2 9
2 Gem

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACION DE PRODUCTOS DERIVADOS Y VERIFICACION DE SUPUESTOS

T E S I S

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

RODOLFO GUTIERREZ SALAS

México, D. F. 1994

CIUDAD UNIVERSITARIA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realizó el pasante Sr. Rodolfo Gutiérrez Salas con número de cuenta 8626554-4 con el título: "VALUACION DE PRODUCTOS DERIVADOS Y VERIFICACION DE SUPUESTOS"

Consideramos que reune___ los méritos necesarios para que pueda continuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de - Actuario.

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
ACT. ALBERTO DE LA ROSA ELIZALDE Director de Tesis	
ACT. HECTOR DE LA ROSA ELIZALDE	
ACT. MA. ELENA ISLAS VAZQUEZ	
ACT. GUILLERMO YAÑEZ ZUÑIGA	
Suplente ACT. ENRIQUE ZAPIEN DIAZ Suplente	

Ciudád Universitaria, D.F., a 7 de julio de 1994

ÍNDICE

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la presente tesis es la revisión de técnicas matemáticas refinadas para el análisis y la valuación de diferentes productos financieros, que actualmente se utilizan para la cobertura de activos financieros que se encuentran expuestos a diferentes riesgos, y que hoy en día no son utilizados con frecuencia por diferentes razones.

El marco que se presenta en la siguiente obra esta enfocado a los productos financieros conocidos como productos derivados, los cuales podemos definir como un activo financiero cuyo valor depende de variables mas básicas. En años recientes la negociación de estos productos derivados ha crecido enormemente en los mercados internacionales. En esta primera estancia mencionaré algunos de los productos derivados más conocidos y populares en los mercados internacionales como: Futuros y Opciones.

La opción, desde luego, es uno de los instrumentos más complicados de valuar por la asimetría del riesgo inherente; es por esta razón que se desarrollará el modelo de Black and Scholes con gran detalle para después proponer pruebas estadísticas para verificar los supuestos más importantes sobre el que se basa el modelo de Black and Scholes. Por último se darán algunas de las aplicaciones para los productos derivados.

CAPITULO II

CONTRATOS FUTUROS

Un contrato futuro es un acuerdo para comprar o vender un activo en el futuro a un cierto precio. A la persona que acuerda comprar se dice que tiene una posición en largo en un contrato futuro, y a la persona que acuerda vender se dice que tiene una posición en corto en un contrato futuro. Actualmente este tipo de contratos se negocian principalmente en bolsas norteamericanas como The Chicago Board of Trade, The Chicago Mercantil Exchange etc., en México actualmente no existe un mercado para negociar este tipo de instrumentos.

HISTORIA

El mercado de futuros nació en Chicago a mediados del siglo XIX[1], originalmente este mercado fue desarrollado para satisfacer las necesidades de los granjeros y los intermediarios. En ese entonces los granjeros se encontraban expuestos a la fluctuación de precios de granos, es por esta razón, que en ocasiones el precio que recibían por su producto era demasiado bajo para cubrir sus gastos y de igual manera los intermediarios se encontraban expuestos a una alza en los precios del producto, es por situación que se establece The Chicago Board of Trade y The Chicago Produce Exchange que

[1] Los orígenes de los futuros encuentran sus raíces en Grecia y Roma

posteriormente se llamó The Chicago Mercantil Exchange, cuyo propósito era manejar las transacciones al contado y realizar contratos "al arribo". Dichos contratos en esencia eran contratos "adelantados" que especificaban la cantidad de grano y su precio para entregar en una fecha futura.

Uno de los hechos más trascendentes en la negociación de contratos futuros fue el establecimiento de la "Casa de compensación", la cual no sólo rompió el vínculo entre comprador y vendedor, sino que permitió estandarizar los contratos. El hecho de haber roto el vínculo entre comprador y vendedor permitió a éstos eliminar el riesgo de crédito, ya que legalmente el comprador y el vendedor para ambas partes es la Casa de compensación, la cual es tan segura que desde que se estableció ninguna parte ha perdido dinero en su posición en futuros por incumplimiento en los contratos. En este punto sólo cabe señalar que este hecho es debido al establecimiento de varios tipos de márgenes, los cuales son requeridos cuando alguien toma una posición en un contrato futuro.

Durante la segunda mitad del siglo XX los contratos no tuvieron un gran desarrollo debido a que los mercados se mantuvieron muy estables, teniendo como consecuencia una exigencia de cobertura muy reducida y oportunidades de especulación también reducida. Durante la década de los 60´s, las bolsas de futuros estadounidenses se expandieron al ofrecer una gran variedad de futuros, pero debido a la poca volatilidad de precios no tuvieron un gran éxito. No fue hasta 1972 ante el colapso del sistema Bretton Woods de tipos de cambios fijos y el inicio de una época de gran volatilidad de precios, que el mercado de futuros comenzó a tener un gran auge entre inversionistas y especuladores. En los años subsecuentes surgieron los futuros en divisas, tasas de interés, índices, acciones etc..

En México actualmente no existe un mercado de futuros, aunque entidades mexicanas cubren algunos de sus riesgos con estos instrumentos por medio de intermediarios extranjeros.

Es importante mencionar que aunque el concepto básico de un contrato adelantado y un contrato futuro es el mismo, estos tienen diferencias significativas, ya que mientras los contratos futuros se negocian en bolsa y tienen características estándares, los contratos adelantados se negocian al mostrador y con características hechas a la medida del cliente; además de que en un contrato adelantado existe el riesgo de crédito de la contraparte.

Valuación de Futuros

En la valuación de futuros se utilizará la tasa de interés compuesta continuamente debido principalmente a que las negociaciones de estos contratos se realizan durante todo el día, lo cual puede ocasionar que un mismo contrato sea comprado y vendido en unos cuantos minutos. En los mercados internacionales la tasa de interés no se cotiza con periodos de convertibilidad instantánea, sino en periodos de convertibilidad mensual, trimestral, semestral etc., por lo que utilizaremos la siguiente relación conocida como triple igualdad:

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{i^m}{m}\right)^{n\times m} = e^{n\times\delta}$$

Los argumentos más importantes para la valuación de futuros serán el arbitraje y la venta en corto por lo que se definirán en este momento.

ARBITRAJE

El arbitraje se puede definir como la ganancia realizada sin riesgo al actuar o intervenir en 2 mercados simultáneamente, en otras palabras podemos decir que este tipo de oportunidades se presentan por la disparidad o inconsistencia en los precios de un activo en diferentes mercados. Supongamos que una acción de TELMEX se negocia en el mercado de Nueva York a $15 dólares cuando el tipo de cambio peso dólar es $3.1 y al mismo tiempo esa misma acción se cotiza en el mercado de México a $48 pesos, esto crea una oportunidad para un arbitrajista al comprar en Nueva York la acción y venderla en el mercado de México realizándose una ganancia de $(48 - 15 \times 3.1) = \$1.5$ pesos por acción. Estas oportunidades de arbitraje son casi instantáneas, ya que las fuerzas de la oferta y la demanda presionan a los dos mercados para que se equilibren los precios.

VENTAS EN CORTO

Una de las estrategias mas utilizadas por los arbitrajistas es la venta en corto, esta consiste en vender valores que no nos pertenecen. Un inversionista por medio de su broker puede tomar en préstamo los valores de algún cliente del broker y vender los instrumentos, el inversionista puede mantener su posición en corto mientras que su broker pueda pedir las acciones prestadas. En algún momento el inversionista tiene que recomprar las acciones y devolverlas al cliente del broker, a esto se le llama cerrar o liquidar la posición. Si el valor que fue vendido provée de algún beneficio durante el periodo en que se tomaron prestadas las acciones, el inversionista tiene la obligación de proporcionar este beneficio.

En México la venta en corto esta permitida, pero por valores se entiende exclusivamente a las acciones y certificados de aportación patrimonial.

La notación que se utilizará de aquí en adelante será:

T: Tiempo en el que el contrato futuro madura en años.

t: Tiempo actual en años.

S: Precio del activo subyacente al tiempo t.

S_T: Precio del activo subyacente al tiempo T.

k: Precio de entrega del contrato futuro.

f: Valor de la posición en largo en un contrato futuro al tiempo t.

F: Precio futuro al tiempo t.

r: Tasa de interés por año al tiempo t libre de riesgo, convertible continuamente para una inversión al tiempo T.

A continuación se valuarán diferentes tipos de contratos futuros, para ello utilizaremos argumentos de arbitraje y ventas en corto.

CONTRATOS FUTUROS EN VALORES QUE NO PROVEEN UTILIDADES

Como ejemplo de este tipo de valores tenemos acciones que no pagan dividendos y bonos a descuentos. Para desarrollar una idea de cual debe ser la manera correcta de valuar este futuro consideremos los siguientes portafolios:

Portafolio A: Una posición en largo en un contrato futuro sobre una valor más una cantidad igual a $ke^{-r(T-t)}$.

Portafolio B: Un valor.

Como se observa en el portafolio A, tenemos un compromiso de comprar al tiempo T un valor con un precio futuro k y una cantidad en efectivo igual a $ke^{-r(T-t)}$, que al invertirse a una tasa de interés libre de riesgo crecerá a una cantidad k al tiempo T, la cual será suficiente para pagar el activo o valor al vencimiento del contrato futuro.

En el portafolio B tenemos un valor, por lo que al momento T ambos portafolios consisten en un valor, de esto podemos concluir que ambos portafolios son equivalentes y la siguiente relación se tiene que cumplir:

$$f + ke^{-r(T-t)} = S \qquad ó \qquad f = S - ke^{-r(T-t)}$$

Si esta relación no se cumpliera, un arbitrajista podría realizar una ganancia sin riesgo comprando el portafolio menos caro y tomando una posición en corto en el más caro.

Ahora, si tiene un contrato futuro sobre una acción que no paga dividendos a 6 meses, con un precio de entrega de \$30 y un precio actual de \$29, donde la tasa a seis meses libre de riesgo es del 11% anual, el valor del contrato estará determinado por:

$$f = 29 - 30e^{-0.11\times0.5} = 0.605$$

Es importante notar que cuando el contrato comienza, el precio de este es cero, por lo que el precio futuro será igual a:

$$F = k = Se^{r(T-t)}$$

El precio futuro en el ejemplo anterior será:

$$F = 29e^{(0.11 \times 0.5)} = 30.639$$

Si $F > Se^{r(T-t)}$, el precio futuro sería demasiado alto en comparación del precio que se obtuvo, por lo que un arbitrajista podría realizar una ganancia comprando el activo en el mercado spot y tomando una posición en corto en un contrato futuro para vender el activo dentro de 6 meses. Por ejemplo, si el precio futuro para un contrato fuera de $31 en lugar de $30.63, un arbitrajista compraría la acción a $29 mediante un préstamo a una tasa de interés libre de riesgo del 11% por año durante 6 meses y tomaría una posición en corto en un contrato futuro para vender la acción dentro de 6 meses. Como resultado tendríamos que el arbitrajista al final de los 6 meses tendría que pagar por el dinero que utilizó para comprar la acción, simultáneamente entregaría la acción y recibiría por esto $31, esto quiere decir que su ganancia seria de 31-30.63=$0.36 por acción.

Ahora, si $F < Se^{r(T-t)}$, un arbitrajista ante esta situación tomaría una posición en corto en una acción y una posición en largo en un contrato futuro. Ahora, si el precio futuro fuera de $28.5, en esta situación un arbitrajista tomaria una posición en corto en una acción recibiendo por esto $29, los cuales invertiría a una tasa de interés libre de riesgo del 11% por año a 6 meses y tomaría una posición en largo en un contrato futuro para comprar la acción dentro de 6 meses. Al término de este plazo recibiría $29e^{0.11\times0.5}=\$30.63$ por la venta en corto y compraría la acción a $28.5, de acuerdo al contrato futuro, por lo que la ganancia sería de 30.63-88.5=$2.13 por acción.

Como se esta asumiendo que no hay oportunidades de arbitraje, el precio futuro para un contrato futuro tiene que ser:

$$F=Se^{r(T-t)}$$

En los ejemplos anteriores se supone que el contrato futuro comenzaba, pero en muchas ocasiones se negocian contratos futuros que ya tienen algún tiempo de iniciados, por lo que el contrato futuro no vale cero, sino que ya tiene algún valor positivo o negativo para la posición en largo y al contrario en la posición en corto.

EL VALOR DE UN CONTRATO FUTURO

Supongamos que un contrato futuro comenzó 3 meses atrás y faltan 3 meses para la entrega, con los siguientes datos, una tasa de interés libre de riesgo del 11% por año, un precio futuro de $38 y el precio actual de la acción es de $42, la pregunta que surge es ¿Cuál es el valor del contrato?.

Para responder esta pregunta consideremos que la persona que tiene la posición en largo necesita tener en este momento $38e^{-0.11\times0.25}=\$36.96$ para que dentro de 3 meses pueda hacer frente al contrato, por lo que en este momento la relación siguiente se tiene que cumplir:

$$36.9692 + f = 40 \qquad ó \qquad f = 40 - 369692 = 3.03$$

f es el valor del contrato para la posición en largo y $-f$ es el valor del contrato para la posición en corto, si el valor del contrato fuera diferente a este un arbitrajista tomaría ventaja y realizaría una ganancia sin riesgo.

Si $f < S - ke^{-r(T-t)}$, el arbitrajista tomaría una posición en corto en un contrato futuro y una posición en largo en una acción, realizando con esto una ganancia sin riesgo.

Supongamos que en el ejemplo anterior el valor del contrato es \$5 en lugar de \$3.03 ante esta oportunidad un arbitrajista tomaría la posición en corto en el contrato e invertiría \$35 para comprar la acción, cumplido los 3 meses, entregaría la acción y recibiría \$38, el arbitrajista pagaría $35e^{0.11 \times \frac{3}{12}}$ por el préstamo, por lo que la ganancia sería de 38 -35.97=\$2.02 por acción.

Si $f < S - ke^{-r(T-t)}$, un arbitrajista tomaría una posición en largo en un contrato futuro y una posición en corto en una acción (venta en corto), el resultado de esta estrategia es una ganancia sin riesgo.

Supongamos que en el ejemplo anterior el valor del contrato futuro es \$2 en lugar de \$3.03, un arbitrajista tomaría una posición en largo en un contrato futuro con lo cual pagaría \$2 por tomar la posición y al mismo tiempo tomaría una posición en corto en una acción y recibiría \$40, a los 3 meses recibiría la acción pagando \$38, la ganancia sería de $38e^{0.25 \times 0.11} - 38 = \$1.059$ por acción.

Con estos argumentos los precios futuros deben cumplir la siguiente relación:

$$F = Se^{r(T-t)} \quad \text{y} \quad f = (F - k)e^{-r(T-t)}$$

CONTRATOS FUTUROS EN VALORES QUE PROVEEN DE BENEFICIOS CONOCIDOS

Este tipo de contratos futuros se realizan sobre instrumentos que dan al tenedor algún beneficio; como ejemplo tenemos a las acciones que proveen de dividendos conocidos y bonos que pagan cupones. Para determinar el precio futuro así como el valor del contrato pensemos en los siguientes portafolios.

Portafolio A. Una posición en largo en un contrato futuro en un valor que provø un beneficio conocido más una cantidad igual a $ke^{-r(T-t)}$.

Portafolio B. Un valor más una cantidad prestada igual a I a una tasa de interés libre de riesgo.

Analicemos cada uno de estos portafolios: el portafolio A invertido a una tasa de interés libre de riesgo tendrá al vencimiento un valor igual a k, por esta razón el portafolio en la fecha de entrega consistirá de un valor. En el portafolio B, los beneficios obtenidos del valor durante la vida del contrato serán suficientes para pagar el préstamo, por lo que el portafolio a la fecha de la entrega será igual a un valor. Es importante hacer notar que bajo este esquema I es igual al valor presente de todos los beneficios que se obtendrán del instrumento. Con este análisis llegamos a que ambos portafolios valen lo mismo a la fecha de entrega por lo que hoy también valen lo mismo, así que la siguiente relación se debe cumplir:

$$f + ke^{-r(T-t)} = S - I$$

El valor presente de mi precio futuro más el valor de mi contrato es igual al precio actual del instrumento menos el valor presente de los beneficios que este genere.

Cuando el contrato futuro inicia el valor del contrato es cero por lo que el precio futuro se determinará así:

$$F = (S - I)e^{-r(T-t)}$$

Si $F > (S - I)e^{-r(T-t)}$, un arbitrajista tomaría una posición en largo en un contrato futuro y una posición en corto en una acción, al final del contrato realizaría una ganancia sin riesgo.

Si $F < (S - I)e^{-r(T-t)}$, un arbitrajista tomaría una posición en corto en el valor y una posición en largo en un contrato futuro, teniendo como consecuencia una ganancia sin riesgo por parte del arbitrajista.

Cuando el contrato futuro ya fue iniciado este puede tener un valor diferente de cero y su valor sería calculado como:

$$f = (F - k)e^{-r(T-t)} \qquad \text{ó} \qquad f = S - I - ke^{-r(T-t)}$$

Si esto no fuera cierto un arbitrajista tomaría ventaja. Examinemos estas oportunidades. Si $f < (F - k)e^{-r(T-t)}$, un arbitrajista realizaría una ganancia sin riesgo tomando una posición en corto en un contrato futuro y una posición en largo en un valor. Si $f > (F - k)e^{-r(T-t)}$, un arbitrajista realizaría una ganancia sin riesgo comprando un contrato futuro y tomando una posición en corto en el valor.

Con estos argumentos y dadas las suposiciones, el contrato debe tener el siguiente valor:

$$f = S - I - ke^{-r(T-t)}$$

Ejemplo:

Supongamos que existe un bono que actualmente se cotiza a un precio de \$90, la tasa de interés libre de riesgo es del 8% por año para todos los plazos; el bono pagará cupones de \$1 dentro de 5, 12 y 18 meses; el valor presente de los intereses es:

$$I = e^{-0.08\times 0.5} + e^{-0.08} + e^{-0.08\times 1.5} = 2.77$$

y existe un contrato futuro sobre el bono que vence dentro de 20 meses, el precio futuro de este contrato esta dado entonces por:

$$F = (90 - 2.77)e^{\frac{20}{12}\times 0.08} = 76.34$$

Si este no fuera el precio futuro un arbitrajista realizaría una ganancia sin riego.

CONTRATOS FUTUROS EN VALORES QUE PROVEEN UNA TASA DE RENDIMIENTO CONOCIDO

Las divisas e índices accionarios son ejemplos de valores que ganan o proveen una tasa de rendimiento conocido. Es importante aclarar que los índices no pagan dividendos continuamente, pero se puede suponer esto, y es una buena aproximación a la realidad. Denotemos a la tasa de dividendos compuesta continuamente como q.

Ahora construyamos los siguientes portafolios:

Portafolio A: Una posición en largo en un contrato futuro en un valor más una cantidad en efectivo igual a $ke^{-r(T-t)}$.

Portafolio B: $e^{-q(T-t)}$de un valor con todas las ganancias invertidas en el valor.

El portafolio A esta claramente constituido, el portafolio B consiste en una unidad de valor que crecerá a una tasa compuesta continuamente de q, como resultado de los dividendos, esto es $e^{-q(T-t)} \cdot e^{q(T-t)} = 1$, al vencimiento tenemos una unidad del valor. Un aspecto importante de notar es que no es verdad que una acción sea divisible como se supone aquí, pero bajo estos argumentos cuando se tienen portafolios con 1000, 10,000, 100,000 los argumentos son los mismos. Como se supone que no hay oportunidades de arbitraje se debe cumplir la siguiente relación:

$$f + ke^{-r(T-t)} = Se^{-q(T-t)} \qquad \text{ó} \qquad f = Se^{-q(T-t)} - ke^{-r(T-t)}$$

Cuando el contrato comienza su valor es cero y el precio futuro se calcula como:

$$F = Se^{(r-q)T}$$

Si $F < Se^{(r-q)T}$, un arbitrajista puede tomar una posición en largo en un contrato futuro y una posición en corto en una acción y realizar una ganancia sin riesgo.

Si $F > Se^{(r-q)T}$, un arbitrajista puede comprar el valor y tomar una posición en corto en un contrato futuro y de esta manera realizar una ganancia sin riesgo.

Ejemplo:

Supongamos que existe un contrato futuro sobre un índice, y las acciones que constituyen este índice proveen una tasa de dividendos del 4% anual convertible continuamente, el valor actual del índice es \$600 y la tasa libre de riesgo convertible continuamente es del 12% anual, entonces el precio futuro será:

$$F = 600e^{0.06\times0.12} = 604.33$$

CONTRATOS FUTUROS SOBRE DIVISAS

Este tipo de futuros es muy importante para las empresas exportadoras e importadoras de bienes y servicios que realizan operaciones en divisas extranjeras. Las empresas en muchas ocasiones se comprometen a pagar o recibir divisas extranjeras y muchas veces no en el momento de realizar la operación sino en algún tiempo futuro; estas empresas están expuestas a la fluctuación del tipo de cambio de la moneda.

Hasta antes de 1985 se comerciaban con futuros sobre pesos en la International Monetary Market División del Chicago Mercantil Exchange, pero a partir de esa fecha las autoridades mexicanas prohibieron las liquidaciones de pesos en el extranjero. Esta medida fue impuesta principalmente por la ola de especulación en contra del peso; en su lugar el Banco de México abrió el mercado de cobertura cambiaría a corto plazo con el objeto de ofrecer protección contra los movimientos del tipo de cambio peso/dólar.

Consideremos en el análisis la variable S como el precio actual en dólares de una unidad de la divisa extranjera y k es el precio de entrega acordado. Una de las ventajas que el tenedor de la divisa extranjera tiene, es que éste puede ganar intereses a una tasa de interés libre de riesgo que prevalece en el país de donde es la divisa. En México, hasta antes de 1982 esto sucedía, una persona podía abrir en un banco una cuenta en dólares y ganar intereses sobre esta cuenta, pero debido a una serie de problemas especulativos el gobiemo decidió en esa fecha congelar dichas cuentas y transformarlas en pesos.

Definamos a r_f como la tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente que prevalece en el país de origen de la moneda. Estudiemos 2 portafolios constituidos de la siguiente manera.

Portafolio A: Una posición en largo más una cantidad en efectivo igual a ke^{-rT}.

Portafolio B: Una cantidad igual a $e^{-r_f T}$.

Estos 2 portafolios son iguales al tiempo T por lo tanto debe cumplirse la siguiente relación:

$$f = Se^{-r_f T} - ke^{-rT}$$

y cuando el contrato comienza el precio futuro será:

$$F = Se^{(r-r_f)T}$$

Este resultado no debe sorprender, ya que en una situación de equilibrio y con libre movimiento de capitales, la diferencia entre la tasa de rendimiento libre de riesgo denominadas en divisas diferentes, expresada en una misma divisa, es igual a la depreciación o apreciación esperada del tipo de cambio.

CAPÍTULO III

CONTRATOS OPCIONALES

Los contratos opcionales en México son conocidos como títulos opcionales o Warrants[2] Una opción da el derecho al tenedor más no la obligación de comprar o vender un activo a un precio determinado a una cierta fecha; existen 2 tipos básicos de opciones: de compra y de venta. Una opción de compra (opción call) da al tenedor el derecho de comprar un activo a un cierto precio y a una cierta fecha, mientras que una opción de venta (opción put) da al tenedor el derecho de vender un activo a una cierta fecha y a un precio determinado. Al precio pactado en el contrato se llama precio de ejercicio; a la fecha pactada se conoce como fecha de expiración o fecha de ejercicio.

Las opciones son instrumentos para administrar riesgos, aunque también se utilizan para especular; las opciones actualmente se comercian en bolsas como The Chicago Board Option Exchange, The Chicago Board of Trade, Philadelphia etc.., o en el mercado al mostrador. En México actualmente se negocian opciones, aunque este mercado es muy joven.

---

[2] Aunque los títulos opcionales y los warrants tienen características diferentes aquí se supondrá que son iguales para simplificar la valuación.

HISTORIA

Las primeras negociaciones en opciones se llevaron acabo en E.U y en Europa a principios del siglo XVIII, pero no tuvieron un gran desarrollo debido a prácticas de corrupción. A principios del siglo XIX un grupo de firmas establecieron lo que se conoció como The Put and Call Brokers and Dealer Association; la función de este grupo fue la de proveer un mecanismo para poner en contacto a compradores y vendedores, si alguien deseaba comprar una opción contactaba a un miembro de alguna de las firmas y este se encargaba de encontrar a la contraparte, si este no era encontrado, el miembro de la firma tomaba la posición de la contraparte y a cambio la firma recibía un precio por esto. A un mercado creado de esta manera se conoce como de mostrador o extrabursatil (over the counter), desafortunadamente este mercado no tuvo éxito debido a 2 deficiencias: primero no había mercado secundario y segundo había un riesgo de crédito ya que no había garantía de que la contraparte cumpliera con su parte del contrato llegado el momento.

En 1968 The Chicago Board of Trade que en ese momento era conocido por sus contratos futuros, comisionó a un grupo para explorar la posibilidad de ofrecer contratos futuros sobre acciones de la bolsa, en este estudio se concluyo que lo mejor era una opción sobre acciones y no un futuro sobre acciones. Así surgió The Chicago Board Options Exchange (CBOE) en 1972, que en abril del siguiente año comenzó con la comercialización de opciones sobre acciones tipo call. El mercado tuvo un gran éxito y a 5 años de su inicio el CBOE negociaba 5 millones de contratos sobre acciones. En 1975 otras bolsas se adhirieron a este mercado y para 1977 se comenzaron a negociar opciones tipo put o de venta. Actualmente se negocian opciones sobre acciones, divisas, futuros, tasas de interés, etc..

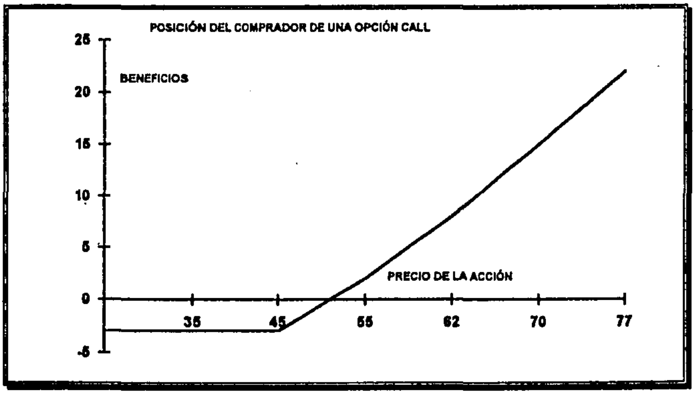
Las operaciones con títulos opcionales (Warrants) en la Bolsa Mexicana de valores se iniciaron el 21 de octubre de 1992 con la oferta pública de dos títulos opcionales, uno de compra y otro de venta sobre acciones de TELMEX y desde entonces otras emisiones se han hecho. Cabe señalar que empresas mexicanas negociaban con opciones desde antes de esta fecha, tanto para cubrir sus riesgos como para especular, esto lo hacían por medio de corredores en el extranjero.

Como se mencionó al principio, existen dos tipos básicos de opciones: opciones de compra (call) y opciones de venta (put), a su vez las opciones pueden ser opciones americanas (american) o europeas (european). Las opciones americanas son aquellas opciones que pueden ser ejercidas en cualquier momento dentro de la fecha de ejercicio, mientras que las opciones europeas son aquellas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de expiración.

Una forma sencilla de entender una opción es estableciendo la similitud con una póliza de seguro, por ejemplo cuando una persona compra un automóvil y desea asegurarlo contra un riesgo de accidente durante un año, éste paga una prima cuyo monto dependerá de la probabilidad de que el accidente suceda, a cambio la aseguradora le pagará una cierta cantidad de dinero si este sufre un accidente. Si durante el año no sufre algún accidente se pierde la prima y nada más. Esto se puede interpretar como si la compañía de seguros vendiera una opción y recibiera una cierta prima, y esta opción sólo se puede ejercer si se tiene un accidente.

Considérese que existe una opción call europea para adquirir 100 acciones de TELMEX con un precio de ejercicio de $50. Supongamos que el precio actual de la acción es $48, la fecha de expiración de la opción es dentro de 2 meses y el precio de la opción es de $3, como la opción es europea la opción sólo puede ser ejercida en la fecha de expiración. Si el precio de la opción en esa fecha es menor a $50 esta no será ejercida ya que no tiene sentido comprar algo que venden a $50 si esto lo puedo comprar a menos de $50. En este caso se perderá la inversión inicial de $300. Si el precio de la acción es mayor a $50 en la fecha de ejercicio esta será ejercida; supongamos que el precio de la acción en ese momento es de $60, al ejercer la opción podrá bajo el contrato comprar 100 acciones de TELMEX por $50 cada una. Si las acciones son vendidas inmediatamente el inversionista ganará $10 por cada acción o $1000 por las 100 acciones y si tomamos en cuenta que no hay costos de transacción y que la inversión inicial fue de $300, la ganancia neta para el inversionista será de $700. Esta es una de las razones por la cual este instrumento es muy atractivo para los especuladores, ya que estos pueden lograr una gran apalancamiento con este tipo de instrumentos.

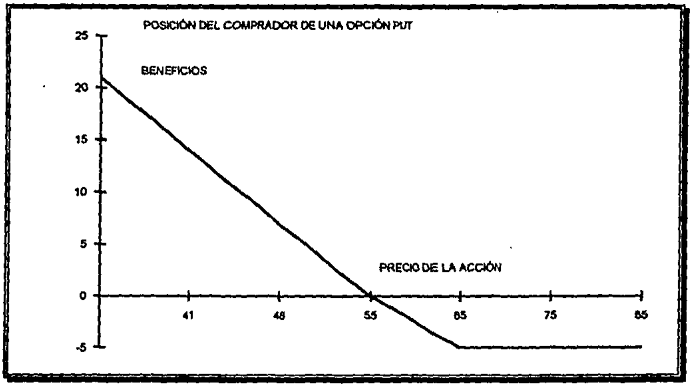
En esta gráfica se muestra la posición (pérdida o ganancia neta) del inversionista para cada uno de los posibles precios de la acción. El precio de la opción es igual a $3 y el precio de ejercicio es de $50.



En esta gráfica se observa claramente que el comprador de la opción call, siempre espera que el precio de la acción suba para beneficiarse de esta situación.

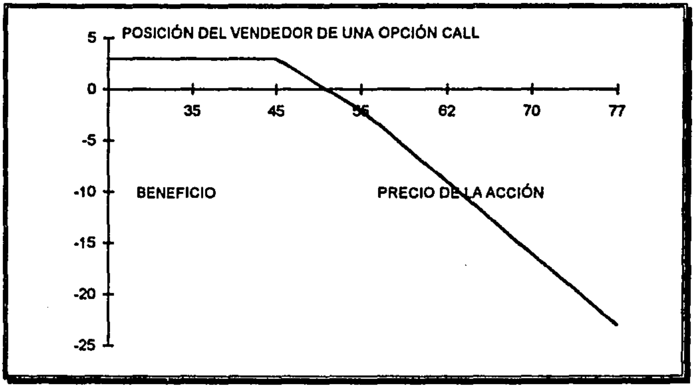
Ahora supongamos que existe una opción put europea sobre acciones de CIFRA, cada contrato es por 100 acciones con un precio de ejercicio de $60, y una fecha de expiración dentro de 3 meses, si el precio actual es $55 y el precio de cada opción es $5, la inversión inicial será de $500, nuevamente como la opción es europea sólo podrá ser ejercida en la fecha de expiración y sólo será ejercida si el precio de la acción es menor a $60. Ahora si en la fecha de ejercicio el precio de la acción es $70, es claro que la opción no se ejercerá, teniendo como consecuencia la pérdida de la inversión inicial de $500. Si el precio de la acción en la fecha de ejercicio es $50 la opción será ejercida, obteniéndose una ganancia de $10 por cada acción. Si tomamos en cuenta que no hay costos de transacción en la inversión inicial se obtendrá una ganancia neta de $500.

En la gráfica se muestra la posición (pérdida o ganancia neta) del inversionista para cada uno de los precios de la acción en la fecha de ejercicio. El precio de la opción es de $5 y el precio de ejercicio es de $60.

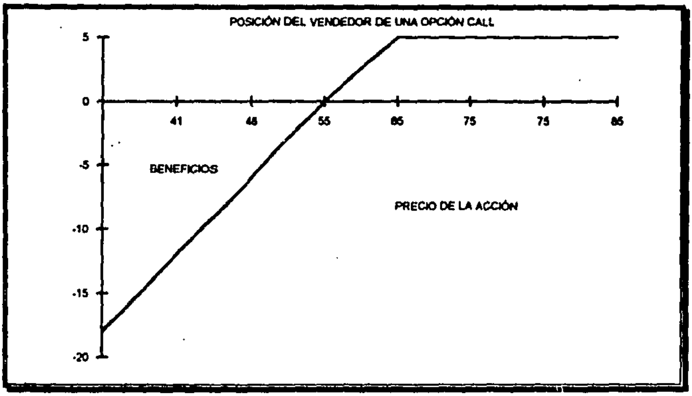


En esta gráfica se observa claramente que el comprador de la opción put siempre espera que el precio de la acción baje para obtener una ganancia de esto.

Hay dos posiciones en cada contrato, una de ellas toma la posición en largo (es decir el que compra la opción) y la otra toma la posición en corto (es decir el que vende o subscribe la opción). En las siguientes gráficas se muestra la posición (pérdida o ganancia neta) del que vende o subscribe una opción. El precio de la opción es $3 y el precio de ejercicio es $50.



Posición del que vende una opción put. Aquí se puede observar el beneficio y obligación del vendedor de una opción. Estas gráficas se pueden resumir de la siguiente manera: el comprador de una opción call tiene un riesgo conocido y limitado de pérdida y una posibilidad desconocida e ilimitada de ganancia. El vendedor de la opción call tiene un potencial de ganancia conocido por anticipado y limitado y un potencial de pérdida desconocido e ilimitado, es por esta razón que las bolsas exigen a los vendedores de opciones un margen, el cual está constituido para asegurar el cumplimiento del contrato.



El comprador de una opción put, tiene un riesgo conocido y limitado y una posibilidad desconocida e ilimitada de ganancia, y el vendedor de una opción put tiene una ganancia potencial conocido y limitado, y una perdida potencial desconocida e ilimitada.

VARIABLES QUE AFECTA EL PRECIO DE UNA OPCIÓN ACCIONARIA

Hay seis factores que afectan el precio de la opción accionaria.

1. El precio actual de la acción.
2. El precio de ejercicio.
3. El tiempo de expiración.
4. La volatilidad del precio de la acción.

5. El dividendo esperado durante la vida de la opción.

6. La tasa de interés libre de riesgo.

Cada uno de estos factores afectan en diferente manera el precio de la opción, mas adelante cuando se realice la derivación de la formula de Black and Scholes se verá el impacto de cada una de estas variables en el precio de la opción. Ahora estableceremos argumentos para marcar bandas o cotas para los precios de las opciones, esto se hará con ayuda de argumentos de arbitraje y ventas en corto de igual manera que como se hizo con los futuros.

Las suposiciones adicionales que se harán son:

1. No hay costos de transacción.

2. Todas las ganancias y perdidas están sujetas a las mismas tasas de impuestos.

3. Se puede prestar y pedir prestado a la misma tasa de interés libre de riesgo.

4. No hay oportunidades de arbitraje.

La notación que utilizaremos será la siguiente:

S: Precio actual de la acción.

X: Precio de ejercicio de la opción.

T: Tiempo de expiración.

S_T: Precio de la acción al tiempo T.

r: Tasa de interés (nominal) libre de riesgo durante el periodo T.

C: Precio o valor de una opción call americana para comprar una acción.

P: Precio o valor de una opción put americana para vender una acción.

c: Precio o valor de una opción call europea para comprar una acción.

p: Precio o valor de una opción put europea para vender una acción.

COTA SUPERIOR PARA EL PRECIO DE UNA OPCIÓN

La primera cota que estableceremos para una opción call es:

$$c \leq S \quad \text{y} \quad C \leq S$$

Esta relación es muy fácil de entender, pues nadie compraría un seguro cuya prima es mayor que el activo que se desea proteger, ademas si esta relación no se cumpliera un arbitrajista realizaría una ganancia sin riesgo vendiendo la opción call y comprando la acción.

Para una opción put se debe cumplir que:

$$p \leq Xe^{-r(T-t)} \quad \text{y} \quad P \leq X$$

Ahora establezcamos las bandas inferiores para el precio de una opción, para ello consideremos 2 portafolios de la siguiente manera.

Portafolio A: Una opción call europea más una cantidad en efectivo igual a $Xe^{-r(T-t)}$.

Portafolio B: Una acción.

Analicemos ambos portafolios, el portafolio A consta de una opción y de una cantidad en efectivo que al momento T crecerá a X. Si $S_T > X$, la opción call será ejercida al tiempo T y el portafolio valdrá S_T. Si $S_T < X$, la opción call expirara sin ser ejercida por lo tanto al tiempo T el portafolio A tendrá un valor de:

$$max(S_T, X)$$

El portafolio B al tiempo T vale S_T, de este análisis concluimos que el portafolio A vale al menos el portafolio B por lo tanto la siguiente relación se tiene que cumplir:

$$c + Xe^{-rT} > S \qquad \text{ó} \qquad c > S - Xe^{-rT}$$

Considérese una opción call europea sobre una acción que no paga dividendos con un precio actual de \$80, un precio de ejercicio de \$78 y la fecha de ejercicio es dentro de 6 meses, la tasa de interés libre de riesgo es del 11% anual.

La cota inferior para el precio de la opción es:

$$80 - 79e^{-0.11 \times 0.5} = 5.22$$

Si el precio de la opción fuera menor una oportunidad de arbitraje surgiría, supongamos que el precio fuera de \$3 en lugar de \$5.22, un arbitrajista compraría la opción call y tomaría una posición en corto en la acción, esto proporcionaría un efectivo de \$72 el cual sería invertido a la tasa de interés libre de riesgo, al final obtendría $77e^{-0.11*0.5} = \$81.35$. Cumplido los 6 meses la opción expiraría y el arbitrajista tendrá dos posibilidades. Si el precio de la acción es mas grande que \$78 el arbitrajista ejercerá la opción, es decir comprara la acción a \$78 y cerrara su posición en corto, la ganancia de esta operación será:

$$81.35 - 80 = 1.35$$

Ahora si el precio de la acción es menor a \$78 el arbitrajista no ejercerá la opción y la ganancia mínima para el arbitrajista será de almenos \$1.35, pero con la posibilidad de una mayor ganancia.

$$81.35 - S_T$$

Una vez establecida una cota inferior para una opción call europea, se determinará la cota inferior para el precio de una opción put europea. Considérese los siguientes portafolios.

Portafolio C: Una opción put europea más una acción.

Portafolio D: Una cantidad en efectivo igual a Xe^{-rT}.

Bajo este esquema si $S_T < X$ al tiempo T la opción será ejercida y el valor del portafolio será X. Si $S_T > X$, la opción no será ejercida y el portafolio valdrá S_T al tiempo T. Por lo tanto el portafolio C vale:

$$max(S_T, X)$$

al tiempo T.

Si el efectivo del portafolio D es invertido a una tasa de interés libre de riesgo este valdrá X al tiempo T, esto significa que el portafolio C vale almenos lo que vale el portafolio D, por lo tanto la siguiente relación se tiene que cumplir:

$$p + S > Xe^{-rT} \qquad \text{ó} \qquad p > Xe^{-rT} - S$$

Resumiendo el análisis se puede decir que las siguientes cotas se deben cumplir para el precio de una opción call europea:

$$max(S - Xe^{-rT}, 0) < c \leq S$$

las cotas para una opción put europea son:

$$max(Xe^{-rT} - S, 0) < p \leq Xe^{-rT}$$

Para establecer cotas para una opción call americana sobre una acción que no paga dividendos se darán primero argumentos intuitivos para mostrar que no es óptimo ejercer la opción antes del vencimiento. Considérese una opción call americana sobre una acción que no paga dividendos y que expira dentro de 3 meses cuando el precio actual de la acción es \$90 y el precio de ejercicio es \$80, bajo este esquema podría ejercerse inmediatamente pero si se planea mantener la acción por mas de 3 meses esta no es la mejor estrategia. La mejor estrategia es mantener la opción y ejercer al final de los 3 meses, si se ejerciera en este momento se perderían intereses sobre esa cantidad por 3 meses y no se ganaría nada de tener la acción ya que esta no paga dividendos. Otra ventaja de esperar hasta la fecha de ejercicio es que hay una posibilidad de que el precio de la acción se sitúe por abajo de \$80. Bajo estos argumentos no hay ventajas de ejercer la opción anticipadamente si se planea mantener la acción. Por otro lado si se considera que la acción esta sobrestimada, es decir que podría bajar, lo mejor no es ejercer la opción, sino vender la opción ya que el precio obtenido por la opción será mayor que el valor intrínseco[3] de \$10 dado que el precio de la opción tiene que ser mayor a:

$$10 \leq 90 - 80e^{-rT}$$

Si esta relación no se cumpliera surgirían oportunidades de arbitraje.

Una vez analizado esta parte considérese los siguientes portafolios:

Portafolio E: Una opción call americana más una cantidad en efectivo igual a Xe^{-rT}.

Portafolio F: Una acción.

[3] El valor intrínseco es la diferencia entre el precio de la acción y el precio de ejercicio

El valor del portafolio E cuando expira la opción es X y antes de que expire es Xe^{-rT}. Si la opción es ejercida al tiempo t el valor del portafolio E es $S - X + Xe^{-rT}$, por lo tanto si la acción se ejerce antes de la fecha de expiración el portafolio E vale menos que el portafolio F. Se concluye que valor del portafolio E al tiempo T es:

$$max(S_T, X)$$

y el valor del portafolio F es S_T. Bajo este esquema también se demuestra que nunca se debe ejercer la opción antes del vencimiento, como consecuencia inmediata de esto se tiene que:

$$C = c \qquad \text{y} \qquad C > S - Xe^{-rT}$$

Otro aspecto importante de notar es que la persona que pose una opción call americana tiene una ventaja sobre el que pose una opción call europea, ya que en la opción call americana se tienen todas las oportunidades de ejercicio, y es debido a esta ventaja que el valor de una opción call americana debe valer más que una opción call europea.

$$C \geq c > S - Xe^{-rT}$$

por lo tanto:

$$C > S - Xe^{-rT}$$

Para una opción put americana sobre una acción que no paga dividendos, puede ser óptimo ejercer la acción anticipadamente si esta encuentra suficientemente en el dinero[4], supongamos que existe una acción cuyo precio de ejercicio es X y tiene un precio actual de casi cero, es claro que debe ejercerse pues es mejor recibir ahora X y no recibirlos hasta la fecha de ejercicio, por otro lado si el precio de la acción aumenta habremos perdido una oportunidad de ganancia. Consideremos los siguientes portafolios.

Portafolio G: Una opción put más una acción.

Portafolio H: Una cantidad en efectivo igual Xe^{-rT}.

Analicemos las diferentes situaciones en los portafolios. Si la opción es ejercida antes del vencimiento $(t < T)$, el portafolio G vale X y el portafolio H vale $Xe^{-r(T-t)}$, por lo tanto el portafolio G vale mas que el portafolio H y si la opción se conserva hasta el vencimiento el portafolio G vale:

$$max(S_T, X)$$

y el portafolio H vale X, por lo tanto el portafolio G vale almenos lo que vale H. En este análisis el portafolio G es mas atractivo que el portafolio H aun en el caso que se ejerza antes de vencimiento la opción. Es debido a esta situación que una opción put americana es mas valiosa que una opción put europea por lo tanto:

$$P > p$$

Otra relación que se debe de cumplir para una opción put americana es:

[4]Lo que significa es que el tenedor obtendría un flujo positivo si este ejerciera inmediatamente la opción.

$$P \geq X - S$$

ya que el ejercicio es posible inmediatamente cuando el precio de la acción es suficientemente bajo. Ahora analicemos una relación muy importante conocida como put-call parity, esta es una relación importante entre c y p, considérese los siguientes portafolios:

Portafolio A: Una opción call europea más una cantidad en efectivo igual a $Xe^{-r(T-t)}$.

Portafolio B: Una opción put europea más una acción.

Ambos portafolios valen $max(S_T, X)$, pues ambos portafolios consisten de opciones europeas, por lo tanto esta igualdad se cumple:

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

A esto es lo que se le conoce como put-call parity. Si esta relación no se cumpliera surgiría una oportunidad de arbitraje. Otra relación importante es la que existe entre una opción call europea y una opción put americana, utilizando la relación anterior, y teniendo que $P > p$ y $C = c$ tenemos que:

$$p > c + Xe^{r(T-t)} - S \quad \text{y} \quad P > C + Xe^{r(T-t)} - S$$

despejando tenemos que:

$$C - P > S - Xe^{r(T-t)}$$

a su vez se puede demostrar que:

$$S - X < C - P < S - Xe^{r(T-t)}$$

EFECTO DE LOS DIVIDENDENDOS

Toda esta parte sea hablado de acciones que no pagan dividendos, ahora tratare las acciones que pagan dividendos, el efecto de los dividendos en las acciones como sabemos es la de disminuir el precio de la acción, esta situación también afecta el precio de la opción denotemos a los dividendos con la letra D y supondremos que la fecha y el monto de los dividendos es conocido. Considérese los siguientes portafolios:

Portafolio A: Una opción call más una cantidad en efectivo igual a $D + Xe^{-r(T-t)}$.

Portafolio B: Una acción.

Realizando el análisis de manera similar a la de una acción que no paga dividendos se llega a la siguiente relación:

$$C > S - D - Xe^{-r(T-t)}$$

Ahora considérese los siguientes portafolios:

Portafolio C: Una opción put europea más una acción.

Portafolio D: Una cantidad igual a $D + Xe^{-r(T-t)}$.

En este tipo de acciones no se puede sostener que no es óptimo ejercer anticipadamente la opción call americana, esto ocurre básicamente debido a que en algunas ocasiones se debe ejercer la opción antes de la fecha de pago de dividendos, ya que el precio de la acción disminuye un día después del pago de dividendos. Para este tipo de acciones la paridad put-call parity se convierte en:

$$C + D + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

otra relación que se deben cumplir es:

$$S - D - X < C - P < S - Xe^{-r(T-t)}$$

Estas relaciones que se mostraron son importantes ya que ayudan a refinar el valor que una opción debe tener, si un intermediario financiero ofrece algún tipo de opción y no realiza una buena valuación puede incurrir en perdidas, esto puede ocurrir si el precio de una opción es bajo y si el precio es alto nadie comprara el producto, de aquí surge la importancia de una buena valuación y un buen entendimiento de estas relaciones.

CAPÍTULO IV

UN MODELO DE COMPORTAMIENTO ACCIONARIO

En esta parte se desarrollará nuestra idea del comportamiento de una acción haciendo uso de técnicas matemáticas. Una variable cuyo valor cambia en el tiempo de una manera incierta se dice que sigue un proceso estocástico, una definición de un proceso estocástico es el siguiente: "Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias asociadas a un conjunto índice de números reales", de forma tal que cada elemento del conjunto le corresponde sólo una variable aleatoria y se escribe como $\{X(T); t \in T\}$, en donde T es el conjunto índice y $X(T)$ es la variable aleatoria correspondiente al elemento t de T. Si T es un intervalo de números reales, ya sea cerrado o abierto, se dirá que el proceso estocástico es continuo, y si T es un conjunto finito o infinito numerable, el proceso estocástico se dirá que es discreto. El hecho de que el proceso estocástico sea continuo o discreto no indica nada acerca de la naturaleza del proceso de las variables aleatorias involucradas, ya que estas a su vez pueden ser continuas o discretas. Para dar más claridad a esta notación, el conjunto índice será el tiempo y $X(T)$ el precio de la acción consideraremos que ésta es continua, más aún considérese un proceso estocástico continuo en el tiempo. Es importante darse cuenta que esto no sucede en la realidad por la forma en que opera el mercado, pero realizar el análisis de esta manera facilitará el manejo.

PROCESOS DE MARKOV

Un proceso de Markov, es un proceso estocástico en particular, en el cual el resultado de una prueba depende a lo sumo del resultado de la prueba inmediata precedente y no de cualquier resultado previo. El precio de una acción se supondrá que sigue un proceso de Markov lo cúal tendrá como consecuencia, que para predecir el precio futuro de una acción sólo importa el estado actual de la acción, el pasado no importa, básicamente lo que quiere decir es que un analista no puede realizar una ganancia en base a encontrar patrones estacionales[5]. Supóngase que esto se puede lograr y los analistas encuentran que cuando un cierto patrón se presenta en una acción, es momento de comprar la acción y realizar una ganancia de un 40% del precio de la acción. Supóngase que el patrón se presenta en la acción y los inversionistas comienzan a comprar, esto eliminará cualquier efecto de ganancia ya que esto provoca que el precio de la acción se eleve inmediatamente.

PROCESO DE WIENER

El proceso de Wiener se encuentra dentro de los procesos de Markov. El proceso de Wiener puede ser entendido como pequeños cambios en el valor de la variable en pequeños intervalos de tiempo. Considérese que la variable z sigue un proceso de Wiener, entonces Δz cumple con las siguiente propiedades:

1. Δz se relaciona con Δt de la siguiente manera:

[5] A los eventos repetitivos de una serie se le conoce como estacionalidad

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad \text{(A)}$$

donde ε es una muestra obtenida al azar de una normal estandarizada.

2. Los valores de Δz para 2 intervalos de tiempo Δt son independientes.

De la primera propiedad se deducen las siguientes propiedades para Δz.

$$E(\Delta z) = \Delta t E(\varepsilon) = 0 \qquad \text{y} \qquad Var(\Delta z) = \Delta t^2 Var(\varepsilon) = \Delta t^2$$

Si se considerara el crecimiento de un valor durante un periodo relativamente grande de tiempo $Z(t) - Z(0)$, este puede ser representado como la suma de incrementos de z en N pequeños intervalos de tiempo de longitud Δt donde:

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

$$Z(T) - Z(0) = \sum_{i}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

con los siguientes parámetros:

$$E[Z(t) - Z(0)] = \sum_{i}^{N} E(\varepsilon_i)\sqrt{\Delta t} = 0$$

$$Var[Z(T) - Z(0)] = \sum_{i}^{N} Var(\varepsilon_i)\Delta t = N\Delta t = T$$

Hasta ahora se ha hecho un análisis en diferencias pero en el límite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se convierte a $\frac{dy}{dx}$ cuando $dx \to 0$. Realizando la analogía con (A) obtenemos la siguiente relación:

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$$

PROCESO GENERALIZADO DE WIENER

El proceso de Wiener que se mostró se desarrolló con media 0 y varianza 1;esto significa que el valor esperado de z es igual a su valor actual y la varianza del cambio z en el intervalo de tiempo de tamaño T es T. Para notar mejor este hecho se expresará el modelo no como flujo, sino como saldo.

$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \qquad \text{donde } z(t) = z_t$$

La media del proceso es:

$$E(z_t) = E(z_{t-1})$$

lo cual significa que la media no cambia en el tiempo y por lo tanto se denotará por la constante μ.

$$E(z_t) = \mu$$

esto significa que el proceso de una acción es estacionario de primer orden[6]. Para la varianza se obtiene:

$$Var(z_t) = Var(z_{t-1}) + \Delta t$$

por inducción se tiene:

$$Var(z_t) = Var(z_{t-N}) + N\Delta t = Var(z_{t-N}) + T$$

Un proceso generalizado para una variable x puede definirse en términos de Δz como sigue:

$$dx = adt + bdz \qquad a \text{ y } b \text{ constantes}$$

[6] Un proceso estacionario de primer orden es aquel en donde la media no cambio con el tiempo.

esta expresión en diferencia es:

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$$

Como Δx incluye una variable aleatoria, esta se convierte en una variable aleatoria pero con lós siguientes parámetros:

$$E(\Delta x) = a\Delta t \qquad \text{y} \qquad Var(\Delta x) = b^2 \Delta t$$

Ahora se traducirá este principio al proceso que sigue el precio de una acción, esta comparación no es inmediata debido a que en el proceso generalizado de Wiener supone un valor esperado constante en la tasa y la varianza. El supuesto acerca de que el valor esperado en la tasa es constante no es apropiado por lo que se cambiará por el supuesto de que el valor expresado como proporción del precio de la acción es constante; por lo tanto, el cambio en el precio de la acción es proporcional a la tasa esperada y al precio actual de la acción, si se supone que la varianza es cero, entonces el modelo quedaría expresado como:

$$dS = \mu S dt$$

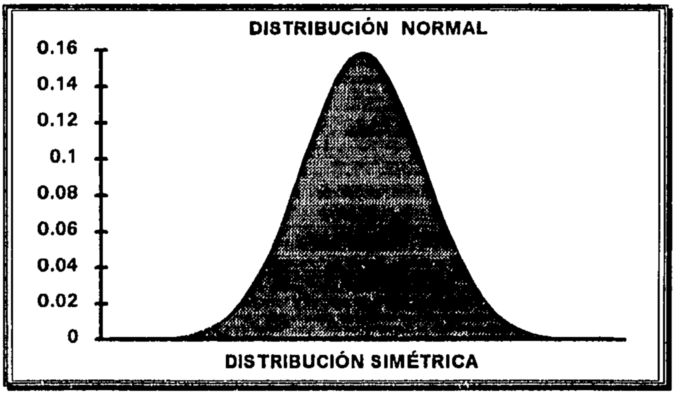
en el caso de x que seguía un proceso generalizado de Wiener se tiene que:

$$dx = a dt$$

si se integran ambas expresiones se obtiene:

$$S = S_0 e^{\mu t} \qquad \text{y} \qquad x = x_0 + at$$

Como se observa, la segunda expresión es inapropiada ya que supone que la ganancia de la acción en precio no es tomada en cuenta, lo cual es ilógico en una acción; en cambio en la primera expresión supone que se comienza con un precio inicial y el rendimiento obtenido por la acción en el instante anterior es tomado en cuenta en cada momento para el nuevo cálculo del rendimiento. Una acción en la vida real tiene volatilidad y esta quedará definida como la raíz cuadrada de la varianza. Se supondrá que la varianza en el porcentaje del rendimiento en un corto periodo de tiempo Δt es el mismo para el precio de la acción.



Se define ahora σ^2 como la tasa de varianza del cambio proporcional en el precio de la acción, el modelo teórico que se utilizará es el siguiente:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad \text{ó} \qquad \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

Ahora se obtendrán los parámetros de la nueva variable aleatoria:

$$E(\frac{dS}{S}) = \mu dt \qquad \text{y} \qquad Var(\frac{dS}{S}) = \sigma\sqrt{dt}$$

A este modelo se le conoce como movimiento geométrico Browniano y su versión discreta es:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

por lo tanto $\frac{\Delta S}{S}$ distribuye normalmente con los siguientes parámetros:

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \Phi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$$

Antes de continuar con un mayor análisis se tienen que estudiar las características de los parámetros μ y σ; el parámetro μ será el rendimiento proporcional que se gane sobre la acción, es anualizado y expresado como una proporción. La desviación estandar del cambio proporcional en el precio de la acción en un pequeño intervalo de tiempo Δt es $\sigma \Delta t$ y será una aproximación para la desviación estandar para periodos relativamente grandes, esto es debido a que los cambios proporcionales no son aditivos si no multiplicativos, por ejemplo: si una acción rinde primero 15% y después 20% esto lleva a un rendimiento de 38% y no del 35%. Más adelante se mostrará que la distribución de probabilidad del cambio proporcional en periodos relativamente grandes de tiempo será una lognormal.

Al principio de la tesis se definió a un producto derivado como una función de una variable subyacente. En el caso del capítulo anterior, la variable subyacente fue el precio de la acción y en general la variable subyacente será el precio de un valor o activo financiero; también se dirá que la variable subyacente será una variable estocástica, por lo que el producto derivado heredará algunas de las propiedades estocásticas de la variable subyacente.

PROCESO DE ITO

Como se estudió, un proceso generalizado de Wiener quedaba caracterizado de la siguiente manera:

$$dx = adt + bdz$$

con a y b como constantes, en un proceso de Ito a y b son funciones del valor de la variable subyacente x y el tiempo t, y se escribirá de la siguiente manera:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

por consiguiente a y b pueden cambiar en el tiempo, en este caso x tiene una tasa de crecimiento de a y una varianza de b.

LEMA DE ITO

Sea G el valor de un producto derivado que es función del valor de una variable x, la cual sigue un proceso de Ito. Entonces G también sigue en proceso de Ito de la siguiente manera:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

con una tasa de crecimiento igual a:

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

y una tasa de varianza de:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}b\right)^2$$

Demostración

$G : U \subset \Re^2 \rightarrow \Re$ diferenciable en $(x, y) \in U$. Entonces G puede ser expresado como:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\Delta y^2 + Error \qquad \text{(B)}$$

Si se requiere mayor precisión puede seguir expandiéndose la serie, otro factor que afecta la precisión será el tamaño del incremento de las variables de las que depende G, y por esta razón cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy \qquad \text{(C)}$$

Este resultado se utilizará en una función que depende de una variable estocástica, por lo cual se realizará un análisis especial ya que Δx tiene una forma muy particular, así que para pasar de (B) a (C) estudiemos la naturaleza de la diferencia.

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

y

$$\Delta x^2 = a^2\Delta t^2 + 2a\Delta t^{\frac{3}{2}}b + b^2\varepsilon^2\Delta t$$

Cuando los incrementos en $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$ tienden a cero, sólo se pueden eliminar los términos de orden mayor a 1, pero como en Δx^2 aparecen términos de orden 1 estos no pueden ser ignorados.

$$\Delta x^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t$$

Ahora obsérvese la parte estocástica de Δx^2, el valor esperado de ε^2 es uno, ya que:

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

$$\therefore \quad E(\Delta x^2) = 1$$

por lo tanto el valor esperado de Δx^2 es $b^2 \Delta t$ y la varianza de Δx^2 es:

$$Var(\Delta x^2) = b^4 \Delta t^2 Var(\varepsilon^2)$$

como la varianza de Δx^2 contiene un término de orden 2 se puede decir que la varianza es cero, con lo que se concluye que Δx^2 ya no es una variable aleatoria y será igual a su valor esperado, ahora tomando el límite cuando Δx y Δt tienden a cero la, ecuación (B) se convierte en:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt$$

sustituyendo dx

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

Ahora, si G es una función del tiempo, del precio de una acción S y esta variable sigue un proceso de Ito de la siguiente manera:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

entonces G sigue un proceso de Ito como se presenta a continuación:

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial \mathrm{S}} \mu \mathrm{S} + \frac{\partial G}{\partial \mathrm{t}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathrm{S}^2} \sigma^2 \mathrm{S}^2 \right) \mathrm{dt} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{S}} \sigma \mathrm{S} \mathrm{dz}$$

Un ejemplo ilustrativo es considerar un contrato futuro sobre una acción que no paga dividendos y que se definió de la siguiente manera:

$$F = Se^{r(T-t)}$$

entonces F sigue un proceso de Ito de la siguiente manera:

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma F dz$$

Ahora supónganse que $G = \ln S$, ¿Que proceso sigue G? para responder esta pregunta, obtengamos las derivada parciales de G:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2}, \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

por lo tanto el proceso que seguiría G es el siguiente:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

Esto es un proceso de Ito, pero en particular es un proceso generalizado de Wiener, ya que a y b son constantes. Si se considera dt como $(T-t)$, G se distribuiría como una normal con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ y varianza σ^2.

$$\ln S_t - \ln S \approx \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

De este resultado a su vez se concluye que:

$$\ln S_t \approx \Phi\left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

Este resultado es muy interesante, ya que si el logaritmo de una variable aleatoria se distribuye como una normal $\Phi(m,s)$, se sabe que la variable aleatoria se distribuye como una lognormal, por esta razón es importante estudiar algunas de sus propiedades. Sea Y una v.a que se distribuye como una normal $\Phi(\mu,\sigma^2)$ entonces Y y $\ln S_t$ se relacionan de la siguiente manera $Y = \ln S_t$ y sus distribuciones cumplen con la siguiente igualdad:

$$\Lambda(S_T) = \Phi(\ln S_T) \qquad S_T > 0$$

y

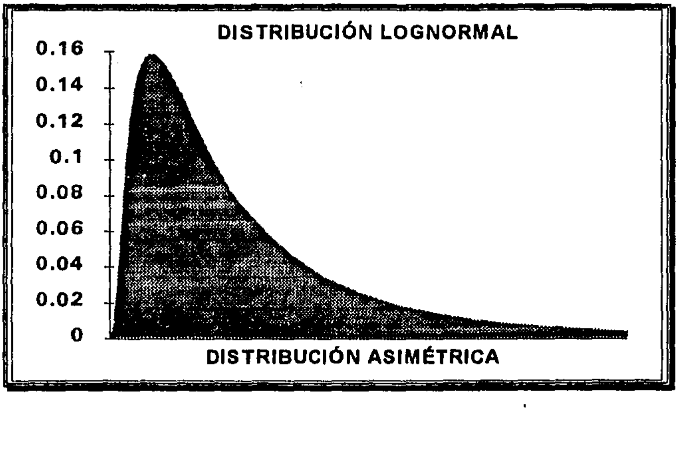
$$\Lambda(S_T) = 0 \qquad S_T \leq 0$$

donde

$$\frac{d\Lambda(S_T)}{dS_T} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln S_T - \mu)^2\right\}} dS_T \qquad S_T > 0$$

Una v.a que se distribuye normalmente queda completamente caracterizada por sus 2 primeros momentos, así que se obtendrá la función generatriz de momentos para esta distribución:

$$M(j) = \int_0^\infty S_T^j d\Lambda(S_T)$$



realizando la transformación obtendremos la función generatriz de momentos de una normal.

$$M(j) = \int_0^{\infty} S_T{}^j d\Phi(Y) = e^{j\mu + \frac{1}{2}j\sigma^2}$$

con este resultado se podrá obtener la media y la varianza de la lognormal

$$E(S_T) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \qquad Var(S_T) = E(S_T)^2 - E(S_T) = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

para el caso que se estudia la media y la varianza están dados por:

$$E(S_T) = Se^{\mu(T-t)} \qquad \text{y} \qquad Var(S_T) = S^2 e^{2\mu(T-t)}\left(e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right)$$

Nótese que el valor esperado de la acción es el crecimiento natural de la acción si esta no tuviera volatilidad, lo cual ajusta con la definición de que μ es la tasa de rendimiento de la acción. Otro resultado que es de gran utilidad es la construcción de un intervalo de confianza del 95% para S_T el cual esta dado por:

$$Se^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) - 2\sigma\sqrt{T-t}} \leq S_T \leq Se^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + 2\sigma\sqrt{T-t}}$$

Considérese que existe una acción que actualmente vale \$60, con un rendimiento esperado del 25% por año y una volatilidad del 30% por año. Esto quiere decir que la función de probabilidad del precio de la acción en 3 meses será:

$$\ln S_T \approx \Phi\left[\ln 60 + \left(0.25 - \frac{0.09}{2}\right) \times 0.3, 0.3\sqrt{0.3}\right]$$

el intervalo de confianza del 95% par S_T es:

$$45.934 < S_T < 88.637$$

el valor esperado y la varianza son respectivamente:

$$E(S_T) = 60^{0.25 \cdot 0.3} = 64.673$$

$$Var(S_T) = 60^2 e^{0.15}\left(e^{0.027} - 1\right) = 114.46$$

La desviación estandar de la acción en 3 meses es 10.69. Es importante notar que μ se definió al principio como el valor esperado de la tasa de rendimiento en un pequeño intervalo de tiempo. Con los resultados anteriores se muestra que el valor esperado de la tasa de rendimiento compuesta continuamente durante el periodo $T-t$ es $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD DE UNA ACCIÓN

Para calcular la volatilidad del precio de una acción se hará uso de los datos históricos del precio de la acción, estas observaciones se harán en tiempos fijos (cada día, cada semana, cada mes..).

Se define.

n : Número de observaciones.

S_i: Precio de la acción al final del i-ésimo intervalo.

l : longitud del intervalo medido en años.

u_i: $\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$

Un estimador insesgado para la desviación estandar es:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

de aquí se obtiene que un estimador para la volatilidad:

$$\hat{S} = \sigma\sqrt{l} \qquad y \qquad \hat{\sigma} = \frac{\hat{S}}{\sqrt{l}}$$

Cuando se calcula la volatilidad de una acción, debe tenerse especial cuidado en el número de observaciones que se toman para la estimación de esta, ya que la volatilidad de una acción en muchas ocasiones va cambiando con el tiempo, es por esta razón que es importante construir una gráfica del precio de la acción para apreciar mejor el fenómeno. Cuando se tienen observaciones diarias es común que se recomiende escoger entre 90 y 180. Otro aspecto importante es el tomar en cuenta solo los días hábiles para el calculo de la volatilidad.

Ejemplo

Se tienen los cierres semanales de la acción de TELMEX (ver apéndice 1), y se quiere calcular la volatilidad de esta acción. Realizando las operaciones se obtiene que el estimador de la desviación estandar del rendimiento semanal es:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(u-\overline{u})^2} = 0.042866$$

Supóngase que hay 52 semanas en el año, entonces τ=52, por lo tanto la volatilidad estimada es $0.042866\sqrt{52} = 0.309$, osea 30.9% anual. Se puede demostrar que el error estandar para este estimador es aproximadamente :

$$\frac{0.309}{\sqrt{2\times 88}} = 0.001$$

o 0.1% por año.

Estos cálculos suponen que la acción no paga dividendos durante este periodo, sin embargo, este puede ser adaptado para acciones que pagan dividendos. El rendimiento de u_i, durante un intervalo de tiempo que incluye un dia despues de dividendos esta dado por :

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

donde D es la cantidad de dividendos.

FORMULA DE BLACK AND SCHOLES

En esta sección se derivará la ecuación diferencial de Black-Scholes, esta ecuación debe ser satisfecha por el precio f de cualquier producto derivado que dependa de una acción que no paga dividendos. El principio está basado en construir un portafolio sin riesgo, constituido por una posición en un producto derivado y una posición en una acción, si este portafolio está bien balanceado, el rendimiento del portafolio en un instante será la tasa de interés libre de riesgo, si esto no ocurriera surgiría una oportunidad de arbitraje. Lo que se tratará de hacer será eliminar la parte de incertidumbre en ambos activos, tanto en el producto derivado como en la acción, y esto podrá ser logrado debido a que ambos están afectados por el mismo factor de incertidumbre y por un instante lograr que estén perfectamente correlacionados, esta correlación tiene que ser inversa para compensar los movimientos de ambos activos. Más adelante se utilizara este principio para proteger portafolios de instituciones financieras o en general para empresas que estén expuestas a riesgos. Una de las suposiciones que se hará ademas de los que se hicieron al principio de esta tesis, será que la negociación de los valores es continua.

Como se desarrolló, S sigue un proceso:

$$dS = (\mu S dt + \sigma S dz)$$

y la versión discreta es:

$$\Delta S = (\mu S \Delta + \sigma S \Delta z)$$

de la misma manera:

$$dS = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

y la versión discreta es:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z$$

Es importante recordar que el portafolio se tiene que escoger de tal manera que se elimine la incertidumbre del portafolio, y el portafolio que cumple con esta condición es tomar una posición en corto en un producto derivado y una posición en largo en una acción por una cantidad igual a $\frac{\partial f}{\partial S}$,Π será el portafolio.

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

el -1 representa una obligación en el portafolio por un producto derivado. El cambio en el portafolio en un cambio en el tiempo Δt es:

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

sustituyendo

$$\Delta \Pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z)$$

realizando el álgebra correspondiente se obtiene:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\Delta t$$

En esta última expresión ya no aparece Δz que es el factor de incertidumbre por lo tanto este portafolio está libre de riesgo por un instante y por este instante el portafolio rendirá la tasa de interés libre de riesgo, si esto no fuera cierto surgiría una oportunidad de arbitraje, por lo tanto:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

sustituyendo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right)\Delta t$$

reordenando términos se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Esta ultima ecuación es la ecuación diferencial de Black-Scholes.

VALUACIÓN DE RIESGO NEUTRAL

La valuación de riesgo neutral es el resultado más importante para la valuación de productos derivados, este resultado surge de la ecuación de Black-Scholes, la cual no esta afectada por la preferencia del riesgo del inversionista. Esta preferencia esta representada por μ, pero esta no aparece en la ecuación diferencial. Mientras mayor sea la aversión al riesgo por parte del inversionista, mayor será la μ que se pida, esto es debido a esto que se puede fijar la preferencia de riesgo y de esta manera evaluar f, lo más indicado es suponer que todos los inversionistas son neutrales al riesgo. La primera implicación a esto, es que todos los valores rinden la tasa de interés libre de riesgo, a esto se llama un mundo de riesgo neutral, gracias a esto es posible obtener el valor presente de cualquier flujo de efectivo, obteniendo el valor presente del flujo esperado a la tasa de interés libre de riesgo. Es interesante notar que este resultado no es sólo válido en un mundo neutral al riesgo sino que es valido en todos los mundos debido a la compensación de efectos al descontar y al acumular flujos de efectivo. Se puede demostrar que la valuación de un producto derivado por medio de argumentos de arbitraje dan la misma valuación utilizando el concepto de valuación de riesgo neutral, esto es de gran importancia ya que estos resultados son consistentes.

Supóngase que existe un producto derivado que paga una cantidad igual a $S_T - k$ al final del tiempo T, este producto derivado es un futuro que ya se había valuado con argumentos de arbitraje, ahora se valuará utilizando la valuación de riesgo neutral.

$$f = e^{-r(T-t)}\hat{E}(S_T - k)$$

donde $\hat{E}$ denota al estimador del valor esperado

$$f = e^{-r(T-t)}\left[\hat{E}(S_T) - k\right]$$

sustituyendo

$$f = S - ke^{-r(T-t)}$$

Este resultado fue el mismo que se obtuvo al valuar el futuro sobre una acción que no paga dividendos con argumentos de arbitraje.

Ejemplo

Supóngase que una institución financiera planea ofrecer un valor que paga una cantidad igual a S_T al tiempo T, la primera pregunta que surge es ¿Cuál es el valor del producto derivado al tiempo t en términos del precio de la acción?

Utilizando la valuación de riesgo neutral.

$$f = e^{-r(T-t)} E(S_T - S)^2$$

desarollando el binomio:

$$f = e^{-r(T-t)} \left[E(S_T^2) - 2SE(S_T) + S^2 \right]$$

donde:

$$E(S_T^2) = S^2 e^{2r(T-t) + \sigma^2 (T-t)}$$

sustituyendo y simplificando se obtiene:

$$f = e^{-r(T-t)} S^2 \left[e^{2r(T-t) + \sigma^2 (T-t)} - 2e^{r(T-t)} + 1 \right]$$

f sería el precio de este producto derivado.

Supóngase ahora que S y f son los precios actuales de una acción y un producto derivado que depende del precio de la acción. Asúmase que en el siguiente intervalo de tiempo Δt el precio de la acción se moverá a Su o bajara a Sd. Si la acción sube a Su, el valor del producto derivado será f_u. Si baja a Sd, su valor será f_d. La tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente será r. ¿Cuál es el precio del producto derivado?

Para obtener el precio del producto derivado se utilizará el principio para obtener la ecuación diferencial de Black-Scholes, ósea la construcción de portafolios sin riesgo. Considérese un portafolio que consiste en una posición en largo en α acciones de una acción y una posición en corto en un producto derivado, el valor de este portafolio es $S_u\alpha - f_u$ si el precio de la acción sube y $Sd\alpha - f$ si el precio de la acción baja. Cuando α se escoge de tal manera que al final del intervalo de tiempo ambos portafolios tengan el mismo valor, la siguiente igualdad se cumple:

$$Sd\alpha - f_d = Su\alpha - f_u$$

despejando

$$\alpha = \frac{f_d - f_u}{S(d-u)}$$

Para el valor de esta α el portafolio esta libre de riesgo por ese intervalo de tiempo, por lo tanto se puede utilizar la tasa de interés libre de riesgo por ese intervalo de tiempo, si esto no ocurriera surgiría una oportunidad de arbitraje. La posición del portafolio al final del intervalo de tiempo es $Sd\alpha - f_d$ ó $S_u\alpha - f_u$,es indistinto cual utilice ya que la α se escogió de tal manera que al final del intervalo ambos portafolios valgan lo mismo por lo tanto

$$e^{r\Delta t}\left[\frac{f_d - f_u}{d-u} - f\right] = Sd\alpha - f_d$$

despejando f obtenemos que el precio de este producto derivado es igual a:

$$f = e^{-r\Delta t}\left[\frac{(f_u - f_d)e^{r\Delta t} + f_d u - f_u d}{u-d}\right]$$

A continuación se desarrollará mediante el principio de riesgo neutral la solución a la ecuación diferencial para obtener la fórmula exacta para calcular el precio de una opción call europea sobre una acción que no paga dividendos.

El valor esperado de una opción call europea al vencimiento en un mundo de riesgo neutral es:

$$\hat{E}\left[max(S_T - X),0\right]$$

y utilizando la valuación de riesgo neutral el precio de la opción call europea es:

$$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[max(S_T - X),0\right]$$

donde $\ln S_T$ se distribuye como una normal

$$c = e^{-r(T-t)}\int_{x}^{\infty}(S_T - X)\Lambda(S_T)dS_T$$

para que una opción call europea sea ejercida es necesario que $S_T \geq x$ es por esta razón que los límites de integración van de X a ∞, realizando el cambio de variable

$$Y = \ln S_T \qquad \text{y} \qquad S_T = e^y$$

se obtiene:

$$c = e^{-r(T-t)}\int_{\ln x}^{\infty}\left(e^Y - X\right)\Phi(Y)dY$$

donde:

$$Y \approx \Phi\left[\ln S + \left(r\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

para simplificar notación se supondrá que $Y \approx \Phi(\mu, \sigma)$. Simplificando exponentes

$$c = e^{-r(T-t)}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\ln X}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-(\mu+\sigma^2))+\mu+\frac{\sigma^2}{2}}dY - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\ln X}^{\infty} Xe^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-\mu)^2}dY\right]$$

reordenando:

$$c = e^{-r(T-t)}\left[\frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\ln X}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-(\mu+\sigma^2))}dY - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\ln X}^{\infty} Xe^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-\mu)^2}dY\right]$$

realizando cambio de variable $d_1 = \frac{(\mu+\sigma^2)-Y}{\sigma}$ y $d_2 = \frac{\mu-Y}{\sigma}$

$$c = e^{-r(T-t)}\left[\frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{d_1} e^{-\frac{d^2_1}{2}}dd_1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{d_2} Xe^{-\frac{d^2_2}{2}}dd_2\right]$$

sustituyendo $\mu = \ln S + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ y $\sigma = \sigma\sqrt{(T-t)}$

$$c = S(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

con:

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

De la misma manera se puede demostrar que el valor de una opción put europea es:

$$p = Xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$$

Ejemplo

Considérese una acción que actualmente cuesta $50 y una opción sobre la misma acción con fecha de expiración dentro de 6 meses, con un precio de ejercicio de $48, la tasa de interés libre de riesgo es 10% por año, y la volatilidad es del 30% por año.

Si la opción fuera una call europea el valor de la opción sería:

$d_1 = 0.8951$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = 0.6830$

$$c = 50\Phi(0.8951) - 48e^{-0.05}\Phi(0.6830)$$

$$c = 7.081$$

Si la opción fuera una put europea el valor de la opción sería:

$$p = 48e^{-0.05}\Phi(-0.6830) - 50\Phi(-0.8951)$$

$$p = 0.919$$

Hasta este momento sólo se ha tratado con opciones sobre acciones que no pagan dividendos, ahora se estudiará el efecto que tienen estos sobre el precio de la opción, para esto se asumirá que los dividendos pueden ser predichos con certeza (monto y día en que se otorgaran). De esta manera una acción que paga dividendos puede ser descompuesta en una parte sin riesgo y otra con riesgo. Como se sabe los dividendos una vez otorgados cuasan que el precio de la acción baje, y esto afecta al precio de la opción. Una manera de tomar en cuenta el pago de dividendos, si este ocurre dentro del periodo de existencia de la opción, es eliminarlo restándole a la acción el valor presente de estos dividendos. Es importante notar que aunque se conozca con certeza el dividendo, el precio de la acción no baja en exactamente esa cantidad, pero aquí se supondrá que el precio de la acción baja exactamente los dividendos. Bajo estos argumentos el precio de la opción podrá ser calculado como si se tratara de una opción sobre una acción que no paga dividendos.

Utilizando el ejemplo anterior supóngase que la acción pague dividendos dentro de 2 y 3 meses por \$0.7 y \$0.7 respectivamente.

$$D = 0.7e^{-0.167*0.1} + 0.7e^{-0.416*0.1} = 1.263$$

Estos dividendos se descontarán al precio actual de la acción y se calculara el precio de la opción con la fórmula de Black-Shcoles.

$$S = 50 - 1.263 = 48.737$$

$$c = 48.737\Phi(0.8951) - 48e^{-0.05}\Phi(0.6830)$$

$$c = 6.052$$

La fórmula de Black and Scholes fue utilizada para valuar opciones sobre acciones que pagan dividendos, así como para acciones que no paga dividendos, pero también puede ser utilizada para valuar opciones call y put (europeas) sobre índices, divisas, y contratos futuros pero además, también puede ser utilizada para valuar opciones call americanas sobre acciones que pagan dividendos y en algunas ocasiones para valuar opciones call americanas que pagan dividendos. Se darán algunos ejemplos de como transformar la fórmula para valuar estos instrumentos.

Primero examinemos la fórmula de valuación de una acción que paga dividendos en forma continua y conocida, denomínese a estos como q; la forma de adaptar la fómula de Black and Scholes a este instrumento, es pensar en el argumento anteriormente expuesto para una acción que paga dividendos una o varias veces durante la vida de la opción, y como consecuencia de este argumento decimos que para quitar de la acción el efecto de los dividendos que se pagan continuamente es descontarle al precio actual de la acción esos dividendos, y de esta manera es como si se tuviera una acción que no paga dividendos; la otra modificación que hay que realizar es dentro de los límites de integración. Esta modificación hace cambiar a d_1 y d_2.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

la fórmula para calcular el precio de una opción call europea es:

$$c = Se^{-q(T-t)}\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

y para calcular una opción put europea es:

$$c = Xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - Se^{-q(T-t)}\Phi(-d_1)$$

Ahora realizando una analogía con un índice accionario podemos decir que la fórmula anterior también puede usarse para calcular el precio de una opción sobre un índice accionario, aunque es importante notar que antes de utilizar esta fórmula, se deben tomar en cuenta las características y reglas que rigen el índice en estudio, ya que en México las reglas sobre el índice son diferentes a la de otras partes del mundo. Las opciones sobre índices son comúnmente utilizados para proteger portafolios, más adelante se darán ejemplos de como lograr esta cobertura.

OPCIONES SOBRE DIVISAS

Este tipo de opciones son comúnmente utilizados para proteger riesgos de tipo cambiario, pero su análisis es análogo a los instrumentos anteriormente mencionados. En una moneda no existen dividendos, pero si ganan intereses iguales a los que se otorgan país de origen de la moneda (en México esto no ocurre), realizando los cambios correspondientes llegamos a que el precio de una opción call europea sobre una moneda es:

$$c = Se^{-r_f(T-t)}\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

y para una opción put europea sobre una moneda es:

$$p = Xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - Se^{-r_f(T-t)}\Phi(-d_1)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(r-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(r-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

OPCIONES SOBRE FUTUROS

Cuando se trata de una opción call sobre un futuro y esta es ejercida, el comprador de la opción adquiere el derecho de tomar la posición en largo en el contrato futuro más la diferencia entre el precio futuro actual y el precio de ejercicio. Si se trata de una opción put sobre un futuro y esta es ejercida el comprador de la opción tiene el derecho de tomar la posición en corto en el contrato futuro más la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio futuro actual. El precio de una opción call europea sobre un futuro se calcula como:

$$c = e^{-r(T-t)}\left[F\Phi(d_1) - X\Phi(d_2)\right]$$

y para una opción put europea sobre un futuro es:

$$p = e^{-r(T-t)}\left[F\Phi(-d_2) - X\Phi(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

CAPITULO V

PRUEBAS DE NORMALIDAD PARA VARIABLES SUBYACENTES

El supuesto más importante que se hizo acerca de la variable subyacente, ya sea ésta una acción, un índice accionario, una moneda, un futuro etc. fue el decir que el logaritmo natural de la variable subyacente se distribuía como una normal con una cierta media y varianza, si esto no fuera cierto la fórmula derivada para valuar las opciones no sería totalmente confiable debido al sesgo que podría presentarse en el valor esperado de la variable subyacente. Lo que a continuación se propondrá será realizar una prueba estadística para decidir si el logaritmo natural de la variable subyacente se distribuye o no como una normal.

Un procedimiento para verificar la normalidad del logaritmo natural de las observaciones es el gráfico, el cual consistiría en realizar un histograma de nuestra variable en estudio y verificar este hecho visualmente, uno de los problemas que presenta este método es que éste es demasiado subjetivo, lo cual tendría como consecuencia que mientras que para un investigador las observaciones son normales para otro no lo son.

Otro manera de verificar la normalidad de observaciones es por medio del coeficiente de sesgo y el coeficiente de curtosis, los cuales miden el grado de simetría o asimetría y el grado de apuntamiento respectivamente. Si una variable aleatoria se distribuye como una normal se debe cumplir que:

$$C_s = \frac{E\left[(x-\mu)^3\right]}{\left[E(x-\mu)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{y} \quad C_k = \frac{E\left[(x-\mu)^4\right]}{\left[E(x-\mu)^2\right]^2} = 3$$

si las observaciones que tenemos son $x_1, x_2, \ldots x_n$ los estimadores para C_s y C_k son:

$$\hat{C}_s = \frac{n^{\frac{1}{2}} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^3}{\left[\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{y} \quad \hat{C}_k = \frac{n \sum_1^n (x_i - \bar{x})^4}{\left[\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2\right]^2}$$

Teóricamente cuando una variable aleatoria se distribuye normalmente C_s es igual a cero y C_k es igual a 3 pero cuando se trabaja con una muestra finita estas medidas no son exactamente iguales a 0 y a 3 respectivamente, debido a que estas están afectadas por variaciones muestrales que desvirtúan los valores de $\hat{C}_s$ y $\hat{C}_k$. Es por esta razón que en algunas ocasiones no se podrá decidir con estas 2 medidas si una variable aleatoria se distribuye como una normal o no; por este motivo se requiere de un criterio para distinguir lo verdadero de lo artificial.

Uno de los más recientes contribuciones a este respecto son las pruebas propuestas por D'Agostino y Pearson (1923), Brown y Sheaton (1975), Pearson y D'Agostino (1977), sin embargo uno de los estudios más recientes que se han realizado en pruebas de normalidad es el desarrollado por Jarque y Bera (1987), estos hicieron uso del multiplicador de Lagrange para derivar una prueba de normalidad para observaciones el cual es simple de implementar y asintóticamente eficiente.

El estadístico de prueba propuesto por Jarque y Bera es:

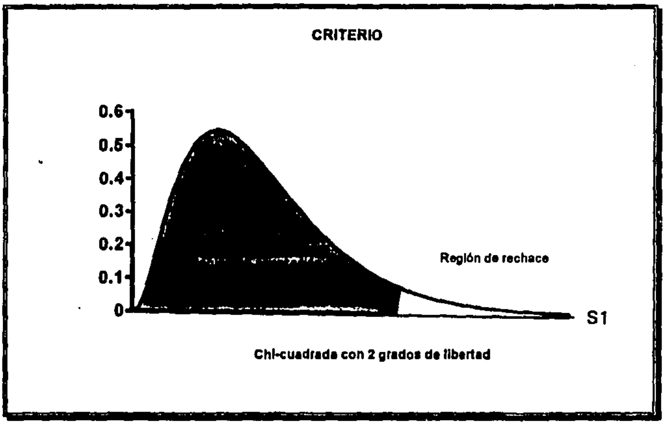
$$J = \frac{\hat{C}^2_s}{6} + \frac{\left(\hat{C}_k - 3\right)^2}{24} \qquad \text{donde } J \approx \chi_{(2)}^{\ 2}$$

La hipótesis a ensayar es:

$$H_0 : x \approx \Phi\left(\mu, \sigma^2\right) \qquad ó \qquad C_s = 0 \quad \text{y} \quad C_k = 3$$

$$H_0 : x \not\approx \Phi\left(\mu, \sigma^2\right) \qquad ó \qquad C_s \neq 0 \quad \text{y/o} \quad C_k \neq 3$$

El criterio a utilizar es no rechazar H_0 a un nivel de significancia de $\alpha\%$ si J se encuentra dentro de la región de aceptación



Ahora una vez establecidos todos los conceptos, se pasará a ensayar la prueba de hipótesis de normalidad para el logaritmo natural de la variable subyacente.

Ejemplo:

Se tienen los datos del precio cierre semanal de TELMEX (ver apéndice 1) y se quiere saber si estadísticamente el logaritmo natural de TELMEX se distribuye normalmente o no. El estimador de la curtosis y el sesgo son:

$$\hat{C}_k = 2.657 \qquad \text{y} \qquad \hat{C}_s = -01.02$$

Como se observa la distribución está moderadamente sesgada a la izquierda ya que coeficiente de sesgo es negativo. También se puede apreciar que ésta es menos apuntada que una distribución normal, dado estas dos medidas estadísticas no se puede decir con certeza si está variable se distribuye como una normal o no. Utilizando el estadístico de prueba Jarque-Bera se obtiene:

$$J = 0.702$$

Como ya se había mencionado el estadístico se distribuye como una Chi-cuadrado con dos grados de libertad, y se sabe que $\chi^2_{(2,0.99)} = 9.21$, por lo tanto no se puede rechazar H_0 a un nivel de significancia del 1%, por lo tanto se concluye que el logaritmo natural de TELMEX se distribuye como una normal.

Una suposición implícita que se hizo fue decir que el cambio en la variable aleatoria era independiente de los cambios antecesores, esto quiere decir que las autocovarianzas de los cambios son iguales a cero, uno de los problemas que presenta esta medida, es que está afectada por las unidades, y por esta razón se trabajara con las auto correlaciones ρ_0, ρ_1, ρ_3...definidas a travez de:

$$\rho = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{E(X_t - \mu)^2} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3....$$

Las cuales generan la función de auto correlaciones $\{\rho_k\}$.

Como estimador de ρ_k se utilizará la auto correlación muestral, que viene dado por:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{N}(x_t - \mu)^2} \qquad k = 0,1,2\ldots$$

Ahora para verificar que la variable $\{\ln S_i - \ln S_{i-1}\}$ son mutuamente independientse, se tiene que mostrar la no auto correlación para esto se debe verificar que $r_k(\ln S) = 0$ para toda k. Para verificar que k auto correlaciones simultáneas son independientes o no, se propone el estadístico Q de Box y Ljung (1978) el cual, si k es grande (k>20), sigue aproximadamente una distribución Chi-cuadrada con $k - p - q$ grados de libertad; de aquí el valor de Q calculado debe ser comparado con valores de tablas, con los correspondientes grados de libertad, para efectuar la prueba de significación. El estadístico propuesto es:

$$Q = (N-1)\sum_{1}^{k}\frac{r_k^2(\ln S_i - \ln S_{i-1})}{(N-1)}$$

Una vez que se establecieron las bases teóricas se procederá a realizar una prueba de independencia.

Ejemplo:

Supóngase que se tienen los cierres semanales del índice de precios y cotizaciones de la bolsa (ver apéndice 1) y se quiere saber si los cambios del logaritmo natural del índice son independientes o no. Realizando las correspondientes operaciones se obtiene que:

$$Q=(88-1)\sum_{1}^{20}\frac{r_{20}^{2}(\ln S_{t}-\ln S_{t-1})}{(88-1)}=8.473$$

El valor de t debe compararse con tablas de la distribución Chi-cuadrado con 20 grados de libertad, ya que los puntos porcentuales del 5% y 10% son respectivamente $\chi^2_{(20,0.95)}=32.7$ y $\chi^2_{(20,0.9)}=30.0$. Por lo tanto se concluye que el valor $Q'=8.473$ no conduce al rechazo de la hipótesis de que la diferencia de la variable son independientes, aún a un nivel de significancia del 5% y del 10%.

IMPORTANCIA DE LAS PRUEBAS DE NORMALIDAD E INDEPENDENCIA

Como se explicó, el modelo de comportamiento del precio de las acciones asumía que la distribución del precio de la acción en un tiempo futuro, es lognormal. Algunas pruebas hechas en E.U muestran frecuentemente que opciones que estan in-the-money o out-the money, están mal valuadas en relación a las opciones que están at-the-money. Este sesgo en el precio puede ser explicado por la diferencia entre la distribución lognormal asumida por Black-Scholes y la verdadera distribución de la variable en estudio. Es por esta razón que es importante realizar pruebas de normalidad, ya que si estamos valuando una opción sobre una acción y ésta no se distribuye como una lognormal seguramente no se estará valuando bien a la opción. Una posible solución para encontrar el sesgo o refinar el precio de la opción es por medio de la relación 'put call parity, ya que ésta relación es independiente de la distribución terminal del precio de la acción. Si la opción call europea con precio c esta out of the money, la correspondiente opción put europea p está in the money, y viceversa . Consecuentemente, una opción put europea debe exhibir el mismo sesgo como la correspondiente opción call out of the money. Igualmente, una opción call europea que esta in the money debe exhibir el mismo sesgo en el precio que la correspondiente opción put europea out of the money.

Ahora en cuanto a la independencia de la diferencia de las observaciones de una acción también pueden causar sesgo, ya que cuando se calcula la varianza se esta asumiendo independencia en las observaciones, ya que como se sabe:

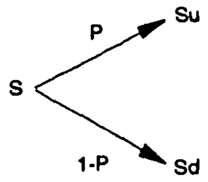
$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)\pm Cov(X+Y)$$

Por lo tanto se puede estar sobre estimando o subestimando a la varianza.

MÉTODOS ALTERNATIVOS DE VALUACIÓN

Como se mencionó la fórmula de Black and Scholes tiene sus limitaciones, ya que con éste no se puede valuar algunas opciones call americanas en acciones que pagan dividendos y tampoco puede ser utilizado para valuar otras opciones americanas como las puts. De aquí la necesidad de encontrar algún método para valuar estas opciones, un método numérico para realizar esto fue propuesto por Cox, Ross y Rubinstein.

Primero considérese que se tiene una acción que no paga dividendos y que en el siguiente intervalo de tiempo Δt el precio de la acción sólo puede ser S_u o S_d, donde S_u representa una alza en el precio y S_d una baja, esto impone dos restricciones para u y d, $u>1$ y $d>1$. Dado esto se antoja asociar esto, a un modelo binomial de la siguiente manera:



El problema que se presenta es en la determinación de u ,d y p, pero esto se puede resolver con el planteamiento de 2 ecuaciones:

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d$$

que es el valor esperado de la acción en el intervalo de tiempo Δt en un mundo de riesgo neutral. La segunda surge de la igualdad $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$ y de saber que la varianza de la acción en un intervalo de tiempo Δt es $S^2\sigma^2\Delta t$, con estos dos hechos podemos decir que esta relación se cumple:

$$\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2$$

de aquí se obtienen 3 condiciones:

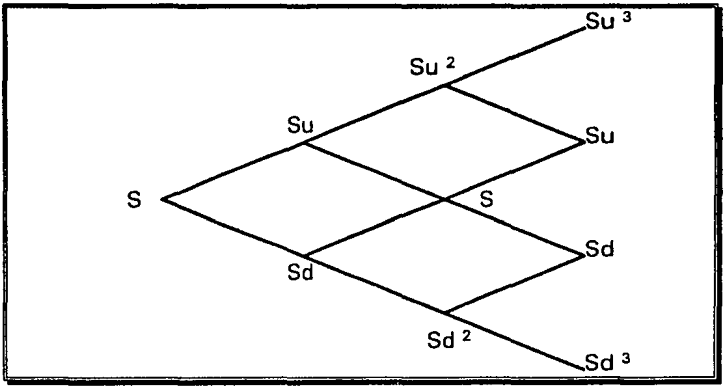
$$p = \frac{a-d}{u-d}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad \text{donde} \qquad a = e^{r\Delta t}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Es importante notar que estas aproximaciones de p, u y d son sólo correctas en el límite $\Delta t \to 0$ ya que como se había mencionado la media y la varianza de una opción son las de una lognormal con los parámetros antes mencionados.

Ahora se construirá un árbol de valores para una acción que no paga dividendos.



Al tiempo 0 el valor de la acción es S, al siguiente intervalo de tiempo Δt el valor de la acción bajo este esquema puede tomar 2 valores Su y Sd, al siguiente intervalo de tiempo los valores que puede tomar la acción son 3 Su^2, S y Sd^2. En general el precio de la acción al tiempo $i\Delta t$ esta dada por:

$$Su^i d^{i-j} \qquad\qquad j = 0, 1, 2 \ldots i$$

j denota el nodo en que se está ubicado. Para valuar una opción put americana sobre una acción en cada punto, se calculará primero el precio de la opción al final del árbol por medio de su valor intrínseco, es decir, como la diferencia del precio de ejercicio y el precio de la acción. Para calcular el valor de la opción para los nodos restantes, ademas de calcular el valor intrínseco, se calculará el valor presente del valor esperado del precio de la opción, y se tomará el mayor de estos dos para asignar el valor de la opción y así sucesivamente para calcular todos. Una suposición que se realizó es decir que la opción americana no es ejercida en ningún nodo, por que de otra manera este análisis no podria realizarse. Esto quedará más claro con un ejemplo.

¿Calcular el precio de una opción put americana sobre una acción que no paga dividendos cuando el precio es \$60, el precio de ejercicio es \$60, la tasa de interés libre de riesgo es 10% por año y la volatilidad es del 45% por año. Esto quiere decir que S=60, x=60, r=0.1, σ= 0.45 y T=0.25. Como se está dividiendo la vida en intervalos de 1 mes $\Delta t = 0.08335$entonces

$$u = 1.2386 \qquad d = 0.8782 \qquad a = 1.0083 \qquad p = 0.4996$$

Ahora para calcular el precio de la acción en el j-ésimo nodo al tiempo $i\Delta t$ se usará $Su^j d^{i-j}$, para hacer más fácil la notación se denotará como (i, j) al precio de la acción en ese punto. Por ejemplo, se calculará el precio de la acción en (2,2) y (3,1)

$$(2,2) = 60(1.1386)^2(0.8782)^0 = 77.78$$

$$(3,2) = 60(1.1386)^1(0.8782)^2 = 52.68$$

De esta manera se obtienen los precios de la acción en cada nodo, una vez obtenidos todos los posibles precios bajo este esquema, se procede a calcular el precio de la opción, la forma de hacerlo es suponiendo que la opción no es ejercida, ósea que es retenida hasta el final, primero se calcula el valor de la opción a la fecha de expiración ósea se utilazará la siguiente fórmula.

$$C_{N,j} = max[X - Su^i d^{N-j}, 0] \qquad j = 0, 1 \ldots, N$$

por ejemplo, se calculará $C_{3,3}$ y $C_{3,1}$

$$C_{3,3} = max[60 - 85.56, 0] = 0$$

$$C_{3,1} = max[60 - 52.68, 0] = 7.32$$

De igual manera se calcula el valor de la opción para el resto de los nodos, una vez hecho esto se procede al cálculo del valor de la opción para los nodos intermedios calculando primero los valores para $i = N-1$, y luego para $N-2$ y así sucesivamente hasta llegar al punto de partida con el siguiente criterio para la asignación de valores para la opción.

$$C_{i,j} = max\left\{\left[X - Su^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}\left[pC_{i+1,j+1} + (1-p)C_{i+1,j}\right]\right]\right\}$$

$$\text{para} \quad 0 \leq i \leq N-1 \quad 0 \leq j \leq i$$

por ejemplo calculemos el valor de la opción en (2,1)

$$C_{2,1} = max\left\{\left[60-60, e^{-0.0833\times0.1}\left[0-0+0.5003\times7.32\right]\right]\right\} = 3.62$$

siguiendo esta misma metodología se obtienen los restantes valores de la opción hasta llegar al origen.

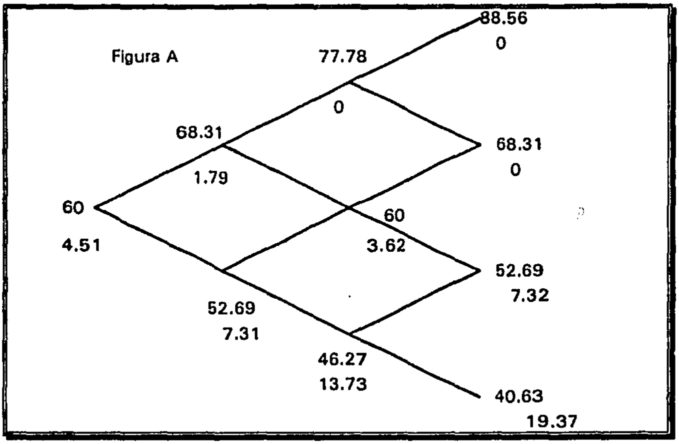


Figura A

El valor de la opción que se encontró fue de 5.16, si se requiriera de una mayor precisión se tendría que subdividir la vida de la opción en intervalos de tiempo más pequeños.

Esta misma metodología es la que se utiliza para opciones en divisas, índices accionarios, acciones que pagan dividendos continuamente, futuros etc.

Ahora analicemos a las opciones americanas que pagan dividendos, para hacerlo supongamos que la volatilidad es constante y el dividendo solo se da una vez durante la vida de la opción por una cantidad igual a D. La metodología es la misma pero al igual que las opciones sobre acciones que pagan dividendos que se valuaron con la fórmula de Black and Scholes, se supondrá que la acción esta compuesta por 2 elementos, una cierta, en este caso los dividendos y una incierta que es en sí el precio de la acción. Supóngase que la fecha de dividendos es en τ, el cual se dará entre $k\Delta t \leq \tau \leq (k+1)$. El valor del componente incierto al tiempo t es

$$S^*(t) = S(t) \qquad \text{cuando } t > \tau$$

y

$$S^* = S(x) - De^{-r(\tau - x)} \qquad \text{cuando } t \leq \tau$$

Una vez hecho esto se puede proceder a calcular d, u, p de acuerdo a las fórmulas antes mencionadas. Se construye el árbol para $S^*(t)$, y después se construye $S(t)$ agregando a cada nodo el valor presente de los dividendos esperados y obtener un nuevo árbol para S. Al tiempo $i\Delta t$ a cada nodo le corresponde el precio

$$S^*(t)u^j d^{i-j} + De^{-r(\tau - i\Delta t)} \qquad j = 0,1\ldots i$$

donde $\quad i\Delta t < \tau$

Este mismo resultado puede ser generalizado cuando hay muchos dividendos.

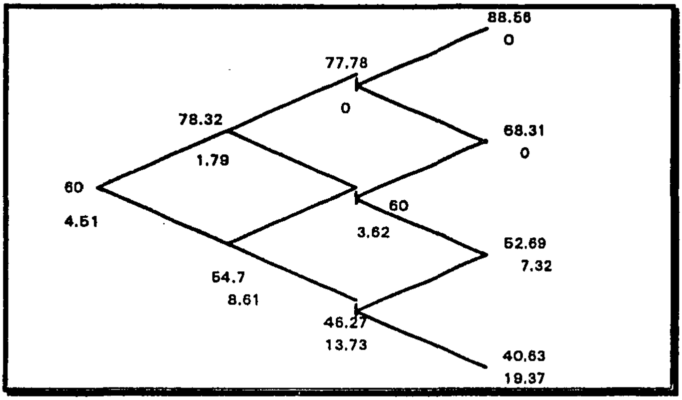
Ejemplo:

Supóngase que existe una opción put americana en el mercado sobre una acción que expira dentro de 3 meses. Se espera que la acción pague dividendos dentro de un mes y medio por 2.025. El precio inicial de la acción es \$62, el precio de ejercicio es \$50 , la tasa de interés libre de riesgo es 10% por año, la volatilidad es 40% por año.

Como se mencionó, primero se construirá el árbol de precios para S^*, es decir quitando el efecto de los dividendos durante la vida de la opción. Realizando esto se encuentra que el valor presente de los dividendos es:

$$2.025e^{-0.125\times 0.1} = 2$$

Por lo tanto el valor inicial para S^*es 50. Suponiendo un 40% de volatilidad para S^*, el árbol binomial de esté es el mismo obtenido en la figura A. Agregando el valor presete de los dividendos a cada punto se llega al siguiente árbol. El valor calculado para el precio de la acción es \$5.16. Existen algunas técnicas para refinar el precio de la acción pero van más allá del objetivo de esta tesis, de cualquier manera se da bibliografía suficiente para lograr este objetivo


88.56
0
77.78
0
78.32
1.79
68.31
0
60
4.51
60
3.62
52.69
7.32
54.7
8.61
46.27
13.73
40.63
19.37

CAPÍTULO VI

APLICACIONES

Al principio se dijo que los productos derivados son utilizados para cubrir riesgos, pero en algunas ocasiones también son utilizados para obtener financiamiento más barato, este es el caso de los swaps. Antes de continuar se definirá lo que es el riesgo.

Riesgo: Es la volatilidad (desviación estandar) del flujo neto de efectivo de una unidad de negocio.

TIPOS DE RIESGO

Normalmente se clasifican en 7 categorías: riesgo de crédito, riesgo de liquidez, riesgo de operación, riesgo de prepago y riesgo de adecuación del capital. En estos 7 riesgos básicos se puede decir que el riesgo de adecuación del capital no es propiamente un riesgo, pero debido a que en muchas ocasiones las autoridades reguladoras no asignan debidamente el capital, este también puede ser considerado como un riesgo. Existen otros tipos de riesgo, pero casi todos ellos se desprenden de estos. Como primer ejemplo de aplicación se tiene el de cobertura de portafolios, esto se logra mediante el uso de futuros sobre índices accionarios. Se sabe que la relación entre el rendimiento de un portafolio y el rendimiento del mercado es descrito por la β (beta). Esta β es la pendiente de la mejor línea obtenida por mínimos cuadrados ordinarios cuando se corre la siguiente regresión:

$$\left(r_M - r_f\right) = \hat{a} + \hat{\beta}\left(r_P - r_f\right) + \varepsilon$$

donde:

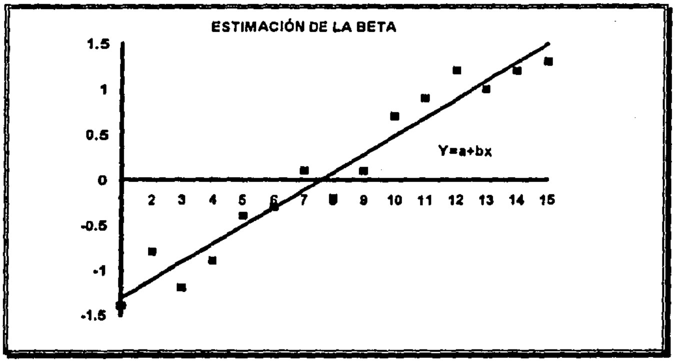
r_M: Rendimiento del mercado.

r_f: Tasa de interés libre de riesgo.

r_P: Rendimiento del portafolio.

ε: Término estocástico.

Otra información que nos puede proporcionar esta regresión es la R^2, la cual nos indica el riesgo de mercado del portafolio con respecto a todo el sistema, mientras que 1-R^2 nos da el riesgo especifico del portafolio.



Supóngase que S es el valor del portafolio y F es el precio futuro de un contrato futuro sobre un índice accionario. Se puede demostrar que el número Óptimo aproximado de contratos futuros para proteger a un portafolio es:

$$N^{*} = \beta \frac{S}{F}$$

Si se tomara este número de contratos futuros, se puede verificar que el rendimiento de este portafolio es igual a la tasa de interés libre de riesgo. Una de las preguntas que surgen es ¿Porqué invertir en un portafolio accionario que rinde la tasa de interés libre de riesgo? la respuesta a esto es que se puede pensar que el portafolio estÁ bien escogido y éste superará al mercado.

Las opciones también pueden ser utilizadas para proteger portafolios, pero hay que recordar que a diferencia de los futuros en las opciones hay que pagar una prima.

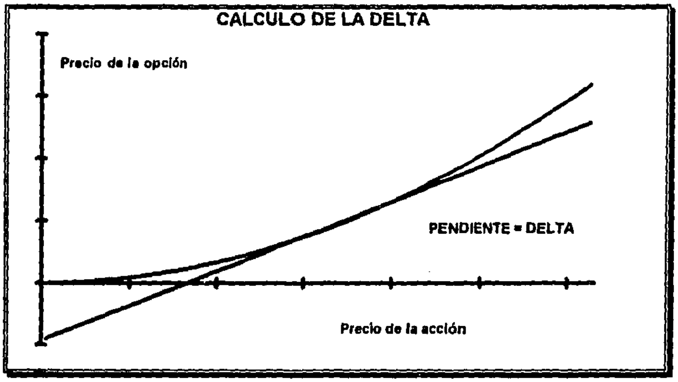
PROTECCIÓN DE POSICIONES EN OPCIONES

Una institución financiera puede ofrecer productos que están relacionados con opciones a sus clientes. Si por ejemplo, uno de sus clientes quiere comprar una opción, la institución sale al mercado y la compra, esto neutraliza su riesgo, es decir, no toma una posición. Sin embargo, cuando la opción ha sido hecha a la medida del cliente y está no corresponde al instrumento negociado en la bolsa, la institución financiera está expuesta a un riesgo.

La cobertura de una opción es engañosa, ya que no se sabe con exactitud si se ejercerá o no la opción; una manera de cubrirse es mediante la compra del bien subyacente, pero la pregunta es cuanto comprar del bien subyacente. El problema es también debido a la sensibilidad de la opción al precio de la variable subyacente conforme las condiciones cambian. Esto significa que la apropiada posición a tomar en el activo subyacente también cambia. Otro problema que existe es que el valor de la opción también es sensible a los cambios de la volatilidad. En esta segunda dimensión la opción no puede cubrirse mediante la toma de posiciones en la variable subyacente.

La forma más sofisticada de cubrir un portafolio de opciones a cambios pequeños en el precio de la variable subyacente en un pequeño cambio de tiempo es por medio de la "delta hedging" la cual se define como la tasa de cambio de la opción con respecto al precio de la variable subyacente. Una aproximación a la Delta es:

$$\Delta = \frac{\Delta c}{\Delta S}$$



Es importante darse cuenta que la Delta sólo protege en un instante y por lo tanto se tiene que estar recalculando para continuar estando protegido, ya que la curvatura es diferente en precios diferentes.

La delta para una opción call en una acción que no paga dividendos es:

$$\Delta = \Phi(d_1)$$

y para una opción put europea es:

$$\Delta = 1 - \Phi(d_1)$$

Usar la Delta para una posición en corto en una opción call europea, consistiría en mantener una posición en largo en $\Phi(d_1)$ acciones. De la misma manera utilizar la Delta para una posición en largo en una opción call europea consistiría en tener una posición en corto en $\Phi(d_1)$ acciones.

La Delta para una opción put europea es negativa, lo cual indica que una posición en largo en una opción put debe ser cubierta con una posición en largo en la variable subyacente, y una posición en corto en una opción put debe ser cubierta con una posición en corto en la acción.

Ejemplo:

Supóngase que una institución financiera, emite una opción call europea sobre una acción que no existe en el mercado, y esta quiere cubrir su posición. El precio de la acción es \$100 y se emitieron 500 opciones, la Delta es 0.5. Esto quiere decir que la institución financiera debe cubrirse comprando $0.5 \times 5000 = 2500$ acciones.

OPCIONES INCRUSTADAS EN INSTRUMENTOS FINANCIEROS

Algunos instrumentos financieros contienen opciones incrustados para hacer al instrumento más flexible y atractivo tanto para el emisor como para el comprador.

Un ejemplo de éstos, son los bonos llamados "callable bond" o bonos rescatables antes de su vencimiento; estos bonos permiten al emisor recomprar el bono a un precio predeterminado en una cierta fecha. El tenedor del bono ha vendido al emisor una opción call. El valor de la opción se refleja en la tasa del bono, por lo tanto, este tipo de bonos proveen al inversionista con rendimiento más grande que otros bonos que no tienen esta opción. Un "puttable bond" es un bono que da el derecho al tenedor la demanda temprana de la redención a un precio determinado y a una fecha determinada en el futuro. El tenedor de ese bono ha comprado una opción put sobre un bono, así como el bono en sí. Esto también se refleja en el rendimiento del bono, por lo tanto el bono con rasgos de opción put provè de un rendimiento más bajo que el rendimiento obtenido por un bono normal. Los privilegios en depósitos a tasa fija para una redención temprana (cuentas de ahorro, tarjetas de débito) tienen características análogas a un bono con una opción call incrustada.

En el año de 1986 se emitieron bonos cupón cero por una compañía petrolera, a estos bonos se le agregaron opciones. Estos bonos tenían un valor nominal de \$1000 dólares, la compañía prometía pagar una cantidad basada en el precio del petróleo al vencimiento del bono. Esta cantidad adicional era igual al producto de 179 y el exceso del precio del barril al vencimiento de $25 dólares. Sin embargo, la cantidad adicional a pagar era restringido a $2550 (el cual corresponde a un precio de $40 dólares por barril). Este bono proveía de un interés adicional a los tenedores si la compañía se veía beneficiada por una alza en el precio del petróleo . Se puede demostrar fácilmente que la compañía petrolera ofrecía un producto derivado conjuntamente con un bono, el cual consistía de una posición en largo en una opción call europea con un precio de ejercicio de $25 dólares y una posición en corto en una opción call europea con precio de ejercicio de $40 dólares. Estas 2 opciones se pueden valuar con la fórmula de Black and Scholes, pero la variable subyacente en este caso es el precio del petróleo (se debe verificar que se cumplen los supuestos más importantes sobre los que se basa la fórmula de Black and Scholes).

MANEJO DE BRECHA (GAP MANAGMENT)

Las instituciones financieras (bancos, empresas, compañías de seguro etc.,) se encuentran frecuentemente expuestas al riesgo de fluctuación de tasa de interés, esto es debido principalmente a que estas empresas tienen activos y pasivos con diferente plazo y en cantidades también diferentes.

Supóngase un banco cuyos activos están invertidos a 1 año a una tasa de interés fija del 8% pagadero cada 3 meses (estos pueden ser préstamos hechos por el banco) mientras que los pasivos están a un plazo de 3 meses (un banco normalmente se fondea con certificados de depósitos) a una tasa del 6%; el riesgo para el banco es que si la tasa de interés a tres meses sube, el margen de intermediación para el banco baja y puede llegar un momento en el cual el banco comience a perder capital. En muchas ocasiones los bancos no pueden cerrar su gap o brecha a un nivel aceptable debido a su estrategia y cuestiones de liquidez, es ahí donde se pueden utilizar futuros y swaps para cubrir su riesgo de tasa de interés.

Por último, para terminar este capítulo se mencionará como última aplicación, que las opciones también pueden ser utilizadas para la valuación de la deuda y las acciones de un banco, pero éste es un poco complicado de desarrollar y vá más allá de los objetivos de esta tesis.

CONCLUCIONES

El mercado de productos derivados en México ha comenzado, y es necesario que la gente dedicada a El área financiera aprenda a manejar estos instrumentos, ya que estos son de gran utilidad y dan un gran dinamismo a los mercados; por otro lado, si se comienzaN a utilizar estos productos y se valúan mal, esto puede ocasionar pérdidas a muchas instituciones teniendo como consecuencia el desequilibrio del mercado. Actualmente las autoridades reguladoras ponen cierta resistencia a la creación de estos mercados en México, no porque piensen que estos mercados sean malos, sino por que dudan de que actualmente haya la capacidad humana en México para realizar la correcta valuación y la administración de las instituciones que soportan a estos mercados.

Una de las ventajas de la creación de estos mercados en México es que permitirá a los administradores de riesgos tener una poderosa arma para la administración de sus activos y pasivos, es decir, podrán realizar muchas operaciones que anteriormente no se realizaban por estar expuesto a algún tipo de riesgo, y a las instituciones que actualmente están expuestas algún riesgo podrán cubrirse. Otra ventaja adicional para las instituciones financieras es que actualmente las autoridades reguladoras trabajan en reglas de capitalización que tomen en cuenta la diversificación de riesgos y la cobertura que dichas instituciones realicen con sus riesgos, teniendo como consecuencia menores coeficientes de capitalización.

Uno de los aspectos importantes de notar es que estos mercados no eliminan los riesgos del sistema sino hacen una mejor distribución de estos riesgos. Esto es similar a lo que sucede en las compañías de seguros.

APÉNDICE 1

En este apéndice se presenta una tabla la cual incluye el índice de la bolsa, así como el precio de las acciones TELMEX y TAMSA, cada uno de las conceptos anteriores, acompañados por su respectivo logaritmo natural y sus variaciones logarítmicas respectivas. La fecha comprendida, abarca desde el 27 de Abril 92 hasta el 30 de Diciembre de 1993.

PRECIOS ACCIONARIOS

FECHA	INDICE BURSATIL	LN(I.P.C)	VARIACIO SEMANAL	TAMSA	LN(T)	VARIACIO SEMANAL	TELMEX L	LN(T.L)	VARIACIO SEMANAL
1992	1,881.58	7.5399		24.00	3.1781		8.95	2.1917	
ABRIL	1,822.27	7.5078	-0.0320	20.40	3.0155	-0.1625	8.65	2.1576	-0.0341
	1,810.54	7.5014	-0.0065	18.70	2.9285	-0.0870	8.65	2.1576	0.0000
	1,871.64	7.5346	0.0332	17.90	2.8848	-0.0437	8.98	2.1944	0.0369
	1,882.26	7.5402	0.0057	17.90	2.8848	0.0000	8.90	2.1861	-0.0084
	1,838.30	7.5166	-0.0236	19.00	2.9444	0.0596	8.58	2.1489	-0.0372
MAYO	1,847.64	7.5217	0.0051	20.50	3.0204	0.0760	8.68	2.1604	0.0116
	1,810.16	7.5012	-0.0205	19.00	2.9444	-0.0760	8.60	2.1518	-0.0087
	1,822.38	7.5079	0.0067	19.80	2.9857	0.0412	8.60	2.1518	0.0000
	1,892.33	7.5456	0.0377	19.25	2.9575	-0.0282	8.83	2.1776	0.0258
JUNIO	1,575.14	7.3621	-0.1835	15.40	2.7344	-0.2231	7.15	1.9671	-0.2105
	1,563.79	7.3549	-0.0072	15.10	2.7147	-0.0197	7.15	1.9671	0.0000
	1,686.25	7.4303	0.0754	17.00	2.8332	0.1185	7.53	2.0182	0.0511
	1,600.97	7.3784	-0.0519	15.90	2.7663	-0.0669	6.80	1.9169	-0.1013
JULIO	1,683.00	7.4283	0.0500	15.50	2.7408	-0.0255	7.30	1.9879	0.0710
	1,617.30	7.3885	-0.0398	16.00	2.7726	0.0317	7.10	1.9601	-0.0278
	1,674.16	7.4231	0.0346	16.95	2.8303	0.0577	7.63	2.0314	0.0713
	1,522.94	7.3284	-0.0947	16.00	2.7726	-0.0577	6.88	1.9279	-0.1035
AGOSTO	1,560.40	7.3527	0.0243	18.00	2.8904	0.1178	7.48	2.0116	0.0837
	1,516.62	7.3242	-0.0285	17.45	2.8593	-0.0310	7.30	1.9879	-0.0237
	1,424.64	7.2617	-0.0626	17.40	2.8565	-0.0029	6.93	1.9351	-0.0527
	1,408.96	7.2506	-0.0111	16.90	2.8273	-0.0292	7.00	1.9459	0.0108
SEPTIEM	1,392.64	7.2390	-0.0117	17.10	2.8391	0.0118	7.00	1.9459	0.0000
	1,294.09	7.1656	-0.0734	17.15	2.8420	0.0029	6.70	1.9021	-0.0438
	1,307.74	7.1761	0.0105	17.15	2.8420	0.0000	6.75	1.9095	0.0074
	1,252.10	7.1326	-0.0435	16.15	2.7819	-0.0601	6.53	1.8756	-0.0339
• OCTUB	1,430.85	7.2660	0.1334	17.68	2.8722	0.0902	7.33	1.9913	0.1157
•	1,520.23	7.3266	0.0606	18.44	2.9144	0.0422	7.73	2.0445	0.0532
•	1,564.91	7.3556	0.0290	18.82	2.9349	0.0205	7.93	2.0700	0.0256
•	1,587.26	7.3698	0.0142	19.01	2.9449	0.0101	8.03	2.0826	0.0125
NOVIEMB	1,609.60	7.3837	0.0140	19.20	2.9549	0.0100	8.13	2.0949	0.0124
	1,608.08	7.3828	-0.0009	18.20	2.9014	-0.0535	8.10	2.0919	-0.0031
	1,634.55	7.3991	0.0163	17.60	2.8679	-0.0335	8.25	2.1102	0.0183
	1,727.23	7.4543	0.0552	17.40	2.8565	-0.0114	8.63	2.1547	0.0445
DICIEMB	1,713.95	7.4466	-0.0077	17.50	2.8622	0.0057	8.58	2.1489	-0.0058
	1,727.41	7.4544	0.0078	16.70	2.8154	-0.0468	8.60	2.1518	0.0029
	1,730.21	7.4560	0.0016	17.50	2.8622	0.0468	8.65	2.1576	0.0058
1993	1,759.44	7.4728	0.0168	16.70	2.8154	-0.0468	8.78	2.1719	0.0143
ENERO	1,806.62	7.4992	0.0265	16.45	2.8003	-0.0151	8.85	2.1804	0.0085
	1,760.23	7.4732	-0.0260	16.20	2.7850	-0.0153	8.55	2.1459	-0.0345
	1,797.90	7.4944	0.0212	15.80	2.7600	-0.0250	8.78	2.1719	0.0260
	1,653.22	7.4105	-0.0839	14.60	2.6810	-0.0790	8.08	2.0888	-0.0831
FEBRERO	1,659.69	7.4144	0.0039	15.10	2.7147	0.0337	8.30	2.1163	0.0275
	1,638.77	7.4017	-0.0127	15.00	2.7081	-0.0066	8.10	2.0919	-0.0244
	1,574.11	7.3614	-0.0403	13.80	2.6247	-0.0834	7.70	2.0412	-0.0506
	1,546.68	7.3439	-0.0176	14.20	2.6532	0.0286	7.68	2.0380	-0.0033
MARZO	1,637.86	7.4011	0.0573	13.00	2.5649	-0.0883	8.15	2.0980	0.0600
	1,637.80	7.4011	-0.0000	12.00	2.4849	-0.0800	8.28	2.1132	0.0152
	1,670.45	7.4208	0.0197	15.00	2.7081	0.2231	8.25	2.1102	-0.0030
	1,732.46	7.4573	0.0364	16.30	2.7912	0.0831	8.40	2.1282	0.0180

PRECIOS ACCIONARIOS

FECHA	INDICE BURSATIL	LN(I.P.C)	VARIACIO SEMANAL	TAMSA	LN(T)	VARIACIO SEMANAL	TELMEX L	LN(T.L)	VARIACIO SEMANAL
ABRIL	1,741.97	7.4628	0.0055	16.30	2.7912	0.0000	8.37	2.1247	-0.0036
	1,785.74	7.4876	0.0248	16.70	2.8154	0.0242	8.55	2.1459	0.0213
	1,761.40	7.4739	-0.0137	16.00	2.7726	-0.0428	8.48	2.1371	-0.0088
	1,723.41	7.4521	-0.0218	16.11	2.7796	0.0070	8.14	2.0964	-0.0407
	1,685.41	7.4298	-0.0223	16.23	2.7866	0.0070	7.90	2.0669	-0.0296
MAYO	1,647.42	7.4070	-0.0228	16.34	2.7934	0.0069	7.66	2.0363	-0.0306
	1,609.42	7.3836	-0.0233	16.45	2.8003	0.0069	7.43	2.0049	-0.0314
	1,627.84	7.3950	0.0114	16.10	2.7788	-0.0215	7.57	2.0242	0.0193
	1,613.98	7.3865	-0.0086	14.50	2.6741	-0.1047	7.55	2.0215	-0.0026
JUNIO	1,588.89	7.3708	-0.0157	14.80	2.6946	0.0205	7.35	1.9947	-0.0268
	1,563.79	7.3549	-0.0159	15.10	2.7147	0.0201	7.15	1.9671	-0.0276
	1,647.29	7.4069	0.0520	14.80	2.6946	-0.0201	7.50	2.0149	0.0478
	1,654.56	7.4113	0.0044	13.95	2.6355	-0.0591	7.41	2.0031	-0.0118
JULIO	1,661.82	7.4157	0.0044	13.10	2.5726	-0.0629	7.33	1.9913	-0.0118
	1,710.65	7.4446	0.0290	13.35	2.5915	0.0189	7.45	2.0082	0.0169
	1,719.20	7.4496	0.0050	13.35	2.5915	0.0000	7.48	2.0116	0.0034
	1,745.66	7.4649	0.0153	13.00	2.5649	-0.0266	7.65	2.0347	0.0231
	1,769.71	7.4786	0.0137	13.30	2.5878	0.0228	7.83	2.0573	0.0226
AGOSTO	1,805.85	7.4988	0.0202	13.60	2.6101	0.0223	7.95	2.0732	0.0158
	1,823.55	7.5085	0.0098	13.15	2.5764	-0.0336	8.10	2.0919	0.0187
	1,832.40	7.5134	0.0048	13.90	2.6319	0.0555	8.30	2.1163	0.0244
	1,836.83	7.5158	0.0024	14.10	2.6462	0.0143	8.44	2.1330	0.0167
SEPTIEM	1,839.04	7.5170	0.0012	14.80	2.6946	0.0485	8.28	2.1138	-0.0191
	1,840.14	7.5176	0.0006	15.00	2.7081	0.0134	8.18	2.1017	-0.0122
	1,840.70	7.5179	0.0003	14.80	2.6946	-0.0134	7.78	2.0516	-0.0501
	1,841.25	7.5182	0.0003	14.05	2.6426	-0.0520	7.92	2.0694	0.0178
OCTUBR	1,834.20	7.5144	-0.0038	13.90	2.6319	-0.0107	7.84	2.0592	-0.0102
	1,865.48	7.5313	0.0169	14.30	2.6603	0.0284	7.86	2.0618	0.0025
	1,962.87	7.5822	0.0509	14.30	2.6603	0.0000	8.38	2.1258	0.0641
	2,027.12	7.6144	0.0322	12.80	2.5494	-0.1108	8.56	2.1471	0.0213
	2,020.26	7.6110	-0.0034	12.90	2.5572	0.0078	8.58	2.1494	0.0023
	2,172.18	7.6835	0.0725	14.55	2.6776	0.1204	8.79	2.1736	0.0242
	2,248.13	7.7179	0.0344	15.38	2.7327	0.0552	8.90	2.1855	0.0119
1993	2,286.11	7.7346	0.0168	15.79	2.7592	0.0265	8.95	2.1914	0.0059
30/NOVIE	2,324.09	7.7511	0.0165	16.20	2.7850	0.0258	9.00	2.1972	0.0059
DICIEMB	2,409.35	7.7871	0.0360	18.00	2.8904	0.1054	9.48	2.2492	0.0520
	2,454.57	7.8057	0.0186	18.00	2.8904	0.0000	9.78	2.2803	0.0312
	2,567.07	7.8505	0.0448	20.20	3.0057	0.1153	10.15	2.3175	0.0371

BIBLIOGRAFÍA

Aitchison, J., Brown, J:A:C:; << The lognormal Distribution >> Published by The Syndics of the Cambride University Press.

Guerrero, Víctor << Análisis Estadístico de Series de Tiempo >> Universidad Autónoma Metropolitana. México 1991.

Heyman, Timothy, << Inversión Contra Inflación >> Ed. Mileno, S:A. de C.V. Agosto 1989 México.

Hull, Jonh << Options, Futures and Other Derivative Securities >> Published by Prentice Hall, Toronto Canadá 1989.

Kellison, Stephan G., << The theory of interest >> Fellow of the Society of Actuaries, University of Nebraska Richard D Irwin, Inc. 1978 U.S:A:

Jarque, Carlos Bera, Anil << A test for Normality of observations and Regresion Residuals >> Published by International Statistical Review 1987. Printed in Great Britain.

Mansell, Catherine., << Las Nuevas Finanzas en México >> Ed. Mileno, S.A de C.V. Octubre 1992 México.

Uyemura, Dennis, Van Deventer, Donald., << Financial Risk Management In Banking >> Published by Probus Publishing Company 1993 U:S:A.