



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

APLICACION DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO
AL ANALISIS DE MECANICA DE FRACTURA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
(AREA MECANICA)

P R E S E N T A :

GABRIEL DOMINGO VIESCA LOBATON

DIRECTORES:

DR. LUIS HECTOR HERNANDEZ GOMEZ

ING. UBALDO MARQUEZ AMADOR



MEXICO, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1984



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Dios.

A mis papás.

A mis hermanos.

A todos mis amigos.

**De modo especial, a mi abuelo,
Ing. Aurelio Lobatón Garza †
en agradecimiento a su ejemplo y cariño.**

AGRADECIMIENTO

A la Facultad de Ingeniería de la UNAM, particularmente a mis profesores.

Al Instituto de Investigaciones Eléctricas.

De modo especial, a todos en el Departamento Mecánico del IIE, por su apoyo y amistad.

Muchas personas intervinieron en la realización de esta tesis. Agradezco profundamente el apoyo que de una manera u otra me brindaron, especialmente al Dr. Luis Héctor Hernández Gómez, y al Ing. Ubaldo Márquez Amador.

| | |
|--------------|-----|
| ÍNDICE | iii |
| SIMBOLOGÍA | vi |
| INTRODUCCIÓN | 1 |

CAPÍTULO 1

| | |
|---|----------|
| CONCEPTOS GENERALES DE MECÁNICA DE FRACTURA | 6 |
| 1.1 ORÍGENES DE LA MECÁNICA DE FRACTURA. | 7 |
| 1.2 CARACTERÍSTICAS DE LAS FALLAS FRÁGILES Y DÚCTILES. | 9 |
| 1.3 MODOS DE CARGA. | 10 |
| 1.4 TRATAMIENTO ENERGÉTICO DE LA MECÁNICA DE LA FRACTURA. | 11 |
| 1.5 CARACTERÍSTICAS DEL CAMPO DE ESFUERZOS EN LA VECINDAD DE LA PUNTA DE LA GRIETA. | 14 |
| 1.6 CARACTERÍSTICAS DE LA ZONA PLÁSTICA. | 17 |
| 1.7 LA INTEGRAL J. | 20 |
| 1.8 RELACIÓN ENTRE K, G y J. | 22 |
| 1.9 CURVAS DE RESISTENCIA. | 24 |
| 1.10 IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS NUMÉRICO EN MECÁNICA DE LA FRACTURA. | 25 |
| 1.11 REFERENCIAS. | 27 |

CAPÍTULO 2

| | |
|---|-----------|
| CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO | 29 |
| 2.1 ORÍGENES DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO. | 30 |
| 2.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MÉTODO. | 31 |
| 2.2.1 DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO. | 33 |
| 2.2.1.1 TIPOS DE ELEMENTOS. | 34 |
| 2.2.1.2 NODOS. | 37 |
| 2.2.1.3 TAMAÑO DE LOS ELEMENTOS. | 38 |
| 2.2.2 SELECCIÓN DE LOS POLINOMIOS DE INTERPOLACIÓN. | 39 |
| 2.2.3 DEFINIR LAS ECUACIONES DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISIS DE ESFUERZOS. | 42 |
| 2.2.4 ENSAMBLAR LAS ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS FINITOS DE LA RED. | 45 |
| 2.2.5 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES RESULTANTE. | 46 |
| 2.2.6 SOLUCIÓN DE VARIABLES SECUNDARIAS. | 46 |
| 2.2.7 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS. | 46 |
| 2.3 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MÉTODO. | 47 |
| 2.4 VISIÓN Y PERSPECTIVAS DEL MÉTODO. | 47 |
| 2.5 REFERENCIAS. | 49 |

CAPÍTULO 3

| | |
|--|-----------|
| ESTABLECIMIENTO Y VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA | 51 |
| 3.1 GENERALIDADES. | 52 |
| 3.2 EL PROGRAMA ANSYS. | 52 |
| 3.3 DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA. | 53 |
| 3.4 REALIZACIÓN DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS DE MECÁNICA DE FRACTURA. | 54 |

| | |
|---|----|
| 3.5 CONSIDERACIONES AL MODELAR LA PUNTA DE GRIETA. | 58 |
| 3.6 EVALUACIÓN DEL CAMPO DE ESFUERZOS. | 60 |
| 3.7 CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS. | 61 |
| 3.8 VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA. | 62 |
| 3.8.1 PRUEBA FOTOELÁSTICA DE FRACTURA. | 62 |
| 3.8.2 DETERMINACIÓN DE K_{Ic} SEGÚN ASTM. | 72 |
| 3.9 EXACTITUD EN CÁLCULOS DE FRACTURA. | 77 |
| 3.10 CONCLUSIONES. | 78 |
| 3.11 REFERENCIAS. | 79 |

CAPÍTULO 4

| | |
|---|-----------|
| APLICACION DE LA METODOLOGIA AL ANALISIS DE TUBERIAS AGRIETADAS AXIALMENTE | 80 |
| 4.1 GENERALIDADES. | 81 |
| 4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. | 84 |
| 4.3 MODELADO. | 85 |
| 4.3.1 GEOMETRÍA. | 85 |
| 4.3.2 DISCRETIZACIÓN DE LA PUNTA DE LA GRIETA. | 87 |
| 4.3.3 DISCRETIZACIÓN DEL RESTO DEL MODELO. | 87 |
| 4.4 CARGAS Y CONDICIONES DE FRONTERA. | 89 |
| 4.5 OBTENCIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS. | 91 |
| 4.6 SUBMODELADO. | 93 |
| 4.7 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS. | 95 |
| 4.8 CONCLUSIONES. | 97 |
| 4.9 REFERENCIAS. | 99 |

| | |
|---------------|-----|
| CONCLUSIONES. | 101 |
|---------------|-----|

| | |
|---|--|
| Γ | Trayectoria cualquiera alrededor de la punta de la grieta. |
| $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ | Derivadas parciales en X, Y y Z. |
| ξ | Posición de referencia en el sistema de coordenadas local de un elemento. |
| θ | Ángulo; valor en coordenadas polares. |
| Π | Energía potencial total. |
| σ | Esfuerzo nominal aplicado. |
| σ^* | Esfuerzo crítico que provocará la propagación de grieta inestable en una placa plana. |
| σ_{ys} | Esfuerzo de fluencia ("yielding stress"). |
| σ_{ij} | Esfuerzo local en el punto de coordenadas (i,j). |
| σ_T^* | Esfuerzo tangencial crítico para propagación inestable. |
| σ_T | Esfuerzo tangencial en cuerpos cilíndricos ("hoop stress"). |
| σ_∞ | Esfuerzo aplicado a una distancia infinita de la zona agrietada. |
| τ_x, τ_y, τ_z | Esfuerzos cortantes en X, Y, y Z. |
| γ_e | Energía de superficie del material. |
| [] | Matriz. |
| [E] | Matriz de rigidez del material. |
| [K] | Matriz de rigidez para todo el modelo. |
| [k] | Matriz de rigidez, para cada elemento. |
| [N] | Modelo de desplazamientos. |
| { } | Matriz renglón (vector). |
| { } ^T | Matriz renglón traspuesta. |
| {e} | Matriz de deformaciones unitarias. |
| {s} | Matriz de esfuerzos. |
| {Q} | Vector de fuerzas nodales. |
| {q} | Vector de desplazamientos nodales. |
| {R} | Vector ensamble de los vectores de fuerzas. |
| {r} | Matriz de ensamble de los vectores incógnitas. |
| {u} ^T | Vector de desplazamientos. |
| a | Semilongitud de grieta. |
| a _{ef} | Semilongitud efectiva de grieta. |
| B | Espesor de placa. |
| C | Flexibilidad (Compliance, inverso de la rigidez). |
| CAT | Temperatura de detención de grieta (Crack arrest temperature). |
| COD | Desplazamiento de apertura de grieta (Crack opening displacement). |
| d | Zona de influencia frente a la punta de grieta (corrección de zona plástica de Dugdale). |
| dS | Diferencial de superficie. |
| dV | Diferencial de volumen. |

Simbología

| | |
|----------------------------------|---|
| E | Módulo de Young. |
| F | Trabajo desarrollado por las cargas externas. |
| FIS | Factor de intensidad de esfuerzos K. |
| FTE | Punto de transición a fractura elástica (Fracture transicion elastic). |
| FTP | Punto de transición a fractura plástica (Fracture transicion plastic). |
| G | Energía de propagación de grieta. |
| Gc | Energía de propagación de grieta crítica. |
| H | Espesor de pared en tuberías o recipientes cilíndricos. |
| J | Valor de la integral J. |
| Jc | Valor crítico de la integral J. |
| K | Factor de intensidad de esfuerzos. |
| K _I | Factor de intensidad de esfuerzos, modo de apertura. |
| K _{Ia} | Tenacidad de detención o relevo de grieta. |
| K _{Ia} | Tenacidad a la fractura dinámica. |
| L | Longitud de línea nodal |
| M _F | Factor de corrección para análisis de fractura en cilindros. |
| N _i (N ₂) | Funciones cualesquiera que representen la variación de una propiedad en el espacio. |
| NDT | Temperatura de transición dúctil-frágil (Nihil Ductil Transición). |
| P | Carga aplicada constante. |
| q | Valor considerado del desplazamiento de un elemento. |
| q ₁ (q ₂) | Valor considerado del desplazamiento para el nodo 1, (o 2). |
| R | Radio curvatura en cilindros. |
| R | Resistencia total a la propagación de grieta. |
| r | Coordenada radial. |
| r _p * | Corrección de zona plástica de Irwin. |
| T | Vector de tracción. |
| U _γ | Energía de superficie elástica causada por la formación de una grieta. |
| U | Energía potencial total del sistema. |
| U ₀ | Energía potencial del sistema cuando aún no se introduce la grieta. |
| U _a | Disminución de energía elástica debida a la introducción de la grieta. |
| U _n | Valor de desplazamiento real de un nodo. |
| U _p | Energía potencial elástica. |
| U _t | Energía elástica total. |
| u, v, w | Desplazamientos en dirección X, Y, Z respectivamente. |
| u ₁ (u ₂) | Valor real puntual del desplazamiento en el nodo 1, (o 2). |
| W | Ancho de placa. |
| W _p | Energía potencial debida a fuerzas de cuerpo o de superficie. |
| w | Densidad de energía de deformación. |
| $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ | Valor de las fuerzas de cuerpo o volumen. |
| X ₁ (X ₂) | Posición del nodo 1 (o 2) respecto a un sistema local de coordenadas. |
| Y | Factor geométrico de un cuerpo agrietado. |

INTRODUCCIÓN

La presencia de grietas en componentes estructurales es un problema que ha preocupado a los ingenieros desde la antigüedad. Aunque hay pocos datos registrados, revisiones de la historia de la mecánica de materiales muestran los primeros estudios en los que este tipo de problemas se presentó. Así, de acuerdo con Timoshenko [I.1], Leonardo da Vinci realizó en el siglo XV estudios para determinar la resistencia de cables de acero, enunciando que esta dependía de la longitud de los mismos. Revisando este trabajo a la luz de los conocimientos actuales, se ha especulado sobre cómo pudo el inventor renacentista llegar a este resultado, pues la resistencia no depende de la longitud del cable. Se ha expuesto que como la cantidad de material si es función de la longitud, al haber más material la probabilidad de que se presente algún defecto en el cable y provoque su fractura aumenta. Considerando la calidad de los cables disponibles en la época esta opción ha sido aceptada como una explicación razonable [I.2].

La práctica de la ingeniería ha mostrado que la presencia de grietas es un problema inevitable, y ha pasado a ser una consideración más en el diseño y operación de equipos, suponiendo y tolerando desde un principio la presencia de pequeños defectos que con el tiempo crecerán. Para esto se evalúa la integridad estructural de tal modo que estos no alcancen un tamaño crítico durante su vida útil.

La aparición de grietas en una estructura se debe generalmente a una de las siguientes tres causas o a alguna combinación de ellas: 1) Defectos en los componentes, ya sea debidos al proceso de construcción seguido (diseño y fabricación), o a defectos inherentes del material. 2) Problemas durante su operación, debidos a errores en el montaje, manejo o mantenimiento, a fallas en los sistemas de seguridad, o simplemente a corrosión, envejecimiento o desgaste. 3) Por imprevistos tales como problemas en su transportación o almacenamiento, sobrecargas por fatiga no consideradas, cargas dinámicas de magnitud imprevisible debidas a sismos, huracanes, explosiones, impactos de distinto origen, etc. [I.3].

Para abundar un poco en la problemática que surge debido a la presencia de grietas en componentes estructurales, considérese el caso de un componente que falla en una planta termoeléctrica. Al costo de reemplazo o arreglo del componente deberá añadirse el costo derivado de tener que detener la generación de energía en tanto se efectúa la reparación. De acuerdo a un estudio realizado por el National Bureau of Standards (NBS) estadounidense en 1982, se estima que anualmente se gastan 120 mil millones de dólares debido a problemas directa o indirectamente relacionados con fracturas [I.4].

Con respecto a la seguridad, puede considerarse por ejemplo el accidente ocurrido en Cleveland en 1944 con un tanque de gas LP. La secuencia de eventos comenzó con la ruptura del recipiente, provocando el escape de una considerable cantidad de gas que se incendió, causando su explosión y la de tuberías subterráneas que levantaron por completo el pavimento en las calles, creando una esfera de fuego que alcanzó los 850

metros de altura. 79 casas, 2 fábricas y 217 coches fueron destruidos en tanto otras 35 casas y 13 fábricas resultaron seriamente dañadas. Lo peor fue que la explosión mató a 130 personas e hirió gravemente a otras 300 [1.5]. Ejemplos más recientes de este tipo de accidentes en México son los ocurridos en San Juanico (1984) o en el Sector Reforma en Guadalajara (1992), entre otros.

Hasta hace poco, cuando se descubría una grieta en un componente estructural se procedía inmediatamente a repararlo o reemplazarlo, manteniendo así las condiciones de seguridad. Hoy en día, nuevos requerimientos en economía y protección, junto con nuevos avances tecnológicos han provocado un cambio radical en el trato dado a este problema.

Dos factores importantes han modificado los criterios de seguridad provocando este cambio. En primer lugar, el perfeccionamiento de pruebas no destructivas que permiten la detección de defectos que de otra forma pasarían inadvertidos. En segundo, la presencia de una grieta no necesariamente indica que el componente halla llegado al fin de su vida útil, ni que esté cerca de él, o que su operación represente algún peligro. Así puede efectuarse un balance entre el costo de reparación y replazo contra la posibilidad de falla, si se mantiene en operación.

Para evaluar que tan crítica es una falla se han desarrollado dos nuevos conceptos: La **Tolerancia al Daño**, que cuantifica el tamaño y tipo de defectos que pueden permitirse en un componente estructural garantizando una operación segura, y la **Vida Residual**, lapso de tiempo que podrá seguir en uso antes de que una fractura alcance un tamaño crítico que exija su reparación o replazo.

La determinación de la Tolerancia al Daño y de la Vida Residual esta basada en gran parte en la tecnología de la mecánica de fractura. Aunque no es el único factor que interviene al asegurar la integridad estructural de un componente, juega un papel fundamental.

Quizá el más importante campo de aplicación de estas tecnologías en nuestro país esta en el sector de generación eléctrica. La mayoría de las plantas que operan en la actualidad fueron instaladas en la década de los sesenta, y fueron diseñadas para aproximadamente 25 años de vida útil, plazo durante el cual se amortizarían los costos de construcción y se obtendrían suficientes ganancias para reemplazarla. Sin embargo, los criterios actuales de economía exigen un mejor aprovechamiento de los recursos.

Según se ha observado, los componentes que realmente alcanzan el fin de su vida útil al fin del periodo especificado en una planta de potencia pueden reducirse casi al 10% del total [1.6], lo que representa un gran potencial de ahorro, pues esto permite renovar las plantas evitando la necesidad de construir otras nuevas para reemplazarlas. Lo anterior exige el empleo de tecnologías de análisis como la mecánica de la fractura que permitan evaluar con certeza la vida remanente de cada componente y planear su replazo

oportuno, pues de lo contrario podrían provocarse problemas que redujeran la disponibilidad de la planta.

Conviene subrayar la importancia que tiene el diseño en la prevención de fallas estructurales. Los requerimientos en ligereza y economía, así como las aplicaciones cada vez más complejas y en ambientes más adversos, llevan hoy a la tecnología a fronteras nunca antes alcanzadas, que utilizan al límite las propiedades de los materiales. Este diseño de frontera exige una cada vez mejor comprensión del comportamiento de defectos en los materiales, sean estos reales o hipotéticos, generando criterios que permitan disminuir los márgenes de seguridad sin aumentar el riesgo. Esto amplía aún más el campo de aplicación de la mecánica de fractura.

Por otra parte, el determinar si una grieta presente en un componente es crítica utilizando la mecánica de la fractura involucra consideraciones matemáticas que frecuentemente complican la obtención de resultados e incluso la hacen imposible cuando se tratan geometrías complejas. Esto ha provocado que se recurra al empleo del análisis numérico, que permite aplicar los conceptos de mecánica de fractura a problemas complejos de modo práctico. Entre estos destaca hoy por su versatilidad el Método del Elemento Finito.

Aunque fue creado hace relativamente poco, el desarrollo del método del elemento finito ha ampliado su rango de aplicación como ninguna otra herramienta de análisis de su tipo. Las áreas en las que hoy se emplea van desde el análisis estructural hasta el de fluidos o transferencia de calor. Su empleo requiere utilizar equipo de cómputo para efectuar la gran cantidad de cálculos que el método exige, obteniendo así resultados con una precisión difícilmente alcanzable por otros medios, y constituyéndose en un auxiliar de diseño indispensable en las industrias aeroespacial, automovilística y de energía entre otras, además de emplearse como una de las más efectivas herramientas de análisis de fallas.

El objeto de esta tesis es desarrollar una metodología práctica para efectuar el análisis de estructuras agrietadas utilizando los conceptos de Mecánica de Fractura y del Método del Elemento Finito. Consecuentemente se ha dividido en cuatro capítulos:

El primer capítulo busca explicar los principales conceptos de mecánica de fractura empleados. Comienza presentando la evolución de la mecánica de fractura en el presente siglo y luego revisa los conceptos fundamentales para su estudio. Para este efecto explica el tratamiento energético a partir de la teoría de Griffith y las características del campo de esfuerzos en la vecindad de la punta de grieta. Asimismo, se estudian los principales parámetros de fractura: El factor de intensidad de esfuerzos, la energía de propagación de grieta y la integral J . Junto con esta última se enuncian los conceptos básicos para el tratamiento de problemas no lineales. Finalmente introduce al concepto de las curvas de resistencia, muy aplicadas en análisis y diseño por fractura.

Introducción

En el capítulo 2 se revisan las características del método del elemento finito mediante una revisión general, analizando las etapas a seguir durante su aplicación, y explicando brevemente sus fundamentos teóricos, todo enfocado desde el punto de vista del análisis de esfuerzos.

La metodología planteada para modelar problemas de mecánica de fractura utilizando el método del elemento finito y su validación se detallan en el tercer capítulo, proponiendo una serie de pasos generales a seguir y evaluando numéricamente dos casos experimentales: El ensayo fotoelástico de una placa plana agrietada en un extremo y sujeta a esfuerzos de tracción y una prueba de ASTM para la determinación de la tenacidad a la fractura empleando probetas compactas de acero. A partir de estas aplicaciones se analiza la precisión y convergencia del método propuesto.

Finalmente, en el último capítulo se analiza con la metodología el caso de una tubería con una grieta axial, describiendo las principales consideraciones dictadas por la mecánica de la fractura para este caso, las distintas complicaciones que se presentan y las etapas seguidas para su análisis con el método del elemento finito.

REFERENCIAS

- [1.1] Timoshenko, S.P., 1983. *History of Strength of Materials*, Dover publications Inc., New York. (Publicado originalmente por Mc Graw Hill book co. inc., N.Y., 1953)
- [1.2] Kanninen, M.F., Popelar, C.H., 1985, *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford engineering science series, Oxford University Press.
- [1.3] Houbaert, Y., Janssens, B., 1994. *Curso de Análisis de Fallas*. F.I. UNAM, IMT, UAQ. Querétaro, Qro., Junio, 1994.
- [1.4] Duga, J.J. et al, 1983. *The economic effects of Fracture in the United States*, Battelle's Columbus Laboratories report to the National Bureau of Standards.
- [1.5] Atallah, S., 1979 U.S. *History's worst LNG disaster*, firehouse.
- [1.6] Instituto de Investigaciones Eléctricas, 1993, *Vida Residual*, editorial boletín IIE, Mayo/Junio 1993.

CONCEPTOS GENERALES DE MECÁNICA DE FRACTURA

Se estudian los principales conceptos de mecánica de fractura. Se comienza presentando la evolución de la mecánica de fractura en el presente siglo y luego revisa los conceptos fundamentales para su estudio. A continuación se explica el tratamiento energético a partir de la teoría de Griffith y las características del campo de esfuerzos en la vecindad de la punta de grieta. Asimismo se estudian los principales parámetros de fractura: El factor de intensidad de esfuerzos K , la razón de energía liberada G , y la integral J . Junto con esta última se enuncian los conceptos básicos para el tratamiento de problemas no lineales. Finalmente se introduce al concepto de curvas de resistencia.

1.1 ORÍGENES DE LA MECÁNICA DE FRACTURA.

Conforme la ingeniería ha ido avanzando a través de la historia, surgen nuevas y distintas aplicaciones que implican consideraciones de diseño cada vez más complejas. Durante la segunda mitad del siglo pasado, la cada vez mayor utilización de metales en las más diversas aplicaciones comenzó a evidenciar deficiencias en los criterios de diseño, presentándose en ciertos casos fallas catastróficas cuya frecuencia indicaba que había aún amplios campos por investigar e incógnitas a resolver. Así, en Inglaterra comenzó a llamar la atención el elevado número de fallas en componentes metálicos como ruedas de ferrocarril, o grandes recipientes a presión que ocurrían repentinamente y sin ningún aviso previo; esto condujo a investigaciones tendientes a explicar mejor el comportamiento de los materiales.

En 1913 C.E. Inglis [1.1] es el primero en enfocar el problema de las grietas presentes en todas las estructuras, ya sea debido a esfuerzos durante su vida útil o incluso ocasionadas durante su fabricación. Propone analizarlas considerándolas como elipses degeneradas en segmentos de recta y evalúa las concentraciones de esfuerzos en la punta de la grieta, encontrando en ella una singularidad en la que los esfuerzos teóricos tendían a valores infinitos.

En 1921 A. A. Griffith, comienza a dar forma a la hoy llamada mecánica de la fractura, enfocando el problema desde un punto de vista energético. Con fundamento en el trabajo de Inglis [1.1] propone que el mecanismo de fractura es controlado por un balance de energías en el que se involucra la energía necesaria para crear nuevas superficies de grieta en la estructura, y la energía potencial debida a las cargas aplicadas. Concluye que para una estructura con un tamaño de grieta dado, existe un valor de carga crítico que de alcanzarse ocasionará una propagación de la grieta, y prueba su teoría experimentando con esferas de vidrio que aseguraban un comportamiento de fractura frágil [1.2].

Más adelante Westergaard, en 1939, aplicando un análisis con variable compleja, encuentra funciones que describen el campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta [1.3]. Poco después, durante la segunda guerra mundial, repetidas fallas estructurales inutilizaron más de 700 barcos del tipo "Liberty", partiendo materialmente en dos a 145 de un total de 2500 fabricados. De la revisión de las fallas, que se presentaban sin previo aviso (incluso estando el barco en puerto) y a bajas temperaturas, se concluyó que incluso metales considerados como dúctiles llegaban a comportarse frágilmente bajo determinadas condiciones. Esto provocó un gran impulso en el estudio de fallas frágiles y de mecánica de la fractura, principalmente en Estados Unidos [1.4, 1.5].

En 1948, G. R. Irwin [1.6], apoyándose en el trabajo de Westergaard, deriva el factor de intensidad de esfuerzos, K (en honor a su ayudante J. A. Kies), demostrando que existe una relación parabólica entre el tamaño de grieta y el esfuerzo aplicado. Así surge la teoría de Griffith-Irwin de propagación de grieta, o mecánica de la fractura lineal elástica, que generaliza las ideas de Griffith y permite aplicarlas a metales y a otros materiales de gran aplicación en ingeniería. También Orowan llegó por su lado a resultados similares al mismo tiempo [1.7].

En 1968 J.R. Rice [1.8] desarrolla el concepto de la integral J basándose también en un análisis energético. Poco después J.W. Hutchinson [1.9] mostró como este tipo de concepto podía utilizarse para obviar la necesidad de describir el crecimiento lento y estable de una grieta así como el comportamiento no lineal y elastoplástico en la extensión de grieta. El artículo de Rice [1.8] se convirtió así en la base de todos los desarrollos posteriores en comportamiento no lineal de grieta, debido a que utiliza un parámetro de fractura de carácter universal que puede implementarse en programas de cómputo.

En los años 70, con la evolución en diseño de reactores nucleares, comienzan a utilizarse conjuntamente el planteamiento energético (Griffith) con el análisis del campo de esfuerzos en la punta de la grieta (Westergaard) para aplicaciones en ingeniería [1.10].

En los '80 surge la mecánica de fractura probabilística, que abarca dos categorías generales; en la primera se tratan casos en los que no se presenta un tamaño de grieta dominante, por lo que el estudio se hace para una distribución de tamaños de grieta a manejar estadísticamente para obtener el tiempo esperado de falla. La segunda se enfoca a determinar la probabilidad de ocurrencia de cadenas de eventos, en alguna medida inciertos, necesarios para que se presente la falla. Esto conduce a obtener métodos de diseño más eficaces que permiten utilizar menores márgenes de seguridad [1.10, 1.11] debido a que se reduce la incertidumbre de las condiciones de carga y operación involucradas en las suposiciones de diseño.

Para cálculos de mecánica de fractura, fundamentalmente del factor de intensidad de esfuerzos, se han desarrollado diversas soluciones fundamentadas en la descripción detallada de cómo se desarrolla el estado de esfuerzos en la vecindad de la punta de la grieta, obtenida por Williams [1.12] y por Karp y Karal [1.13] entre otros. Sin embargo estas soluciones analíticas están planteadas para geometrías que no ofrecen complicaciones matemáticas. En el caso de estructuras reales, los campos de esfuerzos y condiciones de frontera complican el análisis. De aquí que se requiera un análisis numérico para su solución.

Entre los primeros en utilizar el método del elemento finito en la obtención del factor de intensidad de esfuerzos están Chan et al en 1970 [1.14] quienes emplearon elementos convencionales en la punta de la grieta y que debieron por esto emplear un complicado procedimiento para extrapolar el valor de K_I a partir de los desplazamientos de las superficies de grieta. Pronto otros investigadores como Byskov [1.15] comenzaron a introducir elementos especiales. Esto se volvió innecesario al descubrir Henshell y Shaw [1.16] en 1975 el llamado elemento con nodo desplazado (quarter-point element) que es un elemento convencional cuyos nodos internos adyacentes a la punta de la grieta se desplazan hasta la cuarta parte de la línea nodal, y que representa adecuadamente la singularidad del campo de esfuerzos. Su uso se generalizó gracias a su simplicidad. Finalmente Barsoum [1.17] introdujo la utilización de elementos isoparamétricos en 1976.

En la actualidad la mecánica de la fractura es una disciplina de ingeniería avanzada cuyos campos de aplicación se amplían cada vez más, y a la que se enfocan hoy gran cantidad de recursos de investigación.

1.2 CARACTERÍSTICAS DE LAS FALLAS FRÁGILES Y DÚCTILES.

El comportamiento de un material al fallar puede clasificarse en dos tipos principales: falla frágil y falla dúctil. A continuación se describen brevemente las características más notables de los materiales frágiles y de los dúctiles.

Los materiales dúctiles, como los metales tenaces, presentan deformaciones importantes antes de fallar. Observan dos rangos definidos en la curva esfuerzo-deformación: En el primero, llamado zona elástica, pueden mantener un comportamiento esfuerzo-deformación lineal obedeciendo a la ley de Hooke. Pasado el límite elástico, el comportamiento cambia y de seguir aumentando la carga, el material sufre una deformación plástica no recuperable, en tanto absorbe energía, hasta llegar a un límite en el cual finalmente falla.

Un material frágil, como el hierro fundido, el vidrio, o aceros de muy alta dureza a temperatura ambiente, es aquel que se deforma muy poco antes de fallar (baja tenacidad), suele fallar en dirección normal al esfuerzo de tracción y observan un comportamiento esfuerzo deformación elástico hasta valores de esfuerzo muy cercanos al de fractura. Es el caso de falla más crítico, pues en un material de este tipo, se provocan concentraciones de esfuerzos que, al no poderse redistribuir, se acumulan en puntos fijos minando la resistencia del cuerpo. Cuando se sobrepasa en algún punto el esfuerzo máximo ocurre una rápida propagación de grieta, con velocidades del orden de 1800 m/seg. (prácticamente instantánea). Esto sucede tras una absorción de energía mucho menor a la que se presenta cuando hay deformación plástica. Esto explica el especial énfasis puesto en asegurar un comportamiento dúctil o bien en disminuir la probabilidad de una falla frágil.

El comportamiento dúctil o frágil de un material depende también de la temperatura. Un material dúctil a temperatura ambiente puede sufrir una falla frágil si se somete a bajas temperaturas, y de manera análoga, un material frágil se comportará de modo dúctil si su temperatura sobrepasa cierta temperatura de transición, conocida como NDT (Nihil Ductil Transition), temperatura de transición dúctil-frágil.

Una forma de garantizar el comportamiento dúctil de un material y eliminar por tanto la posibilidad de una falla frágil, es limitando su temperatura de operación, para lo que se utilizan gráficas de temperatura contra esfuerzo. En ellas se muestra la variación debida a la temperatura del esfuerzo necesario para la fractura.

Cuando se analiza un material sin grietas (figura 1.1), el esfuerzo de fractura aumenta al disminuir la temperatura hasta llegar a un valor de NDT. La presencia de grietas provoca una disminución del esfuerzo de fractura, que será menor si el tamaño de las grietas aumenta. Se produce así una familia de curvas que muestran un gran incremento en el esfuerzo de fractura al elevarse la temperatura por encima del NDT. La última curva de esta familia se conoce como temperatura de detención de grieta CAT, y marca la temperatura a la que se detiene la propagación de falla frágil para varios niveles de esfuerzo aplicado. Tiene tres puntos importantes: 1) El límite inferior de esfuerzos por debajo del cual la energía proporcionada no será suficiente para propagar la grieta.

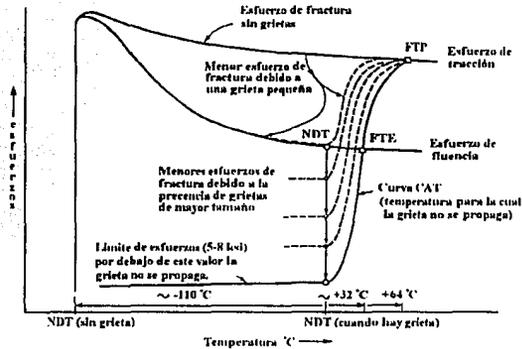


Figura 1.1 Gráfica de temperaturas de transición del acero [1.18, 1.19]

2) El punto de transición a fractura elástica (FTE) marca la máxima temperatura para que haya fractura debido a esfuerzos puramente elásticos. 3) El punto de transición a fractura plástica (FTP), por debajo del cual las fracturas son del tipo plástico únicamente.

Estas curvas están disponibles en la literatura, y permiten ya sea restringir las temperaturas de operación a valores superiores a la temperatura de transición a comportamiento frágil NDT, o bien utilizarlas como un criterio aproximado para seleccionar un material en base a elegir aquel con menor NDT.

1.3 MODOS DE CARGA.

Los cuerpos agrietados se encuentran sometidos a estados de esfuerzos triaxiales, cuyo análisis resulta complicado y laborioso. Para simplificar su estudio se ha propuesto descomponer el caso general en tres casos simples de carga mostrados en la figura 1.2, que se denominan:

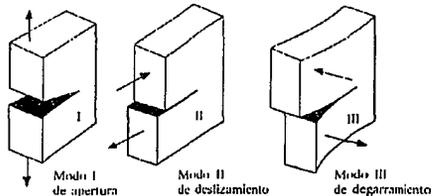


Figura 1.2 Modos de carga

- Modo I) De apertura: En el cual la carga es aplicada perpendicularmente al plano de la grieta, tendiendo a separar sus superficies.
- Modo II) De deslizamiento: En este caso las cargas se aplican paralelamente al plano de la grieta y perpendicularmente al frente de esta.
- Modo III) De desgarramiento: Las cargas son aplicadas paralelamente al plano de la grieta y al frente de la grieta.

De los tres casos anteriores, el modo I es el más crítico, pues la rigidez de la estructura es menos sensible a cualquiera de los otros modos. Debido a esto, la mayoría de los estudios de mecánica de fractura se han aplicado especialmente a este caso.

1.4 TRATAMIENTO ENERGÉTICO DE LA MECÁNICA DE FRACTURA.

El enfoque energético de mecánica de la fractura propuesto por Griffith es el que más aplicación tiene, además de ser el que mejor se acopla al análisis con elemento finito, objeto de esta tesis. Para este efecto se considera una placa infinita de material elástico, sometida a tracción, en la cual se introduce una grieta central de longitud $2a$ (ver figura 1.3).

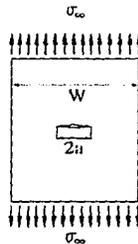


Figura 1.3 Placa infinita de espesor unitario; $2a \ll W$

La energía potencial del sistema es:

$$U = U_0 + U_a + U_\gamma - F \quad (1.1)$$

- donde: U es la energía potencial total del sistema
- U_0 es la energía potencial del sistema cuando aún no se introduce la grieta
- U_a es la disminución de energía elástica debida a la introducción de la grieta
- U_γ es el cambio en la energía de superficie elástica causada por la formación de la grieta
- F es el trabajo desarrollado por las cargas externas

Analizando los parámetros anteriores, Griffith obtuvo que:

$$U_a = -\frac{\pi a^2 \sigma_w^2}{E} \quad (1.2)$$

donde: a es la mitad de la longitud de grieta
 σ_w es el esfuerzo aplicado a una distancia infinita de la zona agrietada
 E es el módulo de Young

Por otra parte:

$$U\gamma = 2(2a \cdot \gamma_e) \quad (1.3)$$

donde: 2a es la longitud de grieta
 γ_e es la energía de superficie del material.

A continuación se supone que los extremos de la placa están fijos en el momento en que se introduce la grieta, lo que implica que las cargas no realizan trabajo alguno, y por lo tanto $F=0$. Sustituyendo (1.2) y (1.3) en (1.1) se llega a:

$$U = U_0 - \frac{\pi a^2 \sigma_w^2}{E} + 4a\gamma_e \quad (1.4)$$

Nos interesa conocer el mínimo de energía necesario para que se presente la falla, por lo que la función anterior se deriva con respecto a la semilongitud de grieta, a, considerando U_0 constante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left(-\frac{\pi \sigma_w^2 a^2}{E} + 4a\gamma_e \right) &= 0 \\ &= 4\gamma_e - \frac{2\pi \sigma_w^2 a}{E} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

simplificando, para condiciones críticas puede expresarse:

$$\frac{\pi \sigma_w^2 a}{E} = 2\gamma_e \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) describe una condición inestable para una grieta en un material cuyo comportamiento es exclusivamente frágil, dado que no se involucró la energía consumida por deformación plástica. La expresión a la izquierda de la igualdad suele designarse como G, razón de energía liberada, y representa la energía presente en el sistema que de liberarse podría causar una propagación de grieta.

La energía contra la que se compara G , como criterio energético para que haya propagación de grieta es $R=2\gamma_c$, que abarca tanto la energía necesaria para crear nuevas superficies de grieta como la requerida para formar nuevas zonas plásticas en la punta de la grieta que se propaga. Cuando se analizan materiales frágiles no hay deformación plástica, por lo que R sólo contempla la energía para crear nuevas superficies de grieta. Por otro lado, si el material es dúctil ésta última energía resulta pequeña comparada con la energía plástica, lo cual explica la mayor cantidad de energía requerida para propagar una grieta.

Así, Griffith definió que la propagación de grieta ocurrirá si hay suficiente energía en la placa para que al liberarla se provea una energía igual o mayor a la resistencia que opone la grieta a crecer. Por tanto, existe un valor crítico G_c que de alcanzarse provocará la propagación inestable de falla. Este valor es $G_c=R$, y se considera el criterio energético de falla.

Al obtener la ecuación (1.6) se supuso que los extremos de la placa quedaban fijos. Esto implica que la carga externa no realiza trabajo alguno y que la energía para propagar la grieta se obtendrá de una liberación de energía elástica de la placa. Si los extremos de la placa quedan libres, al moverse debido a la aplicación de la carga ésta realiza un trabajo F , que deberá añadirse a la ecuación (1.1), de modo que para una grieta de espesor unitario, la condición de propagación es:

$$G = \frac{d}{da}(F - U) = \frac{1}{B} \left(P \frac{dv}{da} - \frac{d(U)}{da} \right) \quad (1.7)$$

donde U es la energía elástica total en la placa de espesor B :

$$U = \frac{1}{2} P v = \frac{1}{2} C P^2 \quad (1.8)$$

y donde P es la carga aplicada constante

C es la flexibilidad (compliance, inverso de la rigidez).

Así, dependiendo si se consideran extremos fijos o carga constante se calcula:

$$G = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right)_v \quad (1.9)$$

ó

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (1.10)$$

En conclusión, para un caso con extremos fijos, G representa la energía elástica. Si los extremos están libres, a carga constante, G representa la energía debida a la carga externa. El resultado es el mismo y por tanto G puede calcularse siempre a partir de la energía elástica.

A continuación se deduce gráficamente la energía de propagación de grieta: Considérese una placa agrietada de tamaño infinito y espesor unitario, con una grieta transversal en el centro de magnitud $2a$ (ver fig. 1.3). La placa se somete a un esfuerzo de tracción σ y se fijan sus extremos. En la figura 1.4 se muestra el diagrama carga-desplazamiento de la placa; la energía elástica de la placa esta representada por el área OAB. Si la grieta se propaga una cantidad da , la rigidez de la placa disminuirá (línea OC), lo que significa que algo de carga será relevada ya que los extremos están fijos. En consecuencia, la cantidad de energía elástica en la placa disminuirá hasta una magnitud representada por el área OCB. Se concluye que la propagación de grieta desde a hasta $a+da$ resulta en una descarga de energía elástica de magnitud igual al área OAC, representada en la ecuación (1.9). Si la propagación de grieta ocurre a carga constante la elongación aumenta en un valor Δv . El trabajo realizado es igual al área AEFB, con un aumento en el contenido de energía elástica desde OAB hasta OEF, dado por OAE (ecuación 1.10). Esta energía debe ser proporcionada por la carga. Como el área AEFB es dos veces OAE, permanece una cantidad de energía equivalente a OAE. Despreciando el pequeño triángulo AEC se llega a que $OAC=OAE$. Esto implica que la energía disponible para la propagación de grieta en ambos casos es la misma.

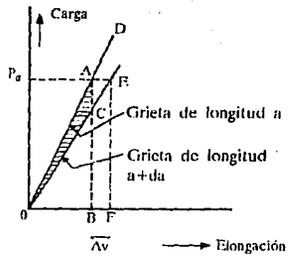


Figura 1.4 Gráfica carga vs elongación

1.5 CARACTERÍSTICAS DEL CAMPO DE ESFUERZOS EN LA VECINDAD DE LA PUNTA DE LA GRIETA.

El análisis del campo de esfuerzos en la punta de la grieta para el modo de carga I considera una placa plana lineal elástica que puede analizarse mediante alguna función que satisfaga su ecuación correspondiente, de modo que los esfuerzos y desplazamientos resultantes se acoplen a las condiciones de frontera del problema.

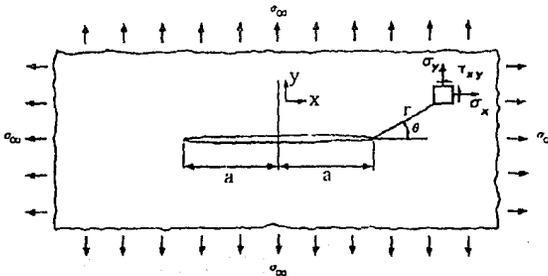


Figura 1.5 Coordenadas en la vecindad de punta de grieta

La función encontrada por Westergaard ha probado acoplarse a los requerimientos anteriores. Partiendo de funciones complejas, utilizando las expresiones siguientes se obtienen los valores de esfuerzos elásticos para la región que rodea la punta de la grieta, considerando un sistema de coordenadas polares (r, θ) con origen en ella (ver figura 1.5):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_m \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_r &= \frac{\sigma_m \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_m \sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned} \quad (1.11)$$

Estas ecuaciones muestran el incremento en el valor de esfuerzos al disminuir la distancia r entre un punto cualquiera y la punta de la grieta. Al considerar valores de r cercanos a cero se presenta un incremento en el esfuerzo, siendo en el límite una singularidad, es decir, el esfuerzo se vuelve infinito. Esto no ocurre en la realidad pues la punta de la grieta puede soportar cierto nivel de esfuerzo, pero impide utilizar la ecuación (1.11) para analizar problemas con grietas. Sin embargo, a partir de estas ecuaciones se puede establecer el factor de intensidad de esfuerzos $K = Y\sigma_m\sqrt{\pi a}$, que sustituido en las ecuaciones anteriores permite expresarlas como:

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) \quad (1.12)$$

Analizando la ecuación anterior se puede concluir que K es un parámetro dentro de la ecuación (1.12) cuyo valor reflejará las condiciones de esfuerzo presentes alrededor de la punta de la grieta, y aunque también depende de la geometría Y , da una relación práctica entre el tamaño de grieta, la magnitud del esfuerzo aplicado y las condiciones de esfuerzo resultantes en la zona. Así mismo puede observarse que para un valor crítico K_c la grieta comenzará a propagarse.

Es importante entender la diferencia entre K y K_c . K es el valor de un coeficiente en una ecuación que describe el campo de esfuerzos elásticos en la proximidad de la punta de la grieta y esta relacionado con la carga aplicada, en tanto K_c es un valor particular de K para el cual se presenta la propagación inestable de la grieta y permite predecir qué carga la provocará. En el caso específico del modo I de carga, se ha obtenido el valor de K_c para distintos materiales, denominando a este valor tenacidad a la fractura ó K_{Ic} , parámetro que se considera una propiedad del material, aunque de alguna manera depende también de la geometría.

Se utilizan los términos K_{IIc} , o K_{IIIc} , en referencia a los modos de carga II y III respectivamente. También se designan K_{Id} como tenacidad a fractura dinámica, modo I de carga, o K_{Ia} , tenacidad de relevo de grieta, modo I. Los valores de K se ven afectados por distintos factores.

Alternativamente, Dugdale [1.23] utiliza un criterio distinto para encontrar la extensión de la zona plástica en la punta de la grieta, que arroja resultados semejantes a los obtenidos de un análisis que considere una distribución continua de dislocaciones. Supone que el esfuerzo de fluencia en la zona frente a la punta de la grieta física d (en la que aún no hay grieta y que aún puede soportar el esfuerzo de fluencia) tiende a cerrar la grieta, comportándose como otra K que, para cierto valor de d , compensa la concentración de esfuerzos en la punta y hace desaparecer la singularidad. En base a lo anterior se elige el valor de d a partir de K y de σ_{ys} (fig. 1.7).

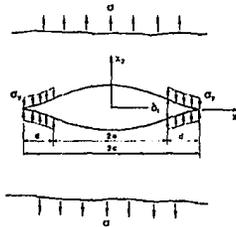


Figura 1.7 Corrección de zona plástica de Dugdale

1.6 CARACTERÍSTICAS DE LA ZONA PLÁSTICA.

Analizando las ecuaciones que describen la condición de esfuerzos en la vecindad de la punta de la grieta para varios valores de r y θ y aplicando algún criterio de fluencia, usualmente el de Tresca o el de Von Mises, pueden obtenerse gráficas que describan la forma de la zona plástica en la punta de la grieta. El tamaño y geometría de estas zonas varían ligeramente según el criterio aplicado (figura 1.8).

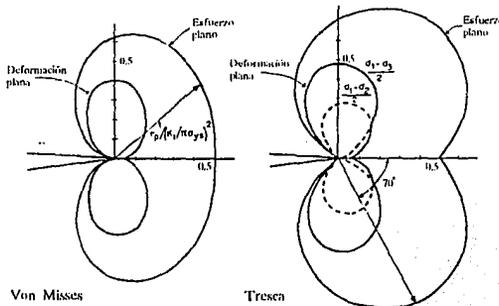


Figura 1.8 Zona plástica según criterios de fluencia

Debe aclararse que se presenta un error al obtener estas geometrías: Al limitar el esfuerzo con el esfuerzo de fluencia el material debe soportar una carga adicional fuera de la frontera supuesta. La corrección de este error no es sencilla, y varios investigadores han tratado de lograrlo, obteniendo diversas geometrías. Destacan los resultados de Tuba [1.24] que según Broek [1.25] se acercan más a los resultados experimentales. (fig. 1.9).

El tamaño de la zona plástica se ve seriamente afectado por el espesor de la placa, pues con él cambia el estado de esfuerzos presente en su sección transversal. Para observar esto último conviene repasar un poco los dos casos de estado de esfuerzos bidimensionales a saber, esfuerzo plano y deformación plana, por lo que a continuación se explican brevemente:

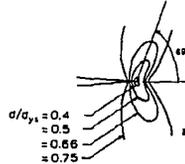


Figura 1.9
Zona plástica según Tuba

El esfuerzo plano se presenta en una placa muy delgada, que queda sujeta a esfuerzos biaxiales y coplanares a ella, y que no soporta ningún esfuerzo en dirección normal al plano principal que deba tomarse en cuenta.

Por otra parte, la deformación plana se desarrolla en elementos estructurales gruesos, en los que por simplicidad se utiliza el plano transversal de una región representativa para ser analizados. El mayor espesor provoca que, debido a los efectos de Poisson y a las restricciones de desplazamiento debidas a la presencia de material en dirección normal al plano analizado, se presenten esfuerzos triaxiales, lo que restringe el desplazamiento en dirección normal al plano, que valdrá cero.

Cuando se analiza una placa gruesa agrietada se presenta una combinación de esfuerzo plano y deformación plana, ya que la superficie (en la que no hay restricción de deformaciones en la dirección del espesor) se comporta siempre a esfuerzo plano, en tanto la zona central trabaja a deformación plana. Entre estas regiones definidas se presenta una transición. Así, los puntos de isoefuerzos que delimitan la zona de deformación plástica trazan una geometría característica (fig. 1.10).

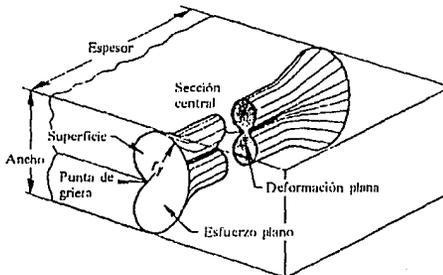


Figura 1.10 Geometría de la zona plástica

Como puede observarse en la figura 1.8, el tamaño de la zona plástica resulta 9 veces menor en la zona de deformación plana comparado con la de esfuerzo plano. La menor cantidad de deformación plástica implica una menor capacidad de absorber energía. Así, el valor más crítico del factor de intensidad de esfuerzos K_{Ic} se presenta en condiciones de deformación plana en el centro de la placa, lo que implica que se requiere una carga menor para iniciar la propagación de grieta. Como criterio, se espera esfuerzo plano si el tamaño de la zona plástica es semejante o del mismo orden de magnitud que el espesor de placa. Se espera deformación plana si el tamaño de la zona plástica en esfuerzo plano en la superficie no es mayor a 1/10 del espesor de placa.

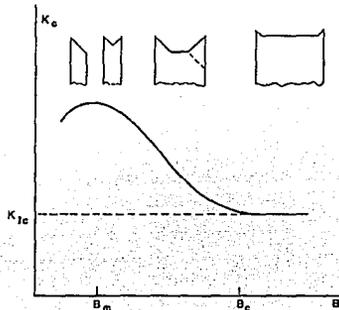


Figura 1.11 Gráfica K_{Ic} vs espesor [1.11].

De acuerdo a lo anterior, las condiciones más críticas se presentan cuando se genera un estado de deformación plana. Es en este caso en el que al factor de intensidad de esfuerzos crítico K_{Ic} al inicio de la propagación de grieta se le denomina Tenacidad de Fractura. Es menor al factor de intensidad de esfuerzos crítico en condiciones de esfuerzo plano, como se muestra en la gráfica de K_{Ic} vs B . Al efectuar pruebas mecánicas para determinar K_{Ic} se utilizan las superficies libres resultantes para asegurar que el espécimen se comportó bajo deformación plana. (ver fig. 1.11)

El estado de esfuerzos que predominó en un caso de fractura puede deducirse analizando las superficies libres resultantes de la fractura. El caso de esfuerzo plano, y la consiguiente presencia de deformación plástica, origina superficies cortadas a 45° , debidas a que los esfuerzos principales son cortantes. Cuando se presenta deformación plana la falla ocurre en planos normales a la dirección del esfuerzo aplicado, pues al no haber deformación plástica los esfuerzos principales son los normales. En casos intermedios se presenta una combinación de los dos tipos de superficie mencionados.

K_{Ic} se obtiene a partir de pruebas mecánicas generalizadas, entre las que pueden mencionarse como principales la de ASTM E-399-78 (American Society for Testing

Materials), la ASTM E-813-81 o la BSI BS 5447 (British Standards Institute) [1.26, 1.27, 1.28].

1.7 LA INTEGRAL J.

La mecánica de fractura lineal elástica, que conjunta las teorías de Griffith e Irwin, aunque resulta de gran utilidad en casos puramente frágiles, no puede aplicarse a casos no lineales que presenten deformación plástica considerable en la punta de la grieta. Surge así la necesidad de un enfoque más general que permita analizar estos casos: la mecánica de fractura elastoplástica. Esta ha logrado predecir el inicio de propagación de grieta apoyándose principalmente en dos conceptos: La integral J y el desplazamiento de apertura de grieta COD.

Al igual que G, el concepto de la integral J se basa en un balance de energía. Al deducir G se utilizó la ecuación:

$$U = U_n + U_a + U_y - F \quad (1.1)$$

considerando únicamente un comportamiento lineal elástico. La mecánica de fractura elastoplástica postula que este balance es válido en tanto haya comportamiento elástico, aunque este deje de ser lineal. De aquí se concluye que dentro de ciertos límites es posible modelar el comportamiento plástico de un material usando este comportamiento no-lineal elástico.

La necesidad de un parámetro que permita evaluar el cambio en la energía potencial respecto al tamaño de grieta cuando el comportamiento es no lineal llevó al desarrollo de la integral J. El primero en definirla fue Elsheby [1.29], quien la evalúa con la expresión:

$$J = \int_{\Gamma} w dy - T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \quad (1.13)$$

Donde: Γ es una trayectoria cualquiera alrededor de la punta de la grieta

T es el vector de tracción

\mathbf{u} es el vector de desplazamiento

w es la densidad de energía de deformación

La dirección ds se considera normal a la línea de grieta.

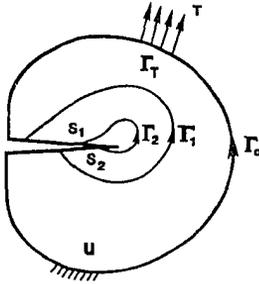


Figura 1.12
Trayectorias de integración

Básicamente J es una integral definida en la zona que rodea la punta de la grieta que contabiliza el cambio de energía potencial al crecer la grieta. Puede demostrarse que para cualquier contorno cerrado $J=0$, lo que implica que J es igual para cualquier trayectoria Γ . Además, las superficies de grieta S_1 y S_2 se encuentran libres de esfuerzos.

El que la integral J sea independiente de la trayectoria permite calcularla a lo largo de una trayectoria lejana a la punta de la grieta. Esta trayectoria puede seleccionarse de modo que sólo incluya cargas y desplazamientos elásticos (ver figura 1.12). Así puede obtenerse la energía de propagación de grieta elastoplástica a partir del cálculo elástico a lo largo de un contorno para el que se conocen cargas y desplazamientos [1.31].

La integral J puede aplicarse tanto al rango lineal elástico como al rango no-lineal elástico. Por definición, para el primer caso $J=G$, en tanto que su cálculo para el segundo caso se basa en la ecuación (1.13). Por lo tanto, el concepto de la integral J es compatible con la mecánica de fractura lineal elástica.

Por analogía con G , la integral J puede considerarse como una energía de propagación de grieta elastoplástica, y es de esperarse que haya un valor crítico J_c que señale el inicio de propagación de grieta.

Los primeros en aplicar J a problemas que involucran grietas fueron Cherapanow [1.30] y Rice [1.8], quienes probaron que J es igual al cambio de energía potencial respecto a la extensión de grieta da, expresándola como:

$$J = -\frac{\partial U_p}{\partial a} \quad (1.14)$$

Para casos lineales elásticos la integral J es igual a G , y puede obtenerse a partir de el factor de intensidad de esfuerzos. Su aplicación a casos no-lineales parte de su medición a partir de un diagrama carga-desplazamiento (figura 1.13) semejante al utilizado al obtener G . Despreciando también el área AEB se deduce que J es independiente de las condiciones externas: Resulta igual si se considera que los extremos de la placa están fijos o si se supone que hay carga uniforme, por lo que puede escribirse:

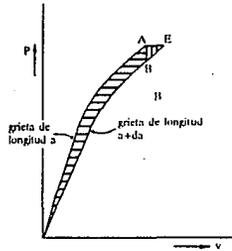


Figura 1.13
Gráfica carga-desplazamiento

$$J = \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_P = - \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_v \quad (1.15)$$

La figura 1.13 es equivalente a la 1.4 y también representa la energía de propagación de grieta como el área entre las líneas de comportamiento carga-desplazamiento para tamaños de grieta a y $a+da$. Graficando esta área puede obtenerse la cantidad de energía necesaria para lograr una propagación de grieta de magnitud da . La integral se enuncia:

$$J = \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_P = \int_0^P \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_P dP \quad (1.16)$$

$$J = \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_v = - \int_0^v \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_v dv$$

Las principales limitaciones de J se deben a que resulta válida para un material con comportamiento no lineal, pero elástico, y por tanto reversible. La deformación plástica en la realidad no es reversible, y la energía disipada no puede convertirse en otras formas de energía. Sin embargo puede suponerse un comportamiento no lineal elástico para un material real en tanto no ocurra ninguna descarga y que la deformación plástica sea pequeña, lo que implica que, en principio, J es aplicable sólo al inicio de la propagación de grieta, y no durante su crecimiento.

1.8 RELACIÓN ENTRE K , G Y J .

La mecánica de la fractura ha logrado deducir el factor de intensidad de esfuerzos, capaz de describir el estado de esfuerzos presente en la punta de la grieta. K se define:

$$K = Y \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \quad (1.17)$$

Para el enfoque energético de Griffith se obtuvo el parámetro G , designado como razón de relevo de energía, que cuantifica la cantidad de energía disponible en la placa para provocar un posible crecimiento inestable de grieta. G suele definirse como:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (1.6).$$

Posteriormente Rice [1.8] generaliza el criterio de Griffith para casos elásticos no lineales mediante la integral J de Eshelby [1.29] definida como:

$$J = \int_{\Gamma} w dy - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \quad (1.13)$$

ó

$$J = - \frac{\partial U_p}{\partial a} \quad (1.14).$$

Es importante hacer notar que cada uno de los parámetros anteriores se obtiene a partir de distintas consideraciones conceptuales. Sin embargo, en condiciones lineal elásticas existe una equivalencia entre estos. Estos tres parámetros de fractura pueden relacionarse para el caso de deformación plana de la siguiente manera:

$$J = G = \frac{(1-\nu^2)}{E} K^2 \quad (1.19).$$

Así, J_{IC} puede relacionarse en deformación plana con G_{IC} y K_{IC} mediante la ecuación:

$$J_{IC} = G_{IC} = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_{IC}^2 \quad (1.20),$$

siempre que sea válida la suposición de que el material se comporta de modo elástico y lineal. En caso de que se presente deformación plástica considerable, la relación anterior deja de cumplirse, con lo que el criterio de falla recae en el valor de J , cuyo cálculo involucrará relaciones no lineales de alta complejidad. Debe hacerse notar que (1.20) no es en forma estricta una igualdad, sino una equivalencia: Indica que las condiciones K_{IC} , G_{IC} y J_{IC} se presentan simultáneamente cuando va a iniciarse la propagación de grieta.

Para casos de esfuerzo plano se utilizan la relación (1.19) modificada, siendo la relación correspondiente:

$$G = J = \frac{K^2}{E} \quad (1.21)$$

También la relación (1.20) se modifica de modo análogo para así obtener una expresión que pueda utilizarse para relacionar los tres parámetros críticos en casos de esfuerzo plano.

Los parámetros anteriores, K , G y J se ven afectados en distinto grado por el medio ambiente, siendo la temperatura, la radiación y la corrosión los más importantes. Así, a mayores temperaturas corresponden mayores valores de K_c dependiendo del material. Respecto a la radiación, conforme aumenta la absorción de neutrones K_c se decrementa, y aunque dentro de ciertos rangos el efecto es despreciable conviene verificar cada caso específico. Por último la propagación de grietas debida a esfuerzos y corrosión es una de las principales causas de que se alcancen tamaños de grieta críticos, por lo que debe tomarse muy en cuenta la posible exposición de zonas agrietadas a ambientes corrosivos.

1.9 CURVAS DE RESISTENCIA.

La resistencia de grieta R se ha considerado hasta ahora independiente del tamaño de la grieta asumiendo que se tratan problemas de deformación plana. Sin embargo en caso de esfuerzo plano la evidencia experimental prueba que esto no es así. A continuación se anexa una explicación del uso del concepto resistencia a la apertura de grieta para manejo de problemas en esfuerzo plano.

Debido a las condiciones particulares de esfuerzo plano es necesario, para poder propagar la grieta, proporcionar cantidades extra de energía para así crear zonas plásticas nuevas alrededor de la punta conforme esta avanza. La cantidad de energía va variando conforme aumenta el tamaño de la grieta.

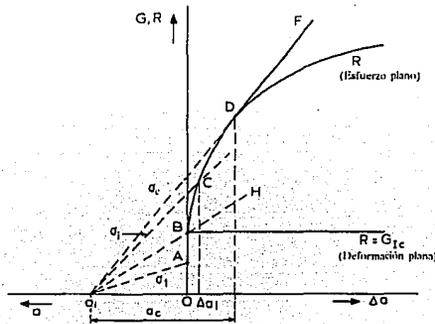


Figura 1.14
Curvas de resistencia

En la figura 1.14, cuando el espécimen se somete a un esfuerzo σ la grieta comienza a propagarse lentamente. De cualquier modo, la propagación es estable y la falla no ocurre

aún. Si el esfuerzo se mantiene a un valor constante σ_i la grieta sólo se propaga un poco (Δa_i) y, de mantenerse constante el esfuerzo, la energía absorbida al formar la nueva zona plástica logra relevarlo y la propagación se detiene (punto C). Aunque ahora la grieta es mayor, se requerirá incrementar el esfuerzo para que la propagación continúe. El esfuerzo puede alcanzar un valor crítico σ_c que lleva la grieta a un tamaño a_c para el que la propagación se vuelve inestable y la falla ocurre.

Debe aclararse que este criterio representa una condición necesaria pero no suficiente para que se dé la propagación inestable, de modo que aunque debe satisfacerse para que esta ocurra, al cumplirse la falla no necesariamente se propagará, hasta que el material llegue al punto en el que no pueda sufrir ya mayor deformación plástica.

Para que la propagación comience deberá antes satisfacerse el criterio energético. Durante la propagación lenta ocurre la condición de equilibrio exacta: $G=R$ (de ser $G<R$ la propagación se detiene; si $G>R$ la propagación se vuelve inestable). Por tanto, para que ocurra la propagación inestable de la grieta (punto D), se deben cumplir dos condiciones:

$$G=R \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (1.21)$$

Este criterio podrá utilizarse si primero se logra obtener una expresión analítica de R . Esto ha sido intentado por diversos investigadores. Sin embargo su delimitación exacta es difícil por ser el criterio energético un criterio necesario, pero no suficiente para la propagación de grieta. Las curvas experimentales con que se cuenta hoy en día permiten ya determinar dentro de ciertos límites mejores valores para predecir los niveles de esfuerzo necesarios para propagar, estable o inestablemente, grietas en placas planas.

1.10 IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS NUMÉRICO EN MECÁNICA DE LA FRACTURA.

Para aplicar los conceptos de mecánica de la fractura a problemas reales es necesario poder determinar en casos específicos los valores de los parámetros de fractura a utilizar. El parámetro al que se recurre con más frecuencia es K_I .

Hay dos distintos enfoques para obtener el valor de K_I al analizar un problema particular. El primero, aplicable a geometrías sencillas, consiste en comparar el caso con la gran cantidad de soluciones analíticas que se encuentran en la literatura, y tratar de determinar si las consideraciones y restricciones de alguna solución pueden adaptarse al caso real.

Desgraciadamente los métodos analíticos resultan en la práctica de poca utilidad, pues requieren de satisfacer las condiciones de frontera de modo exacto, lo que sólo sucede en cuerpos y placas infinitos. Se han hecho esfuerzos para desarrollar procedimientos de análisis que permitan aplicar soluciones analíticas a condiciones de frontera más generalizadas, pero siguen siendo muy limitados.

La necesidad de aplicar los conceptos de mecánica de fractura a problemas con geometrías complejas, que no pueden cumplir con las condiciones de frontera establecidas para soluciones analíticas, ha llevado al desarrollo de numerosas soluciones numéricas que aplican diversos métodos para obtener el valor del factor de intensidad de esfuerzos.

Por su versatilidad destaca entre ellos el método del elemento finito, que permite analizar complicadas geometrías, problemas tridimensionales e incluso contempla aplicaciones a problemas elastoplásticos, soluciones no lineales, etc., casos de gran complejidad que frecuentemente no pueden analizarse de otra forma. Este ha tenido muy amplia aceptación y en la actualidad en diversos paquetes se han implementado procedimientos de cálculo para incrementar su potencial de aplicación en mecánica de fractura.

Otros métodos numéricos alternativos se han desarrollado para tratar problemas con grietas, entre los que puede mencionarse por ejemplo el del elemento frontera, que discretiza sólo la frontera del dominio de estudio, requiriendo así de menos elementos; Sin embargo diversas limitaciones restringen su uso. La tendencia más marcada es utilizar problemas de elemento finito para evaluar la energía de propagación de grieta mediante la integral J .

I.11 REFERENCIAS.

- [1.1] Inglis, C.E. 1913. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans. Inst. Naval Architects*, 55 pp. 219-241.
- [1.2] Griffith, A.A. 1925. The theory of rupture, *Proc. 1st. Int. Congress Appl. Mech.*, (1924) pp. 54-63. Biezeno and Burguers ed. Waltman.
- [1.3] Westergaard, H.M. 1939. Bearing pressures and cracks. *J Appl. Mech.*, 61 pp. A49-A53.
- [1.4] Anderson, W.E. 1969. An engineer views brittle fracture story, *Boeing rept.*
- [1.5] Biggs, W.D. 1960. *The brittle fracture of steel*, Mc Donald and Evans .
- [1.6] Irwin, G.R. 1948. Fracture Dynamics, *Fracturing of metals*, American Society for Metals, Cleveland, pp147-166 .
- [1.7] Orowan, E. 1948. Fracture and strength of solids, *Reports on progress in Physics*, XII, p. 185
- [1.8] Rice, J.R. 1968. A Path independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 35, pp. 379-386
- [1.9] Hutchinson, J.W. 1968. Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16, p. 13-31
- [1.10] Meyer, T.A., Balkey, K.R., Yanichko, S.E. 1984. The evolution of reactor vessel PTS. *Mechanical engineering*, June; 41-42.
- [1.11] Kanninen, M.F., Popelar, C.H. 1985. *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford Engineering science series 15.
- [1.12] Williams, M.L. 1957. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24, pp. 109-114.
- [1.13] Karp, S.N., and Karal, F.C. Jr., 1962. The Elastic Field Behavior in the Neighborhood of a Crack of Arbitrary Angle, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XV, pp. 413-421
- [1.14] Chan, S.K., Tuba, I.S., and Wilson, W.K. 1970. On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 2, pp 1-17
- [1.15] Byskov, E. 1970. The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method With Cracked Elements, *International Journal of Fracture Mechanics*, 6, pp. 159-167
- [1.16] Henshell, R.D., and Shaw, K.G. 1975. Crack-Tip Finite Elements are Unnecessary, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9, pp. 495-507
- [1.17] Barsoum, R.S. 1976. On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Elastic Fracture Mechanics, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 10, pp. 25-37 .
- [1.18] Pellini, W.S., Puzak, P.P., 1963. Fracture Analysis Diagram Procedures for the Fracture-Safe Engineering Design of Steel Structures, *Welding Research Council Bulletin* 88, June 1963.
- [1.19] Pellini, W.S., 1971. Principles of Fracture Safe Design, Adams Lecture, Supplement to the Welding Journal, March 1971, pp. 91-s a 109-s and April 1971, pp. 147-s a 161-s.
- [1.20] Harvey, J.F. 1974. *Theory and design on modern pressure vessels*, Van Nostrand Reinhold .
- [1.21] Hernández, L.H. 1992. *Crack initiation under shock loading*. Tesis doctoral, Oxford University.

- [1.22] Irwin, G.R. 1958. Fracture. *Handbuch der Physik VI*, pp. 551-590, Flügge Ed., Springer .
- [1.23] Dugdale, D.S. 1960. Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Sol.*, 8 pp. 100-108.
- [1.24] Tuba, I.S. 1966. A method of elastic-plastic plane stress and strain analysis, *J. Strain Analysis*, 1 pp. 115-122.
- [1.25] Broek, D.1982. *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff publishers
- [1.26] ANSI/ASTM. 1981. *Standard test for J_{Ic} , a measure of fracture toughness*, ANSI/ASTM E813-81
- [1.27] ANSI/ASTM. 1978. *Standard test method for plane-strain fracture toughness of metals*, ANSI/ASTM 399-78
- [1.28] British Standards Institution. 1977. *Methods of test for plane strain fracture toughness (K_{Ic}) of metallic materials*, BS 5447:1977
- [1.29] Eshelby, J.D.1974. Calculations of energy release rate. In *prospects of fracture mechanics*, pp. 69-84, Sih, Van Elst, Broek, Ed., Noordhoff
- [1.30] Cherepanov, G.P., 1967. Crack propagation in continuous media. USSR, *J. Appl. Math. and Mech. Translation* 31, p. 504
- [1.31] Ewalds, H.L., Wanhill, R.J.H. 1989. *Fracture mechanics*, Edward Arnold pub .
- [1.32] Osgood, C.C.1971. *A basic course in fracture mechanics*. Penton education division.
- [1.33] Laird, G., Epstein, S. 1992. Fracture mechanics and finite element analysis. *Mechanical engineerig.*, Nov; pp 69-73.

2

CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Se revisan las características del método del elemento finito aplicado al análisis de esfuerzos mediante un planteamiento general, describiendo las etapas a seguir durante su aplicación, y explicando brevemente sus fundamentos teóricos. Finalmente se estudian las ventajas y desventajas que presenta el método así como el estado del arte y tendencias actuales de desarrollo.

2.1 ORÍGENES DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO.

Las teorías actuales de mecánica de sólidos, de fluidos y otras más explican los fenómenos observados con modelos matemáticos representados, principalmente, con ecuaciones diferenciales que relacionan variables de interés aplicando principios físicos como el equilibrio, la conservación de la energía, la energía de deformación, el comportamiento elástico, etc.

Desgraciadamente, este tipo de tratamiento (cuya utilización parte de los avances logrados por la escuela de elasticidad francesa -Navier, St. Venant, etc- en la primera mitad del siglo XIX), de probada efectividad, lleva con frecuencia a sistemas complejos de ecuaciones cuya solución se vuelve casi imposible excepto para casos de geometrías sencillas.

Esto ha llevado al desarrollo de metodologías alternas que permitan tratar problemas cada vez más complejos simplificando en lo posible el análisis matemático mediante una mejor concepción física. Entre estas metodologías destaca actualmente el Método del Elemento Finito, que aplica una serie de avances cuyo desarrollo se describe a continuación.

En el periodo de 1850 a 1880 surgen los conceptos de análisis de estructuras, desarrollados entre otros por Maxwell [2.1], Castigliano [2.2], y Mohr [2.3], los cuales asentaron las bases para el tratamiento matricial de distintos teoremas en forma conjunta, como el equilibrio y la conservación de la energía.

Más tarde Lord Rayleigh [2.4] a partir de la mecánica de sólidos obtiene soluciones más reales al estudiar deformaciones en columnas y ejes, minimizando la energía resultante. La misma técnica fue posteriormente perfeccionada por Ritz (1909), según menciona [2.5]. Utilizando múltiples funciones independientes Ritz logró el análisis de problemas más complejos, aunque su método llevaba a un número de ecuaciones cada vez mayor conforme el problema se complicaba. En la siguiente década la falta de herramientas de cálculo apropiadas impidió un mayor avance.

Hacia 1920 los trabajos de Maney (EU) [2.6] y Ostenfeld (Dinamarca) [2.7] utilizan por primera vez desplazamientos como incógnitas en problemas sencillos. Por otra parte, Hardy Cross introduce en 1932 su método de la distribución de momentos, que sirvió como base de análisis los siguientes 25 años [2.8].

Publicaciones de Courant [2.9], Mc Henry [2.10] y Henrikoff [2.11] introducen aspectos claves. Particularmente Courant, matemático, por primera vez propone descomponer un problema continuo en pequeños elementos y analizarlos por separado, método para el que vislumbra diversas aplicaciones.

En 1950 Argyris y Kelsey, previendo la utilización de computadoras, conjunta los teoremas de energía con el tratamiento matricial de pequeños elementos, publicando varios artículos en el "Aircraft Engineering Journal" y luego en su libro [2.12].

El método del elemento finito se establece por primera vez en el artículo presentado por Turner, Clough, Martin y Topp (1956) [2.13], a quienes se reconoce como sus creadores, donde reportan su aplicación al análisis de esfuerzo plano, utilizando elementos triangulares y rectangulares, y representando con matrices de rigidez el comportamiento de cada elemento. La primera aplicación fue para la industria aeroespacial, a la que estaban estrechamente vinculados los autores. Posteriormente, en un artículo publicado en 1960, Clough emplea por primera vez el nombre de Método del elemento finito [2.14].

Durante la década de los 60's se desarrollaron aplicaciones para distintos principios por Besseling [2.15], Melosh [2.16] (que demuestra que el método es una variación del proceso Raleigh-Ritz), Jones [2.17], Gallager [2.18], Pian [2.19], Fraeijs de Veubeke [2.20], Herrman [2.21], Prager [2.22,2.23], Tong y Pian [2.24] y Tong [2.25].

Durante este periodo se comienza a implementar el uso de computadoras y a definir paquetes de software como: NASTRAN (NAsa STRuctural ANalysis), ASKA (Automatic System for Kinematic Analysis, basado en trabajos de Argyris), SAP (Structural Analysis Program, desarrollado por un discípulo de Clough), ABAQUS, ANSYS, y COSMOS entre otros.

Las primeras publicaciones: Zienkiewicz y Cheng 1956, Visser 1965 y Wilson y Nickell 1966 mostraron aplicaciones para transferencia de calor, surgiendo inmediatamente después otras para mecánica de fluidos.

El rango de utilización se amplió cuando otros investigadores (Szabo y Lee 1969, o Zienkiewicz 1971), mostraron que las ecuaciones elementales de mecánica estructural, transferencia de calor y mecánica de fluidos podían también derivarse por métodos como el Galerkin o el de aproximación por mínimos cuadrados. Esto mostró que el MEF podía aplicarse a cualquier ecuación diferencial.

2.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MÉTODO.

La idea básica del Método del Elemento Finito (MEF) es representar un problema complejo como un gran sistema de ecuaciones lineales a resolver mediante métodos numéricos con la ayuda de la computadora.

Parte de que cualquier campo puede ser modelado numéricamente subdividiéndolo en regiones o modelos discretos, llamados elementos finitos, cuyo comportamiento individual se describe utilizando una serie de funciones definidas para cada elemento y elegidas de modo que aseguren la continuidad del comportamiento descrito a lo largo de todo el continuo.

En otras palabras, es dividir el cuerpo en un sistema equivalente de cuerpos más pequeños que se analizan por separado, de modo que al ensamblarlos se obtiene una representación del modelo original.

Método del elemento finito

Para análisis estructural, según las condiciones de frontera y los parámetros a calcular surgen diversos enfoques del método. Se conocen como: 1. Método de desplazamientos: En el que los desplazamientos son las incógnitas, y que se emplea para determinar las deformaciones máximas que puede sufrir un cuerpo para ciertos valores de esfuerzo máximo determinado. 2. Método del equilibrio: Donde se busca determinar el valor de los esfuerzos a que se sujeta un cuerpo al aplicarle diversas excitaciones externas. 3. Método mixto: En el que se conocen algunos esfuerzos y algunos desplazamientos, y se buscan sus valores en determinados puntos en el cuerpo.

El método puede resumirse en siete pasos básicos que se explican a continuación:

- 1.- Discretizar el continuo: Es dividir el cuerpo en partes pequeñas llamados elementos finitos. Debe seleccionarse cantidad, tipo y tamaño de los elementos.
- 2.- Selección de los polinomios de interpolación: Se definen las incógnitas y la forma en que se espera se distribuyan en cada elemento.
- 3.- Definir las ecuaciones de los elementos: expresar la ley constitutiva en forma de ecuaciones generales de tipo matricial aplicables a cualquier elemento del cuerpo.
- 4.- Ensamblar las ecuaciones de los elementos y definir las condiciones de frontera: Crear matrices de rigidez, de fuerzas y de desplazamientos para todo el cuerpo analizado a partir de las matrices de cada elemento. Para incluir el efecto que causan determinadas situaciones externas se incluyen condiciones de frontera.
- 5.- Solución de las incógnitas: Las matrices creadas en el paso anterior definen un gran sistema de ecuaciones que se resuelve utilizando algún método numérico como el de Gauss-Jordan. Para el caso de problemas de análisis de esfuerzos generalmente se obtienen los desplazamientos nodales, si se emplea el método de desplazamientos.
- 6.- Solución de variables secundarias: Es obtener resultados adicionales, a partir de los resultados obtenidos en el paso anterior. En nuestro caso se calculan los esfuerzos y las deformaciones unitarias.
- 7.- Interpretación de los resultados: Obtener gráficas, dibujos o tablas que permitan visualizar mejor los resultados.

La exactitud de los resultados se incrementa con el número de elementos, por lo que la cantidad de datos a manejar y el tamaño de los sistemas de ecuaciones generado hacen indispensable el uso de computadoras para efectuar las operaciones.

A continuación se desarrolla más extensamente cada uno de los puntos anteriores, explicándolos para el caso específico del análisis de esfuerzos.

2.2.1 DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO.

La discretización del continuo es el primer paso en la aplicación del MEF. Consiste en limitar el cuerpo y definir la forma en que se dividirá, de modo que se obtenga una representación adecuada del problema real.

Limitar el continuo en ocasiones es difícil. Determinar su tamaño en zonas donde la variable de interés varía en distancias cortas o cuando en una región tiende a infinito exige definir un contorno de influencia cuya magnitud resulte representativa.

El procedimiento para dividir el total comienza creando regiones que a su vez se subdividen en zonas más pequeñas, creándose una malla o red de elementos finitos. Los elementos se enlazan en los nodos, que son puntos en los que se registrará el cambio en las propiedades y se transmitirá de un elemento a otro. (figura 2.1).

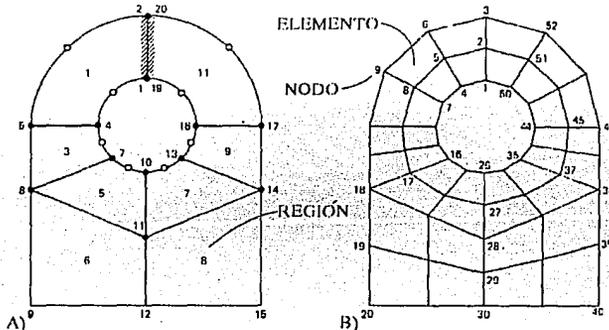


Figura 2.1
Discretización. Regiones (A) y elementos (B)

El analista debe determinar básicamente dos puntos:

- Tipo de elemento a utilizar
- Tamaño de los elementos (densidad de la malla)

Esta decisión no depende de un procedimiento bien determinado sino de la comprensión del problema y del juicio ingenieril desarrollado.

La subdivisión del total en partes puede ser vista según dos interpretaciones diferentes:

En la primera, el total se visualiza como un ensamble de elementos-bloques, interconectados en sus puntos nodales. Los elementos se asumen continuos y se les asignan las propiedades del material que los compone. Es el caso, por ejemplo, de una armadura isostática en la que cada viga es un elemento independiente unido a los otros mediante pernos o articulaciones.

La segunda interpretación implica que el continuo se subdivide en zonas (elementos) mediante líneas imaginarias o planos imaginarios. Las incógnitas se monitorean en puntos llamados nodos. Esto permite aplicar procedimientos variacionales asumiendo un conjunto de modelos de desplazamiento, cada uno de los cuales se aplica a una sola región. Un ejemplo de esto podría ser el análisis de una viga que se divide en elementos imaginarios para analizar por separado pequeñas regiones simples, influenciadas por otros elementos vecinos.

Para cualquiera de las dos interpretaciones se debe poder definir el comportamiento de cada elemento según su geometría y las propiedades del material, de modo que la función general pueda aplicarse a cualquier elemento del ensamble.

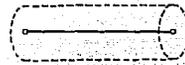
2.2.1.1 TIPOS DE ELEMENTOS

Dependiendo de la representación deseada y del análisis a realizar los programas actuales permiten elegir entre una gran cantidad de elementos. A continuación se enlista una clasificación básica según los tipos y formas más comunes. Dependiendo del programa utilizado y de la aplicación pueden definirse elementos especiales cuyas características aumenten las posibilidades y exactitud de análisis.

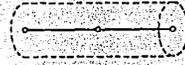
A) Unidimensionales

Utilizados cuando las características y comportamiento del sistema se definen en una sola dimensión. Se representan con una línea, aunque en la realidad el elemento tendrá una sección transversal uniforme. Su ventaja principal reside en la reducida capacidad de computadora que requieren, por lo que permiten obtener resultados rápidamente. Como ejemplo de aplicación está el caso de elementos estructurales sujetos exclusivamente a tracción y compresión.

con dos nodos:



curvo con tres nodos



curvo con cuatro nodos



Figura 2.2
Elementos unidimensionales

B) Bidimensionales

Utilizados en problemas cuyo dominio de estudio está definido en dos dimensiones. Los hay de diversos tipos y aunque se representan con figuras planas se considera que poseen un espesor constante. Frecuentemente se utilizan modelos bidimensionales para representar problemas en tres dimensiones, como esfuerzo plano o para deformación plana, o como sucede en el caso de los elementos axisimétricos. Los principales tipos son:

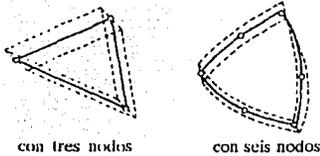


Figura 2.3
Elementos triangulares

Triángulos

Conformados por tres nodos primarios como mínimo, tienen como principales ventajas la facilidad con que representan prácticamente cualquier superficie, y la poca capacidad que demandan a la computadora en tiempo y memoria. Debido a esto llevan a análisis más rápidos que aquellos que utilizan otros tipos de elemento. Por otro lado, debe tenerse cuidado pues su uso puede limitar la exactitud de los resultados, debido a que las deformaciones constantes tienden a crear esfuerzos constantes en el interior del elemento, que afectan

los esfuerzos nodales aplicados a elementos vecinos. (fig. 2.3)

Rectángulos

Aunque utilizan más tiempo y memoria y no son tan flexibles al representar geometrías complicadas, suelen ser los más utilizados ya que obtienen resultados más exactos y facilitan la visualización del problema. Suelen tener 4 nodos, aunque éste número aumenta al incluir nodos secundarios o internos. (fig. 2.4)

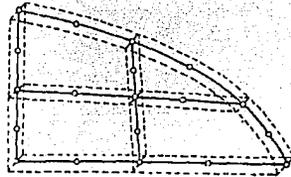
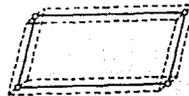


Figura 2.4
Elementos rectangulares

Elementos axisimétricos

Se emplean para modelar volúmenes de revolución de sección constante en el plano r-z. Hay elementos axisimétricos unidimensionales, o bidimensionales, tanto lineales como de orden superior (fig. 2.5).

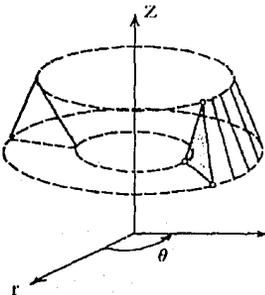


Fig 2.5
Elemento axisimétrico

C) Tridimensionales

Aunque hay una gran cantidad de problemas de ingeniería que pueden ser representados mediante elementos de una o dos dimensiones, se presentan problemas que por su falta de simetría, por poseer secciones transversales no constantes o por no poderse representar con elementos axisimétricos deben analizarse necesariamente en tres dimensiones. De hecho cabe subrayar que el MEF representa hoy en día el único método de análisis disponible para estos casos. Los tipos de elementos utilizados son:

Tetraedro

Pueden modelar cualquier geometría y requiere menos tiempo y memoria que otros elementos tridimensionales, pues se puede definir con sólo 4 nodos primarios. Sin embargo al utilizarlos la discretización se complica, la visualización y la interpretación se vuelven complejas, además de aumentar el número de elementos necesarios para representar una zona, por lo que son poco usados (fig. 2.6). Tienen los mismos problemas que los triángulos y su uso puede limitar la exactitud.

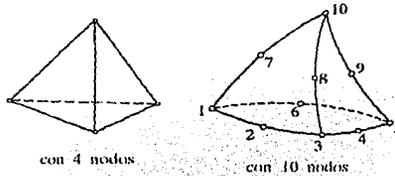


Figura 2.6. Tetraedros

Hexaedro

También conocidos como ladrillos, bloques o paralelepípedos, son los más utilizados pues permiten una mejor comprensión de la malla. Tienen 8 nodos primarios, pudiendo complicar su forma para obtener elementos curvos de tipo cascarón y adaptarse a formas más complejas (fig. 2.7).

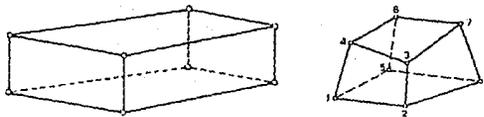


Figura 2.7. Elementos tipo bloque o ladrillo de 8 nodos

Pentaedro

O prisma, utilizado para cuerpos de tipo prismático, y aplicaciones especiales. Es de poca utilización pues involucra mayor complejidad en el ensamble, además de que a veces puede requerir más tiempo y memoria de la computadora. Puede tomar diversas formas según la base que se use, aumentando al mismo tiempo el número de nodos. Así puede haber prismas triangulares, pentagonales, etc. (fig. 2.8). En ocasiones se forman colapsando en una línea alguna cara del hexaedro o ladrillo.

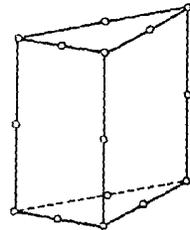


Figura 2.8. Pentaedro

En términos generales, la forma de los elementos debe ser lo más simétrica posible, para asegurar la exactitud de cálculo al utilizar las funciones de forma. Así, los triángulos deben tender a triángulos equiláteros, los rectángulos deben aproximarse a cuadrados, y los elementos tridimensionales debe procurarse sean figuras geométricas regulares.

2.2.1.2 NODOS

Los nodos son uniones o puntos de evaluación de propiedades. Dependiendo de la complejidad que requiera la geometría y el comportamiento de la incógnita de un elemento pueden utilizarse distintos tipos de nodos:

a) Externos, situados en las fronteras del elemento y que a su vez se clasifican en:

-*primarios*, que definen los extremos o aristas del elemento

-*secundarios*. Éstos permiten representar mejor la frontera del elemento y considerar varios tipos de comportamiento en las incógnitas. Si la línea nodal queda definida sólo por sus nodos primarios, representará una línea recta. La inclusión de un nodo secundario permitirá representar una geometría y un comportamiento de la incógnita cuadráticos (definida por tres puntos); de igual manera, dos nodos secundarios permiten representar cúbicas, y así sucesivamente (figura 2.9 y 2.10)

b) Internos, utilizados en elementos bidimensionales y tridimensionales, se sitúan dentro de los planos nodales, y permiten representar el comportamiento de la incógnita como superficies curvas (figura 2.9).

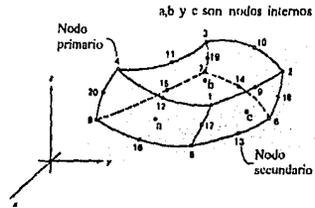


Figura 2.9
Nodos en un elemento tipo ladrillo

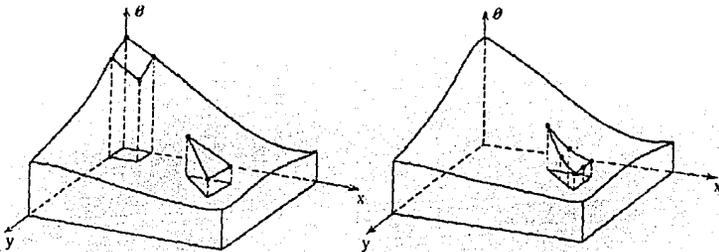


Figura 2.10
Comportamientos lineal y cuadrático de la incógnita en dos elementos distintos

Los posibles desplazamientos en cada nodo dependen de sus grados de libertad. Un grado de libertad es un desplazamiento independiente que se prevé puede ocurrir en un nodo. Generalmente, los grados de libertad se definen paralelos a los ejes principales en el caso de desplazamientos. Así, un nodo limitado a moverse en dirección X tendrá un solo grado de libertad. Las rotaciones se consideran también como grados de libertad independientes y se definen como giros alrededor de los ejes principales.

Así se determina que el máximo número de grados de libertad para un nodo en el espacio es de 6: 3 grados por variaciones respecto a los tres ejes principales y otros otros 3 grados por rotaciones respecto a los mismos ejes.

Se debe tomar en cuenta también que la consideración de grados de libertad innecesarios, aunque no afecta el resultado, aumenta en cambio la capacidad y tiempo demandados a la computadora.

2.2.1.3 TAMAÑO DE LOS ELEMENTOS

Respecto al número de elementos que deben conformar una malla, y por tanto su tamaño, se deben considerar dos puntos:

- Por un lado, la exactitud del método aumenta al considerar más elementos. En las regiones en que se presentan concentraciones de esfuerzos se hace necesario utilizar una malla más fina, para incrementar la exactitud de la representación. De hecho, la posibilidad de refinar la malla en regiones que exijan mayor exactitud es una de las grandes ventajas del método.
- Por otra parte, cualquier computadora tiene un límite de memoria utilizable. Entre más elementos se usen, más memoria se necesita. Así, el equipo marca un límite en este aspecto. Además, el tiempo requerido por la computadora para efectuar las operaciones aumenta con el número de elementos utilizado, y con él el costo computacional.

Resumiendo, para determinar el número de elementos a utilizar debe definirse una solución de compromiso entre exactitud y memoria-tiempo disponible.

2.2.2 SELECCIÓN DE LOS POLINOMIOS DE INTERPOLACIÓN.

Cuando el MEF se emplea para análisis de esfuerzos se utilizan los puntos nodales para evaluar los desplazamientos y a partir de estos obtener esfuerzos o deformaciones unitarias, para lo que se requieren distintos modelos de desplazamiento según el comportamiento esperado.

El comportamiento individual de cada uno de los elementos en que se subdividió el continuo y la manera en que un efecto se transmitirá en el interior del elemento y hacia los otros elementos, proporcionará después los distintos resultados para cada región.

Para esto se definen las llamadas funciones o modelos de desplazamiento, que relacionan el valor de cada variable con su posición relativa a un nodo o a un origen común. Suelen ser polinomios o funciones trigonométricas; por su fácil manipulación matemática normalmente se prefieren los primeros. También se conocen como polinomios de interpolación o funciones de forma. Su tamaño y complejidad depende de los grados de libertad y condiciones de continuidad considerados.

El método, finalmente, obtendrá soluciones aplicando los valores calculados con estas funciones de desplazamiento, pues una vez conocidas las incógnitas en los nodos, utilizará estos polinomios de interpolación para estimar los valores que adquieren en el interior de cada elemento y proporcionar soluciones continuas.

Para asegurar la convergencia del método y la obtención de resultados cercanos a la realidad se debe procurar que los modelos de desplazamiento cumplan con dos características:

- A) Que sean compatibles, esto es, los modelos deben de ser continuos dentro del elemento y sus desplazamientos iguales a los de elementos adyacentes, asegurando con esto la continuidad del modelo.
- B) Que sean elementos completos, es decir, deben incluir los desplazamientos de cuerpo rígido del elemento y los estados de deformación que sufra.

Como ejemplo de lo anterior, a continuación se obtendrá un polinomio de interpolación para el caso unidimensional.

Considérese un elemento unidimensional con dos nodos, 1 y 2, para el que se desean definir dos funciones N_1 y N_2 que representen la variación de una propiedad (p.e. del desplazamiento) a lo largo del elemento. A continuación se grafican el valor del desplazamiento contra la posición entre los nodos. (figura 2.11)

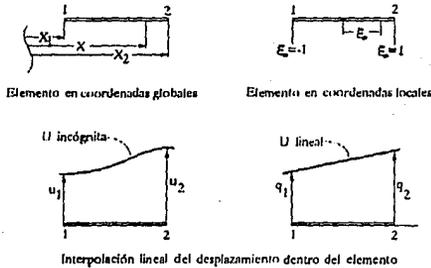


Figura 2.11

La notación utilizada será:

- u_1 valor real del desplazamiento en el nodo 1.
- u_2 valor real del desplazamiento en el nodo 2.
- q_1 valor interpolado del desplazamiento para el nodo 1.
- q_2 valor interpolado del desplazamiento para el nodo 2.
- X_1 posición del nodo 1 respecto a un sistema global de coordenadas.
- X_2 posición del nodo 2 respecto al sistema global de coordenadas.

La característica principal del polinomio N esta dada por el valor que asigna al desplazamiento en cada nodo:

$$\begin{aligned} N_1(X_1) &= 1 & N_2(X_1) &= 0 \\ N_1(X_2) &= 0 & N_2(X_2) &= 1 \end{aligned}$$

Todas las ecuaciones se formulan para un sistema local de coordenadas cuyo origen, en este caso, se encuentra en el centro del elemento. Este sistema especifica la posición en términos de ξ , definida como:

$$\xi = \frac{2}{X_1 - X_2} (X - X_1) - 1 \quad (2.1)$$

tal que asigna los valores +1 y -1 a las posiciones extremas del elemento (posiciones de los nodos 1 y 2 respectivamente). Así cualquier punto dentro del elemento queda definido con un valor ξ entre 1 y -1. Considerando lo anterior, se definen las funciones de forma como:

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad (2.2)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (2.3)$$

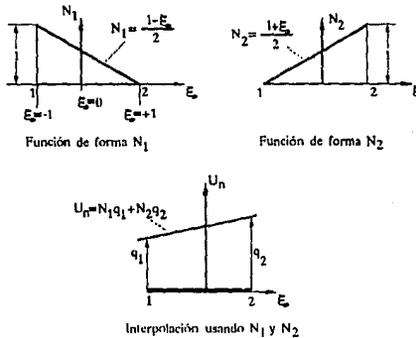


Figura 2.12

que varían entre 0 y 1, permaneciendo continuas a lo largo de todo el elemento. Por último, debe cumplirse que las derivadas de estas funciones a ambos lados de un punto sean iguales.

Utilizando las funciones descritas puede ahora expresarse el desplazamiento:

$$U_n = N_1 q_1 + N_2 q_2 \quad (2.4)$$

O, en forma matricial:

$$U_n = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (2.5)$$

Donde:

$$\{\mathbf{N}\} = [N_1 \quad N_2]$$

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

a $\{\mathbf{q}\}$ se le conoce como el vector desplazamiento del elemento.

Obtener el vector $\{\mathbf{N}\}$ para elementos bidimensionales y tridimensionales se complica, al aumentar el número de nodos y por tanto de funciones necesarias para cumplir con los requisitos mencionados.

Sin embargo, las funciones de forma están ya calculadas y definidas para los principales tipos de elementos. Así, al utilizar un programa de elemento finito basta especificar el tipo de elemento utilizado y el tipo de función con que se desea calcular su comportamiento (polinomio lineal, cuadrático, cúbico o función trigonométrica) con lo cual el programa asigna las funciones predeterminadas.

Las funciones se sustituyen en las ecuaciones que describen el comportamiento del cuerpo, como se verá a continuación, con lo que se garantiza que los efectos registrados en cada elemento afecten a los elementos que lo rodean simulando adecuadamente el comportamiento real del cuerpo estudiado.

2.2.3 DEFINICIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO PARA ANÁLISIS DE ESFUERZOS.

Se debe definir una ley constitutiva que describa la respuesta (efecto) en un sistema debida a la aplicación de una excitación (causa) y la exprese en términos de ecuaciones matriciales generales aplicables a cualquier elemento del cuerpo. para derivar estas ecuaciones se recurre a dos métodos principalmente: El de energía y el de residuales.

1. Métodos de energía: Entre otros están el de la energía potencial mínima [2.29], el de energías complementarias, el principio de Reissner's o formulaciones híbridas [2.32].
2. Métodos de residuales: Por ejemplo los métodos de colocación, subdominios, mínimos cuadrados [2.32] y de Gallerkin [2.28]. Se busca conocer la aproximación o error y minimizarlo para así obtener soluciones más exactas.

A continuación se deducen las ecuaciones del método del elemento finito para problemas de análisis de esfuerzos a partir de la minimización de la energía potencial.

Con base en la primera ley de la termodinámica según la cual **"la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma"**[2.33], se establece el principio de mínima energía potencial para el caso de un sistema con energía cinética igual a cero: **"De todas las posibles deformaciones que un cuerpo elástico puede sufrir, aquellas que satisfacen sus condiciones de frontera logran que el cuerpo este en equilibrio y minimizan la energía potencial"**[2.34].

La energía potencial se compone de:

$$\Pi = U_p + W_p \quad (2.6)$$

donde: $\Pi \Rightarrow$ Energía potencial total.

$U_p \Rightarrow$ Energía potencial elástica.

$W_p \Rightarrow$ Energía potencial debida a fuerzas:

-De cuerpo

-De superficie

Método del elemento finito

Π queda definida como:

$$\Pi = \iiint_V dU_p(u, v, w) - \iiint_V (\bar{x}u + \bar{y}v + \bar{z}w) dV - \iint_S (\tau_x u + \tau_y v + \tau_z w) dS \quad (2.7)$$

en donde el primer término representa las fuerzas elásticas, el segundo las fuerzas de cuerpo o volumen (gravedad, magnéticas, etc.) y el tercero las fuerzas de superficie. Expresando los términos de la ecuación anterior en forma matricial:

Densidad de energía volumétrica:

$$dU = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.8)$$

Para expresar todo en términos de deformaciones unitarias, considerando que:

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\} \quad (2.9)$$

se llega a:

$$dU = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E]\{\epsilon\} dV \quad (2.10)$$

Fuerzas de cuerpo o volumen:

definiendo al vector de desplazamientos como:

$$\{u\}^T = [u \quad v \quad w]$$

y al vector de fuerzas de cuerpo:

$$\{\bar{X}\} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

se puede escribir:

$$(\bar{x}u + \bar{y}v + \bar{z}w) dV = \{u\}^T \{\bar{X}\} dV \quad (2.11)$$

Fuerzas de superficie:

definiendo:

$$\{T\} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$$

se llega a:

$$(\tau_x u + \tau_y v + \tau_z w) dS = \{u\}^T \{T\} dS \quad (2.12)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (2.7) y simplificando:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V (\{\epsilon\}^T [E]\{\epsilon\} - 2\{u\}^T \{\bar{X}\}) dV - \iint_S \{u\}^T \{T\} dS \quad (2.13)$$

Definiendo el operador B:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

y como: $\{\varepsilon\} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right]$ y $\{u\}^T = [u \quad v \quad w]$

se puede hacer: $\{\varepsilon\} = \{u\}^T [B]$ (2.14)

a la matriz $\{u\}$ se le conoce como matriz de desplazamientos.

Sustituyendo en (2.13) las expresiones anteriores e introduciendo el modelo de desplazamientos $[N]$:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\{u\}^T [B]^T [E] [B] \{u\} - 2 \{u\}^T [N]^T \{\bar{X}\} \right) dV - \iint_S \{u\}^T [N]^T \{T\} dS \quad (2.15)$$

Minimizando la función anterior con respecto a $\{u\}^T$ (esta minimización se realiza utilizando el análisis variacional para obtener, más que un valor único, una familia de funciones para las condiciones estacionarias):

$$\partial \Pi = \iiint_V [B]^T [E] [B] \{u\} dV + \iiint_V [N]^T [\bar{X}] dV - \iint_S [N]^T \{T\} dS = 0 \quad (2.16)$$

Asumiendo que las fuerzas de cuerpo son despreciables, la expresión (2.15) puede dividirse en dos componentes:

$$[\bar{k}] = \iiint_V [B]^T [E] [B] dV \quad (2.17)$$

$$\{f\} = - \iint_S [N]^T \{T\} dS \quad (2.18)$$

Ordenando (2.15) se llega a la matriz de rigidez:

$$[\bar{k}] \{u\} = \{f\} \quad (2.19)$$

El procedimiento anterior lleva a plantear ecuaciones que describan el comportamiento del elemento, expresadas en forma matricial de tipo:

$$[k] \{q\} = \{Q\} \quad (2.20)$$

donde $[k]$ es la matriz de propiedades del elemento, $\{q\}$ el vector de incógnitas en los nodos del elemento y $\{Q\}$ como el vector de parámetros de fuerza en los nodos. Para el caso específico de análisis de esfuerzos, $[k]$ es la matriz de rigidez, $\{q\}$ es el vector de desplazamientos nodales y $\{Q\}$ el vector de fuerzas nodales.

2.2.4 ENSAMBLAR LAS ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN LA RED.

Como se mencionó, todos los elementos finitos obedecen a ecuaciones matriciales. El número de incógnitas en la ecuación matricial de un elemento es igual al número de puntos nodales en el elemento por el número de grados de libertad en cada uno.

La ecuación matricial del modelo es un ensamble de las ecuaciones matriciales de todos los elementos por lo que el número de incógnitas N puede llegar a ser de cientos o miles, que forman un gran sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de todo el cuerpo. Éstas ecuaciones ensambladas toman la forma:

$$\sum_1^n [K]\{r\} = \sum_1^n \{R\} \quad (2.21)$$

donde $[K]$ es la matriz de propiedades de todo el modelo, $\{r\}$ es un ensamble de los vectores incógnitas y $\{R\}$ de los vectores de fuerzas.

La matriz de rigidez tiene dos propiedades notables: Es singular (su determinante vale cero) y es una matriz banda, es decir, los valores distintos de cero se agrupan en una banda paralela a la diagonal principal.

Los programas de elemento finito cuentan con algoritmos para numerar eficientemente nodos y elementos (método de Cuthill Mckee) y así reducir el ancho de banda necesario. Esto disminuye la capacidad y tiempo exigidos a la computadora.

Para ver el efecto que causan determinadas situaciones externas se requiere incluir condiciones de frontera, esto es, valores conocidos de las incógnitas (condiciones de frontera "geométricas") en determinados puntos, como p.e. desplazamientos. Estos valores se incluyen modificando la ecuación global del cuerpo en los nodos afectados, con lo que se obtienen las ecuaciones de ensamble modificadas, expresadas ahora con una testa:

$$[\bar{K}]\{\bar{r}\} = \{\bar{R}\} \quad (2.22)$$

Esto disminuye el rango de la matriz de rigidez y elimina la singularidad, permitiendo así solucionar el problema.

2.2.5 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES RESULTANTE.

Una vez ensambladas las tres matrices globales, de fuerzas, de rigidez y de desplazamientos, se forma con ellas un gran sistema de ecuaciones lineales simultáneas. La creación de este sistema y su presentación mediante la ecuación matricial ya enunciada es la principal característica del método. Esto permite emplear algún método numérico como el de Gauss-Jordan o algún otro algoritmo semejante para resolver el sistema.

Como ya se mencionó, el tamaño de este sistema está restringido por la memoria y capacidad del sistema de cómputo, y a su vez limita, como ya se vio, el número de elementos. De ahí la importancia de aplicar algún algoritmo que reduzca el ancho de banda de la matriz de rigidez y así aprovechar mejor la computadora. Posteriormente se soluciona el sistema, obteniendo los valores de desplazamiento en cada nodo del modelo.

2.2.6 SOLUCIÓN DE VARIABLES SECUNDARIAS.

Una vez obtenidos los desplazamientos nodales, estos pueden usarse para obtener resultados adicionales a partir de la relación de estos con las deformaciones unitarias, de acuerdo con la ecuación:

$$\{\varepsilon\} = \{u\}^T [B] \quad (2.13)$$

y los esfuerzos:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (2.9)$$

Posteriormente, pueden combinarse estas soluciones para encontrar los esfuerzos principales y, de acuerdo con algún criterio de falla, establecer los puntos críticos.

2.2.7 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS.

Este punto se refiere a obtener gráficas, dibujos o tablas que permitan visualizar mejor los resultados obtenidos. Quizá es el aspecto más espectacular del método, pues a partir de los resultados obtenidos, y aprovechando las capacidades gráficas y de manejo de datos de las computadoras actuales es posible obtener, impresas o en pantalla, diversas gráficas que permiten revisar con precisión el comportamiento del cuerpo bajo las condiciones impuestas, para detectar puntos críticos o zonas sobrediseñadas. Otras opciones muestran la estructura deformada de acuerdo a lo calculado, comparándola con la original. También es posible obtener animaciones que representan la posible distribución de diversos fenómenos como la secuencia de los desplazamientos en aplicaciones estructurales, o por ejemplo el comportamiento de las temperaturas respecto al tiempo en problemas de transferencia de calor.

2.3 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MÉTODO.

Ventajas del método:

- Las propiedades del material en elementos adyacentes pueden ser diferentes, lo que permite aplicar el método a estructuras compuestas de varios materiales.
- Las formas irregulares pueden obtenerse por aproximación con elementos de caras planas o modelarse exactamente con elementos de caras curvadas. Así el método no se limita a geometrías simples.
- El tamaño de los elementos puede variar, por lo que la malla se expande o refina según se necesite para aumentar la exactitud al representar regiones críticas.
- Puede manejar condiciones de frontera discontinuas, o comportamientos no lineales.
- Permite modelar problemas que involucran tres dimensiones.
- Su aplicación abarca diversos niveles, desde investigación de alto nivel hasta diseño práctico de componentes mecánicos.

Desventajas:

- Se requiere usar una computadora debido a la cantidad de operaciones que se deben realizar. La capacidad de la computadora puede limitar la exactitud
- Es un método muy exacto pero su costo y la inversión necesaria no siempre permiten justificar su uso en aplicaciones sencillas

2.4 VISIÓN Y PERSPECTIVAS DEL MÉTODO.

El uso de minicomputadoras y "mainframes" ha disminuido de manera dramática en los últimos años debido al surgimiento de estaciones de trabajo y computadoras personales (PC's) de cada vez mayor capacidad. Ha habido muy pocos cambios en la teoría del análisis por elemento finito, enfocando los avances al desarrollo de programas más sencillos y a optimizar la eficiencia de modelado. Gracias a que las bases teóricas del método han quedado bien establecidas, la experiencia en análisis por el MEF se valora mucho [2.35].

El modelado sólido (solid modeling) y el automallado (automeshing) han ayudado a reducir el tiempo de construcción de modelos. Con el refinamiento adaptativo de malla (adaptive mesh refinement) es posible evaluar el error en la discretización del mallado, utilizándolo para automáticamente corregir la densidad de la malla hasta alcanzar la exactitud deseada.

La mayoría de los paquetes de elemento finito utilizan elementos tipo H que asumen desplazamientos lineales o cuadráticos. Nuevos elementos tipo P tratan de aumentar el orden de la función de forma a niveles superiores al cuadrático, aunque presentan problemas para considerar no-linealidades del material o cargas externas, colocándolo en desventaja al compararlo con sistemas que incluyan refinamiento de malla y mallado automáticos.

En una línea de aplicación directa a casos de ingeniería, la manufactura, se procura interconectar paquetes de dibujo por computadora (CAD, Computer Aided Design) con

programas de MEF, utilizando el formato IGES como standard al pasar la información de un programa a otro. Esto lleva a un nuevo proceso de diseño que permite la conexión inmediata con programas de manufactura controlada por computadora (CAM, Computer Aided Manufacturing). Definiendo al método de elemento finito como "análisis de ingeniería auxiliado por computadora" (CAE, Computer Aided Engineering), se da forma a la cadena CAE-CAD-CAM que integra en tres pasos todo el proceso de análisis-fabricación de elementos de máquinas. Esto implica una importante reducción de tiempos y costos, que sumada con la obtención de resultados cada vez más exactos incrementan notablemente la competitividad de la empresa que lo aplica.

En aplicaciones a fluidos se encuentran restricciones de aplicación, pues muchos problemas resultan ser no lineales, haciendo que los cálculos exigidos a la computadora se compliquen demasiado. Sin embargo, la mayoría de las limitantes debidas al cómputo están hoy desapareciendo.

Los nuevos desarrollos se esperan en aplicaciones a fluidos, a conseguir entradas paramétricas de datos, al modelado de sólidos, a refinamiento adaptativo del mallado, a optimizar diseños y a nuevas formulaciones [2.35].

2.5 REFERENCIAS

- [2.1] Maxwell, J.C. 1864, "On the calculations of the Equilibrium and Stiffness of Frames," *Phil. Mag.* (4), 27, 294,
- [2.2] Castigliano, A. 1879, *Theorie de l'equilibre des Systemes Elastiques*, Turin, (English traslation by Dover Publications, 1966)
- [2.3] Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Holz-und Eisen Konstruktionen," *Zeit. des Architekten und Ingenieur Verienes zu Hannover*, 1968.
- [2.4] Temple, G., and W. Bickley. *Rayleigh's Principle*. Dover Publications, Inc., New York, 1956 (a new edition based on original work in 1933)
- [2.5] Brauer, J.R., *What Every Engineer Should Know About Finite Element Analysis*. Marcel Dekker Inc, 1988.
- [2.6] Maney, G.B. 1915, *Studies in Engineering*-No. 1, U. of Minnesota, Minneapolis, Minn.
- [2.7] Ostenfeld, A. 1926, *Die Deformationsmethode*, Springer-Ertrag OHG, Berlin, .
- [2.8] Cross, H., 1932. "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments," *Trans. ASCE*, 96, pp 1-10.
- [2.9] Courant, R. 1943. Variational Methods for the solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bull. Am. Math. Soc.* 49:1-23
- [2.10] Mc Henry, D. 1943. "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems," *J. Inst. Civil Eng.*, 21, pp. 59-82 .
- [2.11] Hrenikoff, A., 1941. "Solution of problems in Elasticity by the Framework Method," *J. Appl. Mech.*, 8, pp. 169-175 .
- [2.12] Argyris, J.H., and Kelsey, S. 1960. *Energy Theorems and Structural Analysis*. Butterworth, London
- [2.13] Turner, M.J., Clough, R.J., Martin, H.C., and Topp, L.J. 1956. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *J. Aero. Sci.* 23, no.9:805-823
- [2.14] Clough, R.W. 1960. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.* 87:345-378.
- [2.15] Besseling, J.F. 1963. The Complete Analogy Between the Matrix Equations and Continuous Field Equations of Structural Analysis. *Colloque International des Techniques de Calcul Analogique et Numerique de l'Aeronautique, Liege*, pp. 223-242
- [2.16] Melosh, R.J. 1963. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method. *AIAA J.*, no. 7:1631-1637.
- [2.17] Jones, R.E. 1964. A Generalization of the Direct-Stiffness Method for the Direct Stiffness Method. *AIAA J.*, no.5:821-826.
- [2.18] Gallager, R.H: 1964. *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis*. Pergamon, Oxford.
- [2.19] Pian, T.H.H. 1964. Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions. *AIAA J.*, no 7:1333-1336.
- [2.20] Fraeijs de Veubeke, B. 1964. Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis. *Agardograph 72*, Pergamon, Oxford, pp. 165-201.
- [2.21] Herrman, L.R. 1965. A Bending Analysis for Plates. *Proc. 1st Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech.* AFFDL-TR-66-80. Wright-Patterson AFB, pp 577-604.
- [2.22] Prager, W. 1967. Variational Principles for Elastic Plates with Relaxed Continuity Requirements, Strains and Stresses in *Recent Progress in Applied Mechanics*. Chapter in

- The Folke-Odquist Volume*. B.Broberg, J. Hult, and F. Niordson , eds. Almquist and Wiksell, Stockholm, pp 463-474.
- [2.23] Prager, W. 1968. Variational Principles for Elastic Plates with Relaxed Continuity Requirements. *Int. J. Solids Structures* 4, no. 9:837-844.
- [2.24] Tong, P. and Pian, T.H.H. 1969. A Variational Principle and the Convergence of the Finite Element Method Based on Assumed Stress Distribution. *Int. J. Solids Structures* 5:436-472.
- [2.25] Tong P. 1970. New Displacement Hybrid Finite Element Model for Solid Continua. *Int. J. Numerical Meth. in Eng.* 2:78-83.
- [2.26] Segerlind, L.J. 1976. *Applied finite element analysis*. John Wiley & sons, New York.
- [2.27] Segerlind, L.J. 1984. *Applied finite element analysis*. John Wiley & sons, New York.
- [2.28] Chandrupatla, T.R., Belegundu, A.D. 1991. *Introduction to finite elements in engineering*. Prentice Hall, New Jersey.
- [2.29] Desai Ch.S., Abel J.F. 1972. *Introduction to finite element method*. Van Nostrand-Reinhold, New York.
- [2.30] Desai Ch.S. 1979. *Elementary finite element method*. Prentice Hall, New Jersey.
- [2.31] Brauer J.R. 1988. *What every engineer should know about finite element analysis*. Marcel Dekker Inc. New York.
- [2.32] Tong P., Rossettos J.N. 1977. *Finite element method. basic technique and implementation*. MIT press, Massachusetts.
- [2.33] Zahavi E. 1992. *The finite element method in machine design*. Prentice Hall, New Jersey.
- [2.34] Gallager R.H. 1975. *Finite element analysis fundamentals*. Prentice Hall, New Jersey.
- [2.35] Rodamaker, C.M. 1992. Finite Element Analysis: Where to next? *Sound and vibration*.
- [2.36] Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K. 1967. *The finite element method in Structural Continuum mechanics*. Mc Graw Hill, London.
- [2.37] Davies, A.J. 1980, *The finite element method, a first approach*. Clarendon Press, Oxford.
- [2.38] Hernández Gómez L.H. 1992. *Crack initiation under shock loading*. Tesis doctoral, Oxford University.

ESTABLECIMIENTO Y VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA

Se detalla la metodología propuesta planteando una secuencia general a seguir y enfatizando aquellos puntos que requieren de especial atención. Para confirmar la validez de la metodología se evalúan numéricamente dos casos experimentales: El ensayo fotoelástico de una placa plana agrietada en un extremo y sujeta al modo de carga de apertura, y una prueba de ASTM para evaluar la tenacidad a la fractura del acero en la que se empleó una probeta compacta con una muesca tipo "keyhole". A partir de estos ejemplos se analiza la precisión y convergencia de la metodología propuesta.

3.1 GENERALIDADES.

Los primeros capítulos de esta tesis se enfocaron a la descripción de los conceptos teóricos de la mecánica de fractura y del método elemento finito aplicado al análisis de esfuerzos. Toca ahora conjuntarlos definiendo la metodología a seguir para realizar análisis de mecánica de fractura, describiendo los pasos fundamentales y enfatizando aquellos que requieran atención especial en orden a obtener resultados más exactos.

Una vez descrita la metodología se comprobará su validez, evaluando sus resultados con los obtenidos en pruebas experimentales. Los casos a examinar serán una prueba de fractura por fotoelasticidad realizada en el Instituto de Investigaciones Eléctricas [3.1] y una prueba para determinar la tenacidad a fractura de materiales según el método estándar de la ASTM, realizada en la Facultad de Ingeniería de la UNAM [3.2].

Para poder realizar un análisis de mecánica de fractura es fundamental determinar los parámetros de fractura. Entre estos parámetros, el factor de intensidad de esfuerzos (FIS) permite determinar que tan crítica es una fisura y hasta que punto puede tolerarse su propagación. Calcular analíticamente estos parámetros resulta difícil y en ocasiones imposible, lo que hace necesario recurrir al análisis numérico, campo en el que destaca el método del elemento finito cuya aplicación es el objeto de esta tesis. En este caso se empleará para el análisis el programa ANSYS.

Cabe destacar que en la aplicación del método del elemento finito a problemas de fractura es muy importante modelar adecuadamente la singularidad del campo de esfuerzos en la punta de la grieta. Para ello, deben emplearse elementos especiales en esta zona, para poder así obtener una representación exacta de los parámetros de fractura, en especial del factor de intensidad de esfuerzos.

3.2 EL PROGRAMA ANSYS.

Desarrollado a principios de los años 70 por el doctor John A. Swanson, ANSYS es un programa de elemento finito de aplicación general con gran prestigio y difusión en la industria, principalmente en las áreas aeroespacial, de automóviles, construcción, electrónica, médica, metalúrgica, generación de energía, estructuras marinas, transportación, etc. y en los organismos de investigación científica internacional.

ANSYS permite, con un solo programa, realizar análisis tanto en dos como en tres dimensiones de áreas como [3.3]:

- Estructural: análisis estáticos, dinámicos (transitorios, frecuencia natural, respuesta armónica, vibración aleatoria, espectro de respuestas), cinemática y pandeo;
- Térmica: en estado estable, transitorios, cambios de fase, análisis térmico estructural;
- Campos Magnéticos: estáticos o variables con el tiempo;
- Flujo de Fluidos: en tuberías, visualización, distribución de presiones;
- Acústica;

- Análisis combinado: magnético-estructural, fluido-estructural, piezoelectrónicos, etc.

La versión empleada en esta tesis incluye los últimos avances en el método del elemento finito [3.3], como son el modelado sólido a través de una interfase gráfica con menús tipo windows y manejo de geometrías primitivas y álgebra booleana, mallado automático, amplia capacidad de graficación incluyendo animación, cortes, contornos, visualización en tres dimensiones, trazo de flujo de partículas, o gráficas XY para presentaciones, etc. Modelado de fenómenos no lineales, análisis de fractura y de fatiga, refinamiento adaptativo de malla, etc.

El programa ANSYS ofrece un sistema de ayuda al usuario mediante un equipo de especialistas dedicados a resolver problemas complejos cuya solución presente grandes dificultades. En esta tesis se trabajó con la revisión 5.0A13, de las últimas disponibles, lanzada al mercado a fines de 1993. Esta instalada en una computadora con procesador 386D, 8 Mb en RAM y 180 Mb de memoria. La capacidad de la computadora limitó en algunas ocasiones las posibilidades de análisis impidiendo utilizar mayores refinamientos de malla.

3.3 DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA.

A continuación se describen las etapas a seguir para aplicar la metodología que se propone; posteriormente se profundizará en cada una señalando las consideraciones que se requieren.

1. El primer paso para aplicar la metodología es definir la geometría del cuerpo analizado, incluyendo las condiciones de carga, la ubicación y geometría de la grieta, y las propiedades mecánicas del material.
2. Se procede a su discretización, creando una red de elementos y nodos. Esto, como se vio en el capítulo 2, implica seleccionar el tipo de elementos a utilizar y su tamaño, que deberá ser menor en puntos de interés, concretamente alrededor de la ubicación de la grieta, y en las zonas de concentración de esfuerzos. La malla se refinará progresivamente partiendo de una malla inicial burda hasta obtener una representación adecuada
3. Modelar la punta de la grieta requerirá de especial atención. Esto involucra describir una región, formada con elementos especiales, donde se refinará de modo especial la malla y que será el punto de mayor interés para el cálculo del FIS.
4. A continuación deben incluirse las cargas y condiciones de frontera a las que se sujeta el cuerpo.

5. Definido el modelo de elemento finito y sus condiciones de frontera, se procede a efectuar el análisis estático, obteniendo los esfuerzos y desplazamientos resultantes.
6. Los resultados obtenidos deben presentarse convenientemente para facilitar su interpretación, pudiéndose obtener una amplia gama de gráficas y representaciones que muestren la distribución y magnitud de los desplazamientos y esfuerzos.
7. Por último se procede a calcular el FIS a partir de un planteamiento energético y evaluando la convergencia de los resultados.

3.4 REALIZACIÓN DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS DE MECÁNICA DE FRACTURA.

Este es el paso más crítico y delicado de toda la metodología, pues el modelo describe la geometría del cuerpo analizado y sus condiciones de carga. De él dependerá en forma importante la exactitud de los resultados obtenidos [3.4].

Con el objeto de aprovechar de modo óptimo la capacidad del equipo de cómputo conviene simplificar el modelo al máximo, aprovechando condiciones de simetría y aplicando el criterio ingenieril para simplificar el análisis. Esto permite disponer de más memoria para después refinar la malla en regiones críticas y aumentar ahí la exactitud de los resultados.

Los modelos de elemento finito son un conjunto de distintas entidades. Estas entidades son: Para definir la geometría; puntos, líneas, áreas, y volúmenes. Y para definir la malla; nodos y elementos. Existe una jerarquía entre estas entidades, pues por ejemplo, para representar un volumen se necesita contar con áreas, líneas y puntos que lo delimiten; esto también implica que, por ejemplo, una vez definido un elemento no podrá borrarse alguno de sus nodos sin antes eliminar el elemento.

Cada entidad puede graficarse en pantalla conforme se va definiendo, facilitando al analista visualizar la geometría conforme la crea. Además se asigna un número a cada componente con el objeto de facilitar su manejo durante la generación del modelo, pero sobre todo para permitir su identificación durante la solución y después de ella.

Los programas de elemento finito de la última generación ofrecen una gran cantidad de opciones para construir el modelo. Pueden dividirse en dos procedimientos distintos, generación directa y modelado sólido, que pueden combinarse a lo largo del proceso

según se requiera. La figura 3.1 presenta una clasificación de las distintas opciones, agrupadas en el orden en que suelen emplearse.

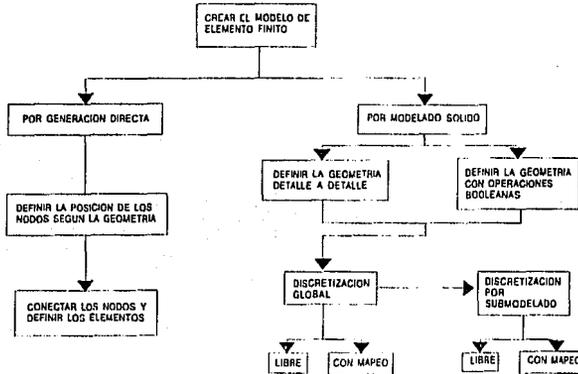


Figura 3.1
Opciones al crear el modelo de elemento finito

1. En la generación directa el analista, en base a la geometría, define los nodos uno a uno, llevando el control de su ubicación. Posteriormente establece conexiones entre ellos para así formar los elementos. El proceso resulta tedioso y lento, sobre todo en modelos grandes, lo que aumenta la probabilidad de ocurrencia de error humano. Por otro lado permite el control exacto de la geometría de la malla y de su refinamiento. Actualmente se utiliza principalmente en casos en los que se requiere definir situaciones muy especiales, prefiriéndose en general el modelado sólido.
2. El modelado sólido consiste en definir primeramente la geometría, a partir de la cual un algoritmo se encarga de crear los nodos y elementos. El analista puede definir características especiales en la malla si así lo requiere. Actualmente suele preferirse esta opción por sus ventajas, destacando entre ellas su rapidez y la reducida probabilidad de error [3.5].

La diferencia básica entre los dos procedimientos esta en el papel que desempeña la geometría en cada uno: En la generación directa es un auxiliar que facilita la ubicación de los nodos, pero puede incluso prescindirse de ella y proceder directamente a generar los nodos si se conocen bien sus coordenadas. En el modelado sólido los nodos se generan a partir de la geometría, que resulta así indispensable.

Al optar por el modelado sólido la geometría puede definirse de dos formas: En la primera, se ubican puntos respecto a algún sistema de coordenadas predefinido y luego se unen para generar líneas, áreas y volúmenes. La geometría se va construyendo detalle a detalle de modo análogo al empleado en un paquete de dibujo por computadora. Así un volumen queda definido por las áreas que lo limitan, las cuales son en realidad superficies delimitadas por líneas que a su vez requieren puntos para ser definidas. Mediante una gran variedad de comandos se pueden manipular las entidades creadas e incluso duplicarlas o reflejarlas, permitiendo así ahorrar tiempo.

En la segunda, se crean superficies o volúmenes simples a partir de los cuales, utilizando el álgebra booleana, se van construyendo geometrías más complejas. Esto permite trabajar directamente con áreas y volúmenes, mientras la computadora se encarga de crear todos los puntos y líneas necesarios, de modo que el analista pueda generar varias geometrías simples y posteriormente sumarlas, restarlas, encontrar sus intersecciones, unir las, etc. Posteriormente se detalla el modelo añadiendo o eliminando superficies o volúmenes. Es un concepto diferente que ahorra mucho tiempo y facilita pasos subsiguientes como la creación de regiones de interés en los cuales refinar la malla.

Definida la geometría por modelado sólido, el paquete genera automáticamente los nodos y elementos. Esto facilita refinar la malla a partir de una primera aproximación, hasta llegar al punto en que un mayor refinamiento no cambie los resultados de forma significativa. Esta discretización o mallado puede ser libre o en mapa.

En el mallado libre la computadora efectúa el trabajo sin intervención del analista, colocando los elementos de acuerdo con características previamente definidas como p.e. el tamaño o cantidad de elementos en algún punto o línea, el tipo de elementos a utilizar y su forma. Comienza discretizando los bordes, procediendo hacia el centro de la figura, generando mallas semejantes a la de la figura 3.2a

El mallado en mapa genera mallas más uniformes al utilizar únicamente elementos cuadrados (figura 3.2b). Este procedimiento utiliza menos elementos optimizando así el empleo de la memoria, pero requiere que se cumplan ciertas características: la figura debe ser regular y deben limitarla sólo cuatro líneas. Crear una malla en mapa para geometrías complicadas consume mucho tiempo, lo que no siempre se justifica.

Para facilitar el mallado adecuado de zonas críticas se puede recurrir a mallar por regiones, esto es, a separar zonas de interés y discretizarlas por separado, pudiendo así controlar mejor las características de la malla en la región; posteriormente con elementos mayores se conectan las distintas zonas de modo que quede discretizado todo el cuerpo.

La malla puede finalmente optimizarse de modo que represente al cuerpo con la exactitud requerida utilizando un mínimo de elementos y disminuyendo por tanto tiempos y costos de cómputo.

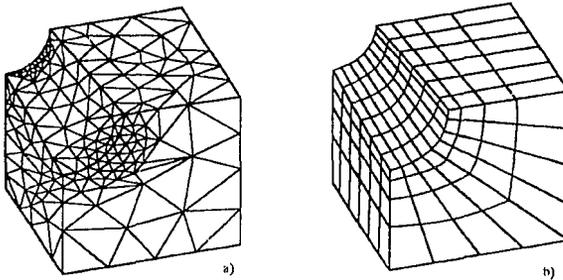


Figura 3.2
a) Mallado libre. b) Mallado en mapa

Una opción que puede ayudar a obtener mayor exactitud es el submodelado. En ocasiones, la malla creada no permite obtener exactitud en regiones de interés porque resulta muy burda. Sin embargo, puede ser suficientemente exacta para representar al resto del modelo. Generar una malla más fina, puede requerir demasiado tiempo o exceder la capacidad disponible en memoria. La alternativa es el submodelado. Este se basa en el principio de St. Venant según el cual si una distribución de fuerzas dada se reemplaza por un sistema estático equivalente, la distribución de esfuerzos y deformaciones sólo se altera cerca de la región de aplicación de la carga.

De acuerdo a lo anterior, el submodelado consiste en generar un modelo independiente, con una malla más fina, que represente sólo la región de interés. Para ello se requiere seguir los siguientes pasos: 1) Crear y analizar una primera malla de todo el modelo. 2) Crear el submodelo. 3) "Cortar" el modelo e interpolar los desplazamientos resultantes en los nodos localizados en las superficies de corte. Estos valores se sustituyen en el submodelo y le sirven como condiciones de frontera. 4) Analizar el submodelo. 5) Verificar el submodelo. El submodelado sólo es válido si la superficie de corte esta lejos de zonas críticas, pues de lo contrario el corte afectará los resultados.

Cuando se trata de generar modelos para mecánica de fractura conviene utilizar el modelado sólido con mallado libre, pues la presencia de la grieta dificulta crear mallas en mapeo requiriéndose demasiado tiempo, lo que no siempre se justifica. Es conveniente modelar por separado las regiones que presentan distribuciones de esfuerzos complejas para controlar mejor las características de la malla. Trabajar en tres dimensiones con orientaciones y geometrías de grieta complejas puede obligar a utilizar la generación directa, y en ocasiones, el submodelado.

Entre los últimos avances en programas de elemento finito se encuentra el refinamiento adaptativo de la malla, el cual, basado en una geometría descrita por modelado sólido, genera y refina la malla utilizando un algoritmo predefinido que puede incluso modificarse de acuerdo a los criterios del usuario. Sin embargo aún no permite definir elementos especiales, lo que limita su aplicación en problemas de mecánica de fractura.

3.5 CONSIDERACIONES AL MODELAR LA PUNTA DE LA GRIETA.

El objetivo fundamental de la metodología es la conjunción de los criterios de mecánica de fractura y del método del elemento finito. Lograr una representación adecuada de la singularidad en la punta de la grieta al modelarla con elementos finitos es su punto medular, y requiere utilizar consideraciones especiales.

Con el fin de obtener la mejor representación posible del campo de esfuerzos en la punta de la grieta debe buscarse el mayor refinamiento posible de la malla en la región, sobre todo frente a la grieta, procurando aumentar el tamaño de los elementos en otras zonas de poco interés para optimizar el empleo de la memoria.

Para poder representar la singularidad de esfuerzos en la punta de la grieta los elementos que la rodeen deben ser elementos especiales llamados singulares o desplazados, ilustrados en la figura 3.3, y cuya principal particularidad es tener desplazados sus nodos internos (L y N) hasta la cuarta parte de la línea nodal, lo que permite representar la singularidad en la punta de la grieta [3.6]. Conviene crear un área circular que permita una mejor descripción de los esfuerzos y deformaciones en la vecindad de la punta de la grieta controlando las características de la malla en la región.

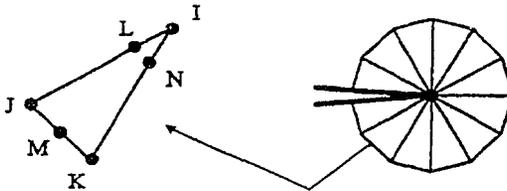


Figura 3.3
Elemento con nodo desplazado (dos dimensiones) y su distribución en la punta de grieta

El tratamiento de la punta de la grieta cambia según se trate de un modelo bidimensional o tridimensional. Para el primer caso queda representada por un punto (fig. 3.4a). Si el modelo es tridimensional, entonces la punta de la grieta está formada por todo un frente de grieta, que se representa con una línea (fig 3.4b).

Para el modelado en dos dimensiones se recomienda utilizar elementos triangulares planos de 6 nodos. La primera fila de elementos alrededor de la punta de la grieta debe estar formada por elementos singulares dispuestos como se ve en la figura 3.3. Para especificar esto ANSYS utiliza el comando KSCON que permite elegir el nodo que representará la punta de la grieta y asigna elementos especiales para representarla, definiendo su tamaño y características.

Otras consideraciones importantes son: La punta de la grieta debe coincidir con el origen del sistema de coordenadas (fig. 3.4a). El tamaño de los elementos singulares debe medir aproximadamente un octavo de la semilongitud de la grieta "a" y no deben distorsionarse; deben tomar la forma de triángulos isósceles.

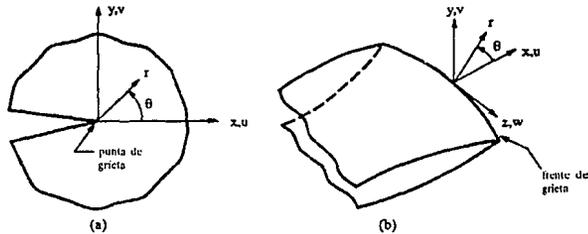


Figura 3.4
Sistemas de coordenadas en la punta de grieta. a)2D. b)3D.

Para modelos de tres dimensiones se complica el procedimiento, pues no hay aún un comando análogo al usado en casos bidimensionales que simplifique la colocación adecuada de los elementos singulares. El tipo de elemento que se recomienda utilizar es el ladrillo de 20 nodos, que para modelar la punta de la grieta debe tomar la forma de un prisma triangular (Figura 3.5), colapsando una de sus caras en una línea; esta línea debe ser la que este en contacto con la punta de la grieta.

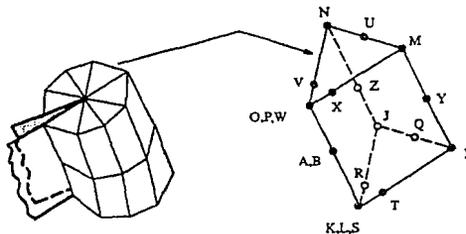


Figura 3.5
Elemento singular en tres dimensiones y su distribución en la punta de grieta

El tamaño de los elementos se calcula de modo análogo al caso bidimensional, con la consideración adicional de no exceder una proporción de 4:1 en ninguno de sus lados. Si el frente de grieta es curvo, el tamaño de los elementos a lo largo del frente de grieta dependerá del grado de curvatura en la zona. Debe utilizarse mínimo un elemento cada 15 a 30 grados a lo largo del frente de grieta circular y todas las líneas nodales deben ser rectas, incluido el eje del frente de grieta.

El cálculo de los parámetros de fractura es un paso posterior a la solución del campo de esfuerzos, a partir de la cual se obtienen mediante un planteamiento energético.

3.6 EVALUACIÓN DEL CAMPO DE ESFUERZOS.

Las condiciones de carga se aplican directamente a los nodos y elementos creados, y pueden ser puntuales, de superficie o de volumen. Las condiciones de frontera son sujeciones, anclajes, y otras limitaciones al movimiento del cuerpo. Si se representó sólo parte del modelo deben añadirse las restricciones que simulan la simetría en las caras donde esta se conecta con el resto del cuerpo original.

Es posible definir para un mismo cuerpo diferentes condiciones de carga, pudiendo comparar posteriormente los comportamientos obtenidos para cada caso específico. Esto permite observar el comportamiento del cuerpo en distintas condiciones para determinar cuáles son las más críticas.

Una vez definido el modelo y aplicadas las condiciones de frontera se procede a evaluar el campo de esfuerzos, de lo que se encarga la computadora. Puede efectuarse una revisión de los elementos para asegurar que su forma permitirá obtener un margen reducido de error.

La solución debe finalmente procesarse para obtener las deflexiones nodales así como la magnitud y distribución de los esfuerzos. Esto incluye crear representaciones que permitan una mejor visualización de los resultados, pudiendo además obtenerse gráficas que describan el comportamiento de un parámetro con respecto a otro. Podrán reconocerse las geometrías características de la zona plástica en la vecindad de la punta de la grieta. (ver figuras 1.8 y 1.9).

Son especialmente útiles para el análisis las gráficas que muestran las distribuciones de esfuerzos en el cuerpo y las deflexiones comparadas con la geometría original.

3.7 CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS.

Para poder calcular el FIS el origen del sistema de coordenadas debe estar en la punta de la grieta, con el eje X en la misma dirección que la cara de la grieta, según la figura 3.4. El método es aplicable a problemas lineal elásticos con materiales isotrópicos homogéneos en la zona de grieta.

El programa ANSYS cuenta con un algoritmo para calcular el factor de intensidad de esfuerzos en función de los desplazamientos de la superficies tras la punta de grieta. Se debe primero definir los nodos a utilizar como base de cálculo en la obtención del FIS, para lo que deben señalarse tres nodos adyacentes a la punta de la grieta que describan su geometría. El resultado se ve afectado por los nodos elegidos pues a distintas distancias de la punta de grieta se presentan distintos desplazamientos. La distancia que separa los nodos seleccionados también afecta el análisis.

En este punto el criterio del analista indicará cuáles nodos deben seleccionarse para obtener una mejor respuesta. En ocasiones resulta conveniente comparar las variaciones en el resultado para distintas selecciones de nodos, a fin de contar con más datos para el análisis de convergencia.

Finalmente, es posible obtener un calculo estimado del error que se espera tenga el análisis. Este cálculo, de tipo energético, puede utilizarse como base para determinar la necesidad de repetir el análisis. El cálculo es influido, entre otras cosas, por el tamaño de los elementos, así como por la forma de aplicación de carga y su distribución. Se obtiene un número positivo que cuantifica el error de energía. Aunque el valor que representa ausencia de error es cero, resulta difícil alcanzarlo, pudiéndose considerar aceptable un valor de 10.

3.8 VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA.

Con el objeto de validar la metodología propuesta, esta se empleará para analizar los casos experimentales, analizando la convergencia de los resultados obtenidos con los valores encontrados en laboratorio.

Como se mencionó, los casos analizados son: El análisis de una placa agrietada mediante fotoelasticidad y una prueba de ASTM para determinar la tenacidad a fractura.

3.8.1 PRUEBA FOTOELÁSTICA DE FRACTURA.

Algunos materiales transparentes no cristalinos son ópticamente isotrópicos cuando se encuentran libres de esfuerzos, pero se comportan como cristales ópticamente anisotrópicos cuando se someten a una carga, manteniendo este comportamiento en tanto esta no se retira, y retornando a su estado inicial en cuanto la carga desaparece. A esto se le conoce como doble refracción temporal [3.7].

En 1853 Maxwell desarrolló tres leyes que establecen una relación entre la carga aplicada a un material de este tipo y su comportamiento óptico [3.8], mismas que constituyen la base para la determinación experimental de los esfuerzos mediante fotoelasticidad. Maxwell notó que los cambios en los índices de refracción de estos materiales eran linealmente proporcionales a las cargas aplicadas y por lo tanto a los esfuerzos y deformaciones resultantes. Lo anterior se comprueba observando un modelo fotoelástico a través de un instrumento llamado polariscopio en el cual se forman una serie de franjas para distintos niveles de esfuerzo.

Para realizar la prueba se usa una placa de material fotoelástico con la geometría a analizar, la cual se monta en el polariscopio para observarla. Durante una etapa de calibración se determinan los valores de esfuerzos para cada una de las franjas. Posteriormente se obtienen impresiones del modelo sometido a cargas equivalentes a las que se desea analizar, pudiéndose así obtener el perfil de la distribución de esfuerzos presente y cuantificarlos.

En seguida se presenta un caso experimental fotoelástico según se describe en [3.1]. Se busca evaluar el FIS en una placa de acero agrietada ($E=1.92$ GPa, $\nu=0.3$) cuyas características geométricas se muestran en la figura 3.6 y que se carga con 15,187.5 N mediante los barrenos circulares.

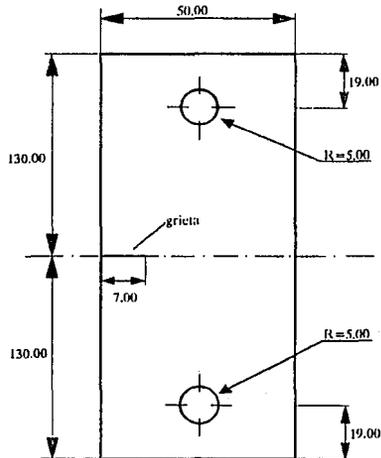


Figura 3.6
Modelo fotoelástico. Acotaciones en mm. Espesor 3 mm.

Para el análisis fotoelástico se empleó un polariscopio circular, cargando un espécimen de material fotoelástico con la misma geometría que la placa de acero y el mismo módulo de Poisson, lo que aseguraba la adecuada semejanza entre los campos de esfuerzos utilizados. Utilizando posteriormente una fórmula de escalación propuesta por Dally [3.9], basada en la teoría π de Buckingham y en relaciones adimensionales, se escalaron los resultados a fin de obtener valores para la placa de acero. Se tomaron impresiones claras y oscuras de dos casos de carga distintos.

Después se compararon los resultados obtenidos con los de dos análisis analíticos descritos por [3.7] y contra un análisis de elemento finito realizado con un programa de elemento finito llamado BISTAT, de CISE [3.10], cuyos resultados se muestran en la tabla 3.1.

Al analizar el mismo modelo empleando el programa ANSYS se creó una malla con 265 elementos y 831 nodos que representara la mitad superior de la probeta, aprovechando las simetrías geométricas y de carga (figura 3.7). Se emplearon elementos planos rectangulares de 8 nodos, que se adaptaron para modelar la punta de grieta degenerándolos en triángulos especiales con nodos desplazados. Se utilizó la consideración de esfuerzo plano pues el espesor de placa no es considerable.

La placa se sometió a una fuerza repartida en el barreno de carga de acuerdo a una distribución senoidal. En la práctica la probeta se sujeta a un cilindro mediante un

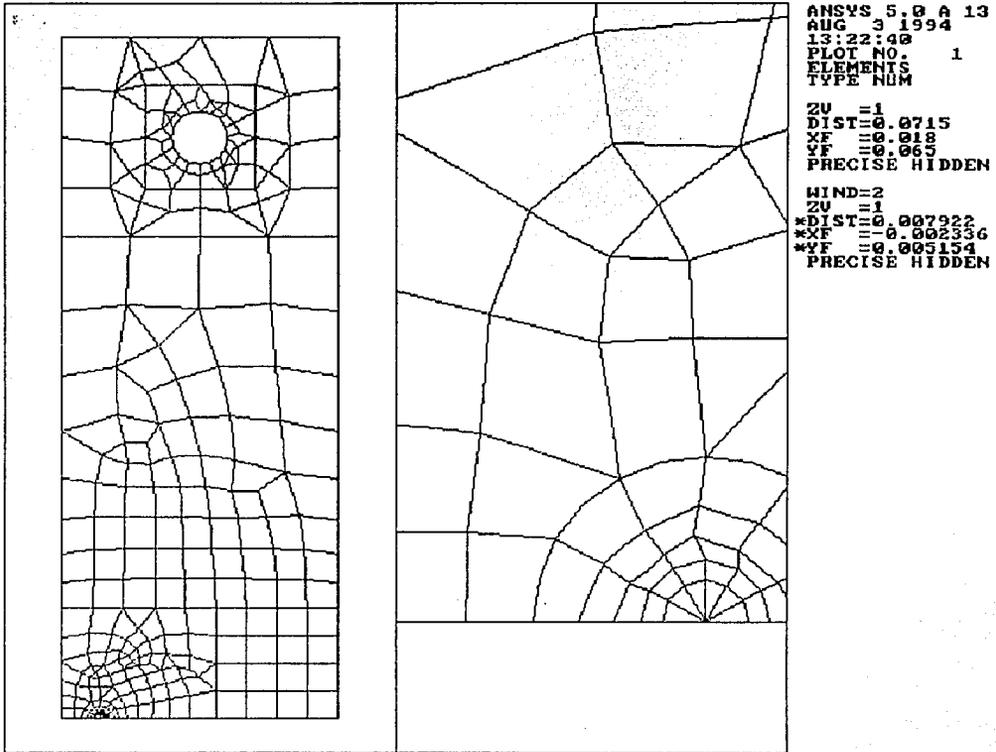


Figura 3.7
Discretización del modelo fotoelástico

barreno y se carga por medio de él. En este punto es conveniente aclarar que no hay un criterio de aceptación general que indique cómo distribuir una carga aplicada de esta forma. Para modelar este efecto se eligió distribuir uniformemente fuerzas en dirección Y con un máximo a 90° y cargas nulas a cero y 180°, según se observa en la figura 3.8. Para representar la restricción provocada por la mitad del modelo que no se representó se limita el movimiento vertical en la línea inferior. Finalmente, para evitar que se presente una singularidad en la matriz de rigideces se coloca una restricción en dirección horizontal en la esquina inferior izquierda.

La figura 3.9 muestra la malla con las cargas y restricciones aplicadas. Para llegar a ella se requirieron varios pasos de optimización a partir de una malla inicial burda, hasta obtener un error estimado de 14.102. En la zona de aplicación de carga se definieron 15 nodos para repartir la carga según se explicó.

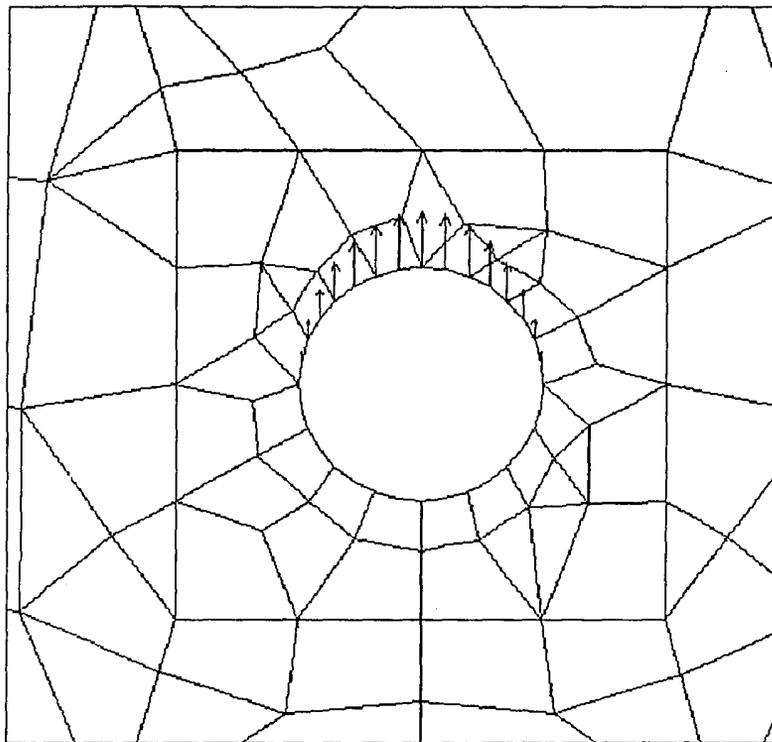
En la figura 3.10 se muestra la distribución de esfuerzos en la punta de grieta. Se puede observar la formación de los perfiles descritos en la sección 1.6. Nótese la zona descargada (esfuerzo mínimo) en la superficie libre de la grieta y el punto de esfuerzo máximo en la punta. El tamaño de zona plástica puede encontrarse comparando los esfuerzos obtenidos con el esfuerzo de fluencia del material. Por último puede advertirse el refinamiento especial de la malla utilizado en la punta de la grieta, según lo descrito en la sección 3.5.

La tabla 3.1 muestra los resultados a los que se llegó en cada caso. Puede observarse que el programa ANSYS obtuvo un valor mayor al esperado. Esta diferencia en los resultados se debe a tres causas principalmente, dos atribuibles a errores en la experimentación y la otra a la necesidad de un mejor análisis que lleve a suposiciones adicionales capaces de explicar la disimilitud.

Tabla 3.1
Comparación entre los resultados de [3.1] y los de ANSYS

| ANÁLISIS | K _I [MPa√m] |
|--|------------------------|
| Ensayo foto elástico [3.1] | 14,384 |
| Modelo analítico 1 [3.7] | 16,821 |
| Modelo analítico 2 [3.7] | 18,762 |
| Método del elemento finito (BISTAT) [3.10] | 16,908 |
| Método del elemento finito (ANSYS) | 20,958 |

En primer lugar, el error experimental puede esperarse debido a las pocas franjas obtenidas ya que no se contaba con espejos parciales para multiplicarlas. Debido a esto las franjas resultan muy anchas y su centro queda indefinido. Como no se empleó ningún instrumento para encontrar estos centros los resultados pueden haberse aproximado menos a la realidad.



```
ANSYS 5.0 A 13  
AUG 3 1994  
13:25:06  
PLOT NO. 3  
ELEMENTS  
TYPE NUM  
U  
F  
ZU = 1  
*DIST = 0.015712  
*MF = 0.015843  
*MF = 0.111415  
PRECISE HIDDEN
```

Figura 3.8
Aplicación de la carga en el barrero de la probeta

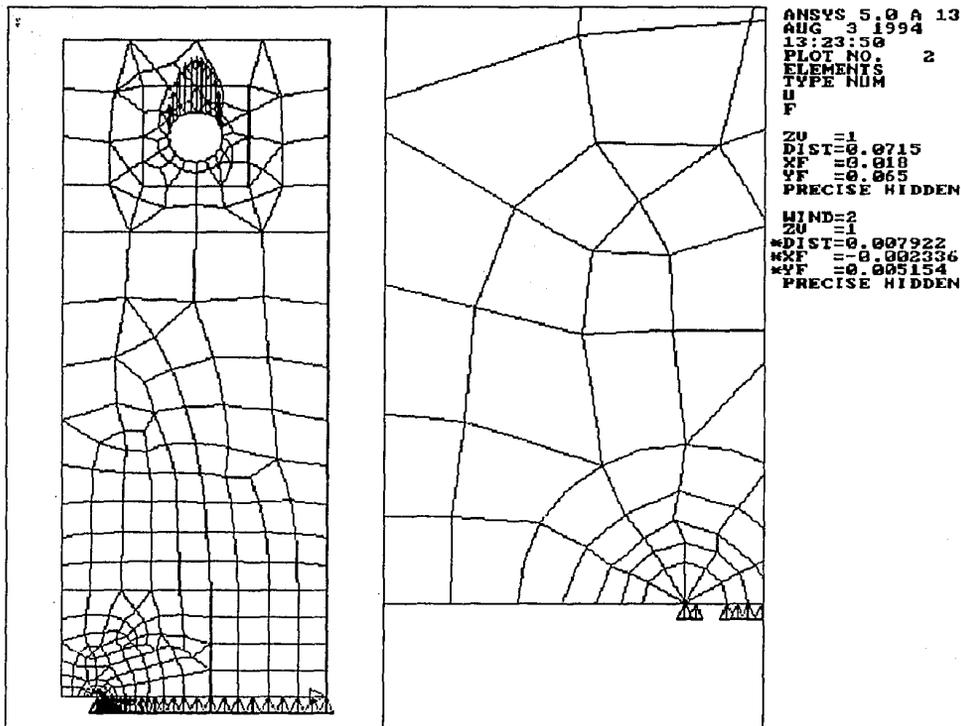


Figura 3.9
Cargas y condiciones de frontera en el modelo fotoelástico.

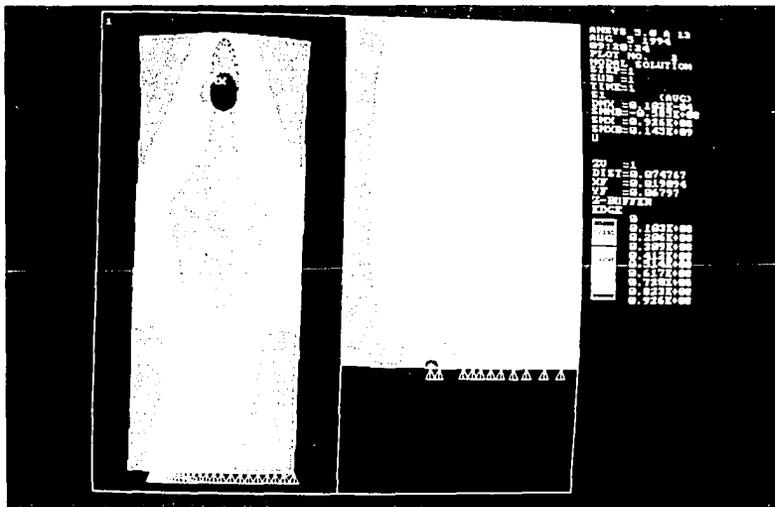
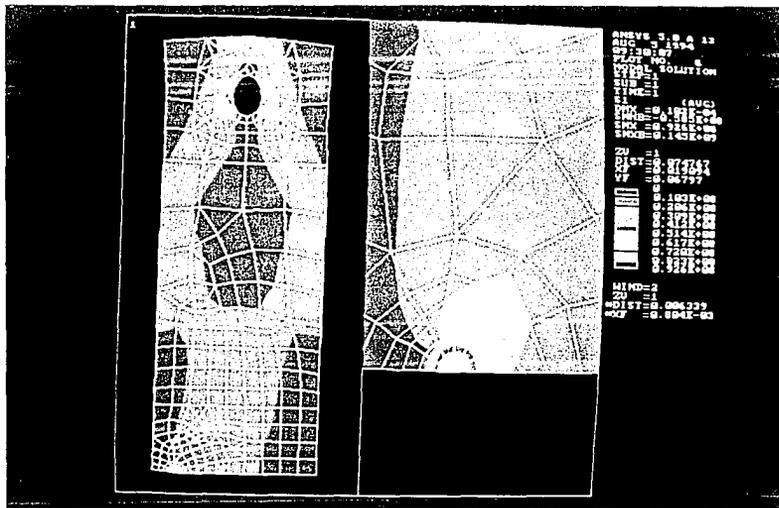


Figura 3.10
 Esfuerzos en el modelo fotoelástico.

En segundo lugar, el análisis con el programa BISTAT no incluye el uso de elementos con nodo desplazado en la punta de la grieta que simulen la singularidad del campo de esfuerzos.

En tercer lugar debe notarse que al efectuar el análisis experimental se utilizó un material que se supuso siempre frágil. En el programa de elemento finito aquí empleado esta consideración no es válida pues debido al espesor de la placa cabe esperar se presenten condiciones de esfuerzo plano y por lo tanto existe cierta cantidad no despreciable de deformación plástica, lo que requiere de cierta energía adicional cuya adición al realizar el análisis de ANSYS pudo llevar a un aumento en el valor de K_I .

Considerando el punto anterior se procedió a corregir el cálculo por elemento finito introduciendo una corrección semejante a la de Irwin (sección 2.5) según la cual la grieta, si el tamaño de zona plástica no es despreciable, se comporta como si fuera mayor de lo que en realidad es.

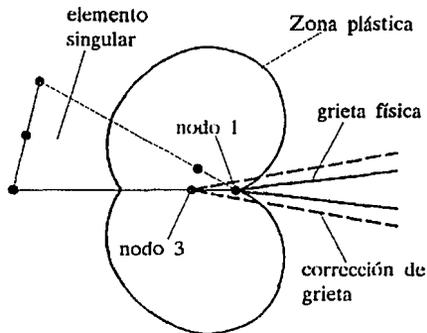


Figura 3.11
Corrección de la punta de grieta

Se debió calcular el tamaño esperado de la zona plástica, para lo que se empleó la fórmula siguiente, enunciada por [3.11]:

$$r_{yp} = \frac{K^2}{2\pi\sigma_{ys}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.1)$$

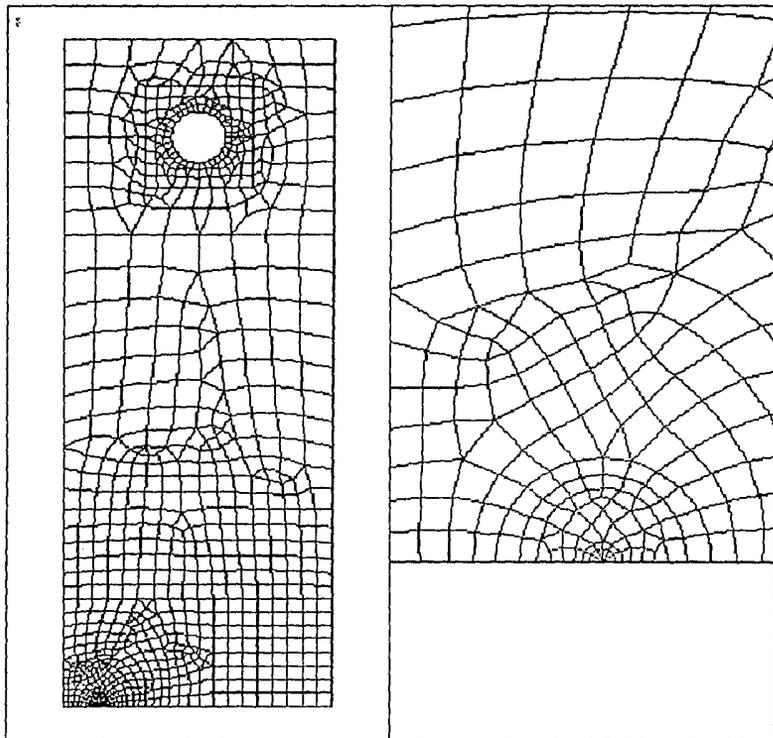
Así, sustituyendo los datos correspondientes la zona plástica mide 0.7 mm. Como la magnitud de los elementos singulares se calcula como 1/8 del tamaño de grieta, considerando que la grieta mide 7.00 mm. se deduce que éstos elementos miden 0.87 mm., por lo que el nodo desplazado queda a 0.22 mm. de la punta de grieta (1/4 L) y es el más cercano al centro de la zona plástica, por lo que la punta de la grieta corregida se ubicará en él, asumiendo así la presencia de una grieta mayor (fig. 3.11).

Se procedió a analizar la variación de los resultados debida al cambio en el tamaño de grieta considerado para verificar la convergencia. Se analizaron diversas combinaciones que mostraron una disminución en el valor obtenido del factor de intensidad de esfuerzos, misma que se explica debido a que introducida la corrección el parámetro ya no incluye la energía absorbida en la formación de la zona plástica. Se encontró así que se presentaba convergencia en ambos casos, con o sin corrección, hacia los valores $K_{I1}=17,205 \text{ MPa}\sqrt{m}$ y $K_{I1}=20,958 \text{ MPa}\sqrt{m}$ respectivamente.

Para comprobar que el tamaño de los elementos era adecuado se multiplicó la densidad de malla en un modelo adicional de 862 elementos y 2,644 nodos para el que la variación en los resultados fue inferior a 1%. La figura 3.12 muestra la malla obtenida en este nuevo paso de refinamiento.

Tabla 3.2
Análisis de convergencia al considerar la zona plástica

| $K_I \text{ [MPa}\sqrt{m}]$ | descripción |
|-----------------------------|---|
| 20,958.00 | nodos en las esquinas de los primeros elementos |
| 20,961.00 | tomando nodos más alejados |
| 17,205.00 | corrección de la punta de grieta |
| 18,815.00 | corrección, con nodos mas lejanos |



```
ANSYS 5.0 A 13  
13:12:04  
PLOT NO. 1  
ELEMENTS  
TYPE NUM  
ZU = 1  
DIST = 0.0715  
XF = 0.018  
YF = 0.065  
PRECISE HIDDEN  
HIND = 2  
ZU = 1  
*DIST = 0.01248  
*XF = 0.693E-0  
*YF = 0.006384  
CENTROID HIDE
```

Figura 3.12
Segunda discretización modelo fotoelástico

3.8.2 PRUEBA PARA LA DETERMINACIÓN DE K_{IC} SEGÚN EL MÉTODO DE ASTM.

La ASTM (American Society for Testing and Materials) ha desarrollado una prueba específica, ANSI/ASTM E-399-78 [3.12], para evaluar la tenacidad de fractura de un material sometido al modo I de carga y en condiciones de deformación plana. Aunque hay otras pruebas como la del BSI (British Standards Institute) BS 5447:1977 [3.13], estas son muy semejantes a la de ASTM, siguiendo un procedimiento similar y empleando probetas semejantes. La prueba se ha ido modificando a través del tiempo para incluir nuevas especificaciones, designando cada versión con los últimos dos dígitos del año en que se expidió.

Las pruebas ASTM y BSI consideran varios tipos de probeta distintos, entre los que destacan las siguientes: Probeta a flexión cargada en tres puntos, probetas compactas a tensión, y probetas en forma de "C". También especifica diversas muescas: tipo "chevron", tipo "straight through", o tipo "keyhole" (fig. 3.13). El procedimiento comienza maquinando la muesca en la probeta, la que a continuación se somete a cargas cíclicas que formen una grieta inicial por fatiga. Finalmente, aplicando una carga de tracción o de flexión se provoca la fractura.

Como puede deducirse del procedimiento, la prueba requiere de equipos sofisticados, incluyendo una máquina de pruebas con gran sensibilidad y respuesta instantánea al medir fuerzas y desplazamientos, y con capacidad de producir cargas cíclicas para crear la grieta por fatiga, así como un extensómetro especial que mida el desplazamiento relativo entre las caras de la grieta. Todos los equipos anteriores deberán conectarse al mismo equipo de registro que tendrá suficiente exactitud y velocidad de respuesta para monitorear adecuadamente cargas y desplazamientos.

En 1984 se efectuó en los laboratorios de ingeniería mecánica de la UNAM la prueba de ASTM según la versión ANSI/ASTM E-399-78 [3.12]. El reporte de la misma y de sus resultados, incluidos en [3.2], se utilizan a continuación como un segundo punto de validación para el método por análisis de elemento finito aquí analizado.

La prueba se realizó en una probeta compacta a tensión en la que se maquinó una muesca tipo keyhole cuya geometría y dimensiones se muestran en la figura 3.13. El material fue acero AISI 9840 ($E=2.1$ GPa y $\nu=0.3$) y se sometió a tratamiento térmico de templado y revenido, obteniendo un esfuerzo de fluencia igual a $\sigma_{yk}=1,449$ MPa. Se obtuvo una grieta por fatiga de 2.6 mm. Al efectuar la prueba los parámetros más notables son la magnitud de la carga de fractura, 38,710 Newtons y la velocidad con que esta se aplicó, 408.33 N/s.

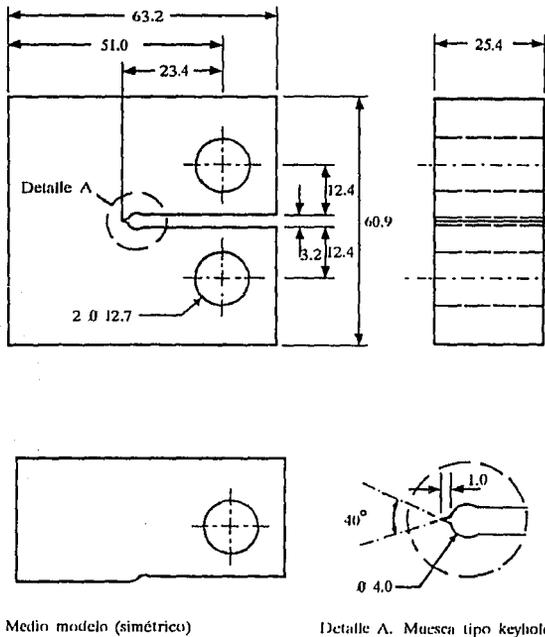
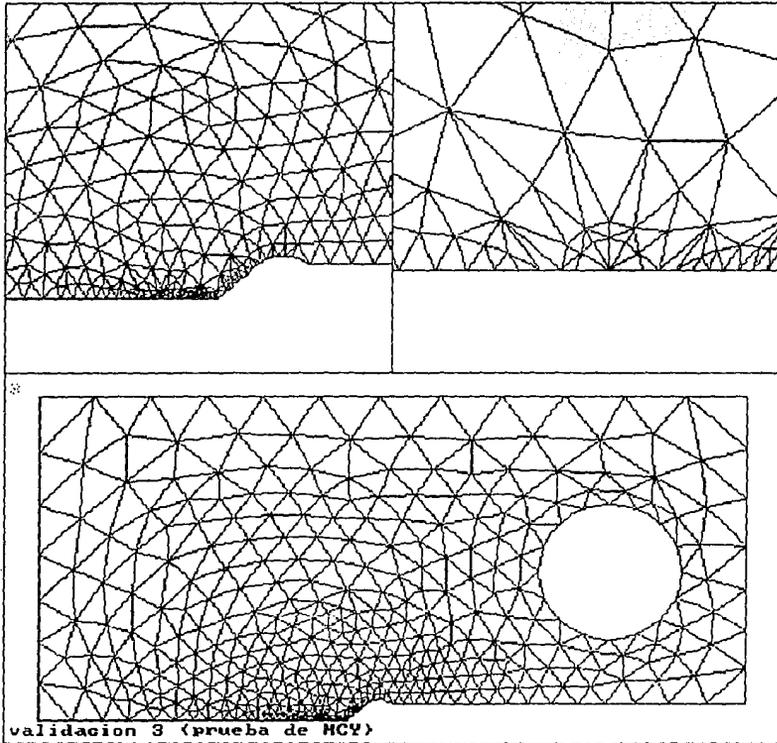


Figura 3.13
Dimensiones de la probeta ASTM según [3.2]. Dimensiones en mm.

Para evaluar el problema con ANSYS se creó una malla de 768 elementos y 1,652 nodos representando sólo la parte superior de la probeta, y empleando elementos especiales desplazados en la punta de la grieta y elementos isoparamétricos de 8 nodos para el resto del modelo. La malla se muestra en la figura 3.14, y reporta un error de 14.49.

La figura 3.15 muestra una nueva malla con mayor refinamiento, que mostró una variación mínima en los resultados, que tuvieron convergencia con los obtenidos con la malla anterior, cuyos resultados se consideraron por tanto válidos. En la figura 3.16 se presentan acercamientos en la vecindad de la punta de grieta en los que se muestra el campo de esfuerzos principales máximos. Pueden otra vez observarse los perfiles de esfuerzo descritos en la sección 1.6, figuras 1.8, 1.9 y 1.10. Se incluyen además las gráficas de esfuerzos de toda la placa y del modelo deformado.



```
ANSYS 5.0 A 13
AUG 3 1994
13:35:52
PLOT NO.      2
ELEMENTS
TYPE NUM

ZU = 1
*DIST = 0.008908
*XF = 0.0017
*YF = 0.005267
CENTROID HIDDEN

HIND = 2
ZU = 1
*DIST = 0.001905
*XF = 0.209E-03
*YF = 0.838E-03
CENTROID HIDDEN

HIND = 3
ZU = 1
DIST = 0.017353
XF = 0.00655
YF = 0.015225
CENTROID HIDDEN
```

Figura 3.14
Discretización de la probeta compacta, ensayo ASTM.

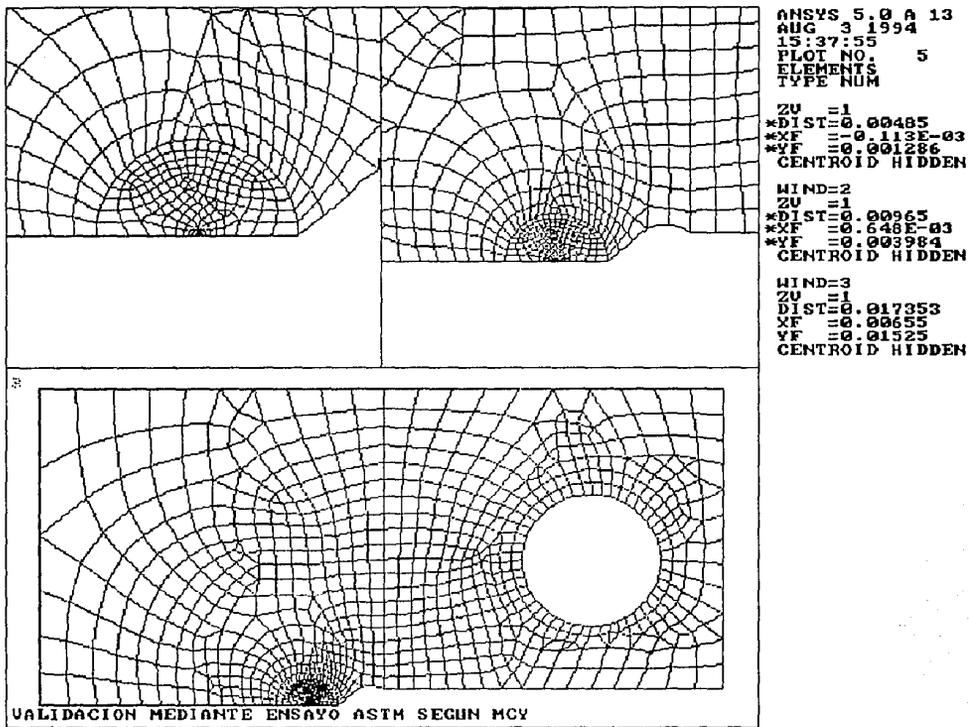


Figura 3.15
Segunda discretización probeta compacta: ensayo ASTM.

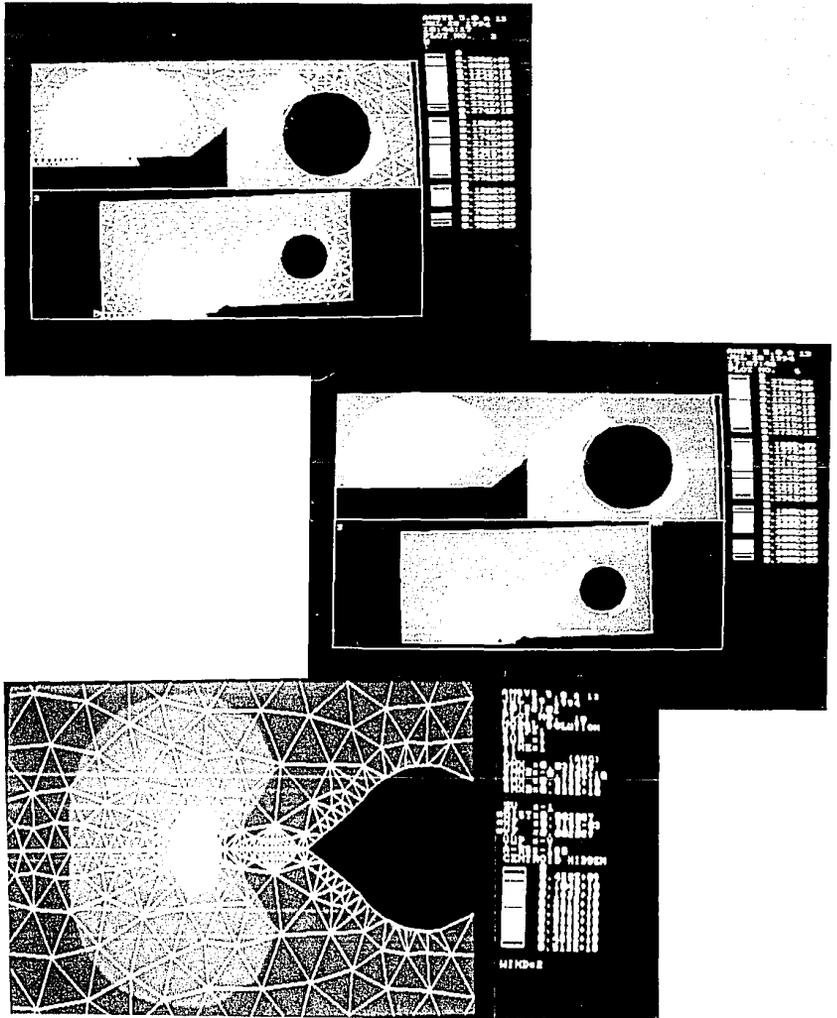


Figura 3.16
Esfuerzos en la probeta compacta: ensayo ASTM.

En la tabla 3.3 se muestran los resultados obtenidos, cuya diferencia representa un error de 7.35%, quedando la solución obtenida por ANSYS del lado conservador.

Tabla 3.3
Comparación de resultados prueba ASTM y ANSYS

| ANÁLISIS | VALOR DE K_{Ic} [MPa \sqrt{m}] |
|--|-------------------------------------|
| Ensayo ASTM según [3.2] | 67.48 |
| Análisis con ANSYS según metodología propuesta | 72.44 |

De acuerdo con [3.2] el tipo de fractura resultante en la probeta de experimentación presentaba labios de corte oblicuo de magnitud despreciable, lo que permite asegurar que el tamaño de la zona plástica es mínimo, predominando el caso de deformación plana. Esto muestra coherencia con las conclusiones obtenidas en el punto 3.8.1, pues al no presentarse esfuerzo plano la zona plástica es despreciable y se hace innecesario efectuar corrección alguna, pudiendo considerar el resultado obtenido como válido.

3.9 EXACTITUD EN CÁLCULOS DE FRACTURA.

En este punto, para dar una idea de la exactitud obtenida con la metodología propuesta, es conveniente señalar que esta en las predicciones de cargas de fractura es relativamente baja a consecuencia de las variaciones en las propiedades de los materiales. Al examinar los resultados obtenidos en pruebas se observa que el cálculo del factor de intensidad de esfuerzos crítico basándose en datos puntuales presenta una considerable dispersión. Por otro lado, al utilizar un valor promedio para los cálculos se obtendrá un valor intermedio cuya exactitud será también reducida. Basado en estos argumentos, Broek comenta [3.7]:

"Cualquier análisis de fractura que muestra resultados convergentes en un 10% para los esfuerzos de fractura esta probablemente proporcionando la mejor solución posible. Sofisticaciones costosas para obtener mejores resultados pueden ser ineficientes. Ya sea que el análisis usado sea tan simple como un análisis de falla o tan complicado como un análisis elastoplástico por elemento finito, la consistencia en las predicciones dentro de un margen de 10% es más significativo que la exactitud absoluta en un solo caso."

Ayudados en lo anterior, puede deducirse que los análisis realizados, mostrando errores de 7% a 2% que se mantenían iguales aún refinando la malla, están proporcionando un alto grado de exactitud.

3.10 CONCLUSIONES.

La metodología propuesta logra el objetivo fundamental de obtener un análisis de mecánica de fractura por el método del elemento finito, obteniendo una buena representación de la vecindad de la punta de grieta, con perfiles de isoesfuerzos correctos de acuerdo a lo esperado, y calculando el factor de intensidad de esfuerzos con precisión.

Al comparar los resultados obtenidos con resultados experimentales se prueba que se están estimando valores reales y que el método es confiable, si bien debe aclararse que como cualquier método numérico sus resultados están sujetos a interpretación y deben aceptarse después de un análisis crítico.

Gracias a la aplicación de un programa de elemento finito de la última generación la metodología resulta mucho más versátil y rápida que otras utilizadas anteriormente. La metodología en general permite varias opciones en todos los pasos críticos, en especial en lo referente a la generación del modelo y a su discretización.

Se comprueba que los resultados obtenidos se aproximan a los exactos dando la diferencia cierto factor de seguridad, por lo que puede afirmarse que el cálculo está del lado conservador.

Es importante destacar la importancia del espesor del modelo en el análisis, y la posibilidad planteada en la metodología de evaluar cuándo el caso amerita utilizar correcciones para aumentar la precisión del resultado obtenido. Esto exige del analista una buena concepción del fenómeno de fractura y de la influencia de factores como el espesor, el método de carga o las restricciones de desplazamiento, los cuales influyen de modo importante en los resultados.

Para optimizar el manejo de la memoria es importante la creación de regiones de interés para el refinamiento adecuado de la malla, lo que no sólo implica reducir el tamaño de elementos en zonas críticas sino también reconocer zonas que permitan utilizar elementos más grandes. Como se muestra, la mejora en exactitud de mallas muy refinadas no siempre se justifica, pues mallas menos refinadas obtienen resultados muy semejantes, requiriendo menores tiempos y costos.

3.11 REFERENCIAS.

- [3.1] Hernández, L.H. 1988. *Cálculo de factores de intensidad de esfuerzos por el método del elemento finito*. Informe parcial del proyecto 2496 "Análisis de mecánica de fractura" Instituto de Investigaciones Eléctricas.
- [3.2] Cisneros, Y.M., 1984. *Tenacidad a la fractura*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [3.3] Swanson Analisis Systems Inc. 1992. *The ANSYS program*. doc. MPB-A3-5/92
- [3.4] Zahavi E. 1992. *The finite element method in machine design*. Prentice Hall, New Jersey.
- [3.5] Swanson Analisis Systems Inc. 1992. *ANSYS 5.0 User's Manual Set*, docs R300:50-1 a R300:50-4
- [3.6] Henshell, R.D., and Shaw, K.G. 1975. Crack-Tip Finite Elements are Unnecessary, *international Journey for Numerical Methods in Engineering*, 9, pp.495-507
- [3.7] Broek, D. 1982. *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff publishers, third revised edition. p. 404.
- [3.8] Maxwell, J.C. 1853. On the equilibrium of Elastic Solids, *Trans. R. Soc. Edinburgh*, vol. XX, part 1, pp. 87-120.
- [3.9] Dally. J.W. 1991. *Experimental stress analysis*, Mac Graw Hill, Singapore.
- [3.10] CISE 3090 1986 Topical report. *Computer codes for two and three dimensional static stress analysis: Bistat-3 and Tristat-3*. Applied mathematics section and Mechanical engineering section.
- [3.11] Tuba, I.S. 1966. A method of elastic plastic plane stress and strain analysis, *J. Strain Analysis* pp. 115-122
- [3.12] ANSI/ASTM. 1978. *Standard test method for plane strain fracture toughness of metals*, ANSI/ASTM 399-78
- [3.13] British Standards Institution. 1977. *Methods of test for plane strain fracture toughness (K_{IC}) of metallic materials*, BS 5447:1977

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

4

APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA AL ANÁLISIS DE TUBERÍAS AGRIETADAS AXIALMENTE

Se utiliza la metodología para el análisis de cilindros agrietados axialmente y sujetos a presión interna, específicamente al caso de tuberías agrietadas, describiendo de modo general el problema y su peligrosidad, las consideraciones dictadas por la mecánica de fractura para el caso y las etapas seguidas para crear y analizar el modelo de elementos finitos tridimensional apropiado.

Aplicación de la metodología al análisis de tuberías agrietadas axialmente

4.1 GENERALIDADES.

En esta sección se aplica la metodología propuesta a un problema concreto, específicamente al análisis de un cuerpo cilíndrico con una grieta pasante orientada axialmente. Es un problema muy general pues puede aplicarse a una tubería conduciendo fluidos a presión, a un recipiente a presión, a un cañón militar o incluso puede ser un primer acercamiento al análisis de la vasija de un reactor nuclear.

Una de las fallas más severas en el caso de gaseoductos es la presencia de una grieta axial. Esta puede propagarse varios kilómetros deformando las paredes de una tubería, adquiriendo una especial peligrosidad cuando transporta materiales inflamables, pudiendo provocar cuantiosos daños materiales en zonas aledañas que se suman al costo de la tubería rota.

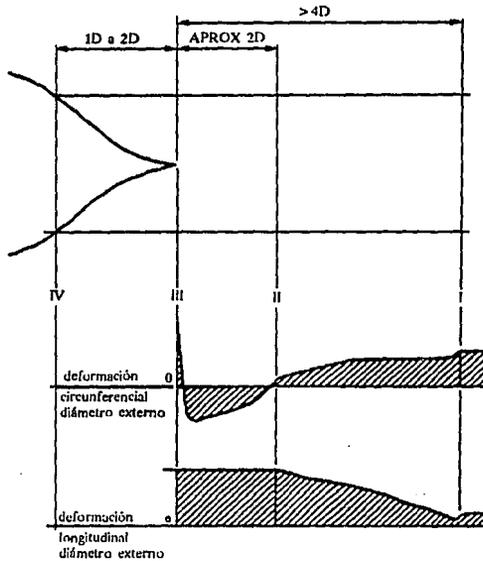
El caso más crítico en este tipo de falla es cuando ocurre por medio de una fractura frágil, y aunque el mecanismo de separación puede ser también dúctil dependiendo de la temperatura, en última instancia se suele considerar también frágil desde el punto de vista ingenieril pues la falla se asocia a muy poca deformación plástica y se propaga a alta velocidad. Se han reportado velocidades de propagación de grieta entre 600 y 1000 m/s en casos de falla frágil y de 100 a 300 m/s cuando el mecanismo de separación fue dúctil.

Las condiciones necesarias para detener la propagación de este tipo de fallas dependen principalmente de la naturaleza y compresibilidad del material transportado en la tubería [4.1]. Si se trata de agua, aceite, o algún otro líquido incompresible, la fuga ocasionada por la fractura provoca una inmediata caída de presión que reduce el esfuerzo tangencial causando una disminución en el factor de intensidad de esfuerzos siempre y cuando la reducción en el esfuerzo tangencial compense el incremento del FIS provocado por el aumento en el tamaño de la grieta.

Cuando el medio transportado es un gas la posibilidad de que la propagación de grieta se detenga depende de la velocidad a la que corre la grieta y de la velocidad acústica del gas (y de su onda de descompresión). Si la velocidad de propagación es igual o mayor que la velocidad de la onda de descompresión del gas, el efecto de reducción en el esfuerzo aplicado en la punta de la grieta no existe. Tomando en cuenta que la velocidad de onda acústica del gas natural es de 400 m/s se deduce que una falla frágil propagándose a 600 m/s no podrá pararse, en tanto que una falla dúctil con velocidad de 300 m/s podrá detenerse posiblemente.

La propagación de una grieta axial en una tubería de gran diámetro, transportando gas licuado, alcanza un comportamiento uniforme en el que avanza a velocidad constante y que puede ilustrarse con el modelo de la figura 4.1. Según [4.2], se presentan 4 zonas en las que los esfuerzos y deformaciones subsecuentes son:

Aplicación de la metodología al análisis de tuberías agrietadas axialmente



Distribución de deformaciones en la pared superior de una tubería durante la propagación de la fractura a velocidad constante

Figura 4.1 (tomada de [4.2])

- I. "En una sección alejada más de 4 diámetros de la punta de grieta los esfuerzos presentes, debidos a la presión interior en la tubería son biaxiales.
- II. Al acercarse a la punta de la grieta (2 diámetros), la aceleración radial de la pared del fondo de la tubería provoca que esta se deforme, adquiriendo una sección transversal ovalada.
- III. En la zona que se halla inmediatamente frente a la grieta el espesor disminuye antes de que la pared falle sin que haya una deformación tangencial importante.
- IV. Finalmente, atrás de la punta de la grieta, la reacción del gas en expansión que se fuga empuja las aletas que se forman en direcciones tanto radial como circunferencial, y la porción del fondo de la tubería hacia abajo. La presión del gas decrece hasta cero en una distancia aproximada de dos diámetros."

Aplicación de la metodología al análisis de tuberías agrietadas axialmente

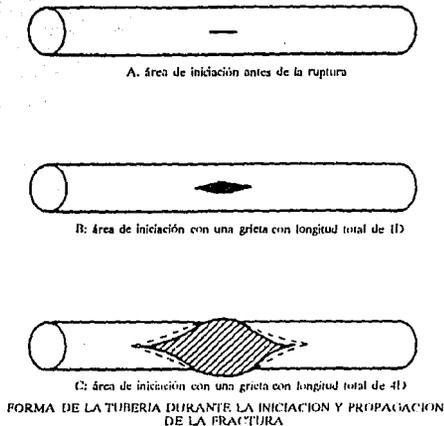


Figura 4.2 (tomada de [4.2])

tría permanece constante en la subsecuente propagación a velocidad constante. Se cree que esta deformación de las aletas tras la punta de la grieta es la que provee la fuerza principal que provoca la propagación de la grieta.

El estudio del problema descrito, del mecanismo de separación y de los esfuerzos involucrados se encuentra fuera del alcance de este trabajo. Experimentos dedicados a ello han demostrado que las deformaciones transitorias, presiones y desplazamientos ocurridos durante la iniciación, propagación y paro de estas fracturas son extremadamente complejos, siendo hoy un importante campo de investigación en la frontera del conocimiento. En los últimos 25 años se han destinado gran cantidad de recursos en diversos laboratorios para el análisis de este problema, desarrollando tres líneas de trabajo: El primero comprende la realización y análisis de pruebas a escala natural como [4.2-4.6] entre otros. El segundo utiliza pruebas a escala como [4.7], y finalmente, aplicando métodos de análisis numérico [4.8].

Sin embargo, el inicio de este tipo de falla, cuando la grieta no ha comenzado su propagación inestable, involucra la presencia de una grieta axial de tamaño aún no crítico y cuya severidad es evaluada aplicando los conceptos de la mecánica de fractura lineal elástica para determinar el factor de intensidad de esfuerzos presente. En este punto ocurre cierto abultamiento alrededor de la grieta, pero la deformación en la pared de la tubería está limitado aún por la rigidez estructural de la tubería. De acuerdo con las mediciones obtenidas, la grieta debe crecer hasta 1.5 veces el diámetro antes de que la

Se suceden tres etapas antes de que se alcance un comportamiento uniforme en la propagación de la grieta, mismas que pueden observarse en la figura 4.2. Cuando la grieta alcanza un tamaño total igual al diámetro de la tubería se presenta la configuración mostrada en la figura 4.2B, con cierto abultamiento que va aumentando hasta que, al llegar la grieta a una longitud cercana a 4 veces el diámetro, las dos puntas de grieta se encuentran suficientemente alejadas para que su influencia mutua sea mínima. La presión del gas empuja las paredes formando las aletas tras la punta de la grieta y desplazándolas hasta formar un canal en U cuya geometría

fuga de gas provoque alguna caída de presión observable [4.2]. Estos serán los principales puntos a considerar en el modelado del problema por elemento finito.

En estas condiciones el esfuerzo principal máximo esta en dirección tangencial. Este somete al material en la punta de la grieta a una carga muy semejante al modo I o de apertura, que como se mencionó en el capítulo 1 es el más crítico. Sin embargo, debido a la curvatura y a la presión que actúa en la pared interna tras la punta de la grieta, el comportamiento es algo más complejo. Por otro lado, los esfuerzos longitudinales presentes crean un estado de esfuerzos biaxial en la pared de la tubería.

Dependiendo del tamaño de grieta, del diámetro y espesor de la tubería y de la presión interna, se presenta un valor del factor de intensidad de esfuerzos que puede compararse con un valor análogo a la tenacidad a la fractura del material, aunque no idéntico debido a que, como se explicó, el modo de carga no es estrictamente el I. Como el caso de fractura frágil considerado en la evaluación de K_{Ic} es el más crítico, al utilizar este valor afectado por un factor de corrección M_F se obtiene, para las condiciones de operación, una evaluación del caso más drástico que puede presentarse, cubriendo otras posibilidades como el caso de falla dúctil o casos intermedios y asegurando así la confiabilidad del resultado obtenido, permitiendo así determinar el tamaño crítico de grieta que podrá tolerarse.

Al realizar el análisis del elemento finito para este problema no sólo se ilustrará la aplicación de la metodología propuesta sino que además se profundizará en el procedimiento a utilizar para casos tridimensionales, mostrando las complicaciones que un análisis de este tipo implica. Los resultados se compararán con soluciones analíticas propuestas en la literatura abierta.

4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El caso general de un cilindro agrietado sometido a presión interna puede modelarse considerando sólo una parte de la estructura original, pues existen condiciones de simetría tanto geométricas como de carga con respecto al plano de la grieta y perpendicularmente a este, permitiendo así reducir el problema al análisis de la sección sombreada en la figura 4.3.

En cuanto a las cargas y condiciones de frontera a aplicar, las superficies ubicadas donde se cortó el modelo original deberán simular la presencia del resto de la geometría. Por otro lado, el cilindro estará sujeto a presión interna. En el extremo libre del cilindro también se tienen superficies de corte y se debe simular el efecto causado en ellas. Esto se explicará con mayor detalle posteriormente, una vez generado el modelo.

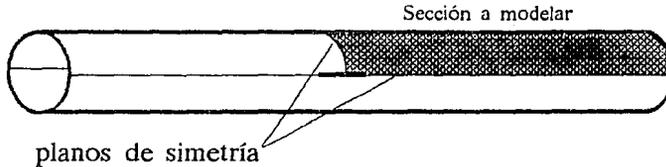


Figura 4.3 Sección a analizar.

El caso específico que se analiza es un cilindro de 20" cédula 40. Sus dimensiones son, según [4.9]:

Diámetro exterior = 20" = 0.508 m.

Diámetro interior = 18.814" = 0.478 m.

Espesor = 0.593" = 15 mm.

considerando una longitud de grieta igual a la mitad del diámetro medio: 0.2465 m. Estará sometido a una presión interna de 36.7 MPa, y las propiedades mecánicas del acero son: Módulo de young $E=2.1$ GPa y módulo de Poisson de $\nu=0.3$.

4.3 MODELADO

4.3.1 Geometría

La sección a analizar se subdivide en 6 zonas básicas según se muestra en la figura 4.4. Las secciones A y B modelarán la vecindad de la punta de la grieta, y por tanto se discretizarán con un mallado más fino. Las secciones C y D son de transición pues enlazan las secciones A y B con el resto del modelo por lo que también requerirán atención especial. Gracias a su geometría y a que no presentan cambios bruscos en el campo de esfuerzos, las zonas E y F podrán discretizarse fácilmente con una malla no muy fina. Finalmente, debido a la simetría de B y D con A y C bastará crear y discretizar dos de ellas. Posteriormente, reflejándolas, se obtienen las otras dos. Esto se logra cambiando el signo de alguna coordenada en todas las entidades que se desea duplicar, logrando una copia simétrica del original.

Se comenzará entonces modelando la sección A, para lo que se requerirá subdividirla nuevamente a fin de controlar mejor la discretización de la punta de la grieta. Los volúmenes resultantes se discretizarán y copiarán posteriormente. Esto facilita el procedimiento y mejora el aprovechamiento de la computadora pues se requiere de más recursos para generar una malla que para copiarla o reflejarla. Debido a que el ancho de banda de la matriz de rigidez es afectada por la diferencia entre los números asignados a cada elemento (ver capítulo 2, sección 2.2.4), conviene reflejar inmediatamente cada

Aplicación de la metodología al análisis de tuberías agrietadas axialmente

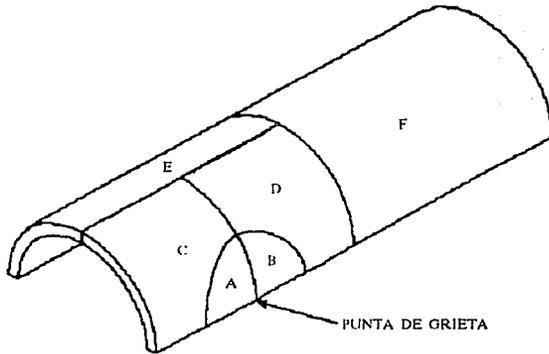


Figura 4.4 Subdivisión de la sección de tubería analizada

mallla creada, en lugar de discretizar toda la sección A-C y luego copiarla. Con esto se reduce la memoria requerida para los cálculos posteriores.

De acuerdo a las especificaciones descritas en la sección 3.5 (ver capítulo 3), los elementos especiales que modelarán la punta de grieta no deben estar excesivamente distorsionados, lo que limita el número de elementos a colocar alrededor de la línea que describirá la punta de la grieta. Por otro lado al discretizar las superficies comunes a las secciones A y C se requerirán más elementos, por lo que se necesita una zona intermedia discretizada con elementos con forma tetragonal que conecten los elementos especiales en la punta de la grieta con el resto del modelo.

De acuerdo a lo anterior, los volúmenes en los que se subdivide la sección A se obtienen creando primero dos secciones cilíndricas que se enlazan mediante operaciones booleanas, para obtener los volúmenes de intersección deseados como muestra la figura 4.5. Posteriormente se eliminan los volúmenes excedentes. Repitiendo el procedimiento se obtienen los volúmenes 1, 2, 3 y 4, adyacentes al volumen C (Figura 4.6) cuya geometría resulta conveniente para posteriormente discretizarlos, refinar las mallas obtenidas o incluso recurrir al submodelado.

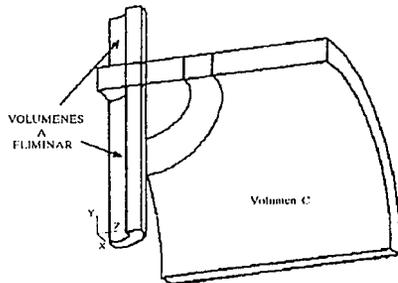


Fig. 4.5 División del volumen A

4.3.2 Discretización de la punta de la grieta

El volúmen situado en la punta de la grieta deberá discretizarse con especial atención, creando y colocando adecuadamente los elementos con nodo desplazado. Este volumen comprende dos partes: una que se modelará por generación directa con elementos especiales (volumen 1) y otra que servirá de base a la anterior y la comunicará con el resto del modelo (volumen 2).

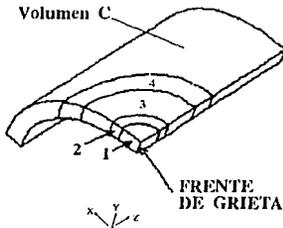


Figura 4.6 División del volumen A

formarán sus esquinas, así como cuáles deberán considerarse como nodos secundarios. Utilizando un mismo nodo para indicar dos esquinas se obtienen los elementos con la forma deseada. Al asignar los nodos desplazados como nodos secundarios el programa da un aviso de la ubicación anormal de estos, aclarando que esta es correcta si se busca indicar una singularidad.

Una vez creados todos los elementos especiales se procede a copiar sus nodos simétricamente con respecto al eje longitudinal del cilindro. En seguida se copian también los elementos, discretizando así la punta de grieta de la sección B. (Figura 4.7)

Se discretiza primero el volumen 2, colocando así los nodos que formarán las caras anteriores de los elementos especiales. A continuación se colocan dos nodos en los extremos del frente de grieta y a partir de ellos y de los del volumen 2 se controla la ubicación adecuada del resto de los nodos, desplazando los nodos intermedios a la cuarta parte de las líneas nodales, de acuerdo con la figura 3.5.

Los elementos a utilizar serán los bloques de 20 nodos, definidos de modo que formen prismas. Para esto se señalan los nodos que

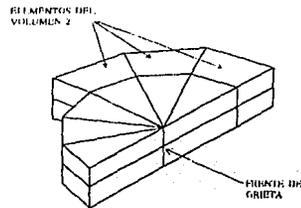


Figura 4.7 Elementos en el frente de grieta

4.3.3 Discretización del resto del modelo

Una vez creada la malla que modelará la vecindad de la punta de la grieta, se procederá a discretizar los volúmenes adyacentes a ella. Esto tiene la finalidad de ir creando zonas de transición entre los volúmenes que requieren de gran cantidad de elementos finitos y otras en las que se requiere usar elementos grandes.

Así pues, para conectar la zona en la punta de la grieta con el resto del modelo se deberá crear una región intermedia formada por los volúmenes 3 y 4, y aunque podría discretizarse con elementos tipo ladrillo de 20 nodos, deformados como prismas para obtener un mallado en mapa, esto haría necesario recurrir de nuevo a la generación directa, haciendo el proceso mucho más lento. Debido a lo anterior resulta conveniente discretizar el volumen 3 por mallado libre utilizando elementos con forma de tetraedros.

Es importante que antes de discretizar esta zona intermedia se discreticen las dos adyacentes pues de lo contrario la ubicación de los nodos en la superficies comunes no corresponderá entre un volumen y otro, lo que impediría conectarlos. Por otro lado, debido a su geometría, discretizar el volumen C en mapa presenta también complicaciones, por lo que se hace necesario contar con un volumen 4, que pueda discretizarse primero para que sirva de base al discretizar los volúmenes 3 y C.

Discretizar el volumen C requiere concatenar las dos áreas que forman la esquina opuesta a la punta de grieta (figura 4.8), así como las líneas que la forman para permitir su discretización con elementos con forma hexagonal. Concatenar dos o más áreas o líneas es crear entre ellas un tipo especial de unión que permita considerarlas como una sola durante la discretización de una entidad geométrica de mayor jerarquía. Esto es necesario debido a que para poder crear una malla por mapeo el programa requiere que esta esté delimitada por máximo cuatro líneas en el caso de áreas, o de seis áreas si se discretizan volúmenes.

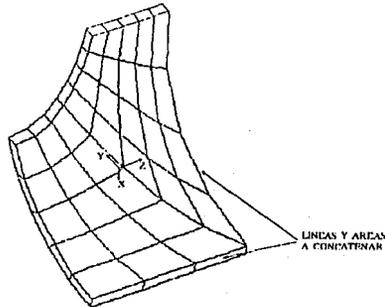


Figura 4.8
Discretización del volumen C

Finalmente, discretizar las secciones E y F resulta sencillo gracias a su geometría, debiendo cuidarse que sus nodos coincidan con los de las otras secciones. Uniendo los nodos coincidentes se obtiene el modelo de elementos finitos completo.

Así, se obtuvo un modelo de 392 elementos con 1,581 nodos, de entre los cuales 250 se concentraron en la sección A para modelar la punta de la grieta, esto es, el 63% del total de elementos. La figura 4.9 muestra un acercamiento a las zonas que rodean la punta de la grieta, aunque también se muestran algunos elementos de las secciones E y F.

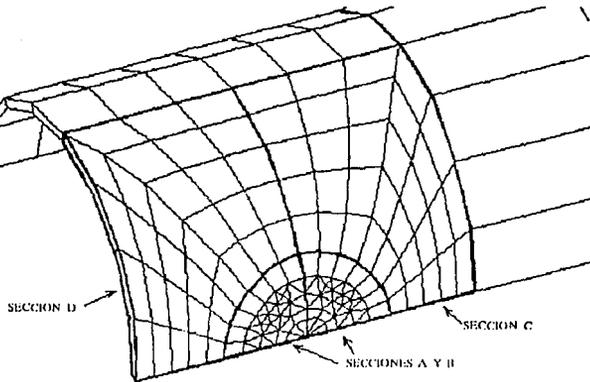


Figura 4.9
Discretización de la vecindad de la punta de grieta

4.4 CARGAS Y CONDICIONES DE FRONTERA.

En la figura 4.10 se muestra el modelo completo con las distintas cargas y condiciones de frontera consideradas. Se observan, en amarillo las restricciones al movimiento, en rojo la presión hidrostática en las paredes interiores del cilindro y en azul la carga axial resultante.

Las restricciones a aplicar son: Debido a que se está analizando sólo una sección del modelo completo, para describir el comportamiento de todo el cuerpo se debe restringir el desplazamiento perpendicular a las superficies de corte, dejando libre la superficie de la grieta.

A fin de evitar una singularidad en la matriz de rigidez, se hace necesario que haya por lo menos una restricción de movimiento en cada una de las direcciones principales. Las superficies comunes al resto del modelo generan restricciones en direcciones axial y circunferencial, pero se hace necesario colocar una más en dirección radial. Para evitar que esta afecte a la zona de interés en la punta de la grieta se colocará en la esquina opuesta a la superficie de la grieta. El punto A en la fig. 4.10 indica la posición de la restricción adicional en dirección radial.

Hay dos distintas cargas a aplicar; la primera es la presión a la que esta sometida la superficie interior del cilindro. La segunda esta relacionada con la carga resultante en dirección axial y se coloca en la superficie opuesta a la ubicación de la grieta. Su magnitud es igual a la fuerza de reacción en dicho extremo libre. Esta carga se distribuye uniformemente en toda la sección transversal de la pared del cilindro en su extremo libre.

Debido a que se utilizó la generación directa al discretizar la punta de la grieta, las restricciones y cargas en esta zona deberán aplicarse directamente a los elementos. La figura 4.11 muestra en un acercamiento las cargas y restricciones aplicadas en la vecindad del frente de grieta. Por otro lado, para el resto del modelo, es posible aplicar fácilmente las restricciones y cargas en las áreas afectadas. Posteriormente el programa, al comenzar la solución, las transfiere a los nodos y elementos.

4.5 OBTENCIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS.

La obtención del FIS requerirá primero generar el modelo de acuerdo con las condiciones enunciadas en el capítulo 3. De esta manera se logra que los elementos especiales modelen adecuadamente el comportamiento de la singularidad presente en la punta de la grieta.

Se define un sistema de coordenadas en el centro del frente de grieta de acuerdo a lo indicado en la figura 3.4b y se especifica cuáles nodos definirán la superficie libre de grieta, nodos en función de los cuales se calcula el FIS. Como se mencionó en el capítulo 3, hay varias posibilidades al elegirlos, y en este caso es conveniente ahondar un poco en esta decisión.

En el modelo tridimensional, el espesor de la pared del cilindro esta modelada por varias capas de elementos, por lo que puede calcularse un factor de intensidad de esfuerzos en cada capa. La variación de resultados dependiendo de cual de ellas se elija puede conducir a resultados inexactos. Para comprender estas variaciones obsérvese la distribución de esfuerzos presente en la zona de acuerdo a las figura 4.12, 4.13 y 4.14.

Debido a la presión interna ejercida sobre las paredes del tubo se presentan mayores esfuerzos en la cara interior de la pared de grieta, los que disminuyen a un mínimo en el exterior. El punto más crítico estará por tanto en la cara interna. Esto puede confirmarse obteniendo el valor del factor de intensidad de esfuerzos para las dos superficies, interior y exterior, así como para otra capa en el centro del cilindro. La comparación puede observarse en la tabla 4.1:

Figuras 4.13 y 4.14
Esfuerzos en la Punta
de grieta

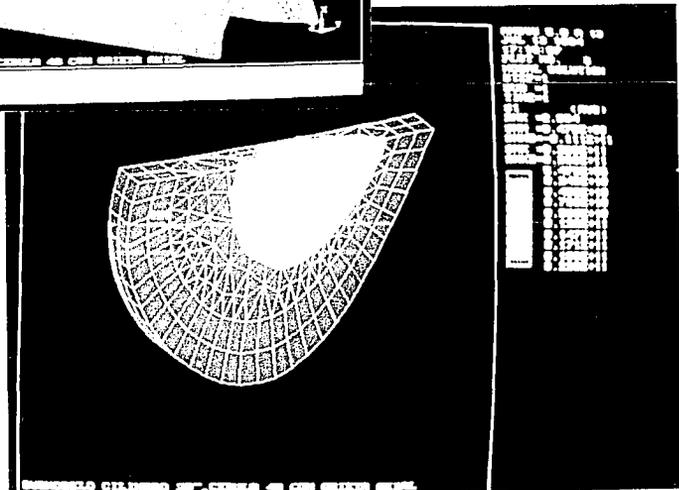
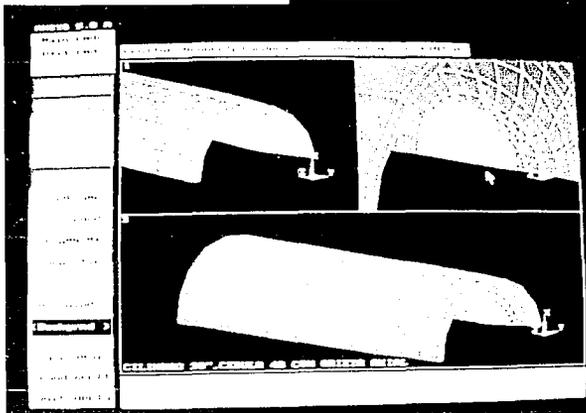
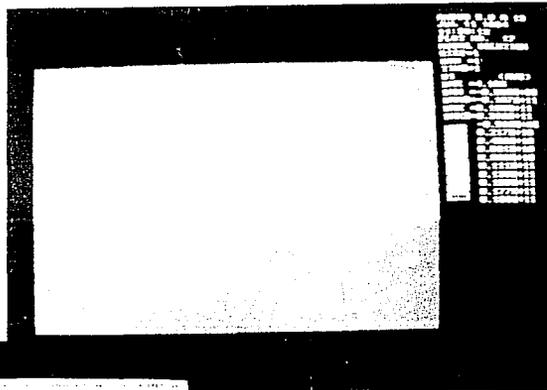


Figura 4.15
Esfuerzos en el
submodelo

Aplicación de la metodología al análisis de tuberías agrietadas axialmente

TABLA 4.1

| Capa de nodos utilizados calcular el FIS | Factor de intensidad de esfuerzos calculado con ANSYS |
|--|---|
| Nodos en la pared exterior | 2.24 [GPa \sqrt{m}] |
| Nodos en la mitad del espesor de pared | 2.27 [GPa \sqrt{m}] |
| Nodos en la pared interior | 2.29 [GPa \sqrt{m}] |

Como puede observarse, aunque la variación en los resultados resulta pequeña (2.2%), el valor obtenido en la cara interna es mayor, y es por tanto el valor más crítico, concluyéndose que, para el caso específico de recipientes cilíndricos el valor buscado es el que se presenta en la parte interna. La experiencia ha mostrado que en estos casos, generalmente las grietas se originan en la superficie interna y se propagan hacia el exterior [4.10].

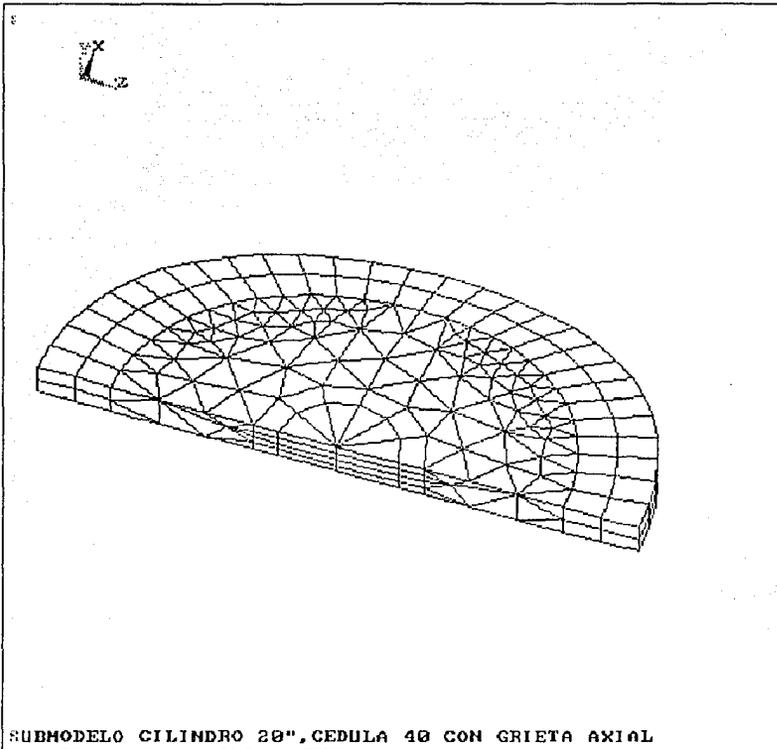
4.6 SUBMODELADO

Debido a limitaciones en la memoria de la computadora, a que se generaron archivos de hasta 40 megabytes en los análisis, y a que la versión con que cuenta en el IIE sólo puede manejar problemas en los que el ancho de la matriz banda no exceda 500 componentes, el análisis antes mencionado estuvo limitado, pues mayores refinamientos de malla no podían ser soportados por el equipo. Debido a esto se recurrió al submodelado, cuyos principios básicos se explican en la sección 3.4. Entre las ventajas del submodelado, además de optimizar el manejo de la memoria, están el ahorro de tiempo y la posibilidad de analizar por separado zonas de interés, en nuestro caso la punta de la grieta, sin necesidad de construir nuevamente todo el modelo.

El análisis por submodelado, con base en los resultados ya obtenidos, consistió en la reconstrucción de la zona A, utilizando los mismos volúmenes mostrados en la fig. 4.6 pero con un mayor refinamiento. La punta de la grieta, representada en el modelo original con 12 elementos especiales, quedó representada en el submodelo con 24, lo que sumado a un mayor refinamiento en los volúmenes 2 a 4 requirió de 998 elementos, casi cuatro veces los empleados para la misma zona en el modelo original, y 2,357 nodos. Esto implica que el análisis conjunto de modelo y submodelo abarca un total de 1,140 elementos y 3,343 nodos. El submodelo con la malla refinada se muestra en la figura 4.16, así como con la distribución de esfuerzos obtenida (fig. 4.15).

Realizado el nuevo análisis la variación de los resultados fué prácticamente nula, como se observa en la tabla 4.2, presentándose una variación de tan sólo 0.9%. Tomando en cuenta lo comentado en el punto 3.9 sobre la exactitud en los resultados, se concluye que el resultado obtenido en el primer análisis es satisfactorio. Adicionalmente se comprobó

Aplicación de la metodología al análisis de
tuberías agrietadas axialmente



```
ANSYS 5.0 A 13
AUG 3 1994
16:02:35
PLOT NO. 2
ELEMENTS
TYPE NUM

XU =-0.604023
YU =0.766044
ZU =0.219846
DIST=0.150584
XF =0.061625
YF =0.229305
A-ZS=-0.171E-05
PRECISE HIDDEN
```

Figura 4.16
Submodelo de la punta de grieta

Aplicación de la metodología al análisis de
tuberías agrietadas axialmente

la posibilidad de aplicar submodelado a casos complejos, aumentando en forma importante la capacidad del equipo con que se cuenta.

Por último, se aprovechó la mayor cantidad de elementos en el submodelo para ampliar los resultados de la tabla 4.1, confirmando así que el valor crítico del FIS se encuentra en la pared interior.

Tabla 4.2

| Capa de nodos utilizados para calcular el FIS | Factor de intensidad de esfuerzos |
|---|-----------------------------------|
| Pared externa. Submodelo | 2.1 [GPa \sqrt{m}] |
| Cuarta parte del espesor de pared. Submodelo. | 2.14 [GPa \sqrt{m}] |
| Mitad del espesor de pared. Submodelo | 2.22 [GPa \sqrt{m}] |
| Tres cuartas partes del espesor de pared. Submodelo | 2.28 [GPa \sqrt{m}] |
| Nodos en la pared interior. Submodelo | 2.31 [GPa \sqrt{m}] |
| Nodos pared interior. Modelo original | 2.29 [GPa \sqrt{m}] |

4.7 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Pueden encontrarse en la literatura diversas fórmulas para encontrar el factor de intensidad de esfuerzos que nos ocupa. La premisa básica para el análisis de recipientes cilíndricos a presión agrietados es, según [4.12]:

"Un recipiente cilíndrico a presión puede ser tratado como una placa plana (del mismo material, espesor y con la misma grieta pasante del recipiente) cargada a tensión colocando un esfuerzo nominal σ en la placa que sea un múltiplo M_F del esfuerzo tangencial σ_r :

$$\sigma = M_F \sigma_r \quad (4.1)$$

Donde M_F esta en función de la longitud de grieta a , del radio del recipiente, R y del espesor de pared H ."

Entre las distintas expresiones para calcular M_F , destaca la obtenida por Folias [4.11], cuya validez se apoya en los resultados obtenidos en importantes programas de experimentación a escala real realizados por Duffy, Eiber, Maxey y Kiefner [4.12-4.15], y que se enuncia a continuación:

$$M_F = \sqrt{1 + 1.61 \frac{a^2}{RB}} \quad (4.2)$$

Aplicación de la metodología al análisis de
tuberías agrietadas axialmente

El factor de corrección, obtenido por Folias, corrige la ecuación del FIS para el caso de tuberías agrietadas, según la ecuación:

$$K_I = M_F \sigma_T \sqrt{pa} = \frac{PR}{B} \sqrt{\left(1 + 1.61 \frac{a^2}{RB}\right) \pi a} \quad (4.3)$$

Donde: σ_T Esfuerzo tangencial

A continuación se listan algunas otras soluciones encontradas en la literatura, comparadas con la solución obtenida:

TABLA 4.3

| Fórmula | FIS | Fuente |
|---|-----------------------|--------|
| $M_F = \sqrt{1 + 1.61 \frac{a^2}{RH}}$ | 2.78 $GPa\sqrt{m}$ | [4.11] |
| $M_F = \sqrt{1 + 1.61 \frac{a^2}{R^2} \left(50 \tanh \frac{R}{50H}\right)}$ | 2.73 $GPa\sqrt{m}$ | [4.11] |
| Resultado obtenido con ANSYS | 2.26 $GPa\sqrt{m}$ | — |
| $M_F = \sqrt{1 + 1.255 \frac{a^2}{RH} - 0.0135 \frac{a^4}{R^2 H^2}}$ | 2.25 $GPa\sqrt{m}$ | [4.16] |
| $M_F = \sqrt{1 + 9.2 \frac{a}{R}}$ | 1.7 $GPa\sqrt{m}$ | [4.17] |
| $M_F = \sqrt{1 + 0.81 \frac{a}{\sqrt{RH}}}$ | 1.58 $GPa\sqrt{m}$ | [4.18] |

El resultado obtenido muestra convergencia con la ecuación de Folias y con otras más. Cabe mencionar que debido a la complejidad que presenta la distribución de esfuerzos las soluciones obtenidas por fórmula son en cierta medida empíricas, y su exactitud esta aún sujeta a verificación. Sin embargo, los resultados de Folias y de Wanhill son los más utilizados.

Estos resultados pueden utilizarse para calcular diversos parámetros que permitirán evaluar la criticidad de la fractura modelada, el daño causado a la tubería original y las consecuencias que se esperan. Partiendo del factor de intensidad de esfuerzos obtenido, y tomando las consideraciones enunciadas al principio, de las dos fuerzas principales que causan la propagación de la fractura, la originada por la presión interna (esfuerzo tangencial) y la provocada por la fuga de gas empujando las aletas tras la punta de grieta, en el inicio de la propagación sólo interviene la primera, pues como se mencionó la

deformación en la superficies de grieta aún no permite una fuga importante del fluido transportado.

En estas condiciones, el factor de intensidad de esfuerzos obtenido permite encontrar el máximo esfuerzo tangencial y la correspondiente presión máxima que soportará la tubería sin que el esfuerzo en la punta de la grieta provoque una propagación inestable. Con este resultado pueden establecerse las condiciones de operación límite con las que podría seguir operándose la tubería.

Otra posible aplicación involucra el empleo de M_F , pues según [4.12]:

"... El esfuerzo tangencial crítico para la extensión de grieta en el recipiente a presión, σ_r^* puede entonces ser descrito en términos de σ^* , el esfuerzo nominal para extender la grieta en una placa plana:

$$\sigma_r^* = \sigma^* / M_F."$$

El resultado obtenido con ANSYS puede ser una referencia al elegir entre las distintas expresiones para calcular M_F y obtener así un factor de intensidad de esfuerzos crítico aplicable al análisis mediante mecánica de fractura lineal elástica, si bien deberá cuidarse el aspecto relacionado con la velocidad de aplicación de carga en la prueba en la que se determine K_{Ic} .

4.8 CONCLUSIONES

La aplicación práctica de la metodología muestra la importancia de la concepción física del problema para su correcto análisis y para interpretar los resultados. El problema que se estudia es aún objeto de investigaciones y su complejidad ha impedido obtener aún resultados concluyentes y definitivos.

Esto obliga al analizarlo a recurrir a documentos publicados en revistas especializadas pues aún son pocos los libros que profundizan en este campo, lo que me permitió observar la importancia y trascendencia de la comunicación entre investigadores mediante publicaciones periódicas que permiten mantenerse actualizado con los últimos avances científicos a nivel internacional.

Por otro lado, la complejidad de problema y el nivel de avance en las investigaciones realizadas al respecto complican la comparación de los resultados obtenidos pues como se mencionó, las soluciones analíticas disponibles en la literatura están aún sujetas a verificación, aplicándose con certeza en casos muy específicos.

Esto permite apreciar la posibilidad de emplear herramientas como el método del elemento finito como auxiliar en la investigación y obtención de resultados prácticos. Sin

embargo, y debido a lo anterior, el problema involucra un grado de complejidad apreciable.

Al requerirse necesariamente un análisis en tercera dimensión la aplicación del método se complica en forma significativa. El correcto manejo de la geometría, de sistemas de coordenadas y de las gráficas creadas es indispensable para lograr la representación adecuada de la realidad, en este caso en un grado mucho mayor que cuando se analizan problemas bidimensionales, exigiendo del analista una mayor capacidad de abstracción espacial.

Por otro lado, la complejidad de la geometría y de las mallas requeridas complican la discretización, que debe ahora realizarse por etapas obligando a subdividir el modelo, y a plantear toda una estrategia que permita la colocación adecuada de los elementos cumpliendo simultáneamente con las limitaciones dictadas por la capacidad de los equipos con que se cuenta.

La aplicación de las restricciones y cargas debe realizarse con cuidado, pues implica comprender el comportamiento de estructuras cilíndricas, de cascarones y de recipientes con pared gruesa, obligando al analista a profundizar en los conceptos fundamentales de diseño y análisis de recipientes a presión.

Una revisión de la literatura referente al problema muestra la importancia que adquiere la aplicación de análisis numéricos para encontrar soluciones ingenieriles en el diseño y también en el análisis de estructuras de este tipo, en los que la exactitud de los resultados esta ligada tan estrechamente con aspectos como la seguridad y economía de grandes y costosos sistemas y equipos.

4.9 REFERENCIAS

- [4.1] Broek, D., 1982. *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff publishers.
- [4.2] Ives, K.D., Shoemaker, A.K., McCartney, R.F., 1974. Pipe Deformation During a Running Shear Fracture in Line Pipe, *Transactions of the ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, pp. 309-317
- [4.3] Fearnough, G.D., Jude, D.W. and Weiner, R.T., 1971, *The Arrest of Brittle Fracture in Pipelines*, Practical applications of fracture Mechanics in Pressure Vessels Technology, Proc. Instn. Mech. Engrs., London, pp. 156-162
- [4.4] Hood, J.E., and Jamieson, R.M., 1973. Ductile Fracture in Large-Diameter Pipe. *Journal of the Iron and Steel Institute*, pp. 369-373
- [4.5] Shoemaker, A.K., McCartney, R.F., Pipe Deformation During a Running Shear Fracture in Line Pipe, *Transactions of the ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, pp. 318-322
- [4.6] Bonomo, F., Bramante, M., Spedaletti, M., 1981. Ductile Fracture Propagation in Pipelines: Results of Instrumented Full-Scale burst Tests on 48" and 56" Diameter Pipes for Gas Transmission, *Analytical and Experimental Fracture Mechanics*, Ed. G.C. Sih and Mirabik. Sijthoff-Noordhoof. pp. 567-578
- [4.7] Almond, E.A., Petch, N.J., Writh, E.A. and Wright, E.S., 1969. The Fracture of Pressurized Laminated Cylinders. *Journal of the Iron and Steel Institute*. pp. 1319-1324
- [4.8] Owen, D.R.J. and Shantaram, D., 1977. Numerical Study of Dynamic Crack Growth by the Finite Element Method, *Int. Journal of Fracture*. pp. 821-837
- [4.9] Rase, H.F., 1973, *Diseño de tuberías para plantas de proceso*, Ed. Blume, España, p.51
- [4.10] Wilkowski, G.M., et al, 1992. Short cracks in Piping and Piping Welds, Semiannual report April-September 1992, *Batelle, NUREG/CR-4599, U.S. Nuclear Regulatory Commission*, Vol2, No. 1.
- [4.11] Folias, E.S., 1965. A finite line crack in a pressurized spherical shell, *International Journal of Fracture Mechanics*. p.104
- [4.12] Duffy, A.R., et al, 1969, *Fracture design practices for for pressure piping*, fracture V, Liebowitz, Ed., Academic Press pp. 159-232.
- [4.13] Einer, R.J., et al, 1971. *Further work on flaw behavior in pressure vessels*, Conf. on practical applications of fracture mechanics to pressure vessel technology.
- [4.14] Maxey, W.A, et al, sin fecha, *Experimental investigations of ductile fractures in piping*, Batelle Columbus Report.
- [4.15] Kiefner, J.F., et al., 1971. *Recent research on flaw behavior during hydrostatic testing*, AGA Operating Sect. Transm. Conf., Houston.
- [4.16] Ewalds, H.L., Wanhill, R.J.H., 1989. *Fracture Mechanics*, Edward Arnold Pub. p.53
- [4.17] Peters, R.W., Kuhn, P., 1957. *Bursting strength of Unstiffened Pressure Cylinders with Slits*, NACA TN 3993.
- [4.18] Crichlow, W.J., Wells, R.H., 1967. *Crack propagation and Residual Static Strength of Fatigue-Cracked Titanium and Steel cylinders*. ASTM STP 415, p.25.

- [4.19] Hahn, G.T., Sarrate, M., Rosenfiel, A., 1969. Criteria for crack extension in Cylindrical Pressure Vessels. *International Journal of Fracture Mechanics*. pp. 187-210.
- [4.20] Kaninen, M.F., Popelar, C.H., 1985. *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford engineering science series 15.

CONCLUSIONES

El presente trabajo se enfoca al análisis de cuerpos agrietados, procurando dar a la metodología propuesta el mayor rango de aplicación y flexibilidad posibles mediante la aplicación de la mecánica de fractura lineal elástica y del método del elemento finito, pudiendo analizar prácticamente cualquier estructura, independientemente de su geometría o de las condiciones de carga a las que este sujeta. Sin embargo el análisis encuentra su principal aplicación en aquellas estructuras cuyos materiales tiendan a comportarse frágilmente bajo las condiciones de operación normales.

La aplicación de la mecánica de fractura amplía mucho su potencial gracias al empleo del método de elemento finito, pues la flexibilidad de este último permite analizar casos de geometrías complejas con diversas condiciones de carga y frontera, cuya solución analítica es difícil obtener. Es importante mencionar que hay problemas que hasta ahora sólo pueden ser tratados con el método del elemento finito.

A pesar de la versatilidad que ofrecen los programas de elemento finito de la última generación, este tipo de análisis exige del analista el conocimiento de sus limitaciones, así como de las herramientas que ofrece el paquete manejado, pues si el modelado de un componente estructural puede ser de por sí complejo, la inclusión de grietas en el problema lo complica aún más. Por otro lado, no puede perderse de vista el hecho de que, a pesar de su exactitud, versatilidad y capacidad de análisis, el método del elemento finito sigue siendo una herramienta.

La aplicación del método del elemento finito a problemas reales involucra el empleo de muy diversos conocimientos. Para poder representar la geometría a analizar se requiere aplicar conocimientos de geometría descriptiva y de geometría analítica, haciéndose indispensable un buen conocimiento de los distintos tipos de sistemas de coordenadas, ejes, escalas y características de entidades geométricas diversas para permitir un manejo ágil de las herramientas de graficación del programa.

Los programas de elemento finito son una aplicación mucho más sofisticada que cualquier paquete de dibujo, por lo que además de los necesarios antecedentes de geometría y dibujo técnico el manejo adecuada del programa involucra por lo menos el entendimiento básico de la parte matemática involucrada, que incluye conceptos de álgebra matricial, cálculo vectorial, lógica matemática y algebra de boole, por mencionar algunos.

Como cualquier herramienta de análisis numérico, el empleo del MEF puede llevar al analista a resultados erróneos o poco realistas si no cuenta con buenas bases en la materia en cuya aplicación específica se emplea el método. Estas bases deben proveer la sensibilidad y criterios que permitan encontrar bases que garanticen la aplicabilidad de los resultados, o que en su caso lleven a una revisión más profunda del problema para obtener resultados reales.

Entre las bases necesarias en la aplicación que nos ocupa destacan la mecánica de sólidos, la resistencia de materiales y la mecánica de la fractura, sin las cuales el empleo del método se hace imposible, convirtiéndolo en una caja negra cuyos resultados no garantizan ninguna confiabilidad.

Otros conocimientos con que debe contar el analista son aquellos relacionados con el manejo de archivos y memoria en la computadora. Debido a la cantidad de archivos necesarios durante el análisis es necesario saber identificar su importancia y determinar cuáles de ellos deben conservarse.

El dominio exigido en el manejo del método del elemento finito no es suficiente para las aplicaciones que nos ocupan. Su aplicación a problemas de mecánica de fractura presenta exigencias que obligan a conocer bien sus posibilidades y limitaciones. Muchas de las opciones que ofrece el paquete han sido preparadas para el diseño mecánico, y no para análisis de daños detectados en estructuras. La comprensión de los conceptos de mecánica de fractura son los que proporcionan en este caso los criterios a seguir. Las decisiones respecto al planteamiento del problema, a la estrategia de modelado, y a la interpretación y evaluación de resultados que se deben tomar son realmente el centro de la aplicación y responsabilidad del analista.

Aunque la aplicación de herramientas de análisis gráfico exigen una mayor capacidad de abstracción espacial, ofrecen grandes ventajas pues facilitan al analista la visualización del problema, tanto como un conjunto como en sus detalles, especialmente en problemas tridimensionales, permitiéndole efectuar cambios y adaptaciones, modificar las condiciones de carga o de frontera. También son un valioso auxiliar en la interpretación de los resultados, permitiendo identificar con facilidad zonas críticas y analizando problemas de diseño o aplicación a fin de dictar medidas correctivas necesarias.

Los límites principales a los que esta sujeta la metodología propuesta atañen por un lado a la aplicación, y por otro a la capacidad. El alcance teórico de la metodología abarca el campo de la mecánica de fractura lineal elástica, aplicada principalmente al análisis de la criticidad de fallas detectadas o supuestas en componentes estructurales, pero no contempla casos no lineales ni dependientes del tiempo. Por otra parte, la capacidad del equipo de cómputo impide el tratamiento de problemas muy complejos que exijan gran capacidad de memoria o que generen anchos de banda mayores a 500 columnas en la matriz de rigidez.

Al aplicar la metodología se hace necesario un periodo de refinamiento tanto en la aproximación utilizada para analizar el problema como para el modelado del mismo, cuya duración depende de la complejidad que represente el modelo. Esto repercute directamente en el tiempo y costo que un análisis de este tipo implica.

A pesar de sus limitaciones por capacidad y velocidad, la posibilidad de contar con un paquete de elementos finitos del tipo de ANSYS en computadoras personales amplían mucho su difusión, pues además de disminuir de modo importante los costos involucrados

en su aplicación, dotan al analista de una mayor autonomía, abriendo a profesionistas independientes la posibilidad de emplear este tipo de recursos avanzados, antes limitados a grandes compañías y centros de investigación que contaran con gran capacidad de cómputo.

Un aspecto interesante es la posibilidad de efectuar análisis paramétricos que puedan utilizarse para diversos casos particulares. Así por ejemplo, para el caso de tuberías agrietadas, pueden especificarse variables para especificar el radio de la tubería, su espesor, el tamaño de grieta y las propiedades del material, de modo que posteriormente, cambiando los valores especificados, puedan realizarse distintos análisis aprovechando los mismos criterios, lo que reduciría mucho los tiempos necesarios.

Los análisis realizados en esta tesis probaron la utilidad de error estimado que calcula el programa, por lo que puede utilizarse como un criterio válido para determinar hasta que punto debe refinarse la malla. Como se menciona en el capítulo 3, el grado de error se ve influenciado, aparte de por el tamaño de los elementos en las regiones críticas, por el tipo y distribución de las cargas aplicadas y por la distorsión de los elementos.

La complejidad del método queda sin embargo justificada al analizar los resultados obtenidos y comparar las ventajas en tiempo y por tanto en costo que ofrece este tipo de herramientas contra otras opciones aplicables a problemas con grietas. Dependiendo de la complejidad del problema es posible obtener en relativamente poco tiempo resultados confiables sin necesidad de complejos análisis matemáticos.

Aunque en ocasiones sigue siendo necesario recurrir a la experimentación al resolver este tipo de problemas, el empleo de técnicas como el método del elemento finito permiten un mejor planteamiento y planeación del trabajo, aumentando la eficiencia del trabajo experimental al proporcionar pautas específicas a seguir o puntos a aclarar.

Entre los posibles trabajos a desarrollar para continuar este trabajo en un futuro se encuentran el análisis de estructuras más complejas, el análisis de propagación de grietas por fatiga o el acoplamiento con programas de CAD por medio de archivos con el formato IGES.