37
2 eje.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

"ARAGON

" ANALISIS DE ARMADURAS PLANAS Y EN EL ESPACIO POR EL METODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES "

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :
I N G E N I E R O C I V I L
P R E S E N T A
RAUL LEONEL PADILLA SANCHEZ

SAN JUAN DE ARAGON, EDO. DE MEXICO. 1994

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo tiene una - gran importancia para el autor, ya que se destacan los -- principios del análisis estructural aplicados a este método (El de las Rigideces en armaduras), que en licenciatura - se tocan muy poco, ya que el método se aplica de igual forma para una armadura estática que hiperestática de cual--- quier grado.

Debido a que en el presente trabajo, se trata no únicamente para obtener el título de Ingeniero sino también para que el lector pueda entender la lógica que se sigue para el análisis de armaduras hipe-- restáticas, se tiene en el primer capítulo una serie de recopilación para el análisis matricial donde se explican - los tipos de matrices comunes, operaciones con matrices, - orden, compatibilidad obligatoria entre ellas, así como también métodos para resolver sistemas de ecuaciones simultáneos.

En el segundo capítulo se hace - un repaso de los principios del análisis estructural para el presente método, matrices involucradas en él, así como - el orden esperado de cada una de ellas.

Para este capítulo se toman los - principios del análisis estructural como el de continuidad, Hooke, trabajo interno y externo, equilibrio.

En el tercer capítulo se enlista por pasos la lógica a seguir para el método de las Rigideces, con pequeñas modificaciones para tratar de hacerlo - más explícito y fácil de entender para cualquier lector involucrado en esta carrera tan interesante. Se resuelven varias armaduras planas aumentando gradualmente la dificultad de resolverlas, aunque cabe aclarar que dicha dificultad no es por parte del método — ya que para cualquier armadura es la misma lógica — sino en el tamaño u orden de las matrices obtenidas.

En el cuarto capítulo al igual - que en el anterior se resuelven armaduras pero las de éste - capítulo son en el espacio, lo cual se ve reflejado en el - orden de las matrices involucradas ya que para cada nudo se tendrán tres proyecciones en el mismo número de dimensiones, hasta que se resuelve una torre de energía eléctrica de - más de cien barras en 24 nudos que es la culminación del - presente trabajo y que nos demuestra la enorme aplicación que tiene el método de las Rigideces.

En las conclusiones nos narra lo aprendido en los capítulos anteriores e impulsa a seguir - analizando por éste método.

Por último se tienen dos programas de computadora para poder aplicarse en los sistemas de ecuaciones obtenidos, el primero de éste programas es de - solución de sistemas de ecuaciones introduciendo a la computadora en el orden señalado todos los valores del sistema para lograr darle solución a éste; el segundo programa codificado en Basic al igual que el primero — dada su popularidad y poder — nos aplica el criterio de su creador

Cholesky para resolver sistemas de ecuaciones donde la matriz |K| es simétrica y por lo tanto no es necesario introducir los datos de toda la matriz para poder resolver el sistema.

C A P I T U L O I

A L G E B R A M A T R I C I A L

1.1 PROPIEDADES DE LAS MATRICES.

Para comenzar con las propiedades de una matriz, primero debemos conocer el significado de ella, así como de sus elementos y formas.

MATRIZ: Se define como un conjunto rectangular o cuadrado de elementos ordenados en filas, en columnas o ambas y se representan por una sola letra.

ORDEN: El orden de una matriz es referido al tamaño de ésta (número de elementos). Una matriz que tenga m renglones y n columnas tiene un orden m x n y un número de elementos mn.

ELEMENTO: Un elemento de una matriz es una constante que puede estar definida por un número, una función exponencial, logarítmica, trigonométrica de un número que a su vez es una constante.

En algunos casos los elementos de una matriz pueden ser funciones.

En el presente trabajo se representa una matriz de la siguiente manera:

$$[A]= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots\cdots & a_{2,n} \\ & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots\cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad \text{orden } m \times n$$

donde m es el número de renglones y n el número de columnas.

Algunos tipos de matrices son:

— **Matriz renglón:** Es la compuesta por un solo renglón, siendo por lo tanto de orden 1 x n .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

— **Matriz columna:** Es la que está compuesta por un arreglo vertical de una serie de elementos.

$$|\acute{B}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{1,m} \end{vmatrix} \qquad \text{orden } m \times 1$$

— **Matriz cuadrada:** Donde el arreglo tiene el mismo número de columnas y de renglones.

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} m = n \\ \text{orden } m \times n \end{array}$$

— **Matriz nula:** Es aquella en la que todos sus elementos son ceros.

Una matriz nula correspondía al cero en álgebra ordinaria.

$$|O| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

— **Matriz identidad o unitaria:** Es una matriz cuadrada donde todos sus elementos son ceros exceptuando los elementos de la diagonal principal que son la unidad.

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

— **Matriz diagonal:** Es similar al anterior pero los elementos de la diagonal principal pueden o no ser la unidad.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{vmatrix} \quad ó \quad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

* Nótese que no todos los elementos de la diagonal principal tienen que tener un valor diferente de cero.

Comúnmente se representa así:

$$|A| \quad ó \quad |B|$$

— **Matriz simétrica:** Es una matriz cuadrada cuyos elementos son simétricos en la parte superior e inferior de la diagonal principal.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{vmatrix}$$

— **Matriz antisimétrica:** Para ello se debe cumplir que todos los elementos de la diagonal principal sean ceros y los elementos de la parte superior de la diagonal sean los mismos pero con diferente signo a los de la parte inferior de dicha diagonal.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -8 & 3 \\ -1 & 8 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 0 & -a & b & -c \\ a & 0 & -d & e \\ -b & d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

— **Matriz triangular:** Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos superiores ó inferiores a la diagonal principal sean ceros.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad ó \qquad |B| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

— **Matriz traspuesta:** La traspuesta de una matriz es el cambio de renglones a columnas y se denota por el sufijo "T" en la parte superior derecha.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & x & y & z \\ e & b & m & n \\ f & h & c & o \\ g & i & j & d \end{vmatrix} \longrightarrow |A|^T = \begin{vmatrix} a & e & f & g \\ x & b & h & i \\ y & m & c & j \\ z & n & o & d \end{vmatrix}$$

Nótese que todos los elementos de la diagonal principal no cambian de su posición, ésto solo se cumple cuando las matrices son cuadradas.

Esto nos indica que la traspuesta de una matriz renglón se transforma en matriz columna y viceversa.

— **Igualdad de matrices:** Se dice que dos matrices son iguales entre sí, cuando las dos son del mismo orden y todos sus elementos son iguales entre sí.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\text{Si } |A| = |B| \quad \therefore \quad a_{i,j} = b_{i,j}$$

1.2 OPERACIONES CON MATRICES.

Cabe aclarar que para poder hacer operaciones con matrices es necesario que el arreglo entre -- ellas sea CONFORMABLE, es decir, que cada elemento del renglón "x" de una matriz **A**, tenga un elemento "y" en la columna de la matriz B.

— **Suma de matrices:** Para que dos matrices se puedan sumar se necesita que las dos tengan el mismo orden, en caso contrario jamás se podrán sumar.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 10 & -1 \\ 4 & 8 & 7 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 1 + (-1) & 4 + 4 & 3 + 0 \\ 2 + 2 & 10 + (-4) & -1 + 8 \\ 4 + 3 & 8 + (-1) & 7 + 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

mas generalmente :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{vmatrix}$$

orden mxn   orden mxn

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{vmatrix}$$

— Resta de matrices : Análoga al anterior, pero de signo contrario.

Sean las matrices A y B anteriores, se tiene:

$$|A| - |B| = \begin{vmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} - b_{1,n} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} - b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} - b_{m,1} & a_{m,2} - b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} - b_{m,n} \end{vmatrix}$$

— Multiplicación por un escalar: Sea k el escalar que va a multiplicar a la matriz $|A|$, todos los valores de los elementos de la matriz $|A|$ estarán multiplicados por k.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad k \cdot |A| = \begin{vmatrix} k \cdot a_{1,1} & k \cdot a_{1,2} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{2,1} & k \cdot a_{2,2} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k \cdot a_{m,1} & k \cdot a_{m2} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$k \cdot |A| = k \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

— **Multiplicación de matrices :** Para que dos matrices se puedan multiplicar para formar una tercera, se debe de cumplir que el número de columnas de la primera matriz sea el mismo que el número de renglones de la segunda.

O sea, $|A|$ y $|B|$ son conformables para la multiplicación si el número de columnas de $|A|$ es igual a el número de renglones de $|B|$; Si la matriz $|A|$ es de orden **mxn** y la matriz $|B|$ de orden **qxr**, la multiplicación de matrices se podrá efectuar si $n = q$, siendo la matriz resultante de orden **mxr**.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix}$$

orden 3 x 3 — orden 3 x 2

mismo orden

nuevo orden de la matriz

(3 x 2)

$$\begin{array}{ccc} |A| & \cdot & |B| \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \cdot & \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix} = \\ 3 \times 3 & & 3 \times 2 \end{array}$$

nuevo orden de la matriz (3x2)

$$|C|$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\cdot b_{1,1} + a_{1,2}\cdot b_{2,1} + a_{1,3}\cdot b_{3,1} & a_{1,1}\cdot b_{1,2} + a_{1,2}\cdot b_{2,2} + a_{1,3}\cdot b_{3,2} \\ a_{2,1}\cdot b_{1,1} + a_{2,2}\cdot b_{2,1} + a_{2,3}\cdot b_{3,1} & a_{2,1}\cdot b_{1,2} + a_{2,2}\cdot b_{2,2} + a_{2,3}\cdot b_{3,2} \\ a_{3,1}\cdot b_{1,1} + a_{3,2}\cdot b_{2,1} + a_{3,3}\cdot b_{3,1} & a_{3,1}\cdot b_{1,2} + a_{3,2}\cdot b_{2,2} + a_{3,3}\cdot b_{3,2} \end{vmatrix}$$

Se cumple que si $|A|$ es una matriz de orden $p \times q$ y $|B|$ es de orden $q \times r$, el resultado del producto matricial $|A|.|B| = |C|$, es de orden $p \times r$, en la que el elemento C_{ij} es el resultado del producto del renglón i de la matriz $|A|$ por la columna j de la matriz $|B|$.

En forma matemática la expresión sería :

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} (a_{i,k} \cdot b_{k,j})$$

En la expresión resultante de la multiplicación de matrices (matriz $|C|$) el elemento C_{32} es el resultado de el producto interno del tercer renglón de la matriz $|a|$ por la segunda columna de b, esto es :

$$C_{32} = a_{31} \quad a_{32} \cdots a_{3n} \cdot \begin{matrix} b_{1,2} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n,2} \end{matrix} = a_{31}b_{1,2} + a_{32}b_{22} \cdots a_{3n}b_{n,2}$$

Los elementos subsecuentes se obtienen de igual forma. Cabe señalar que la multiplicación de matrices no es conmutativa, o sea :

$$|A| \cdot |B| \neq |B| \cdot |A|$$

Solamente en dos casos la multiplicación de matrices es conmutativa :

a) Caso donde se multiplica la matriz $|A|$ conformable

— **Subdivisión de matrices:** En algunas ocasiones resulta conveniente para simplificar la dificultad de resolver una matriz de gran orden, subdividirla en varias submatrices, según convenga y se requiera por cuestiones de compatibilidad. Hay varias maneras de realizar la subdivisión.

Sea:

$$|A| = \left|\begin{array}{cc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{vmatrix}$$

donde:

$$|x_{11}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \qquad |x_{1,2}| = \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix}$$

$$|x_{2,1}| = \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \qquad |x_{2,2}| = \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}$$

otra manera:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \end{vmatrix} \quad \text{donde}$$

$$|x_{11}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{vmatrix} \quad |x_{12}| = \begin{vmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{vmatrix} \quad |x_{1,3}| = \begin{vmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{vmatrix} \quad |x_{1,4}| = \begin{vmatrix} a_{1,4} \\ a_{2,4} \\ a_{3,4} \end{vmatrix}$$

En la formación del producto de 2 matrices $|A|\cdot|B|$, a veces se subdividen y se expresa el producto en función de las submatrices de $|A|\cdot|B|$, siempre que las matrices dadas sean conformables y que las distintas submatrices en las que fueron subdivididas también lo sean.

Lo anterior se puede comprobar con la multiplicación de una matriz de orden 3 x 3 y una de orden 3 x 2 .

$$|A| = \left|\begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{vmatrix}$$

3 x 3 2 x 2

$$|B| = \left|\begin{array}{cc} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ \hline b_{3,1} & b_{3,2} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{vmatrix}$$

3 x 2 2 x 1

de donde : A · B

$$|A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} x_{1,1}\ y_{1,1} + x_{1,2}\ y_{2,1} \\ x_{2,1}\ y_{1,1} + x_{2,2}\ y_{2,1} \end{vmatrix}$$

Sustituyendo las submatrices se tiene :

$$|A|.|B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & + & a_{13}b_{31} & a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & & a_{23}b_{31} & a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & + & a_{33}b_{31} & a_{33}b_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{vmatrix}$$

Que es el mismo resultado que el obtenido por una multiplicación directa, obtenido anteriormente en la página 13 .

La subdivisión de matrices se utiliza frecuentemente para disminuir el trabajo en la multiplicación de éstas, especialmente cuando las matrices son grandes y algunas de las submatrices son matrices identidad o matrices nulas.

1.3 INVERSION DE MATRICES.

El problema de resolver un sistema de ecuaciones se puede reducir a resolver una ecuación matricial $|A||x|=|B|$ para la matriz incógnita $|x|$; ésta ecuación matricial es análoga a la ecuación numérica $ax=b$, la cual se puede resolver si $a \neq 0$, multiplicando ambos lados por el recíproco o inverso multiplicativo de a, obteniéndose $x=a^{-1}b$.

En esta sección analizaremos el concepto de inversa de una matriz y la emplearemos para resolver un sistema de ecuaciones.

Existen varios pasos para lograr invertir una matriz, los cuales son:

a) Matriz de cofactores.
b) Determinantes.
c) Matriz adjunta.
d) Matriz inversa.

a) **Matriz de cofactores:** Se denota por cof (A) a la matriz de cofactores de $|A|$ que es la formada con los elementos obtenidos de eliminar el renglón i y la columna j de la matriz $|A|$.

Cabe hacer notar que para cada elemento $m_{i,j}$ producido por el determinante se afectará con su recíproco cuando la suma de los subíndices $(i + j)$ sea impar ó non.

b) **Determinante:** Se denota por det A ó bien por $[A]$ para una matriz $|A|$ dada.

Considérese la siguiente matriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}$$

Para lograr resolver el det A se requiere hacer la multiplicación en diagonal de cada elemento por el inferior derecho y así por el siguiente hasta lograr llegar hasta el renglón m, hecho ésto restarle los multiplicados del elemento superior por el inferior anterior a el, esto es:

$$\det A \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

matriz A de apoyo.

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} -$$

$$(a_{41} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{42} \cdot a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} + a_{43} \cdot a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}) =$$

$$= \det A.$$

Ejemplo: Sea la matriz $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

elemento	renglón	columna	suma de subíndices	signo	a ij	[a ij]
a_{11}	1	1	1 + 1 = 2 (par)	+	$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$	25
a_{12}	1	2	1 + 2 = 3 (non)	−	$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$	−4
a_{13}	1	3	1 + 3 = 4 (par)	+	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$	−3
a_{21}	2	1	2 + 1 = 3 (non)	−	$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$	−26
a_{22}	2	2	2 + 2 = 4 (par)	+	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$	4
a_{23}	2	3	2 + 3 = 5 (non)	−	$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$	3
a_{31}	3	1	3 + 1 = 4 (par)	+	$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$	33
a_{32}	3	2	3 + 2 = 5 (non)	−	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$	−5
a_{33}	3	3	3 + 3 = 6 (par)	+	$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	−4

$$\mathrm{cof}\,(A) = \begin{vmatrix} 25 & -4 & -3 \\ -26 & 4 & 3 \\ 33 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

c) Matriz adjunta de $|A|$: Denotada por adj (A) que es únicamente la transpuesta de la matriz de cofactores de $|A|$.

$$\text{adj. }(A) = \text{cof }(A)^T$$

de la matriz anterior se tiene:

$$\text{adj}(A) = \begin{vmatrix} 25 & -26 & 33 \\ -4 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

d) **Matriz inversa:** La ecuación (A) nos proporciona la inversa de la matriz $|A|$.

$$|A|^{-1} = \frac{\text{adj }(A)}{\det (A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

Cabe hacer notar que si el determinante de $|A|$ es cero, no habría $|A|^{-1}$.

$$|A|^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} 25 & -26 & 33 \\ -4 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\det (A) = -1} = \begin{vmatrix} -25 & 26 & -33 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Otro método para poder localizar la matriz inversa es el hacer una serie de operaciones sobre la matriz $|A|$ hasta lograr transformarla en la matriz identidad, al mismo tiempo de lograr que con las mismas operaciones transformar una matriz identidad en la matriz inversa de $|A|$.

Comprobaremos el método con la matriz A anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \qquad |I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

OPERACIONES	RENGLON	MATRIZ |A|			MATRIZ I		
	1	1	5	2	1		
	2	1	1	7		1	
	3	0	-3	4			1
4 = 1	4	1	5	2	1	0	0
5 = 2 - 1	5	0	-4	5	-1	0	0
6 = 3	6	0	-3	4	0	0	1
7 = 4	7	1	5	2	1	0	0
8 = 5 ÷ -4	8	0	1	-5/4	1/4	-1/4	0
9 = 6	9	0	-3	4	0	0	0
10 = 7 - (8 x 5)	10	1	0	33/4	-1/4	5/4	0
11 = 8	11	0	1	-5/4	1/4	-1/4	0
12 = 9 + (8 x 3)	12	0	0	1/4	3/4	-3/4	1
13 = 10 - (15 x 33)	13	1	0	0	-25	26	-33
14 = 11 + (12 x 5)	14	0	1	0	4	-4	5
15 = 12 x 4	15	0	0	1	3	-3	4

Se comprueba, por lo tanto, transformando la matriz |A| en matriz identidad con ciertas operaciones en los renglones, también se transforma una matriz identidad del mismo orden en matriz inversa.

$$|A| \longrightarrow |I| \quad y \quad |I| \longrightarrow |A|^{-1}$$

1.4 SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

Muchos problemas estructurales que se estudian en el presente trabajo (por no nombrar todos) requieren para resolver el problema, la solución de sistemas de ecuaciones simultáneas.

En esta sección se expondrán algunos métodos simples para resolver los sistemas de ecuaciones en forma manual, así como un programa sencillo para comprobar el resultado ó para resolver un sistema de ecuaciones de gran orden y agilizar el ejemplo.

Una recta en el plano xy se puede representar algebraicamente mediante una ecuación de la forma:

$$a_1 x + a_2 y = b$$

A una ecuación de esta forma se le llama ecuación lineal en las variables 'x' y 'y'. En forma general se define una ecuación lineal en las 'n' variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como aquella que puede expresarse en la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

donde:

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ son constantes reales.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ las variables buscadas.

La solución de una ecuación como (I) es el valor dado a cada variable tales que satisfagan dicha ecuación.

Al conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación se le llama <u>conjunto solución</u>.

Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ recibe el nombre de <u>sistema de ecuaciones lineales.</u> Una sucesión de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ es solución del sistema de ecuaciones si al sustituir los valores $x_1 = s_2$, $x_2 = s_2, \ldots,$ $x_n = s_n$ son una solución para cada una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

Para un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas podemos señalar que tiene un conjunto solución infinito.

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

Para poder darle una solución única es necesario darle un valor arbitrario a cualquiera de las 3 variables para tener un sistema del mismo número de incógnitas que de ecuaciones.

Si $x_1 = 1$ entonces:

$$4(1) - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$3(1) + x_2 + 9x_3 = -4$$

agrupando términos:

$$\begin{array}{rl} & -x_2 + 3x_3 = -1-4 = -5 \ldots\ldots\ldots (1) \\ + & x_2 + 9x_3 = -4-3 = -7 \ldots\ldots\ldots (2) \\ \hline \end{array}$$

la solución sería:

$$12x_3 = -12$$

despejando x_3 tendremos la solución para ésta variable.

$$x_3 = -1$$

Ahora sustituyendo el valor de $x_3 = -1$ en la ecuación (1) ó (2).

$$-x_2 + 3(-1) = -5 \qquad \text{despejando } x_2$$

$$x_2 = 2$$

Ahora para la ecuación (2)

$$x_2 + 9(-1) = -7 \qquad \text{despejando } x_2$$

$x_2 = 2$ que es el mismo valor anterior.

En este método es necesario que la diferencia de 2 variables debe ser nula para poder tener la resultante en función de una sola.

Este método se conoce con el nombre de reducción por la forma de eliminar términos rápidamente.

Otro método simple es el llamado de igualación que como su nombre lo dice supone igualar las dos ecuaciones a una misma variable o término por -

separando con el fin de eliminar una incógnita, ésto es:

$-x_2 + 3x_3 = -5$ -------- (1)   despejando x_2 de ambas ecuaciones.

$x_2 + 9x_3 = -7$ -------- (2)

$x_2 = 3x_3 + 5$ -------- (3)   igualando las dos ecuaciones.

$x_2 = -9x_3 - 7$ -------- (4)

$3x_3 + 5 = -9x_3 - 7$ despejando x_3

$x_3 = -12/12 = -1$ valor de x_3

Lo cual comprueba el valor obtenido por el método anterior.

Un tercer método para resolver este tipo de ecuaciones es el del método de <u>sustitución</u> en el cual se despeja únicamente la variable de una ecuación, logrado esto se procede a sustituirla en la ecuación restante.

Ejemplo:

Con el sistema de ecuaciones anterior.

$-x_2 + 3x_3 = -5$ ------ (1)   despejando x_2 de la ecuación (2)

$x_2 + 9x_3 = -7$ ------- (2)

$x_2 = -7 - 9x_3$ valor de x_2 de (2) que se sustituye en la ecuación (1).

$-(-7 - 9x_3) + 3x_3 = -5$ resolviendo la ecuación por tener una sola variable.

$7 + 9x_3 + 3x_3 = -5$

$12x_3 = -5 - 7$

$x_3 = -12/12 = -1$ solución a la variable x_3.

Lo cual comprueba la veracidad del método.

Los anteriores métodos son sencillos en su aplicación, pero están restringidos en cuanto a su utilización en problemas prácticos del presente trabajo, ya que para sistemas de ecuaciones de 4 o más variables se complican por tener que hacer sustituciones sucesivas en los que se pierden las ventajas de éstos métodos.

Para los casos en que se tengan sistemas de ecuaciones de cualquier número (que son los que se tendrán en el presente trabajo) existen varios métodos, de los cuales estudiaremos:

a) Eliminación Gaussiana.

b) Inversión y multiplicación matricial.

c) Regla de Crammer.

a) Eliminación Gaussiana.

Para poder resolver un sistema de ecuaciones simultáneas por éste método basta con lograr reemplazar el sistema de ecuaciones por un nuevo sistema que tenga el mismo conjunto solución, o sea, transformar la matriz aumentada original por una nueva matriz en la que sea fácil detectar su solución.

Verifiquemos el método en el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 11 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -7 \end{aligned}$$

Transformaremos el sistema de ecuaciones en forma matricial a la que llamaremos **A**.

$$|A| = \left|\begin{array}{cccc:c} 6 & -3 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 4 & -2 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right| \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \times 4 \\ ④ \end{array}$$

Multiplicando renglón ③ por 4 sumándoselo al renglón ④ .

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \left|\begin{array}{cccc:c} 6 & -3 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -14 & 1 & -31 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ ② \times (-2) \\ ③ \times 6 \\ + \end{array}$$

Multiplicando el renglón ③ por 6 y sumándoselo al renglón ① .
Multiplicando el renglón ② por (-2) y sumándoselo al ④ .

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \left|\begin{array}{cccc:c} 0 & 9 & -14 & 1 & -25 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -16 & -15 & -33 \end{array}\right| \begin{array}{l} ① + \\ ② \times (-3) \\ \\ \\ \end{array}$$

Multiplicando el renglón ② por (-3) y sumándoselo al renglón ① .

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \left|\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & -17 & -23 & -23 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -16 & -15 & -33 \end{array}\right| \begin{array}{l} ① \times (-16/17) \\ \\ + \\ + \end{array}$$

Multiplicando el renglón ① por (-16/17) y sumándoselo al renglón ④ .

$$\begin{array}{c|cccc|c|l}
1 & 0 & 0 & -17 & -23 & -23 & \\
2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & \\
3 & -1 & 2 & -3 & 0 & -6 & \\
4 & 0 & 0 & 0 & 6.647 & -6.647 & 4/6.647
\end{array}$$

Dividiendo el renglón 4 entre 6.647 y reordenando los renglones.

$$\begin{array}{c|cccc|c|l}
3 & -1 & 2 & -3 & 0 & -6 & \mathrm{I} \\
2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & \mathrm{II} \\
1 & 0 & 0 & -17 & -23 & -23 & \mathrm{III} \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \mathrm{IV} \times 23
\end{array}$$

Multiplicando el renglón IV por 23 y sumándoselo al renglón III.

$$\begin{array}{c|cccc|c|l}
\mathrm{I} & -1 & 2 & -3 & 0 & -6 & \\
\mathrm{II} & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & \\
\mathrm{III} & 0 & 0 & 17 & 0 & 51 & \times (1/17), (-1) \\
\mathrm{IV} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 &
\end{array}$$

Multiplicando el renglón III por 1/17.

Multiplicando el renglón III por (-1) y sumándoselo al renglón II. *

$$\begin{array}{c|cccc|c|l}
\mathrm{I} & -1 & 2 & -3 & 0 & -6 & \\
\mathrm{II} & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 & \\
\mathrm{III} & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & \\
\mathrm{IV} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \times (-3)
\end{array}$$

Multiplicando el renglón IV por (-3) y sumándoselo al renglón II.

* NOTA : Cabe destacar que desde aquí ya se podía haber conocido el resultado de una de las incógnitas, por lo que por sustituciones sucesivas nos darían los mismos resultados.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc|c}
-1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\\ \times(1/3) \quad \times(-2) \\ \times(3) \\ \\
\end{array}
$$

Multiplicando el renglón II por 3.

Multiplicando el renglón II por (-2) y sumándoselo al renglón I.

Multiplicando el renglón III por (3) y sumándoselo al renglón I.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc|c}
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
(-1) \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

Multiplicando el renglón I por (-1) se tiene la solución del sistema.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right|
$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

$x_4 = -1$

b) Inversión matricial.

El método consiste en invertir por cualquier método la matriz original cuadrada, para después multi-plicarla por el vector columna de resultados.

Ejemplo:

Sea la matriz $|\mathbf{A}|$ anterior.

$$|A| = \left|\begin{array}{cccc:c} 6 & -3 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 4 & -2 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right|$$

Que se divide en las dos siguientes submatrices.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad y \quad |B| = \begin{vmatrix} 11 \\ 1 \\ -6 \\ -7 \end{vmatrix}$$

Matriz columna de resultados.

Invertiremos únicamente la matriz |A| cuadrada, a la que uniremos la matriz identidad |I| .

$$\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \begin{array}{c} |A| \\ \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} |I| \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (4) \\ \\ \end{array}$$

Sumando renglón ② al ①.

Multiplicando renglón ③ x 4 y sumarlo al ④.

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -14 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (1/6) \\ (-2) \\ \\ \\ \end{array}$$

Multiplicando ① x 1/6 y sumarlo a ③.

Multiplicando ② x (-2) y sumarlo al ④.

Multiplicar 3 x6.
Multiplicar 2 por (-4) y sumarlo al 3.

$$
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc}
6 & 0 & 5 & 9 \\
0 & 3 & 1 & 3 \\
0 & 2 & -13/6 & 9/6 \\
0 & 0 & -16 & -15
\end{array}\right|
\left|\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1/6 & 1/6 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 4 & 1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\\ (-4) \\ (x6) \\ \\
\end{array}
$$

Multiplicar (5/16) a 4 y sumar a 1.
Multiplicar (1/16) a 4 y sumárselo al renglón 2.

$$
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc}
6 & 0 & 5 & 9 \\
0 & 3 & 1 & 3 \\
0 & 0 & -17 & -23 \\
0 & 0 & -16 & -15
\end{array}\right|
\left|\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 6 & 0 \\
0 & -2 & 4 & 1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ (5/16)\ (1/16)
\end{array}
$$

Multiplicar 1 y 2 por 16 .
Multiplicar 3 por (-16/17) y sumarlo al 4, después multiplicar el renglón 4 por 17.

$$
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc}
6 & 0 & 0 & 69/16 \\
0 & 3 & 0 & 113/16 \\
0 & 0 & -17 & -23 \\
0 & 0 & -16 & -15
\end{array}\right|
\left|\begin{array}{cccc}
1 & 6/16 & 20/16 & 5/16 \\
0 & 14/16 & 4/16 & 1/16 \\
1 & -3 & 6 & 0 \\
0 & -2 & 4 & 1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
x(16) \\ x(16) \\ (-16/17) \\ (17)
\end{array}
$$

Multiplicar renglón ④ por (-1) y sumarlo a ②.
Multiplicar ④ por (-69/113) y sumarlo a ①.

①	96	0	0	69	16	6	20	5	
②	0	48	0	113	0	14	4	1	
③	0	0	-17	-23	1	-3	6	0	+
④	0	0	0	113	-16	14	-23	17	(-1),(-69/113)

Multiplicar ① por (1/96).
Multiplicar ② por (1/48).
Multiplicar ④ por (23/113) y sumarlo a ③.

①	96	0	0	0	26.195	-2.549	37.037	-5.381	← (1/96)
②	0	48	0	0	16	0	32	-16	← (1/48)
③	0	0	-17	-23	1	-3	6	0	← +
④	0	0	0	113	-16	14	-23	17	(23/113)

Multiplicar ③ por (-1/17).
Multiplicar ④ por (1/113).

①	1	0	0	0	0.2729	-0.0266	0.3864	-0.0561	
②	0	1	0	0	0.3333	0	0.6667	-0.3333	
③	0	0	-17	0	-2.2566	-0.1504	0.3301	3.4602	← (-1/17)
④	0	0	0	113	-16	14	-23	17	← (1/113)

Con lo cual logramos invertir la matriz $|A|$.

$$
\begin{array}{c}
① \\ ② \\ ③ \\ ④
\end{array}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
0.2729 & -0.0266 & 0.3864 & -0.0561 \\
0.3333 & 0.0 & 0.6667 & -0.3333 \\
0.1327 & 0.0038 & -0.0177 & -0.2035 \\
-0.1416 & 0.1239 & -0.2478 & 0.1504
\end{vmatrix}
$$

$$|I| \qquad\qquad\qquad\qquad |A|^{-1}$$

Ahora solo basta con hacer una multiplicación matricial de $|A|^{-1} \cdot |B|$

Matricialmente queda expresado como:

$$|A| \cdot |X| = |B| \quad \therefore \quad |X| = |A|^{-1} \cdot |B| \quad \text{donde:}$$

$|X|$ es el vector de incógnitas.

$|A|^{-1}$ inversa de la matriz original $|A|$

$|B|$ matriz columna de resultados.

$$
\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0.2729 & -0.0266 & 0.3864 & -0.0561 \\
0.3333 & 0.0000 & 0.6667 & 0.3333 \\
0.1327 & 0.0038 & -0.0177 & -0.2035 \\
-0.1416 & 0.1239 & -0.2478 & 0.1504
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix} 11 \\ 1 \\ -6 \\ -7 \end{vmatrix}
$$

$$X_1 = 0.2729\,(11) - 0.0266\,(1) + 0.3864\,(-6) - 0.0561\,(-7) = 1.0496 \approx 1.00$$

$$X_2 = 0.3333\,(11) + 0.0000\,(1) + 0.6667\,(-6) - 0.3333\,(-7) = 2.0000 = 2.0$$

$$X_3 = 0.1327\,(11) + 0.0038\,(1) - 0.0177\,(-6) - 0.2035\,(-7) = 2.9992 \approx 3.0$$

$$X_4 = -0.[illegible] (11) + [illegible].1239(1) - 0.2472 (-6) + 0.1504 (-7) = -0.9997 \approx -1.0$$

Lo que comprueba el resultado por éste método.

c) Regla de Crammer.

El método consiste esencialmente en hallar los valores de las incógnitas, o sea, en transformar una matriz aumentada en una matriz cuadrada por medio de eliminación de columnas calculando para cada una de ellas su determinante.

Así, el resultado de dividir el determinante de $|Ai|$ de cada eliminación de columnas entre el determinante de la matriz original cuadrada $|A|$.

$$X i = \frac{[A\ i]}{[A\ ]} \quad \text{............} \quad (I)$$

$$X i = \frac{\det A i}{\det A} \quad \text{............} \quad (I)$$

Ejemplo:

Sea la matriz $|A|$ de los ejemplos anteriores.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & [illegible] & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & [illegible] & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad y \qquad |B| = \begin{vmatrix} 11 \\ 1 \\ -6 \\ -7 \end{vmatrix}$$

Calculemos primero el determinante de $|A|$.

$$|A| = \begin{array}{c} \left| \begin{matrix} 6 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{matrix} \right| \end{array} \begin{array}{l} ① \ (-8),(-1) \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

Multiplicamos ① por (-8) y sumarlo a ②.
Multiplicar ① por (-1) y sumarlo a ④.

$$|A| = \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \atop \left| \begin{matrix} 6 & -3 & 4 & 1 \\ -48 & 27 & -31 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \end{matrix} \right|$$

Con ésto paso logramos que en una sola columna tengamos tres ceros, por lo que se agiliza la obtención del **det A.**

Desarrollando por cofactores a lo largo de la columna ④ tenemos que $C_{2,4}$, $C_{3,4}$, y C_{44} son cero.

$$|A| = -(1) \left| \begin{matrix} -48 & 27 & -31 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -6 \end{matrix} \right| = -(576 + 162 + 31 - 124 - 144 - 162)$$

$$\det A = -339$$

Cálculo del det. A_1

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -6 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} ①\ (-3),(-1) \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{matrix}$$

Multiplicamos ① por (−3) y sumarlo al renglón ②.

Multiplicamos ① por (−1) y sumarlo al renglón ④.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 4 & 1 \\ -37 & 27 & -31 & 0 \\ -6 & 2 & -3 & 0 \\ -18 & 1 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

Nueva matriz $|A_1|$

$$\text{det.}\, A_1 = -(1) \begin{vmatrix} -37 & 27 & -31 \\ -6 & 2 & -3 \\ -18 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -(1044 + 1458 + 186 - 1116 - 261 - 972)$$

$$\text{det.}\, A_1 = -339$$

Cálculo del det. A_2 .

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -6 & -3 & 0 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-3),(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Haciendo los mismos pasos que se hicieron a la matriz $|A_1|$.

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 4 & 1 \\ -48 & -37 & -31 & 0 \\ -1 & -6 & -3 & 0 \\ -2 & -18 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$ Nueva matriz $|A_2|$.

$$\det.\ A_2 = -(1) \begin{vmatrix} -48 & -37 & -31 \\ -1 & -6 & -3 \\ -2 & -18 & -6 \end{vmatrix} = -\ (-1728 - 522 - 558 + 372 + 2592 + 522) = -678$$

$$\det.\ A_2 = -678$$

Cálculo del det A_3 .

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} \quad (-3) \quad (-1)$$ Realizando las mismas operaciones anteriores.

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 11 & 1 \\ -48 & 27 & -37 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -18 & 0 \end{vmatrix}$$ Nueva matriz $|A_3|$.

$$\det A_3 = -(1)\begin{vmatrix} -4? & ? & -? \\ -1 & ? & -? \\ -? & 1 & -13 \end{vmatrix} = -(17?3 + 324 + ?7 - ? - ? - ?)$$

$$\det.\ A_3 = -1017$$

Cálculo del det. A_4 .

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -6 \\ 4 & -2 & -2 & -7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \times (4), (6) \\ (4) \end{array}$$

Multiplicando por 4 a (3) y sumarlo a (4).

Multiplicando a (3) por 6 y sumarlo a (1).

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 0 & 9 & -14 & -25 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & -14 & -31 \end{vmatrix}$$

Nuevo matriz $|A_4|$.

$$\det.\ A_4 = (-1)\begin{vmatrix} 9 & -14 & -25 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -14 & -31 \end{vmatrix} = (-1)(-279 - 84 + 1050 + 150 + 126 - 1302)$$

$$\det.\ A_4 = 339$$

Por lo que según la fórmula (I) las incógnitas serían:

$$\text{(I)} \ldots \quad X_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

$$X_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-339}{-339} = 1.00$$

$$X_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-678}{-339} = 2.00$$

$$X_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-1017}{-339} = 3.00$$

$$X_4 = \frac{\det A_4}{\det A} = \frac{339}{-339} = -1.00$$

Mismos valores calculados anteriormente por el método de eliminación Gauss Jordan y por inversión matricial.

C A P I T U L O I I

PRINCIPIOS QUE RIGEN AL ANALISIS ESTRUCTURAL PARA LA APLICACION DEL METODO DE LAS RIGIDECES.

PRINCIPIOS QUE RIGEN EL ANALISIS ESTRUCTURAL PARA LA APLICACION DEL METODO DE RIGIDECES.

Durante tiempos pasados la demanda creciente de mejores métodos de cálculo, así como el rápido y creciente desarrollo de las computadoras, condujo al desarrollo de métodos mediante el cálculo matricial de estructuras.

La notación matricial para expresar la teoría de las estructuras no se hubiera puesto de manifiesto sin el invento de las computadoras de alta velocidad.

Es cierto que los métodos clásicos de análisis estructural como el de RIGIDECES o flexibilidades que en el pasado tuvieron una aplicación muy limitada y que fueron superados en popularidad por métodos numéricos como el Kany, el Cross, Rigter, etc. en facilidad de aplicación han recuperado ahora su importancia debido a la época de las computadoras.

Hoy en día la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas de 15 incógnitas con el mismo número de ecuaciones, que anteriormente se hacía sumamente dificultosa, en una computadora es cosa de segundos.

En el método de las rigideces toma como incógnitas los desplazamientos en los nudos y tiene como principios fundamentales:

a) Compatibilidad.

b) Equilibrio.

c) Ley de Hooke.

2.1 COMPATIBILIDAD.

El principio de compatibilidad ha desarrollado la idea de una matriz estática |a| llamada continuidad, que relaciona las fuerzas aplicadas y de reacción, utilizando esta notación es posible escribir la relación de compatibilidad, que conecta la deformación interna e con los movimientos libres de los nudos , esta relación está representada por la ecuación:

$$\underbrace{|e|}_{\text{deformación de los miembros.}} = \underbrace{|a|}_{\text{matriz de continuidad}} \underbrace{|d|}_{\text{desplazamientos externos en las barras.}}$$

La matriz |a| de continuidad es una matriz que relaciona las proyecciones de los nudos con posibles desplazamientos en las ordenadas (# de nudos), contra el número de barras que integran la estructura.

$$|A| = \begin{array}{c c} \text{\# de barras} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \\ & \text{\# de nudos x } \alpha \end{array}$$

orden m x n

donde:

α = representa las dimensiones en las que se ubica la estructura. (2 en el plano, 3 en el espacio).

m = número de barras.

n = α x número de nudos.

La matriz $|e|$ es la llamada de deformaciones (alargamiento o acortamiento) de las barras producido por fuerzas de tensión o compresión. Esta es una matriz columna que por lo tanto tiene por orden el número de barras por uno $(m \times 1)$.

$$|e| = \begin{vmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ \vdots \\ e_{m-1,1} \\ e_{m,1} \end{vmatrix}$$

Otra matriz que usaremos es la definida como la matriz de desplazamientos en los nudos con relación a la posición inicial antes de aplicar las cargas.

Esta matriz nombrada $|d|$ ó $|\Delta|$ tiene por lo tanto, también orden de $(n \times 1)$, donde n es el número de nudos por su dimensión.

$$|d| = |\Delta| = \begin{vmatrix} \Delta_{11} \\ \Delta_{21} \\ \vdots \\ \Delta_{n-1,1} \\ \Delta_{n,1} \end{vmatrix}$$

Cabe señalar que conociendo las deformaciones en las barras $|e|$ y las proyecciones en los nudos por medio de la matriz $|a|$, conoceremos por multiplicación matricial la matriz $|\Delta|$.

2.2 LEY DE HOOKE O RELACION FUERZA - DESPLAZAMIENTO.

La relación entre la fuerza y el desplazamiento está constituída por el coeficiente de rigidez ($k_{i,j}$) que se define como la fuerza que aparece en un punto i debido a un desplazamiento unitario en el punto j cuando todos los demás puntos están fijos.

Aplicando el principio de superposición se puede expresar la componente de la fuerza en cualquier punto de un sistema en función de un conjunto de desplazamientos impuestos.

Definiendo la rigidez como:

$$k = \frac{F}{\Delta}$$

Despejando F se tiene:

$$F = k \cdot \Delta \cdots\cdots (1)$$

En forma matricial la expresión (1) es:

$$|F| = |\leftarrow k \rightarrow| \cdot |e|$$

$$\begin{vmatrix} F_{1,1} \\ F_{2,1} \\ \vdots \\ F_{m,1} \\ F_{m,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & & & & \\ & k_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & k_{m-1,m-1} & \\ & & & & k_{m,m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_{1,1} \\ e_{2,1} \\ \vdots \\ e_{m-1,1} \\ e_{m,1} \end{vmatrix}$$

$$m \times 1 \qquad\qquad m \times m \qquad\qquad m \times 1$$

donde:

la matriz $|F|$ es una matriz columna, donde se ubican cada una de las fuerzas internas que actuan en el mismo número de barras.

La matriz $|{}^{\nwarrow}k_{\searrow}|$ es una matriz forzosamente diagonal cuyos componentes son las rigideces individuales de las barras, y están definidas por:

$$k_{i,i} = \frac{E_i \; A_i}{L_i}$$

E i = Módulo de elasticidad de la barra en cuestión.

A i = Area de la sección transversal del elemento i .

L i = Longitud del elemento i .

La matriz $|e|$ de deformaciones de cada una de las barras, se definió ya anteriormente.

2.3 EQUILIBRIO.

En forma matricial están definidas las ecuaciones de equilibrio en relación a los grados de libertad como:

$$|P| = |a| \; |F|$$

donde:

La matriz $|P|$ es la llamada de cargas externas aplicadas a los nudos de la armadura en cualesquiera de las direcciones del plano global de referencia.

$$|P| = \begin{vmatrix} P_{1,1} \\ P_{2,1} \\ \vdots \\ P_{n-1,1} \\ P_{n,1} \end{vmatrix}$$

n = 2 x número de nudos para el plano.
3 x número de nudos para el espacio.

Matriz de continuidad, traspuesta para poder ser conformable, definida anteriormente.

Matriz $|F|$ o de fuerzas internas actuantes en cada una de las barras, definida anteriormente.

El producto matricial de las proyecciones de las barras $|a|$ por las fuerzas internas actuantes dá como resultado la fuerza externa aplicada en dicho nudo para lograr el equilibrio.

Ahora solo falta encontrar la matriz global de rigideces de la estructura $|K|$, la cual es necesario encontrar.

$\lvert e \rvert = \lvert a \rvert \; \lvert d \rvert$	Relación de compatibilidad.
$\lvert F \rvert = \lvert \leftarrow k \rightarrow \rvert \; \lvert e \rvert$	Ley de Hooke.
$\lvert P \rvert = \lvert a \rvert \; \lvert F \rvert$	Relación que implica en equilibrio.

Sustituyase la relación de compatibilidad en la Ley de Hooke.

$$|F| = |\leftarrow k \rightarrow| \cdot |e|$$

$$|e| = |a| \cdot |d|$$

$$|F| = |\leftarrow k \rightarrow| \cdot |a| \cdot |d|$$

Sustituyendo (I) en la relación de equilibrio.

$$|P| = |a| \, |F|$$

$$|F| = |\leftarrow k \rightarrow| \, |a| \, |d|$$

$$|P| = |a| \, |\leftarrow k \rightarrow| \, |a| \, |d|$$

Donde el producto matricial $|a| \, |\leftarrow \; \rightarrow| \, |a|$ es la matriz buscada, o sea :

$$|P| = |a| \cdot |\leftarrow k \rightarrow| \cdot |a| \cdot |d|$$

$$|P| = |\mathbb{K}| \cdot |d|$$

2.4 MATRIZ GLOBAL DE RIGIDECES.

La matriz global de rigideces relaciona directamente las fuerzas nodales externas con sus desplazamientos.

La matriz $|\mathbb{K}|$ es una matriz cuadrada simétrica, es decir, que los elementos sobre la diagonal principal y debajo de ella son los mismos.

$K_{i,j} = K_{j,i}$

$$|K| = \begin{vmatrix} K_{1,1} & K_{2,1} & \cdots & K_{m-1,1} & K_{m,1} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & K_{m-1,2} & K_{m,2} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & \cdots & K_{m-1,3} & K_{m,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ K_{m-1,1} & K_{m-1,2} & \cdots & K_{m-1,m-1} & K_{m,m-1} \\ K_{m,1} & K_{m,2} & \cdots & K_{m,m-1} & K_{m,m} \end{vmatrix}$$

Resumen:

El método de las rigideces deriva su nombre del hecho de que tanto las relaciones fuerza-desplazamiento de los miembros como de la estructura en general se expresan en términos de su rigidez.

Las ecuaciones generales en forma matricial son:

$|e| = |a| \cdot |d|$ Relación de compatibilidad.

$|F| = |\ulcorner k \lrcorner| \cdot |e|$ Relación de Ley de Hooke.

$|P| = |a| \cdot |F|$ Relación del equilibrio.

$|K| = |a|^T \cdot |\ulcorner k \lrcorner| \cdot |a|$ Matriz global de rigideces de la estructura.

Donde :

Símbolo	nombre	orden de la matriz
$\lvert a \rvert$	Matriz de continuidad	(No. de barras) x (No. de nudos)
$\lvert {}^{\nwarrow}k_{\searrow} \rvert$	Matriz diagonal de rigideces de c/u barras.	(No. de barras) x (No. de barras)
$\lvert e \rvert$	Matriz de deformaciones de las barras.	(No. de barras) x 1
$\lvert F \rvert$	Matriz de fuerzas internas en las barras.	(No. de barras) x 1
$\lvert P \rvert$	Matriz de cargas externas en los nudos.	(α No. de nudos) x 1
$\lvert d \rvert$ ó $\lvert \Delta \rvert$	Matriz de desplazamientos externos.	(α No. de nudos) x 1
$\lvert K \rvert$	Matriz global de rigideces de la estructura.	(α No. de nudos) x (α No. de nudos)

α = Representa el número de dimensiones donde está ubicada la armadura, para el plano $\alpha = 2$ por ser en dos dimensiones; para el espacio $\alpha = 3$ por ser en tres dimensiones.

C A P I T U L O   I I I

ANALISIS DE ARMADURAS EN 2 D

ANALISIS DE ARMADURAS HIPERESTATICAS EN EL PLANO.

El análisis de armaduras hiperestáticas se facilita por el actual y muy elevado uso de las computadoras, debido al fín que se tiene del presente trabajo, se explicará paso a paso la solución de armaduras planas.

Conforme a los principios del análisis estructural se tiene :

$[e] = [a][d]$ Relación de compatibilidad.

$[F] = [\nwarrow k \searrow][e]$ Ley de Hooke.

$[P] = [a]^T [F]$ Equilibrio.

Los pasos del método de Rigideces pueden ordenarse en la forma siguiente:

Paso 1) Formar la matriz columna de fuerzas externas $|P|$, así como la matriz diagonal de rigidez de cada una de las barras $|\nwarrow k \searrow|$.

Paso 2) Formar la matriz de continuidad $|a|$ así como su traspuesta $|a|^T$.

Paso 3) Formar el producto matricial $|a|^T \cdot |\nwarrow k \searrow|$ para formar otra nueva matriz $|X|$.

Paso 4) El resultado del producto matricial anterior, o sea $|X|$, multiplicarlo nuevamente, ahora por la matriz $|a|$ para formar para formar la matriz global de Rigideces de la estructura.

Esta nueva matriz llamada $|K|$ puede ser cuadrada ó rectangular. Si es cuadrada tiene inversa y por lo tanto es estable; en caso de que sea rectangular y no tiene inversa es inestable y por lo tanto no tiene caso estudiarlo.

Paso 5) Teniendo la ecuación matricial :

$$\underset{\text{dato}}{|P|} = \underset{\text{dato}}{|K|} \quad \underset{\text{incognitas}}{|d|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

la ecuación (1) nos relaciona las fuerzas externas y los desplazamientos de la estructura, por medio de la matriz global de Rigideces.

Esta ecuación que tiene como incógnita el vector -- de desplazamientos externos el cual puede encontrarse resolviendo un sistema de ecuaciones simultaneas por cualquier método.

Otra forma de encontrar los desplazamientos externos es el de invertir la matriz $|K|$ para después multiplicarlo por el vector de fuerzas externas $|P|$ -- dando como solución el vector buscado $|d|$.

Lo anterior en forma matricial :

$$|P| = |K| \quad |d| \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$|P|\ |K|^{-1} = |d| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{②}$$

dato dato incógnitas

Paso 6) Conocido el vector de desplazamientos de la estructura y multiplicándose por la matriz de continuidad $|a|$ se conocen las deformaciones en las barras.

$$|e| = |a|\ |d|$$

incógnitas dato dato

Paso 7) Por el principio de la Ley de Hooke, conociendo las deformaciones en las barras $|e|$ multiplicándolas por su rigidez se conocen las fuerzas internas a las que están sometidas cada una de ellas $|F|$.

$$|F| = |\ulcorner k \lrcorner|\ |e|$$

Paso 8) En éste paso se relacionan las fuerzas externas con las internas para lograr el equilibrio, todo ello por la matriz de continuidad.

$$|P| = |a|^T\ |f| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{③}$$

Dado que al llegar a ésta ecuación todos los elementos de las matrices son datos. Esta es la comprobación de todo lo realizado anteriormente.
Para comprobar se pueden tomar como incógnitas las fuerzas internas o externas. Para el presente trabajo, por facilidad de cálculo se tomarán las

fuerzas externas como incógnitas $|P|$, porque para darle solución a la ecuación ③ basta hacer sólo - una multiplicación matricial, y para tener como incógnitas las fuerzas internas se necesitaría invertir la matriz $|a|^T$.

Paso 9) Como último paso queda el de vaciar los resultados de las fuerzas internas en las barras $|F|$ en un croquis.

Para hacer mas explícito el método, así como para comprobar lo anterior, se realizarán varios ejercicios aumentando paulatinamente la dificultad.

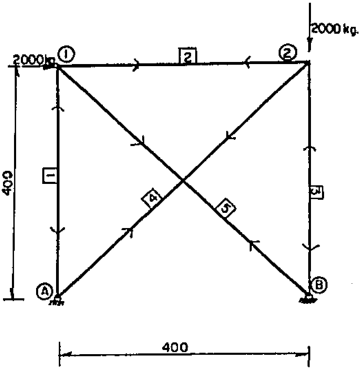
Cabe aclarar que por muy fácil o difícil que se crea el ejercicio, el método se aplica de igual forma.

EJERCICIO No. 1

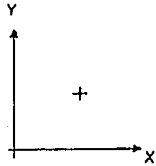
Sea la siguiente armadura en el -- plano con las siguientes características :

Estructura de acero $E_s = 2.1 \times 10^3$ Ton/cm^2.

Area transversal de cada una de las barras = 30 cm^2.



Los sentidos de las fuerzas internas en las barras son supuestos.



Acot.: cms.

Paso 1) Matriz columna de fuerzas externas. $|P|$

$$\underset{(Kg)}{|P|} = \begin{vmatrix} 2000 \\ 0 \\ 0 \\ -2000 \end{vmatrix}$$

Y matriz diagonal de rigideces de c/u de las - barras :

$$k_{ij} = \frac{E_{ij} \quad {}_{ij}}{L_{ij}} = \frac{(2.1 \times 10^{3}\,Ton/cm^{2})(30\ cm^{2})}{L_{ij}} = \frac{63000 Kg}{L_{ij}}$$

$$
\begin{array}{c} |\sim k \sim| \\ (\text{Ton/cm}) \end{array} = \begin{vmatrix} 63000/400 & & & & \\ & 63000/400 & & & \\ & & 63000/400 & & \\ & & & 63000/565.7 & \\ & & & & 6300/565.7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 157.5 & & & & \\ & 157.5 & & & \\ & & 157.5 & & \\ & & & 111.4 & \\ & & & & 111.4 \end{vmatrix}
$$

Paso 2) Formar la matriz de continuidad a

proy. nudos

$$
|a| = \text{barras} \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1\ , & y_1\ , & x_2\ , & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Y su traspuesta :

Número de barras

$$
|a|^T = \text{proy. nudos} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1\ , & b_2\ , & b_3\ , & b_4\ , & b_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0.7071 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & -1 & 0 & -0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.7071 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Paso 3) Formar la matriz $|X|$ con el producto de $|a|^T$ $|k|$

$$
\begin{array}{cc}
|a| & |k| \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0.7071 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 \\
0 & -1 & 0 & -0.7071 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -0.7071 & 0
\end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix}
157.5 & & & & \\
 & 157.5 & & & \\
 & & 157.5 & & \\
 & & & 111.4 & \\
 & & & & 111.4
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & |X| \\
= &
\begin{bmatrix}
0 & 157.5 & 0 & 0 & 78.77 \\
157.5 & 0 & 0 & 0 & -78.77 \\
0 & -157.5 & 0 & -78.77 & 0 \\
0 & 0 & 157.5 & -78.77 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Paso 4) Con el producto $|X|$ a formar la matriz Global de Rigideces de la estructura $|K|$.

$$
\begin{array}{cc}
|X| & |a| \\
\begin{bmatrix}
0 & 157.5 & 0 & 0 & 78.77 \\
157.5 & 0 & 0 & 0 & -78.77 \\
0 & -157.5 & 0 & -78.77 & 0 \\
0 & & 157.5 & -78.77 & 0
\end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \\
0.7071 & -0.7071 & &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{bmatrix} 213.20 & -55.70 & -157.50 & 0.00 \\ -55.70 & 213.20 & 0.00 & 0.00 \\ -157.50 & 0.00 & 213.20 & 55.70 \\ 0.0 & 0.00 & 55.70 & 213.20 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Matriz Simétrica}$$

Paso 5) Con la relación $|P| = |K| \cdot |d|$ se procederá a resolver el sistema de ecuaciones simultaneas.

$$\begin{array}{c} |P| \\ \begin{vmatrix} 2000 \\ 0 \\ 0 \\ -2000 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} |K| \\ \begin{vmatrix} 213.20 & -55.70 & -157.50 & 0 \\ -55.70 & 213.20 & 0 & 0 \\ -157.50 & 0 & 213.20 & 55.70 \\ 0 & 0 & 55.70 & 213.20 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} |d| \\ \begin{vmatrix} d\,x_1 \\ d\,y_1 \\ d\,x_2 \\ d\,y_2 \end{vmatrix} \end{array}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, recurriremos a el método de LA REGLA DE CRAMMER.

$$Xi = \frac{\text{det. } Ai}{\text{det. } A} \qquad \text{donde: } A = |K|$$

Cálculo del det. $|K|$

$$\det |K| = -55.70 * \det \begin{vmatrix} 213.20 & -55.70 & 0 \\ -55.70 & 213.20 & 0 \\ -157.50 & 0 & 55.70 \end{vmatrix} +$$

$$213 * \det \begin{vmatrix} 213.20 & -55.70 & -157.5 \\ -55.70 & 213.20 & 0 \\ -157.50 & 0 & 213.20 \end{vmatrix}$$

$$\det K = -55.70*(2358992.5)+213.20*(3740700.6)=6.661 \times 10^{8} \quad \text{.......... (I)}$$

Cálculo del det A_1

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2000 & 55.70 & -157.5 & 0 \\ 0 & 213.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 213.20 & 55.70 \\ -2000 & 0 & 55.70 & 213.20 \end{vmatrix}$$

$$\det A_1 = 2000*\det\begin{vmatrix} 213.20 & 0 & 0 \\ 0 & 213.20 & 55.70 \\ 0 & 55.70 & 213.20 \end{vmatrix} - 2000*\det - \begin{vmatrix} -55.70 & -157.20 & 0 \\ 213.20 & 0 & 0 \\ 0 & 213.20 & 55.70 \end{vmatrix}$$

$$\det A_1 = 2000*(9029393.1) - 2000*-(1870350.3) = 2.17995 \times 10^{10} \quad \text{.............. (II)}$$

Cálculo del det A_2

$$A_2 = \begin{vmatrix} 213.20 & 2000 & -157.50 & 0 \\ -55.70 & 0 & 0 & 0 \\ -157.50 & 0 & 213.20 & 55.70 \\ 0 & -2000 & 55.70 & 213.20 \end{vmatrix}$$

$$\det A_2 = -55.7*\det\begin{vmatrix} 2000 & -157.5 & 0 \\ 0 & 213.2 & 55.70 \\ -2000 & 55.7 & 213.20 \end{vmatrix} = -55.7*(102249000) = -5.695 \times 10^{3} \quad \text{...... (III)}$$

Cálculo del det A_3

$$A_3 = \begin{vmatrix} 213.20 & -55.70 & 2000 & 0 \\ -55.70 & 213.20 & 0 & 0 \\ -157.50 & 0 & 0 & 55.70 \\ 0 & 0 & -2000 & 213.20 \end{vmatrix}$$

$$\det A_3 = 213.2 * \det \begin{vmatrix} 213.2 & -55.7 & 2000 \\ -55.7 & 213.2 & 0 \\ -157.5 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2000 * \det(-) \begin{vmatrix} 213.2 & -55.7 & 0 \\ -55.7 & 213.2 & 0 \\ -157.5 & 0 & 55.7 \end{vmatrix} =$$

$$\det A_3 = 213.20*(67158000) - 2000*-(2358992.5) =$$
$$= 1.9036 \times 10^{10} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Cálculo del det A_4

$$A_4 = \begin{vmatrix} 213.20 & -55.70 & 157.50 & 2000 \\ -55.70 & 213.20 & 0 & 0 \\ -157.50 & 0 & 213.20 & 0 \\ 0 & 0 & 55.70 & -2000 \end{vmatrix}$$

$$\det A_4 = -2000 * \det \begin{vmatrix} 213.2 & -55.7 & -157.5 \\ -55.7 & 213.2 & 0 \\ -157.5 & 0 & -2000 \end{vmatrix} + 55.7 * \det \begin{vmatrix} 213.2 & -55.7 & 2000 \\ -55.7 & 213.2 & 0 \\ -157.5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\det A_4 = -2000*(3740700.0) + 55.7*(-67158000) =$$
$$= -1.122 \times 10^{10} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

siguiendo la fórmula se tiene :

$$X_1 = \frac{2.17995 \times 10^{10}}{6.661 \times 10^8} = 32.727 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d_{x1}$$

$$X_2 = \frac{\det A_2}{\det K} = \frac{5.695 \times 10^9}{6.661 \times 10^8} = 8.550 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d_{y1}$$

$$X_3 = \frac{\det A_3}{\det K} = \frac{1.9036 \times 10^{10}}{6.661 \times 10^8} = 28.578 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d_{x2}$$

$$X_4 = \frac{\det A_4}{\det K} = \frac{-1.122 \times 10^{10}}{6.661 \times 10^8} = -16.844 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d_{y2}$$

$$\underset{(cms)}{|d|} = \begin{vmatrix} 32.727 \\ 8.550 \\ 28.578 \\ -16.844 \end{vmatrix}$$

Estos desplazamientos son muy grandes, para el ejemplo didáctico están bien, para casos reales se deberá ampliar el area de acero, para aumentar su rigidez.

Paso 6) Cálculo de las deformaciones en las barras.

Mediante la relación $|e| = |a|\ |d|$

$$
\begin{array}{c}
|a| \\
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \\
0.7071 & -0.7071 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
|d| \\
\begin{vmatrix}
32.727 \\
8.550 \\
28.578 \\
-16.844
\end{vmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
|e| \\
\begin{vmatrix}
8.550 = e_1 \\
4.149 = e_2 \\
-16.844 = e_3 \\
-8.297 = e_4 \\
17.096 = e_5 \\
(\text{cms.})
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

Paso 7) Para determinar las fuerzas internas en las ba---rras, recurrimos a la Ley de Hooke.

$$|F| = |\nwarrow k \searrow| \; |e|$$

$$
\begin{vmatrix}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
157.50 & & & & \\
 & 157.50 & & & \\
 & & 157.50 & & \\
 & & & 111.40 & \\
 & & & & 111.40
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
8.550 \\ 4.149 \\ -16.844 \\ -8.297 \\ 17.096
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
F_1 = 1346.625 \\
F_2 = 653.468 \\
F_3 = -2652.930 \\
F_4 = -924.286 \\
F_5 = 1904.494
\end{vmatrix}
$$

(Kg)

Paso 8) Comprobando el equilibrio.

$$|P| = |a|^T \; |F|$$

Tomando como incógnitas las fuerzas externas $|P|$

$$\begin{vmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & -1 & 0 & -0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7071 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1346.625 \\ 653.368 \\ -2652.930 \\ -924.286 \\ 1904.494 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} P_{x1} = 2000.136 \\ P_{y1} = -0.043 \\ P_{x2} = 0.095 \\ P_{y2} = -1999.367 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 2000 \\ 0 \\ 0 \\ -2000 \end{vmatrix}$$

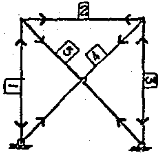
Por lo que el análisis de la armadura es correcto.

Paso 9) Ahora solo falta vaciar los resultados obtenidos en un croquis.

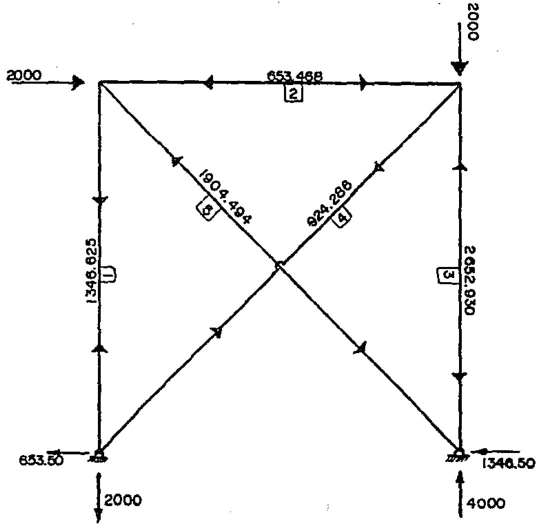
Cabe destacar que los esfuerzos en las barras de tensión o compresión supuestos al inicio del ejemplo se verán afectados en la siguiente forma:

- Cuando sean positivos se modificará el sentido de los esfuerzos.

- Cuando sean negativos se mantendrán los esfuerzos supuestos.

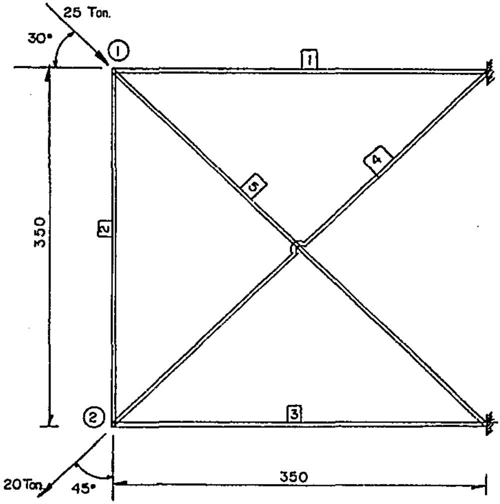


Sentido de las fuerzas internas supuestos al inicio del ejercicio.

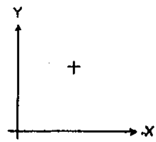


Resultado Final.
(Kg.)

EJERCICIO No. 2



- Area Transversal de c/u de los elementos = 20 cm^2.
- Es = 2.1×10^6 Kg/cm^2.
= 2.1×10^3 Ton/cm^2.



Armadura formada por 5 barras de sección cuadrada de 4 x 5 cms. de sección transversal, de acero A-36 de $E_s = 2.1 \times 10^6$ Kg/cm^2.

Paso 1) Formar la matriz columna de fuerzas externas $|P|$

$$\begin{vmatrix} 25 \times \cos 30^\circ = 21.651 \text{ ton.} \\ -25 \times \operatorname{sen} 30^\circ = -12.500 \text{ ton.} \\ -20 \times \cos 45^\circ = -14.142 \text{ ton.} \\ -20 \times \operatorname{sen} 45^\circ = -14.142 \text{ ton.} \end{vmatrix} = |P|$$

Matriz diagonal de rigideces de c/u de las barras.

k

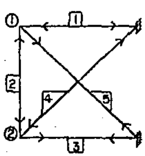
$$k_{ij} = \frac{E\ A_{ij}}{L_{ij}} = \frac{(2.1 \times 10^3 \text{ ton/cm}^2)(20 \text{ cm}^2)}{L_{ij}} = \frac{4200 \text{ ton}}{L_{ij}}$$

$$|{}^{\nwarrow}k_{\searrow}| = \begin{vmatrix} 120 & & & & \\ & 120 & & & \\ & & 120 & & \\ & & & 84.853 & \\ & & & & 84.853 \end{vmatrix}$$

Ton/cm.

Paso 2) Formular la matriz de continuidad. $|a|$

Para realizar este paso es necesario dibujar un diagrama de flujos de las barras.



Los flujos de las barras son supuestos.

$$
|a| = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & \text{n u d o s} & \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 \end{array} \\ \text{barras} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{array} & \left| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array} \quad \therefore
$$

$$
|a|^{T} = \begin{array}{c c} & \text{b a r r a s} \\ \text{nudos} & \left| \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7071 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.7071 & 0 \end{array} \right| \end{array}
$$

Paso 3) Formar el producto matricial $|X| = |a| \; |\diagdown k \diagdown|$

$$
|X| = \left| \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7071 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.7071 & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccccc} 120.00 & & & & \\ & 120.00 & & & \\ & & 120.00 & & \\ & & & 84.853 & \\ & & & & 84.853 \end{array} \right| =
$$

$$
|X| = \left| \begin{array}{ccccc} -120 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 0 & 120 & 0 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & -60 & 0 \end{array} \right|
$$

Paso 4) Formar la matriz $|K|$ de Rigidez Global de la Estructura.

$$|K| = |X| \cdot |a|$$

$$|K| = \begin{vmatrix} -120 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 0 & 120 & 0 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & -60 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|K| = \begin{vmatrix} 282.426 & -42.426 & 0.000 & 0.000 \\ -42.426 & 162.426 & 0.000 & -120.000 \\ 0.000 & 0.000 & 42.426 & 42.426 \\ 0.000 & -120.000 & 42.426 & 162.426 \end{vmatrix}$$

Paso 5) Se procede a calcular los desplazamientos externos $|d|$ con la relación:

$$|P| = |K| \cdot |d|$$

$$\begin{vmatrix} 21.651 \\ -12.500 \\ -14.142 \\ -14.142 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 282.426 & -42.426 & 0.000 & 0.000 \\ -42.426 & 162.426 & 0.000 & -120.000 \\ 0.000 & 0.000 & 42.426 & 42.426 \\ 0.000 & -120.000 & 42.426 & 162.426 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \end{vmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tienen los desplazamientos externos de la estructura.

$$|d| = |\Delta| = \begin{vmatrix} d_{x1} = 0.03813 \\ d_{y1} = -0.25650 \\ d_{x2} = -0.07683 \\ d_{y2} = -0.25650 \end{vmatrix}$$

(cms.)

Las cuales son prácticamente cero.

Paso 6) Cálculo de las deformaciones en las barras. $|e|$

Las deformaciones externas en cada una de las es su deformación.

$$|e| = |a| \cdot |d|$$

$$|e| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0.03813 \\ -0.25650 \\ -0.07683 \\ -0.25650 \end{vmatrix} =$$

def. en las barras.

$$|e| = \begin{vmatrix} e_1 = -0.03813 \\ e_2 = 0.000 \\ e_3 = 0.03813 \\ e_4 = 0.23570 \\ e_5 = 0.20833 \end{vmatrix}$$

Paso 7) Para conocer las fuerzas internas en las barras en función de sus deformaciones, se recurre a la ley de Hooke.

$$|F| \approx |e| \quad \therefore$$

$$|F| = |{}^{\nwarrow}k_{\searrow}| \; |e|$$

$$\underset{(ton)}{|F|} = \begin{vmatrix} 120.000 & & & & \\ & 120.000 & & & \\ & & 120.000 & & \\ & & & 84.853 & \\ & & & & 84,853 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -0.03813 \\ 0.0000 \\ 0.03813 \\ 0.23570 \\ 0.20833 \end{vmatrix}$$

Haciendo la multiplicación de matrices.

$$|F| = \begin{vmatrix} F_1 = -4.5756 \text{ ton.} \\ F_2 = 0.000 \text{ ton.} \\ F_3 = 4.5756 \text{ ton.} \\ F_4 = 20.0000 \text{ ton.} \\ F_5 = 17.6774 \text{ ton.} \end{vmatrix}$$

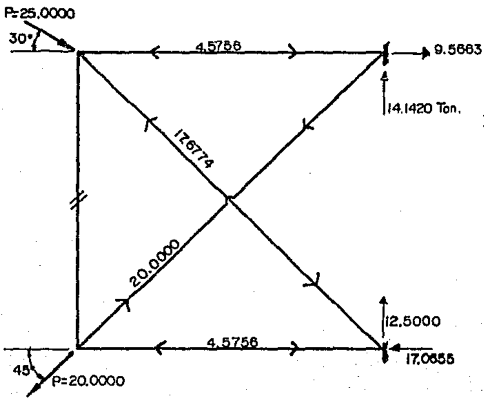
Paso 8) Comprobando el equilibrio:

$$|P| = |a| \cdot |F|$$

$$|P| = \begin{vmatrix} -1.000 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.7071 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & -0.7071 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.7071 & 0.00 \\ 0.00 & -1.00 & 0.00 & -0.7071 & 0.00 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4.5756 \\ 0.0000 \\ 4.5756 \\ 20.0000 \\ 17.6774 \end{vmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} P_{x1} & = & 21.6312 & \approx & 21.6510 & \text{ton.} \\ P_{y1} & = & -12.4998 & \approx & -12.5000 & \text{ton.} \\ P_{x2} & = & -14.1420 & - & -14.1420 & \text{ton.} \\ P_{y2} & = & -14.1420 & - & -14.1420 & \text{ton.} \end{vmatrix}$$

Por lo que vaciando resultados queda:

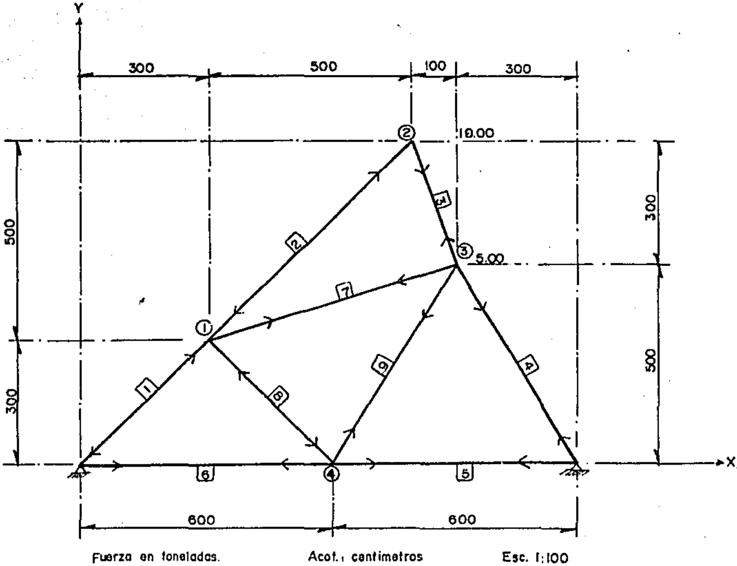


Fuerzas en toneladas.

⟵⟶ tensión.

⟶⟵ compresión..

EJERCICIO No. 3



— Armadura formada por 9 barras de $10\ cm^2$ de area transversal, con Módulo de Elasticidad de $2.1 \times 10^6\ Kg/cm^2$ que soporta las fuerzas indicadas.

Paso 1) Formar la matriz $|P|$ de fuerzas externas.

$$|P| = \left|\begin{array}{lcr} X_1 & = & 0 \\ Y_1 & = & 0 \\ X_2 & = & 10.00 \\ Y_2 & = & 0.00 \\ X_3 & = & 5.00 \\ Y_3 & = & 0.00 \\ X_4 & = & 0.00 \\ Y_4 & = & 0.000 \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\rangle \text{nudo } 1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\rangle \text{nudo } 2 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\rangle \text{nudo } 3 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\rangle \text{nudo } 4 \end{array}$$

Y lá matriz diagonal de rigideces de cada una de las barras. k

$$K_{ij} = \frac{EA_{ij}}{L_{ij}} = \frac{2.1 \times 10^3 \text{ Ton/cm}^2 \times 10\text{cm}^2}{L_{ij}} = \frac{2.1 \times 10^4 \text{ ton.}}{L_{ij}}$$

$$\underset{\text{Ton/cm}}{|{}^{\nwarrow}k_{\searrow}|} = \left|\begin{array}{cccccccc} 49.50 &&&&&&& \\ & 29.70 &&&&&& \\ && 66.41 &&&&& \\ &&& 36.01 &&&& \\ &&&& 35.00 &&& \\ &&&&& 33.20 && \\ &&&&&& 49.50 & \\ &&&&&&& 36.01 \end{array}\right|$$

Paso 2) Matriz de continuidad |a|

barras	X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4
b_1	0.7071	0.7071						
b_2	-0.7071	-0.7071	0.7071	0.7071				
b_3			0.3162	-0.9487	-0.3162	0.9437		
b_4					0.5145	-0.8575		
b_5							1.0000	0.0000
b_6							-1.0000	0.0000
b_7	0.9487	0.3162			-0.9487	-0.3162		
b_8	-0.7071	0.7071					0.7071	-0.7071
b_9					-0.5145	-0.8575	0.5145	0.8575

Paso 3) Del producto matricial $|a|^T \cdot |{}^{\ulcorner}k_{\lrcorner}| \cdot |a|$ formamos la matriz |K| de Rigidez global de la estructura.

2 x (No. de Barras)

2 x (No. de barras)							
94.231	24.809	-14.850	-14.850	-29.881	-9.959	-24.750	24.750
24.809	67.669	-14.850	-14.850	-9.959	-3.319	24.750	-24.750
-14.350	-14.350	21.490	-5.072	-6.640	19.922		
-14.350	-14.850	-5.072	74.621	19.922	-59.771		
-29.881	-9.959	-6.640	19.922	55.585	-9.962	-9.962	-15.387
-9.959	-3.319	19.922	-59.771	-9.962	116.047	-15.887	-26.478
-24.750	24.750			-9.962	-15.387	104.282	-8.863
24.750	-24.750			-15.887	-26.478	-8.363	51.228

Paso 4) Se procede a resolver el sistema de ecuaciones simultaneas para determinar los desplazamientos de los nudos.

$$|P| = |K| \cdot |d|$$

$$\begin{vmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 10.00 \\ 0.00 \\ 5.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 94.23 & 24.81 & -14.85 & -14.85 & -29.88 & -9.96 & -24.75 & 24.75 \\ 24.81 & 67.67 & -14.85 & -14.85 & -9.96 & -3.32 & 24.75 & -24.75 \\ -14.85 & -14.85 & 21.49 & -5.07 & -6.64 & 19.92 & & \\ -14.85 & -14.85 & -5.07 & 74.62 & 19.92 & -59.77 & & \\ -29.88 & -9.96 & -6.64 & 19.92 & 55.58 & -9.96 & -9.96 & -15.89 \\ -9.96 & -3.32 & 19.92 & -59.77 & -9.96 & 116.05 & -15.89 & -26.48 \\ -24.75 & 24.75 & & & -9.96 & -15.89 & 104.28 & -8.86 \\ 24.75 & -24.75 & & & -15.89 & -26.48 & -8.86 & 51.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ d_{x3} \\ d_{y3} \\ d_{x4} \\ d_{y4} \end{bmatrix}$$

donde da como resultado :

$$\underset{(cms)}{|d|} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 0.1744 \\ 0.1792 \\ 0.9181 \\ -0.0595 \\ 0.3392 \\ -0.1270 \\ 0.0143 \\ 0.0443 \end{vmatrix}$$

Paso 5) Cálculo de las deformaciones en las barras : $|e|$

$$|e| = |a| \cdot |d|$$

$$\begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.707 & 0.707 & & & & & & \\ -0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & & & & \\ & & 0.316 & -0.949 & -0.316 & 0.949 & & \\ & & & & 0.515 & -0.858 & & \\ & & & & & & 1.000 & 0.000 \\ & & & & & & -1.000 & 0.000 \\ 0.949 & 0.316 & & & -0.949 & -0.316 & & \\ -0.707 & 0.707 & & & & & 0.707 & -0.707 \\ & & & & -0.515 & -0.858 & 0.515 & 0.858 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0.1744 \\ 0.1792 \\ 0.9181 \\ -0.0595 \\ 0.3392 \\ -0.1270 \\ 0.0143 \\ 0.0443 \end{vmatrix}$$

Multiplicando las matrices $|a| \cdot |d|$ se tienen:

$$
\underset{(\text{cms.})}{|e|} = \begin{vmatrix} e_1 & = & 0.2500 \\ e_2 & = & 0.3571 \\ e_3 & = & 0.1190 \\ e_4 & = & 0.2834 \\ e_5 & = & 0.0143 \\ e_6 & = & -0.0143 \\ e_7 & = & -0.0595 \\ e_8 & = & -0.0178 \\ e_9 & = & -0.0203 \end{vmatrix}
$$

Paso 6) Para poder diseñar las barras es necesario conocer - la fuerza interna actuante a las que estan sujetas cada una de ellas , por lo que para conocerse es necesario multiplicar la matriz de deformaciones de las barras $|e|$ por su rigidez individual $|{}^{\nwarrow}k_{\searrow}|$, esto es:

$$
|F| = |{}^{\nwarrow}k_{\searrow}| \; |e|
$$

$$
\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49.50 &&&&&&&& \\ & 29.70 &&&&&&& \\ && 66.41 &&&&&& \\ &&& 36.01 &&&&& \\ &&&& 35.00 &&&& \\ &&&&& 35.00 &&& \\ &&&&&& 33.20 && \\ &&&&&&& 49.50 & \\ &&&&&&&& 36.01 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0.2500 \\ 0.3571 \\ 0.1190 \\ 0.2834 \\ 0.0143 \\ -0.0143 \\ -0.0595 \\ -0.0178 \\ -0.0203 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{(\mathrm{Ton})}{|F|} = \begin{vmatrix} 12.3750 \\ 10.6059 \\ 7.9028 \\ 10.2052 \\ 0.5005 \\ -0.5005 \\ -1.9754 \\ -0.8311 \\ -0.7310 \end{vmatrix}
$$

Paso 7) Comprobando el equilibrio de las fuerzas internas y externas.

$$
|P| = |a|^{T} \cdot |F|
$$

$$
\begin{vmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ P_{y4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
0.707 & -0.707 & & & & & 0.949 & -0.707 & \\
0.707 & -0.707 & & & & & 0.316 & 0.707 & \\
 & 0.707 & 0.316 & & & & & & \\
 & 0.707 & -0.949 & & & & & & \\
 & & -0.316 & 0.515 & & & -0.949 & & -0.515 \\
 & & 0.949 & -0.858 & & & -0.316 & & -0.858 \\
 & & & & 1.00 & -1.00 & & 0.707 & 0.515 \\
 & & & & 0.00 & 0.00 & & -0.707 & 0.858
\end{vmatrix} \cdot
$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$\begin{vmatrix} 12.3750 \\ 10.6059 \\ 7.9028 \\ 10.2052 \\ 0.5005 \\ -0.5005 \\ -1.9754 \\ -0.8811 \\ -0.7310 \end{vmatrix}$$

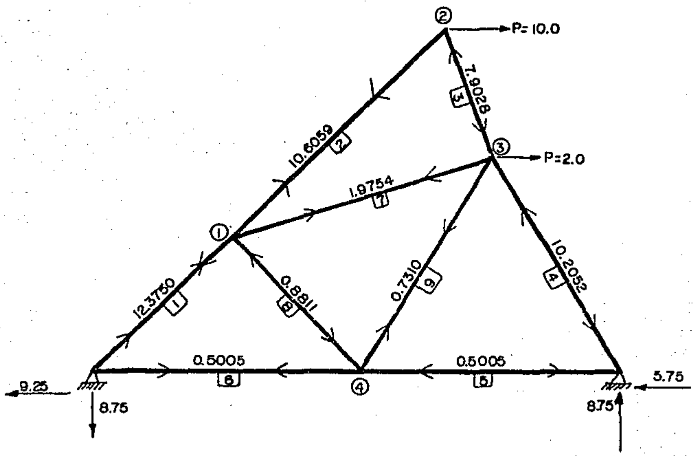
$$|P| = \begin{vmatrix} -0.0001 & \approx & 0.0 \\ 0.0032 & \approx & 0.0 \\ 9.9983 & \approx & 10.0 \\ 0.0020 & \approx & 0.0 \\ 5.0018 & \approx & 5.0 \\ -0.0021 & \approx & 0.0 \\ 0.0018 & \approx & 0.0 \\ -0.0038 & \approx & 0.0 \end{vmatrix}$$

la aproximación esta dada por el número de dígitos empleados en el ejemplo.

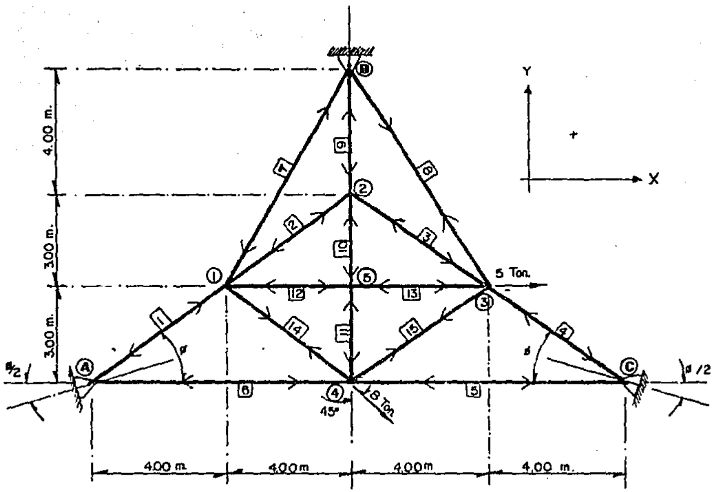
Paso 8) Vaciado de resultados en un croquis.

Recordemos que el signo positivo en las fuerzas internas en las barras cambia el sentido de éstas, es decir de →← a ←→ y viceversa.

En el signo negativo implica respetar el sentido supuesto al inicio.



Las reacciones son encontradas por análisis elemental de estática.



— Armadura formada por 15 barras, en donde la relación $EA/L = 1.00$ (Ton/cm), la cual soporta las cargas señaladas.

$$\therefore \quad K_{ij} = 1.00 \quad , \quad |k_4| = 1.00$$

Paso 1) Formar la matriz de fuerzas externas $|P|$

$$
\underset{(Ton)}{|P|} = \begin{vmatrix} P_{x1} = 0.0 \\ P_{y1} = 0.0 \\ P_{x2} = 0.0 \\ P_{y2} = 0.0 \\ P_{x3} = 5.0 \\ P_{y3} = 0.0 \\ P_{x4} = 8\ \cos 45^{o} = 5.66 \\ P_{y4} = -8\ \mathrm{sen}45^{o} = -5.66 \\ P_{x5} = 0.0 \\ P_{y5} = 0.0 \end{vmatrix} , \quad \underset{(Ton/cm)}{|\nwarrow k \searrow|} = \begin{vmatrix} 1.0 & & & & & & & & & & & & & & \\ & 1.0 & & & & & & & & & & & & & \\ & & 1.0 & & & & & & & & & & & & \\ & & & 1.0 & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1.0 & & & & & & & & & & \\ & & & & & 1.0 & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1.0 & & & & & & & & \\ & & & & & & & 1.0 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1.0 & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1.0 & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1.0 & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1.0 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1.0 & & \\ & & & & & & & & & & & & & 1.0 & \\ & & & & & & & & & & & & & & 1.0 \end{vmatrix}
$$

Paso 2) Formulación de la matriz de continuidad $|a|$

$$
\begin{array}{c}
 \\ b_1 \\ \vdots \\ \\ \\ b_5 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ b_{10} \\ \vdots \\ \\ \\ \\ b_{15} \\ \\
\end{array}
\begin{array}{cc:cc:cc:cc:cc}
x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & x_4 & y_4 & x_5 & y_5 \\
0.80 & 0.60 & & & & & & & & \\
-0.80 & -0.60 & 0.80 & 0.60 & & & & & & \\
 & & -0.80 & 0.60 & 0.80 & -0.60 & & & & \\
 & & & & -0.80 & 0.60 & & & & \\
 & & & & & & -1.0 & 0 & & \\
 & & & & & & 1.0 & 0 & & \\
-0.50 & -0.87 & & & & & & & & \\
 & & & & -0.50 & 0.87 & & & & \\
 & & 0.0 & -1.0 & & & & & & \\
 & & 0.0 & 1.0 & & & & & 0.0 & -1.0 \\
 & & & & & & & & 0 & 1.0 \\
-1.0 & 0.0 & & & & & & & 1.0 & 0 \\
 & & & & 1.0 & 0.0 & & & -1.0 & 0 \\
0.80 & -0.60 & & & & & -0.80 & 0.60 & & \\
 & & & & -0.80 & -0.60 & 0.80 & 0.60 & & \\
\multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} & \multicolumn{2}{c}{5}
\end{array}
$$

Paso 3) Estructurar la matriz global de Rigideces de la armadura con el producto matricial.

$$|K| = |a|^T \cdot | \; k \; | \cdot |a|$$

$$
\begin{array}{c}
\text{2 x No. de nudos}
\end{array}
\left|
\begin{array}{cccccccccc}
3.166 & 0.911 & -0.64 & -0.48 & & & -0.64 & 0.48 & -1.0 & \\
0.911 & 1.834 & -0.48 & -0.36 & & & 0.48 & -0.36 & & \\
-0.64 & -0.48 & 1.28 & & -0.64 & 0.48 & & & & \\
-0.48 & -0.36 & & 2.72 & 0.48 & -0.36 & & & & -1.0 \\
 & & -0.64 & 0.48 & 3.166 & -0.911 & -0.64 & -0.48 & -1.0 & \\
 & & 0.48 & -0.36 & -0.911 & 1.834 & -0.48 & -0.36 & & \\
-0.64 & 0.48 & & & -0.64 & -0.48 & 3.28 & & & \\
0.48 & -0.36 & & & -0.48 & -0.36 & & 0.72 & & \\
-1.0 & & & & -1.0 & & & & 2.0 & \\
 & & & -1.0 & & & & & & 2.0
\end{array}
\right|
$$

Paso 4) Cálculo de los desplazamientos externos resolviendo el sistema de ecuaciones :

$|P| = |K| \cdot |d|$ resolviendo se tiene:

$$
\underset{(\text{cms})}{|d|} = \left|
\begin{array}{l}
d_{x1} = 7.2473 \\
d_{y1} = -7.5019 \\
d_{x2} = 2.1622 \\
d_{y2} = -0.2341 \\
d_{x3} = 0.8092 \\
d_{y3} = -2.5258 \\
d_{x4} = 4.0249 \\
d_{y4} = -17.1627 \\
d_{x5} = 4.0283 \\
d_{y5} = -0.1170
\end{array}
\right|
$$

desplazamientos de los nudos en las 2 dimensiones.

Paso 5) Cálculo de las deformaciones en las barras: $|e|$

$|e| = |a| \cdot |d|$ haciendo la multiplicación matricial se tiene que :

$$
\underset{(cms)}{|e|} = \begin{vmatrix} b_1 = 1.2967 \\ b_2 = 0.2926 \\ b_3 = 0.2926 \\ b_4 = -2.1628 \\ b_5 = -4.0249 \\ b_6 = 4.0249 \\ b_7 = 2.9178 \\ b_8 = -2.5944 \\ b_9 = 0.2341 \\ b_{10} = -0.1170 \\ b_{11} = -0.1170 \\ b_{12} = -3.2191 \\ b_{13} = -3.2191 \\ b_{14} = -3.2185 \\ b_{15} = -6.2096 \end{vmatrix}
$$

Paso 6) Según la ley de Hooke las fuerzas son proporcionales a sus deformaciones. De éste enunciado tenemos:

$$|F| = |{}^{\nwarrow}k_{\searrow}| \cdot |e| \qquad \text{pero} \qquad |{}^{\nwarrow}k_{\searrow}| = 1.00 \ \frac{\text{Ton.}}{\text{cm.}}$$

$$\underset{\text{Ton}}{|F|} = \underset{\text{cm.}}{|e|}$$

lo que nos indica que las deformaciones por elongamiento o acortamiento son las mismas que las fuerzas internas de tensión o comprensión.

Paso 7) Comprobando el equilibrio de fuerzas externas y fuerzas internas.

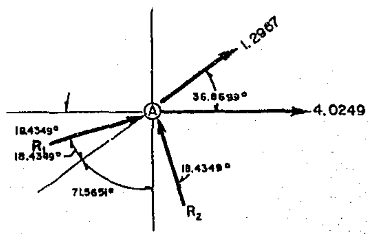
$$|P| = |a|^T \cdot |F|$$

realizando el producto matricial se tiene:

$$|P| \underset{(Ton)}{=} \begin{vmatrix} 0.00006 & \approx & 0.00 \\ 0.00033 & \approx & 0.00 \\ 0.0 & = & 0.0 \\ 0.00002 & \approx & 0.0 \\ 4.99998 & \approx & 5.0 \\ 0.00006 & \approx & 0.0 \\ 5.65685 & = & 5.65685 \\ -5.65685 & = & -5.65685 \\ 0.0 & = & 0.0 \\ 0.0 & = & 0.0 \end{vmatrix}$$

Todos los nudos están en equilibrio, lo que hace falta es determinar los reacciones en los apoyos.

Resolviendo el nudo Ⓐ del apoyo.



Resolviendo el nudo (A)

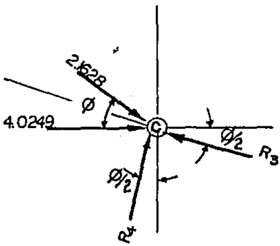
$$R_1 = 1.2967 \cos 18.4349^{\circ} + 4.0249 \cos 18.4349^{\circ}$$

$$R_1 = 5.0485 \text{ ton.}$$

$$-R_2 = 1.2967 \text{ sen } 18.4349^{\circ} - 4.0249 \text{ sen } 18.4349^{\circ}$$

$$R_2 = 0.8627 \text{ ton.}$$

Resolviendo el nudo (C) $\quad \phi = \tan^{-1} (3/4) = 36.869897^{\circ}$



$$R_3 = 2.1628 \cos (\phi/2) + 4.0249 \cos (\phi/2).$$

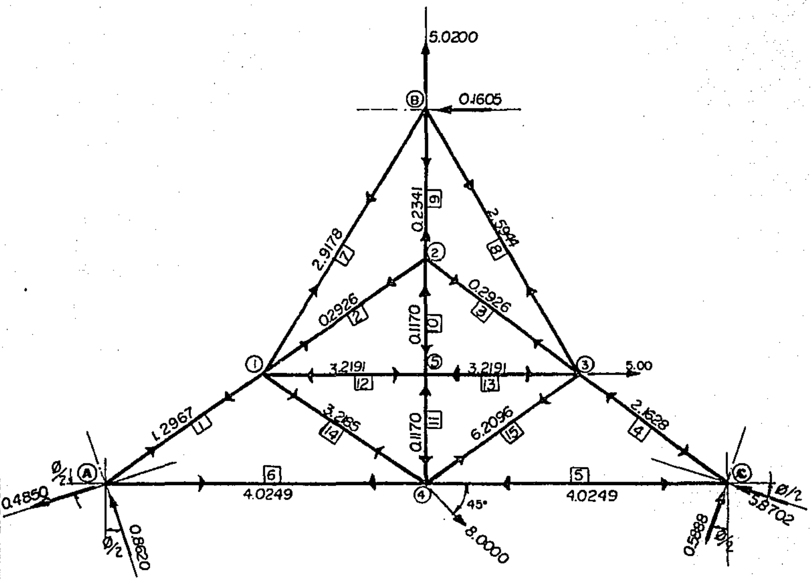
$$R_3 = 5.8702 \text{ ton.}$$

$$-R_4 = 2.1628 \text{ sen } (/2) - 4.0249 \text{ sen } (/2).$$

$$R_4 = 0.5888 \text{ ton.}$$

PASO 8

Vaciado de resultados en un croquis con señalamiento de tensiones y compresiones.



FUERZA EN TONELADAS

C A P I T U L O   IV

ANALISIS DE ARMADURAS EN 3D

ANALISIS DE ARMADURAS EN 3D.

Tanto en el capítulo anterior como en el presente, la lógica sigue siendo la misma, la única variante, si se le puede llamar así, es que en cada nudo tiene componentes en las tres dimensiones reales, éstas estarán representadas en las matrices de fuerzas externas $|P|$ como en internas $|F|$, y en las deformaciones de las barras $|e|$ así como también en los desplazamientos de los nudos.

Dada la complejidad de resolver sistemas de ecuaciones de gran orden (6 ó mas), al final del presente capítulo se proporciona un programa para computadora para este fín, así como también otro programa para resolver armaduras por éste método con el fín de utilizarlo en la práctica profesional.

De los principios del análisis estructural.

$|e| = |a| \; |d|$ Relación de compatibilidad.

$|F| = |\ulcorner k \lrcorner| \; |e|$ Ley de Hooke.

$|P| = |a|^{T} \; |F|$ Equilibrio.

Los pasos a seguir son:

Paso 1) Formar la matriz de fuerzas externas $|P|$ así como la de rigideces de cada una de las barras $|\ulcorner k \lrcorner|$.

Paso 2) Formar la matriz de continuidad $|a|$, que es la que relaciona las proyecciones de las barras en las abscisas contra el número de barras en las ordenadas.

Paso 3) Formar la matriz global de Rigideces $|K|$ mediante el producto matricial de:

$$|K| = |a|' \cdot |\ulcorner k \lrcorner| \cdot |a|$$

Dará como resultado, una matriz cuadrada simétrica con los valores de la diagonal principal positivos, de orden (3 veces el número de nudos) x (3 veces el número de nudos).

Paso 4) Encontrar los desplazamientos externos mediante la solución del sistema de ecuaciones por cualquier método o por los programas de apoyo que se encuentran al final del presente capítulo.

$$\underset{\text{dato}}{|P|} = \underset{\text{dato}}{|K|} \cdot \underset{\text{incógnitas}}{|d|}$$

Paso 5) Conocido el vector de desplazamientos $|d|$ se pueden conocer las deformaciones de cada una de las barras $|e|$ mediante la relación:

Relación de compatibilidad:

$$|e| = |a| \cdot |d|$$

Paso 6) Por la Ley de Hooke :

$$|F| = |k| \cdot |e|$$

Se conocen las fuerzas de tensión ó compresión - que por su rigidez acepta cada una de las barras.

Paso 7) Comprobación de lo anteriormente realizado.

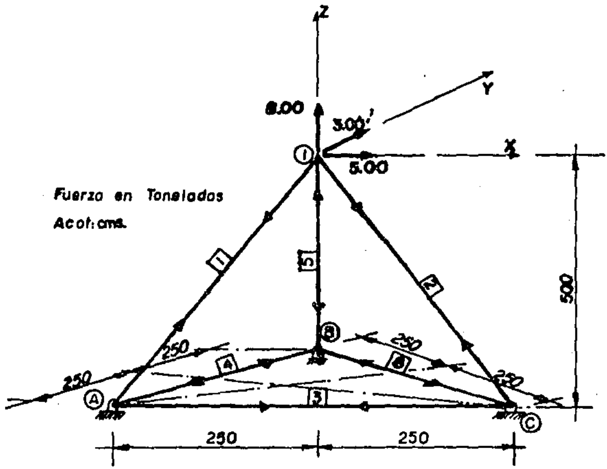
Por equilibrio :

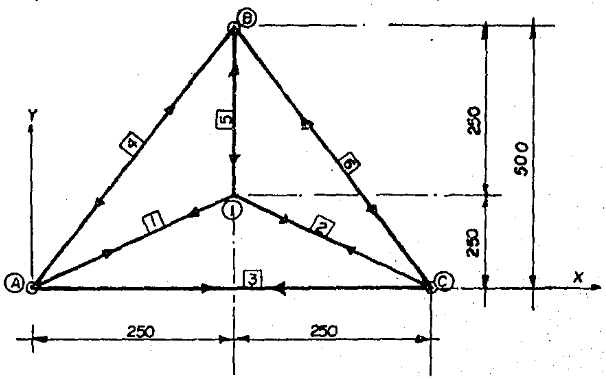
$$|P| = |a|' \cdot |F|$$

Paso 8) Vaciado en un croquis de la armadura los resultados de las fuerzas internas de las barras - para su diseño.

EJEMPLO 1.

Resolver la siguiente armadura :





La rigidez de cada una de las barras es 1.

$$k = \frac{E\,A}{L} = 1.00$$

Todos los ángulos entre cada una de las barras es de 45°.

Paso 1) Formar las matrices :

$$\underset{(Ton)}{|P|} = \begin{vmatrix} P_{x1} = 5.00 \\ P_{y1} = 8.00 \\ P_{z1} = 3.00 \end{vmatrix} \qquad \underset{(Ton/cm)}{|k|} = \begin{vmatrix} 1.00 & & & & & \\ & 1.00 & & & & \\ & & 1.00 & & & \\ & & & 1.00 & & \\ & & & & 1.00 & \\ & & & & & 1.00 \end{vmatrix}$$

Paso 2) Formar la matriz de continuidad a .

$$|a| = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 \\ — & — & — \\ — & — & — \\ — & 0.7071 & -0.7071 \\ — & — & — \end{bmatrix} \end{array}$$

se eliminan

$$|a| = \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_5 \end{array} \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 \\ — & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

Dado que las barras $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{6}$ no tienen proyecciones en el nudo libre ① se reduce la matriz $|a|$.

Paso 3) Formar la matriz $|K|$ de rigidez global de rigideces de la estructura.

$$|K| = |a|^T \cdot |\diagdown k \diagdown| \cdot |a|$$

1.00

$$|K| = |a|^T \cdot |a|$$

Donde da como resultado :

$$|K| = \begin{vmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \end{vmatrix}$$

Paso 4) Determinar los desplazamientos externos $|d|$.

$$\begin{array}{ccccc} |P| & = & |K| & \cdot & |d| \\ \begin{vmatrix} 5.00 \\ 8.00 \\ 3.00 \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \end{vmatrix} & \cdot & \begin{vmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{z1} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} d_{x1} = 5.00\text{ cm.} \\ d_{y1} = 5.25\text{ cm.} \\ d_{z1} = 0.25\text{ cm.} \end{vmatrix} \\ (\text{ton.}) & & (\text{Ton/cm.}) & & (\text{cms.}) \end{array}$$

Paso 5) Deformaciones de las barras $|e|$.

$$\begin{array}{ccccc} e & = & |a| & \cdot & |d| \\ \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} -0.7071 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0.7071 & -0.7071 \end{vmatrix} & \cdot & \begin{vmatrix} 5.00 \\ 5.25 \\ 0.25 \end{vmatrix} \\ (\text{cm}) & & (\text{adim.}) & & (\text{cm}) \end{array}$$

De donde multiplicando matrices tenemos:

$$\begin{vmatrix} e_1 & = & -7.42455 & \text{cms.} \\ e_2 & = & -0.35355 & \text{cms.} \\ e_5 & = & 3.53550 & \text{cms.} \end{vmatrix}$$

Paso 6) Por la Ley de Hooke se conocen las fuerzas internas en las barras.

$$\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -7.42455 \\ -0.35355 \\ 3.53550 \end{vmatrix}$$

(ton) (Ton/cm) (cm)

$$\begin{vmatrix} F_1 & = & -7.42455 & \text{ton.} \\ F_2 & = & -0.35355 & \text{ton.} \\ F_5 & = & 3.53550 & \text{ton.} \end{vmatrix}$$

Paso 7) Comprobando equilibrio.

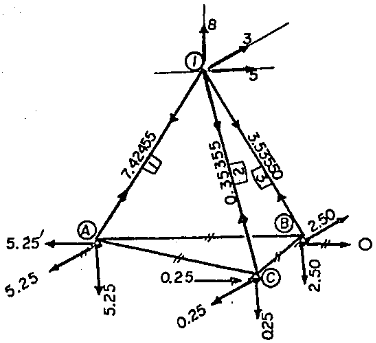
$$|P| = |a| \cdot |F|$$

$$\begin{vmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.7071 & 0.7071 & 0.0000 \\ -0.7071 & -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 & -0.7071 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -7.42455 \\ -0.35355 \\ 3.53550 \end{vmatrix}$$

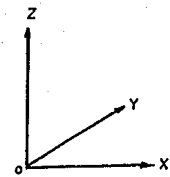
(ton) (adimensional) (Ton)

$$\left| \begin{array}{l} F_{x1} = 5.0000 = 5 \\ F_{y1} = 8.0000 = 8 \\ P_{z1} = 3.0000 = 3 \end{array} \right|$$

Paso 3) Vaciando resultados:



Fuerza en toneladas.



Ejes coordenados

Con lo que queda resuelto totalmente el ejercicio 1.

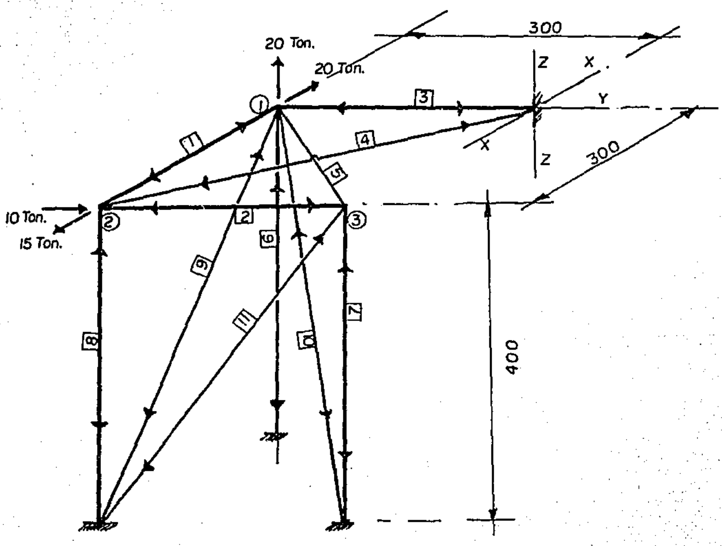
EJERCICIO No. 2

Resolver la siguiente armadura suponiendo las siguientes rigideces en las barras.

k_1 =	10 T/cm.	k_7 =	10 T/cm.
k_2 =	8 T/cm.	k_8 =	10 T/cm.
k_3 =	8 T/cm.	k_9 =	10 T/cm.
k_4 =	10 T/cm.	k_{10} =	8 T/cm.
k_5 =	12 T/cm.	k_{11} =	8 T/cm.
k_6 =	12 T/cm.		

No. de barras = 11

No. de nudos = 3



ACOT : CMS.

Paso 1) Obtener la matriz de fuerzas externa $|P|$.

$$|P| \underset{(\text{ton})}{=} \begin{vmatrix} X_1 = -20 \\ Y_1 = 0 \\ Z_1 = 20 \\ X_2 = 15 \\ Y_2 = 10 \\ Z_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ Y_3 = 0 \\ Z_3 = 0 \end{vmatrix}$$

Paso 2) Obtener la matriz de continuidad $|a|$.

	d_{x1}	d_{y1}	d_{z1}	d_{x2}	d_{y2}	d_{z2}	d_{x3}	d_{y3}	d_{z3}
b_1	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
b_2	0	0	0	0	-1	0	0	1	0
b_3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
b_4	0	0	0	0.7071	-0.7071	0	0	0	0
b_5	-0.7071	-0.7071	0	0	0	0	0.7071	0.7071	0
b_6	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1
b_8	0	0	0	0	0	1	0	0	0
b_9	-0.6	0	0.8	0	0	0	0	0	0
b_{10}	-0.5145	-0.5145	0.686	0	0	0	0	0	0
b_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0.6	0.8
	①			②			③		

Paso 3) Formar la matriz $|K|$ con el producto matricial de :

$$|a|^{T} \cdot |k| \cdot |a|$$

Donde da como resultado :

$$\begin{vmatrix} 21.718 & 8.113 & -7.624 & -10 & 0 & 0 & -6 & -6 & 0 \\ 8.113 & 16.113 & -2.824 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & 0 \\ -7.624 & -2.824 & 22.165 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 15 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 13 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & -4 & 0 & 6 & 16.33 & 3.84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.84 & 15.12 \end{vmatrix}$$

Matriz simétrica.

Paso 4) Determinar los desplazamientos $|d|$ de los nudos

$$|P| = |K| \cdot |d|$$ de la cual da como resultado:

$$\underset{(cms)}{|d|} = \begin{vmatrix} d_{x1} & = & 1.7050 \\ d_{y1} & = & 0.0608 \\ d_{z1} & = & 1.4965 \\ d_{x2} & = & 3.5518 \\ d_{y2} & = & 4.2455 \\ d_{z2} & = & 0.0000 \\ d_{x3} & = & -1.8633 \\ d_{y3} & = & 3.4291 \\ d_{z3} & = & -0.8709 \end{vmatrix}$$

Paso 5) Cálculo de las deformaciones en las barras $|e|$.

$$|e| = |a| \; |d|$$

Multiplicando las matrices $|a| \cdot |d|$ se tiene que:

$$\underset{(cms)}{|e|} = \begin{vmatrix} 1.8468 & = & e_1 \\ -0.8164 & = & e_2 \\ -0.0608 & = & e_3 \\ -0.4905 & = & e_4 \\ 0.0000 & = & e_5 \\ 1.4965 & = & e_6 \\ -0.8709 & = & e_7 \\ 0.0000 & = & e_8 \\ 0.1742 & = & e_9 \\ 0.1131 & = & e_{10} \\ 1.3607 & = & e_{11} \end{vmatrix}$$

Paso o) Cálculo de las fuerzas internas en las barras.

Teniendo las deformaciones en las barras y la rigidez de cada una de estas barras, se conocen las fuerzas internas.

$$|F| = |\ulcorner k \lrcorner| \cdot |e|$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 18.468 = F_1 \\ -6.531 = F_2 \\ -0.4864 = F_3 \\ -4.005 = F_4 \\ 0.000 = F_5 \\ 17.958 = F_6 \\ -8.709 = F_7 \\ 0.000 = F_8 \\ 1.742 = F_9 \\ 0.945 = F_{10} \\ 10.886 = F_{11} \end{vmatrix}$$

Lo que indica que :

— Las fuerzas positivas cambian de sentido a las originalmente supuestas.

— Las fuerzas negativas indican que se supuso bien el sentido de las fuerzas al inicio del ejemplo.

Paso 7) Comprobando equilibrio.

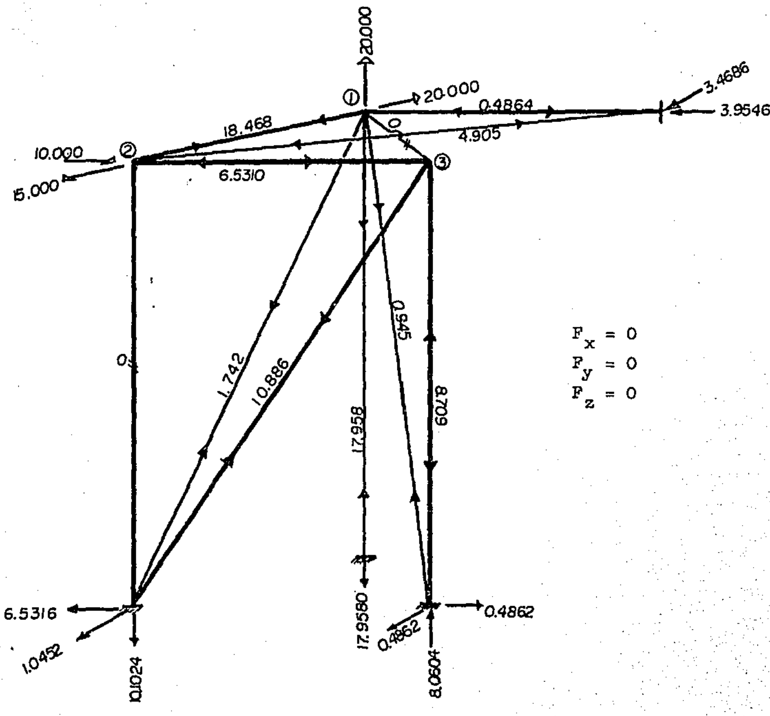
$$\left| P \right| = \left| a \right| \cdot \left| F \right|$$

$$\begin{vmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{z2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{z3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & -0.515 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.8 & 0.686 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 18.468 \\ -6.531 \\ -0.486 \\ -4.905 \\ 0 \\ 17.958 \\ -8.709 \\ 0 \\ 1.742 \\ 0.945 \\ 10.886 \end{vmatrix}$$

— Realizando la multiplicación matricial se tiene:

$$\begin{vmatrix} P_{x1} & = & -19.9999 & \approx & -20 \\ P_{y1} & = & -0.0002 & \approx & 0 \\ P_{z1} & = & 19.9999 & \approx & 20 \\ P_{x2} & = & 14.9997 & \approx & 15 \\ P_{y2} & = & 9.9993 & \approx & 10 \\ P_{z2} & = & 0 & = & 0 \\ P_{x3} & = & 0 & = & 0 \\ P_{y3} & = & 0.0006 & \approx & 0 \\ P_{z3} & = & -0.0002 & \approx & 0 \end{vmatrix} = \left| P \right|$$

Paso 8) Vaciado de resultados en un croquis :

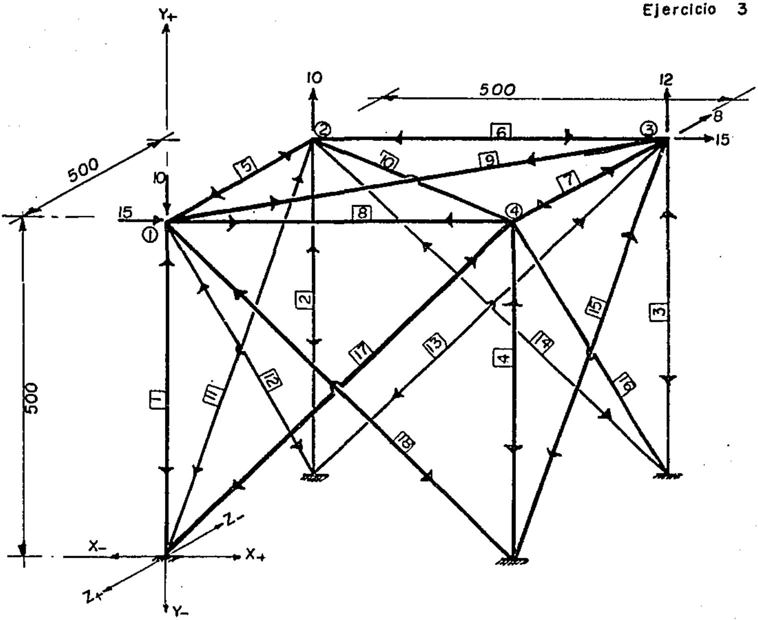


$F_x = 0$

$F_y = 0$

$F_z = 0$

Ejercicio 3



Características :

k = E A / L = 1.00

Fuerza en toneladas.

Acotaciones en centímetros.

Paso 1) EJERCICIO No. 3

$$\underset{(\text{Ton})}{|P|} = \begin{vmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 15 \\ 12 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \underset{(\text{Ton/cm})}{|{}^{\nwarrow}k_{\searrow}|} = \begin{vmatrix}
1.0 \\
& 1.0 \\
& & 1.0 \\
& & & 1.0 \\
& & & & 1.0 \\
& & & & & 1.0 \\
& & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & 1.0 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & 1.0
\end{vmatrix}$$

Paso 2) Formar la matriz de continuidad de orden 18 x 12 .

	①			②			③			④		
	X_1	Y_1	Z_1	X_2	Y_2	Z_2	X_3	Y_3	Z_3	X_4	Y_4	Z_4
b_1	0	1	0									
b_2				0	1	0						
b_3							0	1	0			
b_4										0	1	0
b_5	0	0	1	0	0	-1						
b_6				-1	0	0	1	0	0			
b_7							0	0	-1	0	0	1
b_8	1	0	0							-1	0	0
b_9	0.707	0	-0.707				-0.707	0	0.707			
b_{10}				0.707	0	0.707				-0.707	0	-0.707
b_{11}				0	0.707	-0.707						
b_{12}	0	0.707	0.707									
b_{13}							0.707	0.707	0			
b_{14}				-0.707	0.707	0						
b_{15}							0	0.707	-0.707			
b_{16}										0	0.707	
b_{17}										0.707	0.707	0.707
b_{18}	-0.707	0.707	0									0

Matriz de continuidad $|a|$

Paso 3) Formar la matriz global de Rigideces $|K|$ con el producto matricial.

$$|K| = |a|^T |a|$$

	X_1	Y_1	Z_1	X_2	Y_2	Z_2	X_3	Y_3	Z_3	X_4	Y_4	Z_4
X_1	2.0	-0.5	-0.5				-0.5		0.5	-1		
Y_1	-0.5	2.0	0.5									
Z_1	-0.5	0.5	2.0			-1	0.5		-0.5			
X_2				2.0	-0.5	0.5	-1			-0.5		-0.5
Y_2				-0.5	2.0	-0.5						
Z_2			-1	0.5	-0.5	2.0				-0.5		-0.5
X_3	-0.5		0.5	-1			2.0	0.5	-0.5			
Y_3							0.5	2.0	-0.5			
Z_3	0.5		-0.5				0.5	-0.5	2.0			-1
X_4	-1			-0.5		-0.5				2.0	0.5	0.5
Y_4										0.5	2.0	0.5
Z_4				-0.5		-0.5			-1	0.5	0.5	2.0

Paso 4) Encontrar los desplazamientos externos mediante la solución del sistema de ecuaciones.

$$|P| = |K| \cdot |d|$$

Efectuando el sistema de ecuaciones con el programa para resolver dicho problema, se tiene que los desplazamientos externos son:

$$|d| = \begin{vmatrix} d_{x1} & = & 22.53165 \\ d_{y1} & = & 0.42297 \\ d_{z1} & = & 0.83978 \\ d_{x2} & = & 15.15070 \\ d_{y2} & = & 9.51821 \\ d_{z2} & = & 2.92213 \\ d_{x3} & = & 19.18263 \\ d_{y3} & = & -0.14846 \\ d_{z3} & = & -5.41120 \\ d_{x4} & = & 17.13501 \\ d_{y4} & = & -3.01036 \\ d_{z4} & = & -1.40356 \end{vmatrix}$$

(cms.)

Paso 5) Cálculo de las deformaciones en las barras.

$$\left| e \right| = \left| a \right| . \left| d \right|$$

$$\underset{(\text{cms.})}{\left| e \right|} = \left| \begin{array}{lcr} e_1 & = & 0.42207 \\ e_2 & = & 9.51821 \\ e_3 & = & -0.14846 \\ e_4 & = & -3.91036 \\ e_5 & = & -2.08235 \\ e_6 & = & 4.03193 \\ e_7 & = & 3.91764 \\ e_8 & = & 5.39664 \\ e_9 & = & -2.05200 \\ e_{10} & = & 1.71925 \\ e_{11} & = & 4.66413 \\ e_{12} & = & 0.89290 \\ e_{13} & = & 13.45919 \\ e_{14} & = & -3.98277 \\ e_{15} & = & 3.72132 \\ e_{16} & = & -3.82115 \\ e_{17} & = & 9.35124 \\ e_{18} & = & -15.63320 \end{array} \right|$$

Paso 6) Por la Ley de Hooke se conocen los esfuerzos en las barras debido a sus deformaciones.

$$\left| F \right| = \left| \ulcorner k \lrcorner \right| \cdot \left| e \right| \quad \text{Pero} \quad \left| \ulcorner k \lrcorner \right| = 1.0 \ \text{T/cm.}$$

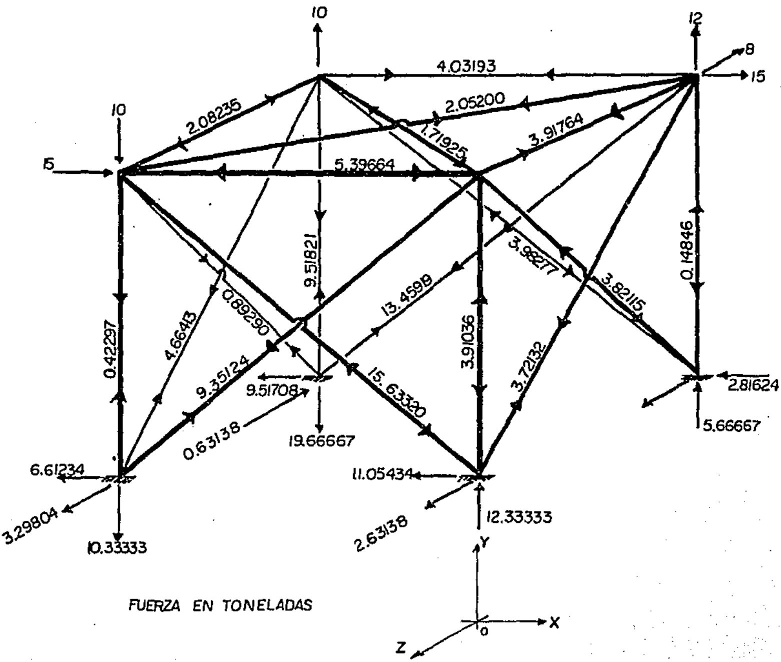
$$\underset{(\text{ton})}{\left| F \right|} = \begin{vmatrix} 0.42297 \\ 0.51821 \\ -0.14846 \\ -3.91036 \\ -2.08235 \\ 4.03193 \\ 3.91764 \\ 5.39664 \\ -2.05200 \\ 1.71925 \\ 4.66413 \\ 0.89290 \\ 13.45919 \\ -3.98277 \\ 3.72132 \\ -3.82115 \\ 9.35124 \\ -15.63320 \end{vmatrix}$$

Paso 7) Comprobación .

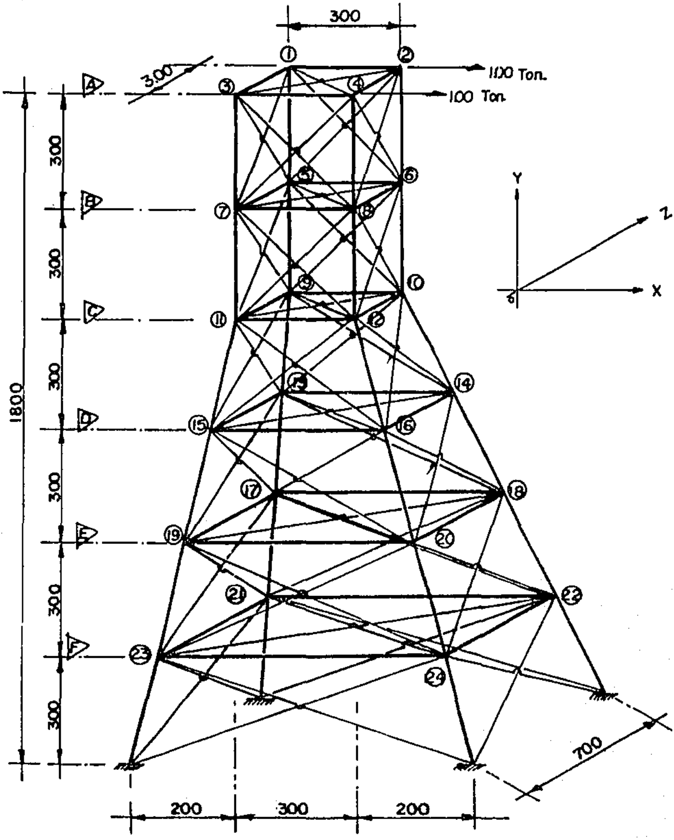
$$|P| = |a|^T \cdot |F|$$

$$|P|_{(ton)} = \begin{vmatrix} 15.00000 & = & 15 \\ -10.00000 & = & 10 \\ 0.00001 & \approx & 0 \\ 0.00001 & \approx & 0 \\ 10.00000 & = & 10 \\ 0.00000 & = & 0 \\ 15.00000 & = & 15 \\ 12.00000 & = & 12 \\ -8.00000 & = & -8 \\ 0.00001 & \approx & 0 \\ 0.00000 & = & 0 \\ -0.00001 & \approx & 0 \end{vmatrix}$$

PASO 8) Vaciando resultados :



FUERZA EN TONELADAS


300
1100 Ton.
100 Ton.
3.00
1800
300
300
300
300
300
300
300
A
B
C
D
E
F
Y
Z
X
700
200
300
200

EJERCICIO No. 4

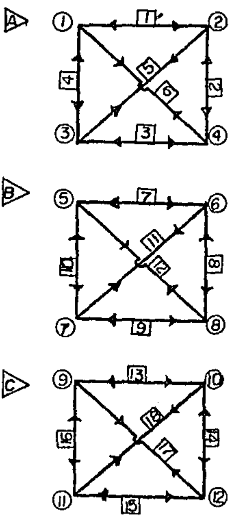
Diseñar la siguiente torre que soporta la fuerza de tensión de 2 cables con los siguientes datos:

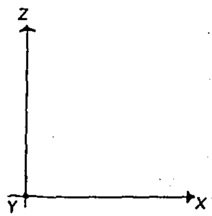
La relación EA / L = 1

Los nudos de los apoyos están restringidos.

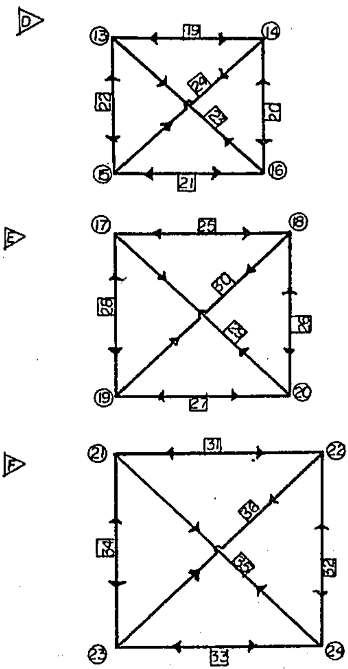
nudos = 24 , # barras = 108 , nudos cargados = 2 (2,4)

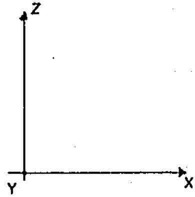
La torre se subdivide en varios planos:



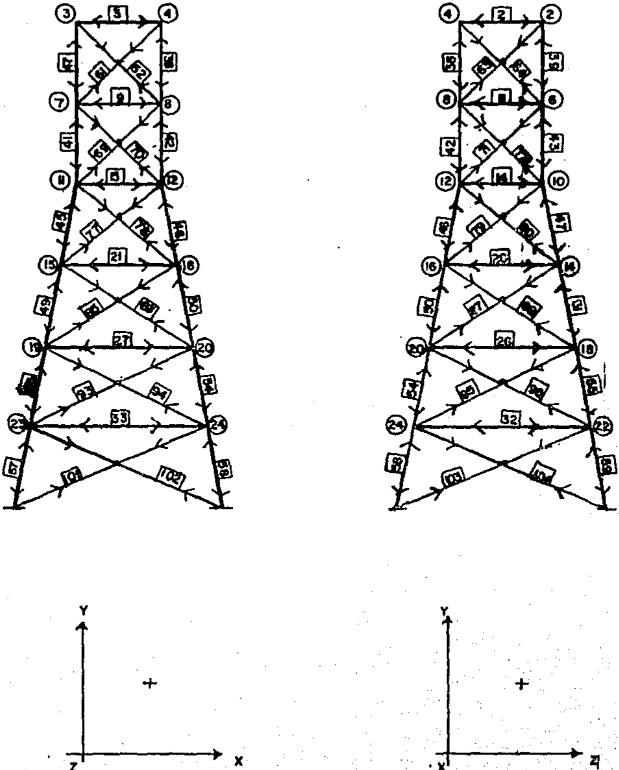


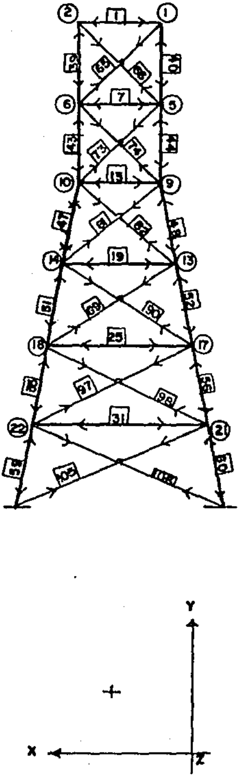
Plano de referencia.



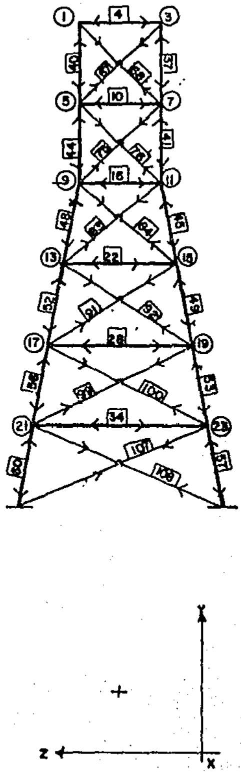


Plano de referencia


Y
Z
X
Y
X
Z



2
1
1
6
7
5
10
13
9
14
19
13
18
25
17
22
31
21
Y
X
Z



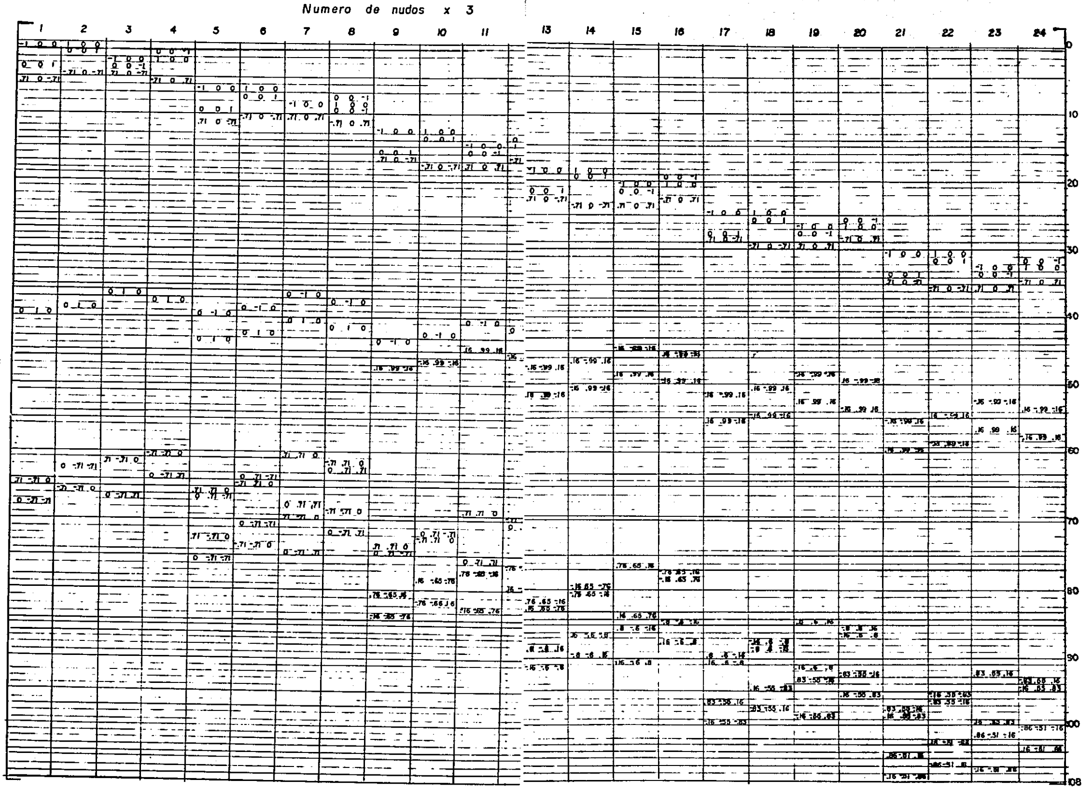
1
4
3
5
10
7
9
16
11
13
22
15
17
28
19
21
34
23
Y
Z
X

Paso 1)

Matriz $|P|$ (ton) Matriz $|k|$ = 1 Ton/cm.

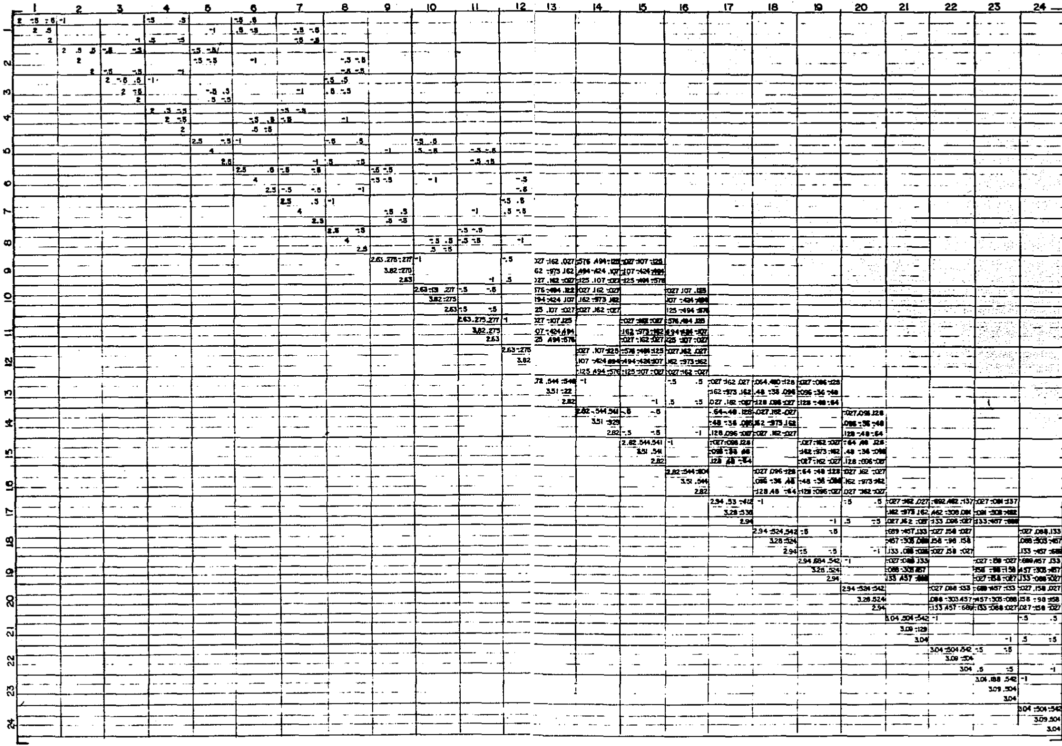
$$
\begin{vmatrix}
x_1 & = & 0 \\
y_1 & = & 0 \\
z_1 & = & 0 \\
x_2 & = & 1 \\
y_2 & = & 0 \\
z_2 & = & 0 \\
x_3 & = & 0 \\
y_3 & = & 0 \\
z_3 & = & 0 \\
x_4 & = & 1 \\
y_4 & = & 0 \\
z_4 & = & 0 \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
x_{23} & = & 0 \\
y_{23} & = & 0 \\
z_{23} & = & 0 \\
x_{24} & = & 0 \\
y_{24} & = & 0 \\
z_{24} & = & 0
\end{vmatrix}
\qquad
\frac{1}{E} \cdot
\begin{array}{c|cccccccccccccccccccccccc|}
b_1 & 1 \\
b_2 & & 1 \\
b_3 & & & 1 \\
b_4 & & & & 1 \\
b_5 & & & & & 1 \\
b_6 & & & & & & 1 \\
b_7 & & & & & & & 1 \\
b_8 & & & & & & & & 1 \\
b_9 & & & & & & & & & 1 \\
b_{10} & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\cdot & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
b_{105} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
b_{106} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
b_{107} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
b_{108} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

$|a| =$



Numero de nudos X 3

$|\mathbb{K}| =$



Paso 4) Encontrar los desplazamientos externos mediante la solución del sistema de ecuaciones.

$$|P| = |K| \cdot |d|$$

	d_{x1} = 5.1624E4	d_{x9} = 2.2061E4	d_{x17} = 5.2364E3
	d_{y1} = 7.3241E3	d_{y9} = 5.7143E3	d_{y17} = 4.2259E3
	d_{z1} = -7.5919E1	d_{z9} = -2.0466E2	d_{z17} = -3.8761E2
	d_{x2} = 5.1980E4	d_{x10} = 2.2065E4	d_{x18} = 5.2365E3
	d_{y2} = -7.3754E3	d_{y10} = -5.7143E3	d_{y18} = -4.2259E3
	d_{z2} = -2.4948E0	d_{z10} = 2.0133E2	d_{z18} = 3.8747E2
	d_{x3} = 5.1624E4	d_{x11} = 2.2061E4	d_{x19} = 5.2364E3
	d_{y3} = 7.3241E3	d_{y11} = 5.7143E3	d_{y19} = 4.2259E3
	d_{z3} = 7.5919E1	d_{z11} = 2.0466E2	d_{z19} = 3.8761E2
	d_{x4} = 5.1980E4	d_{x12} = 2.2065E4	d_{x20} = 5.2365E3
	d_{y4} = -7.3754E3	d_{y12} = -5.7143E3	d_{y20} = -4.2259E3
$\frac{A}{E}$	d_{z4} = 2.4948E0	d_{z12} = -2.0133E2	d_{z20} = -3.8747E2
	d_{x5} = 3.6133E4	d_{x13} = 1.2046E4	d_{x21} = 1.3347E3
	d_{y5} = 6.9246E3	d_{y13} = 5.4063E3	d_{y21} = 2.3278E3
	d_{z5} = -1.7171E2	d_{z13} = -4.2814E2	d_{z21} = -4.5125E2
	d_{x6} = 3.6097E4	d_{x14} = 1.2045E4	d_{x22} = 1.3347E4
	d_{y6} = -6.9217E3	d_{y14} = -5.4063E3	d_{y22} = -2.3278E3
	d_{z6} = 1.9288E	d_{z14} = 4.2863E2	d_{z22} = 4.5122E2
	d_{x7} = 3.6133E4	d_{x15} = 1.2046E4	d_{x23} = 1.3347E3
	d_{y7} = 6.9246E3	d_{y15} = 5.4063E3	d_{y23} = 2.3278E3
	d_{z7} = 1.7171E2	d_{z15} = 4.2814E2	d_{z23} = 4.5125E2
	d_{x8} = 3.6097E4	d_{x16} = 1.2045E4	d_{x24} = 1.3347E4
	d_{y8} = -6.9217E3	d_{y16} = -5.4063E3	d_{y24} = -2.3278E3
	d_{z8} = -1.9288E2	d_{z16} = -4.2868E2	d_{z24} = -4.5127E2

Paso 5) Cálculo de las deformaciones en las barras. $|e|$

$$|e| = |a| \cdot |d|$$

$e_{1} = 1.0658E5$	$e_{20} = 2.5722E5$	$e_{39} = -1.3612E5$
$e_{2} = -1.4580E3$	$e_{21} = -1.9200E2$	$e_{40} = 1.1984E5$
$e_{3} = 1.0658E5$	$e_{22} = -2.5687E5$	$e_{41} = 3.6309E5$
$e_{4} = -4.5501E4$	$e_{23} = 1.1314E1$	$e_{42} = -3.6221E5$
$e_{5} = -5.8761E4$	$e_{24} = 1.1314E1$	$e_{43} = -3.6221E5$
$e_{6} = -5.8761E4$	$e_{25} = 3.5000E1$	$e_{44} = 3.6309E5$
$e_{7} = -1.0890E4$	$e_{26} = 2.3249E5$	$e_{45} = 5.5992E5$
$e_{8} = 1.1576E5$	$e_{27} = 3.5000E1$	$e_{46} = -5.5997E5$
$e_{9} = -1.0890E4$	$e_{28} = -2.3256E5$	$e_{47} = -5.5997E5$
$e_{10} = -1.0299E5$	$e_{29} = 3.9700E0$	$e_{48} = 5.5992E5$
$e_{11} = 3.1862E3$	$e_{30} = 3.9700E0$	$e_{49} = 6.7019E5$
$e_{12} = 3.1862E3$	$e_{31} = -6.0201E0$	$e_{50} = -6.7018E5$
$e_{13} = 1.2180E3$	$e_{32} = 2.7076E5$	$e_{51} = -6.7018E5$
$e_{14} = 1.2081E3$	$e_{33} = -6.0199E0$	$e_{52} = -6.7019E5$
$e_{15} = 1.2210E3$	$e_{34} = -2.7074E5$	$e_{53} = 7.3248E5$
$e_{16} = -1.2278E5$	$e_{35} = 3.2147E-5$	$e_{54} = -7.3248E5$
$e_{17} = -1.6971E2$	$e_{36} = 3.2147E-5$	$e_{55} = -7.3248E5$
$e_{18} = -1.6971E2$	$e_{37} = 1.1984E5$	$e_{56} = 7.3248E5$
$e_{19} = -1.9200E2$	$e_{38} = -1.3612E5$	$e_{57} = 7.5776E5$

$e_{58} = -7.5776E5$

$e_{59} = -7.5776E5$

$e_{60} = 7.5776E5$

$e_{61} = -2.3199E5$

$e_{62} = 1.9228E5$

$e_{63} = 3.9486E4$

$e_{64} = 3.9486E4$

$e_{65} = 1.9228E5$

$e_{66} = -2.3199E5$

$e_{67} = -2.2797E4$

$e_{68} = -2.2797E4$

$e_{69} = -2.0994E5$

$e_{70} = 2.1433E5$

$e_{71} = 1.2197E5$

$e_{72} = 1.2197E5$

$e_{73} = 2.1433E5$

$e_{74} = -2.0994E5$

$e_{75} = -1.2511E5$

$e_{76} = -1.2511E5$

$e_{77} = -9.0033E4$

$e_{78} = 8.9143E4$

$e_{79} = 2.4126E5$

$e_{80} = 2.4126E5$

$e_{81} = 8.9143E4$

$e_{82} = -9.0033E4$

$e_{83} = -2.4049E5$

$e_{84} = -2.4049E5$

$e_{85} = -7.3682E4$

$e_{86} = 7.3829E4$

$e_{87} = 1.8077E5$

$e_{88} = 1.8077E5$

$e_{89} = 7.3829E4$

$e_{90} = 7.3682E4$

$e_{91} = -1.8090E5$

$e_{92} = -1.8090E5$

$e_{93} = -6.5644E4$

$e_{94} = 6.5619E4$

$e_{95} = 1.4428E5$

$e_{96} = 1.4428E5$

$e_{97} = 6.5613E4$

$e_{98} = -6.5644E4$

$e_{99} = -1.4426E5$

$e_{100} = -1.4426E5$

$e_{101} = -6.1166E4$

$e_{102} = 6.1173E4$

$e_{103} = 1.9673E5$

$e_{104} = 1.9673E5$

$e_{105} = 6.1173E4$

$e_{106} = -6.1166E4$

$e_{107} = -1.9673E5$

$e_{108} = -1.9673E5$

Paso 6) Por Ley de Hooke se conocen los esfuerzos en las barras debidos a sus deformaciones.

$$|F| = |k_{s}| \cdot |e|$$

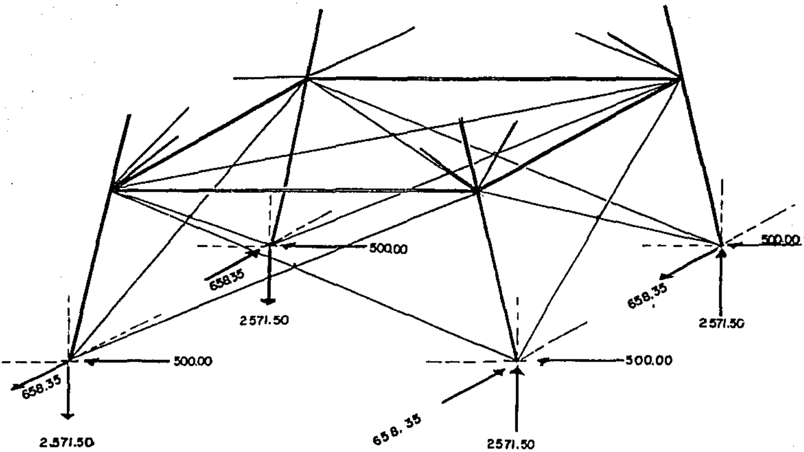
F_1	3.55273E+02	F_{20}	6.43041E+02	F_{39}	-4.53729E+02
F_2	-4.86729E+00	F_{21}	-4.81445E-01	F_{40}	3.99472E=02
F_3	3.55277E+02	F_{22}	-6.42168E+02	F_{41}	1.21031E+03
F_4	-1.51671E+02	F_{23}	2.24316E-02	F_{42}	-1.20737E+03
F_5	-1.38500E+02	F_{24}	2.18813E-02	F_{43}	-1.20736E+03
F_6	-1.38506E+02	F_{25}	7.44629E-02	F_{44}	1.21032E+03
F_7	-3.62969E+01	F_{26}	4.64968E+02	F_{45}	1.83785E+03
F_8	3.85851E+02	F_{27}	7.54395E-02	F_{46}	-1.83803E+03
F_9	-3.63086E+01	F_{28}	-4.65112E+02	F_{47}	-1.83803E+03
F_{10}	-3.43299E+02	F_{29}	-7.76851E-04	F_{48}	1.83786E+03
F_{11}	7.51138E+00	F_{30}	-1.51054E-03	F_{49}	2.19982E+03
F_{12}	7.51378E+00	F_{31}	-1.42212E-02	F_{50}	-2.19981E+03
F_{13}	4.06250E+00	F_{32}	4.51266E+02	F_{51}	-2.19980E+03
F_{14}	4.02707E+02	F_{33}	-1.29395E-02	F_{52}	2.19983E+03
F_{15}	4.07031E+00	F_{34}	-4.51241E+02	F_{53}	2.40426E+03
F_{16}	-4.09248E+02	F_{35}	-6.25796E-04	F_{54}	-2.40426E+03
F_{17}	-3.97176E-01	F_{36}	4.42373E-04	F_{55}	-2.40425E+03
F_{18}	-3.97953E-01	F_{37}	3.99473E+02	F_{56}	2.40427E+03
F_{19}	-4.80469E-01	F_{38}	-4.53728E+02	F_{57}	2.48724E+03

F_{58}	-2.48724E+03
F_{59}	-2.48723E+03
F_{60}	2.48724E+03
F_{61}	-7.73291E+02
F_{62}	6.40933E+02
F_{63}	1.31617E+02
F_{64}	1.31619E+02
F_{65}	6.40928E+02
F_{66}	-7.73289E+02
F_{67}	-7.59950E+01
F_{68}	-7.59922E+01
F_{69}	-6.99794E+02
F_{70}	7.14441E+02
F_{71}	4.06545E+02
F_{72}	4.06542E+02
F_{73}	7.14438E+02
F_{74}	-6.99795E+02
F_{75}	-4.17024E+02
F_{76}	-4.17017E+02
F_{77}	-1.94174E+02
F_{78}	1.92251E+02
F_{79}	5.20314E+02
F_{80}	5.20316E+02
F_{81}	1.92248E+02
F_{82}	-1.94172E+02
F_{83}	-5.18660E+02
F_{84}	-5.18655E+02
F_{85}	-1.35663E+02
F_{86}	1.35934E+02
F_{87}	3.32815E+02
F_{88}	3.32818E+02
F_{89}	1.35930E+02
F_{90}	-1.35662E+02
F_{91}	-3.33071E+02
F_{92}	-3.33067E+02
F_{93}	-1.04784E+02
F_{94}	1.04737E+02
F_{95}	2.30302E+02
F_{96}	2.30303E+02
F_{97}	1.04734E+02
F_{98}	-1.04783E+02
F_{99}	-2.30260E+02
F_{100}	-2.30256E+02
F_{101}	-8.54379E+01
F_{102}	8.54486E+01
F_{103}	2.74799E+02
F_{104}	2.74800E+02
F_{105}	8.54460E+01
F_{106}	-8.54369E+01
F_{107}	-2.74812E+02
F_{108}	-2.74809E+02

Paso 7) Comprobando equilibrio.

$$|P| = |a| \cdot |F|$$

$$\left|\begin{array}{llll}
P_{x1} & 0.001 & \simeq & 0 \\
P_{y1} & 0 & = & 0 \\
P_{z1} & 0 & = & 0 \\
P_{x2} & 1000.09 & \simeq & 1000 \\
P_{y2} & 0.01 & \simeq & 0 \\
P_{z2} & 0 & = & 0 \\
P_{x3} & 0 & = & 0 \\
P_{y3} & 0 & = & 0 \\
P_{z3} & 0 & = & 0 \\
P_{x4} & 1000.08 & \simeq & 1000 \\
P_{y4} & 0 & = & 0 \\
P_{z4} & 0 & = & 0 \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
P_{x24} & 0 & = & 0 \\
P_{y24} & 0 & = & 0 \\
P_{z24} & 0 & = & 0
\end{array}\right|$$



Reacciones en apoyos.

C O N C L U S I O N E S .

Es muy amplio el campo del análisis estructural para lo cual fué necesario tomar un poco de él y poder desarrollar éste tema de tesis, el cual enfocado a estudiar el método de las Rigideces aplicado a armaduras hiperestáticas en su forma matricial.

En el presente trabajo se tuvo especial cuidado en tratar de explicar la metodología paso a paso para hacerlo más explícito, con el fín de que cualquier persona afin a él, no se complique con pasos tediosos y para lograr que éste método sea aplicable a problemas prácticos los cuales seguramente estarán continuamente presentándose a nivel profesional.

Todos y cada uno de los capítulos incluídos en el presente trabajo tienen un porqué en el conjunto global, cada uno de ellos no tendría razón de estar ahí sin el anterior, ya que se buscó en todo momento al iniciarse y proseguirse el presente trabajo, en llevar una metodología específica, la cual creo es la adecuada.

En el capítulo I el cual está destinado al análisis matricial se explican y efectuan operaciones y álgebra con matrices como apoyo para los siguientes capítulos.

En el capítulo posterior se tocan los puntos del análisis estructural enfocados al método de las rigideces, el cual se aplica en los capítulos siguientes, uno en el cual se explican y analizan varios ejemplos que en la práctica se podrían encontrar, los cuales se pueden analizar en el plano o planos y en el espacio.

Con éste presente trabajo se logra introducir un poco más a lo desarrollado a nivel licenciatura en el campo del análisis estructural y que por alguna causa se cree que esta rama de la ingeniería civil es muy complicada; con ésto no quiero decir que es fácil, si no que con un poco de imaginación y con estudios de estática y estructuras se puede lograr resolver problemas que en un inicio se podrían ver complicados no lo son tanto.

Con la presente quiero agradecer a mi asesor, profesor y ante todo amigo Ingeniero I. Enrique Hernandez Quinto, el haber colaborado con su apoyo y paciencia para lograr realizar este querido trabajo.

Codificado en Basic.

```
  5 REM PROGRAMA QUE RESUELVE SISTEMAS DE ECUACIONES
 10 CLEAR : INPUT "# DE ECUACIONES" ; N
 20 DIM A (N, N + 1)
 30 FOR I = 1 TON : FOR J = 1 TO N + 1
 40 INPUT ">" ; A (I, J)
 50 NEXT J, I
 60 FOR K=1 TON : CLS : PRINT " CALC..."
 70 T = A ( K , K )
 80 IF T = 0 THEN PRINT " ERROR " : END
 90 FOR J=1 TO N + 1 : A (K,J) = A(K,J)/ T
100 NEXT J
110 FOR I=1 TO N; IF I=K THEN 160
120 T = A ( J,K )
130 FOR J=1 TO (N+1)
140 A ( I,J) = A ( I,J ) - T * A (K,J )
150 NEXT J
160 NEXT I , K
170 CLS : FOR I=1 TO N
180 PRINTCHR$ (96+I) " = " ; A ( I, N + 1 )
190 NEXT I
200 END
```

Codificado en Basic .

```
10  REM CHOLESKY
20  INPUT "ORDEN" ; N
30  G = N
40  DIM  K(N,N) ,  X(N) , P(N)
50  PRINT "MATRIZ  [K]  DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA"
60  FOR  I = 1 TON :  FOR J = 1 TO I : PRINT "K(" ; I;" , ";
    J;" ) = " :  INPUT  K(I,J) :  NEXT J,I
70  FOR  I = 1  TO N : CLS
80  PRINT" VECTOR  [P]  DE FUERZAS EXTERNAS "
90  PRINT "P("; I;") = " :  INPUT  P (I) : NEXT I
100 CLS : PRINT " Calculando..."
110 FOR  I=1  TO N :  FOR  J = 1  TO I
120 S = O
130 IF J=1  THEN 150
140 FOR R=1  TO ( J-1 ) :  S=S + K(I,R) * K(J,R) : NEXT R
150 P = K(I,J) - S
160 IF  I = J  THEN 200
170 P = K(I,J) - S
180 K(I,J) = P/K(J,J)
```

```
190  GOTO 210
200  K(I,I) = SQR (P)
210  NEXT J
220  NEXT I
230  FOR  I = 1  TO N : S = 0
240  IF I=1  THEN 280
250  FOR  KI = 1  TO (I-1)
260  S = S + K(I,KI) * X(KI)
270  NEXT KI
280  X(I) = ( F(I) - S) /  K(I,I)
290  NEXT I
300  FOR  IP = 1  TO N
310  I = N - IP + 1
320  X(I) = X(I) / K(I,I)
330  FOR KI = 1  TO (I- 1 )
340  X(KI) =  X(KI) - K(I,KI) * X(I)
350  NEXT KI
360  NEXT IP
370  PRINT "VECTOR [D]  DE DESPLAZAMIENTOS EXTERNOS DE LOS --
     NUDOS "
```

```
380  FOR  I = 1  TO G
390  PRINT " d ("; I; " ) = " ;  X(I)
400  NEXT I
500  END
```

BIBLIOGRAFIA.

Kleiman, Ariel y Elena K. de
MATRICES . México. Ed. Limusa, 4ª Reimpresión, 1ª Edición.
1981.

Mc. Cormac, Jack C.
ANALISIS ESTRUCTURAL . México. Ed. Harla, 3ª Edición
1983.

Norris, C. H. & Wilbur J. B.
ELEMENTARY STRUCTURAL ANALYSIS. New York. Ed. Mc. Graw Hill
Book Company. 1960.