CA} = \angle COA$

$\therefore \frac{1}{2}\overset{\frown}{CA} = \frac{1}{2}\angle COA = \angle CBA$ q.e.d.

Corolario: Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

Demostración:



Sean B y C puntos en (O, A) tales que BC es un diámetro y A está entre B y C.

Por la demostración anterior

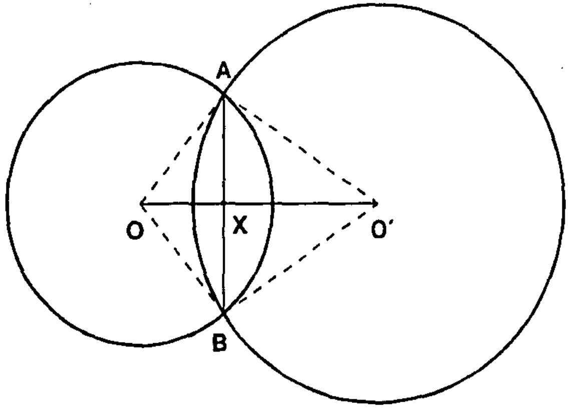
$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

pero arco BC = 180° por hipótesis
$\therefore \angle BAC = 90°$

Corolario: Si un triángulo está inscrito en un círculo, con un lado como diámetro entonces el triángulo es rectángulo.

(10) Dada AB cuerda común a las circunferencias (O, A) y (O', A) entonces OO' es la bisectriz perpendicular de AB.

Demostración: Sean r radio de (O, A) y r' radio de (O', A)



Δ AOB es isósceles ya que
OA = OB = r
$\Rightarrow$ $\angle$OAB = $\angle$OBA
Δ AO'B es isósceles ya que
O'A = O'B = r'
$\Rightarrow$ $\angle$O'AB = $\angle$O'BA
$\Rightarrow$ $\angle$OAO' = $\angle$OBO'
(LAL) $\Rightarrow$ Δ OAO' $\cong$ Δ OBO'
$\therefore$ $\angle$AOO' = $\angle$BOO' y $\angle$AO'O = $\angle$BO'O

Consideremos ΔOXA y Δ OXB
OA = OB por ser radios
OX = OX lado común
$\angle$AOX = $\angle$BOX y $\angle$OAX = $\angle$OBX
(ALA) $\Rightarrow$ ΔOXA $\cong$ Δ OXB
$\Rightarrow$ $\angle$AXO = $\angle$BXO = 1 recto y AX = BX

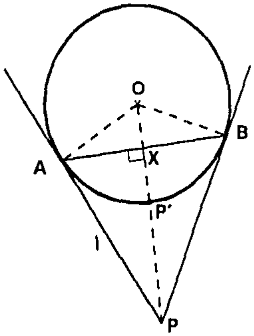
$\therefore$ OO' es la bisectriz perpendicular de AB q.e.d.

(11) La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada al punto de contacto es igual a la mitad del arco interceptado.

Demostración:

Sea l tangente a (O, r) y AB una cuerda.
Por demostrar que

$$\angle BAP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$



(12)
l tangente $\Rightarrow$ $OA \perp l$
Sea X tal que AX = XB
(6) $\Rightarrow$ $OP \perp AB$ $\Rightarrow$ $XP \perp AB$
Δ OAP es rectángulo y
(8) $\Rightarrow$ que es semejante al Δ AXP
$\Rightarrow$ $\angle AOX = \angle PAX$

$$\angle AOX = \overset{\frown}{AP'} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

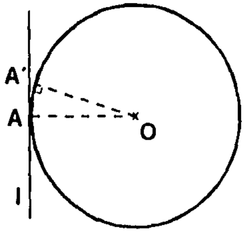
$$\Rightarrow \angle PAX = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

q.e.d.

(12) La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.

Demostración:

Sea (O, A) y l tangente a ella en el punto A. Por demostrar que $OA \perp l$



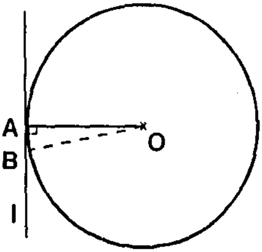
Demostración por contradicción.
Supongamos que no es perpendicular.
Sea A' un punto en la circunferencia tal que
$A'O \perp l$ $\Rightarrow$ Δ A'OA es rectángulo y AO es la hipotenusa
$\Rightarrow$ $AO > A'O$!
AO = A'O por ser radios de (O, A)

$\therefore$ A = A' y $OA \perp l$

q.e.d.

Si una recta es perpendicular al radio en el punto de la circunferencia entonces es tangente en ese punto.

Demostración:



Sea A un punto de la circunferencia (O, A) y l tal que $l \perp OA$

Por demostrar que l es tangente a (O, A) en A.

Supongamos que l no es tangente, i.e., l corta a (O, A) en un punto.

Sea B ese punto.

Como $OA \perp l \Rightarrow \Delta\, AOB$ es rectángulo

$\Rightarrow OB > OA$!

ya que $OA = OB$

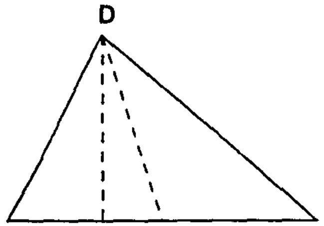
por ser radios de la circunferencia

$\therefore$ l es tangente a (O, A) en A q.e.d.

(13) Sea ADC un triángulo y B en AC tal que AB = BC. Entonces:

$$4\overline{BD}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 - \overline{AC}^2$$

Demostración:



Sea E tal que $DE \perp AB$

Por el teorema de Pitágoras

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2$$

pero

$$\overline{AE}^2 = (AB - EB)^2$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - 2AB \cdot EB + \overline{EB}^2 + \overline{ED}^2$$

pero

$$\overline{ED}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{EB}^2$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - 2AB \cdot EB + \overline{EB}^2 + \overline{DB}^2 - \overline{EB}^2$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DB}^2 - 2AB \cdot EB$$

Además $\overline{CD}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{EC}^2$

$$\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{EB}^2 + \overline{EC}^2$$

pero

$$\overline{EC}^2 = (EB + BC)^2$$

$$\Rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{EB}^2 + \overline{EB}^2 + 2EB \cdot BC + \overline{BC}^2$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 + 2EB \cdot BC$$

Como $\quad AB = BC = \frac{1}{2}AC$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DB}^2 - 2AB \cdot EB + \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 + 2EB \cdot BC$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + 2\overline{DB}^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 - 2AB \cdot EB + 2EB \cdot AB$$

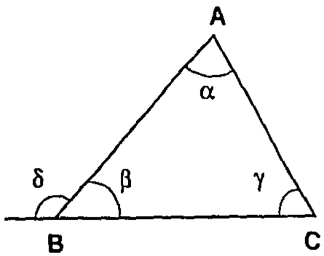
$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{DB}^2 + 2\left(\frac{1}{4}\overline{AC}^2\right)$$

$$2\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \frac{1}{2}\overline{AC}^2$$

$\therefore 4\overline{DB}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 - \overline{AC}^2$ q.e.d.

(14) La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de sus dos ángulos interiores no contiguos.

Demostración:



Sea ABC un triángulo

$\delta + \beta = 180°$

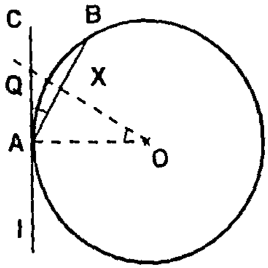
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\Rightarrow \; \delta + \beta = \alpha + \beta + \gamma$

$\Rightarrow \; \delta = \alpha + \gamma$ q.e.d..

(15) Sea l una recta y A un punto de contacto en la circunferencia (O, A), AB cuerda tal que $\angle CAB = \frac{1}{2} AB$ entonces l es tangente a (O, A).

Demostración:



Sea Q un punto de l tal que $QO \perp AB$
Sea X el punto de intersección de QO y AB

$\angle CAB = \angle QAB = \frac{1}{2} AB$ y

$\angle AOQ = \angle AOX = \frac{1}{2} AB$

por ser $AX = BX$ y $\angle AOX$ central,
i.e. $\angle CAB = \angle AOX$

como $\angle AXQ = \angle AXO = 90°$
$\Rightarrow \angle AQX = \angle XAO$
pero $\angle AQX + \angle QAX = 90°$
$\Rightarrow \angle QAX + \angle XAO = 90°$
($\angle QAX = \angle CAB$ y $\angle XAO = \angle BAO$)
$\angle CAB + \angle BAO = \angle CAO = 90°$
como AO es radio perpendicular a l

$\Rightarrow$ l es tangente en A q.e.d.

Bibliografía.

Clemens, O'Daffer y Cooney. Geometría con aplicaciones y solución de problemas. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., U.S.A., 1989.

Courant y Robbins. What is Mathematics?. Oxford University Press, U.S.A.,1943.

Eves Howard. Estudio de las Geometrías. UTEHA, México. 1969.

Kostovski A.N. Construcciones geométricas mediante un compás. Editorial MIR, Moscú, 1980.

Lucio, Martínez de la Escalera y San Agustín. Un poco de Geometría. Serie: Notas de clase. Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1989.