

40
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPLEJIDAD PARA BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

VICENTE ZUNIGA JIMENEZ



MEXICO, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



1994



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) VICENTE ZURIGA JIMENEZ

con número de cuenta 7346297-4 con el Título: _____

COMPLEJIDAD PARA EL BACHILLERATO

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO

GRADO	NOMBRE(S)	APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en C.	GUILLERMO GOMEZ	ALCARAZ	<i>[Firma]</i>
Director de Tesis	ACTUARIO	JAVIER FERNANDEZ GARCIA	<i>[Firma]</i>
	MATEMATICO	LUIS RAMIREZ FLORES	<i>[Firma]</i>
	MATEMATICO	ENRIQUE VEGA RAMIREZ	<i>[Firma]</i>
Suplente	M. en C.	JEFFERSON KING DAVALOS	<i>[Firma]</i>
Suplente			

A mis padres :

Aurelio Zúñiga García.

Lucrecia Jiménez Durán.

A mis hermanos :

Gloria.

Aurelio.

Angelina.

Sara.

Miguel.

Reyna.

Agradecimientos.

Al M. C. Guillermo Gómez Alcaráz, Director de la Tesis por su dedicación, orientación y su valioso apoyo que hizo posible la realización de este Trabajo.

A mi jurado:

Act. Javier Fernández García, Mat. Luis Ramírez Flores,
Mat. Enrique Vega Ramírez, M. en C. Jefferson King Dávalos.
Por las sugerencias y aportaciones hechas para el desarrollo de esta Tesis.

A mi amigos miembros del grupo Félix Klein, del C.C.H. Azcapotzalco en su apoyo a la revisión de los manuscritos presentados.

A las autoridades del Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Azcapotzalco por el Apoyo prestado.

A José Luis y Victoria Cañetas Mendicuti, quienes contribuyeron en la mecanografía del mismo.

INDICE GENERAL

INTRODUCCION.....	3
CAPITULO I.....	5
ALGUNAS CURVAS PATOLOGICAS.....	5
1. Construcción de la Curva de Koch.....	5
2. Construcción de la Curva Copo de nieve de Koch.....	6
3. Número de segmentos de la curva de Koch, Longitud de segmentos, longitud de la curva de Koch.....	6
4. Determinación del número de segmentos del Copo de Nieve de Koch.....	11
5. Perímetro del Copo de Nieve de Koch.....	11
6. Area de la Curva Copo de Nieve.....	12
CAPITULO II.....	13
LA DIMENSION FRACTAL.....	13
1. La Dimensión.....	13
2. Dimensión de Autosemejanza.....	17
3. Determinación de la Longitud y Dimensión de una Circunferencia.....	21
3a. Determinación de la Dimensión de la curva de Koch.....	28
4. Medición para curvas fractales y leyes potenciales.....	31
4a. Medición de costas.....	31
4b. Comparación de medidas entre la circunferencia y la costa de Inglaterra.....	32
5. Leyes potenciales.....	37
5a. Experimento de la caída libre.....	37
5b. La ley potencial y su relación con el crecimiento de la cabeza y altura del cuerpo humano.....	39
5c. Resumen sobre las leyes potenciales.....	42
5d. Mapas con muchos detalles y su relación con las leyes potenciales.....	43
5e. Medida de la frontera del estado de Utha.....	45
5f. Midiendo la Curva de Koch.....	46
6. Dimensión de autosemejanza y medidas de longitud.....	48
6a. Calculo de la dimensión de la curva "3/2".....	50
6b. Fractales naturales de algunos organismos.....	52
7. Dimensión de compartimentos.....	54
7a. Ventaja de la dimensión por compartimentos.....	57
8. Fractales de líneas frontera (La escalera del Diablo).....	58
8a. Aplicaciones de la escalera infinita a la Física.....	66
9. La curva de Peano.....	67

CAPITULO III.....	70
LA IDEA DE COMPLEJIDAD.....	70
1. Conceptos fundamentales; función lineal y exponencial.....	70
2. Ajuste de curvas a la mejor línea recta posible.....	73
3. Ajuste de curvas (continuación).....	79
4. Dimensión por compartimentos.....	83
4a. Ondas.....	83
4b. Hoyos Negros.....	86
4c. Gráfica de una función arbitraria.....	90
5. Dimensión de una línea costera usando la dimensión por compartimentos.....	95
5a. Dimensión de la costa de Inglaterra.....	95
6. Dimensión de compartimentos para objetos autosemejantes...101	
6a. Dimensión de compartimentos para la curva de Koch.....	102
6b. Dimensión de compartimentos para la composición de curvas	106
6c. Dimensión de compartimentos para la curva "3/2".....	111
7. Coordenadas polares.....	116
8. Espirales.....	118
8a. Espiral de Arquímedes.....	118
8b. Espiral Logarítmica.....	119
8c. Característica de las Espirales.....	120
8d. Relación de la Serie Aritmética y Geométrica para las espirales.....	120
8e. Autosemejanza de la Espiral logarítmica.....	124
9. Construcción de un polígono infinito.....	124
9a. Longitud de la Espiral poligonal.....	125
9b. Área de la espiral.....	129
9c. Longitud de la espiral lisa uniforme y su área.....	130
9d. La espiral del cuadrado dorado.....	134
9e. Longitud de la espiral del cuadrado dorado.....	135
APÉNDICES.....	138
Apéndice 1	138
Apéndice 2	152
Apéndice 3.....	155
Apéndice 4.....	156
Conclusiones.....	158
Referencias.....	160

INTRODUCCION

Este trabajo es introductorio a las nociones de fractal, dimensión fractal y complejidad susceptibles de poder ser usadas dentro de los programas estándar a nivel bachillerato.

Las ideas que se desarrollan a lo largo del trabajo tienen un carácter manifiestamente intuitivo y pretenden dar elementos para acercarse a definiciones, así sean provisionales.

Todos los problemas y actividades planteados y analizados pretenden alcanzar la comprensión de dichas definiciones.

Las actividades planteadas pretenden ser problemas a resolver por el lector.

Este trabajo pretende dirigirse a profesores en activo que encuentren aquí ejemplos, problemas y actividades que encajen en los temas de los programas vigentes de matemáticas a nivel bachillerato, sin necesidad de hacer cambios en los mismos.

Otro trabajo en esta dirección es de la Profesora Becerril P.C. que plantea via el triángulo de Sierpinski también la idea de fractal.

En el capítulo I se construyen diferentes curvas por etapas, mediante reglas cuya esencia consiste en que son autosemejantes, por medio de algún factor de contracción y cuyas diferentes etapas se construyen mediante iteraciones sucesivas.

En el capítulo II, se introduce con algunos ejemplos de plausibilidad un Modelo Matemático, que nos ayuda al cálculo de la Dimensión tanto para estructuras cuya dimensión topológica es

conocida, así como para estructuras fractales; este modelo es conocido como dimensión de autosemejanza, además se da una variante de la dimensión de Hausdorff en su forma simplificada, ejemplificando el tratamiento de una circunferencia para el cálculo de su dimensión y longitud, así como también para la curva de Koch con respecto a su dimensión

En el capítulo III trata de una variante más para el cálculo de la dimensión fractal llamado dimensión por compartimentos, el cual tiene la característica que al hacer tender los compartimentos se ajustan exactamente a la frontera de la costa, por el método descrito en este capítulo y aprovechando las propiedades de los logaritmos, vía una ley implícita de potencias.

También se ofrece la construcción de distintas curvas como son: las espirales, la escalera del diablo, la curva de Peano; que aunque no tienen dimensión fractal si tienen varias características de estos objetos.

CAPITULO I

ALGUNAS CURVAS PATOLOGICAS

1. Construcción de la Curva de Koch.

Primera etapa

Helge Von Koch en [1] introduce una curva "Patológica" (rara) que describiremos:

Tomamos un segmento de recta de longitud unitaria.



Dividimos en tres partes iguales al segmento.



Omitimos la parte media.



Las terceras medias partes son reemplazadas por 2 segmentos en forma de pico triangular.



Esto concluye la primera etapa [E1].

Segunda etapa

Dividimos en 3 partes iguales a cada segmento.



Omitimos las partes medias de cada segmento.



Las terceras medias partes de cada segmento las reemplazamos por 2 segmentos en forma de pico.



Esto concluye la segunda etapa [E₂].

Tercera Etapa

Dividamos en 3 partes iguales a cada segmento que queda de la etapa anterior.

Omitamos las partes medias.

En las terceras partes medias de cada segmento reemplazamos la parte media omitida por 2 segmentos en forma de pico.

Esto concluye la Tercera Etapa [E₃].

Las siguientes figuras representan las etapas cuarta y quinta [E₄] y [E₅] del mismo procedimiento. La quinta etapa aparece en otra escala para que se alcance a percibir la figura.

Si este proceso de construcción continúa, en el "Límite" obtenemos la Curva Koch. Este proceso se aprovecharía, por ejemplo para motivar la noción de límite en el curso de precálculo (Matemáticas V del CCH)

2. Construcción del Copo de Nieve de Koch.

ACTIVIDAD 1.

Si juntamos y ajustamos 3 copias juntas sobre los lados de un Triángulo Equilátero se obtiene una figura compleja llamada "Copo de Nieve de Koch". Construir por etapas la Curva Copo de Nieve. (Solución en el Apéndice 1)

3. Número de segmentos de la Curva de Koch, longitud de cada segmento de la Curva de Koch, longitud de la Curva de Koch.

Retornemos a la curva original de Koch y discutamos su longitud. Su longitud se determinará por etapas.

Tomamos un segmento de longitud unitaria. (Etapa inicial [E₀])

En la primera etapa [E₁] la reducción de la longitud de cada

segmento es un tercio del segmento original y la parte media que se omite es reemplazada por dos segmentos en forma de pico, así el número de segmentos de esta etapa es de 4.



La longitud total de los segmentos en esta etapa esta dada por el producto del número de segmentos por la longitud de dichos segmentos:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad (\text{o lo que es lo mismo:}$$

la suma de la longitud anterior mas lo incrementado:

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}).$$

En la segunda etapa [E2] la reduccion de la longitud de cada segmento es $1/3$ del correspondiente segmento anterior, o sea $1/3^2$ del segmento original, y las partes medias de cada segmento que se omiten son reemplazadas por dos segmentos en forma de pico exterior.



Así el número de segmentos de esta etapa es de $4 \times 4 = 4^2$, y la longitud en esta etapa es: $\frac{4}{3^2}$, por lo cual la longitud total de la curva en esta segunda etapa es: $4^2 \cdot \frac{1}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

(esto es lo mismo que la longitud en esta etapa más la longitud incrementada, esto es:

$$\frac{4}{3} + 4 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2)$$



En la tercera etapa [E3] la longitud de cada segmento se reduce $\frac{1}{3}$ respecto del anterior segmento, es decir en:

$$\left(\frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^3}$$

respecto del segmento original.

Como el número de segmentos aumenta en esta etapa a $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ entonces la longitud total en esta etapa será de:

$$4^3 \left(\frac{1}{3^3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

o sea es la suma de la longitud anterior mas la longitud incrementada:

$$\frac{4^2}{3^2} + 4^2 \left(\frac{1}{3^3}\right) = \frac{4^2 \cdot 3 + 4^2}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Por analogía con las 3 etapas anteriores podemos colegir que en la cuarta etapa [E4] la longitud total de segmentos construidos es: $(4/3)^4$. Esta longitud puede ser obtenida de dos maneras distintas, a saber como el número de segmentos de esta etapa 4^4 por la longitud de cada segmento $1/3^4$ (o bien como la suma de la longitud de la etapa anterior $(4/3)^3$ más las longitudes incrementadas $4^3 \cdot (1/3^4)$, que en efecto nos da el mismo resultado $(4/3)^4$).

Observese que para una etapa arbitraria, que bautizaremos como la k-ésima etapa la longitud total podemos suponerla del mismo tipo como vimos que se daba la regularidad (el modelo matemático) hasta la etapa 3, esto es como:

$$4^k \cdot \left(\frac{1}{3^k}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

Pero como ésta suponemos es una etapa cualquiera, debemos ser capaces de mostrar con alguna de las dos modalidades que tenemos para generar la etapa siguiente, que ésta es de la misma forma que la supuesta en la etapa k-ésima.

En efecto, tomemos la segunda modalidad para generar la etapa siguiente, entonces la longitud total será la longitud anterior (para eso necesitábamos la hipótesis de la longitud en la etapa anterior k-ésima), más la longitud incrementada (que también tiene su regularidad, o sea el número de segmentos agregados 4^k por la longitud de cada segmento $1/3^{k+1}$):

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k + 4^k \cdot \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{4^k \cdot 3 + 4^k}{3^{k+1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1},$$

que es de la misma forma que la hipótesis, pero para la siguiente etapa (k+1). Esto demuestra que para cualquier número natural k la longitud de la curva está dada por: $\left(\frac{4}{3}\right)^k$.

Intentando ser más apegado al llamado Principio de Inducción Matemática, que a la letra dice: Una proposición que depende de los números naturales es verdadera para todos los números naturales n, si resulta verdadera para algún n específico, digamos para n = 1, si por hipótesis la suponemos verdadera para n = k y si a partir de esto se logra demostrar que la proposición es verdadera también para el siguiente valor de n = k + 1.

En nuestro caso la proposición que depende de los números naturales sería: la longitud de la curva de Koch en la etapa n de su construcción es $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Esto resultaría una proposición verdadera para todos los números naturales, ya que es cierta para n = 1, dado que con cualquiera de las 2 versiones de que disponemos para construir por etapas, resulta por construcción que la longitud de la primera etapa está dada por 4 segmentos de $1/3$ de longitud o sea por $\left(\frac{4}{3}\right)^1$, que coincide con nuestra proposición para n = 1. Si ahora suponemos que nuestra proposición es cierta

para $n = k$, es decir: la longitud de la curva de Koch en la etapa k es por hipótesis igual a $(4/3)^k$. Y finalmente para el siguiente valor de $n = k + 1$, tendríamos que la longitud de la curva de Koch debería de ser la longitud de la etapa anterior más las longitudes incrementadas o sea:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k + 4^k \cdot \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{4^k \cdot 3 + 4^k}{3^{k+1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1}$$

Entonces por el Principio de Inducción Matemática la longitud de la curva de Koch en cualquier etapa n es: $(4/3)^n$.

Pero como nos interesa la longitud de la "curva límite", entonces debemos pasar al límite en la etapa n de la longitud de la curva esto es:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Obsérvese que esta longitud también pudo haberse calculado directamente como el límite de la suma de longitudes acumuladas hasta la etapa n :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L_n &= \lim \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4^2}{3^3} + \dots + \frac{4^{n-1}}{3^n} \right) \\ &= \lim \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{4^2}{3^2} + \dots + \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} \right) \right) \end{aligned}$$

Simplificamos el corchete interior que denotaremos por I_n :

$$I_n = 1 + \frac{4}{3} + \frac{4^2}{3^2} + \dots + \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}}$$

restándole

$$\frac{4}{3} I_n = \frac{4}{3} + \frac{4^2}{3^2} + \frac{4^3}{3^3} + \dots + \frac{4^n}{3^n}$$

y factorizando en el lado izquierdo:

$$I_n \left(1 - \frac{4}{3} \right) = 1 - \frac{4^n}{3^n}$$

queda sólo despejar I_n

$$I_n = \frac{1 - \frac{4^n}{3^n}}{-\frac{1}{3}}$$

y simplificar

$$I_n = -3 \cdot \left(1 - \frac{4^n}{3^n} \right).$$

Sustituyendo en el límite original el valor de I_n :

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(1 + \frac{1}{3} I_n \right) = \lim \left(1 - \left(1 - \frac{4^n}{3^n} \right) \right) \\ &= \lim \left(\frac{4^n}{3^n} \right) = \infty \end{aligned}$$

∴ hemos obtenido de nuevo la confirmación de que la longitud de la curva de Koch es infinita.

4. Determinación del número de segmentos para el Copo de Nieve de Koch.

ACTIVIDAD 2.

Hallaremos el número de segmentos en las distintas etapas del Copo de Nieve de Koch, el número de segmentos se determinará por etapas desde la etapa inicial hasta la tercera etapa y después vamos a generalizar para hallar un Modelo Matemático para un nivel n de compartimientos y finalmente pasaremos al límite para n más allá de cualquier cota. (Solución en el Apéndice 1).

5. Perímetro del Copo de Nieve.

Dado que ya se demostró que el número de segmentos que se determinan en cada etapa del Copo de Nieve es, para la etapa n -ésima, $3 \cdot 4^n$ y como también se demostró que la longitud de la curva de Koch para la etapa n -ésima es: $(1/3)^n$, entonces el perímetro para cada

etapa del Copo de Nieve se determina como:

$$P_n = \left[\begin{array}{c} \text{Número de segmentos} \\ \text{en la etapa } n \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Longitud en cada segmento} \\ \text{en la etapa } n \end{array} \right]$$

Así en forma general el Perímetro en la n-ésima etapa será:

$$P_n = \left(3 \cdot 4^n \right) \left(\frac{1}{3^n} \right) = 3 \left(\frac{4^n}{3^n} \right) = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^n.$$

La siguiente tabla muestra la relación entre el número de etapa y el perímetro que se determina:

Etapa	0	1	2	3	4	5	...	n
Perímetro	3	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{1024}{81}$...	?

Luego, si queremos determinar el perímetro en la etapa límite del Copo de Nieve hay que determinar $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, esto es:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^n = \infty.$$

dado que $\frac{4}{3} > 1$, luego $\frac{4}{3}$ elevado a potencias cada vez mayores se hace más grande que cualquier cota. Luego tiende a Infinito.

Y entonces se puede afirmar que el Perímetro del Copo de Nieve es "Infinito", es decir que la longitud de la curva Copo de Nieve es infinita.

6. Area del Copo de Nieve.

Actividad 3.

Hallar el Área del Copo de Nieve y determinar si esta área es finita o infinita. (Solución en el Apéndice 1).

CAPITULO II LA DIMENSION FRACTAL.

1. Dimensión

El concepto de *dimensión* en tiempos pasados fue uno de los mayores o principales problemas en matemáticas, existen distintas nociones para la dimensión tales como la *Dimensión Topológica*, *Dimensión de Hausdorff*, *Dimensión Fractal*, *Dimensión de Auto semejanza*, *Dimensión de Compartimientos*, *Dimensión de Capacidad*, *Dimensión de Información*, *Dimensión Euclideana* y otras más.

No definiremos cada una de ellas, dado que no pretendemos ser exhaustivos y podríamos confundirnos, por lo que nos restringiremos a una discusión elemental de solo tres de ellas:

- *Dimensión de Auto semejanza.*
- *Dimensión de Área (también llamada Dimensión de Distribución).*
- *Dimensión de Compartimientos.*

Antes de discutir cada uno de estas conceptos estableceremos un modelo matemático general o fórmula para el cálculo de la dimensión de objetos, cuya dimensión topológica es conocida, así como para curvas patológicas.

Estableceremos el modelo matemático o fórmula para el cálculo de la dimensión (D) teniendo en cuenta la relación existente entre el factor de la escala, ya sea de contracción (e) o expansión (E) y el número de piezas en las que la estructura se divide (N); en los casos que vamos a discutir usaremos la siguiente notación:

- D = "dimensión"
- E = "factor de expansión"
- e = "factor de contracción"
- N = "número de partes en que se divide la figura"

Comencemos con figuras en las cuales su dimensión sea conocida como son un segmento de recta, un área (un cuadrado), y un volumen (cubo), cuyas dimensiones topológicas son 1, 2 y 3 respectivamente, aunque el pretense problema consista en determinar la dimensión D.

PRIMER CASO.

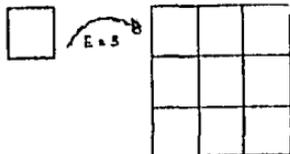
Tomemos un segmento de longitud arbitraria, dado que es un segmento de línea, entonces su dimensión es $D=1$, apliquemos un factor de expansión $E = 3$, así el número de piezas en las cuales se divide el segmento es $N = 3$, por lo tanto la relación que se cumple es:

$$3^D = 3 \rightarrow 3^1 = 3 \rightarrow D = 1$$

luego la dimensión D es en efecto 1.

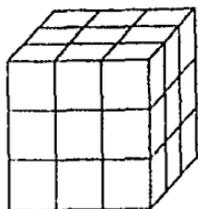
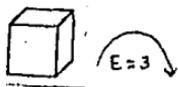


SEGUNDO CASO



Tomemos un cuadrado, cuya dimensión topológica es 2. Apliquemosle el mismo factor de expansión, $E = 3$, así el número de piezas en las que se divide la estructura es $3 \cdot 3 = 9$, por lo tanto $E^D = N \rightarrow 3^2 = 9$, entonces $D=2$, ya que $E=3$, $N=9$.

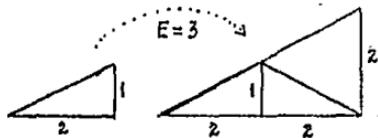
TERCER CASO



Tomemos un cubo, cuya dimensión topológica es $D=3$. Apliquemosle a cada arista del cubo un factor de expansión de $E=3$; así el número de piezas resultantes es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ cubos, por lo tanto $E^D = N \rightarrow 3^3 = 27$, luego $D=3$, ya que $E=3$, $N=27$.

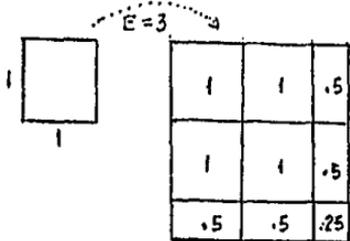
Planteamos enseguida algunos otros

ejemplos de plausibilidad para hallar el modelo para la "dimensión", en cada caso el valor para N no necesariamente es un entero.



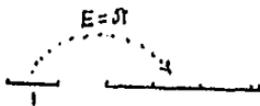
D	E	N
2	2	4

$$E^2 = N \rightarrow 2^2 = 4$$

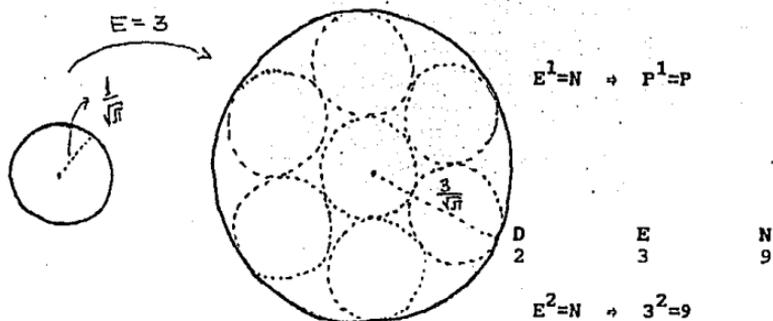


D	E	N
2	2.5	6.25

$$E^2 = N \rightarrow 2.5^2 = 6.25$$



D	E	N
1	π	π



Observamos así que el modelo matemático $N = E^D$, (número de piezas en las que se divide la estructura es igual al factor de la escala (E) elevada a la dimensión (D), funciona para cualquier número real que se tome como el factor en la escala).

Resumiendo

Podemos concluir que la fórmula que se cumple para todos los casos es la siguiente:

$$N = E^D$$

donde N = "Número de Partes"

E = "Factor de expansión"

D = "Dimensión"

y la generalización pretendida sería considerar que dicha fórmula sigue siendo cierta para todo valor real de D y no sólo para las D enteras no negativas como es el caso de todos los ejemplos del cuadro anterior.

Así por ejemplo si desconocemos a la dimensión D se puede calcular despejandola de la igualdad arriba mencionada, es decir.

$$N = E^D$$

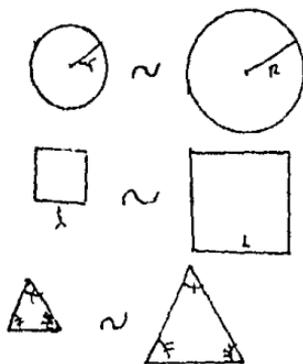
tomando logaritmos en ambos lados tenemos

$$\log N = \log E^D \rightarrow \log N = D \cdot \log E$$

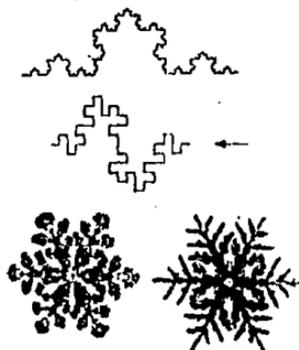
$$\Delta D = \frac{\log N}{\log E}$$

2. Dimensión de Auto semejanza.

Deduciremos la idea con los siguientes principios de semejanza.



Dos figuras son *semejantes* si tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño. En el caso de los triángulos: dos triángulos son semejantes si existe una razón de proporcionalidad entre los lados correspondientes de ambos triángulos e igualdad entre las medidas de sus ángulos.



Para figuras geoméricamente más complejas como son las descritas en las figuras adjuntas, la definición anterior no es muy precisa debido al hecho de que estas figuras tienen una característica especial, son procesos iterativos infinitos de figuras geométricas, con un número tan grande de pasos como se quiera, o sea, que son procesos infinitos.

Entonces estos tipos de figuras se adaptan a una de las dos definiciones siguientes:

Definición 1. Si las partes o componentes de una figura contienen réplicas o copias del total de la figura, entonces la figura es *autosemejante*.

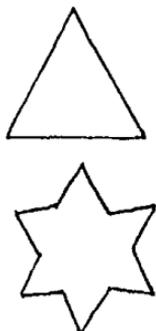
Ejemplos de estructuras autosemejantes son, la Curva de Koch, el Copo de Nieve de Koch, el Conjunto de Cantor, la Alfombra de Sierpinski, la Curva Tres Medias, etc.

Definición 2. Si la figura puede descomponerse en partes, alguna de las cuales es réplica exacta del total de la figura, entonces la figura se llama *estrictamente autosemejante*.

Ejemplos : Copo de Nieve de Koch, Alfombra de Sierpinski, etc.

Establecida la definición de autosemejanza aseguramos que el modelo matemático $N = E^D$, está relacionado con el cálculo para la dimensión de autosemejanza (dimensión fractal) que se expresa como $a = \frac{1}{s^D}$, donde $a = N$, $D =$ " dimensión ", $s = \frac{1}{E} =$ "factor de la escala"; en otras palabras es la misma fórmula que sirve para la línea, el cuadrado y el cubo, así como plausiblemente para el cálculo de dimensión de autosemejanza de las últimas figuras.

Existe pues una relación conveniente entre la potencia D , el factor de reducción s y el número de partes a .



Comprobemos que obtenemos la misma dimensión de autosemejanza para la curva copo de nieve con la nueva fórmula: $a = 1/s^D$ calculando la dimensión de la curva Copo de Nieve de Koch.

Dimensión calculada de la etapa inicial a la primera etapa. La reducción de escala es $s = \frac{1}{3}$ y el número de partes es



$$a = N = 4, \text{ entonces : } a = 1/s^D \rightarrow$$

$$a = \left(\frac{1}{1/3} \right)^D \rightarrow 4 = 3^D \rightarrow$$

$$\log 4 = D \cdot \log 3 \rightarrow$$

$$D = \left[\frac{\log 4}{\log 3} \right] = 1.2619\dots$$

Si reducimos el factor en la escala a piezas más pequeñas, es decir, si el factor en la escala es de $s = 1/9$, cuando el número de partes es $a = 16$, entonces

$$16 = 9^D \rightarrow \log 16 = D \cdot \log 9 \rightarrow D = 2 \log 4 / 2 \log 3 = \log 4 / \log 3 \therefore D = 1.2619\dots$$

Y así la regla general se expresa como

$$D = \log 4^k / \log 3^k \rightarrow D = k \cdot \log 4 / k \cdot \log 3 \rightarrow D = \log 4 / \log 3 = 1.2619\dots$$

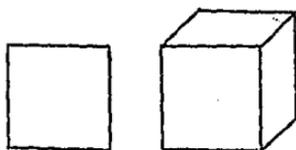
Entonces la relación de la ley potencial entre el número de piezas a y la reducción en la escala s da la misma dimensión via el número D independientemente de la escala que se use en la evaluación.

Se observa que el número D está en el intervalo $1 < D < 2$ y se le conoce como la dimensión de autosemejanza para la curva de Koch. Más generalmente, dada una estructura autosemejante, existe una relación entre el factor de reducción s y el número de piezas a de la forma $a = 1/s^D$, o equivalentemente

$$D = \frac{\log a}{\log(1/s)}$$

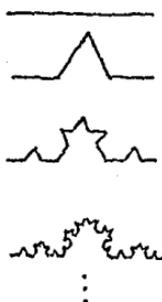
donde D es la Dimensión de autosemejanza.

Denotemos con D_a a la dimensión de autosemejanza, entonces para la línea,

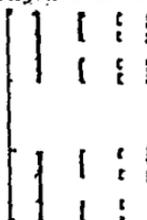


el cuadrado y el cubo se obtuvieron las dimensiones autosemejantes esperadas 1,2,3.

Para la Curva de Koch se tiene $D_s = 1.2619...$ La parte fraccionaria 0.2619, es exactamente igual al exponente de la ley potencial que describe la medida de longitud de la curva en términos de la abertura del compás usado. Esto lo discutiremos con más detalle posteriormente, antes calcularemos para algunos objetos autosemejantes su dimensión D_s ; esto es para el Conjunto de Cantor, El Triángulo y la Alfombra de Sierpinski.



Conjunto de Cantor



Triángulo de Sierpinski



Alfombra de Sierpinski



Reducción en la escala $s = 1/3$,

$$1/3^2 \dots 1/3^k$$

Número de piezas: $a = 2, 4, 8, \dots, 2^k$

$$D_s = \log 2^k / \log 3^k =$$

$$k \cdot \log 2 / k \cdot \log 3 = \log 2 / \log 3 =$$

$$= 0.6309$$

Reducción en la escala $s = 1/2, 1/4, \dots$

$$1/2^k$$

Número de piezas: $a = 3, 9, 27 \dots 3^k$

$$D_s = \log 3^k / \log 2 = k \log 3 / k \log 2$$

$$= \log 3 / \log 2 = 1.5850$$

Reducción en la escala $s = 1/3$,

$$1/3^2 \dots 1/3^k$$

Número de piezas $a = 8, 64, \dots 8^k$

$$D_s = \log 8^k / \log 3^k = k \log 8 / k \log 3 = \log$$

$$8 / \log 3 = 1.8927.$$

Resumiendo los resultados en una tabla tenemos

Objeto	Escala s	Número de piezas	Dimensión
Triangulo de Siespinki	$1/2^k$	3^k	$D = 1.5850$
Carpeta de Sierspinki	$1/3^k$	8^k	$D = 1.8927$
Conjunto de Cantor	$1/3^k$	2^k	$D = 0.6309$

3. Determinación de la longitud y dimensión de una Circunferencia.

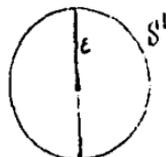
No obstante que la longitud de la circunferencia de radio R es conocida y su dimensión también ($2\pi R$ y 1 respectivamente), lo primero que queremos es mostrar un método que simultáneamente determine dicha longitud y obligue a que la dimensión tenga también un determinado valor.

Esto se hace con la intención de generalizar la noción de dimensión usual (topológica) a la de una nueva dimensión (fractal).

Empecemos por aproximar la longitud de la circunferencia por medio de diferentes polígonos inscritos en ella, denotando para ello con $long$ = "la longitud", con S = "la circunferencia" y con ϵ = "la longitud del lado del polígono regular que aproxima a la circunferencia"

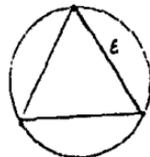
En la etapa 0, tomemos un simple diámetro como aproximación de la longitud de la circunferencia:

$$long\ S \approx 2 \cdot \epsilon$$



En la etapa 1, tomemos un triángulo:

$$long\ S \approx 3 \cdot \epsilon$$



En la etapa 2, tomemos un cuadrado:

$$\text{long } S \approx 2^2 \cdot c$$

En la etapa 3, tomemos un octágono:

$$\text{long } S \approx 2^3 \cdot c$$

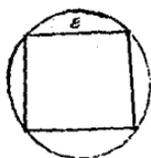
En la etapa 4, tomemos un polígono de 16 lados:

$$\text{long } S \approx 2^4 \cdot c$$

⋮

$$\text{long } S \approx 2^n \cdot c$$

⋮



Observese que lo natural aquí sería pasar al límite, cuando n tiende a ∞ , sin embargo, este límite nos da la forma usual de calcular la longitud de la circunferencia, que aunque no exenta de dificultades, ya que cuando $n \rightarrow \infty$ también $c \rightarrow 0$ y lo que se obtiene es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$, lo cual para romperse es necesario expresar a n , en 2^n , en términos de c y pasar finalmente al límite cuando $c \rightarrow 0$, sin embargo este método directo esencialmente ya no nos sirve para otro tipo de entes como son las curvas patológicas construidas en el capítulo I.

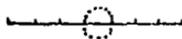
Por ello trataremos de describir un método diferente que va por otro camino, se va por la vía de cubrir el ente geométrico en cuestión con bolas de diámetro ϵ y luego tender ϵ a 0, para que en el límite se obtenga la medida de dicho ente, en nuestro caso la longitud de la circunferencia como longitud de la curva límite, pero forzando simultáneamente a que la dimensión de dicho ente geométrico quede obligadamente definida no necesariamente como un número entero no

negativo, sino ahora como un número real cualquiera con la condición de que dicha longitud sea finita, o equivalentemente en símbolos:

$$\begin{aligned} \text{long } S &\cong (\text{Número de lados del polígono}) \cdot (\text{Longitud de cada lado}) \\ &\cong N \cdot c \\ &\cong N(c) \cdot c \end{aligned}$$

Esta última igualdad aproximada, dado que el número de lados N del polígono regular correspondiente evidentemente depende de la longitud del lado c del polígono n turno, luego intuitivamente queda justiado que la igualdad se da si

$$\text{long } S = \lim_{c \rightarrow 0} N(c) \cdot c$$



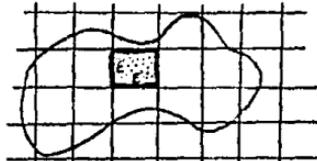
Entonces, la medida de cualquier ente de dimensión 1 intuitivamente quedaría dada por la fórmula:

$$M_1 = \lim_{c \rightarrow 0} N(c) \cdot c$$



En forma análoga, la medida de cualquier ente de dimension 2 podría aproximarse por las áreas elementales interiores igual a c^2 de una malla plana, cuyo número es N como la de la figura adjunta y tal medida queda heurísticamente ahora dada por la fórmula:

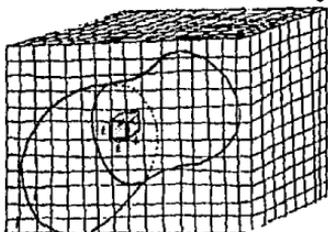
$$M_2 = \lim_{c \rightarrow 0} N(c) \cdot c^2$$



donde de nuevo $N(c)$ es el número de áreas elementales interiores de la malla plana dada.

En forma similar si queremos medir una figura geométrica cualquiera de 3 dimensiones, lo podremos hacer introduciendo un enrejado tridimensional de volúmenes elementales iguales a ϵ^3 y dicha medida quedaría expresada como la suma de los volúmenes elementales interiores del ente geométrico en cuestión, dado intuitivamente por la fórmula:

$$M_3 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \cdot \epsilon^3$$



En forma generalizada podríamos tomar heurísticamente la misma fórmula, pero ahora para cualquier número real D y así suponer que podemos medir cualquier objeto geométrico de dimensión generalizada (dimensión fractal) D , mediante la fórmula:

$$M_D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \cdot \epsilon^D$$

Pero retomando el cálculo de la longitud de la circunferencia con esta última fórmula $M_D = \lim N(\epsilon) \cdot \epsilon^D$ podremos simultáneamente determinar dicha medida (su longitud) y su dimensión D , para ello intentemos determinar explícitamente al número de lados del polígono N como función de ϵ .

Para esto regresemos a la geometría del problema.

Demos un polígono de longitud de lado ϵ .

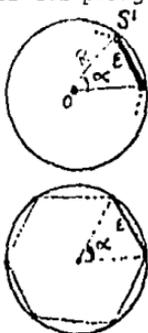
En lugar de ϵ consideremos su ángulo central.

Denotemos al ángulo central subtendido como α .

Observemos que tal ángulo central $\alpha = \alpha(\epsilon)$.

Así, si tenemos un cuadrado: $N=4$ y $\therefore \alpha=90^\circ$ \therefore

$$N \cdot \alpha = 4 \cdot 90^\circ = 360^\circ = 2\pi.$$



Para un octágono: $N=8$ y $\therefore \alpha=45^\circ$.

$$N \cdot \alpha = 8 \cdot 45^\circ = 360^\circ = 2\pi.$$

En general para todo polígono regular:

$$N(c) \cdot \alpha(c) = 2\pi \therefore$$

$$N(c) = \frac{2\pi}{\alpha(c)}$$

Intentemos determinar $\alpha(c)$ \therefore determinaremos $N(c)$.

Formemos un triángulo rectángulo bisectando $\alpha(c)$.

En el triángulo rectángulo formado el ángulo en el origen es $\frac{\alpha}{2}$, su cateto opuesto $\frac{c}{2}$ y su hipotenusa es el radio del círculo R .

Observamos que $\text{sen} \left[\frac{\alpha}{2} \right] = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$.

$$\text{sen} \left[\frac{\alpha}{2} \right] = \frac{c}{2R} \quad (\text{¿por qué?})$$

Ahora bien, puesto que c subtiende a α y se pretende

que $c \rightarrow 0$, entonces: $\text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \approx \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ (¿por qué?), luego

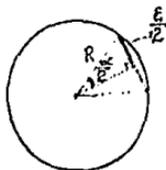
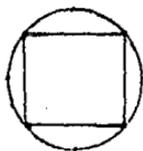
$$\frac{\alpha}{2} \approx \frac{c}{2R} \therefore$$

$$\alpha \approx \frac{c}{R} \therefore$$

$$N(c) = \frac{2\pi R}{c} \therefore$$

$$\text{long } S = M_D = \lim_{c \rightarrow 0} N(c) \cdot c^D = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{2\pi R}{c} \cdot c^D = 2\pi R \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \frac{c^D}{c} = 2\pi R \cdot \lim_{c \rightarrow 0} c^{D-1} =$$

$$= \begin{cases} 2\pi R \cdot 0 = 0, & \text{si } D > 1 \text{ (¿por qué?)} \\ 2\pi R \cdot \infty = \infty, & \text{si } D < 1 \text{ (¿por qué?)} \\ 2\pi R, & \text{si } D = 1 \text{ (¿por qué?)} \end{cases}$$



La primera y segunda opciones no tienen sentido debido al hecho de tener una circunferencia de radio $R > 0$ (Es decir es una circunferencia real) cuya longitud no puede ser ni cero ni infinito. Por consiguiente la dimensión D no puede ser ni mayor ni menor que 1, porque su longitud no puede ser ni 0, ni ∞ , luego, la única posibilidad es que $D = 1$, pues entonces su longitud es finita e igual a lo que ya sabemos: $2\pi R$.

ACTIVIDAD 4. Suponiendo que para el Reino Unido se obtiene que $N(\epsilon) = \frac{K}{\epsilon^{1.36}}$. Entonces ¿cuál sería la longitud finita de la costa del Reino Unido y cuál la dimensión de la costa para que esto ocurra? (solución en el Apéndice 1).

Este camino aparentemente tortuoso, para el caso conocido de la circunferencia, nos da una manera de calcular simultáneamente las longitudes medidas de las curvas patológicas o caprichosas y su dimensión con cierta facilidad.

La verdad es que aun con este esquema supersimplificado de la idea de la *medida y dimensión de Hausdorff*, tampoco es tan fácil, como arriba se apuntó, calcular la longitud de dicha curva y simultáneamente su dimensión, que puede ocurrir ser una dimensión fractal. Una manera simplificada de calcular la dimensión D consiste en tomar el límite anterior, sino dos valores arbitrarios de la longitud del lado del polígono digamos ϵ y ϵ' , para los cuales se considera plausible el cumplimiento de la igualdad:

$$N(\epsilon) \cdot \epsilon^D = N(\epsilon') \cdot \epsilon'^D = \text{const.}$$

de aquí obtendríamos, para el caso de la circunferencia, si digamos $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$, entonces $N(\epsilon') = 2 \cdot N(\epsilon)$, por lo tanto:

$$N(\epsilon) \cdot \epsilon^D = 2 \cdot N(\epsilon) \cdot \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^D \rightarrow 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^D \rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^D \rightarrow \boxed{D = 1}$$

que es el mismo resultado ya conocido para la circunferencia.

Calculemos de nuevo la Dimensión de la circunferencia con ayuda de la llamada relación ó fórmula para la Dimensión de Auto semejanza (variante de dimensión fractal).

En el caso específico de la circunferencia, recuerdese que la manera como fue generada consistió en aproximarse con polígonos, cada uno de cuyos lados se duplica, luego para cada lado $N = 2$ y como la longitud de cada segmento en cada etapa se reduce a la mitad, entonces el factor de contracción será $e = \frac{1}{E} = \frac{1}{2}$.

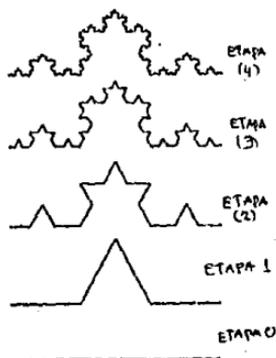
En estas nuevas condiciones la fórmula $N = E^D$ luce de la manera siguiente:

$$N = \left(\frac{1}{e} \right)^D$$

y por tanto:

$$2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right)^D \Rightarrow 2 = 2^D \Rightarrow D = 1$$

De nuevo hemos obtenido el mismo resultado.



Así para la dimensión de la curva de Koch tenemos $N = E^D$, observamos que de la etapa inicial a la primera etapa existe un factor de reducción $e = 1/3$, el número de segmentos es $N=4$, así al aplicar la fórmula tenemos

$$N = \left[\frac{1}{e} \right]^D = 4 = \left[\frac{1}{\frac{1}{3}} \right]^D \Rightarrow$$

$$4 = 3^D \Rightarrow$$

$$\log 4 = D \cdot \log 3 \Rightarrow$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619$$

3.3. Determinación de la dimensión de la Curva de Koch.

Dada la curva de Koch, determinaremos su dimensión introduciendo una nueva variante que relacionada con la dimensión de Hausdorff simplificada nos lleva, para muchos fractales al mismo resultado.

La variante consiste en trazar circunferencias en cada uno de los segmentos resultantes de las distintas etapas del desarrollo de la curva estas circunferencias tendrán como diámetro la longitud del segmento, de tal forma que cubramos a toda la curva en sus distintas etapas.

Esta cubierta resultará en el límite infinita, pero con diámetros c que tenderán a cero.

Para dos etapas cualesquiera tendremos :

$$N(c) \cdot c^D = N(c') \cdot c'^D = \text{const.}$$

donde :

$N(c)$ = "Número de segmentos en una etapa cualquiera de la construcción de la curva". Tales segmentos son los diámetros de las circunferencias respectivas.

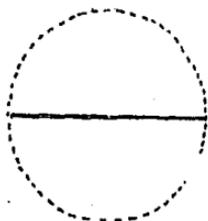
c = "Longitud de los segmentos en esta misma etapa"

D = "Dimensión" (desconocida)

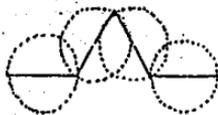
$N(c')$ = "Número de segmentos, por ejemplo, en la siguiente etapa",

c' = "Longitud de los segmentos en esta nueva etapa", dichos segmentos son los diámetros de las circunferencias que cubren a la figura en esta nueva etapa.

Debemos hacer notar que la cubierta infinita tiende a un número tan grande de circunferencias de diámetros tan pequeños como querramos, de tal forma que en el límite estas se ajustan tanto como se quiera a la curva.



Desarrollo de la curva de Koch en sus 3 primeras etapas con sus respectivas cubiertas finitas de circunferencias.



Hallemos la dimensión de la curva con base en la etapa inicial y la primera etapa. Entonces:

$$N(\epsilon) = 1, \quad N(\epsilon') = 4 \quad \text{y} \quad \epsilon' = \frac{\epsilon}{3}$$

que substituidos en :

$$N(\epsilon) \cdot \epsilon^D = N(\epsilon') \cdot \epsilon'^D$$

obtenemos

$$N(\epsilon) \cdot \epsilon^D = N\left(\frac{\epsilon}{3}\right) \cdot \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^D$$

$$1 \cdot \epsilon^D = 4 \cdot \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^D$$

$$1 = 4 \cdot 3^{-D}$$

$$3^D = 4$$

$$\ln 3^D = \ln 4$$

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

Con el fin de fijar ideas calculemos la dimensión de la misma curva, pero considerando ahora la primera y la segunda etapas, aquí:

$$N\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = 4, \quad N(\epsilon') = N\left(\frac{\epsilon}{3^2}\right) = 4^2$$

que substituidos en

$$N(\epsilon) \cdot \epsilon^D = N(\epsilon') \cdot \epsilon'^D$$

obtenemos

$$4 \cdot \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^D = 4^2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{3^2}\right)^D \rightarrow 4 \cdot 3^{-D} = 4^2 \cdot 3^{-2D} \rightarrow 4 \cdot 3^D = 4^2 \rightarrow 3^D = 4 \rightarrow$$

$$\ln 3^D = \ln 4 \rightarrow$$

$$\boxed{D = \frac{\ln 4}{\ln 3}}$$

Es así que a partir de $N(\epsilon) \cdot \epsilon^D = N(\epsilon') \cdot \epsilon'^D = \text{const.}$ para dos etapas cualesquiera de la construcción de la curva de Koch la

dimensión resulta ser igual a $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2619\dots$

ACTIVIDAD 5. Calcular la dimensión de autosemejanza para la misma Curva de Koch (Solución en el Apéndice 1).

Para finalizar calculemos la dimensión de la curva del Copo de Nieve de Koch, pero recordando que ésta no es otra cosa, sino la unión de 3 curvas de Koch unidas sobre un triángulo equilátero, entonces la curva Copo de Nieve resultante deberá tener la misma dimensión que la curva de Koch.

Comprobemos lo antes dicho directamente de la etapa inicial a la 1ª. etapa:

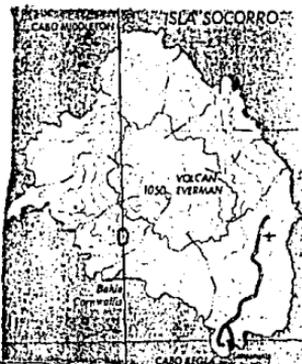
$$N(c) \cdot c^D = N(c') \cdot c'^D \rightarrow 3 \cdot c^D = 12 \cdot \left(\frac{c}{3}\right)^D \rightarrow 3 = \frac{12}{3^D} \rightarrow 3^D = 4 \rightarrow$$
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

ACTIVIDAD 6. Calcular la dimensión fractal de la Curva Copo de Nieve de Koch. (solución en el Apéndice 1)

ACTIVIDAD 7. Calcular la dimensión fractal con dos variantes para el conjunto de Cantor. (Solución en el Apéndice 1).

4. Medición para curvas fractales y leyes potenciales.

4a. Medición de costas.



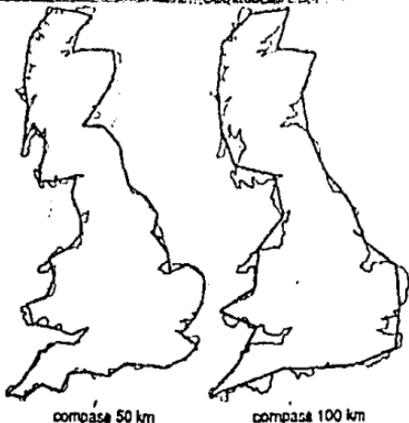
La forma de una isla, es el resultado de incontables años de la actividad tectónica de la tierra, la erosión, los vientos, el agua y el proceso de sedimentación. La única forma de obtener la longitud de la costa es midiéndola físicamente. En la práctica medimos una costa o litoral con un mapa geográfico, pero esto es sólo una aproximación de la longitud de dicha costa.

Tomemos, por ejemplo, a la costa de Inglaterra, hagamos uso del mapa de Inglaterra, un compás y un conjunto con ciertas distancias. Si la escala del mapa es:

1:1000000 y el compás se abre con una anchura de 5 cm., entonces la distancia real correspondiente es de 5000 000 cm ó 50 Km.

Recorramos cuidadosamente el compás a lo largo de la costa y midamos la longitud de la costa a distantes escalas.

La siguiente tabla de valores nos da una relación entre la abertura del compás y una serie de distintas distancias para la longitud de la costa.

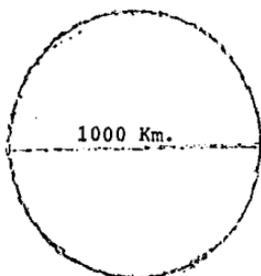


ESCALA DEL COMPAS	LONGITUD
Tomada como unidad	
500 Km.-----	2600 Km.
100 Km.-----	3800 Km.
54 Km.-----	5770 Km.
17 Km.-----	8640 Km.

La elaboración de este experimento revela que: si la escala del compás es pequeña, entonces el polígono sobre la costa tendrá detalles más finos y los resultados tendrán mayor variedad de medidas., En particular en Escocia la costa tiene un número muy grandes de bahías o acorralamientos, que si la midieramos con una cierta escala constante muchas de las pequeñas bahías no se contarían en la suma total del litoral.

4b. Comparación de Medidas entre la: circunf. y la costa de Inglaterra.

Comparemos el fenómeno anterior en forma experimental de la longitud de un círculo, cuyo diámetro sea de 1 000 Km.



Círculo de diámetro 1000 Km. y queremos determinar la longitud de la circunferencia teniendo en consideración que las longitudes sean del mismo orden que las magnitudes en la costa de Inglaterra:

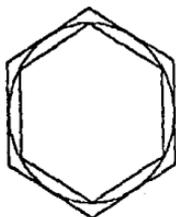
Hagamos uso de la aproximación clásica de Arquímedes:

El método usado por Arquímedes para el cálculo del número π se basa en inscribir polígonos regulares en un círculo.

Comenzar inscribiendo un exágono, con $n = 6$ lados, el ángulo que subtiende una de sus lados es:

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

La longitud del lado inscrito es $2r \cdot \tan \theta$, y la longitud del círculo es $U =$





2^{er}r.

Entonces $2rn \cdot \text{sen } \theta < U < 2rn \cdot \text{tan } \theta$
 dividimos a esta desigualdad por $2r$
 tanto por arriba como por abajo
 para estimar el valor de π tenemos:
 $n \text{ sen } \theta/2 < U < n \cdot \text{tan } \theta/2$.

Si ahora tomamos el doble del número de lados, tendremos para la fórmula de Arquímedes:

$$2n \cdot \text{sen } \frac{\theta}{2} < \pi < 2n \cdot \text{tan } \frac{\theta}{2}$$

Ahora tomando Polígonos regulares de 6, 12, 24, 48, 96, se obtiene una fórmula general que incluye hasta la k-ésima etapa, la cual se escribe como:

$$2^k n \cdot \text{sen } \frac{\theta}{2^k} < \pi < 2^k n \cdot \text{tan } \frac{\theta}{2^k}$$

Hallemos la longitud de un círculo de Diámetro 1000 Km y radio 500 Km. aproximados con polígonos de 6, 12, 24, 48, 96 lados aprovechando lo establecido por Arquímedes.

Si $n=6 \Rightarrow 2 \cdot 6 \text{ sen } \left[\frac{60}{2} \right] < \pi < 6 \text{ tg } \left[\frac{60}{2} \right]$ Promedio de la longitud por etapas

$$\theta = \frac{60}{2} = 30$$

$$6.00 < \pi < 6.9 \quad \xrightarrow{\frac{12.92}{2}} \quad \times 500 = 3230$$

$$n=12 \Rightarrow 2 \cdot 12 \text{ sen } 15 < \pi < 2 \cdot 12 \text{ tg } 15 \quad \xrightarrow{\frac{12.64}{2}} \quad \times 500 = 3160$$

$$\theta = 15, \quad 6.21 < \Pi < 6.43$$

$$n = 24 \Rightarrow 2 \cdot 24 \sin(7.5) < \Pi < 2 \cdot 12 \tan(7.5) \longrightarrow 12.57/2 \times 500 = 3144$$

$$\theta = 7.5, \quad 6.26 < \Pi < 6.31$$

$$n = 48 \Rightarrow 2 \cdot 48 \sin 3.5 < \Pi < 2 \cdot 48 \tan 3.5 \longrightarrow 12.56/2 \times 500 = 3140$$

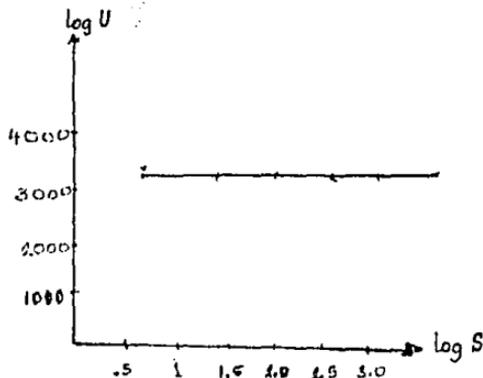
$$\theta = 3.75, \quad 6.27 < \Pi < 6.49$$

$$n = 96 \Rightarrow 2 \cdot 96 \sin 1.875 < \Pi < 2 \cdot 96 \cdot \tan 1.875 \longrightarrow 12.56/2 \times 500 = 3140$$

$$\theta = 1.875, \quad 6.28 < \Pi < 6.25$$

No. de lados (S)	Longitud (U)	log S	long U
6	3230	.77	3.50
12	3160	1.07	3.49
24	3144	1.38	3.496
96	3140	1.98	3.496
192	3140	2.28	3.496

Tabla de valores que representan la medida de un círculo de radio $r=500$ Km. a través del método de Arquímedes y sus respectivos valores en logaritmos base 10. Gráfica de los puntos de la tabla anterior en un plano log/log, los puntos se ajustan a una línea horizontal lo que quiere decir que la longitud es finita, como aclararemos.

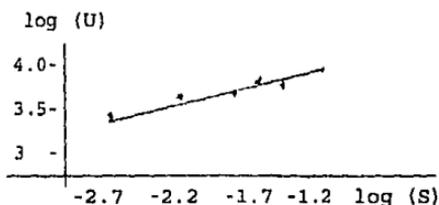


Para la costa de Inglaterra tenemos:

Escala del Compás (S)	Longitud (U)	$\log(U/S)$	$\log U$
17 Km.	8640 Km	- 1.23	3.93
54 Km.	5770	- 1.73	3.76
100 Km.	3800	- 2.0	3.57
500 Km.	2600	- 2.6	3.41

Tabla de valores que representan la medida de la costa de Inglaterra a través del método empírico de medir con un compás y un cierto conjunto de medidas.

A continuación presentamos la Gráfica de los puntos de la tabla anterior en un plano log vs. log los puntos se ajustan a una recta cuya pendiente ajustada es: de $M \approx 0.3$.



o sea

$$M = \frac{.26 + .55 + .34}{3} = 0.3$$

Debido a que los datos descritos anteriormente implican leyes potenciales entonces si introducimos una medida de longitud U y una escala para el compás "S" con las siguientes equivalencias.

$$U=0.951 \approx 1000 \text{ Km}, \quad S= 1 \approx 1000 \text{ Km.},$$

En otras palabras si

$$S=0.1 \approx 100 \text{ Km.}$$

y así para las demás medidas.

Por otro lado queremos interpretar a $\frac{1}{S}$ como una medida de más

precisión, es decir, cuando s es pequeña $\frac{1}{s}$ es grande. Los puntos sobre la gráfica \log vs. \log mostrarán siempre como la longitud total $\log(U)$ cambia al incrementarse la precisión $\frac{1}{s}$.

•Observaciones importantes.

Los puntos en el diagrama \log vs. \log están aproximadamente alrededor de una línea recta según la Estadística Matemática la aproximación se define con el método de mínimos cuadrados.

En nuestro caso se obtiene una línea horizontal para el círculo y una línea recta con una cierta pendiente $m = 0.3$ para la costa en cuestión.

Suponemos que cuando tomamos estos datos y los usamos, entonces hacemos un pronóstico de los cambios, cuando pensamos en medidas más precisas, es decir, cuando usamos una escala de compás pequeña s . Esta determinación da justamente el mismo resultado para el círculo aún cuando la línea sea horizontal., en otras palabras el círculo tiene una longitud finita; sin embargo la medida de la longitud de la costa determinará un incremento para cada escala pequeña de medida.

Si denotamos por b a la intersección de la línea ajustada con el eje vertical, entonces b corresponde a la longitud de medida con escala $S=1$ que corresponde a 1000 Km.

La relación entre la longitud U y la escala de medidas "S" cubierta por el compás puede expresarse por :

$$\log U = d \cdot \log\left(\frac{1}{s}\right) + b,$$

donde $m = d$ es la pendiente y b es la ordenada al origen.

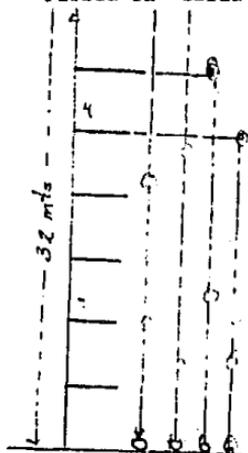
Esta ecuación expresa como la longitud U cambia cuando la escala del compás "S" cambia, suponiendo que estamos en el plano \log vs. \log y las medidas se ajustan a una línea recta.

En tal caso las dos constantes d y b caracterizan la ley de crecimiento., la pendiente d de la línea ajustada es la que proporciona la dimensión del fractal del objeto subyacente.

5. Leyes Potenciales.

5a. EXPERIMENTO DE LA "CAÍDA LIBRE"

Explicuemos la idea con datos tomados de un experimento de una ley Física la caída libre de un cuerpo.

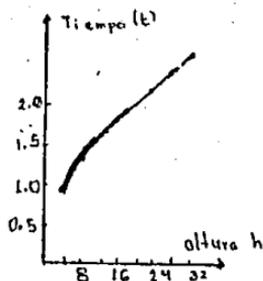


Experimento: supongamos que un edificio tiene 8 niveles, la separación en cada uno de los niveles es de 4 metros. El experimento consiste en dejar caer un objeto desde el primer primer nivel y medir el tiempo en que el objeto tarda en llegar al suelo. Después pasar al segundo nivel y hacer lo mismo que en el paso anterior, y así hasta el octavo nivel. Anotar los resultados en una tabla y describir la gráfica que mejor se ajuste a dichos datos.

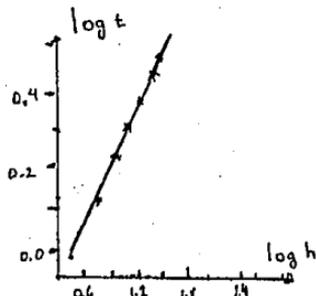
TABLA DE RESULTADOS.

Altura h	Caida con respecto al tiempo t. en seg.	Log.h	Log.t
4	0.9	0.60	0.05
8	1.3	0.90	0.11
12	1.6	1.08	0.20
16	1.8	1.20	0.26
20	2.0	1.30	0.30
24	2.2	1.38	0.34
28	2.4	1.45	0.38
32	2.6	1.51	0.41

La tabla muestra los datos del experimento en la caída libre de un objeto, donde se está midiendo el tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo de nivel en nivel y también



presentamos el de la altura h y el tiempo t en logaritmos.



La gráfica muestra la relación entre la altura h y la caída de un cuerpo con respecto al tiempo los datos en la gráfica muestran claramente que los puntos forman una curva lo que muestra que la relación entre la altura h y la caída con respecto al tiempo t no es lineal, sino potencial. La gráfica muestra la misma relación pero, con ejes transformados $X = \log h$, $Y = \log t$, se observa que los mismos datos dan como resultado una línea recta en forma ajustada y obviamente representan la misma gráfica.

$$t = c \cdot h^d$$

Ley potencial que describe la relación entre la

altura h y la caída del cuerpo con respecto al tiempo t esta relación es potencial debido a que t depende de h .

$$\log t = \log (c \cdot h^d)$$

En la ecuación anterior tomamos logaritmos en ambos lados de la igualdad.

$$\log t = d \cdot \log h + \log c$$

$$Y = M \cdot X + B$$

Así los puntos $(\log t, \log h)$ o más bien los puntos (t, h) deben estar sobre una línea recta ajustada, cuya pendiente es el valor d y la intersección con el eje y es $b = \log c$ por lo que $c = 10^b$.

En nuestro ejemplo podemos trazar la línea recta ajustada en el plano

doble logaritmo escribiendo la pendiente d y la intersección con el eje y , es decir, de la gráfica y los datos tenemos pendiente de la recta ajustada $m = d = 0.48$ (promedio de los puntos ajustados).

La intersección con el eje y es

$$\log c = -.33 \rightarrow c = 10^{-.33} \rightarrow c \cdot \frac{1}{10^{1/3}} = \frac{1}{2.1544} = 0.47$$

Por lo que la ley potencial se expresa por

$$t = c \cdot h^d$$

Sustituyendo los valores de d y c tenemos

$$t = 0.47 \cdot h^{0.48}$$

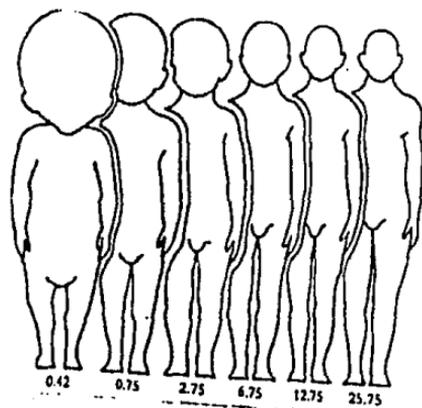
Por otro lado según la ley de Newton para la caída libre.

$$h = \left[\frac{1}{2}\right]gt^2, \text{ con } g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{9.8}} \cdot \sqrt{h} \approx 0.451 \cdot h^{1/2} \approx 0.451 \cdot h^{0.5}$$

Esto es equivalente al resultado empírico calculado anteriormente.

5b. LA LEY POTENCIAL Y SU RELACION CON EL CRECIMIENTO DE LA CABEZA Y ALTURA DEL CUERPO DE UN SER HUMANO.



La relación entre el crecimiento del tamaño de la cabeza y la altura del cuerpo humano nos muestra en la ilustración que en los primeros 3 años del desarrollo del ser humano, la proporción del crecimiento es constante pero debido al desarrollo del cuerpo existe un cambio isométrico entre ambas

partes.

Este desarrollo se puede ver en dos fases una hasta los 3 años y la otra fase hasta que el proceso de crecimiento termine .

Aprovechando el uso de las leyes potenciales y las gráficas en papel logarítmico se puede hacer un modelo para representar este fenómeno.

TABLA DE RESULTADOS DEL FENÓMENO

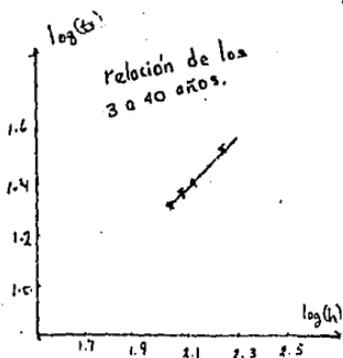
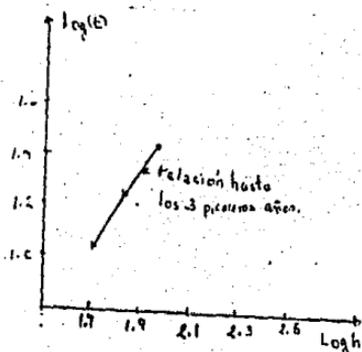
Años cumplidos	Altura del cuerpo	Tamaño del craneo	Altura del cuerpo (log h)	Tamaño del craneo (log t)
0	50	11	1.70	1.04
1	70	15	1.85	1.18
2	79	17	1.90	1.23
3	86	18	1.93	1.26
5	99	19	2.00	1.28
10	127	21	2.10	1.32
20	151	22	2.18	1.34
25	167	23	2.22	1.36
30	169	23	2.23	1.36
40	169	23	2.23	1.36

La tabla muestra los datos específicos de la medida del tamaño de la cabeza con respecto a la altura del cuerpo y las mismas medidas en logaritmos..

Con estos datos y sus gráficas estándar y en papel logarítmico queremos hallar un modelo que relacione el cambio isométrico, haciendo uso de las 2 etapas ,una hasta los 3 años y la otra hasta que el proceso de crecimiento termine.

• REPRESENTACION GRÁFICA DEL FENÓMENO ISOMÉTRICO.

Los puntos en el plano log VS. log muestran las 2



etapas de crecimiento para la persona. La primera denota la etapa hasta los 3 años, y la segunda de los tres años hasta los 40 años. La pendiente promedio en la recta ajustada en la primera etapa es

$m_1 = 1$, dado que

$$m_1 = \frac{1.18 - 1.04}{1.85 - 1.70} = \frac{0.14}{0.14} = 1$$

$$m_2 = \frac{1.23 - 1.18}{1.90 - 1.85} = \frac{0.05}{0.05} = 1$$

$$m_3 = \frac{1.26 - 1.23}{1.93 - 1.90} = \frac{0.03}{0.03} = 1$$

$$\therefore m_1 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

La pendiente promedio de la recta ajustada en la segunda etapa es de aproximadamente igual a un tercio, dado que:

$$m_4 = \frac{1.32 - 1.28}{2.10 - 2.00} = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$$

$$m_5 = \frac{1.34 - 1.32}{2.18 - 2.10} = \frac{0.02}{0.08} = 0.25$$

$$m_6 = \frac{1.36 - 1.34}{2.22 - 2.18} = \frac{0.02}{0.04} = 0.5$$

$$m_7 = \frac{1.36 - 1.36}{2.23 - 2.22} = \frac{0}{0.01} = 0$$

$$\therefore m_{II} = \frac{0.4 + 0.25 + 0.05}{3} = \frac{1.15}{3} = 0.38333 \approx \frac{1}{3}$$

Concluimos, entonces que para la primera etapa hasta los tres años los datos tienen una pendiente constante alrededor de 1, esta corresponde para el crecimiento igual de cabeza y altura del cuerpo.

La segunda línea tiene una pendiente más inclinada de aproximadamente un tercio donde los datos describen las proporciones del llamado crecimiento isométrico.

Este ejemplo nos proporciona una ley potencial la cual describe lo siguiente: El tamaño de la cabeza es proporcional a la raíz cúbica del tamaño del cuerpo, entonces tenemos que el factor en la escala del tamaño del cuerpo es semejante al cubo del tamaño de la cabeza, el cual se denota como:

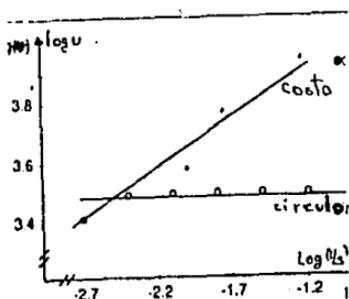
ALTURA DEL CUERPO proporcional al (TAMAÑO DE LA CABEZA)³, es decir

$$h \propto s^3$$

donde h="altura del cuerpo", \propto ="símbolo de proporcionalidad" y s = "tamaño de la cabeza".

5c. RESUMEN SOBRE LAS LEYES POTENCIALES.

Si los datos x, y de un experimento están sobre el rango de una escala, entonces es posible que exista una ley potencial que exprese a y en términos de x. Donde se conjetura que para los puntos de los datos de la ley potencial, estos se ajustan a una línea recta en el plano log VS.log (papel logarítmico), donde el exponente 3 de la ley potencial denota la pendiente de la línea recta .



El siguiente diagrama log VS.log nos muestra las medidas de la costa de Inglaterra y el círculo de radio 1000 Km ,donde tomamos a s igual a la abertura del compás en unidades de 1000 Km. Para una mayor precisión en la longitud tomamos el

recíproco de s , o sea

$$\log \left(\frac{1}{s} \right).$$

La gráfica sostiene que la relación que se da en ambos casos el círculo y la costa son una ley potencial, donde en forma general se puede concluir que si hacemos U igual a la longitud y s igual a la escala del compás, entonces se cumple

$$U = c \left(\frac{1}{s} \right)^d$$

Si recordamos que el resultado para la costa de Inglaterra el valor para $d=0.3$, entonces la medida de longitud U de la costa crece en proporción a un incremento de la precisión $(1/s)$ elevado a la potencia 0.3 es decir la longitud se expresa como

$$U \propto \frac{1}{s^{0.3}}$$

5d. MAPAS CON MUCHOS DETALLES Y SU RELACION CON LAS LEYES POTENCIALES.

Discutiremos algunos aspectos de la relación $U = c \left(\frac{1}{s} \right)^d$ esta relación se puede expresar como una ley potencial entre dos escalas la longitud U y la escala del compás s , esto es

$$U = c \left(\frac{1}{s} \right)^d, \text{ con } c = 10^b, b=0$$

Una consecuencia inmediata es que si, $s \rightarrow 0$, entonces $\frac{1}{s^d} \rightarrow \infty$ esto es la longitud U tiende al infinito, por lo que si la medida en la

escala del compás tiende a cero en algún mapa, entonces la relación

$$U = c \left[\frac{1}{S} \right]^d$$

se considerará inválida debido a la resolución finita del mapa. De hecho en este caso la medida de longitud permite tender a este límite. La ley potencial y esta consecuencia son válidas únicamente en un rango de medidas de la escala del compás basado simultáneamente en algún pico del mapa con una infinidad de detalles.

En otras palabras, la ley potencial caracteriza la, complejidad de la costa en este caso la costa de Inglaterra sobre algún rango de escalas, expresando rápidamente el incremento de longitud si nuestras medidas son siempre de una exactitud fina.

Eventualmente tales medidas no se hacen con mucho sentido debido a que no determinamos la continuación o dirección de los mapas, sino más bien una medida de la costa comenzando en realidad con sus fases y problemas de identificación como son donde comenzamos y donde finalizamos la medición, si medimos con marea alta o baja, así como también la porción de las deltas de los ríos etc. Esto es el problema se convierte un tanto enredoso.

A pesar de eso podemos decir que en cualquier término la costa de Inglaterra no tiene longitud. La única cosa significativa que podemos decir acerca de esa longitud es que parece comportarse sobre todo como una ley potencial sobre un rango de escalas que pueden ser especificadas y este comportamiento será su característica.

•CARACTERÍSTICAS DE LAS LEYES POTENCIALES.

Lo que se propone hacer notar acerca de estas características es probar que dichas medidas dadas en números son diferentes cuando se comparan las costas de Inglaterra con las de Noruega o California.

En forma análoga sucede lo mismo si medimos la longitud de las fronteras entre España y Portugal, por ejemplo si recordamos que en la enciclopedia de Portugal, la frontera tiene un valor mayor que en la de España. Desde cuándo la frontera de Portugal es menor en comparación con la de España. Es muy probable por lo tanto que el

mapa usado en Portugal para la medida de su frontera común tubo mucho mas detalles, fue de una escala más pequeña -que el mapa usado en España.

El mismo razonamiento explica las diferencias para las medidas del litoral de Inglaterra.

5e. MEDIDA DE LA FRONTERA DEL ESTADO DE UTAH.

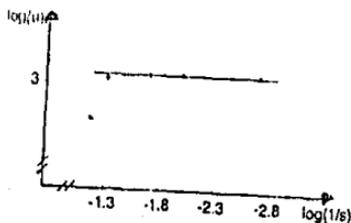


La figura muestra un bosquejo del mapa de Utha uno de los estados de USA, como se puede apreciar la frontera de dicho estado es muy recta o derecha queremos hallar su dimension y caracterizar la longitud de la frontera y si esta se considera de longitud finita o infinita a través de una ley potencial.

REPRESENTACION GRAFICA DEL ESTADO DE UTAH.

Escala (s)	Longitud (U)	$\log(1/s)$	$\log(U)$
500.km	1450 km	-2.69	3.16
100	1780	-2.00	3.25
50	1860	-1.69	3.26
20	1890	-1.30	3.27.

La tabla muestra algunas medidas basadas en mapas con varias escalas y con una medida de abertura del compás cubriendo varias distancias y sus respectivos valores en logaritmos.



Representacion log VS log de la medida de la frontera del estado de Utha.

U = "longitud medida en unidades de 100 km".

s = "abertura del compás medida en unidades de 100 km"

$$m_1 = \frac{3.27-3.26}{-1.30-(-1.69)} = \frac{0.01}{2.99} = 0.0003448 \rightarrow 0$$

$$m_2 = \frac{3.26-3.25}{-1.69-(-2.00)} = \frac{0.01}{3.69} = 0.000271 \rightarrow 0$$

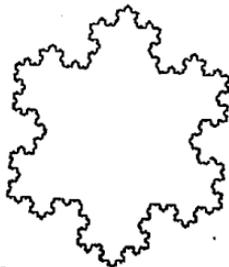
$$m_3 = \frac{3.25-3.16}{-2.00-(-2.69)} = \frac{0.09}{2.99} = 0.019 \rightarrow 0$$

$$m_T = \frac{0.0003448 + 0.000271 + 0.019}{3} = \frac{0.022058}{3} = 0.000735266 \rightarrow 0$$

La representación de los puntos en el diagrama log VS log tienen intuitivamente el comportamiento de una ley potencial, se observa que además que los puntos se ajustan a una línea horizontal, cuya pendiente $m_T=0$. Entonces, para la frontera de UTHA se tiene una ley potencial, cuyo exponente $d=0$ es igual al de la circunferencia, lo cual significa que la frontera tiene, para todo fin práctico, una longitud finita, y dimensión igual a la obtenida para la circunferencia, es decir, $D = 1$.

5f. MIDIENDO LA CURVA DE KOCH.

El siguiente ejemplo presenta la importancia del comportamiento de la ley potencial en una situación puramente matemática, para ello recordemos la construcción de la curva del Copo de Nieve de Koch o también conocida como curva de la Isla de Koch.



La curva de la Isla de Koch tiene una costa o litoral, el cual está formado por 3 curvas idénticas de Koch, recordemos que cada curva puede ser dividida en 4 partes autosemejantes,

las cuales son semejantes a la, curva entera, vía una transformación de semejanza, la cual se contrae, por un factor de 3.

Por lo tanto es natural un cambio en la escala del compás cubriendo medidas de la forma:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3} \dots \frac{1}{3^k}$$

Hay 2 caminos para trabajar con la escala del compás sobre la Isla de Koch. Por un lado es técnicamente imposible decir que para un cierto conjunto de medidas el compás lleva una precisión de $\frac{1}{3^4} = 0.0123456789012 \dots$

Lo conveniente es mantener la escala del compás constante y considerar ampliaciones cuyos factores sean 1, 3, 3², 3³..., pero estas recomendaciones son algo confusas debido a la contrucción de la curva, por otro lado sabemos que la curva está constituida en distintas etapas, esto es, las medidas en las etapas son

$$\frac{4}{3} \quad \text{cuando la escala del compás es } s = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4^2}{3^2} \quad \text{cuando la escala del compás es } s = \frac{1}{9}$$

.....
 $\left(\frac{4}{3}\right)^k \quad \text{cuando la escala del compás es } s = \left(\frac{1}{3}\right)^k$

Representemos estas medidas en un diagrama log vs. log, pero haciendo un cambio a logaritmos en base 3, tanto en la longitud y, como a la escala del compás s, entonces tenemos:

$$U = \left(\frac{4}{3}\right)^k \quad \text{y} \quad s = \frac{1}{3^k}$$

aplicando el \log_3 se tiene:

$$\log_3 U = \log_3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^k \right] \quad \text{y} \quad \log_3 s = \log_3 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^k \right]$$

pero $\log_3 U = k \cdot \log_3 \left[\frac{4}{3} \right]$ y además

$$\log_3 s = \log_3 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^k \right] \Rightarrow \log_3 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^k \right] = \log_3 3^{-k} \Rightarrow \log_3 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^k \right] = k \cdot \log_3 3 \Rightarrow \log_3 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^k \right] = k$$

sustituyendo el valor de k en la expresión

$$\log_3 U = k \cdot \log_3 \left[\frac{4}{3} \right]$$

se tiene que

$$\log_3 U = \log_3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^d \right] \cdot \log_3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^d \right]$$

pero el $\log_3 (4/3) = d = \text{cont.}$, por lo que

$$\log_3 U = \log_3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^d \right] \cdot d \Rightarrow \log_3 U = d \cdot \log_3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^d \right]$$

por lo que el valor para d es

$$d = \log_3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^d \right] = 0.2619$$

(Véase el Apéndice 3)

A la ecuación

$$\log_3 U = d \cdot \log_3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^d \right]$$

se le conoce como la *ley de crecimiento de la longitud U*.

El valor numérico $d = 0.2619$, que es el valor de la pendiente en la ley potencial es un valor notable, puesto que con él se midió la costa cerrada de Inglaterra.

6. Dimensión de Autosemejanza y medidas de longitud.

¿Cuál es la relación entre la ley potencial y la medida de longitud usando distintas escalas en el compás y la dimensión de autosemejanza de una curva fractal?

Para responder a esta pregunta hagamos $D_s = 1 + d$, donde d denota la pendiente de la recta ajustada en el plano $\log VS \log$, cuya abscisa

es la escala del compás $\log(1/s)$ y la ordenada es $\log U$ es decir, $U = c/s^d$.

Simplifiquemos primero con un cambio apropiado de las unidades de medida de la longitud, tal que el factor c en la ley potencial sea 1: $U = 1/s^d$; tomando logaritmos tenemos $\log U = d \cdot \log(1/s)$, donde U es la medida de longitud con respecto a la medida de la abertura del compás s .

Por otro lado, tenemos la ley potencial dada por $a = 1/s^d$, donde a denota el número de piezas en cada uno de los pasos de reemplazamiento del fractal autosemejante con un factor que depende de la escala s . En forma logarítmica

$$\log a = D_s \log(1/s).$$

Ahora notemos la conexión entre la longitud U y el número de piezas a si la escala del factor $s=1$ entonces medimos una longitud $U=1$. Efectivamente tenemos $U = 1/s^d \rightarrow$ si $s=1 \rightarrow U = 1/1^d \rightarrow U = 1$; entonces si hacemos un cambio en la escala s , donde todo el objeto está compuesto por copias pequeñas cada una de medida s entonces la medida total de longitud a , al mismo tiempo que el factor s se denota por: $U = a \cdot s$.

Esto asegura la conclusión siguiente:

$$\log U = \log (a \cdot s) = \log a + \log s$$

en esta ecuación hagamos las siguientes substituciones:

$$\log U = d \cdot \log(1/s), \quad \log a = D_s \log(1/s)$$

entonces tenemos que

$$\log U = \log a + \log s \quad d \cdot \log(1/s) = D_s \log(1/s) + \log s$$

y como $\log(1/s) = -\log s$ entonces

$$-d \cdot \log s = -D_s \log s + \log s$$

ordenando los términos y dividiendo por el $\log s$ obtenemos

$$-d = -D_s + 1 \rightarrow D_s = d + 1$$

El resultado de esta deducción nos lleva a concluir que la dimensión de autosemejanza puede ser calculada por dos caminos equivalentes.

i) Basandose en la autosemejanza de las estructuras, calculando el número de piezas "a" sobre "1/s" donde "s" es el factor de la escala, que se caracteriza como copias o partes de una estructura total. El exponente de D_f en esta ley es la dimensión de autosemejanza.

ii) Llevando en el exterior y en la frontera de la figura un conjunto de distintas medidas con el compás (abierto a distintas escalas) calculando la ley potencial que relacione a la longitud con $1/s$; donde s es la abertura del compás a distintas escalas. El exponente d en esta ley incrementado en la unidad es la dimensión de auto-semejanza; $D_f = 1 + d$.

El resultado que describe la segunda alternativa $D_f = 1 + d$, donde d es la pendiente de la línea ajustada en el plano log\log considerando la longitud U sobre la precisión en la escala "1/s" describe un resultado general puesto que es una alternativa para calcular la dimensión de objetos que no son auto-semejantes como son las costas o litorales, a esta alternativa se le denomina "dimensión de área o compás".

Si recordamos para la costa de Inglaterra $d \approx 0.3$ así la dimensión para la costa es $D_f \approx 1 + 0.3 \approx 1.3$.

La dimensión fractal de la frontera del estado de UTAH es $d = 0$, así $D_f = 1 + 0 = 1$ que es la dimensión de una línea recta. (véase Apéndice).

6a. Cálculo de la dimensión para la curva "3/2"

Daremos un ejemplo para hallar la dimensión de la curva autosemejante 3/2 cuyo proceso de construcción describiremos hasta la

segunda etapa.



• Construcción de la curva "3/2"

Etapa inicial.

Partimos de un segmento de longitud unitaria la cual se le considera la etapa inicial (c_0).

Primera etapa.

Remplazamos al segmento de línea por una poligonal de ocho segmentos cada una de longitud $1/4$; podemos decir entonces que la longitud de la poligonal es de $8/4 = 2$ (Doble de la etapa anterior)

Segunda etapa.

En esta etapa cada segmento de la etapa anterior se reduce a un cuarto de longitud de la etapa anterior y a $1/4^2$ de la longitud original. La longitud total en esta etapa es de $8^2/4^2 = 2^2$.

Si continuamos con este proceso obtenemos en el límite a la curva $3/2$. El resultado de la longitud en cada etapa es el doble de la anterior así en la k -ésima etapa la longitud se expresa como 2^k .

El número de segmentos crece a razón de 8 segmentos por cada segmento en cada una de las etapas así en la k -ésima etapa se tienen 8^k segmentos de longitud $1/4^k$.

Podemos entonces argumentar que la longitud de la figura es entonces:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{8^k}{4^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{4} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \rightarrow \infty$$

es decir la longitud de la curva es infinita.

• Dimensión de la curva "3/2"

Calculemos ahora la dimensión de la curva, para lo cual tenemos que $U = 2^k$ y el factor de reducción en la escala del compás es $s = 1/4^k$, tomando logaritmos en una base apropiada, por ejemplo en base 4 tenemos:

$$\log_4 U = \log_4 2^k$$

$$\log_4 U = k \log_4 2$$

$$\log_4 s = \log_4 (1/4^k)$$

$$\text{así } \log_4 (1/s) = \log_4 \frac{1}{\frac{1}{4^k}} \Rightarrow \log_4 (1/s) = \log_4 4^k$$

$$\therefore \log_4 (1/s) = k \log_4 4 ; \text{ pero } \log_4 4 = 1 \text{ así } \log_4 (1/s) = k;$$

combinando las dos ecuaciones encontradas y sustituyendo el valor de k tenemos:

$$\log_4 U = \log_4 (1/s) \log_4 2$$

hagamos $\log_4 2 = d$, entonces

$$\log_4 U = d \cdot \log_4 (1/s)$$

así

$$d = \log_4 2 \Rightarrow 4^d = 2 \text{ y } 4^{1/2} = 2 \Rightarrow d = 1/2 = 0.5$$

por lo tanto la dimensión de auto-semejanza es $D_u = 1 + 0.5 = 1.5$.

Otra forma para el calculo de la dimensión es aplicar el modelo $N = E^D$; por ejemplo de la etapa inicial a la primera etapa, $N = 8$, e

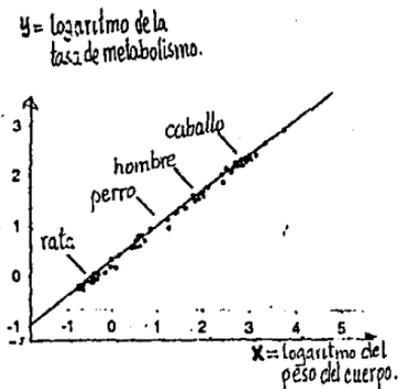
$$= 1/4, \text{ por lo que obtenemos } 8 = \left(\frac{1}{4} \right)^D \Rightarrow 8 = 4^D$$

$$\therefore D = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{0.9030}{0.6020} = 1.5$$

Gb *Fractales Naturales de algunos organismos.*

El fractal natural del organismo fue apoyado por M. Sernetz y otros en 1985, sobre ciertas especulaciones fascinantes que se tenían acerca de dicho fractal el cual consiste ó se basa en la tasa del metabolismo de varios animales (ratas, perros y caballos) y esta relacionado con respecto al peso de sus cuerpos.

La tasa de metabolismo es medido en Joules por segundo y el peso en kilogramos. Puesto que el peso del cuerpo es proporcional al volumen y dado que la escala del volumen esta dada en unidades cúbicas para nuestro caso r^3 entonces el factor de escala se considera en unidades lineales r .



Una primera conjetura puede ser que la tasa del metabolismo deba ser proporcional al peso del cuerpo (es decir proporcional a r^3).

La gráfica muestra que de algún modo la ley potencial es significativamente diferente para un valor esperado. La pendiente de la línea interpolada es de aproximadamente $m = 3/4 = 0.75$.

Denotemos a m , la pendiente, como la tasa de metabolismo y a w como el peso del cuerpo, entonces $\log m = a \cdot \log w + \log c$ donde c denota la intersección, entonces $m = c \cdot w^a$, usando $w \propto r^3$ (tasa del metabolismo es semejantemente proporcional al peso del cuerpo) esto es equivalente a decir que $m \propto r^{3a}$ donde $3a = 2.25$.

Esto significa que nuestra conjetura de acuerdo a que la tasa del metabolismo debe ser proporcional al peso/volumen del cuerpo, es inconveniente.

Es una escala de acuerdo a un fractal cuya dimensión es $D = 2.25$. Esto tiene una explicación y esta basada en una especulación sobre la ley del potencial para la tasa del metabolismo y se basa en una reflexión al hecho de que un organismo es en algún sentido altamente más semejante a una superficie enroscada que a un cuerpo solido. Es

conforme a la escala de una superficie fractal de dimensión $D = 2.25$.

7. Dimensión de Compartimientos.

Dimensión de compartimientos. La dimensión de compartimientos propone una medida sistemática la cual se aplica en cualquier estructura en el plano y puede ser adaptada a estructuras en el espacio.

Estas estructuras pueden ser autosemejantes o no pueden serlo; para poder hallar esta medida, que se conoce como la "medida de complejidad" de la estructura procedemos de la siguiente manera.

Pongamos la estructura sobre una cuadrícula regular que depende de una escala " s "; el proceso consiste en cambiar la escala de s progresivamente a cuadrículas más pequeñas y contar el número de cuadros que contienen alguna porción de la figura en cada cambio que hagamos sobre la escala de s .

Denotemos por N , al número de cuadrículas que contienen alguna parte de la estructura y dado que este número dependerá del cambio de la escala s , denotamos a este número por $N(s)$; y en la escala d tomamos el recíproco $1/s$ de la misma.

Estableciendo lo anteriormente dicho, escribimos los valores en una tabla estableciendo los puntos en un plano doble logaritmo; dichos puntos son de la forma $\log N(s)/\log (1/s)$.

Una propuesta práctica para considerar la secuencia de las cuadrículas es que el tamaño de la misma tenga una escala cuyo factor de reducción sea de $1/2$ de una de las cuadrículas a la siguiente.

En cada una de estas aproximaciones, para cada compartimiento de una cuadrícula esta debe ser subdividida en cuatro compartimientos de longitud la mitad del compartimiento, esto nos da la siguiente cuadrícula y así para las siguientes hasta donde se quiera.

Para el cálculo de la dimensión del fractal consideremos lo siguiente: los puntos de la forma $\log N(s)/\log (1/s)$ gráficos en el plano doble logaritmo describirán en forma aproximada una línea recta, entonces la "pendiente" m de la recta ajustada de los datos denotada por D_0 es la dimensión de compartimiento de la figura.

Definición: La pendiente " m " de la línea ajustada de los puntos de la forma: $\log(\text{compartimientos}/(1/\text{escala } x))$ en el plano doble logaritmo es la dimensión de compartimiento de la figura. La dimensión de compartimientos nos da también una medida de la complejidad de la figura.

En seguida presentamos una estructura "desordenada"; a través de la dimensión de compartimientos hallaremos su dimensión.

La figura representa una estructura la cual no es auto-semejante y esta encerrada en forma desordenada, hallaremos la dimensión por compartimientos.

Así $N(s_1) = 19$ (número de cuadros que cubren una porción de la figura), para $N(s_2) = 52$ número de compartimientos que tocan una vez la figura.

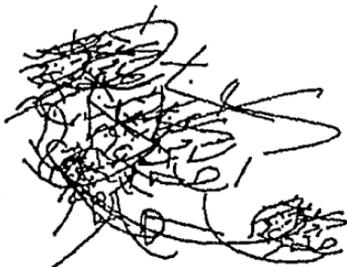
Escribamos estos resultados en una tabla

1/escala x	6	12
compartimientos	19	52
$\log (1/s)$.77	1.07
$\log N(s)$	1.2	1.7

Por lo tanto la pendiente tiene el valor

$$m = \frac{1.7 - 1.2}{1.07 - 0.77} = \frac{0.5160}{0.3} = 1.72$$

así la dimensión de la figura es $D_0 = 1.72$.

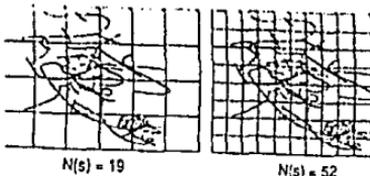


Para una mejor comprensión del tema ver las actividades propuestas. En forma general cuando las cuadrículas tienden a una secuencia de la forma $N(2^{-k})$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ la pendiente de la

recta ajustada de los datos en el correspondiente diagrama log\log es:

$$\frac{\log N(2^{-k-1}) - \log N(2^{-k})}{\log (2^{k+1}) - \log (2^k)} = \log \frac{N(2^{-k-1})}{N(2^{-k})}$$

si los logaritmos estan dados en base 2.



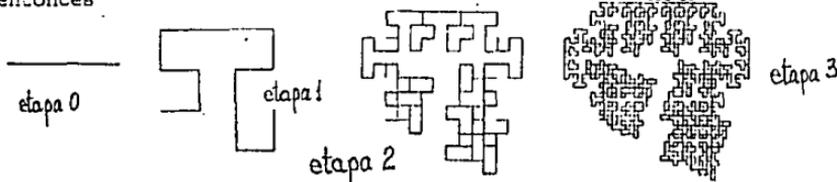
Esto es si el número de compartimientos contados se incrementa por un factor de 2^D cuando la medida de compartiminetos sea la mitad, entonces el fractal es de dimensión igual a D.

Diferencias entre D_a dimensión de auto-semejanza y D_b (por compartimientos), observamos que para la curva de Koch y la curva 3/2 en ambas la dimensión por compartimientos y la de auto-semejanza coinciden $D_a = D_b = 1.2$ (ver ejercicio resuelto).

Notemos que la dimensión por compartimientos $D_b < 2$ porque las dimensiones de estructuras fractales son curvas que en el paso límite son curvas muy temblorosas, es decir son curvas no lisas si no más bien gordas que exeden a la dimensión, por ejemplo de una recta es $D = 1$. En otras palabras son curvas más gordas que una recta pero más flacas que una área.

Ahora bien para hacer notar la diferencia entre D_a y D_b observamos que como a través del ejemplo siguiente $D_a > 2$ (dimensión de auto-semejanza puede ser mayor que 2).

En la figura se tiene que el factor de reducción s es de 1/3 y el número de piezas en alguna etapa de remplazamiento es a = 13, entonces



$$D_2 = \frac{\log(a)}{\log(1/s)} = \frac{\log 13}{\log 3} = 2.335... > 2$$

así $D_2 > 2$. La razón para esta discrepancia es que la curva generada en la figura tiene partes traslapadas las cuales son ignoradas por la dimensión de autosemejanza, pero no por la dimensión de compartimiento.

7a. Ventajas de la dimensión por compartimientos.

La dimensión por compartimientos es una de las más usadas para "medir" en todas las ciencias. La razón de este dominio es que su comportamiento descanza en la facilidad para hacer los calculos en una computadora automatica. El conteo de compartimientos en forma integra permite montar una estadística para el calculo de la dimensión.

El problema puede ser llevado a cabo con y sin auto-semejanza. Además la dimensión del objeto puede ser calculada si el posee una mayor dimensión espacial. Por ejemplo cuando consideramos objetos que comunmente tienen 3 dimensiones con altura, ancho y espesor. Pero el concepto también se aplica a fractales tales como el "conjunto Cantor" el cual esta compuesto por subconjuntos que practicamente son "polvos" de intervalos; en tales casos los intervalos son infinitamente pequeños.

Dimensión por compartimientos de la costa de Inglaterra e Irlanda.

Un ejemplo clásico que consideraremos es la costa de Inglaterra e Irlanda, como puede observarse la frontera de ambas costas estan cubiertas por rejillas escalas cuadradas cuyas escalas son de $1/24$ y $1/32$, los compartimientos que contienen una porción de la figura son 194 y 238 compartimientos respectivamente, con estos datos podemos ahora calcular la dimensión, para esto pongamos los datos en el plano $\log \log$, la pendiente de la linea recta que conecta dos puntos es

$$d = \frac{\log 283 - \log 194}{\log 32 - \log 24} = \frac{2.45 - 2.29}{1.51 - 1.38} \approx 1.31$$

este resultado se obtuvo previamente cuando se calculo la dimensión de



la misma figura pero a través de aberturas del compás a distintas escalas.

8. Fractales de líneas fronteras.

Construcción de la escalera del diablo y la curva de Peano.

La mayoría de los fractales vistos anteriormente tienen una dimensión no entera; pero todos los fractales son de este tipo.

De este modo los siguientes dos ejemplos representan casos extremos, es decir son fractales pero sus dimensiones son enteras.

. Construcción de la escalera del "diablo"

Esta estructura está relacionada con el conjunto de "Cantor", la cual describiremos a continuación

Conjunto de Cantor

Etapa inicial.

Tomemos el intervalo $[0,1]$



Primera etapa.

Dividamos en tres partes iguales al conjunto anterior omitiendo la parte de en medio.



Segunda etapa.



A cada segmento de la etapa anterior se divide en tres partes iguales y se omite la parte media.

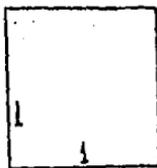


Si el proceso continúa en el límite obtenemos el conjunto de Cantor, algunos puntos de este conjunto son $0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 7/9, 1/27, 2/27...$

Este proceso se le conoce como retroalimentación el cuál se compone de una secuencia de intervalos cerrados los cuales son generados por etapas donde para la n -ésima etapa se tendrán 2^n

intervalos de longitud $1/3^p$.

Ahora construiremos la escalera del diablo.



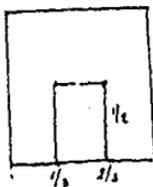
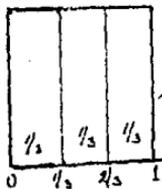
Construir un cuadrado en el intervalo $[0, 1]$, la longitud en cada lado del cuadrado es la unidad.

Dividamos en tres partes iguales a la base del cuadrado; la base del cuadrado queda dividida por los puntos: $0/3$, $1/3$, $2/3$ y $3/3$.

Primera etapa.

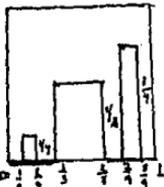
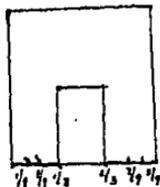
En la tercera parte media del cuadrado construimos una columna cuya base sea de un tercio y de altura un medio; así la base de esta columna estará situada en el intervalo $[1/3, 2/3]$.

Dividamos los tercios de la derecha y de la izquierda en tres partes exactamente iguales; esto es a los intervalos $[0, 1/3]$ y $[2/3, 3/3]$.



Segunda etapa.

Se levantan dos columnas una de altura un cuarto sobre el intervalo $[1/9, 2/9]$; y la otra de altura $3/4$ sobre el intervalo $[7/9, 8/9]$.



Tercera etapa.

En las cuatro partes de en medio de la partición anterior se construyen cuatro columnas una de altura $1/8$ sobre el intervalo $[1/27, 2/27]$, la siguiente altura de $3/8$ sobre el intervalo $[7/27, 8/27]$, la tercer columna cuya altura es de $5/8$ sobre el intervalo $[19/27, 20/27]$, y la cuarta cuya altura

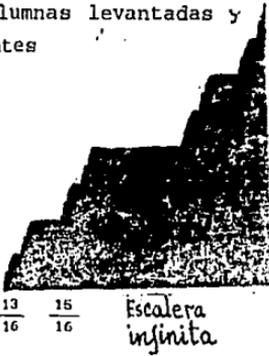


es de $\frac{7}{8}$ sobre el intervalo $[25/27, 26/27]$; esto concluye la tercera etapa.

En la k -ésima etapa tenemos:

para el número de columnas levantadas y alturas correspondientes

Etapa	Número de Columnas	Alturas por intervalos							
primera	1	$\frac{1}{2}$							
segunda	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$						
tercera	4	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$				
cuarta	8	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$
.....									
k -ésima	2^{k-1}	$\frac{1}{2^{k-1}}$		$\frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-1}}$					



Si continuamos con este proceso en el límite se obtiene una estructura que tiene la forma de una escalera infinita con un número infinito de peldaños o valores en un intervalo cerrado y finito.

Calculemos la **longitud total de nuestra escalera infinita**

El primer peldaño mide $\frac{1}{3}$. Los siguientes dos peldaños miden $\frac{1}{9}$ cada uno, los siguientes cuatro, miden $\frac{1}{27}$ cada uno; así la suma de las longitudes de todos los peldaños hasta la k -ésima etapa se

expresa por la progresión geométrica $S_k = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}}$

y al multiplicarse por $\frac{2}{3}$ se tiene

$$\frac{2}{3} S_k = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2^k}{3^k}$$

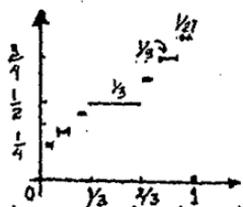
y restando las dos expresiones anteriores se obtiene

$$S_k - \frac{2}{3} S_k = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{9} \right) + \left(\frac{4}{27} - \frac{4}{27} \right) + \dots + \left(\frac{2}{3} \right)^k$$

factorizando se llega a

$$S_k \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$S_k = 1 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^k$$



La longitud total se obtiene al hacer tender k a infinito en la serie S_k o sea

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

pero para valores muy grandes de k , $\left(\frac{2}{3}\right)^k$ tiende a cero, por lo tanto se tiene que

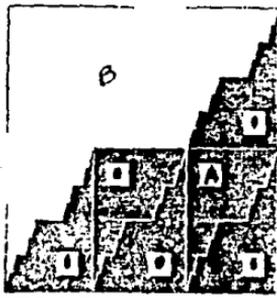
$$L = 1 + 3 \cdot 0 = 1$$

Pero la estructura no crece en estos peldaños, sólo se gana altura en los puntos del conjunto de Cantor pero muy pocos puntos caen en este conjunto (aún cuando su cardinalidad es la del continuo) ¡su longitud es cero!, la longitud del segmento $[0,1]$ es uno y la longitud total de los peldaños es uno.

La estructura sube de "0 a 1" aún cuando sólo crece en un conjunto de longitud cero y nunca da ningún salto.

Area bajo la curva de la escalera infinita.

Se puede observar que una escalera infinita aciende desde la izquierda en ángulo recto, tiene una infinidad de etapas y sus alturas se hacen infinitamente pequeñas.

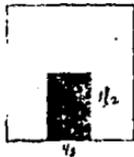


Dado que el proceso continua, en el límite el cuadrado se llena con la parte superior A y en la parte más baja con la B.

En el límite, habrá una simetría perfecta, la parte A será exactamente una copia de la parte B; la parte A se obtiene haciendo una rotación de 180° de la parte B.

En este sentido la frontera de la parte B de la escalera divide al cuadrado en dos fractales identicos reducidos a la mitad; así el área determinada por la parte B es exactamente un medio del cuadrado inicial en el límite.

El área bajo la curva que describe la escalera infinita se obtiene del siguiente modo.



Etapa inicial.

Para el área de la escalera en este caso la columna levantada de base igual a 1/3 y altura 1/2, el área se define por $A_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Segunda etapa.

Para el calculo del área unimos las dos columnas de base 1/9 y alturas de 1/4 y 3/4 respectivamente entonces obtenemos una sola columna de altura 1; así el area en esta

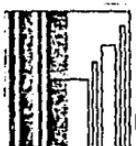
$$\text{etapa es } A_2 = \frac{1}{9} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right] = \frac{1}{9} \cdot 1$$

Tercera etapa.

Aquí las 4 columnas son de base $1/27$ y sus respectivas alturas son de $1/8, 3/8, 5/8$ y $7/8$, entonces el área en esta etapa es $A_3 =$

$$\frac{1}{27} \left[\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} \right] = \frac{1}{27} \cdot 1$$

Si continuamos este proceso es decir si movemos las columnas en ángulo recto y juntamos las partes respectivas de tal manera que se formen rectángulos cuya altura sea de uno excepto en la primera etapa entonces para la etapa inicial tendremos: un rectángulo de base $1/3$ y altura $1/2$, en la segunda etapa tendremos un rectángulo de base $1/9$ y altura 1 , en la tercera etapa tendremos dos rectángulos de base $1/27$ y altura 1 , en la k -ésima etapa tendremos 2^k rectángulos con base $1/3^k$ y altura 1 ; en el límite se obtiene una figura que "llena la mitad del cuadrado", asegurando así que el área bajo la curva de la escalera infinita es de $1/2$; como comprobaremos.



Denotemos por A el área total de la escalera y por $A_1, A_2 \dots A_n$ el área en respectivas etapas, entonces tendremos:

$$A = \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right] + \frac{1}{27} \left[\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} \right] + \dots$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} (1) + \frac{1}{27} (2) + \frac{1}{81} (4) + \dots + \frac{1}{3^k} (2^k) + \dots$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^k}{3^k} \right]$$

Hallems la suma de la serie geométrica

$$S_k = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^k}{3^k}$$

si multiplicamos por $2/3$ a la serie tenemos

■

$$\frac{2}{3} S_k = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}}$$

restando las dos expresiones anteriores se tiene

$$S_k - \frac{2}{3} S_k = 1 + \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right] + \left[\frac{4}{9} - \frac{4}{9} \right] + \dots + \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}}$$

$$S_k \left(1 - \frac{2}{3} \right) = 1 + \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}}$$

$$S_k = 3 \cdot \left(1 + \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}} \right) = 3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1}$$

en el límite cuando $k \rightarrow \infty$ el término $\left(\frac{2}{3} \right)^{k+1} \rightarrow 0$ entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 3 + 3 \cdot 0 = 3$$

Por lo tanto el área A de la escalera infinita es

$$A = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{6} + \frac{3}{9} = \frac{1}{2}$$

Dado que se comprobó que la longitud de la escalera infinita es 1 entonces, dado que la curva dentro del cuadrado es simétrica y la frontera de la escalera divide al cuadrado en dos fractales reducidos a la mitad, por una rotación de 180° entonces la longitud de la curva es exactamente 2 por lo que tenemos una curva fractal la cual es de longitud finita.

74. Dimensión de la escalera infinita.

Recordemos que en el capítulo 2 se llegó que

$$N(c) \cdot c^D = N(c') \cdot c'^D$$

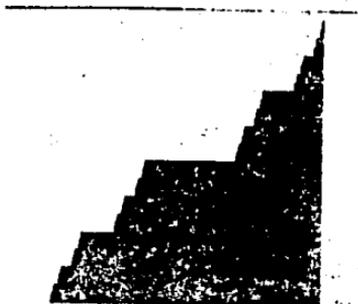
en este caso tenemos que $N(c) = 1$, $N(c') = 3$ y $c' = c/3$ sustituyendo tenemos

$$1 \cdot c^D = 3 \cdot (c/3)^D \quad \rightarrow \quad c^D = c^D \quad \rightarrow \quad D \cdot \ln c = \ln c \quad \rightarrow \quad D = \ln c / \ln c = 1$$

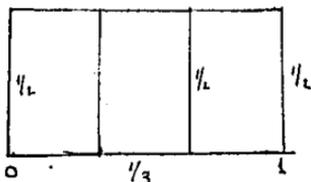
así la dimensión de la escalera infinita es $D = 1$.

La construcción de la escalera del diablo no es una estructura auto-semejante es una estructura auto-afin esto es: "si una estructura puede ser reducida dos diferentes factores, tanto en su escala horizontal como en la vertical imágenes que tienen partes que son copias afines de un total son llamados estructuras autoafin.

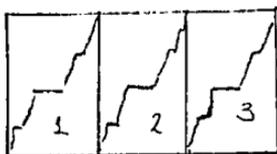
La escalera del diablo es un caso especial de una transformación afin como describiremos a continuación.



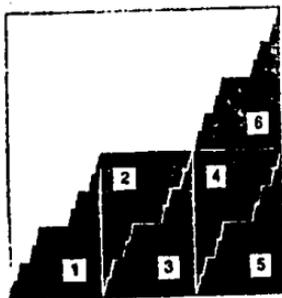
Gráfica completa que describe a la escalera infinita



dividamos al intervalo $[0,1]$ en tres rectángulos cuya altura sea igual a $1/2$ (factor vertical) y base igual a $1/3$ (factor horizontal)



Apliquemos la construcción reduciendo la imagen de la escalera con un factor horizontal reducido a $1/3$ y un vertical reducido a $1/2$ es decir por dos escalas diferentes; en cada uno de los tres rectángulos obtenemos así, tres copias idénticas reducidas de la escalera infinita.



Haciendo rotaciones de 180° se observa que el block 6 es igual al block 1 en forma semejante el block 2 es igual al block 3 y el block 4 es igual al block 5 de tal forma que si reunimos las seis copias en forma conveniente

obtenemos la imagen de la escalera infinita original, hacemos notar que dicha estructura no es auto-semejante porque sus factores de reducción en las escalas difieren (esto $1/2 \neq 1/3$) y en las estructuras auto-semejantes dichos factores son iguales; así la escalera infinita es auto-afin.

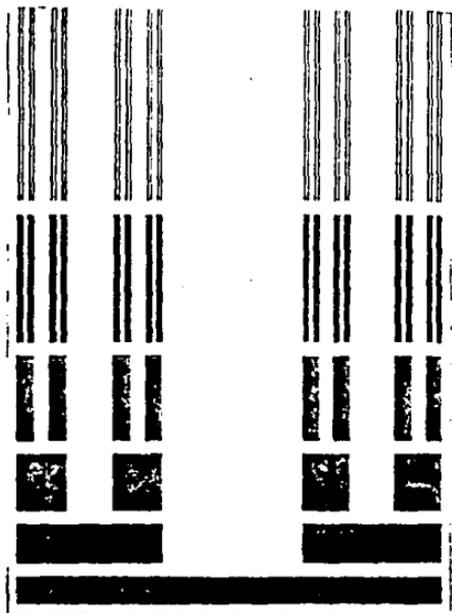
82
2. Aplicación de la escalera infinita a la física.

La escalera infinita es un invento que se considera puramente matemático y tiene una relación con la física de la manera siguiente: consideremos al conjunto de Cantor con una modificación; la cual describe al segmento unitario (iniciador como una barra con densidad $\rho_0 = 1$).

Supongamos que podemos comprimir y estrachar a la barra en forma arbitraria, entonces para las diferentes etapas de este fractal tenemos:

Barra inicial con longitud $L_0 = 1$ y masa inicial $m_0 = 1$ ahora cortemos a la barra a la mitad, obteniendo dos piezas idénticas con masas iguales $m_1 = m_2 = 1/2$.

en la siguiente etapa hacemos esfuerzos reiterados para que la longitud sea reducida a $L_1 = 1/3$ en cada una de sus partes. Entonces la masa se conserva, la densidad en cada pieza debe de incrementarse por



$$r = \frac{m_1}{l_1} = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$$

Repetiendo este proceso se tiene que el número de barras es de $N = 2^n$ con una longitud $l_n = 1/3^n$ y masa $m_n = 1/2^n$, Mandelbrot llamó a este proceso cuajamiento de una distribución uniforme de masas; por este proceso las masas se agrupan en muy pequeñas regiones con una alta densidad. La densidad de cada una de estas piezas, pequeñas

$$r = \frac{m_n}{l_n}$$

La figura muestra que la densidad es alta en las barras en cada generación.

Suponemos ahora que el proceso de cuajamiento tiene que ser aplicado una infinidad de veces y tenemos que pensar en la estructura resultante puesta en un eje de longitud 1 medida de izquierda a derecha.

Entonces la masa $M(x)$ de la estructura sobre un cierto intervalo digamos $[0, x]$ se puede escribir formalmente por:

$$M(x) = \int_0^x dm(t)$$

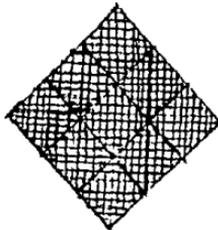
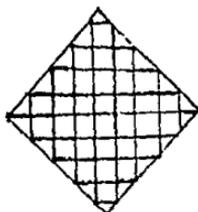
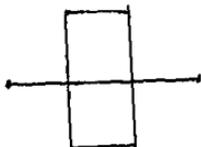
donde la masa no cambia.

Ahora si incrementamos por saltos infinitesimales al conjunto de Cantor, la gráfica de la función resultante es una escalera infinita.

4. La curva de Peano.

En la sección anterior discutimos la construcción de un fractal cuya dimensión es $D = 1$ veamos ahora otro caso extremo, un fractal de dimensión $D = 2$ el c

describiremos.



Etapa inicial.

SE toma un segmento de longitud unitaria como iniciador, dividimos en tres partes iguales a dicho segmento.

Segunda etapa.

Cada segmento de línea de la etapa anterior es remplazado por nueve segmentos de longitud $1/3$ del segmento original; se observa que en la mitad de la tercera parte hay dos puntos donde la curva se toca así misma. Este modelo geométrico se le conoce como el generador y es el patron que se va a seguir en la construcción de la curva.

Tercera etapa.

Con el modelo muestra, cada segmento de línea de la etapa anterior es remplazado por 9 segmentos de longitud $1/3$ de la longitud de la etapa anterior, la curva tiene en esta etapa 32 puntos donde se corta así misma

Si continuamos con este proceso en forma iterativa en el límite se obtiene la curva de Peano.

Longitud de la curva de Peano.

Observamos de la construcción en sus distintas etapas se tiene que cada segmento de línea se remplaza por 9 segmentos de $1/3$ de longitud de la etapa anterior, así obtenemos que el segmento de línea que constituye el iniciado tiene longitud unitaria.

En la primera etapa la longitud es de $9 \cdot (1/3) = 3$

en la segunda etapa la longitud es de $9 \cdot 9 \cdot (1/3^2) = 9$

en la tercera etapa la longitud es de $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot (1/3^3) = 27$

...

en la k-ésima etapa la longitud es de $l = 3^k$

• *Calculo de la dimensión del fractal de la Curva de Peano.*

Observamos que la curva de Peano es auto-semejante porque en cada etapa el factor de reducción es de un tercio entonces de acuerdo a la formula tenemos $N = 1/s^D$ y basandonos en la primera etapa tenemos que $N = 9$, $s = 1/3$ y sustituyendo encontramos que

$$9 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^D} \rightarrow 9 = 3^D \rightarrow D = 2$$

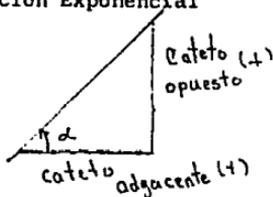
por lo tanto la dimensión de la curva de Peano es 2.

CAPITULO III

LA IDEA DE COMPLEJIDAD

1. Conceptos fundamentales: Función Lineal, Función Exponencial

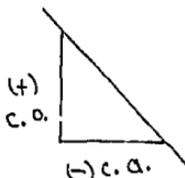
• La siguiente gráfica muestra a un Fenómeno Lineal Creciente, denotado por una Recta Creciente: $y = mx + b$, donde



$$m \stackrel{\text{def}}{=} \text{"pendiente"} = \tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \rightarrow 0$$

• Fenómeno lineal Decreciente:
Recta decreciente.

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \text{"pendiente"} < 0$$



• Fenómeno constante:
Recta no creciente y no decreciente.
 $m = 0$



El ejemplo siguiente nos muestra en forma particular los 3 fenómenos descritos anteriormente.

Consideremos un mercado capitalista hipotético, en donde se negocia un producto, cuya cantidad demandada por los compradores varía sólo en función del tiempo, al igual que la cantidad ofrecida por los vendedores.

Basta considerar 4 variables en el modelo, a saber:

- t = "tiempo"
- C_d = "Cantidad demandada"
- C_o = "Cantidad ofrecida" y
- P = "Precio de la mercancía"

Se establecen los siguientes 3 supuestos básicos del modelo:

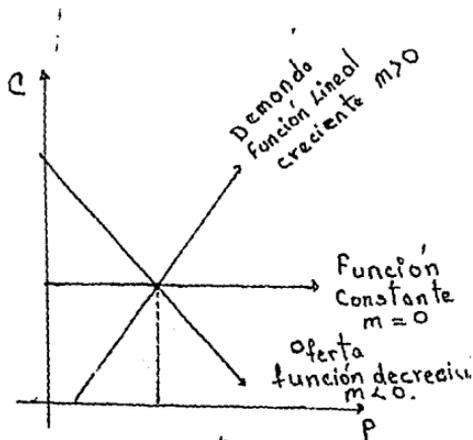
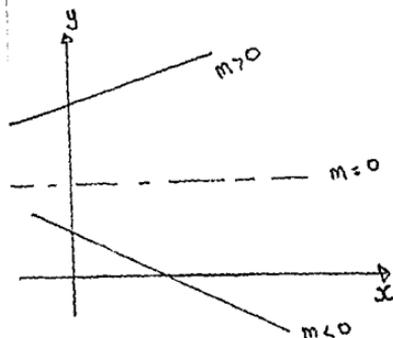
1. A medida que el precio aumenta, la cantidad demandada disminuye en proporción constante y a la inversa, esto es, C_d es una función lineal decreciente de P : $C_d = mP + b$, con $m < 0$.

2. A medida que el precio aumenta, la cantidad de mercancía ofrecida aumenta en proporción constante y viceversa, esto es, C_o es una función lineal creciente de P .

3. El mercado del producto de referencia se considerará en *equilibrio* si solo si la oferta es igual a la demanda: $C_o = C_d$

Ya introducido el sistema Cartesiano de coordenadas, las rectas crecientes, decrecientes y horizontales quedan todas únivocamente determinadas por una sola fórmula que depende de 2 parámetros:

$Y = mx + b$; $m, b \in \mathbb{R}$
 Fenómeno Empírico
 (experimental) con:
 Datos aislados cercanos a una recta.



X	Y
X_1	Y_1
X_2	Y_2
X_3	Y_3
X_4	Y_4
...	...
X_n	Y_n

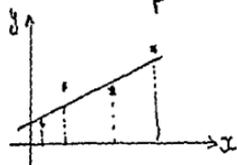
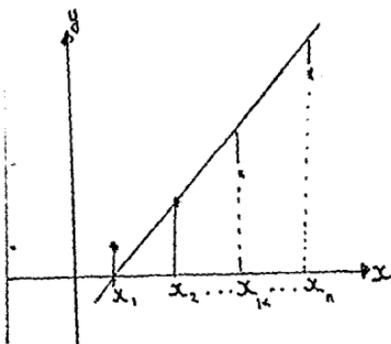


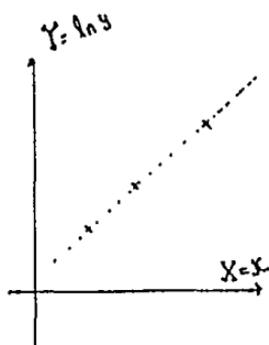
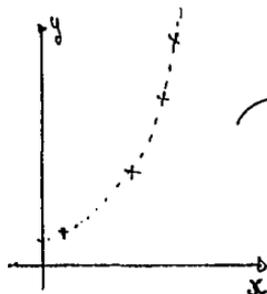
Tabla de datos

Ajustar la mejor recta posible a una tabla de datos se puede materializar a través del Método de "Mínimos Cuadrados", el cual esencialmente consiste en obligar a que la suma de los errores verticales sea mínima. (véase el Apéndice 2)

Ahora los datos experimentales parecen alinearse a lo largo de la gráfica de una función exponencial, por ejemplo :

$$y = ka^x, \text{ con } a \neq 0 \text{ y } a \neq 1.$$





entonces el ajuste se hace reduciendo el problema a un ajuste lineal, pero con escalas de los ejes transformados.

$$y = K a^x$$

Partamos de una función exponencial.

$$\ln y = \ln (K a^x)$$

Apliquemosle la función logaritmo a ambos miembros de la igualdad.

$$\ln y = \ln K + \ln a^x$$

Por el logaritmo de un producto.

$$\ln y = x \cdot \ln a + \ln K$$

Por el logaritmo de una exponencial.

$$Y = X \cdot M + B$$

Se identifica con una recta, pero como y y x son conocidas, por ser datos, las nuevas X y Y también serán datos, mientras que M y B aparecen como las incógnitas.

M, B

Se determinan M y B por "Mínimos Cuadrados". Siendo ahora ya conocidos M y B .

$$M = \ln a \Rightarrow$$

$$a = e^M$$

Se estiman los parámetros originales

$$B = \ln K \Rightarrow$$

$$K = e^B$$

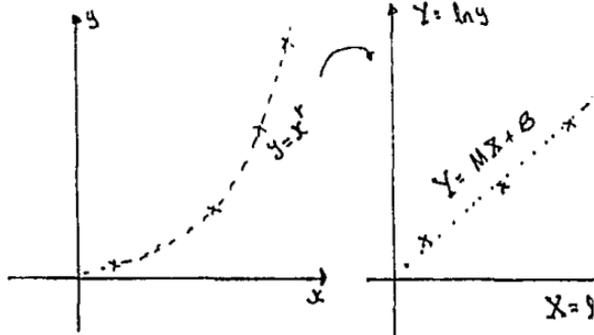
de la función exponencial: K y a .

(*) Las fórmulas que se deducen con este método se obtienen de minimizar la suma de los errores cuadráticos verticales, que resultan ser las del Apéndice 1.

Si los datos experimentales parecen ajustarse a lo largo de la gráfica de una función potencial, por ejemplo

$$y = K x^r, \text{ con } r$$

$\neq 0$ y $r \neq 1$, entonces el ajuste



se hace reduciendo el problema a un ajuste lineal pero con los ejes transformados.

$$y = k x^r$$

Partamos de una función potencial, con r constante y mayor que cero.

$$\ln y = \ln (k x^r)$$

Apliquemosle la función logaritmo.

$$\ln y = \ln k + \ln x^r$$

Por el logaritmo de un producto.

$$\ln y = r \cdot \ln x + \ln k$$

Por el logaritmo de una potencia.

$$Y = R \cdot X + K$$

Se identifica como una recta, pero X y Y son conocidos por ser datos x y y , e incógnitas R y K .

R, K

Se determinan R y K por "mínimos cuadrados". Siendo ahora ya conocidos.

$$R = r \Rightarrow \boxed{r = R}$$

Se estiman los parámetros de la función

$$K = \ln k \Rightarrow \boxed{k = e^K}$$

potencia original r y k .

* Las fórmulas que se deducen con este método se obtienen por el proceso de mínimos cuadrados (véase el Apéndice 2)

2. Ajuste de curvas a la mejor línea recta posible

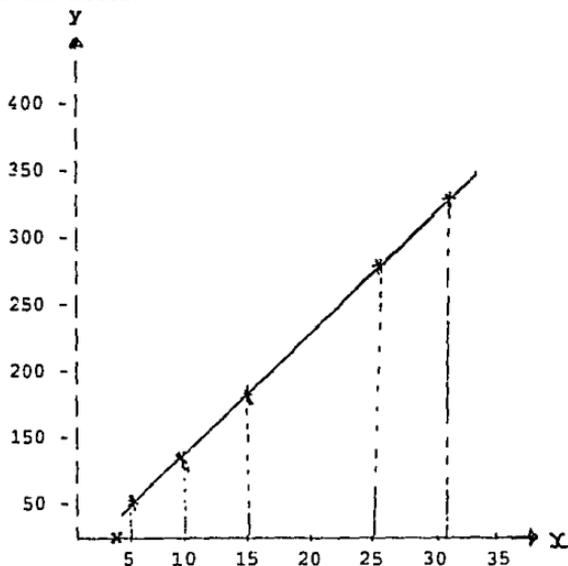
En lo subsiguiente se dan algunos ejemplos de datos experimentales, los cuales describen ciertos fenómenos "reales" o parecidos a los fenómenos "reales" con alguna característica de tipo "práctico".

• Por ejemplo, la *Tabla 1* describe el funcionamiento de un "velocímetro" que mide en minutos el tiempo (x) y la distancia recorrida (y) medida en metros.

Tabla 1

X (en min.)	6	10	15	25	31
Y (en mts.)	65	108	163	271	336

Este velocímetro describe parejas de puntos de la forma (x,y) , que en un sistema cartesiano de coordenadas estandar parece ajustarse a una recta.



La nueva tabla :

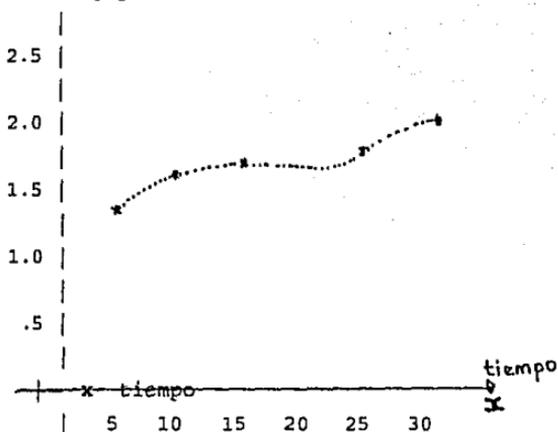
$X(\text{en min.})$	6	10	15	25	31
$\log y(\text{nueva dist.})$	1.8	2.03	2.21	2.43	2.52

se muestran una nueva relación del funcionamiento del velocímetro, a saber: las parejas (x,y) originales han sido sustituidas por las parejas transformadas de la forma $(X,Y) = (x, \log y)$, esto es: $X = x$, $Y = \log y$ (observese que estamos tomando logaritmos en base 10:log)

Ahora la gráfica en el plano llamado *semilogarítmico* con los nuevos ejes $x, \log y$ no se ajustan mejor a una recta, sino más bien parece ajustarse a una curva:

3.0 , Distancias

$Y = \log y$



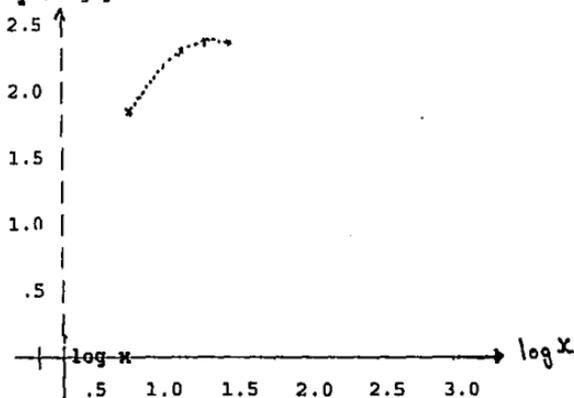
Los nuevos datos:

$\log x$ (nuevo tiempo)	1	1.17	1.39	1.49	
$\log y$ (nueva dist.)	1.8	2.03	2.21	2.43	2.52

donde, se muestran otra relación del funcionamiento del velocímetro, a saber: las parejas (x,y) originales han sido ahora sustituidas por las parejas transformadas de la forma $(X,Y) = (\log x, \log y)$, esto es: $X = \log x$, $Y = \log y$.

Al plano, donde se dibuja esta nueva gráfica se le llama *logarítmico* y en él los datos $(\log x, \log y)$ de plano se ajustan a una curva

$Y = \log y$



Comparando las 3 gráficas anteriores, observamos que los datos, cuya relación es *tiempo vs distancia* es una relación de tipo *lineal*, dado que los puntos (x,y) se ajustan mejor a una línea recta en el plano estándar.

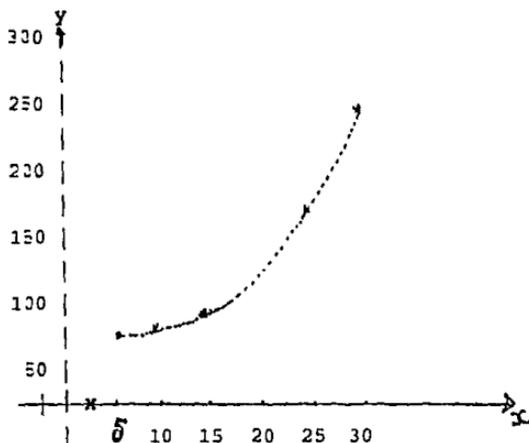
La siguiente *tabla 2* relaciona el *tiempo* (dado en decenios) con el crecimiento del *Tamaño* de la *Población Humana* (medido en millones de personas)

tabla 2

X(en decenios)	5	10	15	25	30
Y(en millones)	63	71	91	160	250

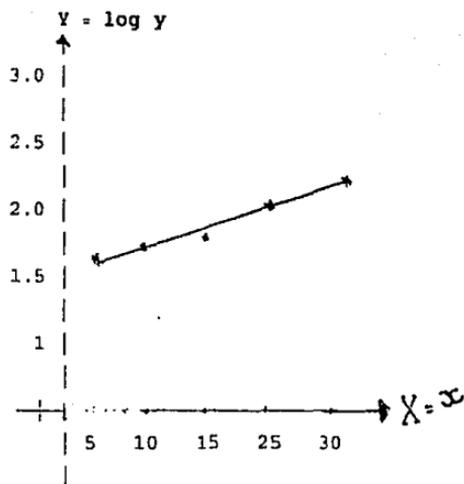
(de los años 1650 a 1950)

En el plano estándar (x,y) los datos se ajustan a una curva.



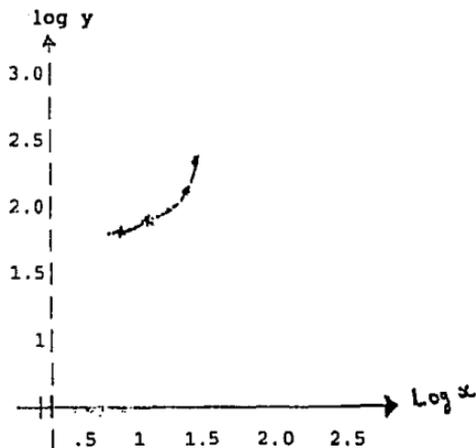
En el plano *semilogarítmico* $(x, \log y)$ los datos se ajustan a una recta:

X(en decenios)	5	10	15	25	30
log Y (nueva población)	1.79	1.85	1.95	2.20	2.39



En el plano *logaritmico* ($\log x, \log y$) los datos se ajustan a otra curva:

$\log x$ (nuevos tiempos)	.69	1	1.17	1.39	1.47
$\log y$ (nueva población)	1.79	1.85	1.95	2.20	2.39



Comparando las 3 gráficas anteriores observamos que los datos de la tabla B cuya relación está dada en el plano semilogarítmico (X,Y) = (x, log y) dado por *decadas vs. logaritmo de la población* son una relación de *Tipo Exponencial*, dado que los puntos transformados (x, log y) se ajustan a una recta en dicho plano semilogarítmico.

Esto, en efecto resulta ser así, ya que si suponemos que la población cambia según una ley exponencial, entonces:

$$y = k \cdot a^x \Rightarrow \log y = \log k + \log a^x \Rightarrow \log y = x \cdot \log a + \log k$$

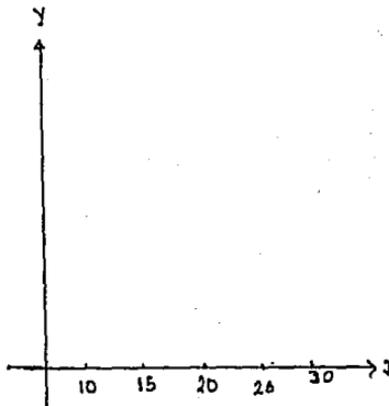
que es de la forma:

$Y = M \cdot X + B$, donde en efecto: $Y = \log y$, $X = x$, además de que $M = \log a$ y $B = \log k$.

En este último ejemplo sobre *salto de altura*, los datos de la *Tabla 3* muestran la destreza de un deportista en el tiempo (medido en segundos) con respecto al salto de altura (medido en metros)

Tabla 3

X(en segundos)	10	15	20	25	30
Y(altura en mts.)					



ACTIVIDAD 8.

De manera similar a como hemos trabajado los otros ejemplos, genera las nuevas Tablas de datos y grafícalos para el plano semilogarítmico (x, log y) y para el logarítmico (log x, log y). Verifica que el ajuste a una recta se logra en aquel plano, donde se justifica que la función que mejor ajusta a una recta es una *función potencia*. (respuesta en el *Apéndice I*).

3. Ajuste de curvas (continuación).

La medida de la complejidad de un fractal, representado en forma geométrica, depende únicamente de la relación entre una función y su gráfica.

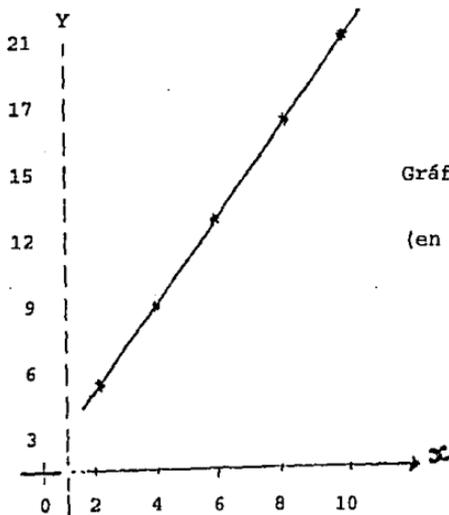
El caso de la función lineal,

$$y = 2x + 1$$

Función lineal, con pendiente $m = 2$ y ordenada al origen $b = 1$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Su tabla usual de valores.



Gráfica de $y = 2x + 1$

(en papel estándar)

Consideremos una función exponencial.

$$y = 0.25 \cdot 2^x$$

Función exponencial.

x	1	2	3	4	5	6
y	0.5	1	2	4	8	16

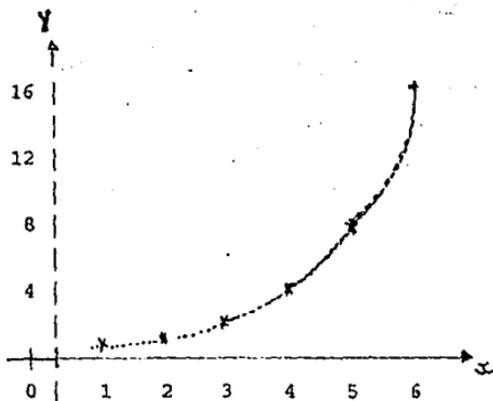
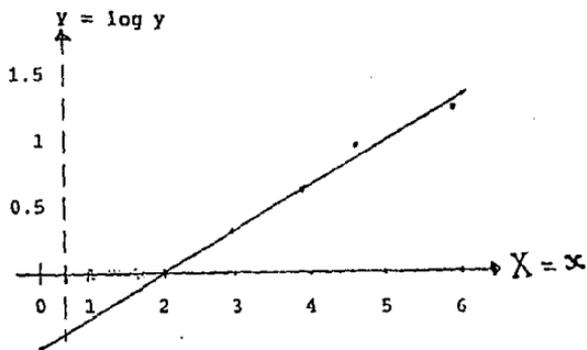


Tabla adicional tomando los logaritmos base 10 en la variable y os servirá para ajustar la curva a la mejor recta posible, en el plano semilogarítmico:

x	1	2	3	4	5	6
y	.5	1.2	2.3	4	8	16
log y	-.501	0.301	.602	.903	1.20	



Esto se justifica, ya que:

$$y = (0.25) \cdot 2^x$$

Función exponencial.

$$\log y = \log [(0.25) \cdot 2^x]$$

Tomando logaritmos.

$\log y = x \cdot \log 2 + \log (0.25)$ Por el logaritmo del producto.

$$Y = M \cdot x + B$$

Con $M = \log(2)$ y $B = \log(0.25)$

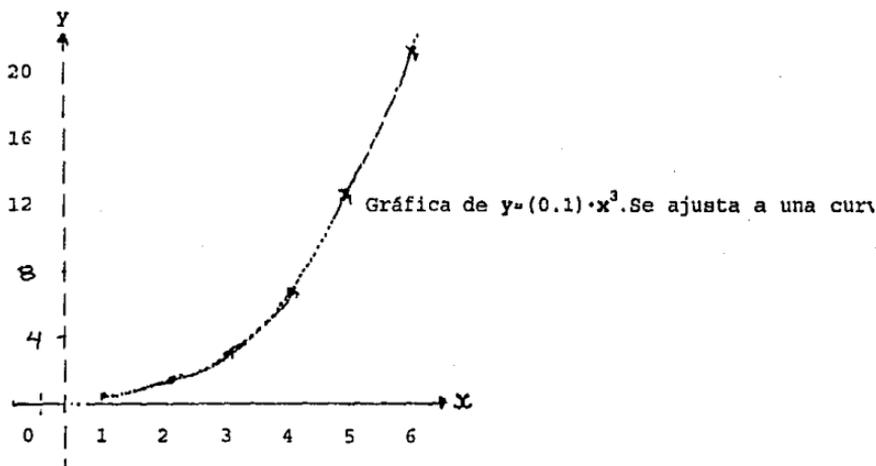
•Tomemos ahora una función potencia:

$$y = (0.1) \cdot x^3$$

Función potencial (x variable)

x	1	2	3	4	5	6
y	.1	.8	2.7	6.4	12.5	21.6

Tabla mínima de valores



$$y = (0.1) \cdot x^3$$

Función potencial (x variable)

$$\log y = \log (0.1)(x^3)$$

Aplicando logaritmos.

$$\log y = \log x^3 + \log (0.1)$$

Por el logaritmos de un producto.

$$\log y = 3 \log x + \log(0.1)$$

Por el logaritmo de una potencia.

$$Y = R X + S$$

Se identifica como una recta, pero X, Y, son datos, entonces X y Y son

conocidos.

R, S

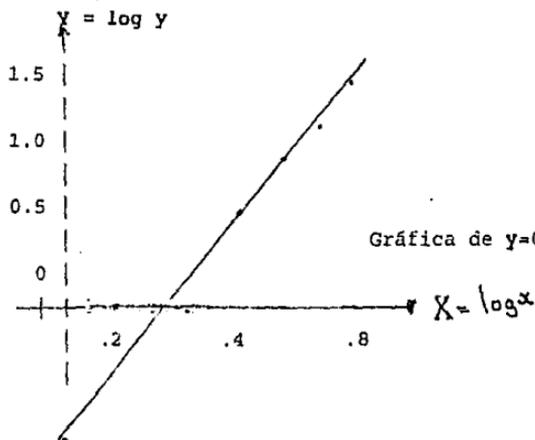
Se determina R y S por mínimos cuadrados, luego se consideran ahora ya conocidos.

$$Y = 3 \cdot X + \log(0.1)$$

Recta estimada.

Consideremos ahora esta misma curva, pero en el plano logarítmico:

x	1	2	3	4	5	6	Tabla de valores (log x, log y)
y	.1	.8	2.7	6.4	12.5	21.6	
log x	0	.301	.477	.602	.698	.778	
log y	-1	-.906	.431	.806	1.09	1.33	



4. Dimensión por Compartimientos.

La *dimensión por compartimientos* es un proceso, cuyo aprovechamiento nos ayuda a medir el nivel de complejidad de una figura geométrica complicada.

Para calcular la dimensión a través de compartimientos de una figura:

a) Cubrimos al fractal con una maya o cuadrícula, teniendo en cuenta que las medidas de los compartimientos o cuadrados de la malla que cubren al fractal deben tener diferentes escalas de medidas : $1/4, 1/8, 1/12, 1/16, 1/32 \dots 1/n$, donde: 1 : representa la unidad (un cuadrado de longitud 1), n : número de partes o compartimientos en el cual se divide a la unidad.

b) Contar el número de compartimientos que contienen una porción de la figura en cada uno de las cubiertas a diferentes escalas.

c) Registrar los resultados en una tabla de valores. La Tabla recoge puntos de la forma : $(\frac{1}{\text{escala } X}, y)$, donde

$\frac{1}{\text{escala } X}$ es el recíproco de la *escala* x y

y : es el número de cuadrículas o compartimientos que contienen alguna porción de la figura.

d) La pendiente que se obtenga de la mejor recta ajustada, en un plano logarítmico, con los datos obtenidos en el inciso c), dicha medida se conoce como la *dimensión por compartimiento* de la figura.

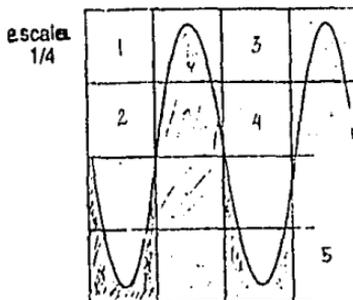
En cada una de las gráficas descritas a continuación se hallará la dimensión de la figura a través de los pasos descritos anteriormente.

Las figuras a considerar son : Ondas (Sinusoides), Círculos (Hoyos Negros) y Una Función Arbitraria.

4 a. ONDAS

Tomamos un segmento de longitud unitario, dicho segmento lo dividimos en 4 partes iguales de longitud " $\frac{1}{4}$ ".

Este número representa la "escala" de los compartimientos; ahora cubrimos a la figura con una malla o cuadrícula de 4×4 = 16 compartimientos con escala de " $\frac{1}{4}$ ".



El número de compartimientos que no contienen una porción de figura son : 5.

Así el número de compartimientos que contienen una porción de la figura son: $y = 16 - 5 = 11$ compartimientos.

El recíproco de la escala $x = \frac{1}{\text{escala } x}$
 $= \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4.$

Dividamos al segmento en 8 partes iguales siendo la escala igual a $\frac{1}{8}$

El número total de compartimientos es de $8^2 = 64.$

El número de compartimientos que no contienen una porción de la figura : 30.
 Número de compartimientos que contienen a la figura $y = 64 - 30 = 34.$

El recíproco de la escala $x = \frac{1}{\text{escala } x}$
 $= \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = 8.$

Escala: $\frac{1}{12}$.

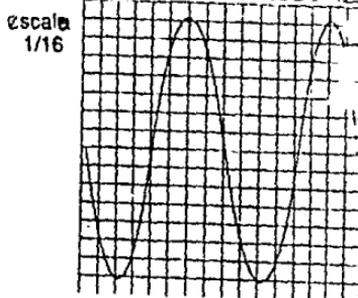
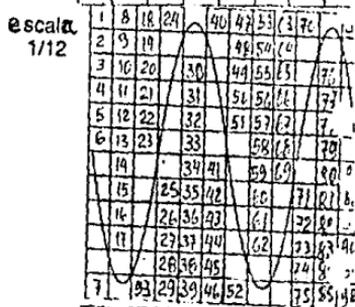
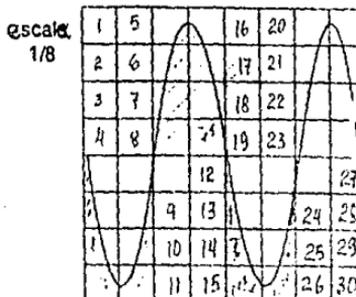
Número de compartimientos : $12^2 = 144.$
 Número de compartimientos que no contienen a la figura : 93.
 Número de compartimientos, que contienen a la figura: $y = 144 - 93 = 51.$

El recíproco de la escala $x = \frac{1}{\text{escala } x}$
 $= \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} = 12.$

Escala : $\frac{1}{16}$.

Número de Compartimientos que contienen una porción de la figura $y = 68.$

El recíproco de la escala $x = \frac{1}{\text{escala } x}$
 $= \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} = 16.$



Escala : $\frac{1}{24}$.

Número de compartimientos que contienen una porción de la figura: $y = 100$.

El recíproco de la escala $x = \frac{1}{\text{escala } x}$

$= \left(\frac{1}{24}\right)^{-1} = 24$.

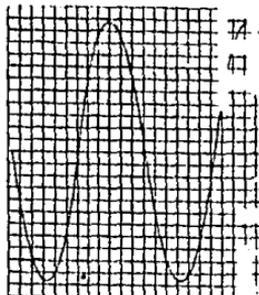
Escala : $\frac{1}{32}$.

Número de compartimientos que contienen una porción de la figura: $y = 135$.

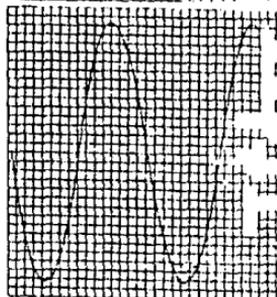
El recíproco de la escala $x = \frac{1}{\text{escala } x}$

$= \left(\frac{1}{32}\right)^{-1} = 32$.

escala
1/24



escala
1/32



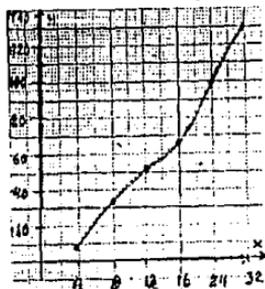
La siguiente tabla muestra la relación entre el recíproco de la escala $\frac{1}{x}$ y el número de compartimientos que contienen una porción de la figura : y

$\frac{1}{x}$	4	8	12	16	24	32
y	11	34	51	68	100	135

Al tomar como base estos datos los graficamos en 3 distintos planos gráficos:

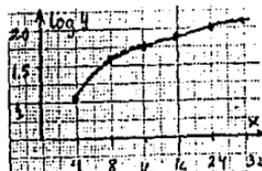
• Gráficas de ONDAS en el Plano Estándar

$\frac{1}{x}$	4	8	12	16	24	32
y	11	34	51	68	100	135



Ajusta mejor a una curva y no a una recta.

• Gráficas de ONDAS en el Plano Semilogarítmico

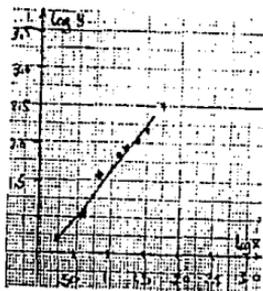


$\frac{1}{x}$	4	8	12	16	24	32
log y	1.04	1.53	1.70	1.83	2	2.13

Ajusta mejor a una curva y no a una recta.

•Gráficas de ONDAS en el Plano Logarítmico.,

log $\frac{1}{x}$.60	.90	1.07	1.20	1.38	1.50
log y	1.04	1.53	1.70	1.83	2	2.13



Ajusta mejor a una recta, donde las pendientes sucesivas son:

$$m_1 = \frac{1.53 - 1.04}{.90 - .60} = 1.63333\cdots$$

$$m_2 = \frac{1.70 - 1.53}{1.07 - .90} = 1.00000\cdots$$

$$m_3 = \frac{1.83 - 1.70}{1.20 - 1.07} = 1.00000\cdots$$

$$m_4 = \frac{2 - 1.83}{1.38 - 1.20} = 0.99444\cdots$$

$$m_5 = \frac{2.13 - 2}{1.50 - 1.38} = 1.00000\cdots$$

De aquí que la pendiente promedio total sea

$$m = \frac{1.63333 + 1 + 1 + 0.99444 + 1}{5} = 1$$

Es decir, la dimensión por compartimientos es $D = 1$.

4b. HOYOS NEGROS

Escala: $\frac{1}{4}$.

Cubrimos a la figura con una cuadrícula de 16 compartimientos de longitud $1/4$

de la longitud unitaria original.

El número de compartimientos que contienen una porción de la figura es el total $y = 16$.

El recíproco de la escala $x: \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} =$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4.$$

Escala: $\frac{1}{8}$.

Cubrimos a la figura con una cuadrícula de $8^2=64$ compartimientos de longitud $\frac{1}{8}$ de la longitud unitaria original.

El número de compartimientos que contienen una porción de la figura es el todo menos 4: $y = 64-4 = 60$.

El recíproco de la escala $x: \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} =$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = 8.$$

Escala: $\frac{1}{12}$.

Cubrimos a la figura con una cuadrícula de $12^2=144$ compartimientos de longitud $\frac{1}{12}$ de la longitud unitaria original.

El número de compartimientos que contienen una porción de la figura es el todo menos $4 \cdot 6 = 24$, luego: $y = 144-24 = 120$.

El recíproco de la escala $x: \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} =$

$$\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} = 12.$$

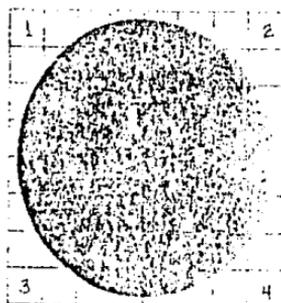
Escala: $\frac{1}{16}$.

Cubrimos a la figura con una cuadrícula

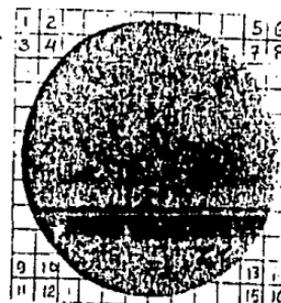
Escala
1/4



escala
1/6



escala
1/12

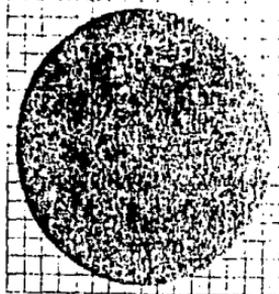


de $16^2=256$ compartimientos de longitud $\frac{1}{16}$
de la longitud unitaria original.

El número de compartimientos que contienen una porción de la figura es el todo menos $4 \cdot 12 = 48 \therefore y = 256 - 48 = 208$.

El recíproco de la escala x : $\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} =$
 $\left(\frac{1}{16}\right)^{-1} = 16$.

Escala
1/16



Escala: $\frac{1}{24}$.

Cubrimos a la figura con una cuadrícula de $24^2=576$ compartimientos de longitud $\frac{1}{24}$
de la longitud unitaria original.

El número de compartimientos que contienen una porción de la figura es el todo menos $4 \cdot 32 = 128 \therefore y = 576 - 128 = 448$.

El recíproco de la escala x : $\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} =$
 $\left(\frac{1}{24}\right)^{-1} = 24$.

Escala
1/24



Escala: $\frac{1}{32}$.

Cubrimos a la figura con una cuadrícula de $32^2=1024$ compartimientos de longitud $\frac{1}{32}$
de la longitud unitaria original.

El número de compartimientos que contienen una porción de la figura es el todo menos $4 \cdot 67 = 268 \therefore y = 1024 - 268 = 756$.

El recíproco de la escala x : $\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} =$
 $\left(\frac{1}{32}\right)^{-1} = 32$.

Escala
1/32



•Teniendo como base estos datos los graficamos en 3 distintos papeles

gráficos : Papel Estándar, Papel Semilogarítmicos y Papel Logarítmico, como se muestra a continuación, con la siguiente tabla de resultados:

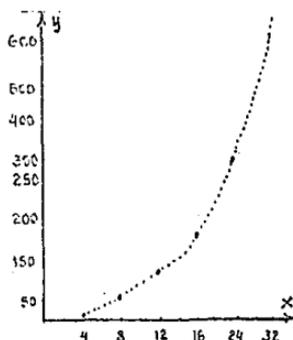
$\frac{1}{x}$	4	8	12	16	24	32
y	16	60	120	208	448	756

Al tomar como base estos datos los graficamos en 3 distintos planos gráficos:

•Gráfica de HOYOS NEGROS en el Plano Estándar

$\frac{1}{x}$	4	8	12	16	24	32
y	16	60	120	208	448	756

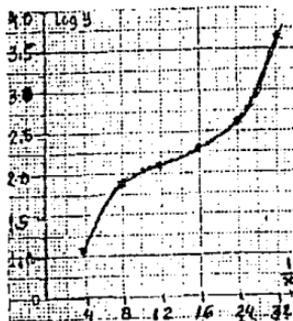
Ajusta mejor a una curva y no a una recta.



•Gráficas de HOYOS NEGROS en el Plano Semilogarítmico

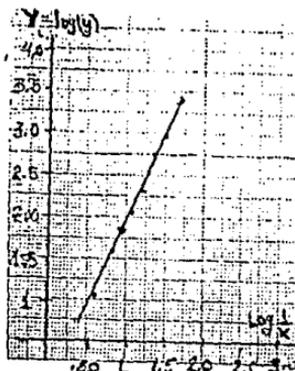
$\frac{1}{x}$	4	8	12	16	24	32
log y	1.2	1.77	2.07	2.31	2.65	2.87

Ajusta mejor a una curva y no a una recta.



•Gráfica de HOYOS NEGROS en el Plano Logarítmico.

$\log \frac{1}{x}$.60	.90	1.07	1.20	1.38	1.50
$\log y$	1.2	1.77	2.07	2.31	2.65	2.87



Ajusta mejor a una recta, donde las pendientes sucesivas son:

$$m_1 = \frac{1.77 - 1.2}{.90 - .60} = 1.9 \dots$$

$$m_2 = \frac{2.07 - 1.77}{1.07 - .90} = 1.76470 \dots$$

$$m_3 = \frac{2.31 - 2.07}{1.20 - 1.07} = 1.84615 \dots$$

$$m_4 = \frac{2.65 - 2.31}{1.38 - 1.20} = 1.88888 \dots$$

$$m_5 = \frac{2.87 - 2.65}{1.50 - 1.38} = 1.83333 \dots$$

De aquí que la pendiente promedio total sea

$$m = \frac{1.9 + 1.76470 + 1.84615 + 1.88888 + 1.83333}{5} = 1.85 \dots$$

{Véase adicionalmente el Apéndice 2.}

Es decir, la dimensión por compartimientos es $D = 1.85$

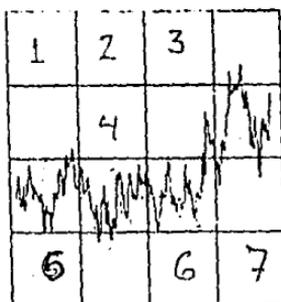
4c. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN ARBITRARIA .

Escala: $\frac{1}{4}$

Cubrimos a la figura (gráfica de una función arbitraria) con una cuadrícula de 16 compartimientos de longitud $1/4$.

El número total de compartimientos: 16.
El número total de compartimientos que no intersectan con la gráfica: 7.

escala
 $1/4$



El número total de compartimientos que intersectan con la gráfica: $y = 16 - 7 = 9$.

El recíproco de la escala: $x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

Escala: $\frac{1}{8}$

Cubrimos a la figura (gráfica de una función arbitraria) con una cuadrícula

de $8^2 = 64$ compartimientos de longitud $\frac{1}{8}$.

El número total de compartimientos: 64.

El número total de compartimientos que no intersectan con la gráfica: 40.

El número total de compartimientos que intersectan con la gráfica: $y = 64 - 40 = 24$.

El recíproco de la escala: $x = \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = 8$.

escala
1/8



Escala: $\frac{1}{12}$

Cubrimos a la figura (gráfica de una función arbitraria) con una cuadrícula

de $12^2 = 144$ compartimientos de longitud $\frac{1}{12}$.

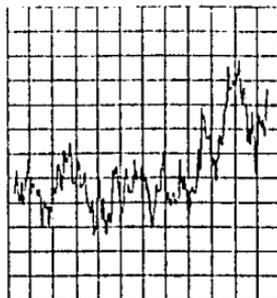
El número total de compartimientos: 144.

El número total de compartimientos que no intersectan con la gráfica: 99.

El número total de compartimientos que intersectan con la gráfica: $y = 144 - 99 = 45$.

El recíproco de la escala: $x = \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} = 12$.

escala
1/12



Escala: $\frac{1}{16}$

Cubrimos a la figura (gráfica de una función arbitraria) con una cuadrícula

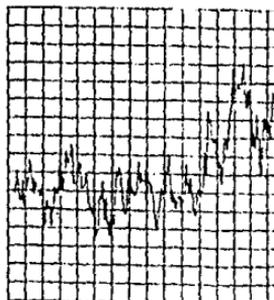
de $16^2 = 256$ compartimientos de longitud $\frac{1}{16}$.

$$\frac{1}{16}$$

El número total de compartimientos: 256.
 El número total de compartimientos que no intersectan con la gráfica: 193.
 El número total de compartimientos que intersectan con la gráfica: $y = 256 - 193 = 63$.

El recíproco de la escala: $x = \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} = 16$

escala
1/16



Escala: $\frac{1}{24}$

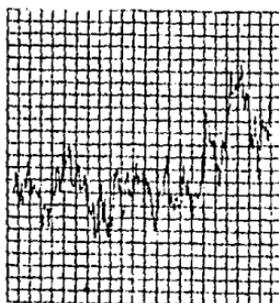
Cubrimos a la figura (gráfica de una función arbitraria) con una cuadrícula de $24^2 = 576$ compartimientos de longitud

$$\frac{1}{24}$$

El número total de compartimientos: 576.
 El número total de compartimientos que no intersectan con la gráfica: 471.
 El número total de compartimientos que intersectan con la gráfica: $y = 576 - 471 = 105$.

El recíproco de la escala: $x = \left(\frac{1}{24}\right)^{-1} = 24$

escala
1/24



Escala: $\frac{1}{32}$

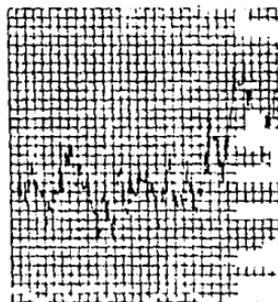
Cubrimos a la figura (gráfica de una función arbitraria) con una cuadrícula de $32^2 = 1024$ compartimientos de longitud

$$\frac{1}{32}$$

El número total de compartimientos: 1024.
 El número total de compartimientos que no intersectan con la gráfica: 874.
 El número total de compartimientos que intersectan con la gráfica: $y = 1024 - 874 = 150$.

El recíproco de la escala: $x = \left(\frac{1}{32}\right)^{-1} = 32$

escala
1/32



•La siguiente tabla muestra la relación que se tiene con respecto al recíproco de la reducción en la escala $(\frac{1}{\text{escala} \cdot X})^{-1}$ y el número de compartimientos y :

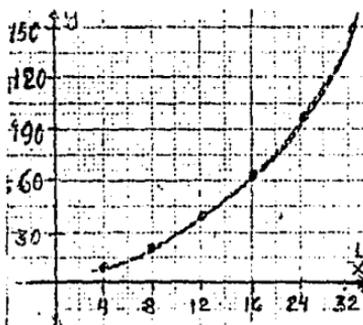
$\frac{1}{X}$	4	8	12	16	24	32
y	9	24	45	63	105	150

Al tomar como base estos datos los graficamos en 3 distintos planos gráficos:

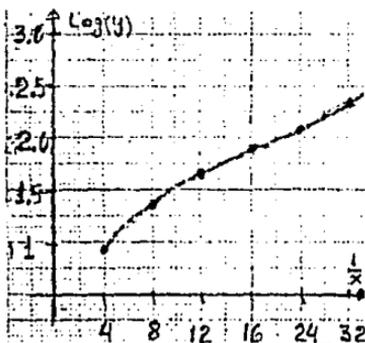
•Gráfica de la FUNCIÓN ARBITRARIA en el Plano Estándar

$\frac{1}{X}$	4	8	12	16	24	32
y	16	60	120	208	448	756

Ajusta mejor a una curva y no a una recta.



•Gráficas de FUNCIÓN ARBITRARIA en el Plano Semilogarítmico

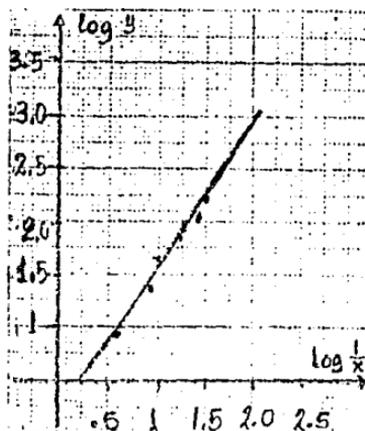


$\frac{1}{x}$	4	8	12	16	24	32
$\log y$.95	1.38	1.65	1.79	2.02	2.17

Ajusta mejor a una curva y no a una recta.

•Gráfica de FUNCIÓN ARBITRARIA en el Plano Logarítmico.

$\log \frac{1}{x}$.60	.90	1.07	1.20	1.38	1.50
$\log y$.95	1.38	1.65	1.79	2.02	2.17



Ajusta mejor a una recta, donde las pendientes sucesivas son:

$$m_1 = \frac{1.38 - .95}{.90 - .60} = 1.43\cdots$$

$$m_2 = \frac{1.65 - 1.38}{1.07 - .90} = 1.58\cdots$$

$$m_3 = \frac{1.79 - 1.65}{1.20 - 1.07} = 1.07\cdots$$

$$m_4 = \frac{2.02 - 1.79}{1.38 - 1.20} = 1.27\cdots$$

$$m_5 = \frac{2.17 - 2.02}{1.50 - 1.38} = 1.2\cdots$$

De aquí que la pendiente promedio total sea

$$m = \frac{1.43 + 1.58 + 1.07 + 1.27 + 1.2}{5} = 1.3225\cdots$$

(Véase adicionalmente el Apéndice 2.)

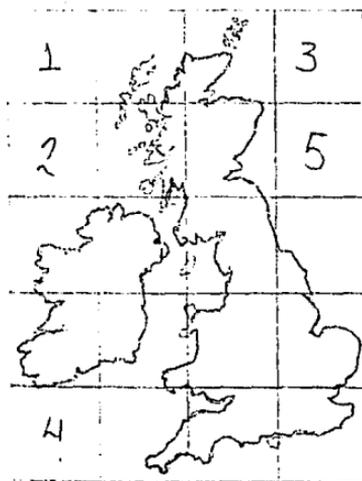
Es decir, la dimensión por compartimientos es $D = 1.3225$ cual representa la medida de complejidad de la figura.

5. DIMENSIÓN DE UNA LINEA COSTERA USANDO DIMENSIÓN DE COMPARTIMIENTOS

Podemos utilizar a la dimensión de compartimientos para medir la complejidad de variadas figuras, incluyendo las complejidades en una línea costera o en un litoral.

Para este caso calcularemos la complejidad de la costa de Inglaterra, usando 6 mapas idénticos de la Costa, y cubriendo cada uno de ellos con una cubierta o cuadrícula a distintas escalas : $1/4$, $1/8$, $1/12$, $1/16$, $1/24$ y usaremos el mismo proceso usado anteriormente.

5a. Dimensión de la Costa de Inglaterra.



Cubrimos a la figura (costa) con (4) (5) = 20 compartimientos con una escala de $1/4$.

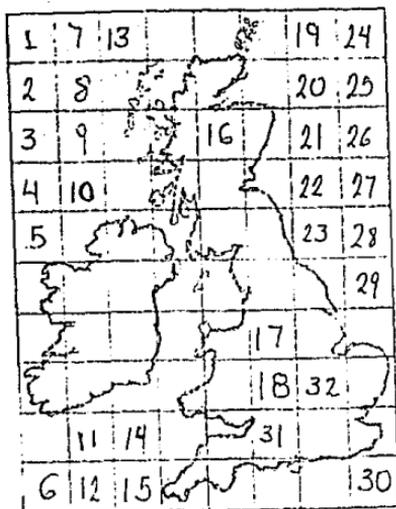
El número de compartimientos los cuales no cubren a la figura son: 5.

Así el número de compartimientos que cubren a la figura es : $Y =$

$$20 - 5 = 15$$

El recíproco de la escala es $X =$

$$= 95 - \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right] = 4.$$



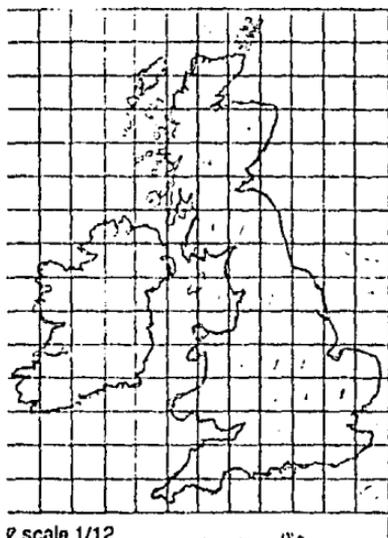
escala 1/8

Número total de compartimientos:
 $8 \times 10 = 80$, con una escala de $1/2$
 número de compartimientos que no
 cubren a la figura: 32.

Número de compartimientos que
 cubren alguna porción de la figura:
 $y = 80 - 32 = 48$.

El recíproco de la escala es:

$$x = \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = 8.$$



escala 1/12

Número total de compartimientos
 $12 \times 15 = 180$, con una escala de
 $1/12$.

Número de compartimientos que no
 cubren a la figura: 96

Número de compartimientos que
 cubren a la figura: $y = 180 - 96 = 84$

El recíproco en la escala es

$$x = \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} = 12$$



escala 1/16

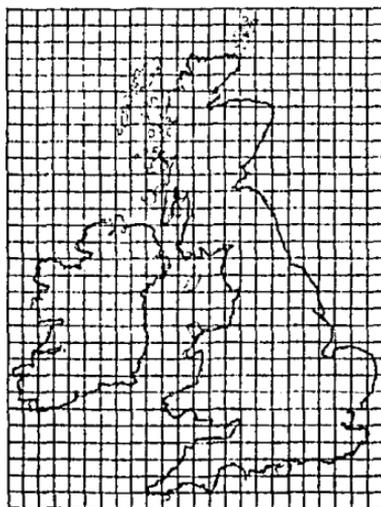
Número total de compartimientos:
 $20 \cdot 16 = 320$ con una escala de $\frac{1}{16}$

Número de compartimientos que
 no cubren a la figura: 198

Número de compartimientos que
 cubren a la figura: $320 - 198 = 122$

El recíproco de la escala es

$$x = \left[\frac{1}{16} \right]$$



escala 1/24

Número de compartimientos: $24 \cdot 30 = 720$
 con una escala de $1/24$

Número de compartimientos que no
 cubren a la figura: 526

Número de compartimientos que
 cubren a la figura: $720 - 526 = 194$



a escala 1/32

Número total de compartimientos:
 $(32 \times 40) = 1200$, con una escala de
 $\frac{1}{32}$

Número de compartimientos que no cubren a la figura: 997

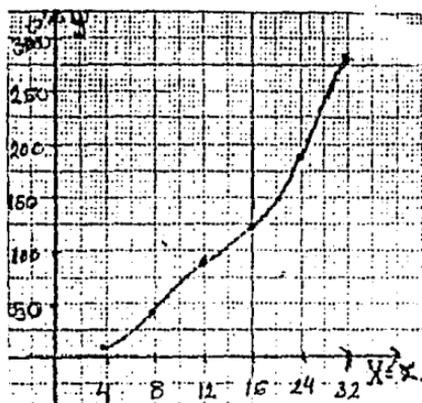
Número de compartimientos que cubren a la figura: y =
 $1200 - 997 = 283$.

El recíproco en la escala es :

$$x = \left(\frac{1}{32} \right)^{-1} = 32.$$

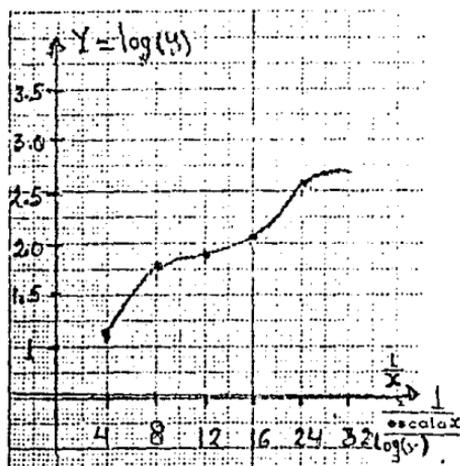
$\frac{1}{\text{escala}}$	4	8	12	16	24	32
compartimientos y	16	48	84	122	194	283

Tabla de datos que relaciona a las "cubiertas" en sus distintas escalas y al número de compartimientos que cubren a la "costa"



Gráfica de la costa en el plan estándar, se observa que los puntos se ajustan tanto mejor a una curva que a una línea recta, con la tabla original de los datos

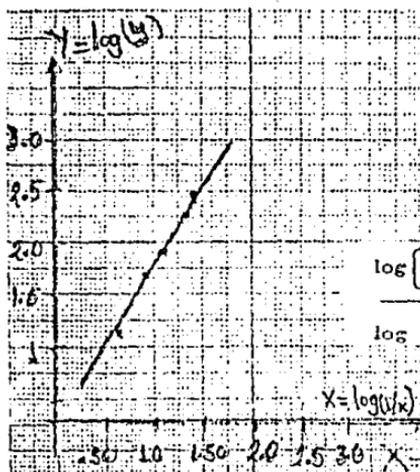
f	4	8	12	16	24	32
escala	4	8	12	16	24	32
Y	16	48	89	122	194	283



Gráfica de la costa en el plan semilogarítmico con la tabla de datos transformados por X $Y = \log(y)$

escala X	4	8	12	16	24	32
$\log(y)$	1.20	1.68	1.92	2.08	2.28	2.45

se observa que los puntos de datos se ajustan mejor a una curva que a una línea recta.



Gráfica de costa en el plano doble-
logaritmo con la tabla de
datos transformados por el cambio
de ejes $X = \log\left(\frac{1}{x}\right)$, $Y = \log(y)$

$\log\left(\frac{1}{x}\right)$.60	.90	1.07	1.20	1.38	1.50
--------------------------------	-----	-----	------	------	------	------

$\log y$	1.20	1.68	1.92	2.08	2.20	2.45
----------	------	------	------	------	------	------

Se observa que los datos se ajustan
ejor a una línea recta que a una
curva calculando las pendientes de
los puntos que definen dicha recta
ajustada tenemos:

$$M_1 = \frac{1.68 - 1.20}{.90 - .60} = \frac{.48}{.30} = 1.6$$

$$M_2 = \frac{1.92 - 1.68}{1.07 - .90} = \frac{.24}{.17} = 1.4117647$$

$$M_3 = \frac{2.08 - 1.92}{1.20 - 1.07} = \frac{.16}{.13} = 1.2307692$$

$$M_4 = \frac{2.28 - 2.08}{1.38 - 1.20} = \frac{.20}{.18} = 1.111111$$

$$M_5 = \frac{2.45 - 2.28}{1.50 - 1.38} = \frac{.17}{.12} = 1.4166667$$

Cálculo de las 5
pendientes de la
recta ajustada.

$$D = M = \frac{1.6 + 1.4117647 + 1.2307692 + 1.11111 + 1.4166667}{5}$$

$$= \frac{6.7703117}{5} = 1.36$$

$$D \approx 1.36$$

El promedio de las pendientes nos da una pendiente aproximada y este valor es D , la dimensión de la costa.

La dimensión de la costa es de $D = 1.36$ la cual representa la medida de complejidad de la figura.

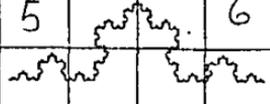
6-DIMENSION DE COMPARTIMIENTOS PARA OBJETOS AUTO-SEMEJANTES.

En forma similar la dimensión de compartimientos ofrece una manera simple para medir la complejidad en un fractal formado cuando la figura es estrictamente autosemejantes, aunque también nos da un enfoque para la medida de la complejidad cuando la forma exhibida no sea auto-semejante.

Para las figuras: Curva de Koch, Curva $\frac{3}{2}$, y curva composición, hallaremos : la medida de complejidad de cada una de las curvas, siguiendo el método de la dimensión por compartimientos.

6a. Curva de Koch (Figura geométrica estrictamente autosemejante)

escala.
1/4

1	2	3	4
5			6
7	8	9	10

Tomemos un segmento de longitud unitaria y dividamos en 4 partes iguales al segmento, esto es el factor en la escala de reducción es de $\frac{1}{4}$, cubramos a la curva de Koch con una cubierta de 16 compartimientos con la misma escala, así el número de compartimientos que la cubren son : 10 compartimientos, y el número de compartimientos que la cubren son : $Y = 16 - 10 = 6$

El recíproco de la escala es $X =$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4.$$

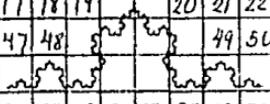
factor de reducción en la escala :

1/8.

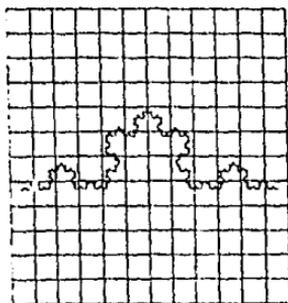
Número de compartimientos $8 \times 8 = 64$

Número de compartimientos que no cubren de la curva : 51. Número de compartimientos que cubren a la curva : $Y = 64 - 50 = 14$

escala.
1/8

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19			20	21	22
47	48				49	50	
23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38
39	40	41	42	43	44	45	46

escala
1/12



Factor de reducción en la escala :

$$1/12.$$

Número de compartimientos a esta escala : $12^2 = 144.$

Número de compartimientos que no cubren a la curva : 118. Número de compartimientos que cubren a la curva : 26

$$\text{Recíproco de la escala } X = \left[\frac{1}{12} \right]^{-1} \\ = 12.$$

Factor de reducción en la escala :

$$1/16.$$

Número total de compartimientos a esta escala es : $16^2 = 256$

Número de compartimientos que no cubren a la curva fractal : 224

Número de compartimientos que cubren a la curva : $Y = 256 - 224 = 32$

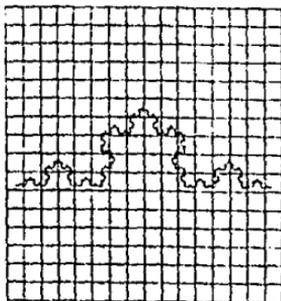
$$\text{Recíproco de la escala } X = \left[\frac{1}{16} \right]^{-1} \\ = 16.$$

Factor de reducción en la escala

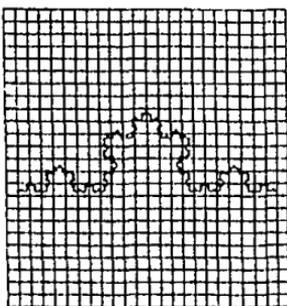
$$1/24.$$

$$\text{Recíproco de la escala } X = \left[\frac{1}{24} \right]^{-1}$$

escala
1/16



2. escala
1/24



$$= 24$$

Número de compartimientos $(24)^2 =$

$$= 576$$

Número de compartimientos que no cubren a la curva : 521.

Número de compartimientos que cubren al fractal :

$$Y = 576 - 521 = 55 \text{ compartimientos}$$

Factor de reducción en la escala :

1/32 recíproco de la escala :

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{-1} = 32$$

Número total de compartimientos :

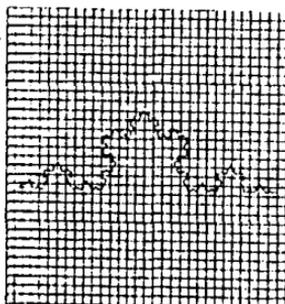
$$32^2 = 1024.$$

Número de compartimientos que no cubren a la curva : 950

Número de compartimientos que cubren a la curva :

$$Y = 1024 - 950 = 74.$$

escala
1/32



Recíproco
de la
escala: $\frac{1}{N}$

Nó. de com-
partimien-
tos y

4	8	12	16	24	32
6	14	26	32	55	74

Tabla de resultados que relaciona

el recíproco de la reducción en la "escala y el número de compartimientos que cubren a la figura en cada etapa de reducción en la escala para la curva de Koch.

$\log (1/x)$.60	.90	1.07	1.20	1.38	1.50
$\log (y)$.77	1.14	1.41	1.50	1.74	1.86

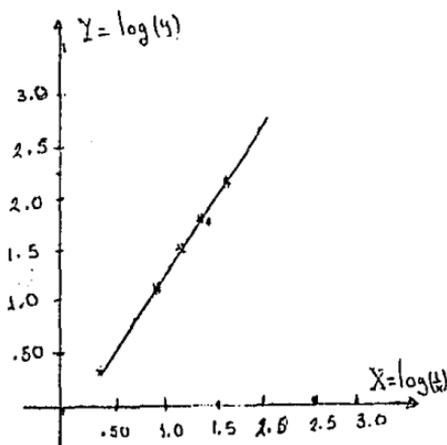


tabla de resultados de los puntos transformados a partes de la forma $(\log \frac{1}{x}, \log (y))$

Gráfica de la curva autosemejante de Koch en el plano doble logarítmico con los ejes combinados $X = \log x$ $Y = \log (y)$ y los puntos de la forma $(\log 1/x, \log y)$

Se observa que los puntos se ajustan a una línea recta.

$$M_1 = \frac{1.14 - .77}{.90 - .60} = \frac{.37}{.30} = 1.2333333$$

$$M_2 = \frac{1.41 - 1.14}{1.07 - .90} = \frac{.27}{.17} = 1.5882353$$

$$M_3 = \frac{1.50 - 1.41}{1.20 - 1.07} = \frac{.09}{.13} = .6923076$$

Calculo de las "pendientes" de algunos de los puntos de la recta ajustada.

$$M_4 = \frac{1.74 - 1.50}{1.38 - 1.20} = \frac{.24}{.18} = 1.3333333$$

$$M_5 = \frac{1.86 - 1.74}{1.50 - 1.38} = \frac{.12}{.12} = 1$$

$$M = \frac{1.2333333 + 1.5882353 + .6823076 + 1.3333333 + 1}{5}$$

5

Promedio de las pendientes de la recta ajustada.

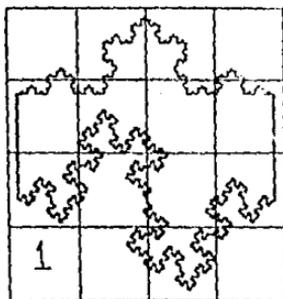
$$= \frac{5.8472095}{5} \approx \frac{6}{5} \approx 1.2$$

$$D = M = 1.2$$

Así la dimensión para la curva de Koch es $D = 1.2$

6b. DIMENSION PARA LA COMPOSICION DE CURVAS

Escala
1/4



Factor de reducción en la escala :
1/4.

Número total de compartimentos :

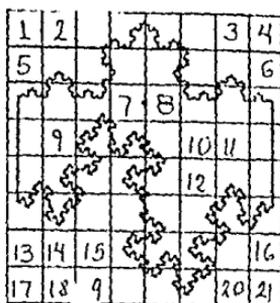
$$4^2 = 16$$

Recíproco de la escala : $X =$

$$\left(\frac{1}{1/4} \right)^2 = 4$$

compartimentos que no contienen a la curva :

escala
1/8



Compartimientos que contienen a la

$$\text{curva : } Y = 16 - 1 = 15$$

Factor de reducción en la escala :

$$1/8.$$

Recíproco en la escala de reducción

$$X = \left[\frac{1}{8} \right]^{-1} = 8$$

Número total de compartimientos :

$$8^2 = 64$$

Compartimientos que no contienen a

la curva : 21

Compartimientos que contienen a la

$$\text{curva: } Y = 64 - 21 = 43.$$

Factor de reducción en la escala :

$$1/12$$

Recíproco en la escala de reducción

$$X = \left[\frac{1}{12} \right]^{-1} = 12$$

Número total de compartimientos :

$$12^2 = 144$$

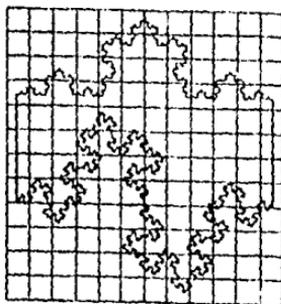
Compartimientos que no contienen

la curva : 76.

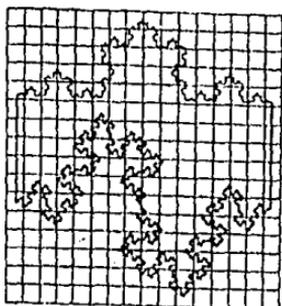
Compartimientos que contienen a la

$$\text{curva : } Y = 144 - 76 = 68.$$

escala
1/12



escala
1/16



Factor de reducción en la escala :

$$1/16$$

Recíproco en la escala de reducción

$$X = \left[\frac{1}{16} \right]^{-1} = 16$$

Número total de compartimientos $16^2 =$

256.

Compartimientos que no contienen a la
curva : 153

Compartimientos que contienen a la

$$\text{curva : } Y = 256 - 153 = 103$$

Factor de reducción en la escala :

$$1/24$$

Recíproco de la reducción en la

$$\text{escala : } \left[\frac{1}{24} \right]^{-1} = 24$$

Número total de compartimientos :

$$24^2 = 576$$

Compartimientos que no contienen
ninguna porción de la curva : 388

Compartimientos con alguna porción

$$\text{de la figura } Y = 576 - 388 = 188$$

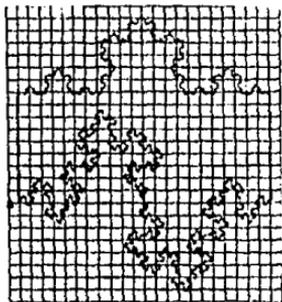
Factor de reducción en la escala :

$$1/32$$

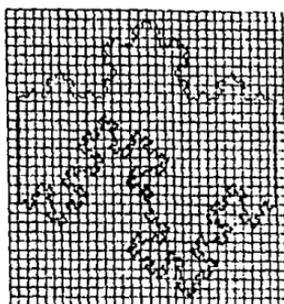
Recíproco de reducción en la escala

$$X = \left[\frac{1}{32} \right]^{-1} = 32$$

escala
1/24



Escala
1/32



Número total de compartimientos :

$$32^2 = 1024$$

Compartimientos sin ninguna porción
de la figura 769

Número total de compartimientos con
alguna porción de la figura :

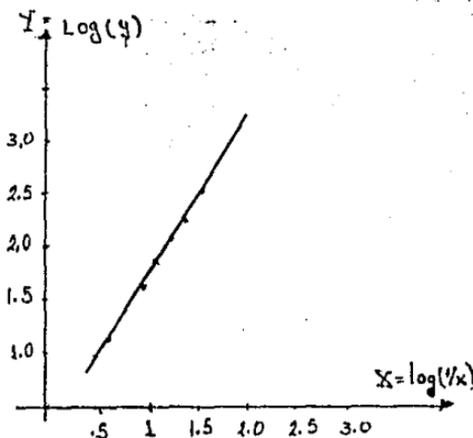
$$Y = 1024 - 769 = 255$$

Recíproco de la escala 1/x	4	8	12	16	24	32
No.de com- partimientos	15	43	68	103	169	255

Tabla de resultados que muestra el
recíproco de la reducción en cada
escala y el número de
Compartimientos que cubre a la
figura en cada reducción.

Recíproco en la escala 1/x	4	8	12	16	24	32
No.de compar- timientos (y)	15	43	68	103	169	255
log (1/x)	.60	.90	1.07	1.20	1.38	1.50
log y	1.17	1.63	1.83	2.01	2.27	2.40

Los datos muestran la relación de
la curva composición, los puntos
(x, y) se transforman a puntos de
la forma (log x, log y)



Así $X = \log(1/x)$ y $Y = \log y$ en los ejes transformados.

Gráfica de la curva autosemejante denominada composición de curvas en el plano doble logaritmo con un cambio de ejes: $X = \log x$

$Y = \log(y)$ se observa que los puntos se ajustan a una línea recta con la transformación de los puntos originales a puntos de la forma :

$$\left\{ \log(1/x), \log(y) \right\}.$$

M_1	$\frac{1.68 - 1.17}{.90 - .60}$	$\frac{.46}{.30}$	$= 1.53$
M_2	$\frac{1.83 - 1.63}{1.07 - .90}$	$\frac{.20}{.17}$	$= 1.17$
M_3	$\frac{2.01 - 1.83}{1.20 - 1.07}$	$\frac{.18}{.13}$	$= 1.38$
M_4	$\frac{2.27 - 2.01}{1.38 - 1.20}$	$\frac{.26}{.18}$	$= 1.44$
M_5	$\frac{1.50 - 1.38}{2.40 - 2.27}$	$\frac{.12}{.13}$	$= .92$

Cálculo de las pendientes de algunos de los puntos de la recta

ajustada

$$D = M = \frac{1.53 + 1.17 + 1.38 + 1.44 + .92}{5}$$

$$= \frac{6.44}{5} = 1.28$$

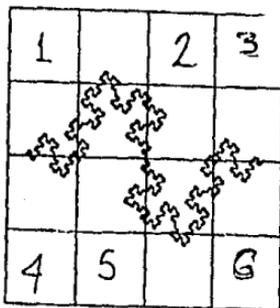
Promediamos las pendientes de la recta ajustada.

El valor de la dimensión para la composición de curvas es $D = 1.28$

GC DIMENSION PARA LA CURVA $\frac{3}{2}$

Revisar la parte I donde se plantea la construcción de la curva.

escala
1/4



Factor de reducción en la escala :

$$1/4$$

Número total de compartimientos :

$$4^2 = 16$$

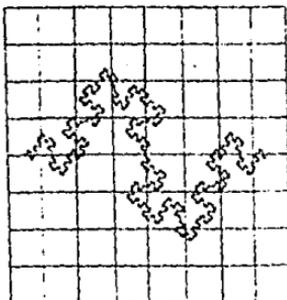
Número de compartimientos que no cubren a la curva : 6.

Número de compartimientos que cubren al fractal $Y = 16 - 6 = 10$.

Recíproco de la escala : $X =$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$$

escala
1/8



Factor de reducción en la escala :

1/8.

Recíproco de la escala : $X = \left(\frac{1}{8} \right)^{-1} =$

8

Número total de compartimientos $8^2 =$

64

Número de compartimientos que no cubren a la curva : 38

Número de compartimientos que cubren $Y = 64 - 38 = 26$

Factor de reducción en la escala :

1/12

Recíproco de la escala : $X =$

$$\left(\frac{1}{12} \right)^{-1} = 12$$

Número total de compartimientos que no cubren a la curva 103

Número de compartimientos que cubren a la curva $Y = 144 - 103 = 41$

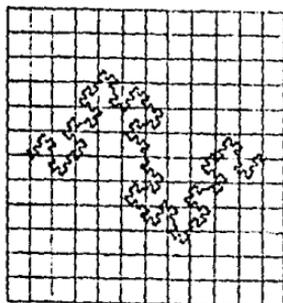
Factor de reducción en la escala :

1/16

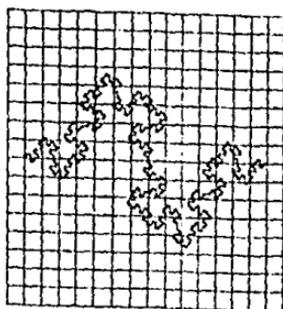
Recíproco de la escala $X = \left(\frac{1}{16} \right)^{-1} =$

16

escala
1/12



escala
1/16



Número total de compartimientos =

$$16^2 = 256$$

Número de compartimientos que no cubren a la curva : 193

Número de compartimientos que cubren Y = 256 - 193 = 63

Factor de reducción en la escala :

$$1/24$$

$$\text{Reciproco de la escala : } X = \left(\frac{1}{24} \right)^{-1} =$$

$$24.$$

Número total de compartimientos $24^2 =$
576

Número total de compartimientos que no cubren a la curva: 472

Número de compartimientos que cubren a la curva Y = 576 - 472 = 104

Factor de reducción en la escala :

$$1/32$$

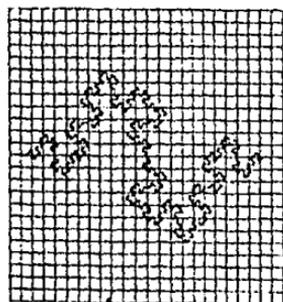
Reciproco de la escala : X =

$$\left(\frac{1}{32} \right)^{-1} = 32$$

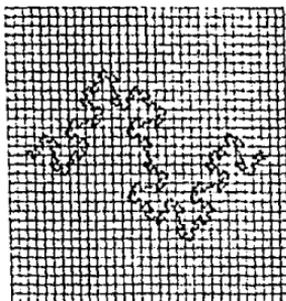
Número total de compartimientos $32^2 =$
1024

Número de compartimientos que no

escala
1/24



escala
1/32



cubren a la curva : 869

Numero de compartimientos que cubren a la curva :

$$Y = 1024 - 869 = 155$$

Reciproco de la escala $1/x$	4	8	12	16	24	35
No. de compartimientos y	10	26	41	63	104	155

Tabla de datos que relaciona, e reciproco de la reducción en cada escala ($1/x$) y su numero de compartimientos que cubre a la figura (y)

$\log 1/x$.60	.90	1.07	1.20	1.38	1.50
$\log y$	1	1.41	1.61	1.79	2.01	2.19

Tabla de resultados de los puntos transformados a puntos de la forma ($\log 1/x, \log y$)

Gráfica de la curva autosemejante

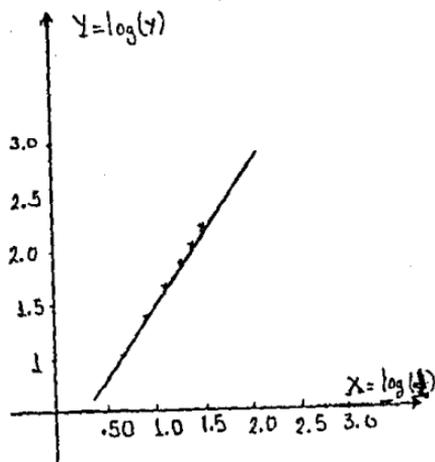
$3/2$ en el plano doble logaritmo

con los ejes cambiados $X = \log x,$

$Y = \log y$

y los puntos transformados :

$\{ \log 1/x, \log (y) \}$. Se observa



que los puntos se ajustan a una
línea recta.

$$M_1 = \frac{1.41 - 1.0}{.90 - .60} = \frac{.41}{.30} = 1.3666667$$

$$M_2 = \frac{1.61 - 1.41}{1.07 - .90} = \frac{0.2}{.17} = 1.1764706$$

$$M_3 = \frac{1.79 - 1.61}{1.20 - 1.07} = \frac{.18}{.13} = 1.3846154$$

$$M_4 = \frac{2.01 - 1.79}{1.38 - 1.20} = \frac{.22}{.18} = 1.2222222$$

$$M_5 = \frac{2.19 - 2.01}{1.50 - 1.38} = \frac{.18}{.12} = 1.5$$

Cálculo de las pendientes de
algunos de los puntos de la recta
ajustada.

$$D = M = \frac{1.3666667 + 1.1764706 + 1.3846154 + 1.2222222 + 1.5}{5}$$

$$M = \frac{6.43}{5} = 1.29$$

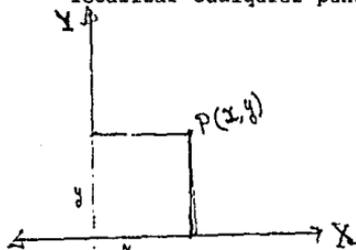
Promedio de las pendientes de la
recta ajustada.

$$M = D = 1.29$$

El valor de la dimensión para la
curva $3/2$ es $D = 1.29$

4. Coordenadas Polares.

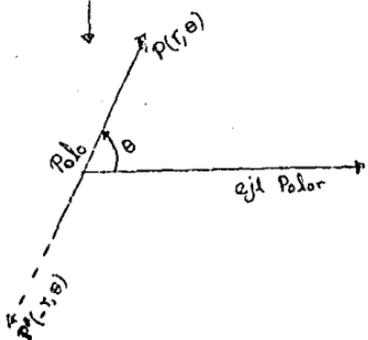
Por medio de un sistema de coordenadas en un plano, es posible localizar cualquier punto del plano.



En el sistema rectangular un punto $P(x,y)$ se localiza dando su abscisa: X , ordenada: Y , refiriendo al punto a dos rectas fijas perpendiculares llamados ejes de coordenadas.

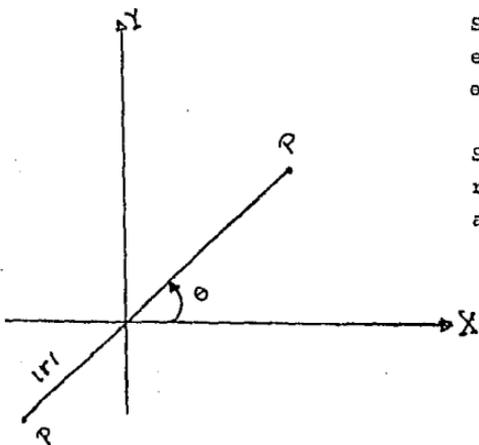
En un sistema polar, un punto se localiza especificando su posición relativa con respecto a una recta fija llamada eje polar a un punto fijo llamado Polo.

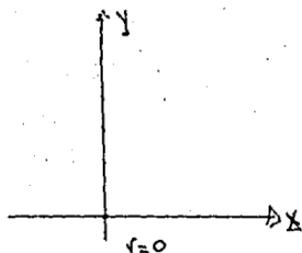
P es un punto descrito en coordenadas Polares a través de (r, θ) , donde:
 θ : es un ángulo polar descrito en la figura medido en radianes cuya variación es de: 0 a 2π medido a contrareloj si $\theta > 0$ y r es la distancia del polo al punto.



Si $r > 0$ (positivo), el punto P estará en el mismo cuadrante que θ .

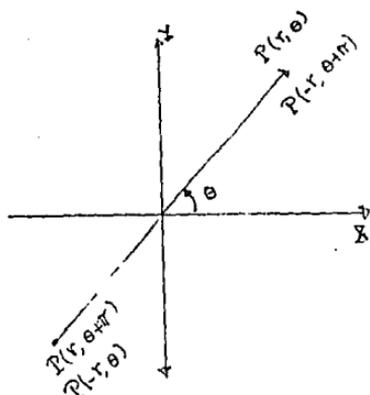
Si $r < 0$, el punto P estará en el rayo opuesto al lado terminal de θ a una distancia $|r| = -r$ del polo.





Si $r=0$, el ángulo θ puede ser cualquiera, las coordenadas polares $(0, \theta)$ representan el origen cualquiera que sea la coordenada angular θ .

Una diferencia entre las coordenadas polares y las rectangulares es que cualquier punto tiene más de una representación en coordenadas polares.



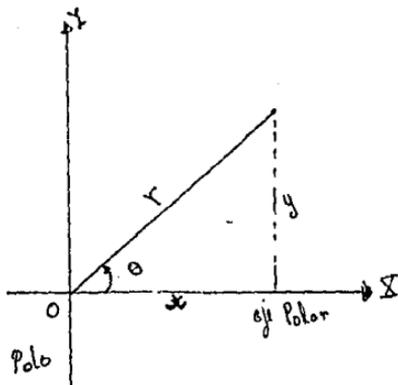
Las coordenadas polares (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto, más generalmente los puntos $(r, \theta + n\pi)$ con n número entero par., y $(-r, \theta + n\pi)$ con n número impar entero, representarían las mismas coordenadas polares.

$$\text{Así : } \left[2, -\frac{\pi}{3} \right] \quad \left[-2, \frac{4\pi}{3} \right] \quad \left[2, \frac{7\pi}{3} \right]$$

$$\text{y } \left[-2, -\frac{2\pi}{3} \right]$$

representan todos al mismo punto P.

• **Conversión entre coordenadas polares y rectangulares.**



Para cambiar de coordenadas polares o rectangulares se usan las ecuaciones básicas.

$$\text{Sene} = \frac{y}{r} \Rightarrow Y = r \text{ sene}$$

$$\text{Cose} = \frac{x}{r} \Rightarrow X = r \text{ cose}$$

siendo θ y r conocidos.

Para cambiar de coordenadas rectangulares a polares siendo X y Y conocidos.

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Teorema de Pitágoras. r
 distancia del origen al punto
 de coordenadas.

$$\text{Tge} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctg \left(\frac{y}{x} \right) \text{ Medida del ángulo } \theta .$$

8. Espirales

Las espirales son objetos fascinantes, las cuales difieren en su medida de longitud., Arquímedes (287 - 212 A.C.) escribió un tratado sobre el tema, el cual llevó su nombre "Espiral de Arquímedes".

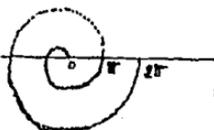
8a. Espiral de Arquímedes

El modelo matemático de una espiral de Arquímedes se obtiene introduciendo el sistema de coordenadas polares, al cual se hizo referencia anteriormente; teniendo esto en consideración, una espiral de Arquímedes, partiendo del centro de la misma puede ser descrita por etapas las cuales describiremos...

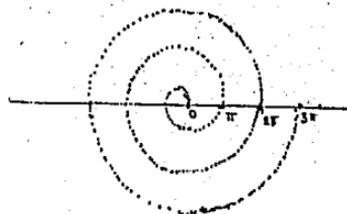
La espiral de Arquímedes tiene como ecuación simple que la define por $r = ea$, a constante., cada etapa estará constituida por una vuelta completa de la espiral.



Primera etapa, la variación de θ es de 0 a 2π , a , es la distancia entre los enrollamientos de la espiral y la ecuación que es de la forma: $r = ea$ nos queda como:
 $r = 2\pi a$.



Segunda etapa de la espiral en este caso la variación de θ es de 0 a 4π , a es la distancia entre los enrollamientos a



$$= 4r \text{ así } r = 4ra.,$$

Tercera etapa de la espiral, $\theta = 6r$,

así la ecuación es: $r = 6ra.$

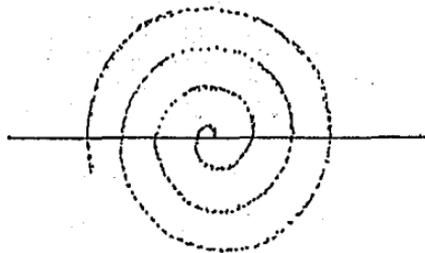
En la n-ésima etapa de la espiral,

$\theta = 2nr$ n, número entero positivo.

Así el modelo matemático o ecuación en forma general para cualquier etapa es $r = 2nr\theta.$

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

o bien $r = a.e$



Puesto que θ efectúa una vuelta completa, es decir se incrementa en $2r$, el radio de la espiral se incrementará en $2ra$ esta cantidad es la distancia constante entre dos enrollamientos sucesivos.

Así si $a = 1$, $r = 2r$ primera vuelta

$a = 2$, $r = 4r$ segunda vuelta

$a = 3$, $r = 6r$ tercera vuelta

⋮
⋮

gb. Espiral logarítmica.

Consideremos una nueva espiral cuya ecuación es parecida a la espiral anterior pero donde en lugar de r tomamos logaritmo natural de r .

$\ln r = \theta.a \rightarrow$ reemplazamos θ sustituimos $a.r$ por $\ln r$.

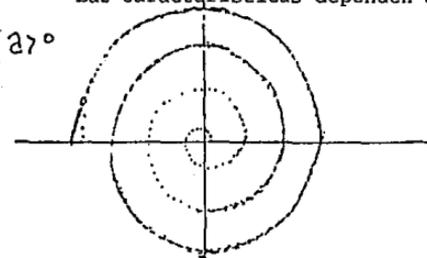
$e^{\ln r} = e^{\theta.a} \rightarrow$ Tomando logaritmos Naturales en base e

$r = e^{a.\theta} \rightarrow$ propiedad de los logaritmos Naturales base e

$r = e^{a.\theta} \rightarrow$ Modelo matemático que define la ecuación general para una espiral logarítmica.

§.c. Características de las espirales.

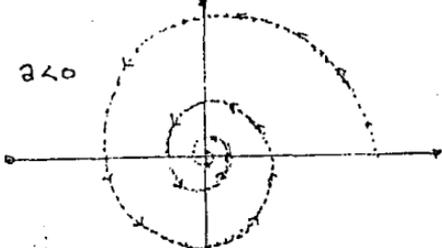
Las características dependen de a y θ así si



$a > 0$ y θ crece indefinidamente, entonces la espiral es infinita, ya que : $r = e^{a \cdot \theta}$

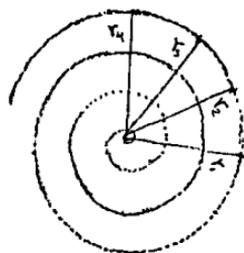
Si $a = 0 \Rightarrow r = e^{0 \cdot \theta} = r = e^0 \Rightarrow r = 1$
ecuación del círculo de radio 1 en coordenadas polares.

Si $a < 0 \Rightarrow r = e^{-a\theta} \Rightarrow r = \frac{1}{e^{a\theta}}$



esta espiral se enrrolla al centro de coordenadas y θ tiende al infinito. ésta espiral esta relacionada con los fractales y es una curva autosemejante.

§.d. Relación de la Serie Aritmética y Geométrica para las espirales



Marquemos puntos sobre la espiral, cuyos radios a partir del centro de la misma a puntos marcados sobre la espiral sean : $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$ y elijamos un ángulo θ arbitrario y constante. Entonces los números r_i constituye una serie aritmética del modo siguiente:

$$r_3 - r_2 = r_2 - r_1, \quad r_4 - r_3 = r_3 - r_2, \quad r_5 - r_4 = r_4 - r_3, \quad r_6 - r_5 = r_5 - r_4, \dots$$

$$r_{i+2} - r'_{i+1} = r_{i+1} - r_i, \dots$$

Esto es, la diferencia entre números consecutivos es siempre la misma.

Realmente si : $r_1 = q\phi$, entonces $r_2 = r_1 + b$ donde b es q veces el ángulo α , esto es, $b = q\alpha$. (q y α depende de las vueltas de la espiral)

$$\text{Así : } r_1, q\phi, \Rightarrow r_2 = r_1 + b, r_3 = r_1 + 2b \dots r_i = r_1 + ib \dots r_n = r_1 + nb, \dots$$

Sustituyendo el valor de b tenemos:

$$r_1 = q\phi, \Rightarrow r_2 = r_1 + q\alpha \Rightarrow r_2 = q\phi + q\alpha \Rightarrow r_2 = q(\phi + \alpha)$$

$$r_3 = r_1 + 2(q\alpha) \Rightarrow r_3 = q\phi + 2q\alpha \Rightarrow r_3 = q(\phi + 2\alpha)$$

$$r_4 = r_1 + 3(q\alpha) \Rightarrow r_4 = q\phi + 3q\alpha \Rightarrow r_4 = q(\phi + 3\alpha)$$

$$r_i = r_1 + iq\alpha \Rightarrow r_i = q\phi + iq\alpha \Rightarrow r_i = q(\phi + i\alpha)$$

$$r_n = r_1 + nq\alpha \Rightarrow r_n = q\phi + nq\alpha \Rightarrow r_n = q(\phi + n\alpha)$$

Dado que la diferencia entre números consecutivos es siempre la misma, entonces las medias aritméticas o más bien "los promedios" de cualquier de los radios es la media aritmética entre 2 radios próximos o vecinos así si: $r_3 - r_2 = r_2 - r_1 \Rightarrow r_3 + r_1 = 2r_2 \Rightarrow r_2 =$

$$\frac{r_3 + r_1}{2} \text{ ó } r_3 = \frac{r_4 + r_2}{2} \text{ ó } r_1 + 1 = \frac{r_{i+2} - r_1}{2}$$

Si reemplazamos la media aritmética $r_2 = \frac{r_1 + r_3}{2}$ por la media

$$\text{geometría } \sqrt{r_1 \cdot r_3} = r_2$$

se obtiene otra espiral clásica la famosa espiral logarítmica.

$$\sqrt{r_1 \cdot r_3} = r_2$$

Reemplazamos la media aritmética por la media geométrica.

$$\left(\sqrt{r_1 \cdot r_3} \right)^2 = r_2^2$$

elevamos al cuadrado en ambos lados

de la ecuación.

$|r_1 \cdot r_3| = r_2^2$ pero
como r_1 y r_2 son radios y
portanto son positivos el módulo
del producto es el mismo producto.

Forma equivalente.

$$r_1 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_2$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3}$$

$$\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) = \ln \left(\frac{r_2}{r_3} \right)$$

la forma equivalente la escribo
como forma proporcional.

Aplico la función logaritmo a la

a la igualdad

* $\ln r_3 - \ln r_2 = \ln r_2 - \ln r_1$ las
medias aritméticas de los
logaritmos forman una serie
aritmética.

$$\ln r_2 = \frac{\ln r_3 + \ln r_1}{2}$$

Media Aritmética de la serie que forman

los logaritmos.

$$\ln r_3 - \ln r_2 = \ln r_2 - \ln r_1$$

$$\ln r_1 + \ln r_3 = 2 \ln r_2$$

$$\ln r_1 = \ln r_2^2 - \ln r_3$$

$$\ln r_1 = \ln \frac{r_2^2}{r_3}$$

$$e^{\ln r_1} = e^{\ln \frac{r_2^2}{r_3}}$$

$$r_1 = \frac{r_2^2}{r_3}$$

Partimos de nuevo de la ecuación *

Arreglo de términos

Despejamos a $\log r_1$

propiedad de la diferencia de los logaritmos

exponenciando ambos lados de la ecuación a:

Por definición de logaritmo.

$$\text{reemplazamos a: } \frac{r_2^2}{r_3} = r \text{ y}$$

$$r_1 = r$$

$$q\phi = r$$

$$r = q\phi$$

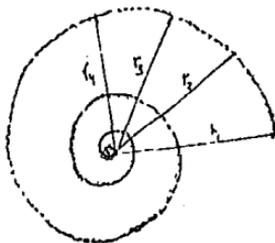
ecuación de la espiral

De manera similar a como se hizo antes podemos generar la espiral logarítmica.

$$\log r = q\phi$$

$$\log r = e^{q\phi}$$

$$r = e^{q\phi}$$



sustituimos a r por el log r
 toman
 logaritmos naturales en base e.
 ecuación de la espiral logarítmica.
 los radios r_i de la espiral
 logarítmico forman una sucesión
 geométrica * de la forma:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_4}{r_5} = \dots = \frac{r_n}{r_{n+1}}$$

igualando el nésimo término con una

constante digamos o tenemos; para

$$\text{cualquier índice } n \quad \frac{r_n}{r_{n+1}} = a \Rightarrow$$

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{a}, \text{ donde } \frac{r_n}{a} \text{ se le}$$

considera la razón de la
 serie geométrica, así :

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{a} = \frac{r_{n-1}}{a^2} = \dots = \frac{r_1}{a^n}$$

O sea

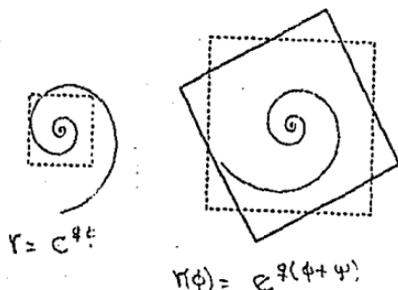
$$\frac{r_1}{a}, \frac{r_2}{a}, \frac{r_3}{a}, \dots, \frac{r_n}{a}, \dots$$

es decir

$$r_1, \frac{r_1}{a}, \frac{r_1}{a^2}, \dots, \frac{r_1}{a^n}, \dots$$

8a. Autosemejanza de la espiral logarítmica.

La observación de la noción de autosemejanza se debe a Bernoulli, cual consiste en: medir a diferentes escalas a la espiral con respecto a su centro, esta medición tiene el mismo efecto que hacer una rotación o giro simple de la espiral mediante un ángulo



Rotación de la espiral logarítmica al ser girada un ángulo ψ

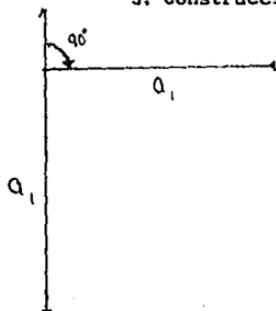
representación en forma analítica de la nueva espiral rotada.

Rotada por un ángulo ψ es la misma que medida, a través de diferentes escalas (multiplicada) por $b = e^{k\psi}$

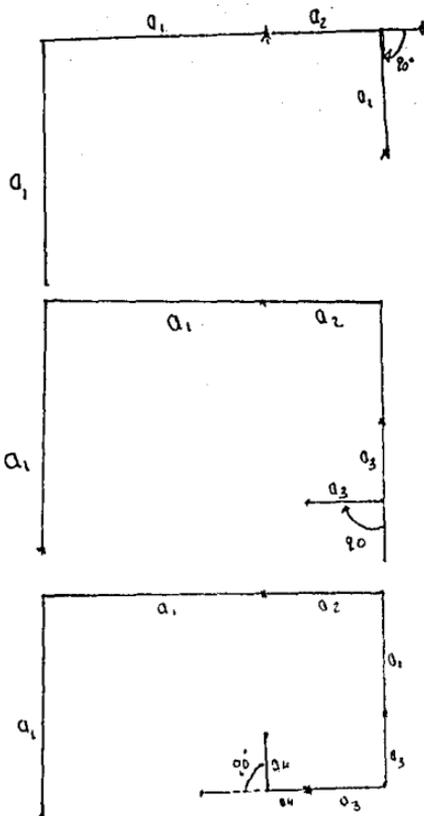
pero, ¿cuál es la longitud de esta espiral?. Para esto consideremos un ejemplo de una espiral cuyo proceso de construcción sea sencilla.

Este ejemplo es proporcionado por el sistema geométrico de retroalimentación, el cual trata sobre la construcción de espirales de tipo Poligonal. En esta construcción distinguiremos entre espirales, espirales, poligonales de longitud finita e infinita.

9. Construcción de un polígono infinito.



Elegir una sucesión decreciente de números a_1, a_2, a_3, \dots consideremos a_1 como la longitud de la pieza inicial de Polígono trazar a_1 verticalmente de longitud arbitraria en el extremo superior del segmento rotar un ángulo



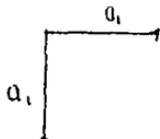
recto y trazar de nuevo al segmento a_1 con la misma longitud en f. horizontal el giro es a la derecha sobre la prolongación (Superior del Segmento). En el extremo horizontal del segmento, marcar un asterisco (*) y trazar a_2 continuando en la misma dirección horizontal y después rotar a reloj un ángulo recto.

La longitud de a_2 es menor que la de segmento a_1 Así $a_2 < a_1$ En el extremo inferior de a_2 marcar otro asterisco (*) a partir de el asterisco trazar el segmento a_3 , primero continuando en la misma dirección y después girar "reloj" un ángulo recto la longitud de a_3 es menor que la longitud de segmento a_2 esto es : ($a_3 < a_2$) Si continuamos este mismo proceso concluiremos la primera etapa de polígono. (una vuelta completa) También se le considera como la primera etapa de una espiral Poligonal

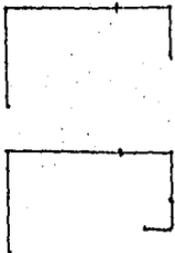
Ahora surge una pregunta, en el sentido de calcular la longitud área de este tipo de espirales Poligonales.

3a. Longitud de la espiral poligonal.

Para el cálculo de la longitud de la espiral poligonal n. basaremos en las secciones que componen dicha figura de la siguiente:



La longitud en esta primera sección de la espiral poligonal es : $a_1 + a_2$



2a1.

La longitud en la segunda sección de $2a_1 + 2a_2 = 2(a_1 + a_2)$ La longitud de la tercera Sección es de $2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 2(a_1 + a_2 + a_3)$.

observamos que la longitud de cada segmento aparece 2 veces en la construcción de la espiral y así argumentamos que la longitud es el doble de la suma esto es:

$$l = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots)$$

Para todo n

$$l = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots)$$

Consideramos la longitud l de la espiral, cuya longitud es el doble de la suma de las a_i

- ... a_k

Elijamos valores particulares de a_i en l .

$$q > 0$$

Sea q un número positivo, pero acotado $-1 < q < 1$

$$a_k = q^{k-1}$$

Tomemos la sucesión como geométrica del modo siguiente:

$$a_k = q^{k-1}$$

$$a_1 = q^{1-1} = q^0 = 1$$

$$a_2 = q^{2-1} = q^1$$

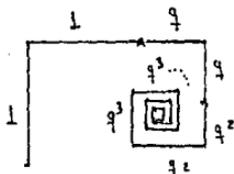
$$a_3 = q^{3-1} = q^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_i = q^{i-1} = q^k$$

$$i-1 = k$$

$$k\text{-ésimo}$$



$$\text{Por lo tanto } l = 2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k =$$

$$2(1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} + \dots) \text{ Con esta expresión obtenemos la longitud}$$

total de la espiral, esta expresión es una serie geométrica para $-1 < q < 1$ y nos interesa que tenga límite.

Para obtener dicho límite definamos las sumas parciales.

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$qS_n = 1(q) + q \cdot q + q \cdot q^2 + \dots + q \cdot q^{n-1}$$

$$S_n - qS_n = 1 + (q - q) + (q^2 - q^2) + \dots + q \cdot q^{n-1}$$

$$S_n - q \cdot S_n = 1 - q^n$$

Haciendo la simplificación,

$$S_n \cdot (1 - q) = 1 - q^n$$

Factorizando S_n ,

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Despejando a S_n .

Ahora bien, cuando n se hace grande, es decir cuando $n \rightarrow \infty$ la q^n hace pequeña tendiendo a cero, porque $-1 < q < 1$.

Así S_n tiende a hacerse: $\frac{1 - 0}{1 - q}$ por lo que podemos escribir $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

$\frac{1}{1 - q}$, con lo cual comprobamos que la longitud total de la espiral

definida por: $2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 2(1 + q + q^2 + \dots) = 2\left(\frac{1}{1 - q}\right)$ tiene límite

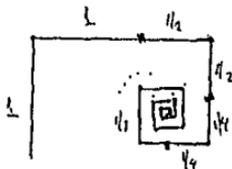
este es infinito.

Por lo tanto la espiral poligonal tiene longitud finita.

Otro ejemplo cualitativamente diferente al anterior es cuando tomamos

$$a_k = \frac{1}{k}$$

Construyamos algunos términos de la espiral poligonal siendo $a_k = \frac{1}{k}$.



$$a_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

entonces esta serie no tiene límite, en otras palabras la espiral asociada es de longitud infinita, como comprobaremos. Partamos de la suma finita: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, o en forma corta a

través del operador sumatoria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Supongamos que: $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ es finita.

Consideremos la suma de todos los términos con denominadores pares:

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \right] = \frac{S}{2}$$

Ya que la suma original es S, entonces:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots = S - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \right] = \frac{S}{2}$$

Pero también se tiene $1 > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{6} \dots$

Por lo tanto $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Esto es contradictorio, ya que la suma debe ser entre ambos $\frac{S}{2}$

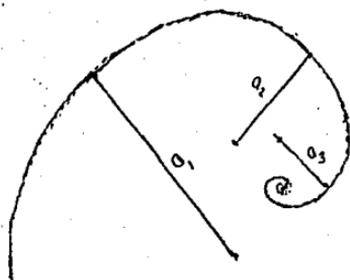
Por lo que nuestra suposición de que la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = S$

Sea finita es inconveniente., un límite finito de esta suma no existe con lo cual probamos lo que queríamos.

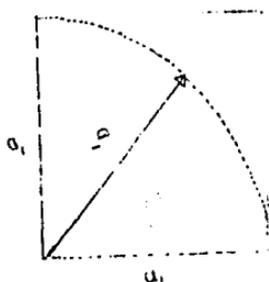
'Espiral Lisa Uniforme.'

Sobre cada uno de los polígonos de la construcción anterior (es decir sobre Polígono).
Tracemos circunferencias de radio a_k y centro uno de los ángulos rectos (convenientemente) del polígono de tal forma que dos de los segmentos que determinan al polígono circundan a la circunferencia.

Esta construcción va a producir en sus distintas etapas, una espiral lisa uniforme, cuyo soporte es la espiral poligonal calcularemos simultáneamente tanto la longitud como el área de la espiral lisa uniforme.



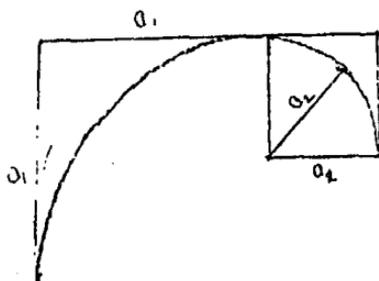
9b. Area de la espiral.



Primera sección simultánea de la espiral Poligonal y la espiral liza, dicha espiral es generada por el trazo de un cuarto de circunferencia de radio a_1 , las cuales circundan a la circunferencia. En esta sección la longitud de la circunferencia con respecto al polígono es de :

$$L_1 = \frac{\pi}{2} \cdot a_1 \text{ y el área de } A_1 \text{ es:}$$

$$\frac{\pi}{4} [a_1^2]$$

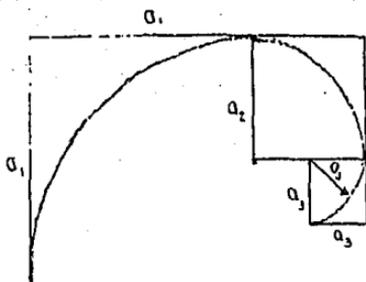


Segunda sección simultánea de las espirales liza y poligonal en ésta sección la longitud y área están dadas

$$\text{por } l_1 + l_2 = \frac{\pi}{2} \cdot a_1 + \frac{\pi}{2} \cdot a_2$$

$$\text{y el área es : } A_1 + A_2 = \frac{\pi}{4} \cdot a_1^2 + \frac{\pi}{4} \cdot a_2^2$$

Tercera sección simultánea de la espiral



lisa y poligonal., en este caso la longitud es : $l_1 + l_2 + l_3 =$

$$\frac{\pi}{2} \cdot a_1 + \frac{\pi}{2} \cdot a_2 + \frac{\pi}{2} \cdot a_3 = \frac{\pi}{2} \cdot$$

$$\cdot (a_1 + a_2 + a_3)$$

y el área es:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{\pi}{4} \cdot a_1^2 + \frac{\pi}{4} \cdot a_2^2 =$$

$$\frac{\pi}{4} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

Primera etapa simultánea de las espirales lisa y poligonal así:

longitud = $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 =$

$$\frac{\pi}{2} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

y el área se determina por:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 =$$

$$= \frac{\pi}{4} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$$

Si seguimos con el proceso de construcción en forma infinita, obtenemos la espiral lisa uniforme la cual se considera de longitud finita o infinita, pero con área determinada como mostraremos...

9.c Longitud de la espiral lisa uniforme.

Observemos que los radios de los círculos son segmentos cuya longitud

es a_k , estos segmentos tienen longitud: $l_k = 2r a_k / 4 = \frac{r}{2} a_k$, así una expresión para la longitud es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k = \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Si $a_k = q^{k-1}$, con $q < 1$ entonces:

$$\frac{r}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{r}{2} (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{1-q} \right).$$

Esta expresión tiene límite y este es finito, así la longitud de la espiral es finita.

$$\text{Si } a_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Esta serie no tiene límite en otras palabras la espiral tiene longitud infinita.

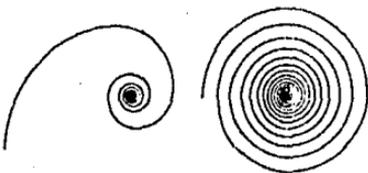
AREA DE LA ESPIRAL

El área en la k -ésima etapa es:

$$S_k = A_1 + A_2 + \dots + A_k = \frac{r}{4} a_1^2 + \frac{r}{4} a_2^2 + \dots + \frac{r}{4} a_k^2$$

que en forma compacta se escribe como:

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{r}{4} a_i^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r}{4} \sum_{i=1}^k a_i^2 =$$



$$= \begin{cases} \text{Si } a_1 = q^{1-1} : \frac{r}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k q^{2(j-1)} \\ \text{Si } a_1 = \frac{1}{1} : \frac{r}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} \end{cases}$$

Que en forma compacta se escribe como:

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{r}{4} a_j^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r}{4} \sum_{j=1}^k a_j^2$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r}{4} \sum_{j=1}^k a_j^2. \quad \text{Tiene 2 componentes las cuales son:}$$

$$\therefore \text{ Si } a^2 = q^{j-1} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r}{4} \sum_{j=1}^k a_j^2 = \frac{r}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k q^{2(j-1)}$$

$$2) \text{ Si } a_j^2 = \frac{1}{j} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r}{4} \sum_{j=1}^k a_j^2 = \frac{r}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$$

Hallemos el área en el caso 1)

Definamos las sumas parciales.

$$S_k = \sum_{j=1}^k q^{2(j-1)} = q^0 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2(k-1)}$$

Multipliquemos por q^2 a la sumatoria anterior

$$q^2 \cdot S_k = \sum_{j=1}^k q^{2j} = q^2 + q^4 + \dots + q^{2k}$$

Hagamos la diferencia $S_k - q^2 \cdot S_k$

$$S_k - q^2 \cdot S_k = 1 + (q^2 - q^2) + (q^4 - q^4) + \dots - q^{2k}$$

$$S_k - q^2 \cdot S_k = 1 - q^{2k} \quad \text{simplificando.}$$

$$S_k (1 - q^2) = 1 - q^{2k} \quad \text{Factorizando } S_k$$

$$S_k = \frac{1 - q^{2k}}{1 - q^2} \quad \text{Despejando } S_k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{2k}}{1 - q^2} = \frac{1 - 0}{1 - q^2} = \frac{1}{1 - q^2}$$

ya que cuando $k \rightarrow \infty$, la $q^{2k} \rightarrow 0$, dado que $q < 1$

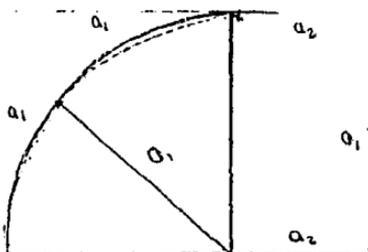
Así $\frac{1}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{4(1 - q^2)}$ este límite es finito y por lo tanto el área también es finita.

Hallemos el área en el caso 2)

$$S_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2}$$

3d. La espiral del Cuadrado Dorado.

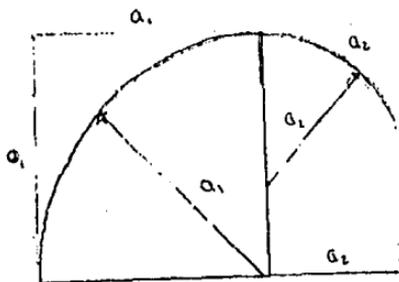
Construcción de la espiral



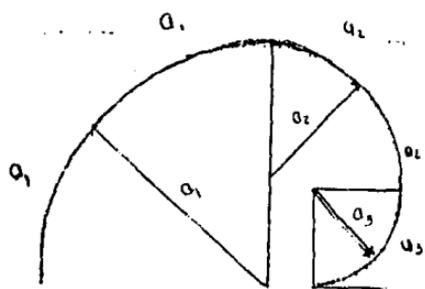
Dada una sucesión de números decrecientes $a_1 < a_2 < a_3 \dots$ entonces.

Se forma un rectángulo de lados a_1 , $(a_1 + a_2)$ con $a_1 < a_2$ dentro de este rectángulo se forma un cuadrado de lado a_1 .

Teniendo como radio a_1 y centro un vértice del cuadrado se traza un cuarto de circunferencia de tal forma que los lados del cuadrado circundan a la misma.



Construir un nuevo rectángulo de lados a_2 y $(a_2 + a_3)$ con $a_2 < a_3$ dentro de este rectángulo formemos un cuadrado de lado igual con a_2 teniendo como radio la longitud de a_2 y centro un vértice de nuevo cuadrado se traza un cuarto de circunferencia como en el caso anterior

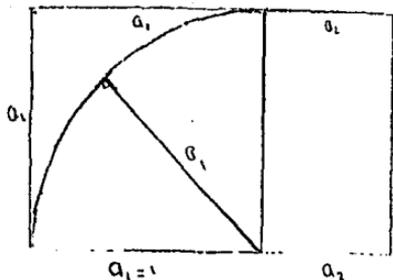


El siguiente rectángulo que se considerará como lados a_3 y $(a_3 + a_4)$ de cual tomamos un cuadrado de lado a_3 . el cuarto de circunferencia que trazamos en esta sección es de radio $r = a_3$.

Si continuamos con este procedimiento obtendremos la espiral del cuadrado

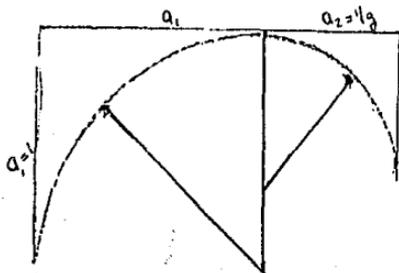
dorado.

9e. Longitud de la espiral del cuadrado dorado.



En la construcción de la espiral poligonal, vista anteriormente tomemos $a = \frac{1}{g^{k-1}}$ donde g se considera como valor "promedio" de la espiral. En el cuadrado dorado calculemos la longitud de esta espiral.

Marcar un rectángulo de lados a_1 y a_2 donde $a_1 = 1$ y $\frac{a_1}{a_2} = g \Rightarrow a_2 = \frac{1}{g}$

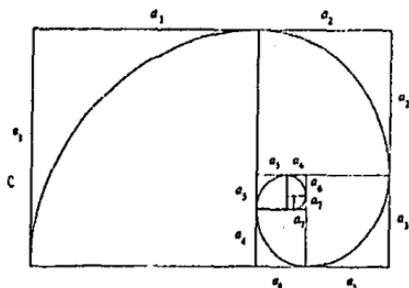


$$\text{Así } \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\frac{1}{g}} = g.$$

El nuevo rectángulo comienza, dando giro de 90° a reloj con lados a_2 y a_1 y dentro un cuadrado de lados a_2 , dado que:

$$a_2 = \frac{1}{g} \text{ y } a_3 + a_2 = a_1 \Rightarrow a_3 = a_1 - a_2.$$

$$\text{Entonces: } \frac{a_2}{a_3} = g, \text{ porque:}$$



$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\frac{1}{g}}{a_1 - a_2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{g}} = \frac{1/g}{\frac{g-1}{g}} = \frac{g}{g(g-1)} = \frac{1}{g-1} = g$$

donde $g-1 = \frac{1}{g}$ medida de la espiral

En general para el k -ésimo término tenemos:

$$\frac{a_1}{a_2} = g$$

$$\frac{a_2}{a_3} = g$$

$$\frac{a_3}{a_4} = g$$

⋮

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = g \quad \text{ó bien} \quad a_k = \frac{1}{g^{k-1}}$$

Con medio igual con $g-1 = \frac{1}{g} \Rightarrow g(g-1) = \frac{1}{g}$ (g)

$$\Rightarrow g^2 - g = 1$$

$$\Rightarrow g^2 - g - 1 = 0$$

Así g es:
$$g_{1,2} = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{4+1}}{2}$$

En la construcción de la espiral poligonal tomemos $a_k =$

$\frac{1}{g^{k-1}}$, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{g^{k-1}}, \text{ con } S_n = 1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \dots + \frac{1}{g^{k-1}} \therefore$$

$$\frac{1}{g} \cdot S_n = \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots + \frac{1}{g^k}$$

Se multiplicó la suma anterior por $\frac{1}{R}$.

$$S_n - \frac{1}{R} S_n = 1 + \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \right] + \dots + \left[\frac{1}{R^{k-1}} - \frac{1}{R^{k-1}} \right] - \frac{1}{R^k}$$

Hicimos la diferencia entre ambas sumas parciales.

$$S_n \left(1 - \frac{1}{R} \right) = 1 - \frac{1}{R^k} \quad \text{Simplificando.}$$

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{R^k}}{1 - \frac{1}{R}} \quad \text{Despejando a } S_n.$$

Entonces cuando $k \rightarrow \infty$, $\frac{1}{R^k} \rightarrow 0$ así: $S_n = \frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{R}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{R}}$

Así la longitud de la espiral poligonal está dada por:

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^{k-1}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{R}} = \frac{2}{\frac{R-1}{R}} = \frac{2R}{R-1} \quad \text{como}$$

$$R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Entonces la longitud es: $2 \frac{\left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1} = 2 \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5} - 2}$

$$= \frac{2 \left(1 + \sqrt{5} \right)}{\sqrt{5} - 1} = 3 + \sqrt{5}$$

Longitud de la espiral poligonal

Por lo que la longitud de la espiral uniformemente inscrita es

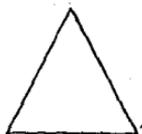
$$\frac{\pi}{2} R^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left(3 + \sqrt{5} \right) \quad \text{el cual es un}$$

numero real finito.

APENDICE 1

•Solución a la Actividad 1.

Construcción de la Curva Copo de Nieve.

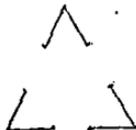


Tomemos un triángulo equilátero con lados unitarios etapa cero [E₀]

PRIMERA ETAPA



Dividamos en 3 partes iguales a cada uno de los lados del triángulo.



Despreciamos las partes medias de cada uno de los lados del triángulo.

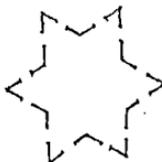


En las terceras partes medias de cada uno de los segmentos, los reemplazamos por dos segmentos en forma de pico exterior.

SEGUNDA ETAPA.



Dividamos en 3 partes iguales a cada uno de los segmentos que quedan de la etapa anterior.



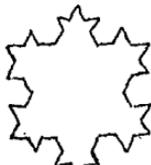
Omitimos las partes medias.

Las Terceras partes medias de cada segmento las reemplazamos por 2 segmentos



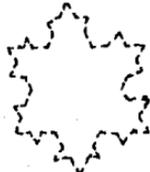
en forma de pico exterior.

Esto concluye la Segunda Etapa [E2].



TERCERA ETAPA

Dividamos a cada uno de los segmentos que quedan de la etapa anterior en 3 partes iguales.



Liberemonos de las terceras partes medias de dichos segmentos.



Las Terceras partes medias las reemplazamos 2 segmentos en forma de pico exterior.

Esto concluye la Tercera etapa [E3].

Si este proceso de construcción se continúa indefinidamente, entonces el límite obtenemos el Copo de Nieve de Koch.

•Solución de la Actividad 2.



Etapa inicial [E0].

Número de segmentos que se determinan: 3



Primera etapa [E1].

Número de segmentos determinados: 12



Segunda Etapa [E2].

Número de segmentos determinados: 48



Tercera Etapa [E3]

Número de segmentos determinados: 192

La siguiente tabla muestra la relación entre el número de etapas y el correspondiente número de segmentos que se determinan.

Etapa	No. segmentos
0	3
1	12
2	48
3	192
4	?
5	?
.	.
.	.
n	?

En efecto, usando la tabla de resultados del número de segmentos de la curva Copo de Nieve observamos que:

$$3 = 3.4^0$$

$$12 = 3.4^1$$

$$48 = 3.4^2$$

$$192 = 3.4^3$$

.

.

.

$$n = 3.4^h$$

- 140 -

No. de segmentos de $E_n = 3 \cdot 4^n$ (hipótesis de inducción)

\therefore No. de segmentos de $E_{n+1} = 3 \cdot 4^{n+1} = 3 \cdot 4^n \cdot 4$, que en efecto es de la misma forma que el número de segmentos de E_n pero para la etapa $n+1$

Entonces por el principio de inducción la fórmula $N = 3 \cdot 4^n$ es cierta como el número de segmentos de la etapa n para toda n natural.

Pasando al límite determinaremos el número total de segmentos en la etapa límite de la curva Copo de Nieve.

$$N = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 4^n = \infty$$

ya que si n crece: 4 elevado a potencias cada vez mayores crece aun más, sin cota alguna.

El número de segmentos determinados en el Copo de Nieve es Infinito.

• Solución a la Actividad 3.

Para resolver este problema debemos calcular el área de cada una de las etapas que conforman la figura y tratar de hallar un modelo matemático que generalice el área en cualquier etapa.

Área en las Distintas Etapas.

ÁREA EN LA ETAPA INICIAL.

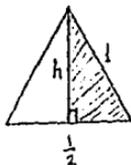
Tomemos un triángulo equilátero con lados unitarios.

Entonces por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$



$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Así el área de la mitad del triángulo es:

$$\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Por lo tanto el área de todo el triángulo es:



$$A(E_0) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Para hallar el área del "Copo de Nieve" en las siguientes etapas, cubriremos el área en cada una de las etapas del Copo de Nieve con triángulos congruentes entre sí, y semejantes al original.

Área de la etapa 1: $A(E_1)$



Área que se quiere determinar



Dividimos el área de la figura anterior en 9 triángulos congruentes entre sí y semejantes al original

Triángulos congruentes con el Postulado tipo $(L.L.L.)$

Triángulos semejantes razón de semejanza: $\frac{1}{3}$

Para calcular el área de la primera etapa tenemos: cada uno de los 9 triángulos que cubren al triángulo original tiene por área $\frac{1}{9} \cdot A(E_0)$

\therefore El área en la primera etapa es:

$$A(E_1) = 9 \left(\frac{1}{9} A(E_0) \right) + A(E_0) = \frac{3}{9} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{9} \right)$$

Área de la etapa 2: $A(E_2)$



Área que se quiere determinar.



Esta área está formada por el área del triángulo de la etapa inicial $A(E_0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ y por el área de los 9 triángulos de la primera etapa de área $\frac{1}{9} A(E_0)$ y por $(9) (9) = 81$

triángulos, cuya área es de $\frac{1}{81} A(E_0)$ para cada uno de ellos.

El incremento de área es de 12 nuevos triángulos cuya área es de:

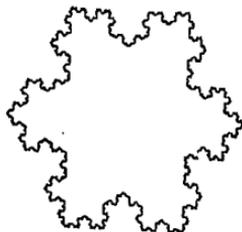
$$12 \cdot \left(\frac{1}{81}\right) \cdot A(E_0) = \frac{12}{81} A(E_0)$$

∴ El área en la etapa 2 es:

$$\begin{aligned} A(E_2) &= A(E_0) + A(E_1) + \frac{12}{81} \cdot A(E_0) = \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{9} + \frac{12}{81} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2}\right) \end{aligned}$$

Los triángulos que cubren al área a determinar son congruentes entre sí y semejantes al original.

Todos los triángulos son congruentes por el postulado (L . L . L .).



Estos triángulos son semejantes por la propiedad de transitividad (Si el triángulo I es semejante al triángulo II y este a su vez es semejante con el triángulo III, entonces el triángulo I es semejante al triángulo III).

Esto es, la razón de semejanza entre el triángulo I y II es de $r = \frac{1}{3}$ y la razón entre el triángulo II y III es $\frac{1}{9}$.

Se observa que para las siguientes etapas las particiones en triángulos equiláteros congruentes entre sí y semejantes al triángulo original, hay una cierta regularidad en cuanto al número de triángulos formados y en cuanto a incremento del área en cada etapa.

Area en la etapa 3: $A(E_3)$

La partición del área del triángulo original: $9^2 \cdot 9 = 729$ triángulos (729 triángulos son congruentes entre sí y semejantes al original).

Número de triángulos incrementados: $4^2 \cdot 3 = 48$

∴ El área de la etapa 3 : $A(E_3)$, resulta ser:

$$\begin{aligned} A(E_3) &= A(E_0) + A(E_1) + A(E_2) + \frac{48}{729} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{9} + \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{81 \cdot 4} + \frac{48 \cdot \sqrt{3}}{729 \cdot 4} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} \right]. \end{aligned}$$

(Obtenida como la suma de las áreas anteriores más el área incrementada)

Area de la Etapa 4

Partición del área del triángulo original: $9^3 \cdot 9 = 6561$ triángulos. (Número de triángulos que cubren al triángulo original congruentes entre semejantes al original).

Número de triángulos que se incrementan en ésta etapa: $4^3 \cdot 3 = 192$.

Área de un triángulo de esta etapa: $\frac{1}{6561}$.

∴ El área de la Etapa 4, $A(E_4)$, es:

$$\begin{aligned} A(E_4) &= A(E_0) + A(E_1) + A(E_2) + A(E_3) + \frac{192}{6561} \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9} + \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{81 \cdot 4} + \frac{48 \cdot \sqrt{3}}{729 \cdot 4} + \frac{192 \cdot \sqrt{3}}{6561 \cdot 4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} \right] \end{aligned}$$

(Obtenida como la suma de las áreas anteriores más el área incrementada)

Area de la etapa número 5

Partición del área del triángulo original en triángulos congruentes entre sí y semejantes al original es: $9^4 \cdot 9 = 59049$

Número de triángulos equiláteros que cubren al triángulo original.

Número de triángulos incrementados : $3 \cdot 4^4 = 768$

Area de la etapa 5:

$$\begin{aligned} A(E_5) &= A(E_0) + A(E_1) + A(E_2) + A(E_3) + A(E_4) + \frac{768 \cdot \sqrt{3}}{59049 \cdot 4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{9^2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3}}{9^3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 4^3 \cdot \sqrt{3}}{9^4 \cdot 4} + \frac{768 \cdot \sqrt{3}}{59049 \cdot 4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} + \frac{3 \cdot 4^4}{9^5} \right) \end{aligned}$$

(Obtenida como la suma de las áreas anteriores más el área incrementada)

Por lo tanto, observando los resultados de las diferentes etapas el área una etapa n-ésima cualquiera es :

$$A(E_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} + \frac{3 \cdot 4^4}{9^5} + \dots + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \right)$$

que expresa el área para cualquier etapa n del Copo de Nieve.

Esta fórmula, en efecto puede ser verificada por el Principio de Inducción, decir, verificarla para algún valor en particular, digamos

$$n = 1 \Rightarrow A(E_1) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3 \cdot 4^{1-1}}{9^1} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{9} \right)$$

En la n-ésima etapa (hipótesis de inducción) el área es :

$$A(E_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} + \frac{3 \cdot 4^4}{9^5} + \dots + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \right)$$

$$\begin{aligned}
 A(E_{n+1}) &= A(E_n) + \text{Área Incrementada} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} + \frac{3 \cdot 4^4}{9^5} + \dots + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \right) + \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 4^n}{4 \cdot 9^{n+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} + \frac{3 \cdot 4^4}{9^5} + \dots + \frac{3 \cdot 4^n}{9^{n+1}} \right)
 \end{aligned}$$

que efectivamente nos da de la misma forma que el área n-ésima, con la diferencia de que en lugar de n sumandos obtenemos (n+1). Y esto es lo queríamos demostrar.

Dado que tenemos un modelo matemático que expresa el área, para cualquiera las etapas, comprobemos si ésta es finita (determinada) o no.

Como resultó que

$$A(E_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} + \frac{3 \cdot 4^4}{9^5} + \dots + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \right)$$

y factorizando a $\frac{\sqrt{3}}{4}$ en $A(E_n)$, ésta se puede expresar como:

$$A(E_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} + \frac{3 \cdot 4^4}{9^5} + \dots + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} \right)$$

$$A(E_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{9} \left[1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \frac{4^4}{9^4} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \right] \right)$$

 S_n

Si la suma parcial S_n converge, es decir si $\lim S_n$ existe, entonces el del Copo de Nieve será finita, pero dicha suma finita es una suma geométrica con razón $\frac{4}{9} > 1$, luego multiplicando a S_n por la razón $\frac{4}{9}$ y restándola misma, puede despejarse factorizándola. Actuando de acuerdo a lo anterior tendremos:

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}},$$

por consiguiente

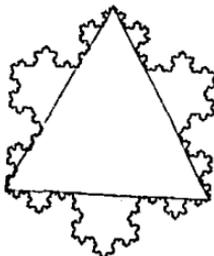
$$\lim S_n = \frac{1 - \lim \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1 - 0}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5},$$

ya que $\frac{4}{9} < 1$ y por tanto elevado a potencias cada vez más grandes se va cada vez más pequeño tendiendo en el límite a cero

entonces

$$\begin{aligned} \lim A(E_n) &= \lim \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{9} (S_n) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \lim \left(1 + \frac{3}{9} (S_n) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{9} (\lim S_n) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{9} \left(\frac{9}{5} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{5} \\ &= \frac{8}{5} \cdot A(E_0) \end{aligned}$$

Concluimos por lo tanto que el área del Copo de Nieve es finita, no sobrepasa el doble del área original $A(E_0)$.



Solución a la ACTIVIDAD 4. $M_D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \cdot \epsilon^D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon^{1.36}} \cdot \epsilon^D = K \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{D-1.36}$

$$= \begin{cases} K \cdot 0, & \text{si } D > 1.36 \\ K \cdot \infty, & \text{si } D < 1.36 \\ K, & \text{si } D = 1.36 \end{cases}$$

Solución a la Actividad 5.

Recordemos que tal dimensión satisface la fórmula $N = E^D$, donde N es el número de segmentos en la etapa considerada, E el factor de expansión (en nuestro caso el factor de contracción: $c = \frac{1}{E} = \dots$) y D la dimensión de autosemejanza. Consideremos por facilidad la 1ª. etapa de la construcción de la curva, entonces $N = 4$ luego:

$$N = \left(\frac{1}{c}\right)^D \Rightarrow 4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^D \Rightarrow 4 = 3^D \Rightarrow D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2619\dots$$

Idéntico resultado al ya obtenido con otras formas de calcular esta dimensión fractal.

Solución a la Actividad 6.

Recordando que la curva del Copo de Nieve de Koch no es otra cosa, sino la unión de 3 curvas de Koch unidas sobre un triángulo equilátero, entonces la curva Copo de Nieve resultante deberá tener la misma dimensión que la curva de Koch.

Comprobemos lo antes dicho directamente de la etapa inicial a la 1ª. etapa de la construcción de la Curva de Koch:

$$N(c) \cdot c^D = N(c') \cdot c'^D \Rightarrow 3 \cdot c^D = 12 \cdot \left(\frac{c}{3}\right)^D \Rightarrow 3 = \frac{12}{3^D} \Rightarrow 3^D = 4 \Rightarrow D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

y de nuevo obtenemos el mismo resultado que con otros métodos.

Solución a la Actividad 7.

Se toma un segmento de longitud unitaria.

Dividimos en 3 partes iguales al segmento.

Omitimos la parte media.

Así concluimos la primera etapa.

Segunda etapa.

Dividimos a cada uno de los segmentos obtenidos en 3 partes iguales.

Omitamos las partes medias en cada segmento. Esto concluye la segunda etapa.

Tercera etapa.

Dividir a cada uno de los segmentos obtenidos en 3 partes iguales.

Omitamos las partes medias de cada segmento. Esto concluye la tercera etapa.

Si continuamos con este proceso en forma iterativa e infinita, obtenemos el conjunto de Cantor o "Polvo" de Cantor.

Supongamos que se quiere hallar la dimensión de este conjunto, por ejemplo, de la primera a la tercera etapa :

$$N(c) \cdot c^D = N(c') \cdot c'^D$$

$$1 \cdot c^D = 4 \cdot \left(\frac{c}{3^2} \right)^D$$

$$c^D = 4 \cdot \frac{c^D}{3^{2D}}$$

$$1 = 4 \cdot 3^{-2D}$$

$$3^{2D} = 4$$

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

APENDICE 2.

MÉTODO DE "MÍNIMOS CUADRADOS"

X	Y	
X ₁	Y ₁	
X ₂	Y ₂	
X ₃	Y ₃	(datos)
X ₄	Y ₄	
X _n	Y _n	

$$|e_i| = |y_i - mx_i - b| \quad \text{"Error" } i\text{-ésimo vertical } |e_i|$$

$$e_v = \sum_{i=1}^n |e_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - mx_i - b| \quad \text{Suma de errores verticales.}$$

Pero es difícil operar con valores absolutos, por ello se trabaja con errores cuadráticos que siguen teniendo la propiedad de ser siempre positivos como los valores absolutos.

$$e_c = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \quad \text{Suma de errores cuadráticos.}$$

$e_c = e_c(m, b)$
conocidos

Como x_i y y_i son valores

es que la suma de los errores cuadráticos resulta ser una

función

de los parámetros m y b

$$\text{Mín } e_c = \text{Mín } \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \quad \text{Se plantea minimizar la suma de}$$

los

errores cuadráticos verticales

Para lograr lo anterior se buscan los valores de m y b para lo que se satisfaga el que sus derivadas (parciales) sean iguales a cero:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial m} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 = 0 & \text{Condición suficiente para la} \\ \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 = 0 & \text{existencia de mínimo.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) (-x_i) = 0 & \text{Derivada de la composición.} \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \sum_{i=1}^n x_i y_i + m \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = 0 & \text{Desarrollando la sumatoria.} \\ - \sum_{i=1}^n y_i + m \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + b \cdot n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i & \text{2 ecuaciones con 2 incógnitas.} \\ m \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned}
 m &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\
 b &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}
 \end{aligned} \right\} \text{Fórmulas de ajuste li}$$

Apéndice 3

Comprobación de que $\log_3\left[\frac{4}{3}\right] = 0.2619$

En efecto por definición

$$\log_3\left[\frac{4}{3}\right] = x \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{4}{3}$$

$$x \log 3 = \log \left[\frac{4}{3}\right]$$

$$x = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 3}$$

$$= \frac{0.6020599 - 0.4771212}{0.4771212} = \frac{.1249386}{.4771212} = 0.2619$$

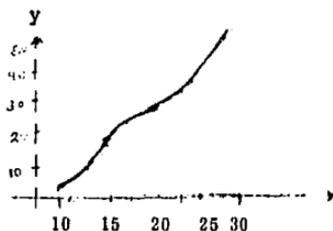
Apéndice 4.

Salto de Altura

X(en segundos)	10	15	20	25	30
Y(altura en mts.)	4.8	10.9	19.4	30.03	43.6

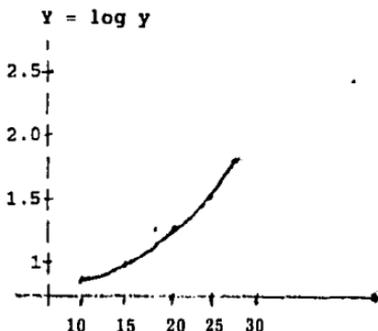
Los datos muestran la destreza de un deportista con respect al salto de altura, la relación está dada por el tiempo x segundos (x) vs. la altura en metros (y).

La gráfica del fenómeno en el Plano Estándar de los datr (x, y) se ajustan a una curva.



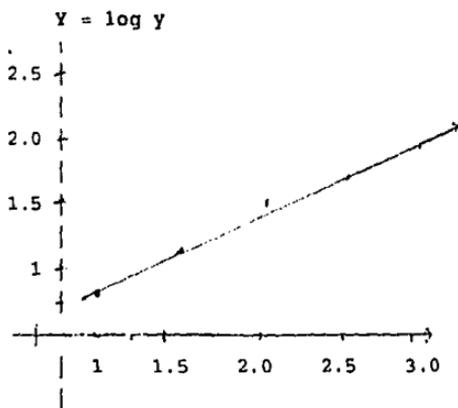
X(en segundos)	10	15	20	25	30
log Y(nueva altura)	1.68	1.03	1.28	1.48	1.63

La nueva tabla muestra la transformación a los puntos $(X, Y = \log y)$. Es así que $X = x$, $Y = \log y$ y en el plar semilogarítmico obtenemos que los datos se ajustan a una curva:



$\log x$ (nuevo tiempo)	1	1.5	2	2.5	3
$\log y$ (nueva altura)	.68	1.03	1.28	1.48	1.68

Por último grafiquemos los datos de esta tabla en el plano logarítmico ($\log x, \log y$) y como puede apreciarse se ajustan una línea recta.



NOTA: El Salto que hace el deportista es un Salto de Trampolín y se está midiendo desde la mínima a la máxima altura.

CONCLUSIONES.

La propuesta aquí elaborada está dirigida a los profesores alumnos del Bachillerato, en dicho trabajo se pueden observar dos variantes, una de ellas está encaminada a que con la construcción de las curvas fractales, el alumno de Bachillerato es interesado en temas con la matemática contemporánea a través de

modelos matemáticos como los que se muestran en la construcción de número de lados, longitud de cada intervalo, perímetro y área del copo de nieve, etc.

Se puede observar la conexión existente entre dichas disciplinas del área como son: Álgebra, Geometría, Inducción matemática, Series y Sucesiones y Precálculo.

Estos temas vistos de la forma propuesta tienen un carácter empírico, experimental y se rompe, al menos cierta parte del modelo tradicional de la enseñanza, dado que el alumno en sus clases deja de ser un expectador de la materia y se convierte en un sujeto activo al estar desarrollando los problemas propuestos bajo la guía del profesor.

Por otro lado la segunda variante de la propuesta está relacionada con el trabajo en sí mismo, es decir con la idea de la complejidad a nivel de Bachillerato, debemos advertir al lector que las definiciones aquí planteadas se dan en forma intuitiva y provisional y son susceptibles de irse perfeccionando

Definiciones Provisionales a las que se intenta llegar.

1. *Fractal*. Ente geométrico con la propiedad de autosemejanza a diferentes escalas, de longitud infinita restringido a un área infinita*, y cuya nueva dimensión (dimensión fractal) es mayor que la dimensión usual (Dimensión topológica) D_T , esto es $D > D_T$ ($1 < D < 2$).

* o área infinita en un volumen finito de dimensión fractal ($D > 2$)

2. *Complejidad*. La complejidad puede caracterizarse o estar relacionada con la dimensión de la curva fractal, esto es, con el exponente de la ley potencial que describe a dicho proceso. Tal exponente es la pendiente de la mejor recta ajustada con el eje logarítmico de la ley potencial.

Así por ejemplo en las costas de Islas la pendiente de la recta en papel logarítmico indica que tan compleja o accidentada es la costa, es decir, entre más sinuosa sea la costa, la recta tendrá una mayor pendiente, lo que significa que la longitud de la costa aumentará más rápidamente en un caso que en otro o que la costa sea más rocosa que la otra. La pendiente a su vez caracteriza a la dimensión fractal.

Así también la Isla de Inglaterra tiene una dimensión fractal igual a 1.30, la isla Socorro del Pacífico Mexicano una dimensión 1.16 y el estado de Utah cuya dimensión es la unidad 1.

Entonces podemos decir que la Isla de Inglaterra tiene mayor complejidad que la Isla Socorro ($1.36 > 1.16$) y además la frontera del estado de Utah su complejidad es cero.

REFERENCIAS

- [1] Peitgen, H.O., H. Jürgens, D. Saupe. 1992. Fractals for the classroom, Parte One, Introduction to fractals and chaos. NCTM. Springer Verlag.
- [2] Peitgen, H.O., H. Jürgens, D. Saupe. 1992. Fractals for the classroom, Parte Two, Strategic activities. NCTM. Springer Verlag
- [3]. Spivak. Calculus.
- [4]. Kletenik D. 1979. Problemas de Geometría Analítica. Ed. M Moscú.
- [5]. Takevchi Yu, 1979. Sucesiones y Series. Limusa, México.