27
2ej.

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

ACERCA DE LA LEY DE FARADAY

Tesis profesional que para obtener el título de:
FISICO

Presenta:

JUAN LUIS MARTÍNEZ LEDESMA

México, D.F.
1994

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron EL pasante(s) SR. JUAN LUIS MARTINEZ LEDESMA

con número de cuenta 8334275-8 con el Título:

" ACERCA DE LA LEY DE FARADAY "

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de FISICO

GRADO	NOMBRE(S) APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. EN C.	JOSE LUIS JIMENEZ RAMIREZ Director de Tesis	
DR.	MANUEL TORRES LABANSAT	
DR.	GERMINAL COCHO GIL	
M. EN C.	IGNACIO CAMPOS FLORES Suplente	
M. EN C.	MIRNA VILLAVICENCIO TORRES Suplente	Mirna Villavicencio Torres

ÍNDICE

PRÓLOGO

Parece de poco interés reflexionar en torno de temas clásicos de física, como la ley de Faraday, cuando constantemente la investigación tiende siempre a una generalización, especialización y reacomodo del conocimiento que se ha logrado, de tal suerte que, de manera general, a lo que se considera como algo establecido se le suele ver ya agotado y sin importancia en dicha actividad. Claro es que la actitud asumida por los diferentes sectores de la comunidad científica –alumnos, profesores, investigadores, etc.,– ante esta situación no es la misma. Uno como estudiante siempre está deseoso de aprehender el conocimiento con rapidez y llegar lo más pronto posible a los temas novedosos de la ciencia. En particular, en física suele suceder que, dado este afán, no se profundiza cuidadosamente en el significado de la gran mayoría de las leyes fundamentales, que conjugado a un análisis influido por el positivismo da lugar a una visión superficial y desmembrada de las diferentes teorías. Así, es justificable reflexionar sobre el significado físico de las diferentes leyes y teorías desde un marco conceptual donde sean importantes su unidad y relaciones. Al respecto, el presente trabajo pretende mostrar algunos rasgos importantes sobre tópicos relacionados con la enseñanza del electromagnetismo que habitualmente no se toman en cuenta.

Comenzaremos discutiendo la conocida "ley de inducción de Faraday" basándonos en las exposiciones que suelen presentarse en la mayoría de los textos y cursos universitarios. Se verá que un análisis detallado de este tema muestra una problemática que supera el marco conceptual en el que es planteada siendo preciso una revisión de conceptos. Esto nos conducirá, naturalmente, a discutir el problema desde otra perspectiva: la relativista. En este sentido debe recordarse que problemas relacionados con el entendimiento de esta ley fueron un factor decisivo para Einstein en la formulación de las teorías especial y general de la relatividad. Por tanto, lo que se expone no es novedoso, pretende ser una compilación de ideas que invitan a una reflexión sobre el concepto de campo, el transporte de energía en un campo electromagnético, la interacción de esta energía con la materia, así como de la "realidad" física de entidades tales como los potenciales electromagnéticos.

Se ha tratado de que los temas que aquí se exponen ayuden al estudiante de física en el entendimiento del electromagnetismo haciéndole notar las sutilezas que involucran, como lo poco agotados que se encuentran. Para las personas de mayor experiencia se escribe con el espíritu de que sirva para reflexionar sobre detalles que a veces se pasan de largo o que simplemente no se habían tomado en cuenta.

CAPÍTULO I

COMO SE ESTUDIA GENERALMENTE LA LEY DE FARADAY

En los textos de física considerados clásicos en nuestro medio para iniciarse en el estudio del electromagnetismo, la ley de Faraday se presenta en los siguientes términos, Halliday y Resnick[1]:

"La ley de Faraday dice que la fem (fuerza electromotriz) inducida ε en un circuito es igual a la rapidez del cambio del flujo a través del circuito excepto por un signo negativo... En forma de ecuación

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}."$$

donde se supone que ϕ_B representa el flujo magnético. El signo menos, conocido por "ley de Lenz", está relacionado con el sentido de la fem inducida:

"La corriente inducida circulará en un sentido tal que se oponga al cambio que la produce."

Cabe destacar que los autores reconocen que: "*...lo que influye en el fenómeno es el movimiento relativo...*"

Otra manera de presentar la ley de Faraday es la que aparece en el libro de Alonso-Finn[2]:

"Un campo magnético dependiente del tiempo implica la existencia de un campo eléctrico tal que su circulación a lo largo de un camino arbitrario cerrado es igual a menos la derivada con respecto al tiempo del flujo magnético a través de una superficie limitada por el camino

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \vec{ds} = -\frac{1}{c}\frac{d\phi}{dt}"$$

se agrega que:

"La ley de la inducción electromagnética $\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\phi}{dt}$ se puede aplicar bien cuando la variación del flujo magnético ϕ se debe a una variación del campo magnético $\vec{B}$, bien cuando se deba al movimiento o a la deformación del circuito a lo largo del cual se calcula la fem, o cuando se debe a ambos."

Por otro lado, aplican el teorema de Stokes a la ley de Faraday para determinar la relación local entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$ en la vecindad de un punto. Así, llegan a la ecuación diferencial

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

comentando los autores que:

"La ec.[17.15] –es decir esta última– ... expresa las relaciones que deben de existir entre la derivada respecto al tiempo del campo magnético en un punto y el campo eléctrico existente en ese mismo punto del espacio. Ilustra de una manera obvia la interrelación íntima entre las componentes eléctrica y magnética de un campo electromagnético."

Tomando en cuenta lo anterior, parece ser que la ley de Faraday es de fácil comprensión. Basta con ser cuidadosos en su aplicación para poder resolver los problemas de inducción electromagnética que se presenten y el tema se vislumbra como concluido. Siendo así, es conveniente discutir algunos ejemplos para resaltar detalles donde pueda existir confusión sobre su aplicación.

EJEMPLO 1 [Halliday y Resnick, op. cit. pags. 229-230]. "...considérese la figura..., que muestra a una espira de alambre rectangular de ancho ℓ, uno de cuyos extremos se encuentra en un campo uniforme $\vec{B}$, que apunta perpendicularmente al plano de la espira. Tal campo se puede producir en el espacio entre los polos de un electroimán grande, como el mostrado en la figura... El experimento consiste en tirar de la espira hacia la derecha, con una rapidez constante v...

"El flujo ϕ_B encerrado por la espira en la figura... es

$$\phi_B = B\ell x$$

en donde ℓx es el área de aquella parte de la espira en la que $\vec{B}$ no es cero. La fem ε se encuentra a partir de la ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -\frac{1}{c}B\ell\frac{dx}{dt} = B\ell v \qquad (32-3)$$

en donde se ha sustituido $-\frac{dx}{dt}$ por la rapidez v con la cual se tira de la espira hacia afuera del campo magnético. Nótese que la única dimensión de la espira que interviene en la ec. 32-3, es el la longitud ℓ de la parte conductora del extremo izquierdo...

"La fem Bℓv establece una corriente en la espira cuyo valor es

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

en donde R es la resistencia de la espira. A partir de la ley de Lenz, ... la corriente (y consecuentemente ϵ) debe cicular el sentido de las manecillas del reloj y debe oponerse al "cambio" (la disminución en ϕ_B), originando un campo paralelo al campo externo que atraviesa a la espira."

Salvo por la arbitrariedad en el sentido de la velocidad $\vec{v}$, el ejemplo parece ser claro. Sin embargo, dos páginas más adelante, los autores afirman que:

"...Consecuentemente, la ley de Faraday se puede formular de una manera informal, pero informativa, de la siguiente forma: *un campo magnético cambiante produce un campo eléctrico.*"

Por otro lado, en el libro de Alonso-Finn, cuya presentación de la ley de Faraday es más amplia que la de Halliday-Resnick, a este ejemplo se le da otro enfoque y se explica del siguiente modo:

EJEMPLO 1' [op. cit. pags. 651-652]. "Consideremos la disposición de conductores ilustrada en la figura 17-6, donde el conductor PQ se puede mover paralelamente así mismo con velocidad $\vec{v}$ manteniendo contacto con los conductores RT y SU. El sistema PQRS forma un circuito cerrado. Supongamos también que hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano del sistema.

"Cada carga q del conductor móvil PQ está sujeta a una fuerza $q\frac{\vec{v}\times\vec{B}}{c}$ que actúa según QP. Ahora bien, la misma fuerza sobre la carga se podría suponer debida a un campo eléctrico "equivalente" $\vec{E}_{eq}$ dado por

$$q\vec{E}_{eq} = q\frac{\vec{v}\times\vec{B}}{c} \qquad o \qquad \vec{E}_{eq} = \frac{\vec{v}\times\vec{B}}{c}$$

"Como $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la relación entre los módulos es

$$E_{eq} = \frac{vB}{c}$$

si PQ=ℓ, hay entre P y Q una diferencia de potencial $V = E_{eq}\ell = \frac{Bv\ell}{c}$. Sobre las secciones QR, RS y SP no se ejercen fuerzas porque no se mueven. En consecuencia la circulación de $\vec{E}_{eq}$ a lo largo del circuito PQRS (o sea la fem) es simplemente $\epsilon = V$ en la dirección $\vec{v}\times\vec{B}$, es decir

$$V_\epsilon = \frac{vB\ell}{c}$$

"Por otra parte, si llamamos x al segmento SP, el área de PQRS es ℓx y el flujo magnético a través de PQRS es

$$\phi_B = \int \vec{B}\cdot\vec{ds} = B\ell x$$

"La variación de flujo por unidad de tiempo es entonces

$$\frac{1}{c}\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}(B\ell x) = \frac{1}{c}B\ell\frac{dx}{dt}.$$

"Pero $\frac{dx}{dt} = v$; por lo tanto

$$\frac{1}{c}\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{B\ell v}{c}$$

"El signo menos no aparece porque sólo estamos considerando la relación entre módulos ... el signo de ε es el de $\vec{v} \times \vec{B}$..."

Como Alonso-Finn apuntan que la ley de Faraday se puede aplicar cuando se deforma el circuito en presencia de un campo magnético, uno está inclinado a aceptar tal presentación de la ley de inducción de Faraday, y aceptar de buena gana su método de solución del problema que plantearon. Pero en vez de hacerlo analicemos los enfoques arriba expuestos para discutir las consecuencias que ellos traen consigo.

Un elemento no sólo criticable sino que nos parece incorrecto en la presentación de la ley de Faraday debida a Halliday-Resnick, es su afirmación de que: "*...un campo magnético cambiante produce un campo eléctrico.*" ¿Acaso no se nos enseña en los cursos de física a identificar como causa del campo eléctrico a la propiedad de *carga eléctrica* de la materia?. Este hecho es grave si se considera desde el punto de vista pedagógico, pues como el texto de Halliday-Resnick es muy popular, la resonancia de sus comentarios en torno a este tema fácilmente pueden conducir a confusiones. Mostraremos posteriormente, con ayuda de otros ejemplos, que la exposición de Halliday-Resnick sobre la ley de Faraday deja aún mucho que desear.

En el caso de Alonso-Finn, en los métodos de solución que presentan al ejemplo planteado, el factor que da pie para una discusión es el hecho de solucionar un problema de dos maneras diferentes sin presentar algún vínculo entre ellas, si es que éste existe. Esto es, primeramente se utiliza la fuerza de Lorentz en dicha solución y después la ley de Faraday, no explicando la equivalencia de ambas.

En conexión con ello resulta ilustrativo el enunciado de Purcell[3] sobre la ley de Faraday, el cual dice:

"Podemos establecer como una relación universal la ley de inducción de Faraday: Si C es una curva cerrada, estacionaria en las coordenadas x, y, z, si S es una superficie limitada por C, $\vec{B}(x,y,z,t)$ es el campo magnético medido en x, y, z, en el instante t, entonces

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\vec{ds} = -\frac{1}{c}\frac{d\phi}{dt}$$

equivalentemente

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}"$$

Como se han presentado las cosas la ley de Faraday resulta un tanto confusa, ya que Purcell afirma, contrariamente a como lo hacen Alonso-Finn, que hay que limitar la aplicación de la ley de Faraday a curvas estacionarias, es decir, a aquellas que se encuentren en reposo con respecto a un observador que verificará el fenómeno de inducción, y esto contradice al adjetivo de relación universal que él le adjudica a la ley de Faraday. Purcell no discute el por qué de tal limitación a circuitos estacionarios. De esta manera la solución que ofrecen Alonso-Finn al ejemplo en cuestión con ayuda de la ley de Faraday, sería descartada por Purcell, pero sí aceptaría la explicación que usa la fuerza de Lorentz, ya que como se puede corroborar en su texto, él considera que la presencia de una corriente eléctrica en un conductor en movimiento en el seno de un campo magnético es un efecto que se explica mediante tal fuerza, y no se relaciona con la ley de Faraday.

Uno podría inclinarse por aceptar la opinión más reputada y con ello disipar la confusión que se ha generado, pero esto sería eludir la problemática que, como se ha visto, existe en torno de la ley de Faraday. Lo apropiado es consultar otras opiniones sobre este punto y analizar su argumentación.

Por lo que se refiere al libro de Reitz-Milford-Christy[4], texto también muy usado, encontramos lo siguiente:

"Los resultados de un gran número de experimentos pueden resumirse asociando una fem

$$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\phi}{dt}$$

con un cambio en el flujo magnético que pasa por un circuito. Este resultado se ve que es independiente de la forma en que se cambia el flujo (el circuito puede distorsionarse o moverse, o el valor de $\vec{B}$ en varios puntos interiores al circuito puede cambiarse). Es muy importante darse cuenta que la ec. (11-2) –se refieren a la primera ecuación citada– representa una ley experimental independiente: no puede deducirse de otras leyes experimentales y efectivamente, no es, como se dice a veces, una consecuencia de la conservación de la energía aplicada al equilibrio de energía en corrientes en campos magnéticos.

"Ya que por definición

$$\varepsilon = \oint_c \vec{E} \cdot \vec{dl} \qquad y \qquad \phi = \int_s \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

la ecuación (11-2) puede escribirse como

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

"Si el circuito es un circuito rígido estacionario, la derivada del tiempo puede tomarse dentro de la integral donde se convierte en una derivada parcial del tiempo. Además, el teorema de Stokes puede usarse para transformar la integral de línea de $\vec{E}$ en la integral de superficie de $\nabla \times \vec{E}$. El resultado de estas transformaciones

$$\int_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Como esto debe de suceder para todas las superficies s, se desprende que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que es la forma diferencial de la ley de Faraday. Esta es la generalización requerida de $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, que era válida para campos estáticos. (Medios móviles y otras condiciones sutiles requieren un tratamiento más cuidadoso, que está más allá del alcance de este texto.)"

Con sorpresa vemos que para estos autores la ley de Faraday no es un tópico trivial y prefieren no planteárselo exhaustivamente. Esto muestra al menos una cosa: la ley de Faraday no es obvia. Parece entonces más conveniente considerar otros ejemplos en detalle para poder apreciar los posibles orígenes de la confusión que se ha planteado, antes de iniciar una explicación sobre los fenómenos de inducción electromagnética.

Regresando al libro de Halliday-Resnick considérese el siguiente ejemplo [op. cit. pags. 232-233]:

"Una varilla de cobre de longitud L gira con una frecuencia angular ω en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, como se muestra en la figura. Determinar la fem ε generada entre los dos extremos de la varilla."

La solución que ofrecen es la que se cita a continuación.

"Si un alambre de longitud dL se mueve con una velocidad $\vec{v}$ perpendicularmente al campo $\vec{B}$, se genera una fem de movimiento $d\varepsilon$ –los autores se basan para expresar el siguiente resultado en que, según ellos, cuando un conductor de longitud ℓ se mueve atravesando un campo uniforme $\vec{B}$ a una velocidad $\vec{v}$ aparece una fem de movimiento dada por $\varepsilon = B\ell v$, si l, $\vec{B}$ y $\vec{v}$ son mutuamente perpendiculares (¿Por qué no usaron este argumento para resolver su ejemplo que primero se citó?)– determinada por

$$d\varepsilon = Bv d\ell$$

"La varilla de la figura puede subdividirse en un conjunto de elementos de longitud $d\ell$, cada uno de los cuales se mueve con una rapidez lineal $\omega\ell$. Cada elemento perpendicular a $\vec{B}$ y la dirección de su movimiento es perpendicular a $\vec{B}$, de tal forma que como las contribuciones $d\varepsilon$ de cada elemento estan en "serie",

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^L Bv d\ell = \int_0^L B(\omega\ell)d\ell = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

"Un segundo enfoque sería considerar que el flujo encerrado por el sector aOb de la figura en un instante dado es

$$\phi_B = BA = B(\frac{1}{2}L^2\theta)$$

ya que se puede demostrar que el área del sector es $\frac{1}{2}L^2\theta$.

"Calculando la derivada respecto del tiempo, se obtiene

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{1}{2}BL^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

"Por la ley de Faraday, esta cantidad es precisamente la magnitud de ε y concuerda con el resultado recién obtenido."

Al examinar la primera solución de este ejemplo vemos que el origen de los problemas se encuentra en entender el comportamiento electromagnético de los cuerpos en movimiento en presencia de un campo magnético.

Encontramos también, en tal ejemplo, otro elemento de confusión en el estudio de la ley de Faraday. Este se expresa en la manera de aplicar dicha ley. Nótese que hasta ahora se ha usado la ley de Faraday en forma integral en términos de circuitos cerrados, y así la tratan también los autores de este ejemplo, pero en este caso ellos la aplican sobre un circuito abierto.

Surgen entonces algunas preguntas: ¿es válido aplicar la ley de Faraday a circuitos abiertos? suponiendo que es así, ¿por qué no se usa tal modalidad para explicar la presencia de un campo eléctrico en un conductor que se mueve linealmente en el seno de un campo magnético, en vez de apelar a la fuerza de Lorentz tal como lo hacen Halliday-Resnick, o como hemos visto lo hacen Alonso-Finn?. Es claro que si se acepta la aplicabilidad de la ley de Faraday para circuitos abiertos debería darse una sólida explicación con argumentos claros y precisos.

Es importante notar que el enfoque en términos del flujo magnético, presentado por Halliday-Resnick, conduce a dos preguntas: ¿está justificado en este caso hablar de un flujo del campo magnético? si es así ¿por qué no se ofrece la misma solución para el caso en que la varilla se mueve linealmente?

Como puede verse, con lo hasta aquí presentado, es preciso un estudio más cuidadoso de la ley de Faraday. Y para que se aprecien aún más las dificultades que pueden surgir con la aplicación de esta ley, presentamos por último un ejemplo basado en un dispositivo estudiado por el propio Faraday y que se conoce con el nombre de generador homopolar, el cual puede considerarse como una extensión del antes citado. Tomaremos en cuenta la opinión de Feynman[6] sobre las experiencias en el generador homopolar para ilustrar el tipo de dificultades a las que aludimos. Sus observaciones al respecto fueron las siguientes:

"Ahora daremos algunos ejemplos, que debemos, en parte, a Faraday, los cuales demuestran la importancia de comprender claramente la distinción entre los *dos* efectos (sic) responsables (las cursivas son nuestras) de la fem inducida. En nuestros ejemplos intervienen situaciones en las cuales la "regla de flujo" no se puede aplicar –ya sea porque no existe conductor o porque la trayectoria tomada por las corrientes se mueve por un volumen extenso de un conductor.

"Empecemos dejando establecido un punto importante: la parte de la fem que proviene del campo $\vec{E}$ no depende de la existencia de un alambre físico (como la parte $\vec{v} \times \vec{B}$). El campo $\vec{E}$ puede existir en el espacio libre y su integral de línea alrededor de cualquier línea imaginaria fija en el espacio es la derivada con respecto del flujo $\vec{B}$ a través de esa línea.

"Ahora describiremos una situación en la cual el flujo a través del circuito no varía pero, sin embargo existe una fem. La figura 17-2 –un generador homopolar– muestra un disco conductor ... Cuando el disco gira, el "circuito", en el sentido del lugar en el espacio donde están las corrientes, siempre es el mismo. Pero la parte del "circuito" en el disco está en material que se mueve. Aunque el flujo a través del circuito es constante, hay una fem, como se puede observar por la deflección del galvanómetro. Claramente, existe un caso donde la fuerza –de Lorentz– $\vec{v} \times \vec{B}$ en el disco en movimiento da lugar a una fem que no se puede igualar a una variación de flujo."

Comentaremos en el siguiente capítulo esta opinión de Feynman. Por lo pronto debe señalarse, que a partir de lo que él escribe se concluye que en su ejemplo la presencia de una corriente eléctrica no se explica por la ley de Faraday. Feynman dice en su libro: "La física correcta siempre esta dada por las dos leyes básicas", que según él son: la "fuerza de Lorentz" y la "regla de flujo de Faraday".

Con esto parecería ser que todo queda resuelto, simplemente hay que distinguir cuando el flujo magnético encerrado por un circuito varía con el tiempo o cuando el circuito se mueve.

Pero hay físicos que les gustaría explicar las cosas a partir de un mínimo de leyes y bien podrían objetar el punto de vista de Feynman. En este sentido se encuentra la presentación que hace Wangsness[6] de la ley de Faraday. Aunque esta es extensa, creemos que es preciso citarla porque en ella se consideran ideas que deben ser analizadas con cuidado. Dicha presentación, de la cual tomaremos la parte referida a medios en movimiento por ser la que presenta mayor interés, es la siguiente.

"Muchas de las aplicaciones más interesantes y prácticas de la ley de Faraday ocurren cuando una parte o todo el circuito o "medio" se encuentra en movimiento. Si se toma una trayectoría de integración C que pase a través de algunos puntos específicos del medio, resulta que al moverse estos puntos también se mueve C, y por esa razón ϕ puede variar también; simultáneamente, podría darse el caso de que $\vec{B}$ también estuviera variando en el tiempo. Por lo tanto, para poder evaluar $\frac{d\phi}{dt}$ se debe comparar el flujo que pasa a través de la superficie encerrada por la forma final de C, con el enlazado por la forma original de C; es decir se necesita evaluar

$$\frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot \vec{da}(t+\Delta t) - \int_{S(t)} \vec{B}(t)\cdot\vec{da}(t)\right] \quad (17-20)$$

La figura 17-6 ilustra las posiciones inicial y final de la curva limitante C. El elemento $\vec{ds}$ de C(t) se ha desplazado una cantidad $v\Delta t$ como resultado del movimiento. En el proceso barre el elemento de superficie

$$\vec{da}_s = \vec{ds} \times \vec{v}\Delta t \quad (17-21)$$

que se muestra sombreado. Se observa también que $\vec{da}_s$ es una porción de la superficie S_s lateral, que conecta C(t) con C(t+Δt), de manera que la superficie total

$$S_{tot} = S(t) + S_s + S(t+\Delta t) \quad (17-22)$$

es la frontera de un volumen "cerrado" a través del cual el flujo total de $\vec{B}$ es igual a cero, de acuerdo con (16-5) -$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{da} = 0$. Para poder evaluar el primer término entre corchetes en (17-20) se aplica al volumen de la figura 17-6 al tiempo t+Δt. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\oint_{S_{tot}} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot \vec{da} &= 0 \\ &= -\int_{S(t)} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot \vec{da}(t) + \int_{S_s} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot \vec{da}_s + \\ &+ \int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot \vec{da}(t+\Delta t)\end{aligned} \qquad (17-23)$$

donde el signo negativo del primer término surge debido a que $\vec{da}(t)$ apunta hacia el volumen...Además, todos los valores de $\vec{B}$ se toman en t+Δt, mientras que las superficies se expresan en función de sus valores que definen la forma de la figura que se muestra en la figura 17-6. Dado que se está tendiendo al límite $\Delta t \longrightarrow 0$ como meta final, resulta apropiado pensar en desarrollar $\vec{B}$ en una serie de potencias

$$\vec{B}(t+\Delta t) = \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\Delta t + \cdots$$

Conservándose explicitamente sólo los términos de primer orden en Δt. Si ahora se sustituye esta expresión solamente en la primera y segunda integrales de (17-23) y se utilizan (17-21), (1-23) y (1-29) -se refiere a la propiedad de anticonmutatividad del producto vectorial y al triple producto vectorial, respectivamente- se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot \vec{da}(t+\Delta t) - \int_{S(t)} \vec{B}(t)\cdot \vec{da}(t) = \\ \Delta t\left\{\int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \vec{da}(t) + \oint_{C(t)} [\vec{B}(t)\times \vec{v}(t)]\cdot \vec{ds}\right\} + \\ + \textit{Terminos del orden de } (\Delta t)^2\end{aligned} \qquad (17-24)$$

con lo que ha sido posible, después de sustituir (17-21), escribir la integral sobre S_s de (17-23) como una integral sobre C, es decir, la curva limitante original. Si ahora se sustituye (17-24) en (17-20) y se hace que $\Delta t \longrightarrow 0$, los términos que originalmente eran de orden de $(\Delta t)^2$ y superiores desaparecerán, quedando

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \vec{da} + \oint_C (\vec{B}\times \vec{v})\cdot \vec{ds} \qquad (17-25)$$

El primer término, ya es el resultado de la variación de $\vec{B}$, de modo que es el segundo término el que resulta debido al movimiento. Si ahora se sustituye (17-25) en (17-3) y en (17-8) -se refiere a las ecuaciones $\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$ y $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$, respectivamente-, se obtiene la fem inducida y la integral de línea del campo eléctrico *en el sistema en movimiento.* Si a estas cantidades se les denota con una prima y se vuelve a utilizar (1-23), se encuentra que

$$\varepsilon' = \oint_C \vec{E}'\cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \oint_C (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{s} \qquad (17-26)$$

que, con la ayuda de (1-67) puede expresarse como

$$\int_S \nabla\times(\vec{E}' - \vec{v}\times\vec{B})\cdot da = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} \qquad (17-27)$$

de manera que

$$\nabla\times(\vec{E}' - \vec{v}\times\vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (17-28)$$

ya que (17-27) es aplicable a cualquier curva limitante.

"Es importante recordar que estas tres últimas ecuaciones numeradas contienen cantidades referidas a y medidas en sistemas *diferentes.* Las cantidades primas son aquellas que serían observadas por alguien en el sistema en movimiento y, por tanto, en reposo con respecto a él. Por otro lado, las cantidades $\vec{v}$, $\vec{B}$ y $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ serían medidas por un observador estacionario en el sistema coordenado sin primas...estó es así porque la derivación se basó esencialmente en la figura 17-6 y todo se escribió desde el punto de vista de alguien que observa la curva C en movimiento."

A continuación citamos su opinión sobre el problema del generador homopolar.

"*Generador homopolar.* Faraday inventó este interesante aparato -hecho estrictamente falso si se consulta la obra que se cita de Faraday en el segundo capítulo-. Considérese un disco conductor circular, plano y de radio a que gira a velocidad constante, ω, en un $\vec{B}$ uniforme que es perpendicular al plano del disco. La situación se ilustra en la figura 17.12 -ver figura siguiente- donde se han tomado tanto $\vec{B}$ como ω apuntando hacia el papel. Existen contactos deslizantes en el eje central O y en un punto P en el borde del disco. Se completa el circuito con cables conductores y una resistencia R. En un punto cuyo vector de posición con respecto al origen en el centro es $\vec{r}$, la velocidad será $\vec{v} = \omega\times\vec{r}$ y estará dirigida tangencialmente como se indica. Por lo tanto, existirá un campo eléctrico de movimiento

$$\vec{E}' = (\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{B}$$

dirigido radialmente hacia fuera del disco, que se encuentra a partir de (17.32) –se refiere a la ecuación $\vec{E}'_m = \vec{v} \times \vec{B}$ que llama campo eléctrico de movimiento–.

"Cuando se sustituye esto en (17.31) –se refiere a la ecuación $\varepsilon'_m = \oint_c \vec{E}' \cdot \vec{ds} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{ds}$ que llama fem de movimiento*– se puede observar que la única contribución a la fem inducida provendrá de la parte del disco entre O y P, y dado que $\vec{ds} = \vec{dr}$, se tendrá $\varepsilon' = \int \vec{E}' \cdot \vec{ds} = \int \omega B r dr = \frac{1}{2}\omega B a^2$.

"La corriente en el circuito externo tendrá la dirección que se indica y que corresponde al sentido general de $\vec{E}'$."

Resulta importante subrayar que el resultado, idéntico al del último ejemplo de Halliday-Resnick, se deduce directamente de la ley de Faraday. Si se reflexiona un poco, todos los ejemplos antes citados pueden ser modelados como generadores homopolares, tomando las debidas precauciones, y aplicar la metodología mostrada por Wangsness.

Así pues, notamos que aparentemente la presentación realizada por Wangsness de la ley de Faraday es muy general y suficientemente clara, además de que ofrece una visión unificada de los fenómenos de inducción electromagnética con base en dicha ley, contrariamente al punto de vista de Feynman†.

Sin embargo, hay detalles en la exposición de Wangsness que son susceptibles de un cuestionamiento. Por principio de cuentas obsérvese que el "flujo magnético" ϕ está representado por una **funcional**, dicha funcional depende de dos parámetros pues se esta tratando con una integral de superficie‡. El que Wangsness no reconozca este hecho provoca

* Esta ecuación y la (17-32) las deduce Wangsness a partir de la ecuación (17-26) cuando considera campos magnéticos independientes del tiempo, tales deducciones son muy discutibles como se mostrará más adelante en el texto.

† Queremos mencionar la existencia de un artículo dedicado al problema que se ha venido planteando suscrito por P.J. Scanlon, R.N. Henriksen, y J.R. Allen[7]: Approaches to Electromagnetic Induction. En este artículo se muestran algunas de las inconsistencias que hemos presentado, pero los autores cometen el error que a continuación indicamos en relación a la exposición de Wangsness y lo elevan a rango de una definición.

‡ En este sentido es preciso señalar que la funcional que representa al "flujo magnético" propiamente es el resultado de la integración de una 2-forma diferencial tridimensional sobre una superficie, pero que por motivos históricos se ha venido trabajando como la integral de superficie de un campo pseudovectorial. Al respecto recomendamos la lectura del libro de Bernard Jancewicz[8]: Multivectors and Clifford algebra in electrodynamics,

que él calcule la derivada *débil* (ver por ejemplo el libro de Kolmogorov y Fomín[9]) de tal funcional como si sólo dependiera de un parámetro. La necesidad de realizar este cálculo induce a Wangsness a aplicar incorrectamente el teorema de Gauss (que hoy en día se considera como un caso particular del teorema de Stokes) con el objeto de relacionar una integral de superficie con una integral de volumen, pues confunde las variables y los parámetros que intervienen en la descripción de los "cuerpos" geométricos "generados" por el movimiento del circuito C, ya que, con propiedad, para poder definir una superficie son necesarios dos parámetros independientemente del número (mayor o igual que dos) de variables utilizadas en la representación geométrica de los fenómenos que se deseen describir –Wangsness lo reconoce en la ecuación (17-21)–, luego, el hecho de que Wangsness lleve a cabo un análisis del fenómeno de inducción desde el marco conceptual de la relatividad galileana donde el tiempo juega el papel de un parámetro "externo" a las sucesiones de acontecimientos naturales, determina que los cuerpos geométricos generados por el movimiento de C los "vea" en el espacio tridimensional, y el error se manifiesta cuando parametriza dos superficies con el tiempo: S(t) y S($t + \Delta t$), siendo que, en este caso, el tiempo debe jugar el papel de un *índice*, y esa confusión le da pie para hablar de la superficie cerrada S_{tot} e introducir la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ o equivalentemente, tomando en cuenta que se va a usar sobre una superficie cerrada

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{B}) dv = \int_s \vec{B} \cdot \vec{da} = 0$$

y dado que la superficie cerrada S sobre la cual se aplica el teorema de Gauss por lo ya dicho debe de considerarse independiente de cualquier parámetro "externo", esto lo aprovecha Wangsness para establecer de manera aproximada la ecuación (17-24), pero, y es aquí donde como dijimos esencialmente radica el error, al aproximar $\vec{B}(t + \Delta t)$ con ayuda de $\vec{B}(t)$ por medio de una serie de Taylor, no se da cuenta que ahora esta tratando al "parámetro" t como una *variable* más de la cual depende $\vec{B}$ (obsérvese que si siguiera Wangsness tratando a t como un parámetro el desarrollo correcto de la serie de Taylor a primer orden lo conduciría a una *derivada convectiva*, pero ahora existiría un nuevo término que obstaculizaría la deducción del resultado (17-27)), y eso quiere decir que $\vec{B}$ es tratado como un campo vectorial en un espacio tetradimensional y que consecuentemente la superficie de integración debe estar inmersa en tal espacio, luego, si se reflexiona sobre lo que esto significa se notará que la deducción de Wangsness es mucho más complicada de lo que

particularmente la sección 11 del primer capítulo.

él la muestra y ante todo contradictoria; sin embargo, como Wangsness no se dió cuenta de ello continuó con su deducción. En lo que se refiere a la aplicación de sus resultados en el generador homopolar nótese que la hipótesis principal de inhomogeneidad espacio-temporal de $\vec{B}$ que él usa para deducir tales resultados no la satisfacen las condiciones de contorno que impone al problema. Entonces su explicación sobre la "fem de movimiento" en el generador homopolar con la ecuación (17-31) es incorrecta. Por otra parte -y con esta observación, que desarrollaremos en el siguiente capítulo, hacemos referencia a todos los autores citados- el uso de las ecuaciones (16-5) y (17-20) también es incorrecto, pues estas ecuaciones son consideradas por Wangsness como fundamentales e independientes para explicar los fenómenos electromagnéticos, dando a entender con ello que esos fenómenos y otras propiedades electromagnéticas no están relacionados. ¡Pero esto claramente no es así! ya que una descripción de los fenómenos electromagnéticos en el marco de la electrodinámica clásica requiere del conjunto de relaciones conocidas como *ecuaciones de Maxwell*. Y es precisamente la falta de reconocer la necesidad de trabajar con el *conjunto* de esas relaciones el origen de todas las confusiones con las que hemos venido tropezando; además de que pone de manifiesto que no se han considerado con cuidado las implicaciones que se siguen de suponer válidas las ecuaciones de Maxwell como representaciones adecuadas de los fenómenos electromagnéticos. Más adelante esperamos que queden claras estas últimas afirmaciones. En tanto, queremos señalar la resonancia que han adquirido errores *como* los que se han notado en el caso de Wangsness. Por un lado -aunque aún no ha sido analizada pero que lo será en el siguiente capítulo- están los relacionados a la posición de Feynman, encontrándose en una posición intermedia a la de él y a la de Wangsness argumentos con sentido práctico sostenidos en el libro de Tamm[10](Sección 8.3 Ohm's law and electromagnetic induction in moving conductors. Unipolar induction. Páginas 588-594). Por otro lado hay una larga lista de libros de texto en los que se puede verificar la existencia de los mismos argumentos manejados por Wangsness, salvo pequeñas diferencias, figurando entre los más destacados: Sommerfeld[11](Sección 34 Minkowski's equations for moving media. Páginas 285-290), Stratton[12](Problema 28, página 348), Abraham[13](Sección 6 Faraday's law of induction. Páginas 145-148), Panofsky-Phillips[14](Sección 9-3 Faraday's law for moving media. Páginas 160-163), Jackson[15](Sección 6.1 Faraday's law of induction. Páginas 210-213), Shadowitz[16] (Sección 11-1 Faraday's law. Páginas 390-392), Eyges[17] (Sección 11.5 The Lorentz force density. Páginas 180-181), Landau-Lifshitz[18](Volumen 8 Sección 63 Motion of a conductor in a magnetic field. Páginas 217-222). Entonces después de haber analizado algunos ejemplos en relación con los fenómenos de inducción electromagnética, haciendo notar el uso injustificado de conceptos, tal como el de flujo magnético, y la aplicación incorrecta de algunas ecuaciones del electromagnetismo, es necesario proponer una explicación clara y general de dichos fenómenos que permita resolver sin confusiones los ejemplos que aquí han sido tratados.

Esta necesidad teórica y las consecuencias que resulten en la medida en que se satisfaga, junto a la problemática que se ha presentado, serán los objetos sobre los cuales nos concentraremos en los siguientes capítulos. Por el momento hay que repetir que lo que se denomina por ley de Faraday no resulta ser algo obvio y fácil de comprender.

Notas al capítulo 1

[1] Halliday D., Resnick R., 1990 Física Parte 2 Décima impresión (México: Compañia Editorial Continental S.A.)

[2] Alonso M., Edward J.Finn, 1976 Física Volumen II: Campos y ondas (México, D.F.: Fondo Educativo Interamericano S.A.)

[3] Purcell E.M., 1980 Electricidad y Magnetismo (Barcelona: Editorial Reverté S.A.)

[4] Reitz John R., Milford Frederick J., Christy Robert W., 1979 Foundations of electromagnetic theory (U.S.A.:Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Third edition.)

[5] Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M., 1972 The Feynman Lectures on Physics Mainly Electromagnetism and Matter (Fondo Educativo Interamericano S.A. Edición Bilingüe.)

[6] Wangsness R.K., 1989 Campos Electromagnéticos (Méxicc, D.F.: Editorial Limusa S.A.)

[7] P.J. Scanlon, R.N. Henriksen, and J.R. Allen, Am. J. Phys. **37**, 1969, 698.

[8] Jancewicz Bernard, 1988 Multivectors and Clifford algebra in electrodynamics (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.)

[9] Kolmogorov A.N. y Fomín S.V., 1975 Elementos de la teoría de las funciones y del análisis funcional (Moscú: Editorial Mir.)

[10] Tamm I.E., 1979 Fundamentals of the theory of electricity (Mir Publishers Moscow.

Translated from the 1976 Russian edition.)

[11] Sommerfeld Arnold, 1964 ELECTRODYNAMICS Lectures on theoretical physics, Vol. III (New York: Academic Press, Inc. Fifth printing, 1971)

[12] Stratton Julius Adams, Electromagnetic theory (New York and London: McGraw-Hill Book Company, Inc. Copyright 1941.)

[13] Abraham Max, The classical theory of electricity and magnetism (New York: Hafner Publishing Company, Inc. Second edition, revised by Richard Becker. The English edition has been prepared to conform with the fourteenth German edition, 1949. Printed U.K.)

[14] Panofsky Wolgang K.H., Phillips Melba, Classical electricity and magnetism (Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Second edition. Copyright 1962.)

[15] Jackson John David, 1975 Classical electrodynamics (John-Wiley and Sons. Second edition.)

[16] Shadowitz Albert, 1975 The electromagnetic field (Tokio: McGraw-Hill Kogakusha, LTD.)

[17] Eyges Leonard, 1980 The classical electromagnetic field (New York: Dover Publications, Inc. Dover edition is an unabridged and corrected republication of the work originally published in 1972.)

[18] Landau L.D., Lifshitz E.M., 1984 Electrodynamics of continuous media, Volume 8 of course of theoretical physics (U.K.: Pergamon Press Second revised edition. Reprinted (with corrections) 1993.)

CAPÍTULO 2

"LEY DE FARADAY"

El objetivo de esta parte del trabajo es mostrar una solución a la problemática planteada en el primer capítulo. Dicha problemática surgió de analizar el fenómeno de inducción electromagnética en circuitos conductores que se mueven en el seno de un campo electromagnético. Entonces, por lo visto en el capítulo anterior, es necesario cambiar de marco conceptual si no se quiere caer en los mismos errores. Con este fin sugerimos al lector la consulta del apéndice de esta tésis para que conozca como nosotros entendemos los conceptos que comúnmente se consideran en la teoría electromagnética clásica y la manera en que los relacionamos, y así pueda ubicar conceptualmente el contenido de este capítulo. Por otra parte, en la presente exposición se pondrá de manifiesto la necesidad de una reflexión más seria sobre la relación entre física y matemática como un elemento muy importante en la comprensión de los fenómenos naturales.

§1 El fenómeno de inducción electromagnética. Las ecuaciones de Maxwell.

Resulta entonces conveniente tratar de trazar un camino que nos libere del laberinto de confusiones que han surgido en relación con la "ley de Faraday". Partamos del origen mismo de estas confusiones. Como señalamos al final del capítulo anterior, ese origen radica en no comprender que el sistema, aunque se admite universalmente, de las ecuaciones de Maxwell **como un todo**, con determinadas condiciones de contorno, es el que sirve para explicar y describir los fenómenos electromagnéticos en el marco de la electrodinámica clásica. Así que un error inmediato es tratar de explicar algunos de estos fenómenos con sólo parte o una de tales ecuaciones, y si este error no es corregido nos deslizaremos inexorablemente a situaciones como la ya mostrada.

¿Por qué entonces –cabe la pregunta– el estudio de los fenómenos electromagnéticos con base en un esquema fragmentario de las ecuaciones de Maxwell ha sido tan exitoso en sus aplicaciones electromecánicas?. Una respuesta a este hecho es que en la medida en que el estudio y las aplicaciones de la teoría electromagnética no necesitan referirse a situaciones relativistas y/o pueden "absolutizar" las explicaciones en términos de un sistema de referencia debido a que las condiciones de contorno en muchos casos poseen una estabilidad estructural que permite considerarlas como invariables y que es lo que facilita ese proceso de referencia absoluto (por ejemplo cuando se calcula la intensidad de la "fuerza electromotriz" en una bobina que gira en el seno de un "campo magnético" el problema se plantea suponiendo conocida la dependencia espacio-temporal de dicho campo, lo que quiere decir que la respuesta electromagnética de la bobina sobre las condiciones primarias es despreciada contemplándose sólo los efectos de atenuación en la corriente por la autoinductancia de la misma, y la causa de la corriente eléctrica provocada en la bobina que es el movimiento relativo entre esta y las fuentes del campo no es considerado como tal sino en términos de características especiales de un movimiento "absoluto" con respecto (aunque suene contradictorio) al sistema de referencia desde el cual se determina el campo magnético, dado que en la práctica es muy corriente y más fácil "fijar" las fuentes de dicho campo), entonces es posible enfocar los fenómenos electromagnéticos desde esa perspectiva. Pero cuando se presentan exigencias que obligan a tomar en cuenta los aspectos relativistas con más cuidado y es necesario reconocer la importancia de la respuesta de un sistema electromagnético sobre las condiciones de contorno iniciales, ese marco conceptual se ve superado y estamos obligados a reconsiderarlo. Por tanto, si admitimos que el **conjunto** de las ecuaciones de Maxwell representan adecuadamente los fenómenos electromagnéticos debemos de analizar las implicaciones y restricciones que esto conlleva.

Creemos conveniente empezar a andar el camino del modo más natural: históricamente. Iniciemos, en consecuencia, con las palabras de Faraday y Maxwell en relación al fenómeno de inducción electromagnética.

Faraday[1]:

"256.Aunque requerirá mayor experimentación y probablemente investigación experimental y matemática más minuciosa, antes de que pueda determinarse el modo exacto de acción entre un imán y un metal que se mueven uno con respecto del otro, muchos de los resultados aparecen suficientemente claros y simples para permitir una enunciación en forma más general:

"Si un trozo de alambre se mueve de manera de cortar una curva magnética, se origina una fuerza que tiende a producir una corriente eléctrica a través de él; pero esta corriente no puede existir a menos que se hagan previsiones en los extremos del alambre para su descarga y renovación."

Maxwell[2]:

"541...La concepción que Faraday tuvo de la continuidad de las líneas de fuerza previene la posibilidad de su repentina aparición en lugares donde antes no existían. Por tanto, si el número de líneas que pasan a través de un circuito conductor cambia, puede ser porque el circuito se mueve cruzando las líneas de fuerza, o porque las líneas de fuerza se mueven cruzando el circuito. En ambos casos una corriente es generada en el circuito...Sólo hasta que las definiciones de fuerza electromotriz, Arts.69†,274, y sus medidas se precisaron, es que nosotros podemos enunciar completamente la verdadera ley de inducción magneto-eléctrica en los siguientes términos:-

La fuerza electromotriz total que actua en todo un circuito en cualquier instante se mide por la razón en que decrecen el número de líneas de fuerza magnética que pasan a través de él."

Ahora resulta conveniente citar las palabras con las que Einstein[3] inició su artículo "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", para darnos cuenta de como la unificación de los fenómenos electromagnéticos condujo a Einstein a proponer su teoría especial de la relatividad.

"Sabido es que al aplicar la electrodinámica de Maxwell –tal y como se suele entender hoy día– a cuerpos en movimiento, aquella conduce a ciertas asimetrías que no parecen ser inherentes a los fenómenos. Piénsese, por ejemplo, en la acción electrodinámica recíproca de un imán y un conductor. Aquí, el fenómeno observable depende sólo del movimiento relativo del conductor y el imán, mientras que la concepción usual establece una distinción tajante entre los dos casos en que uno u otro de los cuerpos se halla en movimiento. Pues si el imán se halla en movimiento y el conductor en reposo, en las proximidades del imán surge un campo eléctrico de cierta energía que produce una corriente en aquellos lugares donde están situadas las partes del conductor. Pero si el imán está en reposo y el conductor se halla en movimiento, no aparece ningún campo eléctrico en las proximidades del imán. En el conductor, sin embargo, encontramos una fuerza electromotriz a la que, en sí, no corresponde energía alguna, pero que da lugar –suponiendo que el movimiento relativo es igual en ambos casos– a corrientes eléctricas de la misma dirección e intensidad que las producidas por las fuerzas eléctricas del caso anterior.

"Ejemplos de esta especie, junto con los intentos infructuosos de descubrir algún movimiento de la Tierra con relación al "medio lumínico", obligan a sospechar que ni los fenómenos de la electrodinámica ni los de la mecánica poseen propiedades que se

† 69.La fuerza electromotriz a lo largo de un arco dado AP de una curva se mide numéricamente por el trabajo realizado por la intensidad eléctrica sobre una unidad de electricidad positiva transportada a lo largo de la curva desde A, el inicio, a P, el final del arco.

correspondan con la idea de reposo absoluto. Indican más bién, como ya ha sido demostrado para magnitudes de primer orden, que las mismas leyes de la electrodinámica y de la óptica son válidas en todos los sistemas de referencia para los que son ciertas las ecuaciones de la mecánica."

Y para que se valoren adecuadamente la importancia y el significado histórico del papel que jugaron los fenómenos de inducción electromagnética en el desarrollo de la relatividad, citamos las palabras escritas de puño y letra por Einstein que datan de 1919 o poco después en un trabajo titulado: *Ideas y métodos fundamentales de la teoría de la relatividad, presentados tal y como se desarrollaron*, y que se encuentran ahora en los archivos Einstein del Princeton Institute for Advanced Study[4]

"(15) *La idea fundamental de la teoría de la relatividad general en su forma original.* El siguiente [en una parte anterior de este manuscrito] pensamiento, no mencionado hasta ahora, sobre el [experimento de] Faraday relativo a la inducción electromagnética jugó para mí un papel esencial en la construcción de la teoría de la relatividad especial.

"De acuerdo con Faraday, durante el movimiento relativo de un imán con respecto a un circuito conductor se induce en el último una corriente eléctrica. Es igual que se mueva el imán o que se mueva el conductor; de acuerdo con la teoría de Maxwell-Lorentz, sólo cuenta el movimiento relativo. Sin embargo, la interpretación teórica del fenómeno en estos dos casos es completamente distinta...

"Para mí era insoportable el pensamiento de que uno está tratando aquí con dos casos fundamentalmente diferentes. La diferencia entre estos dos casos no podía ser una diferencia real, sino, según mí convicción, solamente una diferencia en la elección del punto de referencia. Visto desde el imán no había ciertamente campos eléctricos, visto desde el circuito conductor ciertamente había uno. La existencia de un campo eléctrico era por tanto relativa, dependiendo del estado de movimiento del sistema de coordenadas que se estaba usando, y solamente se podría conceder una cierta realidad objetiva a *los campos eléctrico y magnético tomados en su conjunto*, totalmente aparte del estado de movimiento relativo del observador o del sistema de coordenadas. El fenómeno de inducción electromagnética me obligó a postular el principio de la relatividad (especial). [Nota a pie de página:] La dificultad que había que superar radicaba en la constancia de la velocidad de la luz en el vacío, que yo había pensado en un principio que tendría que abandonar. Solamente después de haber buscado a tientas durante años me di cuenta que la dificultad se encuentra en la arbitrariedad de los conceptos cinemáticos.

"Cuando estaba trabajando en el año 1907 en un resumen sobre la teoría especial para el *Jahrbuch für Radioaktivität und Elektronik*, tuve que intentar modificar la teoría de la gravitación de Newton de tal forma que encajase en la teoría [de la relatividad]. Algunos intentos que hice en esta dirección me sugirieron la posibilidad de llevar a cabo esta empresa, pero no me satisficieron porque tenían que estar basados en hipótesis sin base física. En aquel momento se me ocurrió la idea más feliz de mi vida en la forma siguiente: el campo gravitatorio, exactamente igual que el caso del campo eléctrico producido por la inducción electromagnética, tiene solamente una existencia relativa. *Porque si uno considera a un observador en caída libre, por ejemplo, desde el tejado de una casa, no existe campo gravitatorio para él durante su caída, al menos en su vecindad inmediata.*" (Con cursivas en el original).

Con base en todo lo anterior, es conveniente proponer una noción alternativa en lo referente al fenómeno de inducción electromagnética. Para esto debemos tener presente la relación íntima entre el conjunto de las ecuaciones de Maxwell y la relatividad especial, relación que, desde nuestra condición histórica, se nos antoja casi natural, pues como señalamos en el apéndice, si se admite que la noción de campo eléctrico representa el conjunto de las condiciones asociadas con la propiedad de carga eléctrica, y que la noción de campo magnético representa al conjunto de modificaciones de tales condiciones debido al movimiento de las cargas eléctricas, cuyas características tanto de movimiento como de distribución dependen del sistema de referencia desde el cual se observen, para estar acordes con esta situación relativista que intrínsecamente acompaña la unificación de los fenómenos electromagnéticos es necesario referirnos al concepto de campo electromagnético entendiendolo como: un campo eléctrico y su modificación relativista, medidos desde algún sistema de referencia. En este sentido, la herramienta matemática que hay que usar para representar al campo electromagnético debe de mostrar explícitamente tales propiedades. Entonces, estrictamente no es adecuado trabajar en términos vectoriales (en el sentido de vector como tensor de primer rango y no como espacio vectorial) porque ello no da cuenta, por ejemplo, de que si en un sistema de referencia inercial **S** se observa un campo eléctrico debido a un cuerpo cargado que se encuentra en reposo relativo en **S**, en otro sistema de referencia inercial **S'** que se mueva con respecto al primero, se observe un campo eléctrico y se infiera por el movimiento de cargas de prueba un campo magnético, pues cualquier transformación invertible que respete esos objetos matemáticos y que conecte las observaciones de los dos sistemas de referencia, predeciría que al pasar de **S** a **S'** sólo debería observarse el campo eléctrico asociado a la transformación del vector correspondiente, entrando en contradicción con la experiencia; por otra parte, al usar tal transformación para pasar de S' a S las predicciones indicarían que si consideramos al campo electromagnético como la superposición *vectorial* de campos eléctrico y magnético, deberíamos observar en S tanto un campo eléctrico como uno magnético asociados a las transformaciones de sus respectivas representaciones vectoriales, lo cual evidentemente contradice las condiciones supuestas en S. Resulta, por ello, casi increíble que se nos muestre al campo electromagnético como una entidad que se puede representar en términos de dos campos vectoriales –campo eléctrico y campo magnético– y que al mismo tiempo cuando se nos quieren explicar fenómenos electromagnéticos de manera relativista sobre cuerpos en movimiento se utilice una transformación de esos campos que no corresponde a transformación alguna de vectores. Esto lo puede verificar el lector en intentos como el de Wangsness, que con base en una representación vectorial integral de parte del conjunto de las ecuaciones de Maxwell "deduce" la regla "galileana" de como se transforma el campo vectorial eléctrico; sugerimos se consulten las obras citadas en el capítulo anterior con respecto a este punto y se reflexione sobre por qué no se mencionan ni se usan métodos semejantes para "deducir" la regla de transformación para el campo (pseudo)vectorial magnético. Otro elemento, y este de peso, con el que se puede demostrar que una representación vectorial de los fenómenos electromagnéticos, admitidas las ecuaciones de Maxwell para este objetivo, no compagina con estas últimas, es que su reconocimiento como leyes para cualquier sistema de referencia inercial impone que su invariancia de forma sólo pueda respetarse tratando su transformación entre tales sistemas de referencia como componentes de ecuaciones tensoriales, y esto el lector puede verificarlo en el mismo artículo que se ha referido de Einstein, aunque cabe comentar que en la sección dedicada a las ecuaciones de Maxwell en ausencia de medios materiales él omite parte de las mismas, pero si las utiliza, y hace referencia a una notación vectorial.

Así pues, lo anterior sugiere que una representación matemática adecuada para los fenómenos electromagnéticos deberá buscarse en una estructura algebraica que de cuenta de su aspecto relativo, es decir –como ya hemos comentado pero que lo reiteramos con el fin de que quede clara la idea con la que trabajamos– los hechos indican que el campo electromagnético es una entidad que produce efectos mecánicos cuya explicación y descripción dependen del estado de movimiento del observador, lo que implica que las condiciones que el campo representa son también relativas, y esto se debe a su dependencia espacio-temporal con respecto al movimiento de las cargas eléctricas, por tanto, en última instancia es el movimiento relativo entre las cargas asociadas con ese campo y el observador el que determina la manera en que se explican y describen los efectos del campo; además dicha estructura matemática debe ser suceptible a operaciones de derivación para que puedan expresarse cambios en las condiciones que el campo representa. Ahora bien, bajo la hipótesis de que esas condiciones se distribuyen y cambian continuamente en el espacio-tiempo y que sus efectos pueden explicarse en términos de una componente ligada directamente con la propiedad de carga eléctrica de la materia y su distribución en el espacio-tiempo: el campo eléctrico, y con una componente relacionada con los efectos relativistas causados por el movimiento de las cargas: componente magnética, y en consecuencia, sin ser independientes una componente de la otra, podemos identificar al campo electromagnético como una entidad continua que se manifiesta de dos modos diferentes, pero interconectados, en el espacio-tiempo. Entonces, resulta casi natural proponer el uso de un tensor de segundo rango como objeto matemático que represente en ese lenguaje al campo electromagnético, pues sólo así se trabajan e incorporan simultanea y explícitamente los efectos eléctricos y sus aspectos relativistas. En general, hoy sabemos que la representación matemática adecuada para el electromagnetismo es la que corresponde al cálculo tensorial con espacio vectorial generador de cuatro dimensiones. ¿Por qué cuatro dimensiones y cuales son?. Tres de las dimensiones están asociadas con los grados de libertad para los movimientos espaciales, y su función es la de caracterizar posiciones y propiedades espaciales de los objetos físicos con respecto a algún otro elegido como sistema de referencia. La cuarta dimensión se asocia con el tiempo, no tomando la identificación como otro grado extra de libertad del movimiento de los objetos sino como una **inclusión explícita del movimiento relativo y sus propiedades** en el estudio de los sistemas dinámicos. Entonces el tensor de campo electromagnético, en ausencia de medios materiales en los que sucite respuestas que contribuyan a su conformación, puede representarse en las formas covariante y contravariante, cuyas realizaciones matriciales en ese orden son

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $E_1(E^1)$, $E_2(E^2)$, $E_3(E^3)$, $B_1(B^1)$, $B_2(B^2)$ y $B_3(B^3)$ representan, respectivamente, las magnitudes de las componentes eléctrica y magnética medidas en algún sistema de referencia inercial. La elección está sugerida por las ecuaciones que debe de satisfacer el campo bajo las condiciones señaladas y que son el resultado de un largo proceso de trabajo experimental y teórico; así, el tensor de campo electromagnético resultó ser también antisimétrico. Aunque pueden tomarse otras convenciones para la representación **simbólica** del campo electromagnético como tensor de segundo rango, con los ajustes correspondientes sobre tal representación en otros elementos de la teoría, esa identificación tensorial no puede ser eliminada, ni tampoco (y esto vale para toda la teoría electromagnética) su caracterización tetradimensional, pues ello equivale a negar el movimiento relativo como elemento fundamental en la física. Este comentario es con el objeto de que se reflexione seriamente sobre el papel y significado de las matemáticas en la explicación y descripción de los fenómenos naturales, pues el ejemplo inmediato y al que alude directamente el comentario en muestra de que no se repara en la grandísima importancia de ello, es el hecho de que hoy en día se acepta casi unánimemente en la comunidad de físicos la teoría de la relatividad de Einstein, que como ya vimos nació y se desarrolló a partir de la teoría electromagnética de Maxwell-Lorentz, pero por otra parte se presenta al electromagnetismo en todos los niveles† como un conjunto de fenómenos que se pueden explicar y describir en términos de una representación vectorial tridimensional estableciendo una relación demasiado oscura con la teoría de la relatividad y considerando un simple ejercicio de caligrafía, y sólo eso, su representación en términos tensoriales. Aquí hemos tratado y trataremos de mostrar que la matemática es más que un lenguaje comodo para realizar cálculos –al menos para el autor de este trabajo–. Representa más bien, y sobre todo para las teorías físicas, la investigación rigurosa de las posibilidades lógicamente admisibles‡ que pueden derivarse de

† El lector lo puede comprobar consultando cualquier libro de texto por avanzado que este sea.

‡ Aunque es necesario y muy importante señalar que la rígidez proposicional con la que hasta ahora se ha desarrollado la matemática, y que fue el resultado de una necesidad histórica en parte propia como lo atestiguan el desarrollo de la geometría, la teoría de conjuntos, el análisis, el álgebra, la teoría de ecuaciones diferenciales y la topología, pero también en gran parte de una necesidad articulada con la expansión y consolidación del capitalismo como es patente en el caso de la educación alemana a principios de siglo y en la que destacan figuras como las de Felix Klein y David Hilbert, con el tiempo se ha convertido en un obstáculo para la realización de una representación plena del cambio que subyace en todos los fenómenos naturales –ya que todo sistema físico es estrictamente un sistema dinámico debido a que no es posible el aislamiento absoluto– lo que se manifi-

un objeto matemático con el que se ha identificado algún aspecto de la naturaleza, por lo que cada posibilidad así derivada posee un significado estrechamente vinculado al modelo de realidad en el que se aplica la matemática, teniéndose además con ello un hilo conductor

---

esta, aunque de manera diferente y diferenciada pero con un sólo objetivo que es el de mantener el sistema de relaciones sociales imperante, en la "solución" de los problemas que se generan por prácticas económico-políticas irracionales –y si no pregúntenselo a[5] J. Von Neumann, E. Teller, R. Oppenheimer, E. Wigner, M. Gell-Mann, F. Dyson, Casimir, S. Drell, J.A. Wheeler, C. Townes, E. Salpeter, d'Espagnat, M. Goldberger, Hans Bethe, Maurice Lévy, Alfred Kastler, etc., sin olvidar el trasfondo de comentarios como el de Stalin[6]: "No perturbe a nuestros físicos con seminarios de política. Déjelos que dediquen todo su tiempo a sus trabajos profesionales."– o en la prevención y eliminación de todo pensamiento riguroso (que no rígido) que pretenda subvertir y transformar la realidad, a través de la implantación de reglas sintácticas cuyo objeto es calificar que oraciones estan "bien formadas" y cuales no, y de ese modo, ya vacunado el pensamiento contra todo espectro lógico que insinue el cambio, sólo sobrevivirán los discursos tendientes a fosilizar la realidad –nadie puede negar la necesidad de precisión y hasta de exactitud en el lenguaje científico, pero esto no implica en modo alguno que el único camino que se deba seguir es el de la formalización rígida hasta la fosilización como lo muestran hoy en día los intentos de categorización axiomática de toda la matemática, y que desembocan en la idea de identificar el pensamiento con este tipo de estructuras llegando a afirmar que lo que no se puede decir de esa manera es un sin sentido; al respecto el caso Lysenko se queda a nivel de llaneros–. Así, en todo modelo matemático se deben, hasta ahora, **prefijar permanentemente** las condiciones iniciales sobre las cuales se origina la evolución de alguna parte del universo para que así sea posible establecer una relación entre los objetos matemáticos por una parte y la realidad por la otra, con el objetivo, con base en la exactitud de ese lenguaje, de determinar en forma al menos precisa el comportamiento de esa realidad. Sin embargo, como René Thom[7] lo señala, la estabilidad estructural de los objetos que nos rodean dependen de ciertas condiciones de contorno, llegándose a romper esa estabilidad cuando los objetos alcanzan o son alcanzados, debido a un cierto proceso, por su conjunto de puntos catastróficos dando lugar a una morfogénesis; luego, el paso que ahora debemos dar y que esta inscrito en la tercera ley de Newton, es el de considerar a las condiciones de contorno mismas como objetos con determinada estabilidad estructural y que son afectadas por los procesos que condicionan, para poder cambiarlas de manera tal que permite aclarar relaciones entre los conceptos del propio modelo. Esta relación entre la matemática y otras teorías científicas no debe de sorprendernos: es lo que cabe esperar por la estructura formal de toda teoría, pero es una relación sobre la cual es necesario reflexionar más profundamente.

Una notación más elegante y compacta de lo anterior que nos servirá en lo sucesivo es

$$\mathbf{F} = F_{\mu\nu}\mathrm{d}^{\mu} \otimes \mathrm{d}^{\nu} \qquad\qquad \mathbf{F} = F^{\mu\nu}\partial_{\mu} \otimes \partial_{\nu}$$

donde los índices μ y ν corren de 0 a 3; el símbolo $\otimes$ indica el producto tensorial de este espacio vectorial, $F_{01} = E_1$, $F_{02} = E_2$, $F_{03} = E_3$, $F_{12} = -B_3$, $F_{13} = B_2$, $F_{23} = -B_1$ son las componentes del tensor de campo electromagnético en la representación covariante, y que denotaremos por F_{0j} para las componentes eléctricas y F_{ij} para las componentes magnéticas, entendiendo que los valores para los subíndices son $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3$, no es difícil establecer la convención correspondiente para la representación contravariante; $\mathrm{d}^{\mu} \otimes \mathrm{d}^{\nu}$ representa la base de los tensores covariantes de segundo rango y $\partial_{\mu} \otimes \partial_{\nu}$ es la base de los tensores contravariantes del mismo rango. En lo que sigue entenderemos que d^{μ} y ∂_{ν} son bases algebraicas del espacio vectorial con las que se definen las estructuras tensoriales, y que con su ayuda generamos las bases algebraicas de estas estructuras. Convenimos en que $x^0 = x_0 = ct$ con c la velocidad de la luz y t la variable temporal, refiriendo las variables espaciales de campo a un sistema cartesiano‡. Ahora bien, la antisimetría del tensor electromagnético nos permite introducir la dos-forma diferencial electromagnética F, que puede asociarse con cada una de las representaciones tensoriales

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}^{\mu} \wedge \mathrm{d}^{\nu} \qquad o \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\partial_{\mu} \wedge \partial_{\nu}$$

donde el símbolo $\wedge$ indica el producto exterior para los tensores totalmente antisimétricos. Entonces las ecuaciones de Maxwell en ausencia de medios materiales, excepto las cargas eléctricas asociadas al campo, resultan ser en la representación tensorial

$$\partial_{\tau}F_{\mu\nu}\mathrm{d}^{\tau} \otimes \mathrm{d}^{\mu} \otimes \mathrm{d}^{\nu} + \partial_{\mu}F_{\nu\tau}\mathrm{d}^{\mu} \otimes \mathrm{d}^{\nu} \otimes \mathrm{d}^{\tau} + \partial_{\nu}F_{\tau\mu}\mathrm{d}^{\nu} \otimes \mathrm{d}^{\tau} \otimes \mathrm{d}^{\mu} = 0\,\mathrm{d}^{\tau} \otimes \mathrm{d}^{\mu} \otimes \mathrm{d}^{\nu} \quad (2.1a)$$

---

que se puedan eliminar causas que dan lugar a procesos como los que aquí hemos señalado. Esto sugiere que la noción de *condición* debe tomarse en sentido relativo.

‡ Esta representación de las variables de campo –los matemáticos se refieren a cualquier representación con la cual puedan etiquetar los elementos de una variedad con el nombre de *atlas*– la hacemos con el fin de que al lector le sea comodo verificar cualquier operación matemática, pero en principio se puede elegir cualquier otra representación sin que ello afecte, claro debe de ser, el significado físico de la teoría.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial_\nu = \frac{4\pi}{c}J^\nu\partial_\nu \tag{2.1b}$$

donde $(\partial_\mu)d^\mu = \frac{\partial}{\partial ct}d^{ct} + \frac{\partial}{\partial x}d^x + \frac{\partial}{\partial y}d^y + \frac{\partial}{\partial z}d^z$ y $J^\nu\partial_\nu = (J^0, J^x, J^y, J^z)$ es el 4-vector de "corriente eléctrica", con $J^0 = c\rho$, ρ la función de densidad espacial de carga eléctrica, y J^x, J^y y J^z las funciones de las intensidades de la distribución de corriente eléctrica. Esto permite introducir la tres-forma diferencial -que puede asociarse indistintamente a la representación covariante o contravariante- de la **4-densidad** de corriente eléctrica

$$\mathcal{J} = \frac{1}{3!}\frac{4\pi}{c}J^\alpha\eta_{\alpha\mu}\epsilon^{\mu\nu\tau\rho}\eta_{\nu\beta}\eta_{\tau\gamma}\eta_{\rho\sigma}\sqrt{-\eta}\; d^\beta \wedge d^\gamma \wedge d^\sigma$$

Por lo que en términos de formas diferenciales (o multivectores) las ecuaciones de Maxwell se representan como sigue

$$d\mathcal{F} = 0\; d^\tau \wedge d^\mu \wedge d^\nu \tag{2.2a}$$

$$d^*\mathcal{F} = -\mathcal{J} \tag{2.2b}$$

El lector familiarizado con el cálculo tensorial notará que es posible representar las ecuaciones de Maxwell en otras formas que involucran combinaciones de los tensores asociados a **F** con las adecuadas operaciones de diferenciación. Hemos elegido las anteriores representaciones con el fin de resaltar ciertos aspectos que nos serán convenientes para el desarrollo de las discusiones en el presente capítulo y el siguiente. Así que, aprovechando tales aspectos, observemos que en la representación tensorial de un conjunto de ecuaciones no es necesario que el espacio donde están definidas este equipado con un producto interno, y este es el caso de las ecuaciones (2.1). Si queremos dotar al espacio tetradimensional donde suceden los fenómenos electromagnéticos determinados por las ecuaciones de Maxwell en el vacío, de producto interno, este deberá restringirse de tal forma que se satisfagan dichas ecuaciones. En este sentido el propio campo electromagnético **F** y las cargas eléctricas con él asociadas determinan tal estructura -cuando despreciamos otros campos de fuerza- lo cual debe de considerarse como natural si es visto en el marco de la relatividad einsteiniana, pues el espacio-tiempo queda definido por los objetos físicos. Luego, si asumimos la hipótesis hecha por Einstein de que "...las mismas leyes de la electrodinámica y de la óptica son válidas en todos los sistemas de referencia para los que son ciertas las ecuaciones de la mecánica" queda determinado de manera natural el grupo de simetría e invariancia de las propias ecuaciones de Maxwell: el grupo de Poincaré[‡]. Pero

[‡] Para determinar de manera matemática el grupo de Poincaré se hace uso de la operación *derivada de Lie* sobre la función bilineal así definida, igualando el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales resultante a cero.

lo inverso no es cierto, es decir, el grupo de Poincaré no implica las ecuaciones de Maxwell, ya que estas admiten transformaciones tetradimensionales no degeneradas más generales. En las ecuaciones (2.2) hemos hecho uso explicito de la función bilineal así inducida. Por otra parte, de las ecuaciones (2.1b) y (2.2b) se siguen las ecuaciones que representan la conservación de la carga eléctrica; estas son

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \tag{2.1c}$$

$$d\mathcal{J} = 0\,\mathbf{d}^0 \wedge \mathbf{d}^1 \wedge \mathbf{d}^2 \wedge \mathbf{d}^3 \tag{2.2c}$$

Es fácil ver que estas ecuaciones también son invariantes bajo el grupo de Poincaré en el sentido señalado. Nótese que las ecuaciones de Maxwell no determinan, aunque si condicionan, las ecuaciones de movimiento de los cuerpos cargados, por lo que, a este nivel de conocimiento, la distribución espacio-temporal de las cargas eléctricas asociadas con algún campo electromagnético es una condición que puede establecerse libremente. Esta observación será de suma importancia en el siguiente capítulo.

Después de esto es necesario que caractericemos ya claramente el fenómeno de inducción electromagnética en el marco de la electrodinámica clásica. Así, de acuerdo con lo anterior, observemos que no es posible representar a las ecuaciones de Maxwell en términos de campos vectoriales en general, y tridimensionales en particular; tratar de hacerlo implica desarticular las relaciones espacio-temporales del campo electromagnético y su relación dinámica con las cargas eléctricas porque se "rompe" la estructura tetradimensional unificada de espacio-tiempo, desarticulando también nuestra representación unificada de campo electromagnético y negando el carácter relativista einsteiniano de los fenómenos electromagnéticos. De esto se sigue que el fenómeno de inducción no puede representarse con la ecuación

$$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

ni con la supuesta versión diferencial

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Tampoco, por tanto, es correcto pretender identificar tal fenómeno con la variación temporal de un campo magnético o de flujo alguno. Y son precisamente este tipo de ideas las que no le permiten a uno como estudiante encontrar el origen del fenómeno, pues con ellas sólo nos encontramos en medio de series de confusiones, ya que por un lado se nos presentan de manera inconexa las supuestas ecuaciones que representan los fenómenos electromagnéticos, tal como la "ley de Faraday" y, por otro, se nos enseñan técnicas de cálculo de los efectos del campo electromagnético -como puede constatarse en los ejemplos citados en el capítulo anterior- relativos a la mencionada "ley" en las cuales se supone implícitamente que la configuración espacio-temporal del campo electromagnético es conocida con base en una distribución espacio-temporal prefijada de cargas eléctricas, pero el supuesto implícito no se suele sobre-entender porque ya se nos ha condicionado en un punto de vista fragmentario. Así, el pensamiento unificador que es el único capaz de conducirnos a la comprensión de dichos fenómenos está ausente. Obsérvese que estas deficiencias en las exposiciones de la teoría electromagnética se deben a la disociación entre campo electromagnético y cargas eléctricas que trae consigo el hecho de estudiar las propiedades del primero sin hacer referencia a las condiciones impuestas por las cargas; disociación que es el resultado de un proceso analítico influido por el positivismo.

Entonces, tomando en cuenta que la estructura de las ecuaciones de Maxwell sugiere un análisis de conjunto de los fenómenos electromagnéticos bajo ciertas condiciones de contorno que se relacionen con las cargas eléctricas dentro de un marco relativista, el fenómeno de inducción electromagnética puede considerarse como el efecto de una modificación espacio-temporal continua en la distribución de carga eléctrica medida desde un sistema de referencia inercial, que se acompaña inexorablemente por la presencia de un campo electromagnético que cumple con las restricciones y condiciones indicadas, respectivamente, por las ecuaciones (2.2a) y (2.2b). La configuración de este campo, por consecuencia, sería relativa y afectaría a todos los cuerpos cargados que no participen en esa distribución. De esta forma, todos los fenómenos debidos al campo electromagnético en el vacío son fenómenos de inducción. En este sentido es legítimo decir que cuando estando en reposo relativo un conductor y un cuerpo eléctricamente cargado, la presencia de cargas inducida sobre la superficie del conductor debida a dicho cuerpo es un fenómeno de inducción electromagnética.

Ahora que ya hemos presentado nuestra posición sobre los fenómenos de inducción electromagnética, pasamos a mostrar la manera en que explicamos estos fenómenos con algunos de los ejemplos que citamos en el capítulo anterior para que explícitamente se vean *operar* las ideas propuestas e ilustren mejor nuestro punto de vista. Tomaremos sólo dos de los ejemplos porque consideramos que en ellos se encuentra "resumida" toda la problemática que pretendemos resolver.

§2 **Análisis de la problemática del capítulo anterior.**

Barra conductora en el seno de un "campo magnético". Comencemos desde el caso más sencillo en el que la barra está en reposo con respecto a un sistema de referencia inercial en el cual se observa un campo electromagnético $\mathbf{F}$ con componente F_{0j} electrostática y componente magnética F_{ij} independiente del tiempo. En este caso, de los comentarios antes expuestos se sigue que, como no se presenta modificación neta alguna en la distribución de carga eléctrica observada, sólo la componente F_{0j} afectará a los elementos de la barra. Despreciamos la respuesta electromagnética de la barra.

Supongamos ahora que la componente magnética es variable con el tiempo y el resto de las condiciones es el mismo. Ya que sabemos que la variación temporal de F_{ij} se debe a cierto movimiento de cargas eléctricas, esto implica la existencia de una modificación neta en la distribución de carga con la que relacionamos la presencia de un campo eléctrico F_{0j}^{ind}, que junto con F_{0j} y F_{ij} conforman el campo electromagnético $\mathbf{F}$ que satisface las ecuaciones (2.1) o (2.2). Entonces si conocemos las propiedades de la corriente eléctrica responsable del cambio con el tiempo de F_{ij} podemos en principio, con ayuda de diferentes métodos‡ que involucran explícitamente el conjunto de las ecuaciones de Maxwell, calcular ese campo eléctrico. De este modo, conocido F_{0j}^{ind}, con ayuda de la ecuación que determina la dinámica de objetos puntuales cargados en un campo electromagnético, llamada fuerza de Lorentz,

$$m_a \frac{dv_a^\mu}{d\tau_a}\partial_\mu = \frac{q_a}{c}F^{\mu\nu}v_\nu^a\partial_\mu \tag{2.3}$$

podemos "explicar" sus efectos sobre los portadores de carga de la barra, donde para este caso m_a será la masa invariante de cada uno de los objetos puestos en movimiento, q_a su carga, $v_\mu^a \mathbf{d}^\mu$ su 4-velocidad calculada a lo largo de su línea de mundo parametrizada con respecto a su tiempo propio τ_a, y por lo tanto $\frac{dv_a^\mu}{d\tau_a}\partial_\mu$ su 4-aceleración. Escribimos "explicar" porque suponemos que los portadores de carga de la barra se pueden considerar como puntuales, y que los efectos del campo electromagnético asociado a cada uno de ellos sobre el resto y los alrededores son despreciables, además de que para realizar algún tipo de predicción cuantitativa precisa es necesario contar con un formalismo covariante de mecánica estadística. Estas idealizaciones han resultado ser a nivel **macroscópico** bas-

‡ En este sentido el lector puede consultar cualquier libro de texto sobre electromagnetismo, pues las técnicas señaladas para la solución de las ecuaciones de Maxwell, que generalmente se enfocan desde un lenguaje vectorial, son aplicables dentro del esquema tensorial.

tante buenas, pero cuando es necesario un análisis más detallado o se estudian situaciones **microscópicas** es claramente incorrecto suponer válidas las mismas hipótesis; este comentario estará presente en los análisis del siguiente capítulo. Por otra parte, es interesante señalar que no es posible hablar de un concepto de fuerza electromotriz para determinar los efectos de F_{0j}^{ind} en la barra, no tanto porque no exista un circuito cerrado, sino porque de acuerdo con la representación de las ecuaciones de Maxwell en formas diferenciales este concepto en su sentido clásico no tiene lugar propio en la electrodinámica, pues de acuerdo con la formulación que estamos trabajando, podemos realizar integraciones del siguiente tipo

$$\int_C \mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_C F_{\mu\nu}\mathbf{d}^\mu \wedge \mathbf{d}^\nu \cdot dx^\alpha \partial_\alpha = \int_C F_{\mu\nu} dx^\nu \mathbf{d}^\mu$$

$$\int_S \mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_S F_{\mu\nu}\mathbf{d}^\mu \wedge \mathbf{d}^\nu \cdot dx^\alpha dx^\beta \partial_\alpha \wedge \partial_\beta = \int_S F_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu$$

es decir, podemos integrar el campo electromagnético sobre una curva C (uno-variedad) o una superficie S (dos-variedad) inmersas en el espacio-tiempo♣. Luego, si describimos las variedades con uno y dos parámetros, respectivamente, escogidos de los "tiempos propios" de objetos físicos que las generen, resulta que las ecuaciones anteriores se deben expresar

♣ Hemos utilizado explícitamente el símbolo de producto interno en la operación de integración con el propósito de dar a entender que debe de considerarse tal operación en las formas diferenciales como la "suma" de las "proyecciones" de esos objetos matemáticos sobre los elementos *diferenciales* **orientados** de la variedad con la que se realiza dicha operación. Estos elementos se constituyen con el producto exterior de las diferencias infinitesimales del mínimo número de vectores linealmente independientes que se escogen de todos los vectores tangentes a todas las curvas que pasan por cada punto de la variedad, y por tanto, son combinaciones lineales diferenciales de la base vectorial con que se generan los espacios de los tensores contravariantes en cada punto de la misma. De lo anterior se sigue que cuando se desee integrar una forma diferencial sobre una variedad que resulta cómodo **parametrizar**, primero deben expresarse los **vectores** diferenciales con los que se construyen los elementos de integración de la variedad en términos de la base de vectores del espacio de parámetros a la vez que las **componentes** de la forma diferencial se expresan en términos de los parámetros y se **sustituyen** los elementos de la base antigua por los de la base nueva, seguidamente se realiza el producto interno, y finalmente el proceso de integración. No se confunda esta técnica con la relacionada a un cambio de atlas para la variedad, pues en este caso se cambian las **variables**.

como

$$\int_C \mathcal{F} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} F_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}d\tau \mathbf{d}^\mu = \int_{\tau_a}^{\tau_b} F_{\mu\nu}U^\nu d\tau \mathbf{d}^\mu \tag{2.4}$$

$$\int_S \mathcal{F} = \int_{\tau_a}^{\tau_b}\int_{\tau_a}^{\tau_b} F_{\mu\nu}U^\nu V^\mu d\tau_1 d\tau_2 \tag{2.5}$$

Si la ecuación (2.4) se multiplica por el factor $\frac{q}{c}$ y se considera que la curva C es la trayectoría espacio-temporal de un portador de carga q de la barra, restringida por la misma, todavía se puede transformar en

$$\frac{q}{c}\int_{\tau_a}^{\tau_b} F_{\mu\nu}U^\nu d\tau \mathbf{d}^\mu = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \frac{dP_\mu}{d\tau}d\tau \mathbf{d}^\mu = P_\mu(\tau_b)\mathbf{d}^\mu - P_\mu(\tau_a)\mathbf{d}^\mu \tag{2.6}$$

donde $\mathbf{P} = P_\mu \mathbf{d}^\mu$ es el 4-momento lineal del portador de carga. Esto sugiere que la integral de línea del campo electromagnético a lo largo de la trayectoria espacio-temporal de un cuerpo cargado que puede ser modelado puntualmente, se interprete como el impulso neto que ejerce el campo sobre dicha carga en el intervalo de tiempo del observador $t_b\gamma_b - t_a\gamma_a$. Algo similar ocurre con la ecuación (2.5), pues si la multiplicamos por el factor $\frac{q}{c}$ suponiendo que U^ν y V^μ son las componentes de la velocidad de un portador de carga q de la barra y de la barra misma tomada como un cuerpo rígido, respectivamente, entonces (2.7) puede interpretarse, bajo las hipótesis usadas para (2.8), como la acción del campo electromagnético sobre una carga q tomando en cuenta el movimiento espacio-temporal del cuerpo que la contiene en el intervalo de tiempo del observador $t_b\gamma_b - t_a\gamma_a$. Nótese que los resultados de las ecuaciones (2.5) y (2.6) son válidos para cualquier sistema de referencia, inclusive no inercial, pues si consideramos para la ecuación (2.6) un sistema de referencia adjunto a la carga cuando esta se mueve sin restricciones, el impulso del campo electromagnético será siempre nulo porque no existe (hablando relativisticamente) campo externo alguno, y si tomamos en la ecuación (2.5) como cuerpo que contiene a la carga a la misma carga, entonces la acción del campo es cero, que además por ser un escalar resulta ser esto cierto en todo sistema de referencia. Obsérvese que no se hizo uso de concepto de flujo alguno, lo cual nos hubiera impedido explicar la presencia de corrientes eléctricas en un circuito abierto cuando se encuentra inmerso en un campo electromagnético con componente F_{ij} variable con el tiempo, e inservible, por otra parte, para expresar de manera covariante los efectos del campo electromagnético sobre una carga eléctrica de prueba. ¡He aquí una muestra de como los conceptos mismos limitan las investigaciones!

Ahora es relativamente fácil explicar el fenómeno de inducción electromagnética cuando la barra se mueve rectilínea y uniformemente con respecto a un observador situado en un marco de referencia inercial. Basta con tomar en cuenta el campo electromagnético observado y el movimiento de la barra para que, en principio, con ayuda de las ecuaciones (2.3), (2.5) y (2.6) determinar aproximadamente los efectos de ese campo sobre los portadores de carga. Así, los tipos de efectos producidos por el campo serán una función de la dependencia espacio-temporal del mismo, y cuando quieran compararse con los efectos observados en un sistema de referencia adjunto a la barra para forjarse una idea más clara de lo que esta sucediendo, realizar la transformación de Poincaré correspondiente y tomar en cuenta los dos casos que ya se han estudiado.

No es tampoco difícil de convencerse que la geometría del conductor puede deformarse de manera arbitraria y los análisis serán semejantes. También, para ciertos casos en los que se pueden despreciar los efectos inerciales, llevar a cabo una explicación, e inclusive un cálculo, de los efectos electromagnéticos sobre conductores cuando estos realizan movimientos acelerados no muy complejos. En este sentido comentaremos el segundo ejemplo.

La posición de Feynman en relación al generador homopolar. Esencialmente, como puede verificarse en la cita del capítulo anterior, Feynman consideró que para explicar los fenómenos de inducción electromagnética hay que hacer uso de la "regla de flujo de Faraday" –que él entiende por la enunciación corriente de la "ley de Faraday"– o de la "fuerza de Lorentz". Para el caso del generador homopolar, Feynman comentó que como no hay cambio de flujo magnético en el dispositivo, entonces la corriente que en este circula sólo puede explicarse por la fuerza que ejerce el campo magnético sobre las cargas del disco que gira. Pero, y creemos que ahora quedará suficientemente claro, aunque la última parte de su explicación puede aceptarse como correcta, toda ella no lo es, pues no se basa en una visión de *conjunto* y *relativista* del electromagnetismo, además de que utiliza un concepto que carece de fundamentos físicos: el flujo magnético. El lector notará estas deficiencias en la explicación de Feynman si en vez de suponer que el disco gira considera a este en reposo con respecto al laboratorio desde el que se lleven a cabo las observaciones y ahora supone que el imán es el que realiza un movimiento circular pero en sentido contrario al que realizaba el disco, ya que con esto podrá sospechar sin dificultad cual sería ahora la explicación de Feynman sobre una corriente eléctrica en el circuito: la variación temporal de flujo magnético a través del circuito, y entonces hemos retornado a la problemática planteada por Einstein en 1905. Ahora bien, los errores en la susodicha explicación se detectan en todo lo que no pensó Feynman, o más bien, en todo lo que no pudo pensar debido a las corrientes de pensamiento que influyeron directa e indirectamente en su concepción de la física y que es lo que queda excluido de lo que él consideró como correcto, pues su horizonte conceptual fue el límite mismo de su discurso, ya que Feynman presentó, como muchos otros, las experiencias de Faraday aisladas del resto de los fenómenos electromagnéticos, en relación a condiciones tomadas como intrínsecas del mismo: circuitos cerrados, y que no lo son, y con ayuda del concepto de flujo que es totalmente injustificado. Todo al irse conjugando lo obligó, sin darse cuenta, a referirse al fenómeno de inducción de modo tal que le impidió considerarlo como un efecto relativista. Esto muestra que le falto profundizar en el significado de la teoría electromagnética. Irónicamente Feynman llegó a usar la "fuerza de Lorentz" que no es más que una expresión relativista del efecto ejercido por el campo eléctrico, para explicar la corriente en el generador, pero de una manera que no es relativista.

Por tanto, a modo de conclusión, quisiéramos subrayar la necesidad de tratar a los fenómenos electromagnéticos en el marco de la electrodinámica clásica en *conjunto y relativísticamente* para comprender las relaciones entre causas y efectos que existen en dichos fenómenos. Esto con el fin de evitar confusiones como las que se plantearon en el primer capítulo.

Sin embargo, esta línea de pensamiento no es la acostumbrada y el descuido en el análisis de las condiciones en las que se producen los fenómenos electromagnéticos ha llevado a proponer, sin bases físicas, la necesidad de modificar el *status* de algunos conceptos de la teoría electromagnética. Caso concreto es el del potencial electromagnético, que desde el punto de vista "clásico" es considerado como un elemento auxiliar para el cálculo del campo electromagnético sin que represente entidad física alguna, pero muchos físicos ante un supuesto callejón sin salida –que nosotros creemos ha sido el resultado de descuidos como los mencionados– han propuesto y sostienen que el potencial electromagnético es otro tipo de campo que afecta a los cuerpos cargados eléctricamente. Esta nueva problemática será el tema del siguiente capítulo.

Notas al capítulo 2

[1] Miguel Faraday, Investigaciones Experimentales de Electricidad (Morelia, Michoacán, México: Balsal Editores)

[2] Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism (New York: Dover Publications, Inc.).

[3] Einstein A. Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. Tomado del libro THE PRINCIPLE OF RELATIVITY. A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity. By H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl. With notes by A. Sommerfeld. Translated by W. Perrett and G.B. Jeffery (New York: Dover Publications, Inc.)

[4] Tomado del libro de Gerald Holton: Ensayos sobre el pensamiento científico en la época de Einstein (Madrid: Alianza Editorial S.A. 1982)

[5] Levy Leblond Jean-Marc y Jaubert Alain (compiladores), 1980 (Auto)crítica de la ciencia (Editorial Nueva Imagen). Referencias a las personas citadas se encuentran en los artículos: **La ciencia, los científicos y el Tercer Mundo**, Maurice Bazin, Físico, profesor en la Rutgers University, New-Brunswick, NJ, USA; **Un premio nobel expulsado del colegio de Francia**, nota de prensa, páginas 158-159; **La institución científica garantiza el orden**, Daniel Schiff, encargado de investigaciones en el CNRS, Laboratorio de Física Teórica y Altas Energías, Universidad de París XI (Orsay).

[6] Medvedev Zhores A., 1980 La ciencia soviética (México, D.F.: Fondo de Cultura Económica)

[7] Thom René, 1987 Estabilidad estructural y morfogénesis. Ensayo de una teoría general de los modelos (Barcelona: Editorial gedisa S.A.). La reciente versión en inglés: Structural stability and morphogenesis. An outline general theory of models (U.S.A.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989)

CAPÍTULO 3

POTENCIAL ELECTROMAGNÉTICO

En el presente capítulo discutiremos el significado físico del potencial electromagnético $\mathbf{A} = A_\mu \mathbf{d}^\mu$ con ayuda de dos ejemplos. Esto necesariamente implica que primero expongamos nuestro punto de vista en torno al significado físico de un concepto. En el desarrollo de la discusión del significado físico de $\mathbf{A}$ quedará de manifiesto hasta donde conduce la falta de una reflexión seria sobre la relación entre física y matemática. Habremos de recordar conceptos de la teoría electromagnética conectados con las ecuaciones de conservación de la energía y el momento lineal de un sistema electromecánico que, desde la posición asumida en el capítulo anterior, serán mostrados en un marco más complejo que invita a otra reflexión.

§3 Significado físico de un concepto.

Así pues, comentemos la noción de "significado físico". Primero consideraremos la opinión de Feynman[1], que es la siguiente:

"Aquí entendemos por un campo *real* (las cursivas son nuestras) lo siguiente: un campo real es una función matemática que utilizamos para evitar la idea de interacción a distancia. Si tenemos una partícula cargada en la posición P, la misma se ve afectada por otras cargas ubicadas a cierta distancia de P. Un modo de describir la interacción es diciendo que las otras cargas crean ciertas *condiciones* –sea lo que sea– en las proximidades de P. Si conocemos esas condiciones, que describimos dando los campos eléctrico y magnético, podemos determinar completamente el comportamiento de la partícula –sin otra referencia que la forma en que han sido creadas dichas condiciones.

"En otras palabras, si aquellas otras cargas se alteran de alguna manera, pero las condiciones en P, que estan descritas por los campos eléctrico y magnético en P permanecieran constantes, entonces el movimiento de la carga permanecería igual. Un campo real es entonces, un conjunto de números que especificamos de tal forma que lo que suceda en un punto solamente dependa de los números en ese punto. No necesitamos conocer nada más de lo que sucede en otros puntos. En este sentido discutiremos si el potencial vectorial es un campo *real*."

Es claro que en lo antes citado no existe una explicación amplia del significado físico de una cosa, sólo se hace una observación sobre la *realidad* de un campo; sin embargo, Feynman era de los pocos físicos que van más allá de una simple actitud descriptiva, aunque consideraba que la física sólo podía describir los fenómenos naturales y no explicarlos.

Es necesario, por esto, abordar con más amplitud la cuestión sobre el "significado físico" de algo. Nuestra posición ante este punto, que es una continuación de lo ya expresado en el capítulo anterior, es la siguiente.

Decimos que un concepto significa algo físicamente si éste representa para nosotros después de una serie de observaciones sobre la naturaleza –que están condicionadas ante todo por el nivel técnico históricamente alcanzado pero también, y muchas veces en mayor medida, por el paradigma conceptual en el que cada quien cree– una propiedad relativa a las causas o efectos de los *cambios* que se presentan en las *interacciones* de la materia, y que además se supone *invariante*. De esto puede pensarse que los conceptos que significan algo físicamente deben de referirse a entidades que deben de ser medibles, entendiendo por medición una interacción en la cual, bajo determinadas condiciones, se realiza una comparación cualitativa y cuantitativa de diferencias de una misma categoría que son representadas y *definidas* con conceptos considerados *convencionalmente* como significantes de una realidad ‡. Pero el conjunto de categorías comparables esencialmente se reduce a dos elementos: la espacial y la temporal, y de este modo, todos los demás conceptos, ya sea por una funcionalidad directa o por una relación que sea posible establecer con los conceptos de estas dos categorías, sólo pueden ser indirectamente medibles, es decir, sólo pueden verificarse las características y magnitudes de los cambios espacio-temporales que se han determinado con base en los mismos. Este hecho impide que un criterio operacional sea el factor que sirva para decidir cuales conceptos significan algo físicamente y cuales no, abriéndose con ello un margen para la especulación sobre su caracterización, pues para medir se supone ya la existencia de lo que es medido, así que se pueden llevar a cabo mediciones exactas de cualquier cosa. Por lo que, aún admitiendo la caracterización que se ha propuesto, debemos de ofrecer razones suficientes para justificar que un concepto forme parte del conjunto así definido.

En relación con lo anterior, dentro de la teoría de la electrodinámica clásica el concepto de campo electromagnético es considerado como un concepto con significado físico, pues de

---

‡ Debe tomarse en cuenta que en toda teoría siempre existirán conceptos (que son los conocidos por categorías) que no pueden definirse en términos de los demás, y que no pueden justificarse sino por las capacidades de orden y modelado que nos brindan sobre los objetos que se estudian.

acuerdo con lo expuesto en el capítulo anterior, dicho campo es identificado con las causas de los efectos ponderables sobre la materia eléctricamente cargada (no tomamos en cuenta la interacción espín-campo).

§4 Potencial electromagnético.

Ahora bien, por representar el conjunto de las modificaciones relativistas del campo eléctrico, el campo magnético carece de "fuentes", en el sentido de que no puede ser asociado con una propiedad que defina una categoría diferente de la materia como en el caso eléctrico. También, por lo ya visto, no es apropiado decir que las variaciones temporales de la componente magnética del campo electromagnético son "fuente" de la componente eléctrica, tan sólo son indicativas de la presencia de esta última y que se debe a una densidad de carga eléctrica que se manifiesta por efectos relativistas. Esto formalmente está expresado en la ecuación (2.2a). De esta ecuación se sigue, cuando se satisfacen las condiciones *locales* del **lema de Poincaré** o las condiciones *globales* del teorema de **De Rham**, que es posible derivar al campo electromagnético de una 1-forma diferencial $\mathcal{A}$, es decir

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} \tag{3.1}$$

con $\mathcal{A} = A_\mu \mathrm{d}^\mu$ y que se conoce por el nombre de **potencial electromagnético.**

Es importante resaltar ciertos aspectos en relación con esta representación del campo electromagnético‡.

---

‡ El lector pensará que estas exigencias matemáticas son sutilezas de menor importancia y no deben ser motivo de mayor atención, sin embargo en todo este capítulo mostraremos que la posición más correcta es la contraria y adelantándonos a lo que se ha de desarrollar en el texto de este trabajo damos a conocer el siguiente caso. Entre las páginas 95, 96 y 97 del libro de Davison E. Soper[2] se encuentran las siguientes afirmaciones:

"Frecuentemente se aprovecha la ventaja que brindan las ecuaciones de Maxwell homogeneas (8.1.4) para introducir un potencial cuadrivectorial $A^\mu(\mathrm{x})$ tal que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{8.1.6}$$

Evidentemente (8.1.4) es satisfecha de manera automática cuando $F^{\mu\nu}$ tiene es-ta forma. Inversamente, la validez de (8.1.4) implica la existencia de un potencial A^μ... $\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$... son justamente la parte de las ecuaciones de Maxwell que no se satisfacen automáticamente por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$."

De acuerdo con la ecuación (3.1) dando $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ queda unívocamente determinado. Pero a un mismo campo le corresponden en general diferentes potenciales. Esto último queda de manifiesto si se toma en cuenta la propiedad del operador "derivada exterior" en el espacio de las formas diferenciales, que consiste en que al aplicar dicho operador dos veces sobre una misma forma diferencial suficientemente diferenciable el resultado es la forma diferencial nula, pero de un grado dos veces mayor que el de la original. Es decir, si tomamos dos potenciales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ que difieran por la derivada exterior $d\chi$ de una función χ, conocida por función de recalibración, dependiente de las variables espacio-temporales y al menos dos veces diferenciable, entonces ambos potenciales estarán relacionados con el mismo campo electromagnético, satisfaciendo, por éste, idénticas condiciones de contorno. Simbólicamente

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\chi \tag{3.2}$$

entonces

$$d\mathcal{A}' = d\mathcal{A} + d(d\chi) = d\mathcal{A}$$

y por lo tanto

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}' = d\mathcal{A}$$

Estas propiedades de los potenciales, cuyo origen es únicamente matemático, permite elegir toda una familia de ellos que cumplan con la ecuación (3.1) y que esten conectados entre sí por medio de la ecuación (3.2). Es más, ésta elección arbitraria de los potenciales permite a su vez imponerles condiciones suplementarias que dividen la familia en diferentes clases de equivalencia conocidas como recalibraciones o normas, y que entre las más populares se encuentran: la norma de Lorentz, la norma de Coulomb, y la norma de Hamilton; pero sólo la primera es covariante.

Todo lo anterior también puede enfocarse desde la formulación lagrangiana de la dinámica de los objetos físicos cuando se circunscribe el estudio al caso del movimiento de

---

Como apoyo a sus afirmaciones, Soper comenta que esto se debe a una propiedad de las formas diferenciales y remite al libro de Harley Flanders[3]. En tal libro, en las páginas 66, 67 y 68, se hace una enunciación, por cierto incorrecta, del teorema de De Rham, que en vez de servir de apoyo a la afirmación de Soper la pone en entredicho. Debe señalarse que el hecho de que las ecuaciones de Maxwell inhomogeneas no satisfagan la relación (8.1.6) que indica Soper es consecuencia de que las ecuaciones de Maxwell –ver ecuaciones (2.1) y (2.2)– involucran **dos procesos de derivación**.

cuerpos discretos en el espacio-tiempo. Como en el caso puramente mecánico, la ecuación de movimiento de los cuerpos eléctricamente cargados que se encuentran en el seno de un campo electromagnético se determina con la función lagrangiana, que ahora se construye con los potenciales, a través de la funcional que representa a la cantidad de acción transferida a las cargas eléctricas por el campo. Y porque la ecuación de movimiento es el resultado del principio de mínima acción, el cual indica que en un proceso físico la magnitud de la transferencia neta de energía en un determinado intervalo de tiempo entre los objetos que participan del proceso es mínima, y que matemáticamente se traduce en la exigencia de que la primera *variación* de la acción se anule, la función lagrangiana puede modificarse de diferentes maneras sin que la ecuación de movimiento cambie. Por ejemplo, puede pedirse que la acción permanezca invariante bajo un grupo de transformaciones espacio-temporales, modificando con ello la lagrangiana, pero la nueva lagrangiana necesariamente conducirá a la misma ecuación de movimiento al aplicar el principio de mínima acción. También, puede introducirse en la funcional de la acción la diferencial exacta de una función que dependa de las variables espacio-temporales del objeto cuyo movimiento se analiza, i.e. una 1-forma diferencial resultado de la derivada exterior de una función suficientemente diferenciable, cambiando tanto la lagrangiana como la acción, pero obteniéndose, sin embargo, la misma ecuación de movimiento al imponer el principio de mínima acción.

Ilustraremos lo anterior de la siguiente forma. Supongamos válido el principio de relatividad galileana y consideremos la lagrangiana de una partícula libre de masa m y velocidad $\vec{v'}$ en un sistema de referencia inercial $\mathbf{S}'$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v'} \cdot \vec{v'}$$

Si el sistema de referencia $\mathbf{S}'$ se mueve con una velocidad constante $\vec{V}$ con respecto a otro sistema de referencia $\mathbf{S}$ entonces la velocidad de la partícula calculada desde $\mathbf{S}$ será

$$\vec{v'} = \vec{v} + \vec{V}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula en $\mathbf{S}$. Por lo que

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}m(\vec{v} + \vec{V}) \cdot (\vec{v} + \vec{V}) \\ &= L + m\vec{v} \cdot \vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V} \cdot \vec{V} \\ &= L + \frac{d}{dt}(m\vec{r} \cdot \vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V} \cdot \vec{V}t) \end{aligned}$$

donde L y $\vec{r}$ son, respectivamente, la lagrangiana y la posición instantanea de la partícula en relación a **S**. Notemos que de este modo L' y L difieren por la diferencial total con respecto del tiempo de una función que depende de las coordenadas y el tiempo, lo que significa la introducción de la diferencial total de esta función en la acción. Por lo tanto, para poder describir y explicar las causas del movimiento de la partícula, que serán las mismas, pueden utilizarse, respecto al sistema de referencia correspondiente, L' o L; lo cual ofrece información sobre propiedades **dinámicas** invariantes entre tales sistemas de referencia, y en términos más generales, de simetrías **dinámicas** bajo el grupo de transformaciones de Galileo.

De esto se sigue que desde el punto de vista físico son significativas aquellas cantidades y relaciones entre los conceptos que permanecen invariantes bajo ciertas transformaciones –como es el caso, con respecto al grupo de Poincaré, de las ecuaciones (2.1) o (2.2) que describen la dinámica del campo electromagnético– por lo que, en el formalismo lagrangiano, todas aquellas cantidades que puedan en la funcional de la acción englobarse en la diferencial exacta de una función dependiente de las variables espacio-temporales que sea el resultado de alguna de tales transformaciones, son innecesarias físicamente en el estudio del comportamiento de un sistema dinámico. Debe ser claro que el conjunto de transformaciones referidas puede relacionarse con cualquier propiedad del sistema físico estudiado y no sólo al del movimiento relativo.

En este sentido, como se sabe, cuando la acción que sirve para deducir la ecuación de movimiento de un cuerpo cargado en el seno de un campo electromagnético se modifica de la manera antes mencionada, induce la transformación en los potenciales indicada por la ecuación (3.2). Es decir de la acción

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} m_0 c\sqrt{g_{\mu\nu}v^\nu v^\mu}d\tau + \frac{q}{c}\int_\ell A_\mu \mathbf{d}^\mu \cdot dx^\nu \partial_\nu \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (m_0 c\sqrt{g_{\mu\nu}v^\nu v^\mu} + \frac{q}{c}A_\mu v^\mu)d\tau \end{aligned}$$

se puede pasar a la acción

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} m_0 c\sqrt{g_{\mu\nu}v^\nu v^\mu}d\tau + \frac{q}{c}\int_\ell [A_\mu + d\chi]\mathbf{d}^\mu \cdot dx^\nu \partial_\nu \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (m_0 c\sqrt{g_{\mu\nu}v^\nu v^\mu} + \frac{q}{c}[A_\mu + \partial_\mu\chi]v^\mu)d\tau \end{aligned}$$

donde m_0 es la masa invariante del cuerpo, $\mathbf{v} = v^\mu\partial_\mu$ su 4-velocidad, q su carga, τ su tiempo propio, $\mathcal{A} = A_\mu \mathbf{d}^\mu$ el potencial electromagnético externo a la carga definido en una región estrellada, y χ la función de recalibración; el subíndice ℓ indica una integración a lo largo de la línea de mundo de la carga†. Obsérvese que de ambas "acciones" se sigue que las ecuaciones de Euler-Lagrange, por componentes, para la carga son

$$\frac{q}{c}v^\nu\partial_\mu A_\nu - \frac{d}{d\tau}\left\{m_0 c\frac{v_\mu}{\sqrt{g_{\mu\nu}v^\nu v^\mu}} + \frac{q}{c}A_\mu\right\} = \frac{q}{c}v^\nu\partial_\mu A_\nu - \frac{d}{d\tau}[P_\mu + \frac{q}{c}A_\mu] = 0 \qquad (3.3)$$

donde $\mathbf{P} = P_\mu \mathbf{d}^\mu$ es el 4-momento lineal de la carga. Estas ecuaciones sugieren que el potencial electromagnético se interprete *como una especie* de momento lineal, hecho que tomaremos en cuenta más adelante. Por otra parte, de la mismas ecuaciones resulta

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]v^\nu = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}v^\nu$$

que son, por componentes, las ecuaciones de movimiento de un cuerpo cargado bajo las hipótesis señaladas para la acción, y donde se manifiesta claramente que sólo las intensidades de las componentes del campo electromagnético afectan a dicho cuerpo.

De todos los anteriores comentarios se desprende lo siguiente. Notamos que el campo electromagnético se caracteriza por la acción que ejerce sobre el movimiento de cargas que se encuentran dentro de él. Por esto dos campos serán idénticos físicamente si sus respectivas componentes eléctrica F_{0j} y magnética F_{ij} son iguales. Pero también observamos que cuando se satisfacen ciertas propiedades matemáticas en el dominio espacio-temporal donde se define el campo electromagnético $\mathcal{F}$, podemos elegir para este un conjunto infinito de potenciales relacionados por la transformación (3.2). Esto implica, de acuerdo a nuestra noción de significado físico, que dentro de la teoría electromagnética clásica los potenciales carecen de dicho significado.

Sin embargo, suelen citarse ejemplos con los cuales se pretende mostrar el significado físico del potencial electromagnético, por lo que debemos atender a las razones esgrimidas

† La forma de la funcional de acción se elige de manera que se satisfagan las ecuaciones de movimiento *empíricamente fundamentadas*. Sin embargo, con el deseo de construir una representación de la naturaleza en base a un mínimo de consideraciones físicas independientes, se suele mostrar la construcción de tales funcionales como el resultado de la aplicación reiterada sobre cada elemento que conformará la acción de un "principio" mínimal, lo cual no es inaceptable, pero sí su uso injustificado que llega a obstaculizar las posibilidades de establecer relaciones físicas más generales. En este sentido vease la nota al pie de la página 50.

en algunos de ellos sobre esta cuestión. Aquí discutiremos dos ejemplos, que consideramos representativos, desde la perspectiva de los comentarios anteriores.

§5 Primer ejemplo.

Uno de estos ejemplos es el efecto Aharonov-Bohm (**AB**), que se presenta a nivel microscópico y se considera normalmente desde la perspectiva de la mecánica cuántica‡. Esencialmente el efecto consiste en un desplazamiento que se observa al comparar los patrones de impacto producidos sobre un detector, debido a electrones emitidos por algún aparato con aproximadamente la misma energía, y que atraviesan por separado dos configuraciones físicas diferentes (ver figuras 3.2 y 3.3, todas las figuras se encuentran al final de este trabajo): a) una rejilla doble o biprisma, y b) este mismo obstáculo pero que cerca de él y después del mismo (con respecto a la trayectoria de los electrones) se ha colocado un dispositivo de dimensiones comparables a la separación de las rejillas, con el que se pretenden simular las características electromagnéticas de un solenoide infinitamente largo †: interior $F_{12} \neq 0$ y $\mathbf{A} \neq 0$; exterior $F_{12} = 0$ y $\mathbf{A} \neq 0$.

Ahora bien, como en el último caso los electrones se mueven en una región donde se supone que antes de que ellos invadieran solamente el potencial electromagnético era no nulo, con respecto al sistema de referencia del laboratorio, y el cambio en su trayectoria según un análisis cuántico queda en función de una integral de línea cerrada para **A**, que enlaza al mencionado dispositivo, entonces se llega a afirmar que la causa responsable del desplazamiento del patrón es la *acción* que ejerce el potencial electromagnético sobre los electrones, por lo que se considera a **A** con significado físico.

Pasamos a analizar este enfoque cuántico, basandonos principalmente en la exposición que se ofrece en el famoso artículo de **AB**[6], no sin antes hacer mención de algunas de nuestras consideraciones sobre la mecánica cuántica sintética y brevemente.

Las propiedades de los sistemas físicos en el marco de la mecánica cuántica son - descritas con ayuda de una cantidad conocida como *función de onda* o *vector de estado*, denotada usualmente por Ψ; aunque hay situaciones en las que tal descripción no es posible por insuficiente y es necesario introducir el concepto de *matriz de densidad*.

Ahora bien, cuando efectos relativistas, espinoriales, etc., son despreciables, la función

---

‡ Para una exposición más detallada *sobre como se manifiesta* este efecto puede consultarse la obra citada de Feynman.

† Para más detalles sobre las características del dispositivo experimental pueden consultarse los artículos de R. G. Chambers [4] y H. A. Fowler *et al.*[5].

de onda satisface una ecuación diferencial llamada *ecuación de Schroedinger* –que puede representarse en términos de *operadores* asociados a ciertas "variables dinámicas"– y que determina, junto con algunas condiciones de contorno, la manera en que evoluciona dicho vector de estado, que en general definirá un campo escalar complejo simplemente valuado que será una función continua de las variables espacio-tiemporales. Es importante señalar el carácter, hasta el momento, totalmente fenomenológico de la ecuación de Schroedinger y que juega un papel de postulado dentro de la mecánica cuántica.

No discutiremos el significado físico del vector de estado, ya que es innecesaria para nuestra exposición, aceptamos, en tanto, que el "cuadrado" del vector de estado en la representación espacio-tiempo determina la densidad de probabilidad de localizar en un momento dado a los elementos del sistema cuando se estudia un conjunto estadístico (ensemble) del mismo†. Admitimos también que el vector de estado sirve para calcular la probabilidad de transición de que el sistema (como elemento del conjunto estadístico) pase de un estado a otro.

Así pues, el artículo de **AB** –cuyo tratamiento matemático del campo electromagnético es totalmente vectorial y al cual nos apegaremos en lo referente a su exposición– donde se trabaja la ecuación de Schroedinger en términos de operadores, se inicia con una discusión sobre las correcciones necesarias al vector de estado de partículas cargadas cuando son sometidas a un cierto potencial dependiente del tiempo que es "acoplado" linealmente al operador de Hamilton de estas partículas cuando tal potencial no existe, es decir

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}(t)$$

donde $\widehat{V}(t)$ es el potencial, y $\widehat{H}_0$ es el Hamiltoniano sin dicho potencial. Si $\Psi_0(x,t)$ es una

---

† Obsérvese que aceptar al "cuadrado" de la función de onda como una cantidad mensurable implica que podemos multiplicar a dicha función de onda por cualquier número complejo que se encuentre en el círculo unitario sin modificar la densidad de probabilidad, es decir, si realizamos la transformación

$$\Psi \longrightarrow \Psi e^{i\theta}$$

la densidad de probabilidad permanece invariante. Actualmente a esto se le llama una simetría interna de Ψ. Nótese el paralelismo con lo mencionado para el potencial electromagnético.

solución del Hamiltoniano $\widehat{H}_0$, entonces las soluciones para $\widehat{H}$ serán

$$\Psi = \Psi_0 e^{-\frac{iS}{\hbar}} \qquad S = \int V(t)dt.$$

Comentando **AB**: "La nueva solución difiere de la primitiva por un factor de fase y esto, por supuesto, no implica cambio alguno en los resultados físicos."

A continuación **AB** proponen un experimento (ver figura 3.1) en el cual un haz de electrones es dividido en dos haces, los que a su vez son "sometidos" a un potencial eléctrico ($V(t) = \varphi(t)$) diferente para cada haz, procurando que no sean afectados por algún campo de fuerza electromagnético. Posteriormente los haces son "recombinados" en una "región de interferencia".

De esta manera **AB** observan: "Si $\Psi(x,t) = \Psi_1^0(x,t) + \Psi_2^0(x,t)$ es la función de onda en auscencia de potencial (Ψ_1^0 y Ψ_2^0 representan las partes que pasan a través de los tubos 1 y 2, respectivamente), pero ya que V es función sólo de t donde Ψ es apreciable, el problema para cada tubo es el mismo que para el de una jaula de Faraday, la solución es entonces

$$\Psi = \Psi_1^0 e^{-\frac{iS_1}{\hbar}} + \Psi_2^0 e^{-\frac{iS_2}{\hbar}}$$

donde

$$S_1 = e\int \varphi_1 dt \qquad S_2 = e\int \varphi_2 dt.$$

Es evidente que la interferencia de las dos partes en F dependerá de la diferencia de fase ($\frac{S_1 - S_2}{\hbar}$). De este modo, hay un efecto físico de los potenciales aún si no hay fuerzas actuando sobre el electrón. El efecto es evidentemente de naturaleza mecánico-cuántica porque se presenta en el fenómeno de interferencia. Por lo tanto no nos sorprendió que no aparezca en mecánica clásica."

En seguida **AB** consideran la "generalización relativista" de S cuando se trata del cuadripotencial $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ y de un haz de electrones, esto es

$$S = \frac{e}{\hbar}\oint \{\varphi dt - \frac{\vec{A}}{c}\cdot \vec{dx}\}$$

donde apuntan que la trayectoría de integración es sobre cualquier circuito cerrado en el espacio-tiempo.

Ahora ellos dicen: "Como otro caso especial, consideremos una trayectoría en el espacio solamente (t=constante). El anterior argumento sugiere que el corrimiento de fase asociado a la función de onda del electrón debiera ser

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = -\frac{e}{\hbar c}\oint \vec{A}\cdot\vec{dx}$$

donde $\oint \vec{A} \cdot \vec{dx} = \int \vec{H} \cdot \vec{ds} = \phi$ (el flujo magnético total dentro del circuito)."

El experimento que proponen para este caso es conocido hoy en día como el *efecto Aharonov-Bhom*, del cual ya hemos hecho mención.

Acto seguido **AB** comentan:

"El Hamiltoniano para este caso es

$$\hat{H} = \frac{[\hat{P} - (\frac{e}{c})\hat{A}]^2}{2m}.$$

En regiones simplemente conexas, donde $\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \vec{0}$, podemos siempre obtener una solución para el anterior Hamiltoniano tomando $\Psi = \Psi_0 e^{-\frac{iS}{\hbar}}$, donde Ψ_0 es la solución cuando $\vec{A} = \vec{0}$ y $\frac{\nabla S}{\hbar} = (\frac{e}{c})\vec{A}$. Pero en el experimento discutido -se refieren al del efecto **AB**-, en el que tenemos una región multiplemente conexa (la región fuera del solenoide), $\Psi e^{-\frac{iS}{\hbar}}$ es una función no-simplemente-valuada (a menos que $\phi = \frac{nhc}{e}$, donde n es un entero) y por lo tanto, en general, no es aceptable como solución a la ecuación de Schroedinger. Sin embargo, en nuestro problema es posible usar tales soluciones porque la función de onda se divide en dos partes $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, donde Ψ_1 representa a un haz por un lado del solenoide y Ψ_2 representa al otro haz en el lado opuesto. Cada uno de estos haces se encuentra en una región simplemente conexa. Por lo que podemos escribir

$$\Psi_1 = \Psi_1^0 e^{-\frac{iS_1}{\hbar}} \qquad \Psi_2 = \Psi_2^0 e^{-\frac{iS_2}{\hbar}},$$

donde S_1 y S_2 son iguales a $(\frac{e}{c}) \int \vec{A} \cdot \vec{dx}$ a lo largo de la trayectoría del primero y segundo haces, respectivamente.

"La interferencia entre los dos haces evidentemente dependerá de la diferencia de fase

$$\frac{(S_1 - S_2)}{\hbar} = \frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} \cdot \vec{dx} = \left(\frac{e}{\hbar c}\right)\phi.$$

Este efecto existirá aún si no hay fuerzas magnéticas actuando en los lugares donde pasa el haz de electrones."

A continuación **AB** se dedican a encontrar una "solución exacta" para este problema con ayuda del Hamiltoniano mencionado, escogiendo una norma en la cual $A_r = 0$ y $A_\theta = \frac{\phi}{2\pi r}$, logrando hallar

$$\Psi = e^{-i(\alpha\theta + r'\cos\theta)} + \frac{e^{ir'}}{(2\pi i r')^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}}{\cos(\frac{\theta}{2})} \sin \pi\alpha$$

donde $\alpha = -\frac{e\phi}{c\hbar}$ y r', θ las variables del problema en coordenadas cilíndricas.

Finalmente en la sección de su artículo "Discusión del significado físico de los resultados" AB comentan:

"Es verdad que todos estos efectos de los potenciales dependen solamente de la cantidad invariante de norma $\oint \vec{A}\cdot d\vec{x} = \int \vec{H}\cdot d\vec{s}$, así que en realidad ellos pueden ser expresados en términos de los campos dentro del circuito. Sin embargo de acuerdo a las nociones comunes en relatividad, todos los campos deben interactuar sólo localmente. Y dado que los electrones no pueden entrar a las regiones donde existen los campos, nosotros no podemos interpretar tales efectos como debidos a los campos mismos.

"En mecánica cuántica, la diferencia esencial es que la ecuación de movimiento de una partícula es remplazada por la ecuación de Schroedinger para una onda...Desde este punto podría verse natural proponer que, en mecánica cuántica, las entidades físicas fundamentales son los potenciales, mientras que los campos se derivan de ellos por diferenciación.

"La principal objeción que podría levantarse contra la anterior sugerencia se basaría en la invariancia de norma de la teoría. En otras palabras, si los potenciales son sujetos a la transformación $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$, donde ψ es una función escalar continua, entonces todas las cantidades físicas conocidas deberán permanecer invariantes. Como un resultado, el mismo comportamiento físico es obtenido de cualesquiera dos potenciales, $A_\mu(x)$ y $A'_\mu(x)$, relacionados por la anterior transformación. Esto significa que a pesar de que los potenciales son más ricos en propiedades que los campos, no hay modo de revelar esta riqueza adicional. De esto puede concluirse que los potenciales carecen de significado alguno, excepto cuando ellos son usados matemáticamente, para calcular los campos.

"Nosotros hemos visto de los ejemplos descritos en este artículo que el anterior punto de vista no puede mantenerse en el caso general. Por supuesto, nuestra discusión no cuestiona la invariancia de norma de la teoría. Pero muestra que en una teoría que involucra solamente interacciones locales (v.g., la ecuación de Schroedinger o la de Dirac, y las comunes teorias mecánico-cuánticas de campos), los potenciales deben, en ciertos casos, ser considerados como efectivos, siempre y cuando no existan campos actuando sobre partículas cargadas.

"La anterior discusión sugiere que es necesario algún desarrollo posterior de la teoría. Dos posibles direcciones son claras. Primera, hay que tratar de formular una teoría no local en la cual, por ejemplo, el electrón pudiera interactuar con un campo que estuviera a una distancia finita. Entonces no habría problema en interpretar estos resultados, pero, como es bien sabido, hay varias dificultades en el modo de llevar esto a cabo. Segunda, retenemos la presente teoría local y, en cambio, tratamos de dar una nueva interpretación a los potenciales. En otras palabras, reconocemos a $A_\mu(x)$ como una variable física. Esto significa que debemos de ser capaces de definir la diferencia física entre dos estados cuánticos que difieren solamente por una transformación de norma."

§6 **Discusión del primer ejemplo.**

Ante tales argumentos nosotros hacemos las siguientes observaciones, no sin antes poner en claro que el efecto **AB** es un fenómeno observable y que nos limitamos a criticar la explicación cuántica de este efecto.

Así, por principio de cuentas, recordamos al lector lo que implica usar una representación vectorial del campo electromagnético: confusiones y conclusiones falsas, por ser incorrecta; detalle en que **AB** no repararon. Este argumento ya es suficiente para poner en tela de juicio las afirmaciones de **AB**, pero con el fin de que el lector valore más cuidadosamente la relación entre física y matemática, y además pueda darse cuenta de como ciertas concepciones influyen en el resultado de una investigación, llevaremos a cabo un análisis algo extenso del mencionado artículo.

Dicho lo anterior, hacemos a la explicación cuántica de **AB** la "principal objeción", es decir, podemos considerar una región donde no hay campo electromagnético y asignarle con la ayuda de la transformación (3.2) el potencial

$$\mathcal{A}_\nu = d\chi(x^\mu)$$

donde $\chi(x^\mu)$ es la función de recalibración, fijada desde algún sistema de referencia, que es univaluada y suficientemente diferenciable, tomando en cuenta que la región considerada satisface las condiciones del teorema de De Rham. Obsérvese que como la función es bien comportada, en este caso toda integral de línea cerrada en el espacio-tiempo –donde nosotros entendemos, no sabemos si era la intensión de **AB**, que la inversión temporal necesaria para cerrar el circuito de integración resulta de tal posibilidad en las ecuaciones clásicas de movimiento, entonces se desean comparar las diferencias de efectos en dos caminos compatibles con las condiciones de contorno– para $\mathcal{A}_\nu$ es igual a cero según el teorema de Stokes. Esto implica que en una región sin campo de fuerza electromagnético, como en la situación bosquejada en la figura 3.2 y en la que se supone que χ esta definida hasta en el interior de los obstáculos, los supuestos efectos cuánticos sobre la trayectoria de los electrones, contabilizables a través de la integral de línea de este potencial son nulos.

Por otra parte, esta recalibración conduce a una modificación del operador de Hamilton: la introducción de un operador que representa al potencial electromagnético. El significado de esa modificación no es otro que el de tomar en cuenta los fenómenos electromagnéticos en los procesos cuánticos, por lo que la forma de introducir el operador que representa al potencial **A** es conceptualmente significativa. Tal introducción se realiza usualmente a través de la regla de acoplamiento mínimo†, que en este caso, implicita y paralelamente, sugiere otorgarle al potencial electromagnético el caracter de una "especie" de momento lineal. Pero ya que la ecuación de Schroedinger no posee una "estructura" compatible con la relatividad einsteiniana, no es posible llevar a cabo tal introducción. Es decir, en tanto el potencial es un campo vectorial definido en un espacio tetradimensional, la ecuación de Schroedinger es el resultado de un operador diferencial aplicado a funciones con dominios tridimensionales, y entonces se presenta la imposibilidad mencionada. Sin embargo, al desacoplar la estructura espacio-temporal de **A** puede realizarse la introducción de éste (nótese que así se comete el error de mezclar vectores tetradimensionales con tridimensionales) en la ecuación de Schroedinger. Admitiremos este hecho para mostrar que aún así el análisis de **AB** es incorrecto, pues de acuerdo con un trabajo de Kobe[12] es posible llevar a cabo las siguientes manipulaciones sobre la ecuación de Schroedinger,

$$\hat{H}_0\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

se transforma al "aplicar" la regla del acoplamiento mínimo en

$$\hat{H}_A\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

donde

$$\hat{H}_0 = (\frac{\hat{P}^2}{2m}) + \hat{V} \qquad \hat{H}_A = \frac{1}{2m}[\hat{P} - \frac{q}{c}\hat{A}]\cdot[\hat{P} - \frac{q}{c}\hat{A}] + \hat{V} + q\hat{\varphi}$$

Ahora, si se lleva a cabo una recalibración del potencial según la ecuación (3.2) y al mismo tiempo una transformación del vector de estado de la forma

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = e^{\frac{-iq}{c\hbar}\chi}\Psi$$

† Esta regla indica que acoplamientos de los cuerpos cargados con combinaciones de las derivadas del potencial, de cualquier orden si es que existen, no son tomados en cuenta. Lo cual no se puede justificar rigurosamente sino sólo a través de la concordancia de los resultados teóricos con los hechos experimentales, la que a su vez depende de los elementos teóricos adoptados por el investigador y de lo que éste considere como relevante en las condiciones físicas analizadas. Un ejemplo en el cual tal regla no se aplica está dado por la ecuación de Pauli. Lo que no implica que no existan "principios" minimales más generales.

ello conduce a una invariancia en las magnitudes físicas observables del sistema, según los algoritmos de la mecánica cuántica. Es importante destacar un hecho en relación con estos aspectos de simetría de la ecuación de Schroedinger. Como la transformación del vector de estado está inducida por la recalibración del potencial, entonces tal transformación hereda las propiedades matemáticas de la función de recalibración, quedando definida **unívocamente para todos** los vectores de estado linealmente independientes que determinan todos los posibles estados cuánticos de un sistema. Este hecho será un elemento clave en la refutación formal de la explicación de **AB**, siendo antes conveniente realizar más observaciones de caracter conceptual.

Así vistas las cosas, esta situación nos enfrenta a una riqueza de posibilidades en los correspondientes significados y validez de los elementos teóricos que estamos estudiando, pues ya que lo más sensato es admitir que un proceso físico está unívocamente determinado por un conjunto de características y relaciones, al margen de que podamos conceptualizarlas y detallarlas, se debe explicar, como **AB** observan, que si se acepta que los potenciales electromagnéticos representan algo físicamente existente: cual es la diferencia física que hay entre una recalibración y otra. Pero nótese que la determinación de esa diferencia conduce a la posibilidad de elegir arbitrariamente las condiciones físicas de un proceso dinámico sin siquiera interactuar con él, lo cual es absurdo.

Por tanto, cuando se desea que nociones que representan algunos de los elementos del conjunto de relaciones y características de un sistema físico permanezcan invariantes bajo este tipo de transformaciones –lo cual implica necesariamente admitir el carácter puramente auxiliar del potencial, pues hay que tomar en cuenta que en sí y por sí mismas las transformaciones de cantidades físicas *no representan algo observable* sino que *sólo son indicativas* de una propiedad relativa a las cantidades transformadas† – es preciso determinar el tipo de transformaciones que se deben inducir en los otros elementos de la representación del sistema físico estudiado para que tales nociones efectivamente permanezcan invariantes. Concretamente en el problema que nos concierne, la recalibración

† El detalle que se presenta con el potencial electromagnético es que es al mismo tiempo la transformación y la cantidad transformada pero, como se hara notar más adelante en el texto, el papel de cantidad transformada lo juega supeditadamente con respecto al campo de fuerza electromagnético y las condiciones de contorno de este y los cuerpos cargados. Considérese además que dicho papel que juega el potencial surge en electrodinámica como un medio para el cálculo del campo de fuerza.

del potencial electromagnético debe de ir acompañada de una modificación en el vector de estado como indica Kobe, aunque, repetimos, sus análisis no admiten una formulación covariante en la relatividad einsteiniana.

Retomando el artículo de **AB**, observamos que ellos lo iniciaron discutiendo sobre el tipo de correcciones que hay que hacer a la función de onda de partículas cargadas cuando estas son sometidas a un potencial $\widehat{V}(t)$ que puede ser acoplado linealmente al Hamiltoniano $\widehat{H}_0$ sin tal potencial. Este potencial fue identificado con el "potencial eléctrico"; la componente ct de **A**. Sin detenernos por el momento en la discusión física del experimento que propusieron para verificar si el potencial eléctrico es algo físicamente existente, pues junto a lo correspondiente al "potencial vectorial" -que representa las componentes espaciales de **A**- serán el grueso de nuestro análisis, notemos que cuando **AB** consideran la "generalización relativista" de sus correcciones sobre Ψ olvidaron, como ya indicamos, que la ecuación de Schroedinger no sirve para describir procesos a nivel de la relatividad especial, por lo que su compaginación no es adecuada, o desde otro enfoque, pretendieron usar para el caso del potencial vectorial el mismo tipo de correcciones que con el potencial eléctrico sin tomar en cuenta que la estructura de la ecuación de Schroedinger impide todo tipo de acoplamiento mínimo con el potencial electromagnético, careciendo de sentido el hablar de correcciones para las componentes de **A**. Estos razonamientos parten de la misma base, a saber, que el potencial eléctrico y el potencial vectorial forman un 4-vector **A** que puede transformarse linealmente bajo el grupo de Poincaré, en tanto que la ecuación de Schroedinger no es covariante de forma ante tales transformaciones. Así que simple y llanamente el "nuevo tipo de correcciones" sólo casualmente les sirvió a **AB**, a expensas de haberlas trabajado adecuadamente como se puede verificar en la solución que ellos encontraron. Más adelante quedará de relieve que una recalibración arbitraria del potencial electromagnético les habría arrojado por la borda dichas correcciones.

Consideremos ahora los experimentos que **AB** propusieron para verificar si los potenciales representaban algo físicamente existente. Estos esencialmente se pueden reducir a la consideración de un haz de electrones aproximadamente mono-energético dividido en dos haces que a su vez, y esto es lo más importante y fundamental de nuestras objeciones a la explicación cuántica, **son sometidos a diferentes condiciones físicas que no están referidas a los potenciales sino al campo de fuerza electromagnético**. Veamos esto con mayor detalle.

En el presunto experimento para "demostrar la interferencia con un potencial escalar dependiente del tiempo" los haces de electrones penetran en el interior de dos tubos cilíndricos metálicos que son sujetos, como se declara, a potenciales eléctricos diferentes y variables con el tiempo. Esto implica forzosamente un movimiento de cargas eléctricas diferente en cada cilindro y en consecuencia que el potencial eléctrico dependa de las coordenadas espaciales. Si junto a lo anterior se toma en cuenta que los electrones son objetos cargados y que como tales, cuando se encuentran en movimiento, hay que asociarles un campo electromagnético que necesariamente interactuará con la materia, es posible visualizar la "interferencia cuántica" como un proceso de interacción de cargas eléctricas a través de campos de fuerza electromagnéticos.

Para el caso del experimento en el que se predijo el efecto **AB**, los supuestos teóricos no se llevan en la práctica, es decir, las condiciones electromagnéticas en las que se basa la explicación cuántica no son cumplidas. Aunque se podría pensar que son de poca importancia estos detalles, hacemos la observación de que hubo (que aún puede haberlas) divergencias en los reportes de los experimentadores sobre la importancia de estos detalles, hecho que se constata en las obras señaladas al respecto ‡. Pero para aquellos que no ponderan adecuadamente los reportes experimentales, hemos de señalarles, como ya se ha indicado, que los haces de electrones que pasan por la vecindad del dispositivo Υ, que juega el papel de solenoide infinitamente largo, son sometidos a diferentes condiciones físicas, pues al considerar el campo electromagnético de los electrones de paso, este es sujeto a diferentes condiciones de contorno cuando se divide al haz principal para que los electrones recorran los dos posibles caminos alrededor de Υ, y esto produce modificaciones diferenciadas y diferentes en el estado de movimiento de la materia de tal dispositivo (aceleración, polarización, cambio en la magnetización) que necesariamente son acompañadas por fenómenos electromagnéticos relativos a los campos de fuerza. De este modo la reacción electromagnética de la materia que conforma a Υ afecta a su vez a los electrones de paso induciendo con ello una variación en su estado de movimiento y produciendose así el efecto

‡ Creemos que es importante tomar en cuenta los artículos experimentales de Chambers[4] y H. A. Fowler *et al.*[5] para valorar cuidadosamente las causas del efecto **AB**. En este sentido, indicamos que experimentos más complejos realizados con el fin de verificar la explicación cuántica debida a **AB** sobre este efecto, no fueron diseñados con las especificaciones requeridas por tal explicación, por lo que más que una confirmación de la misma, esos experimentos pueden considerarse como una prueba en contra de la susodicha explicación. Ver A. Tonomura *et al.*[7][8].

AB.

De esta forma puede diseñarse una explicación alternativa a la propuesta por AB, que también puede extenderse al caso anterior. Como una primera aproximación se puede modelar al dispositivo Υ, ya sea que se trate de un solenoide o de un material permanentemente magnetizado, como la superposición de anillos de corriente –que en el caso de un imán también habrá de tomarse en cuenta las restricciones cuánticas sobre el orden de las corrientes electrónicas y el de sus espines– para así considerar una interacción corriente-corriente entre los electrones de paso y los de la materia de Υ, y posteriormente ir incluyendo los efectos subsecuentes. En este sentido Coleman y Van Vleck[9] han mostrado que si se quiere ser consecuente con los teoremas de balance de un sistema electromecánico (ver sección § 10), es necesario un análisis más cuidadoso de los efectos relativistas y sus ordenes de magnitud. Este hecho es importante porque fenómenos que se consideran *a priori* despreciables, pueden ser en ciertos casos partes importantes de las causas que producen algún efecto; considérese la observación que Feynman hace a este respecto en el primer capítulo de su obra citada.

Señalamos esto último porque tomando en cuenta el comentario de Fock[10]‡ de que: "La probabilidad de que una micropartícula se comporte de cierta manera en condiciones externas determinadas depende tanto de las propiedades internas de la micropartícula, como de las condiciones en las que se encuentre. Esta probabilidad representa una estimación cuantitativa de las potencialidades de comportamiento de la micropartícula y se manifiesta por el número relativo de casos actualizados de un comportamiento determinado. Este número representa un valor medio comprobado. Así, la probabilidad interesa

---

‡ Aunque se considera que Fock era la cabeza de la filial de la escuela de Copenhague en la Unión Soviética, más bien, por sus observaciones a los comentarios de Bohr y su adhesión al materialismo dialéctico de manera crítica en momentos en que había una represión y dogmatismo ideológico, debe de considerársele como un físico de actitudes científicas. Ver al respecto el libro de Graham[11] referido en las notas de este capítulo. Como muestra citamos un comentario de Fock tomado de tal libro:

Parece en principio que es posible reducir una descripción a las indicaciones de los instrumentos. No obstante, la insistencia en la función de los instrumentos es razón suficiente para reprochar a Bohr (el) que haya infravalorado la necesidad de la abstracción y olvidado que el objeto de estudio son las propiedades del micro-objeto y no las indicaciones de los instrumentos.

a cada una de las micropartículas y caracteriza sus potencialidades, pero para determinar su valor numérico, debemos de tener una estadística de los casos de actualización de estas potencialidades, lo que supone una repetición multiple de los mismos experimentos". En el efecto **AB** las condiciones electromagnéticas a las que están sometidos los electrones de paso no se determinan sino hasta que ellos cruzan el entorno de **Υ**, es decir, estos mismos electrones intervienen en la conformación de las condiciones electromagnéticas que los afectan, y estas son múltiples. Como se habrá notado este es el argumento central de nuestra posición.

Lo anterior también puede enfocarse desde un punto de vista más formal, pues una revisión de los elementos teóricos utilizados en la explicación de **AB** muestra que ésta adolece de serias deficiencias matemáticas.

Para comenzar, señalamos que el potencial electromagnético con el que trabajaron **AB** lo dividieron en dos partes que denotaremos por $\mathcal{A}_s$ para $r \leq R$, y $\mathcal{A}_{AB}$ para $r \geq R$, explicitamente (seguimos los usos del cálculo tensorial para determinar la transformación de los objetos geométricos, por lo que el lector notará una diferencia con respecto a las cantidades usadas por **AB**; tal diferencia se debe a que ellos convinieron en usar una base cilíndrica no ortonormal)

Coordenadas Cilíndricas **Coordenadas Cartesianas**

I. $r \leq R$

$$\mathcal{A}_s = \begin{cases} A_{ct} = 0 \\ A_r = 0 \\ A_\theta = \frac{r^2 B}{2} \\ A_z = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{A}_s = \begin{cases} A_{ct} = 0 \\ A_x = \frac{-yB}{2} \\ A_y = \frac{xB}{2} \\ A_z = 0 \end{cases}$$

II. $r \geq R$

$$\mathcal{A}_{AB} = \begin{cases} A_{ct} = 0 \\ A_r = 0 \\ A_\theta = \frac{\phi}{2\pi} \\ A_z = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{A}_{AB} = \begin{cases} A_{ct} = 0 \\ A_x = \frac{-yBR^2}{x^2+y^2} \\ A_y = \frac{xBR^2}{x^2+y^2} \\ A_z = 0 \end{cases}$$

siendo R el radio del solenoide, suponiendo que B es la intensidad de la única componente no nula F_{12} del campo electromagnético en el sistema de referencia en el que se encuentra en reposo el dispositivo **Υ**. Así, $\mathcal{A}_{AB}$ está definido en una región que *no es* simplemente conexa; aunque **AB** advirtieron este punto y ciertas implicaciones importantes no notaron otras no menos relevantes. Entonces, parte de sus errores consistieron en que en el momento de calcular el supuesto efecto cuántico a través de la integral de línea cerrada en el espacio-tiempo -y no entendemos porque la restricción sobre tiempos constantes- para $\mathcal{A}_{AB}$ alrededor de la disconexidad, no se dieron cuenta que una trayectoria de integración como esa en el dominio de definición para $\mathcal{A}_{AB}$ *no* representa frontera alguna para cualquier superficie contenida sobre ese dominio, por lo que en estas condiciones no es válido aplicar el teorema de Stokes de modo que relacione una integral de línea con una integral de superficie. Sin embargo, ellos "inconscientemente" utilizaron un dominio matemático extendido con respecto al de $\mathcal{A}_{AB}$ en el que incluyeron a la disconexidad y que les permitía utilizar el teorema de Stokes, pero entonces aplicaron el teorema de Stokes a $\mathcal{A}_s$. Ahora bien, coincide que el valor de esta última integración es igual al del ***periodo*** de $\mathcal{A}_{AB}$[‡] alrededor del conjunto de sus singularidades que se encuentran sobre el eje espacial de Υ. La coincidencia resulta de imponer la continuidad al potencial en todo punto del espacio-tiempo, pero debe de quedar claro de que se está hablando de propiedades ***diferentes*** de las ***distintas*** partes en que se dividio el potencial. Por tanto, esto muestra que la continuidad del potencial resulta ser una condición indispensable para sostener el argumento que otorga un significado físico al mismo. Luego, para alguien que sólo valora las condiciones de contorno del campo de fuerza electromagnético, la continuidad del potencial es innecesaria, pues en el caso que estamos discutiendo puede elegirse para la región exterior a Υ una infinidad de potenciales cuya derivada exterior se anule sin que se satisfaga la condición de continuidad en la periferia de Υ, pero cumpliéndose las condiciones de contorno para el campo. Sin embargo se dirá que precisamente el no valorar con cuidado las condiciones para el potencial es lo que conduce a una paradoja en el efecto **AB**. La respuesta es que no hay tal paradoja si el cuidado se concentra sobre las condiciones del campo, como ya hemos mostrado. Por otro lado, de nada sirve la continuidad del potencial en la línea de argumentación de **AB**, más bien resulta ser la propiedad de continuidad matemática un elemento clave para refutar formalmente la explicación de **AB**. Al respecto obsérvese que ellos identificaron la función de recalibración χ con la integral de línea de $\mathcal{A}_{AB}$, por lo que implicitamente supusieron que $\mathcal{A}_{AB}$ era una 1-forma diferencial **exacta** (recuérdense las propiedades matemáticas de χ), y esto es incorrecto según el teorema de De Rham, pues las integrales de línea cerradas en torno al dispositivo que confina a F_{12} no se anulan para $\mathcal{A}_{AB}$. Este hecho que está íntimamente relacionado con la no simplemente conexidad del espacio donde se mueven los electrones de paso fue el motivo propulsor para tratar de dotar de significado físico al potencial electromagnético. Esto muestra clara y contundentemente que si se quieren evitar discusiones estériles en física es necesario conocer

‡ Recuérdese que el periodo de una k-forma diferencial **cerrada** es el valor de su integral sobre una k-variedad-**ciclo** contenida en el dominio de su definición.

detalladamente los objetos matemáticos y sus propiedades, y por tanto que no debe de asumirse una actitud de indiferencia ante la matemática como aún hoy en día la realizan muchos físicos.

Por otra parte, el imponer que la recalibración satisfaga las condiciones de contorno establecidas para el campo de fuerza electromagnético podemos relacionarlo con el propio comentario de **AB**: "Es verdad que todos estos efectos de los potenciales dependen solamente de la cantidad invariante de norma $\oint \vec{A} \cdot \vec{dx} = \int \vec{H} \cdot \vec{ds}$, así que en realidad ellos pueden ser expresados en términos de los campos dentro del circuito."; aunque lo correcto era expresar el valor del invariante como una integral de F sobre una dos-variedad inmersa en el espacio-tiempo que corte espacialmente la sección transversal de Υ y que si se desea relacionar con la integral de línea del potencial asociado debe hacerse únicamente con la parte de la cual "directamente se deriva". Por tanto, queda de manifiesto que **AB** reconocían que solamente los efectos del potencial podrían entenderse en términos del campo de fuerza; sin embargo, como ya hemos apuntado, el olvidarse del campo electromagnético de los electrones de paso les hizo sugerir una interpretación que no es clara ni fácil de sostener.

Resumiendo, podemos decir que debido a su horizonte conceptual y los elementos teóricos que usaban, **AB** plantearon dos alternativas para explicar el efecto: una teoría no local o una teoría local. El primer camino fue descartado por la problemática tan difícil que representaba. Así, necesariamente la segunda opción, desde su punto de vista, conducía a reconocer el significado físico del potencial vectorial, aunque admiten que sólo en ciertos casos, además de que habría que definir la distinción entre dos estados cuánticos que difieren por una recalibración. Pero Aharonov y Bohm no consideraron el hecho de que los electrones que cruzarían la vecindad del dispositivo Υ modificarían las propiedades electromagnéticas de este, y que por lo tanto, estas propiedades modificadas junto a efectos relativistas afectarían entonces las trayectorias de aquellos, sin que exista una interacción a distancia. Se limitaron a considerar un caso *idealizado* de electrodinámica. De modo que una teoría local no implica necesariamente en el caso del efecto **AB** aceptar que el potencial electromagnético represente alguna entidad física. Además, como ya señalamos, el motivo que impulsó fuertemente el proyecto de **AB** fue una incorrecta representación matemática de los fenómenos electromagnéticos.

Hacemos incapié en este punto porque, al igual que en el análisis de Feynman (ver capítulo anterior), mucha gente al asumir una posición en física resultado de su *inter-*

acción (conciente o inconsciente) con una o algunas corrientes de pensamiento, que en algún momento dado puede o pueden ser las hegemónicas, no se da cuenta que ello define automáticamente un horizonte conceptual que *limita a ver* las cosas desde cierta perspectiva, impidiendo que los individuos sean capaces de plantear otras alternativas.

Es importante señalar la influencia casi determinante de los elementos teóricos, que reflejan el desarrollo de las investigaciones, con que cuenten las personas. Esto se ejemplifica en el hecho de que la discusión que aquí se ha presentado se circunscribió al uso de conceptos "clásicos", pero como la discusión ha sido permanente ahora es encarada por otras personas con ayuda de nuevos elementos teóricos como es el caso del trabajo publicado por Olariu, S y Popescu, I.I. [13], quienes realizaron una revisión sobre los efectos producidos por "flujos electromagnéticos confinados", haciendo un énfasis particular en el efecto **AB** y sus implicaciones filosóficas dentro del marco de la interpretación de Copenhague con base en ideas sugeridas por Wu y Yang[14]. Sin tratar de extendernos demasiado en este tema y como una muestra más simplificada de esta línea de pensamiento consideraremos la exposición de Lewis H. Ryder[15] quien, sin cambiar los supuestos de Aharonov y Bohm, muestra un estudio de las propiedades topológicas determinadas por el dispositivo $\boldsymbol{\Upsilon}$ en relación con el espacio físico en el cual se encuentra inmerso y cuya vecindad cruzan los electrones de paso, para concluir, por la disconexidad que representa el dispositivo $\boldsymbol{\Upsilon}$ en dicho espacio y la supuesta propiedad de multievaluación de algunas funciones que pueden ser definidas en una región complementaría a la ocupada por tal dispositivo, la *necesidad* del efecto **AB** en el electromagnetismo y por lo tanto la *necesidad* del reconocimiento del potencial electromagnético como una entidad física.

A este estudio cabe comentar que en el análisis topológico realizado no se toman en cuenta las condiciones *completas* -obsérvese que tampoco lo hicieron **AB**- en las que se han verificado el efecto **AB**, es decir, el espacio físico por el que cruzan los electrones no sólo no es simplemente conexo sino que es multiplemente conexo (contabilícese el obstáculo que representa la rejilla doble), por lo que si se retirara la disconexidad formada por el dispositivo $\boldsymbol{\Upsilon}$ (ver figura 3.2) aún resultaría que la región accesible para los electrones de paso no es simplemente conexa, suponiendo que los obstáculos son impenetrables, y podríamos asignarle un potencial a través de una función bien comportada en todo punto, incluyendo el interior de los obstáculos, de acuerdo con la transformación (3.2). De esta manera, si en una región libre de campos se colocan obstáculos que no confinen campo de fuerza electromagnético alguno, tal como un biprisma, al paso de los electrones, entonces éstos deberian mostrar, de acuerdo con ese enfoque que es el comúnmente aceptado, variaciones en su patrón de impacto de la clase del efecto **AB**, pero como ya hicimos notar, en un caso como éste la cantidad que representa los "efectos cuánticos" del potencial electromagnético $\oint A_\mu d^\mu \cdot dx^\nu \partial_\nu$, para cualquier trayectoría de integración, es nula, por lo que los mencionados efectos no se presentan.

Por otra parte, repetimos, que no es posible usar el teorema de Stokes como Ryder y otras personas –entre ellas Wu y Yang, y Berry del cual se hace referencia más adelante– lo hacen para definir una "función multivaluada" que indica los efectos del potencial, pues ello viola: la definición misma de una forma diferencial, y luego, las condiciones inherentes a la demostración del mencionado teorema, a saber, la continuidad y diferenciabilidad de las funciones que se integran, con respecto a cada parámetro del cual dependen, y de las que se hacen uso para aplicar el teorema fundamental del cálculo con el que se establece la relación entre las distintas integrales, que es el contenido del teorema de Stokes, y consecuentemente se entra en contradicción con el teorema de De Rham. El mismo Ryder remite al trabajo de Wu y Yang†. Dentro de este tenor también puede consultarse el artículo de M.V. Berry[19].

Por otra parte, ante este mismo problema pero desde otra perspectiva, se encuentra el trabajo de Dechoum-Franca-Maia Jr[20], que basándose en las fluctuaciones electromagnéticas del punto cero –lo cual implica que las fuentes del campo electromagnético sufren variaciones temporales en su posición– sugieren que al no poderse hablar estrictamente de situaciones electromagnetostáticas sólo tiene sentido hablar de los efectos del campo de fuerza, pues únicamente situaciones en las que se supervaloran condiciones estáticas dan cabida a la especulación sobre el significado físico del potencial electromagnético. En este sentido, en el otro ejemplo que a continuación analizaremos en relación con el significado físico del potencial, su autor abusa de una situación como la mencionada.

El ejemplo aludido cae totalmente dentro del marco teórico de la electrodinámica clásica. Pero antes de analizarlo es conveniente recordar el concepto de *momento lineal del campo electromagnético* y el contexto en el cual se introduce, pues dicho concepto se

---

† También Ryder hace referencia a una disputa entre Bocchieri-Loinger[16][17] y Bohm-Hiley[18]. En tal discusión Bohm-Hiley hacen una defensa de la explicación ortodoxa del efecto **AB**, limitándose a "refutar" los argumentos en contra, y muy particulares, de Bocchieri-Loinger. Cabe resaltar que Bohm-Hiley siguen tratando la parte electromagnética del efecto como un problema ideal de electrodinámica.

presentará como un elemento en la discusión que trataremos.

§7 El tensor de energía-momento de un sistema cerrado. El caso electromecánico.

La necesidad de introducir el concepto de momento lineal del campo electomagnético surge lógicamente del hecho de que en un sistema de cargas eléctricas y campos de ese tipo, observados desde algún sistema de referencia inercial, se deduce (a través de un razonamiento que involucra la tercera ley de Newton) que en ausencia de fuerzas externas al sistema no se conserva el momento lineal mecánico de los cuerpos cargados (el lector debe de considerar este hecho en la fuerza de Lorentz, ecuación (2.5)), por lo que si se desea mantener un concepto como el "momento" que nos ayude en el estudio del sistema mencionado, entonces es necesario modificar la ley de conservación del momento mecánico incluyendo entidades del campo electromagnético que permitan continuar con una ley similar. El concepto de momento lineal del campo electromagnético sirve para tal efecto, pero obsérvese que la inclusión en la teoría de este concepto para que juegue el papel antes señalado refuerza la idea de materialidad de tal campo, remitiendo, por tanto, a posiciones de principio en las interpretaciones de los fenómenos electromagnéticos. Parecería, además, que los razonamientos anteriores se inscriben en el marco de la relatividad galileana, sin embargo no es así, pues si se reflexiona un poco, se notará que el contenido físico de los postulados dinámicos, que son el resultado de la elaboración y refinamiento de las experiencias humanas, se refiere al hecho de que un objeto (por el cual entendemos un sistema físico con estructura al que le podemos asignar variables dinámicas como un "todo" y que son estas variables las que caracterizan su situación mecánica, claro está, de manera relativa) cualquiera sólo modifica su estado de movimiento al estar en interacción con sus alrededores y que dicha modificación es inversamente proporcional a la resistencia presentada por las condiciones externas con las que el objeto co-determina su estado de movimiento, debiendo de considerarse en todo ello el estado de movimiento del observador que aplica los criterios dinámicos establecidos sin soslayar la acción recíproca, aunque puede ser mediatizada, entre el observador y el objeto observado. Somos conscientes de que la construcción de un algoritmo que permita un cálculo cuantitavo exacto de las modificaciones en el estado de movimiento de los objetos materiales es una tarea difícil, si no es que imposible, como a continuación podrá notarse. En tanto, debe ser claro que para el caso de la relatividad especial sólo se ve, con respecto a la mecánica clásica, modificada la cinemática de los cuerpos en movimiento por el hecho de que se le considera en un marco conceptual en el que el espacio y el tiempo se han unificado, que reconoce explícitamente el movimiento relativo como un elemento necesario en el estudio de los procesos mecánicos, y esto conduce a relaciones más complejas entre los conceptos dinámicos, que no significan leyes de movimiento diferentes. Entonces, como ocurre en todo proceso de generalización y unificación, el concepto de momento lineal del campo electromagnético será parte de una entidad más compleja y estará ligado a otros elementos dinámicos.

Parafraseando a Eyges[21], la ley a la que nos referimos tiene la forma de un teorema matemático, su derivación es inequívoca desde este punto de vista, pero su interpretación física no lo es en absoluto. Aquí presentaremos una derivacón que se apoya en la exposición del párrafo 94 del segundo volumen del curso de física teórica de Landau-Lifshitz[22], sin embargo haremos algunas precisiones sobre la misma, comentando las posibilidades que ofrece en la representación de los teoremas de conservación de un sistema electromecánico y la solución que los autores ofrecen, además mostraremos la imposibilidad de representar los resultados en términos vectoriales.

En general, para "derivar leyes" de conservación de cantidades físicas que ayuden a explicar la dinámica de un sistema que pueda describirse suficientemente bien como un sistema aislado, se supone que el sistema evoluciona conforme a procesos en los que, dadas ciertas condiciones, las magnitudes de las interacciones entre los elementos que lo constituyen son las mínimas posibles y que las cantidades que se conservan no dependen de las variables necesarias para caracterizar al sistema, por lo que serán invariantes bajo transformaciones de esas variables. Aquí nos interesa la conservación de la energía y el momento lineal, así que aplicaremos el principio de mínima acción tomando en cuenta transformaciones infinitesimales de las variables espacio-temporales†. Entonces, sea L una función escalar que representa la "densidad lagrangiana" de un sistema físico "distribuido"

---

† En general, las variaciones de las variables necesarias para caracterizar un sistema físico definen campos vectoriales en el espacio matemático que lo representa, en consecuencia los objetos matemáticos relacionados con las cantidades conservadas de un sistema no cambian a lo largo de las curvas asociadas con esos campos vectoriales. Los matemáticos han construido un tipo de derivación en términos de tales campos conocida por derivada de Lie, por lo que en su lenguaje la derivada de Lie se anula para las cantidades conservadas; así resulta un conjunto de ecuaciones diferenciales con las que se puede determinar la representación analítica de esos campos y a la vez el conjunto de generadores del grupo de simetría de la cantidad conservada.

en una región del espacio-tiempo y que no depende explícitamente de las variables espacio-temporales. Para aplicar el principio de mínima acción en la región ocupada por el sistema, debemos construir una acción S con base en una integral de "volumen" tatradimensional, por lo que será necesario utilizar la representación en términos de una 4-forma diferencial de L. Esto se consigue con la forma dual de L, es decir

$$^*\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\zeta}\ \mathrm{d}^{\alpha}\wedge\mathrm{d}^{\beta}\wedge\mathrm{d}^{\gamma}\wedge\mathrm{d}^{\zeta}$$

así que

$$S = \int_{\Omega} {}^*\mathcal{L}\cdot\mathbf{d\Omega}$$

donde $\mathbf{d\Omega}$ representa el elemento orientado de "volumen" tetradimensional. Si la forma bilineal **g** que define el producto escalar en la región del espacio-tiempo que estamos estudiando es "diagonal", la funcional de la acción puede escribirse como

$$S = -\int_{\Omega}\sqrt{-g}\mathcal{L}dx^{\mu}dx^{\nu}dx^{\rho}dx^{\sigma}$$

Ahora se calcula la variación de la acción correspondiente a transformaciones infinitesimales de las variables independientes

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$$

donde ξ representa el campo vectorial definido por las transformaciones en la región Ω, por lo cual y tomando en cuenta que la variación de S con respecto a las funciones-variable que contienen la información dinámica del sistema conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange, resulta que la variación con respecto a los elementos contravariantes de **g** es

$$\delta S = -\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\iota\kappa}} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial g^{\iota\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\right)}\right\}\delta g^{\iota\kappa}d\Omega$$

Introduciendo la notación

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\iota\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial g^{\iota\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\right)} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\iota\kappa}}$$

δS toma la forma

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}T_{\iota\kappa}\delta g^{\iota\kappa}\sqrt{-g}d\Omega$$

Haciendo uso de la simetría de $T_{\iota\kappa}$ y de que‡

$$\delta g^{\iota\kappa} = -\xi^{\iota;\kappa} - \xi^{\kappa;\iota}$$

se sigue

$$\delta S = \int_{\Omega} T_{\iota\kappa}\xi^{\iota;\kappa}\sqrt{-g}d\Omega$$

Por otra parte, utilizando la regla de Leibniz para la derivada covariante en los términos $T_{\iota}^{\kappa}\xi^{\iota}$ y la condición de que ξ se anula más allá de la frontera de Ω la última expresión se transforma en

$$\delta S = -\int_{\Omega} T_{\iota\ ;\kappa}^{\ \kappa}\xi^{\iota}\sqrt{-g}d\Omega$$

Así, igualando δS a cero y debido a la arbitrariedad de ξ, se sigue entonces que

$$T_{\iota\ ;\kappa}^{\ \kappa} = 0 \tag{3.4}$$

Ahora bien, ¿para que ha servido todo esto?. Para lo siguiente. Nótese que la ecuación (3.4) es el resultado de traslaciones en las variables espacio-temporales, por lo que debe de existir, siguiendo la analogía con el caso de la carga eléctrica, un tetravector cuyas componentes sean las cantidades conservadas relacionadas con cada una de dichas transformaciones, y que por tratarse de desplazamientos espacio-temporales en el supuesto de que el sistema se considera aislado podemos identificarlo con el 4-momento lineal del sistema. Efectivamente esto es así, pero para manifestar dicha relación -en la cual no consideraremos campos gravitacionales y trabajaremos con coordenadas cartesianas- es necesario llevar a cabo el cálculo de la integral de $\mathbf{T}$ sobre las hipersuperficies que limiten a la región Ω del espacio-tiempo donde está "distribuido" el sistema físico que estamos estudiando, lo cual implica usar una representación de $\mathbf{T}$ en términos de una 3-forma diferencial. Lo anterior se logra en tres pasos. Primero realizamos una operación de contracción entre $\mathbf{T}$ y un campo

‡ El lector puede identificar las variaciones para g como el resultado de la derivada de Lie de dicho tensor con respecto al campo vectorial ξ, y para llegar a la representación de tales variaciones en términos de la derivada covariante debe de utilizar la relación

$$\frac{\partial g^{\iota\kappa}}{\partial x^{\lambda}} = -g^{\alpha\iota}\Gamma^{\kappa}_{\alpha\lambda} - g^{\alpha\kappa}\Gamma^{\iota}_{\alpha\lambda}.$$

vectorial constante ζ. Segundo, determinamos el tensor dual asociado con el resultado anterior. Por último, construimos la 3-forma diferencial requerida. Es decir

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu}\ \partial_\mu \otimes \partial_\nu$$

lo contraemos con $\zeta_\mu \mathbf{d}^\mu$, resultando

$$\mathbf{D} = T^{\mu\nu}\zeta_\mu \partial_\nu$$

por lo que su tensor dual será

$$\tilde{\mathbf{D}} = (T^{\mu\nu}\zeta_\mu)\frac{1}{\sqrt{-\eta}}\eta_{\nu\alpha}\epsilon^{\alpha\beta\gamma o}\eta_{\beta\rho}\eta_{\gamma\sigma}\eta_{o\tau}\ \mathbf{d}^\rho \otimes \mathbf{d}^\sigma \otimes \mathbf{d}^\tau$$

que en términos de formas diferenciales se expresa como

$$^*\mathcal{D} = -(T^{\mu\nu}\zeta_\mu)\frac{1}{3!}\epsilon_{\nu\beta\gamma o}\ \mathbf{d}^\beta \wedge \mathbf{d}^\gamma \wedge \mathbf{d}^o$$

Integrando $^*\mathcal{D}$ en la frontera de $\mathbf{\Omega}$, cuyo elemento orientado de hipersuperficie denotaremos con $\mathbf{d\Sigma}$, obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} {^*\mathcal{D}} \cdot \mathbf{d\Sigma} = -\int_{\partial\Omega} T^{\mu ct}\zeta_\mu dxdydz + T^{\mu x}cdtdydz + T^{\mu y}cdtdxdz + T^{\mu z}cdtdxdy \qquad (3.5)$$

donde se ha elegido una presentación de $^*\mathcal{D}$ tal que en el producto interno con $\mathbf{d\Sigma}$ resulte factorizable un signo. Si ahora calculamos la derivada exterior de $^*\mathcal{D}$

$$d^*\mathcal{D} = -(T^{\mu\nu}_{\ \ ,\kappa}\zeta_\mu)\frac{1}{3!}\epsilon_{\nu\beta\gamma o}\ \mathbf{d}^\kappa \wedge \mathbf{d}^\beta \wedge \mathbf{d}^\gamma \wedge \mathbf{d}^\sigma = -(T^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu}\zeta_\mu)\ \mathbf{d}^{ct} \wedge \mathbf{d}^x \wedge \mathbf{d}^y \wedge \mathbf{d}^z$$

su integral sobre $\mathbf{\Omega}$ será

$$\int_\Omega d^*\mathcal{D} \cdot \mathbf{d\Omega} = -\int_\Omega (T^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu}\zeta_\mu)cdtdxdydz \qquad (3.6)$$

Usando el teorema de Stokes para relacionar (3.5) con (3.6) y considerando (3.4), resulta finalmente

$$\int_{\partial\Omega} T^{\mu ct}\zeta_\mu dxdydz + T^{\mu x}\zeta_\mu cdtdydz + T^{\mu y}\zeta_\mu cdtdxdz + T^{\mu z}\zeta_\mu cdtdxdy) = 0$$

Como ζ es un campo arbitrario constante y se han utilizado coordenadas no gaussianas ni curvilíneas podemos invertir el orden de las operaciones de contracción e integración, así que la ecuación anterior da lugar al siguiente resultado

$$\left\{\int_{\partial\Omega} T^{\mu ct}dxdydz + T^{\mu x}cdtdydz + T^{\mu y}cdtdxdz + T^{\mu z}cdtdxdy\right\}\partial_\mu = 0\,\partial_\mu \qquad (3.7)$$

Dado el origen dinámico de $\mathbf{T}$, la ecuación (3.7) que corresponde a un resultado *global* puede interpretarse, tomando en cuenta la condición aislada del sistema y que el resultado se vincula con transformaciones de las variables espacio-temporales, como indicación de que el 4-momento lineal del sistema se conserva, es decir, que al sistema le podemos asociar globalmente una energía que no cambia con el tiempo y que espacialmente realiza un movimiento rectilíneo y uniforme con respecto a un observador externo, claro está, se suponen despreciables las magnitudes de las interacciones entre el sistema y el observador. Entonces la ecuación (3.4) establece las relaciones *locales* que deben de satisfacer las interacciones entre las diferentes partes del sistema para que se cumpla la conservación de la energía-momento lineal del mismo.

Ahora bien, si se conoce la representación matemática explícita de la densidad lagrangiana del sistema, con lo que hasta aquí se ha expuesto –que es lo que generalmente se toma como válido– se está, en principio, en condiciones de determinar la representación analítica del 4-momento lineal del sistema. Esto se hace como sigue. Ya que en cualquier momento se cumple la ecuación (3.7), esta puede re-escribirse por componentes de la siguiente manera

$$\int T^{\mu ct} dx dy dz = -\int T^{\mu x} c dt dy dz - \int T^{\mu y} c dt dx dz - \int T^{\mu z} c dt dx dy \qquad (3.8)$$

donde se integra en el volumen espacial **ocupado** por el sistema y en cualquier intervalo de tiempo, considerando que la hipersuperficie de integración es la frontera del "volumen" $\mathbf{\Omega}$. La ecuación (3.8) le parecerá al lector más familiar para representar globalmente las ecuaciones de conservación de la energía-momento de un sistema cerrado, pero notará que no es exactamente la ecuación que se nos presenta en los libros de texto, el origen de la diferencia lo encontrará en la aplicación incorrecta del teorema de Stokes sobre la ecuación (3.4). El error estriba en suponer que es válido aplicar el teorema sobre integraciones parciales de una forma diferencial, que está lejos de considerarse en la enunciación de dicho teorema, lo que no implica que **casualmente** tal aplicación conduzca a resultados "correctos". Lo anterior muestra que es imposible dentro del esquema de la relatividad einsteiniana una representación vectorial tridimensional de las ecuaciones de conservación.

Obsérvese que como la ecuación (3.8) representa una integración sobre una hipersuperficie cerrada que limita la región espacio-temporal ocupada por el sistema entonces la integración sobre el volumen espacial se anula. Esto puede visualizarse con ayuda de la analogía que considera la superficie de un cilindro finito en la que las "tapas" se identifican con los volumenes espaciales y el resto con las hipersuperficies en las que interviene la variable temporal, luego por la suposición de que el sistema es cerrado el valor de las integrales en el volumen espacial ocupado por el sistema en diferentes tiempos es idéntico, lo que conduce a la anulación mencionada cuando el proceso de integración se "cierra". De lo anterior se sigue, casi naturalmente, que la integración sobre el volumen espacial en el que se encuentra el sistema a un tiempo fijo, tomando en cuenta el carácter dinámico de $\mathbf{T}$ y las cantidades conservadas que representa la anulación de su divergencia, puede identificarse con las componentes del 4-momento lineal del sistema. Así, los valores de dichas componentes quedan definidas por la ecuación

$$P^{\mu}_{sistema} = \int T^{\mu ct} dx dy dz \tag{3.9}$$

donde recuérdese que la integración se realiza a un tiempo fijo. Por tanto, si la función de Lagrange está asociada con un sistema electromecánico, nos aparece contenido implícitamente en esta última ecuación el concepto de momento lineal del campo electromagnético acoplado al momento lineal de la corriente eléctrica que genera ese campo y, por consiguiente, en el papel de un concepto que nos permite mantener un teorema físico tan importante.

Por otra parte y en relación con lo expuesto en la sección 33 del libro referido de Landau-Lifshitz, la determinación de las ecuaciones locales de conservación para un sistema electromecánico en las que se toman en cuenta al mismo tiempo el campo electromagnético producido por un conjunto de cargas eléctricas en movimiento y los efectos que el mismo produce sobre tales cargas, no resulta de la simple suma de las correspondientes ecuaciones de conservación que se obtienen por separado para: un sistema **A** de cargas eléctricas en movimiento en el seno de un campo electromagnético prefijado y en el que se desprecia el campo de dichas cargas, y el de un sistema **B** en el que se determina el movimiento del campo prefijadas las trayectorias de las cargas; ya que tal suma implica que los sistemas no interactuan entre sí. Este detalle es descuidado por Landau-Lifshitz, pues con el fin de comprobar la validez de esa suma cometen el error de considerar, sin justificación alguna, que es posible hablar de los efectos en una corriente eléctrica causados por el campo que ella misma produce de manera *instantanea* sobre cada uno de los elementos que conforman la corriente, el error se detecta en el uso de la fuerza de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell bajo las constricciones impuestas a los sistemas **A** y **B** por separado‡. Sorprende tal falta si se toma en cuenta la afirmación hecha por Landau-Lifshitz en la sección 3 del primer volumen de su curso de física teórica[23]:

‡ Este error también se comete en la mayoría de los libros de texto, pero a nivel de

"Sea un sistema mecánico compuesto de dos partes A y B, que siendo cerradas, cada una tendrá su respectiva lagrangiana L_A y L_B. Si se alejan estas partes una de la otra suficientemente, para que su interacción se haga despreciable, la lagrangiana del sistema en el límite tenderá a:

$$\lim L = L_A + L_B$$

Esta aditividad de la lagrangiana expresa el hecho de que las ecuaciones de movimiento de cada una de las partes de un sistema que no interactuen con las otras, no pueden contener magnitudes pertenecientes a las otras partes del sistema."
ya que formalmente el hecho de sumar las ecuaciones de conservación está implicado por la comentada aditividad. Debe ser claro que sí se puede hablar de los efectos en una corriente eléctrica debidos al campo que ella produce, siempre y cuando se piense en que la parte del campo asociada con cada elemento de la corriente cambia la trayectoria de los demás elementos modificando consecuentemente su campo asociado, resultando así, por medio de este mecanismo, una acción sobre el primero. Esto indica que si se desea una descripción analítica de tal proceso, la lagrangiana que se debe construir es mucho más complicada de la que suponen Landau-Lifshitz; vease en este sentido el artículo de Coleman y Van Vleck.

§8 Segundo ejemplo.

Ahora ya estamos en condiciones de seguir la línea de argumentación que se ofrece en el segundo ejemplo que vamos a considerar. El ejemplo está tomado del libro[24] y de un artículo[25] de Konopinski. La exposición completa del ejemplo junto con su línea de argumentación, como es claro, se pueden encontrar en las obras referidas, aquí nos limitaremos a resumir y citar los aspectos que interesan para el objetivo de la exposición. Advertimos al lector que dicha exposición se basa en la representación vectorial tridimensional del electromagnetismo, respetándola como debe de ser.

En tal ejemplo se analiza la situación de una partícula de carga q en el seno de un campo electromagnetostático. Con él Konopinski pretende mostrar a través del teorema de balance del momento lineal para un sistema electromecánico que: "...$q\frac{\vec{A}(\vec{r}_q)}{c}$ representa el momento del campo disponible para transferirse al movimiento de la carga q en $\vec{r}_q$.", lo cual, según él, conduce a reconocer el significado físico de A.

Para argumentar su posición, Konopinski parte de la definición vectorial tridimensional del momento lineal del campo electromagnético (al respecto puede consultarse casi

---

cálculo vectorial tridimensional. Ver por ejemplo el libro de Eyges, o el de Konopinski que se cita a continuación.

cualquier libro de electrodinámica)

$$\vec{P}_{c.e.} = \frac{1}{4\pi}\int(\vec{E}\times\vec{B})dxdydz$$

considerando: un campo electrostático $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi$, el campo coulombiano debido a una carga puntual estática $\vec{E}_q(\vec{r}-\vec{r}_q)$, y un magnetostático $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}$. Así, tomando *sólo un* término del momento del campo afirma que: "...solamente la parte de interferencia del momento total del campo

$$\vec{P}_q(\vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi c}\oint\{\vec{E}_q(\vec{r}-\vec{r}_q)\times\vec{B}(\vec{r})\}dv$$

tomará diferentes valores cuando la posición $\vec{r}_q$ de q cambie... La diferencia se impartirá al momento mecánico en el movimiento al cambiar $\vec{r}_q$, siempre y cuando q y $\vec{B}(\vec{r})$ esten aislados, excepto uno con respecto al otro."

De acuerdo a su razonamiento, se sigue que expresando al campo eléctrico de la carga q como $\vec{E}_q = -\nabla\phi_q$ con $\nabla\phi_q \equiv \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}$, y al campo magnético en términos de sus fuentes $\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r})$, entonces resulta

$$\begin{aligned}\vec{P}_q &= \frac{1}{4\pi c}\oint\{\vec{B}\times\nabla\phi_q\}dv\\ &= \frac{1}{4\pi c}\oint\{\phi_q\nabla\times\vec{B}\}dv\\ &= \frac{q}{c}\oint\frac{\vec{J}dv}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}\end{aligned}$$

por lo que en palabras de Konopinski: "La última integral para $\vec{P}_q$ puede reconocerse como exactamente el potencial vectorial del cual $\vec{B}$ es derivable. Así

$$\vec{P}_q(\vec{r}_q) = \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r}_q)$$

y la afirmación en cuestión es confirmada."

Para mostrar la válidez de su afirmación Konopinski apela al ejemplo de un solenoide infinitamente largo (obsérvese la semejanza con el efecto **AB** aunque *no es* tal efecto) en el que se presenta: "Una situación en la que llega a ser crucial reconocer la importancia física de la existencia de un potencial vectorial en una región del espacio en la cual $\vec{E} = \vec{0}$ y $\vec{B} = \vec{0}$ pero $\vec{A} \neq \vec{0}$ cuando se mide en alguna norma.". Lo que efectivamente se determina debe de ocurrir en una situación *estática* en el exterior de un solenoide de tales características que transporta una corriente eléctrica.

Ahora bien, Konopinski observa que el potencial vectorial puede expresarse como

$$\vec{A}(s > a) = \frac{2\pi a^2 nI}{cs}$$

donde: a es el radio del solenoide, I la corriente que circula en el solenoide, y n el número de espiras por unidad de longitud del mismo. Este potencial está dirigido "circularmente" en torno del solenoide y satisface la condición

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{0}$$

Entonces Konopinski señala: "De acuerdo a la interpretación encontrada, el potencial vectorial en el exterior del solenoide (6.20) –se refiere a la expresión para el potencial en el exterior del solenoide– da lugar a un momento del campo dirigido azimutalmente (circularmente), $q\frac{\vec{A}(\vec{r}_q)}{c}$, transferible a cualquier carga q colocada en el punto $\vec{r}_q$ exterior al campo $\vec{B}$ del solenoide."

De lo anterior Konopinski concluye, proponiendo cierto experimento, que si la corriente en el solenoide *es sometida a un proceso de disminución cuasi-estática* –con lo que asegura la aplicación de su modelo– entonces un objeto cargado, como puede ser el caso de una cuenta cargada eléctricamente atravesada por una fibra circular libre de fricción colocada entorno al solenoide, modificará su estado de movimiento debido a una transferencia de momento *causada por el cambio temporal* del potencial vectorial, es decir

$$m\frac{du}{dt} = -\frac{q}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{2\pi q a^2 \dot{I}}{c^2}$$

donde u representa la rápidez del cuerpo con carga q, por lo que según Konopinski: "Integrando (6.21) –se refiere a esta última ecuación– para las condiciones iniciales $U(t = 0)$ e $I(0) \neq 0$ resulta que el momento observable es

$$mu(t \to \infty) = +\frac{2\pi q a^2 nI(0)}{c^2} = \frac{q}{c}A(0)."$$

Hasta aquí el ejemplo de Konopinski, pasamos ahora a discutir su línea de argumentación con la intensión con que trabajamos el ejemplo de **AB**.

§9 Discusión del segundo ejemplo.

Así, por principio de cuentas, recordamos nuevamente al lector las implicaciones que trae consigo el tratamiento vectorial tridimensional de entidades, como el campo electromagnético y el tensor de energía-momento, cuya representación matemática corresponde a tensores definidos en el espacio-tiempo tetradimensional. Por otra parte hacemos la observación de que la idea de identificar al potencial vectorial (la "parte" espacial de $\mathcal{A}$) con un momento lineal mecánico no es nueva, pues, como puede verificarse, esta idea ya había sido contemplada por Maxwell mismo en los párrafos 405 y 590 del volumen II de su *Treatise* (ver la referencia correspondiente al capítulo 2), donde realiza comentarios en los que puede notarse con claridad las mismas ideas que Konopinski manejaría; aunque Maxwell tuvo cuidado en no confundir sus significados.

Ahora bien, para dar una idea más precisa del objetivo que se persigue en esta discusión es conveniente plantear las siguientes dos preguntas. Primera: ¿Por qué Konopinski identifica la "parte de interferencia" del momento total del campo con el momento lineal de la carga?. Segunda, y que indica cual es el problema de fondo: dado que se parte de una situación estática ¿Cuales son los mecanismos que intervienen en el cambio de posición de la carga?.

Con relación a la primera pregunta queremos hacer notar que el hecho de que Konopinski identifique la "parte de interferencia" del momento total del campo con el momento de la carga no es claro ni fundamentado, ya que por un lado habla de esta "parte": "...solamente *la parte de interferencia* del momento total del campo... tomará diferentes valores cuando la posición $\vec{r}_q$ de q cambie...", ¡pero en seguida la considera como el total!: "...La diferencia se impartirá al momento mecánico en el movimiento al cambiar $\vec{r}_q$, *siempre y cuando* q y $\vec{B}(\vec{r})$ *esten aislados*, excepto uno con respecto al otro.", las cursivas son nuestras. Nótese además que con esto último Konopinski dice que su identificación es muy particular, lo cual debe ser evidente, pues en general cuando una carga está inmersa en un campo electromagnético arbitrario la causa de su movimiento es la *interacción* con el campo como un todo.

Cabe señalar que un análisis semejante ya había sido realizado por Eyges (ver op. cit.), llegando a una relación casi idéntica a la anterior pero entre el momento lineal del campo electromagnético y el potencial vectorial, esto es

$$\vec{P}_{elec} = \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r}_q)$$

Además Eyges precisa claramente las aproximaciones que toma en cuenta para su análisis.

Obsérvese que en esta relación también está presente la idea de identificar el potencial vectorial con un momento lineal, en este caso del campo. Así pues, la idea de identificar el potencial vectorial con un momento lineal no es nueva; inclusive tal posibilidad se deja entrever, como ya se ha señalado, en la formulación lagrangiana para el movimiento de una carga q inmersa en un campo electromagnético, ver ecuación (3.3).

En lo que respecta a la segunda pregunta, ésta permite localizar la confusión y el error de Konopinski. Estas fallas se encuentran en que cuando integra la ecuación "(6.21)", él realmente ha calculado una variación del momento lineal, pues aunque en el resultado los símbolos aparentemente expresan los valores del momento lineal de la carga y el potencial vectorial del campo, esto se debe a que se han determinado previamente los valores de tales cantidades para ciertos instantes, por lo que Konopinski, según la mecánica clásica, ha calculado la fuerza ejercida sobre la carga q. Obsérvese que dicha fuerza no es más que la consecuencia del fenómeno de inducción electromagnética debido a la variación de corriente en el solenoide. En otras palabras, Konopinski se ha confundido y manejado obscuramente la representación de algunos conceptos de la electrodinámica clásica para "darle vida" al potencial vectorial, cuando *grosso modo* (ver la discusión sobre el efecto **AB** aunque aquí no se trata de tal efecto) sólo ocurre un fenómeno de inducción electromagnética que se explica de la manera mostrada en el capítulo anterior.

Konopinski también abusa de sus resultados, ya que de un caso muy particular los generaliza sin tomar las debidas precauciones. Es decir, aún si se aceptase que el potencial juega un papel importante en este ejemplo, no es posible admitir la importancia que Konopinski le otorga debido a la arbitrariedad con que puede ser elegido en las configuraciones electromagnéticas, como ya se ha mencionado.

Sin querer Konopinski con su ejemplo obliga a que se realice un análisis más cuidadoso del mismo, terminándose por confirmar el hecho de que en última instancia el campo electromagnético, en el marco de la electrodinámica clásica, es la entidad físicamente significativa. Además, se vuelve a mostrar nuevamente como la representación tridimensional vectorial conduce a conclusiones falsas. Nótese que el ejemplo no hubiera tenido lugar si nuestra representación usual de los fenómenos electromagnéticos fuera tensorial-tetradimensional.

Aprovechando esta discusión, creemos conveniente comentar nuevamente sobre el concepto de momento lineal del campo electromagnético con el fin de analizar otros conceptos que se suponen importantes en la teoría electromagnética: el concepto de flujo de energía del campo electromagnético y el de *vector de Poynting*. Para ello será necesario referirnos a la ecuaciones (3.4) y (3.8).

Como la ecuación (3.4) es válida en todo punto de la región que ocupa el sistema (que aquí suponemos electromecánico), podemos restringir el uso de la ecuación (3.8) a regiones finitas dentro de éste. De ese modo, aunque se sigue cumpliendo la igualdad entre los dos miembros de tal ecuación, sus valores cambiarán en el espacio-tiempo en que sea estudiado el sistema, y particularmente las integrales sobre los volumenes espaciales no se compensarán. Este resultado podemos considerarlo como un teorema de balance para la energía y el momento lineal asociados con la subregión del sistema en estudio.

Sin embargo, desgraciadamente lo que se suele hacer es aplicar el teorema de Stokes a la ecuación (3.4) de la manera señalada en la página 66 en regiones contenidas por el sistema, que al combinarse con una representación tridimensional vectorial de los fenómenos electromagnéticos ha dado lugar a que se forje el concepto de flujo de energía del campo electromagnético. Este concepto se refiere a la supuesta cantidad de energía que atraviesa, por unidad de tiempo, una superficie inmersa en el espacio tridimensional, y que se debe al movimiento de cargas eléctricas, resultado de la interacción con el campo que ellas mismas generan (reflexiónese nuevamente que significan estas hipótesis). Como tal flujo es representado matemáticamente por un escalar, se supone que debe ser el resultado de la integración de las proyecciones sobre dicha superficie de: un campo vectorial‡. Ese campo vectorial, denotado por $\vec{S}$, se define (al respecto el lector puede consultar casi cualquier

‡ Es interesante mencionar la cantidad de conceptos matemáticos que están implicados y anidados en la mencionada integración, por representar a los fenómenos electromagnéticos de forma vectorial tridimensional. Un campo vectorial: el campo eléctrico, un campo pseudo-vectorial (que generalmente, por falta de un análisis matemático detallado, se considera como el resultado de calcular el rotacional de un campo vectorial llamado potencial vectorial, que propiamente debe de tomarse como el resultado de calcular el dual de la derivada exterior de una 1-forma tridimensional): el campo magnético, el producto "cruz" de los campos antes mencionados (que hoy en día se considera como el resultado de calcular el producto interior de: el bivector asociado al campo pseudo-vectorial con el campo vectorial) y que representa el campo vectorial en cuestión, el producto interno de este resultado y los pseudo-vectores que caracterizan los elementos orientados de superficie, que son el dual del producto exterior de los elementos vectoriales diferenciales con los que se parametriza a la superficie.

libro de texto de electrodinámica) matemáticamente de la siguiente forma

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}$$

donde, como se sabe, $\vec{E}$ representa un campo eléctrico y $\vec{B}$ un campo magnético. Tal campo vectorial, conocido por **vector de Poynting**, pretende representar con una dirección definida el flujo de energía del campo electromagnético por unidad de área y por unidad de tiempo. Pero las deficiencias de esos conceptos –que al mismo tiempo muestran las deficiencias de la representación vectorial tridimensional de la electrodinámica– son muchas y a continuación enunciamos las que hemos detectado.

Por principio de cuentas, si se considera el caso de un cuerpo eléctricamente cargado en reposo con respecto a algún sistema de referencia S, se aceptará que se puede hablar de la energía del campo asociado con esa carga, sin embargo para este caso el vector de Poynting es el campo vectorial cero ($\vec{0}$). Lo mismo ocurre si se toma el caso de un imán en reposo relativo con respecto a S. Pero si se consideran al mismo tiempo el cuerpo cargado y el imán, en la condición dinámica de reposo con respecto a S, sucede que ahora sí en tal campo electromagnético habrá un flujo de energía. No nos quebremos la cabeza tratando de explicar estos resultados diciendo que no es lo mismo la existencia de un campo eléctrico y un magnético por separado que juntos, pues se pueden idear configuraciones electromagnetostáticas, que en la práctica se pueden realizar con buen grado de aproximación, en las cuales sigue siendo el vector de Poynting idénticamente cero; o que el flujo de energía al cual se refiere el "teorema" de Poynting es el flujo neto asociado a una superficie cerrada, lo que es peor aún, pues se admite un flujo de energía en un caso *electromagnetostático*, es decir, sin que algo se mueva. Más bien -el lector ya debe de sospecharlo- esta serie de inconsistencias han tenido y tienen lugar porque se usa una representación matemática de la teoría electromagnética que no corresponde a las consideraciones físicas fundamentales de la misma.

Por otra parte, los conceptos de flujo de energía y vector de Poynting no soportan el más mínimo análisis relativista, pues nos encontraremos dentro del marco conceptual vectorial-tridimensional que en tanto para algunos sistemas de referencia (aquí sí consideramos movimientos relativos acelerados) no hay vector de Poynting y en consecuencia tampoco flujo de energía, para otros ocurre todo lo contrario en relación al mismo sistema electromecánico bajo observación, llegándose, particularmente, a plantear el problema de la "perdida de energía" de una carga eléctrica acelerada. Siendo todo ello completamente absurdo. Desgraciadamente una discusión más detallada sobre este tema requiere de otro tipo de trabajos, pero el lector puede darse una idea de nuestra posición si revisa el apéndice del presente.

Finalmente, terminamos esta tésis reiterando el comentario de que todos estos problemas e inconsistencias conceptuales pueden eliminarse si se toma más en serio la relación entre física y matemática.

Notas al capítulo 3

[1] Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. 1972 The Feynman Lectures on Physics, Mainly Electromagnetism and Matter, Edición Bilingüe (Fondo Educativo Interamericano S.A.)

[2] Soper Davison E., 1976 Classical field theory (New york: Jhon Wiley and Sons, Inc.)

[3] Flanders Harley, 1963 Differentials forms with applications to the physical sciences (U.S.A.: Academic Press, Inc.)

[4] Chambers R.G., 1960 Phys. Rev. Lett. **5**, 3.

[5] H.A. Fowler *et al.*, 1961 J. Appl. Phys. **32**, 1153.

[6] Aharonov Y. and Bhom D., 1959 Phys. Rev. **115**, 485.

[7] A. Tonomura *et al.*, 1982 Phys. Rev. Lett. **44**, 1443.

[8] A. Tonomura *et al.*, 1983 Phys. Rev. Lett. **51**, 331.

[9] Coleman S. and Van Vleck J.H., 1968 Phys. Rev. **171**, 1370.

[10] Citado por Cohen-Tannoudji G. y Spiro M., 1987 La materia~espacio~tiempo (Madrid: Espasa-Calpe).

[11] Graham Loren R., 1976 Ciencia y filosofía en la Unión Soviética (Madrid: Siglo XXI de España Editores, S.A.)

[12] Kobe D.H., 1978 Am. J. Phys. **46**, 342.

[13] Olariu S. and Popescu I.I., 1985 Rev. Mod. Phys. **57**, 339.

[14] Wu T.T. and Yang C.N., 1975 Phys. Rev. **D 12** 3845.

[15] Ryder L.H., 1986 Quantum Field Theory (Cambridge University Press)

[16] Bocchieri P. and Loinger A., 1978 Nuov. Cim. **47 A** 475.

[17] Bocchieri P., Loinger A. and Siragusa G., 1979 Nuov. Cim. **51 A**, 1.

[18] Bohm D. and Hiley B.J., 1979 Nuov. Cim. **52 A**, 295.

[19] Berry M.V., 1984 Proc. R. Soc. Lond. **A 392**, 45.

[20] Dechoum K., Franca H.M., and Maia Jr. A.: Considerations related to the Aharonov-

Bohm and Cassimir effects.

[21] Eyges L., 1972 The Classical Electromagnetics Fields (New York: Dover Publications, Inc.).

[22] Landau L.D., Lifshitz E.M., The classical theory of fields Volume 2 Course of theoretical physics (New York: Pergamon Press, Inc. Fourth revised english edition. Reprinted (with corrections) 1989. Translated from the 6th revised edition. 1973.)

[23] Landau L.D., Lifshitz E.M., Mechanics Volume 1 Course of theoretical physics (U.K.: Pergamon Press, Inc. Third edition. Reprinted (with corrections) 1988. Translated from the 3rd revised and enlarged edition 1973.)

[24] Konopinski E.J., 1981 Electromagnetics Fields and Relativistics Particles (New York: McGraw-Hill, Inc.).

[25] Konopinski E.J. 1978 Am. J. Phys. 46, 499.

APÉNDICE

CONSIDERACIONES SOBRE LA CIENCIA
Y
NUESTRA POSICIÓN EN ELECTRODINÁMICA.

Es conveniente iniciar con un comentario sobre el proceso que da lugar al planteamiento riguroso de una problemática relativa a los fenómenos naturales.

Inferimos propiedades de la materia en el transcurso de las experiencias que realizamos con ella gracias a una determinada estabilidad estructural y a los efectos semejantes que siempre se presentan cuando se procuran condiciones similares. Debe ser claro que aquella propiedad que decimos haber inferido de nuestras experiencias y los conceptos que usamos para describirla son el resultado de un trabajo de elaboración de nuestras intuiciones y representaciones respecto a esa realidad determinada, así indicamos los elementos que consideramos relevantes para una explicación. Luego, estas propiedades y los conceptos con ellas relacionados van conformando una imagen del mundo o *estructura teórica* en la que se define y determina lo que posee algún sentido, y consecuentemente sus limitaciones. De esto se observa que toda teoría está condicionada históricamente. Ahora bien, en la medida en que a nuestras representaciones del universo les exigimos: una mayor concordancia con los hechos, que nos permitan establecer relaciones causales entre estos para poder predecir o retrodecir y que cada vez sea menor el número de proposiciones axiomáticas con las cuales podamos explicar los hechos al tiempo que logramos la unificación de sus causas, estamos construyendo teorías científicas. Así, una *teoría científica es un sistema hipotético-deductivo retroalimentado de tipo conjuntista*, es decir, un sistema de proposiciones elaboradas con base en un análisis empírico y ligadas por la relación de implicación con el objeto de ser comprobables, radicando en esto su carácter conjuntista, siendo este objetivo al mismo tiempo el punto de partida de la retroalimentación. Por tanto, la ciencia no es más que el nombre con el que llamamos a esta actividad humana, y las leyes científicas son proposiciones en las que pretendidamente se ha captado la regularidad de los fenómenos naturales bajo ciertas condiciones, y por principio, son constantemente sujetas a revisión y perfeccionamiento. Sin embargo, muchas veces se pierde el objetivo fundamental de toda teoría científica: **el de comprender la naturaleza para transformarla a la medida de las necesidades humanas**, cuando se cae en una recurrencia indefinida de análisis que conlleva las condiciones que permiten desarrollar corrientes de pensamiento cuyas discusiones degeneran en lo que *a priori* e independiente de la naturaleza debe ser válido, conduciendo de este modo a solipsismos y, consecuentemente, a ideas inconexas sobre los fenómenos naturales. Entonces, un hecho importante y del cual también debemos ser conscientes, es el papel que toda teoría juega en una sociedad al contribuir o llegar a generar discursos de poder (en sentido negativo) que tienen como componente orgánica la obstaculización de la emancipación de todos los seres humanos con respecto a sus necesidades materiales y los fetiches que se crean en torno a ellas, obstáculo que es el resultado histórico y al mismo tiempo soporte de la autoalienación humana, con el objeto, **pensado desde esa autoalienación**, de mantener un conjunto irracional de condiciones de existencia que dan lugar a series de relaciones sociales que perpetuan esa autoalienación. De esto debe ser claro que el "pensamiento" hegemónico que hoy parasita a la sociedad humana no es el pensamiento que se merece la ciencia, y que para corregir esta deformación intelectual hay que **hacer en cada momento** una crítica despiadada de todo lo existente, regulándola y corrigiéndola con la realidad misma a fin de transformarla, repetimos, a la medida de los seres humanos todos. Así pues, el proceso para articular una explicación de los fenómenos naturales no es de ningún modo simple sino más bien complejo e inclusive fortuito.

En términos generales, investigaciones marcadas por estos hechos fueron las que dieron lugar a los conceptos de *carga eléctrica* y *campo electromagnético*; de los cuales decimos lo siguiente.

Consideramos que dos cuerpos están *eléctricamente cargados* cuando, después de la criba de la experiencia con la que analizamos causas y efectos, al encontrarse ambos cuerpos en reposo relativo se ejercen una acción recíproca que está bien tipificada. El concepto de *campo eléctrico* podemos entenderlo en relación con tal tipificación, pues a partir de que la presencia de un cuerpo cargado ante otro **co-determina** las condiciones de la interacción que se observa, un cierto análisis sugiere, con base en una extrapolación empíricamente fundamentada en la cual la contribución de uno de los sujetos de la interacción a las condiciones de la misma se desprecia –concepto de carga eléctrica de prueba–, que parte de las condiciones necesarias para la interacción (como son la carga eléctrica de sólo uno de los cuerpos y la distancia relativa a la que potencialmente se encontraría el otro) pueden considerarse como suficientes para explicar y predecir el efecto eléctrico que un cuerpo cargado sufriría, si, como ya se dijo, los efectos de este último son despreciados, siendo precisamente estas condiciones las que conforman la noción de campo eléctrico asociado a un cuerpo cargado. Observemos que de lo anterior se siguen las propiedades clásicas que caracterizan a este campo: continuidad, dependencia espacio-temporal con respecto a la distribución de carga eléctrica, superposición lineal (porque un campo eléctrico no afecta eléctricamente a otro), e **imponderabilidad en el sentido en que lo es toda la materia en tanto no se interaccione con ella**, pues, por construcción del concepto, los efectos de un campo eléctrico (léase paralelamente: pues las condiciones determinadas por un cuerpo cargado) sólo pueden conocerse cuando un trozo de materia se introduce en él.

Esta caracterización que lógicamente se sigue del concepto de campo eléctrico hace pensar que no son más que propiedades abstractas del mismo concepto y no cualidades relativas a algo físicamente existente. En este sentido son precisas dos observaciones.

Primera. La lógica que la humanidad ha desarrollado o, de otro modo, las reglas que se han establecido para construir y relacionar símbolos a los que se les pueden dotar de significados organizados cualesquiera suceptibles de "verificarse" en un contexto determinado, se basan en última instancia, independientemente del nivel de rigurosidad alcanzado, en la forma en que ocurren y se desarrollan los acontecimientos naturales -inclúyase la base biológica con la que asimilamos y procesamos el mundo que nos rodea, el "propio" y el que "creamos"-. Así, considerando que un desarrollo lógico no es otra cosa que la investigación de una serie de posibilidades físicamente realizables, en el caso del concepto de campo eléctrico puede aceptarse su caracterización como válida, pues ésta ha sido respaldada experimentalmente.

Segunda. La noción de campo es difícil de comprender en la medida en que deseamos una representación figurativa del mismo, tal y como nos representamos a la materia que nos es "directamente" sensible -piénsese en las imágenes que se ofrecen sobre el modelo atómico de la materia-. Pero la dificultad puede superarse si como en el caso de la materia que afecta de modo directo nuestros sentidos y que calificamos de ponderable por ser una condición con una determinada estabilidad estructural en relación a nosotros que se nos aparece de manera discreta y con la cual suponemos que interactuamos en la medida en que sufrimos sus afecciones, admitimos que el campo eléctrico representa un *continuo* de condiciones espaciales asociadas con la propiedad de carga eléctrica de la materia siendo, por decirlo audazmente, una extensión misma de la condición que representa esta propiedad; aunque esta relación puede plantearse de manera inversa, es decir, el cuerpo cargado puede considerarse como una región limitada del espacio en la que las interacciones con el campo son singularmente elevadas. Puede notarse con esto que una gran parte de la dificultad para comprender la noción de campo estriba en la disociación inconciente y casi automática, por el tipo de experiencias a las que estamos constantemente sometidos, que realizamos sobre los elementos que conforman nuestra realidad.

Es necesario comentar, al menos de modo cualitativo, sobre los fenómenos electromagnéticos cuando hay movimiento relativo entre cuerpos cargados eléctricamente.

Así, debemos de ser conscientes que en el caso electrostático, la cuantificación experimental de los efectos del campo requiere necesariamente de una constricción externa al mismo, para evitar el movimiento de la carga de prueba que se usa en tal cuantificación; resulta además que la propia magnitud de la constricción puede servir de patrón de medida para los efectos del campo. Entonces, cuando hay movimiento relativo entre cargas eléctricas, debe ser claro que las condiciones representadas por el campo eléctrico a lo largo de la trayectoria que una carga realice con respecto a las otras será en general una función de la posición y el tiempo. El detalle que hay que cuidar es el del sistema de referencia en el cual se realizan las observaciones sobre el movimiento de dicha carga para poder expresar adecuadamente la ecuación dinámica correspondiente, o en otras palabras, para determinar el campo de fuerza que afecta a la carga. Es en este sentido, relativista, que hay que contemplar la noción de **campo magnético** aunque históricamente no fue así, pues como el lector familiarizado con la electrodinámica de Maxwell-Lorentz sabe, en la ecuación que describe el movimiento de una carga eléctrica intervienen tanto el campo eléctrico como el magnético; queda por tanto la tarea de precisar la noción de éste último. Al respecto, aun aceptando como en el caso del campo eléctrico que el campo magnético es un conjunto de condiciones pero ahora asociadas a cargas en movimiento, la existencia de tales condiciones depende del estado de movimiento relativo entre las cargas asociadas a esas condiciones y el sistema de referencia desde el que se pretende determinar el movimiento de una carga eléctrica, por lo que hay que ser explícito en mencionar esta situación en el concepto de campo magnético. Sin embargo tratar de forjar un concepto independiente de campo magnético entra en la línea de un pensamiento que no comprende el significado de la unificación teórica realizada por Maxwell en relación a los fenómenos electromagnéticos y el posterior desarrollo relativista llevado a cabo por Einstein. Entonces, más bien debe tomarse el campo magnético, por estar vinculado al movimiento de cargas eléctricas, como un **efecto relativista** del eléctrico, no en el sentido de que este último sea una "fuente" del primero sino en el sentido de que el campo magnético es el conjunto de modificaciones que se presentan en las condiciones que conforman el campo eléctrico debido al movimiento relativo con respecto a los cuerpos cargados e indicativo por lo tanto de ese movimiento de las cargas. Por tanto, el campo magnético también representa un cambio en los efectos eléctricos; cuya magnitud depende del movimiento relativo mismo. Así que la noción de campo magnético debe considerarse como un reflejo inmediato y manifiesto de la relatividad. Es por esto, y sólo en éste sentido, que cabe hablar de un **campo electromagnético** considerándolo como la conjunción de dos aspectos: el campo eléctrico y las modificaciones de las condiciones que éste representa causadas por el movimiento relativo (noción de campo magnético). Esta relación íntima de los dos aspectos del campo electromagnético implica que una modificación en alguno de ellos conlleva a una modificación en el otro. Las series de sucesiones de modificaciones del campo electromagnético, en el espacio-tiempo de algún observador, podemos identificarlas como radiación electromagnética. De esto, alguien podría pensar que es innecesario entonces el concepto de campo magnético, porque si su presencia se infiere con ayuda del movimiento de cargas eléctricas, lo correcto sería tomar el campo eléctrico efectivo que se mediría en sistemas de referencia inerciales que en cada instante de tiempo acompañaran a las cargas eléctricas. Sin embargo, aunque es correcta la observación de que sólo el campo eléctrico afecta a los cuerpos cargados, se está confundiendo con el hecho de que la noción de descripción es también de carácter relativo, es decir, la descripción del movimiento realizado por un cuerpo depende del sistema de referencia desde el que se lleve a cabo. Es ésta conjunción de relatividades la que obliga a considerar al campo magnético, pero siempre como una modificación relativista del eléctrico. Por tanto, en última instancia es el movimiento relativo entre las cargas eléctricas asociadas con el campo y el observador que presencia los fenómenos electromagnéticos, el que determina la manera en que existen y se manifiestan las condiciones que representan el campo. Al respecto, como ya se habrá notado, en este trabajo el estudio de los fenómenos elecromagnéticos se realizará dentro del marco teórico de la electrodinámica clásica tomando en cuenta una formulación explícitamente relativista en el sentido de Einstein.

Por otro lado, debe ser claro que en la medida en que las propias interacciones electromagnéticas dan lugar a objetos más complejos, bajo determinadas condiciones, se presentarán fenómenos electromagnéticos de órdenes de complejidad mayores. Así, al inicio, cuando en los sistemas estudiados se presentaban esos complejos de materia, hubo la necesidad de clasificar los diversos orígenes de los fenómenos electromagnéticos estableciéndose muchas series de relaciones, lo que dificultaba la comprensión y unificación de tales fenómenos. Se tuvieron que hacer muchas hipótesis audaces al simplificar la problemática y para llegar a suponer que en principio es posible explicar los mencionados fenómenos con el concepto de campo electromagnético como aquí lo estamos presentando gracias a nuestra condición histórica. No obstante, en la medida en que se quieren reconstruir fenómenos electromagnéticos de un considerable nivel de complejidad suele cometerse el error de no tomar en cuenta lo que significaban esas hipótesis simplificadoras -lo cual pone de manifiesto la incomprensión sobre el hecho de que a todo cambio en las condiciones que determinan cualquier sistema físico corresponden cambios en las relaciones sin excluir la posibilidad de otras nuevas entre sus elementos constituyentes, aunque a veces se necesita una acumulación grande de cambios en tales condiciones para poder observar un cambio significativo en las relaciones de los elementos del sistema; en este sentido René Thom ha dado un paso decisivo en la formalización de estos acontecimientos con sus trabajos sobre catástrofes- llegándose a confundir los fracasos en dicha reconstrucción con posibles falacias en las premisas de la teoría. Más bien, hay que valorar suficientemente lo que implica el proceso de reconstrucción de un fenómeno para poder ser capaces de considerar la presencia de relaciones nuevas al pasar de un orden estructural a otro. Esto es importante en óptica y estado sólido, por mencionar una área de la física donde los procesos no lineales son la regla, y en general en todos los sistemas dinámicos. Toda la gente relacionada con la ingeniería civil comprende la justeza de estas observaciones, y no se diga de las personas relacionadas con la neuropsicología y la bioquímica.

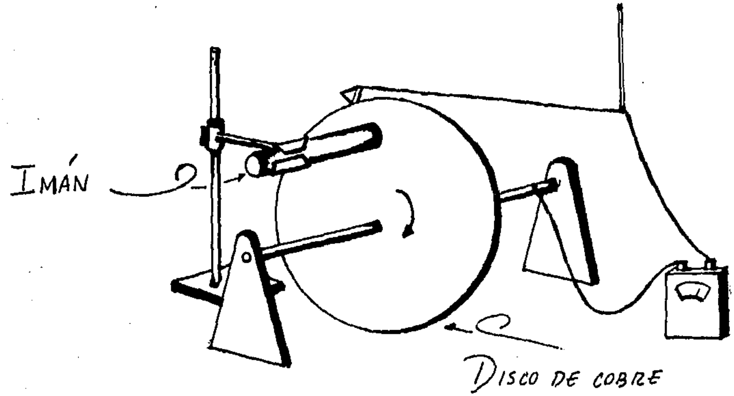
Creemos necesario comentar sobre como entendemos los procesos dinámicos del campo electromagnético. Si se acepta que el campo representa un continuo de condiciones espaciales, es natural considerar que los cambios de las mismas se deben relacionar con un observador, y consecuentemente a variaciones en la configuración de ellas, medidas en intervalos de tiempo. Esto nos remite directamente a los conceptos de espacio y tiempo que ya hemos venido manejando implícitamente en el sentido que a continuación precisaremos. El concepto de espacio lo pensamos en referencia a los objetos materiales y particularmente con el campo de fuerza -en el sentido de campo considerado en el caso electromagnético-gravitatorio, al identificarlo con las condiciones que este representa y que son la causa de la modificación de todas las interacciones. Ligado al concepto de espacio está el concepto de posición respecto a algún objeto material, denominado sistema de referencia, con el que se convienen orientaciones y distancias entre los restantes, la noción de posición dota de contenido relativo al concepto de espacio. El concepto de tiempo lo pensamos en relación con el movimiento relativo espacial entre objetos físicos siendo indicativo de tal movimiento y definido en términos del mismo, su significado está íntimamente ligado y se aprecia junto al concepto de posición, pues elegido el sistema de referencia se conviene en utilizar movimientos periódicos, llamados relojes, que sirve para establecer una correspondencia entre estos y las posiciones de otros objetos medidas desde el sistema de referencia para definir cambios en las posiciones de los últimos. Así, cuando hablamos de cambios temporales estamos indicando la existencia de un movimiento relativo con respecto a algún sistema de referencia. Por tanto, y a modo de resumen, entendemos que hay deformación del espacio-tiempo con respecto a algún sistema de referencia si las propiedades de los objetos que se desean medir con escalímetros y relojes se *ven* o *varían* en diferentes posiciones y/o a diferentes tiempos por las perturbaciones inerciales provocadas: en las interacciones que utilizamos en la medición o sobre los objetos que se miden (para lo referente a la noción de medida remitimos al lector al comienzo del capítulo 3 de este trabajo). De este modo de concebir las cosas se sigue que ningún otro campo de fuerza deforma el espacio en tanto no sean tomadas en cuenta sus propiedades inerciales –tal como es el caso del campo electromagnético– lo cual no se debe de confundir con el hecho de que los efectos de los campos se manifiestan de manera mecánica.

Como consecuencia de lo anterior, conviene subrayar que la apreciación de cambios en el movimiento de un cuerpo cargado inmerso en un campo electromagnético, se debe a las diferencias en las constricciones a las cuales están sometidos el sistema de referencia desde el cual se observa el movimiento, por un lado, y la carga eléctrica, por otro. Esto explica porque cuando elegimos un sistema de referencia en reposo relativo con respecto a la carga eléctrica, que desde otro sistema homólogo se observe en movimiento, la fuerza neta sea cero. Lo anterior hace sospechar que en una situación como la descrita, si no hay una restricción sobre el movimiento de la carga eléctrica cuando ésta se halle en el seno de un campo electromagnético, es posible suponer al igual que en el caso gravitatorio, que desde el sistema de referencia que acompañe a la carga tal campo electromagnético se anula, al menos localmente, implicando a su vez que la propiedad de carga eléctrica en todo cuerpo que se encuentre en la vecindad de este sistema desaparezca, y esto porque no podemos disociar la existencia de un campo electromagnético de la propiedad de carga eléctrica. Lo anterior, como en el caso gravitatorio, no significa la inexistencia de los demás objetos, sino tan sólo que el movimiento ha compensado, desde el sistema de referencia adjunto a la mencionada carga y no de manera absoluta, todos los efectos electromagnéticos, así como en aquel caso el movimiento sin restricciones compensa todos los efectos inerciales.

No soslayamos las interacciones cuantizadas entre el campo electromagnético y los cuerpos cargados, que entendemos como procesos en los que, por determinadas constricciones, sólo son permitidos ciertos cambios en la energía y que, como tentativa de su explicación, se ha propuesto modelar el campo como un conjunto de "paquetes de energía" (fotones) con todas las propiedades corpusculares. Entonces, es preciso decir que más que estar en presencia de dos modelos para el campo, uno continuo y otro discreto tomando partido por uno de los dos, es coherente mantener la posición de que el campo electromagnético (y porque no, todos los campos asociados con las interacciones fundamentales) representan un continuo de condiciones en las que bajo determinadas constricciones se da lugar a un transporte de energía localizable, de un cierto valor, con dirección y sentido, y que también son características que dependen del estado de movimiento del observador.

Aunque en este estudio sólo trabajeremos con sistemas de referencia inerciales y tomaremos como válidas las transformaciones del grupo de Poincaré que relacionan a las observaciones realizadas en dos de estos sistemas, se considerarán los comentarios anteriores, pues servirán para comprender ciertos efectos relativistas del campo eléctrico explícitamente.

Generador Homopolar



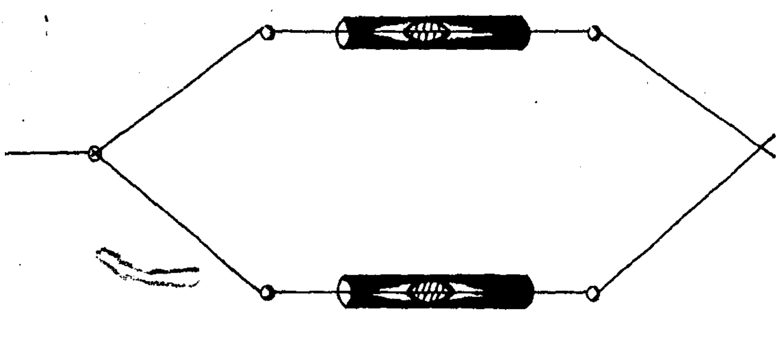
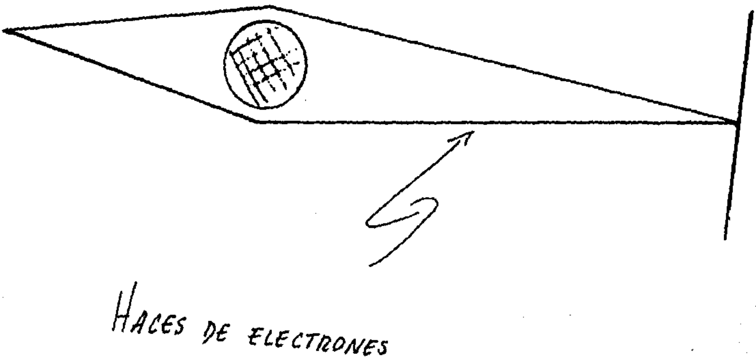


Figura 3.1

FIGURA 3.2



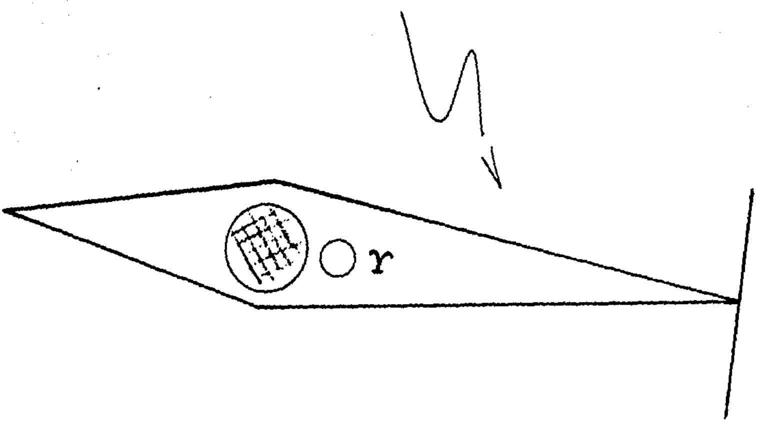


FIGURA 3.3