UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA. TEXTO DEL CURSO QUE SE IMPARTE EN EL CECYT LUIS ENRIQUE ERRO DEL I. P. N.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

VICTOR OLAVARRIA CASTAÑEDA

MEXICO, D. F. 1994

CIUDAD UNIVERSITARIA

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realizó el pasante **Víctor Olavarría Castañeda** con número de cuenta 7156749-9 con el título: **Geometría y Trigonometría. Texto del curso que se imparte en el CECYT Luis Enrique Erro Del I.P.N.**

Consideramos que reune los méritos necesarios para que pueda continuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de **actuario**.

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en C. Rodolfo San Agustín Chi Director de Tesis	
M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz	
M. en C. Pilar Martínez Téllez	
Mat. Julieta Verdugo Díaz Suplente	
M. en C. Francisco Struck Chávez Suplente	

Ciudad Universitaria, D.F., a 24 de Junio de 1994.

Mi agradecimiento al M. en C. Rodolfo San Agustín Chi, director de esta tesis y a mis asesores: M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz, M. en C. Pilar Martínez Téllez, M. en C. Francisco Struck Chávez y Mat. Julieta Verdugo Díaz por su apoyo desinteresado y la aportación de sus conocimientos para la realización de este trabajo.

INTRODUCCION

Los temas que se tratan en este trabajo están hechos para plasmar en él la experiencia adquirida en mi labor docente, deseando hacer llegar al estudiante un material que puede serle útil como apoyo en el desarrollo de sus cursos y asimismo que sirva como guía del programa de Geometría y Trigonometría que se imparte en los planteles de nivel medio superior.

Para la mejor comprensión de este texto, el estudiante deberá tener bases sólidas, en cuanto a la aritmética y al álgebra elemental se refiere, principalmente en temas como factorización; solución de ecuaciones lineales y cuadráticas; despeje de incógnitas; operaciones de fracciones tanto numéricas como algebraicas y productos notables.

Para la realización de este material hubo necesidad de consultar algunos textos y discutir diversos puntos de vista con algunos compañeros maestros; al final se llegó a la conclusión de considerar que el estudiante posee como bases nociones de la geometría elemental, por lo tanto, y en relación a mi experiencia como docente, no se definirán los conceptos básicos, debido a que una excesiva formalización de éstos, sería inadecuada para el estudiante en este nivel.

El aporte principal de este trabajo consiste en que el estudiante tenga a la mano un material compacto que contenga todo lo referente al estudio de la geometría y la trigonometría con teoremas y corolarios demostrados, que puedan tener como consecuencia una base para los siguientes cursos de matemáticas que tendrá que llevar a cabo en semestres posteriores, e inclusive para cursos en escuelas de enseñanza superior, ya que el buen aprendizaje de este texto será básico en la formación del estudiante independientemente del área o carrera que piense seguir, porque se le enseña a pensar y a razonar con sentido común y eso es indispensable para la vida cotidiana misma.

En este texto el estudiante puede tener un material de consulta, ya sea para conceptos teóricos, o bien para resolver problemas numéricos y prácticos a la vez.

Agradezco las opiniones de los compañeros profesores para mejorar este material, ya que se persigue la búsqueda de un instrumento que tenga para los alumnos más accesible el uso de las matemáticas, y que en lo futuro, los profesores que así lo deseen, lo puedan considerar como un material de consulta para impartir su materia, pues es ese al final el objetivo para la realización de este trabajo.

INDICE

I MÉTODO AXIOMÁTICO-DEDUCTIVO DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA.

EL MÉTODO DEDUCTIVO

El método deductivo es muy utilizado en la geometría. Este método consiste en encadenar conocimientos que se suponen verdaderos, de manera tal que se obtienen nuevos conocimientos. No todas las propiedades son consecuencia de otras. Hay algunas que se aceptan como por sí mismas: axiomas y postulados.

Existen también las definiciones, que son proposiciones que exponen con claridad y precisión las características de una cosa.

Un rasgo particular de la geometría moderna consiste en evitar la definición de conceptos primarios que tienen poco o ningún sentido, por ejemplo: "*Punto es aquello que no tiene partes*", ó bien, "*Línea es una longitud sin anchura*, etc., pues se basan en conceptos (partes, anchura) cuya definición es más compleja que lo que se trata de definir.

TEOREMA.- Es una proposición que puede ser demostrada. La demostración es un conjunto de razonamientos deductivos que conducen a la evidencia de la afirmación.

En el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: la hipótesis, que es lo que se supone, y la tesis, que es lo que se quiere demostrar.

COROLARIO.- Es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.

Se admite el siguiente postulado: "*Existe un número infinito de puntos*".

Notación: Los puntos se suelen designar por letras mayúsculas y se representan por un trazo, un pequeño círculo o una cruz. Así decimos el punto A; el punto B, etc.

$$\underset{A}{\star} \qquad\qquad \underset{B}{\cdot}$$

Se admiten también los siguientes postulados:

a) *Por dos puntos pasa una recta, y solamente una.*

b) *Dos rectas distintas no pueden tener más que un sólo punto común.*

figura 1

La recta que pasa por A y B se representa por $\overrightarrow{AB}$.

SEMIRRECTA Ó RAYO.- Si sobre una recta señalamos un punto A, se llama semirrecta al conjunto de puntos formados por el punto A y todos los que le siguen o todos los que le preceden. El punto A es el origen de la semirrecta.

Una semirrecta se puede representar por el origen y otro punto de ella, con el símbolo ˜ encima.

Así, la semirrecta dé origen C y que contiene al punto D se representa por $\overrightarrow{CD}$.

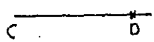


figura 2

SEGMENTO DE RECTA.- Si sobre una recta señalamos dos puntos A y B, se llama *segmento* al conjunto de puntos comprendidos entre A y B, mas estos dos puntos que se llaman extremos del segmento. Generalmente, al que se nombra en primer lugar se le llama origen y al otro, extremo. Se admite el siguiente postulado:

La distancia más corta entre dos puntos es el segmento de recta que los une. Un segmento de recta se designa por las letras de sus extremos y con una ¯ encima.

es el segmento EF.

MEDIDAS DE SEGMENTOS.- Medir un segmento es compararlo con otro elegido como unidad. La longitud de un segmento se designa de igual manera que el segmento mismo.

Por ejemplo: para indicar que el segmento EF mide 3 unidades, escribimos:

$$\overline{EF} = 3.$$

ERROR.- En la práctica las medidas son generalmente aproximadas. A la diferencia entre la verdadera longitud de un segmento y el valor obtenido en el proceso de medición, se le llama error de medida. El error puede ser por exceso, cuando se toma un valor mayor que el verdadero; ó por defecto, cuando se toma un valor menor que el verdadero. El error es debido a las imperfecciones de nuestros sentidos, ó de los instrumentos que utilizamos.

II ÁNGULOS

DEFINICIÓN. Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su unión es un *ángulo*. Los dos rayos se llaman los lados del ángulo y el extremo común se llama el vértice.

Para representar un ángulo se utiliza el símbolo: $\angle$ ó bien ^.

$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son los lados y A es el vértice del ángulo que se muestra en la figura.

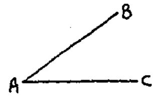


Figura 3

Un ángulo se designa en cualquiera de las formas siguientes:

a) Con la sola letra del vértice, si hay únicamente un ángulo que tenga tal vértice, por ejemplo: $\angle B$ ó $\widehat{B}$.

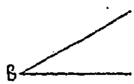


Figura 4

b) Con una letra minúscula o un número, que se coloca entre los lados del ángulo en las cercanías del vértice; por ejemplo: $\angle a$ ó $\hat{a}$, $\angle 1$ ó $\hat{1}$

Figura 5

c) Por medio de tres letras mayúsculas, de las cuales la del vértice se halla y se nombra entre las otras dos, que se colocan sobre los lados del ángulo.

Por ejemplo: el $\angle E$ se puede designar por $\angle DEG$, $\widehat{DEG}$ ó $\widehat{GED}$
el $\angle G$ se puede designar por $\angle HGE$, $\widehat{EGH}$ ó $\widehat{HGE}$.

MEDIDAS DE ÁNGULOS.

1.- La medida de un ángulo se realiza por medio del transportador. Al utilizarlo, es necesario cerciorarse de que el vértice del ángulo caiga exactamente en el centro del aparato y que uno de los lados coincida con el diámetro señalado por 0° — 180°.

2.- La medida de un ángulo no depende de la medida de sus lados. Así, por ejemplo, la medida del ángulo B de la figura no cambiará si se alargan o se acortan los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

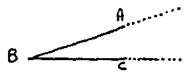


Figura 6

SISTEMAS DE MEDIDA.

Existen dos sistemas de medida: la *medida sexagesimal* y la *medida circular*.

Medida sexagesimal. En este sistema los ángulos se miden en unidades llamadas *grados*.

Si una circunferencia se divide en 360 partes iguales, a cada una de estas partes se le llama *grado* (sexagesimal); si cada grado se divide en 60 partes iguales, a cada una de éstas se le llama *minuto*; si cada minuto se divide en 60 partes iguales, a cada una de ellas se le llama *segundo*. Este proceso puede continuarse. Un ángulo se mide estableciendo el número de grados, minutos y segundos que contiene.

Para abreviar, cada una de estas divisiones se denota por un símbolo; así el ángulo que contiene 53 grados, 37 minutos, 12 segundos se puede expresar simbólicamente en la forma $53°37'12''$.

MEDIDA CIRCULAR. En este sistema los ángulos se miden en unidades llamadas *radianes*.

Un *radián* es la medida del ángulo central -es decir el ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro de un círculo- que subtiende un arco de longitud igual al radio del círculo.

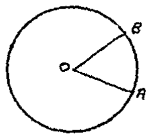


Figura 7

Sea O el centro de la circunferencia que aparece en la figura. Si tomamos sobre la circunferencia un arco AB de longitud igual al radio y trazamos OA y OB, el ángulo AOB es un radián.

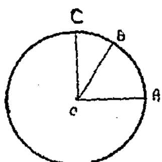


Figura 8

La razón del perímetro de la circunferencia a su radio es la misma cualquiera que sea el tamaño del círculo; esto es, para todo círculo, la razón perímetro-diámetro es una cantidad constante.

Esta constante se indica siempre con la letra griega π. Su valor numérico se puede obtener con cualquier grado de aproximación (aunque su expresión decimal es infinita y no periódica). Tomando diez cifras decimales su valor es 3. 1415926536, pero para mayor comodidad se utilizará la aproximación de 3.1416.

Si p indica el perímetro de la circunferencia cuyo radio es r, tenemos:

$$\frac{\text{perímetro}}{\text{diámetro}} = \pi\ ,$$

por lo tanto

$$\frac{p}{2r} = \pi,\ \text{o } p = 2\pi r.$$

Ejemplo: Hallar la medida en radianes de un ángulo de 90°.

Solución: Sea AOC un ángulo central de 90° y $\angle AOB$ un radián; entonces, la medida en radianes del $\angle AOC$ es igual a

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{arco AC radianes}}{\text{arco AB}} =$$

$$= \frac{1/4(\text{perímetro de la circunferencia})}{\text{radio}} =$$

(porque 90° = 1/4[360°])

$$\frac{1/4(2\pi r)}{r} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

o sea, un ángulo de 90° mide $\pi/2$ radianes.

Ejemplo: Hallar el número de grados en un radián.

Solución: En el ejercicio anterior se obtuvo que $\pi/2$ radianes es igual a 90°,

$$\pi \text{ radianes} = 2(90°)$$

$$\pi \text{ radianes} = 180°$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180°}{\pi} = 57.2958°,$$

que es aproximadamente igual a 57°17'44".

La fórmula π radianes = 180°, que relaciona las medidas sexagesimales y circulares de un ángulo, constituye una expresión útil que nos permite pasar fácilmente de un sistema a otro.

Ejemplos: Expresar 75° en medidas de radianes y expresar $\pi/54$ radianes en medida sexagesimal.

(1) Como 180° = π radianes,

$$75° = \frac{75\pi}{180°} \text{ radianes} = \frac{5\pi}{12} \text{ radianes.}$$

(2) Como π radianes = 180°,

$$\frac{\pi}{54} \text{ radianes} = \frac{180°}{54} = 3°20'$$

Conviene recordar que el símbolo π siempre indica un número. Cuando el símbolo aparece solo, sin referencia a ningún ángulo, no puede haber ambigüedad; pero aún cuando π se usa para indicar un ángulo, cabe insistir todavía en que π es un número, es decir, el número de radianes en 180° .

I Ejercicios:

1) Convertir a radianes:

a) 60° c) 54° e) 82° 15 40" g) 160° 40 50" i) 420°

b) 35° d) 109° 20 f) 42° 53 04" h) 125° 20 17" j) 1080°

2) Convertir a grados:

a) $\frac{\pi}{3}$ radianes c) $\frac{3\pi}{2}$ radianes e) 0.784923 radianes g) $\frac{4\pi}{7}$ radianes

b) $\frac{2\pi}{9}$ radianes d) 1.23875 radianes f) 2 radianes

h) $\frac{6\pi-4}{3}$ radianes

3) Graficar los ángulos de los incisos 1) y 2).

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

Ángulo agudo: Es el comprendido entre 0° y 90°, es decir 0°<A<90°.

Figura 9

Ángulo recto: Es el que vale 90°, B = 90°.

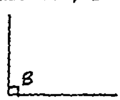


Figura 10

Ángulo obtuso:Es el comprendido entre 90° y 180°; $90^\circ < C < 180^\circ$

Figura 11

Ángulo llano: Es el que vale 180°; D = 180°.

Figura 12

Ángulo perígono o de una vuelta: Es el que se origina en un plano por la rotación completa de una recta; E = 360°.

Figura 13

Ángulo cóncavo o entrante: Es el comprendido entre 180° y 360°; $180^\circ < F < 360^\circ$.

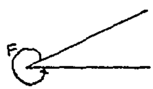


Figura 14

Ángulo convexo: Es el comprendido entre 0° y 180° y puede ser agudo, recto u obtuso.

PARES DE ÁNGULOS

Ángulos adyacentes.- Dos ángulos en el mismo plano son *adyacentes* si tienen vértice común, un lado común y los otros dos lados están en semiplanos opuestos respecto a la recta que contiene el lado común.

En la siguiente figura $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son ángulos adyacentes porque cumplen con la definición, pero $\angle ABC$ y $\angle ABD$ no son adyacentes porque los lados $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ se encuentran en el mismo semiplano respecto al lado común que es $\overline{AB}$. $\angle CBD$ y $\angle DEF$ no son adyacentes porque no tienen vértice común.

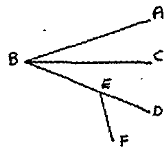


Figura 15

Ángulos opuestos por el vértice. Dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados forman dos pares de rayos opuestos. Esta definición revela que cada vez que dos rectas se corten formarán ángulos opuestos por el vértice.

Si AB intersecta a CD en O, $\angle AOD$ y $\angle COD$ son opuestos por el vértice; también lo serán $\angle AOC$ y $\angle DOB$.

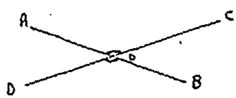


Figura 16

Ángulos complementarios. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es igual a 90°. Cada uno de ellos es el complemento del otro.

En la siguiente figura X y Y son ángulos complementarios porque $X + Y = 90°$.

Figura 17

Ejemplos: Sean X y Y ángulos complementarios

$\angle X = 30° \Rightarrow \angle Y = 90°-30° = 60°$

$\angle X = 16°19'44'' \Rightarrow \angle Y = 90°-16°19'44'' = 73°40'16''$

Si $\angle Y$ es el complemento de $\angle X$, entonces $\angle X$ es el complemento de $\angle Y$.

Ángulos suplementarios. Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a 180°. Cada uno de ellos es el suplemento del otro.

En la siguiente figura $\angle X$ y $\angle Y$ son suplementarios porque $\angle X+\angle Y = 180°$.

Figura 18

Ejemplos: Sean X y Y ángulos suplementarios.

$\angle X = 110° \Rightarrow \angle Y = 180°-110° = 70°$.

$\angle X = 64°14'39'' \Rightarrow \angle Y = 180°-64°14'39'' = 115°45'21''$.

Si $\angle Y$ es el suplemento de $\angle X$, entonces $\angle X$ es el suplemento de $\angle Y$.

Ángulos conjugados. Dos ángulos son conjugados si la suma de sus medidas es igual a 360°.

En la siguiente figura $\angle X$ y $\angle Y$ son ángulos conjugados porque $\angle X + \angle Y = 360°$.

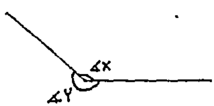


Figura 19

Ejemplos: Sean X y Y dos ángulos conjugados.

$\angle X = 120° \Rightarrow \angle Y = 360°-120° = 240°$.

$\angle X = 72°25'56'' \Rightarrow \angle Y = 360°-72°25'56'' = 287°34'04''$

Si $\angle Y$ es el conjugado de $\angle X$, entonces $\angle X$ es el conjugado de $\angle Y$.

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Rectas perpendiculares.- Si las rectas AB y AC forman un ángulo recto, se dice que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son *perpendiculares*. Esto se simboliza por:

$$AB \perp AC$$

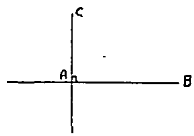


Figura 20

Si dos rectas se cortan y no son perpendiculares, se dice que son *oblicuas*.

En la siguiente figura, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son oblicuas.

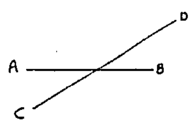


Figura 21

CARÁCTER RECÍPROCO DE LA PERPENDICULARIDAD.- Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera.

Como se aprecia en la figura 14, si $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$, entonces $\overrightarrow{AC}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

TEOREMA 1. De un punto exterior a una recta no puede bajarse más de una perpendicular.

DEMOSTRACIÓN.- Sean P un punto exterior a la recta AB, PO una perpendicular bajada de P a AB y PZ otra recta cualquiera trazada de P a AB. Hay que demostrar que PZ no es perpendicular a AB.

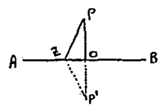


Figura 22

Prolonguemos PO hasta P′ de modo que $\overline{OP'} = \overline{OP}$ y tracemos $\overline{P'Z}$.

POP′ es una recta (por construcción). Como Z es distinto de O, PZP′ no es una recta. Por lo tanto, ∠P′ZP no es de lados colineales.

Ahora bien, ∠POZ y ∠ZOP′ son rectos, por lo tanto ∠POZ = ∠ZOP′.

Además, PO = OP′ (por construcción) y como OZ = OZ entonces ΔOPZ ≅ ΔOP′Z (por LAL). (Teorema 8 que se verá más adelante). Y también ∠OZP = ∠OZP′

Por lo tanto, $\angle OZP = \frac{1}{2}\angle OZP'$, no es recto.

Por lo tanto, PZ no es perpendicular a AB.∎

TEOREMA 2. Si por un punto exterior a una recta trazamos una perpendicular y varias oblicuas, se verifica que la longitud del segmento de perpendicular comprendido entre el punto y la recta, es menor que la longitud de cualquier segmento de oblicua.

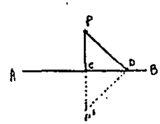


Figura 23

DEMOSTRACIÓN.- Sea P el punto exterior a la recta dada y sea C el pie de la perpendicular bajada de P a la recta. Prolonguemos el segmento $\overline{PC}$ hasta P' de tal modo que $\overline{CP'} = \overline{CP}$ y tracemos los segmentos $\overline{PD}$ y $\overline{DP'}$, $D \neq C$.

(1) $\overline{PC} + \overline{CP'} < \overline{PD} + \overline{DP'}$. (La distancia más corta entre dos puntos es la recta).

(2) $\overline{PC} = \overline{CP'}$. (Por construcción).

(3) $\overline{PD} = \overline{DP'}$. (Por construcción).

Por lo tanto, sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene que

$\overline{PC} + \overline{PC} < \overline{PC} + \overline{PD}$, de donde $2\overline{PC} < 2\overline{PD}$, es decir $\overline{PC} < \overline{PD}$.∎

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA. Es la longitud del segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta. Este segmento tiene las propiedades de ser único y el de menor longitud posible.

Rectas Paralelas. Dos rectas son *paralelas* si:

(1) están es un mismo plano y

(2) no se intersectan.

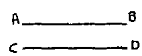


Figura 24

El paralelismo tiene la propiedad recíproca, es decir: si una recta es paralela a otra, esta otra es paralela a la primera.

Se acepta que una recta es paralela a si misma (propiedad idéntica).

El paralelismo se expresa con el símbolo ∥. Así, AB∥CD significa que la recta AB es paralela a la recta CD.

TEOREMA 3. Dos rectas en un plano, perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.

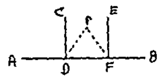


Figura 25

DEMOSTRACIÓN. Sean $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ perpendiculares a $\overrightarrow{AB}$, esto es $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AB}$.

Supongamos que $\overrightarrow{CD}$ no es paralela a $\overrightarrow{EF}$. En este caso $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ se cortan en algún punto, digamos P.

Pero entonces tendríamos que por P pasan 2 perpendiculares a la recta AB, lo cual es imposible.

Luego, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ no pueden tener ningún punto común y por tanto, son paralelas, es decir, $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$.■

COROLARIO. Por un punto exterior a una recta, pasa una paralela a dicha recta.

DEMOSTRACIÓN. Sea AB la recta y sea E el punto exterior. Por E trazamos el segmento EF tal que $\overline{EF} \perp \overrightarrow{AB}$, y en el punto E trazamos el segmento CD tal que $\overline{CD} \perp \overline{EF}$; resulta entonces que $\overline{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$, en virtud del teorema anterior.■

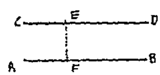


Figura 26

POSTULADO DE PLAYFAIR. Por un punto exterior a una recta, pasa una sola paralela a dicha recta.

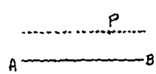


Figura 27

AB es la recta y P es el punto exterior.

PROPOSICIÓN I. Dos rectas paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

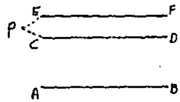


Figura 28

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$. Si $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{CD}$ no fueran paralelas, se cortarían en un punto P.

Entonces por el punto P pasarían dos paralelas a AB, lo cual es contradictorio al postulado de Playfair.

Por lo tanto, $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{CD}$.∎

PROPOSICIÓN II. Si una recta corta a otra, corta también a las paralelas a ésta.

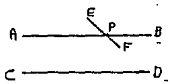


Figura 29

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{EF}$ corta a $\overrightarrow{AB}$ en P. Y supongamos que $\overrightarrow{EF}$ no corta a $\overrightarrow{CD}$, entonces sería paralela a ella. Pero esto es imposible porque tendríamos por el mismo punto P, dos paralelas a $\overrightarrow{CD}$: la recta AB y la recta EF.

Por lo tanto, $\overrightarrow{EF}$ corta a $\overrightarrow{CD}$.∎

PROPOSICIÓN III. Si una recta es perpendicular a otra, es también perpendicular a toda paralela a esta otra.

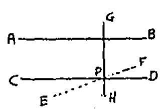


Figura 30

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{GH} \perp \overrightarrow{AB}$.

Si $\overrightarrow{GH}$ corta a $\overrightarrow{AB}$, también corta a $\overrightarrow{CD}$. Supongamos que el punto de intersección es P y que $\overrightarrow{GH}$ no es perpendicular a $\overrightarrow{CD}$. Entonces, por P podríamos trazar $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{GH}$ y tendríamos que $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$, o sea, que por el mismo punto P pasarían dos paralelas a $\overrightarrow{AB}$, las rectas CD y EF. Esto es imposible.

Por lo tanto: $\overrightarrow{GH} \perp \overrightarrow{CD}$.∎

ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA OBLICUA

Si dos rectas son cortadas por una recta oblicua o transversal, se distinguen en particular 8 ángulos: 4 llamados internos y 4 externos, por estar situados respectivamente dentro y fuera de las paralelas.

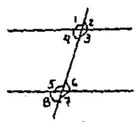


Figura 31

En la figura 31, los ángulos 1,2,7 y 8 son externos, los ángulos 3,4,5 y 6 son internos. Además:

∠4 y ∠6 son *alternos internos*, así como ∠3 y ∠5.

∠1 y ∠7 son *alternos externos*, así como ∠2 y ∠8.

∠2 y ∠6 son *correspondientes*, así como ∠3 y ∠7; ∠1 y ∠5; ∠4 y ∠8.

∠3 y ∠6 son *colaterales internos*, así como ∠4 y ∠5.

∠2 y ∠7 son *colaterales externos*, así como ∠1 y ∠8.

TEOREMA 4. Toda transversal forma con dos rectas paralelas ángulos correspondientes iguales.

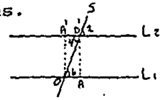


Figura 32

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que ∠2 = ∠6; los otros casos son análogos.

Sean O y O' los puntos de intersección de L_1 y L_2 con S respectivamente.

Tracemos una perpendicular de L_1 a L_2 que parta de O' y otra de L_1 a L_2 que parta de O. Sean A y A' los pies de las perpendiculares.

Como $\overline{O'A}$ y $\overline{OA'}$ son perpendiculares a L_1 y L_2, entonces $OA' \parallel O'A$ (teorema 3), y $\overline{OA'} = \overline{O'A}$. Por la misma razón $\overline{O'A'} = \overline{OA}$. Y entonces $\Delta OAO' \cong \Delta OA'O'$ (LAL).

Entonces $\angle 6 = \angle 4$ y como $\angle 4 = \angle 2$, por ser opuestos por el vértice, se tiene que $\angle 2 = \angle 6$.∎

TEOREMA 5. Toda transversal forma con dos paralelas ángulos alternos externos iguales, así como ángulos alternos internos iguales.

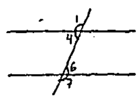


Figura 33

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 4 se tiene que $\angle 6 = \angle 4$, siendo ambos ángulos alternos internos.

Como $\angle 1 = 180° - \angle 4$ y $\angle 7 = 180° - \angle 6$, entonces

$$\angle 1 = \angle 7,$$

por ser suplementarios de ángulos iguales.

Los otros casos son análogos.∎

TEOREMA 6. Dos ángulos colaterales internos o dos ángulos colaterales externos entre paralelas son suplementarios.

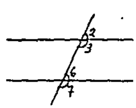


Figura 34

DEMOSTRACIÓN. $\angle 2 = \angle 6$, por el teorema 4.

Como $\angle 7 = 180° - \angle 6$, entonces:

$$\angle 7 = 180° - \angle 2.$$

Como $\angle 3 = 180° - \angle 2$, entonces:

$$\angle 3 = 180° - \angle 6.$$

Los otros casos son análogos.■

Ejemplo: Sea $L_1 \parallel L_2$ y SS' una transversal. Calcular el valor de los ángulos A y B, dada la siguiente figura:

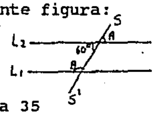


Figura 35

Solución: $\angle A = 60°$, por ser opuestos por el vértice.

$\angle B + 60° = 180°$, por ser colaterales internos.

Entonces $\angle B = 180° - 60° = 120°$.

II. Ejercicios:

Dadas las rectas AB∥CD cortadas por la transversal SS', determinar la medida de los ángulos P y Q.

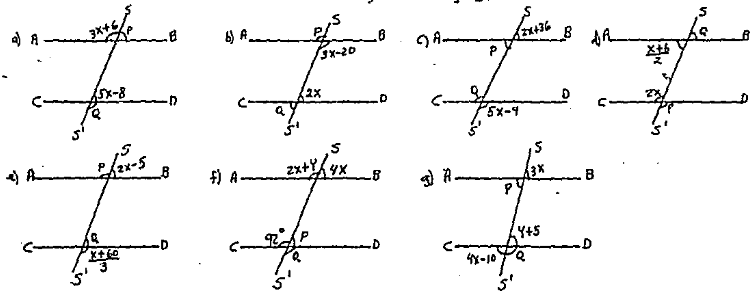


Figura 36

III TRIÁNGULOS

En las figuras, los puntos A, B y C están unidos por los segmentos AB, AC y BC, determinando así el triángulo ABC; que se denota por ΔABC. Los puntos de unión de los segmentos se llaman vértices del triángulo. Los ángulos formados entre los lados son los ángulos interiores del triángulo.

Figura 37

Los ángulos suplementarios de los ángulos interiores se llaman ángulos exteriores y se obtienen de la prolongación de los lados del triángulo.

En la figura: X, Y y Z son ángulos exteriores.

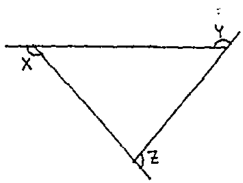


Figura 38

En un triángulo se deben considerar tres ángulos y tres lados que son los elementos principales.

Los ángulos se designan con letras mayúsculas iguales a sus vértices, y los lados opuestos con las mismas pero minúsculas.

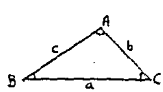


Figura 39

Para qué tres segmentos dados formen un triángulo, es necesario que no sean colineales, es decir, que sus vértices no formen parte de una misma recta.

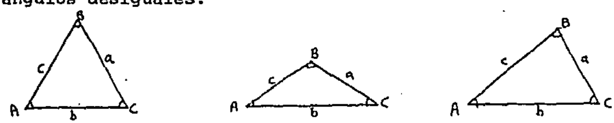
CLASIFICACIÓN

a) De acuerdo a la magnitud de sus lados los triángulos se clasifican en:

Equiláteros: Los que tienen sus 3 lados iguales. Consecuencia: 3 ángulos iguales a 60°.

Isósceles: Cuando tienen dos lados iguales y uno desigual. Consecuencia: 2 ángulos iguales y uno desigual.

Escalenos: Cuando tienen sus 3 lados desiguales. Consecuencia: 3 ángulos desiguales.



Equilátero porque $a = b = c$, entonces $\angle A = \angle B = \angle C$

Isósceles porque $a = c \neq b$, entonces $\angle A = \angle B \neq \angle C$

Escaleno porque $a \neq b \neq c$, entonces $\angle A \neq \angle B \neq \angle C$

Figura 40

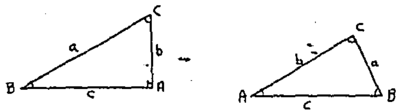
b) De acuerdo a la magnitud de sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

Rectángulos: Cuando tienen un ángulo recto (se señala dicho ángulo con un rectángulo pequeño).

Oblicuángulos: Cuando no tienen ángulo recto. Éstos a su vez se dividen en :

Acutángulos: Cuando tienen sus tres ángulos agudos.

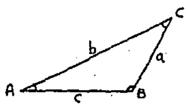
Obtusángulos: Cuando tienen un ángulo obtuso.



Rectángulo
que $\angle A=90°$

Oblicuángulo acutángulo
porque $\angle A$, $\angle B$, y $\angle C$ son agudos

Figura 41



Oblicuángulo obtusángulo
porque $\angle B$ es obtuso

Figura 42

TEOREMAS FUNDAMENTALES RELATIVOS A LOS TRIÁNGULOS

TEOREMA 7.- En todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es igual 180°, (equivalente al postulado II de Euclides).

DEMOSTRACIÓN

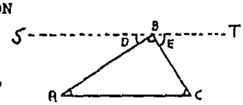


Figura 43

Sea el $\triangle ABC$. Demostrar que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Trazo auxiliar. Por B se traza una recta $\overline{ST} \parallel \overline{AC}$.

Tenemos que los ángulos D y E que forman los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ con dicha paralela satisfacen que:

$\angle A + \angle B + \angle E = 180°$.

$\angle A = \angle D$ (alternos internos)

$\angle C = \angle E$ (alternos internos)

Sustituyendo:

$$\angle D + \angle B + \angle E = \angle A + \angle B + \angle C$$

Entonces: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, pues dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.■

Del terorema anterior se puede deducir el siguiente corolario:

COROLARIO.- La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90°.

DEMOSTRACIÓN

Hay que demostrar que $\angle B + \angle C = 90°$.

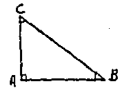


Figura 44

Por el teorema anterior, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Como $\angle A = 90°$, entonces, sustituyendo:

$90° + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle B + \angle C = 180° - 90° = 90°$ ∎

COROLARIO.-En todo triángulo, la suma de sus ángulos exteriores es igual a 360°.

DEMOSTRACIÓN

Hay que demostrar que $\angle X + \angle Y + \angle Z = 360°$

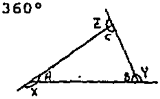


Figura 45

$\angle X = 180° - \angle A$

$\angle Y = 180° - \angle B$

$\angle Z = 180° - \angle C$ por ser ángulos suplementarios

$\angle X + \angle Y + \angle Z = (180° - \angle A) + (180° - \angle B) + (180° - \angle C)$

Sustituyendo:

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 540° - \angle A - \angle B - \angle C$ (sumando)

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 540° - (\angle A + \angle B + \angle C)$ (agrupando)

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 540° - 180°$ (por teorema 7)

$\Rightarrow \angle X + \angle Y + \angle Z = 360°$ ∎

COROLARIO.-Cada ángulo exterior es igual a la suma de los interiores no adyacentes.

DEMOSTRACIÓN

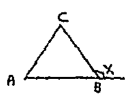


Figura 46

Como $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (por teorema 7) y $\angle B + \angle X = 180°$ por ser suplementarios, se tiene que $\angle A + \angle B + \angle C = \angle B + \angle X$, y entonces $\angle A + \angle C = \angle X$■

Ejemplos: En un triángulo rectángulo un ángulo mide 37°. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo?

Solución: Partiendo del corolario ya demostrado, sabemos que:

$90° + 37° + x = 180°$, siendo x el ángulo que buscamos.

$127° + x = 180° \Rightarrow x = 180° - 127°;\ x = 53°$.

III Ejercicios:

a) En el siguiente triángulo: $\angle A = 53°$, $\angle B = 45°37'$. Encontrar $\angle C$ y $\angle X$.

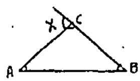


Figura 47

b) En el siguiente triángulo calcular $\angle C$ si $\angle A = \dfrac{2\pi}{3}$, $\angle Y = \dfrac{11\pi}{12}$.

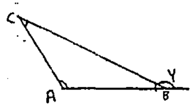


Figura 48

c) En el siguiente triángulo se tiene que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$. Calcular $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

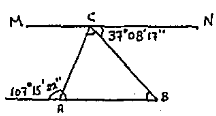


Figura 49

d) En el siguiente triángulo isósceles se tiene que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Calcular $\angle A$ y $\angle B$ si $\angle C = 51°17'28"$.

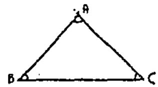


Figura 50

e) Encontrar los valores de X y de Y en el siguiente triángulo.

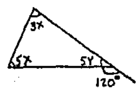


Figura 51

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN.- Un triángulo es congruente o igual a otro, si tiene todos sus lados y ángulos respectivamente iguales a los lados y ángulos del otro triángulo.

En la figura: $\angle A = \angle M$ y $a = m$; $\angle B = \angle N$ y $b = n$; $\angle C = \angle P$ y $c = p$

Figura 52

El triángulo ABC es congruente con el triángulo MNP; esto se simboliza así:

$\Delta ABC \cong \Delta MNP$, en donde el símbolo "$\cong$" se lee "congruente a".

De lo anterior se pueden determinar los siguientes teoremas:

TEOREMAS DE CONGRUENCIA (IGUALDAD) DE TRIÁNGULOS

TEOREMA 8.- LADO-ÁNGULO-LADO (LAL).- Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales, son congruentes o iguales.

DEMOSTRACIÓN

Si $c = q$ $b = p$ y $\angle A = \angle M$; entonces $\Delta ABC \cong \Delta MPQ$

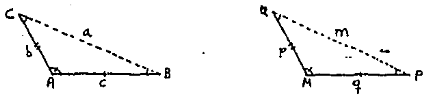


Figura 53

Supongamos que $\overline{AB} = \overline{MP}$, $\angle A = \angle M$ y $\overline{AC} = \overline{MQ}$. Superponiendo el lado $\overline{MN}$ sobre el $\overline{AB}$, tenemos que $\overline{MQ}$ quedará sobre $\overline{AC}$ ya que $\angle A = \angle M$ y $\overline{MQ} = \overline{AC}$. Entonces $\overline{CB} = \overline{QP}$ y $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle Q$.∎

TEOREMA 9.-ÁNGULO-LADO-ÁNGULO (ALA).- Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales y el lado comprendido entre ellos también igual, son congruentes.

DEMOSTRACIÓN

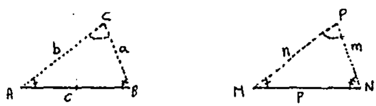


Figura 54

Si $\angle A = \angle M$ $\angle B = \angle N$ y $c = p$; entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

Supongamos que $\overline{AB} = \overline{MN}$, $\angle A = \angle M$ y $\angle B = \angle N$. Superponiendo el lado $\overline{MN}$ sobre el $\overline{AB}$, tenemos que $\overline{AC} = \overline{MP}$ por ser $\angle A = \angle M$; $\overline{BC} = \overline{NP}$ por ser $\angle B = \angle N$.

Como $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$ y $\angle P = 180° - (\angle M + \angle N)$, siendo $\angle A + \angle B = \angle M + \angle N$. Entonces $\angle C = \angle P$.∎

TEOREMA 10.- LADO-LADO-LADO (LLL).-Dos triángulos que tienen los tres lados respectivamente iguales son congruentes.

DEMOSTRACIÓN

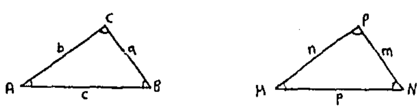


Figura 55

Si $a = m$ $b = n$ y $c = p$; entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

Como los tres lados son congruentes, sólo resta demostrar que los ángulos correspondientes son congruentes.

Coloquemos el lado $\overline{MN}$ sobre el $\overline{AB}$.

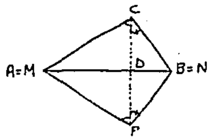


Figura 56

Como $\overline{AC} = \overline{MP}$, el triángulo ΔAPC es isósceles entonces

$$\angle ACD = \angle MPD.$$

Análogamente, ΔCBP es isósceles $\Rightarrow \angle DCB = \angle DPB \Rightarrow \angle ACB = \angle APB$. Por LAL los triángulos ACB y MPN son congruentes
$\Rightarrow \angle BAC = \angle BAP$ y $\angle ABC = \angle ABP$.

IV Ejercicios

1) Demostrar que $\Delta I \cong \Delta II$ en la siguiente figura

Datos: $\overline{BE} = \overline{EC}$; $\overline{AE} = \overline{ED}$

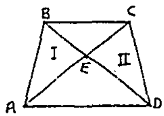


Figura 57

2) Hallar X e Y en los siguientes triángulos congruentes

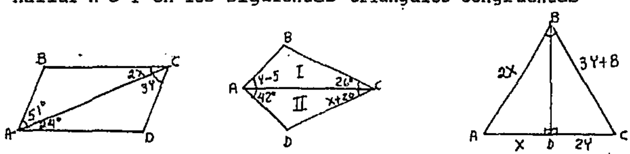


Figura 58

Datos: $\overline{AB} = \overline{CD}$
$\overline{AD} = \overline{BC}$

Datos: $\overline{AB} = \overline{AD}$
$\overline{BC} = \overline{DC}$

Datos: $\angle ABD = \angle CBD$

TEOREMA 11.- Si tres rectas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante.

DEMOSTRACIÓN

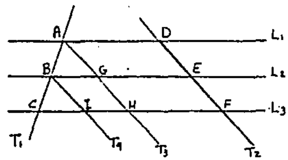


Figura 59

Sean L_1, L_2 y L_3 tres rectas paralelas y sean T_1 y T_2 dos secantes. Por hipótesis, $\overline{AB} = \overline{BC}$ y queremos demostrar que $\overline{DE} = \overline{EF}$.

Sea T_3 la recta que pasa por A paralela a T_2 y sea T_4 la recta que pasa por B paralela a T_2,

Sabemos que $\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\angle CBI = \angle BAG$ y $\angle BCI = \angle ABG$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

Entonces, $\Delta ABG \cong \Delta BCI$ por ALA.

Entonces, $\overline{AG} = \overline{BI}$, por ser lados correspondientes

$\overline{BI} = \overline{GH}$, por ser lados opuestos de un paralelogramo (se demostrará más adelante)

Sustituyendo: $\overline{AG} = \overline{GH}$

Como $\overline{AG} = \overline{DE}$, por ser lados opuestos de un paralelogramo, entonces $\overline{GH} = \overline{EF}$

Sustituyendo: $\overline{DE} = \overline{EF}$.■

La misma conclusión será válida para cualquier número de rectas paralelas.

TEOREMA DE THALES

TEOREMA 12.- Si tres ó más rectas paralelas determinan segméntos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante.

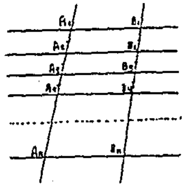


Figura 60

Es decir, dado que $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$ se deduce que $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$ y así sucesivamente.

Esto se demuestra mediante repetidas aplicaciones del teorema que acabamos de demostrar.∎

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN.- Se llaman triángulos semejantes a los que tienen sus 3 ángulos respectivamente iguales y sus 3 lados respectivamente proporcionales.

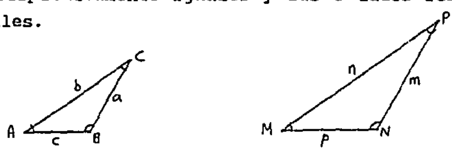


Figura 61

$\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle P$ y $\dfrac{m}{a} = \dfrac{n}{b} = \dfrac{p}{c} = r$

Si esto ocurre, entonces el triángulo ΔABC es semejante al triángulo ΔMNP, y se denota como:

$\Delta ABC \approx \Delta MNP$, en donde el símbolo "$\approx$" se lee "semejante a".

La definición de semejanza exige dos cosas:

(1) los ángulos correpondientes deben ser congruentes, y

(2) los lados correspondientes deben ser proporcionales.

Para el caso de los triángulos, resultará que si se cumple una de las dos condiciones, también se cumple la otra. Es decir, si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces los lados correspondientes son proporcionales, y recíprocamente. Es suficiente que se cumplan algunas condiciones para que dos triángulos sean semejantes, mismas que se reúnen en los siguientes teoremas.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROPORCIONALIDAD Y SU RECÍPROCO (Teoremas 13 y 14)

Considerar el ΔABC y un segmento de recta transversal $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Como $\angle B = \angle D$ y $\angle C = \angle E$, por ser ángulos correspondientes entre paralelas y $\angle A = \angle A$, entonces: los triángulos ΔABC y ΔADE tienen sus 3 ángulos iguales.

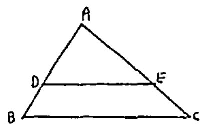


Figura 62

Demostrar que los lados correspondientes son proporcionales es un poco más difícil. Empezamos con este teorema que nos dice que los lados inclinados de esta figura son proporcionales.

TEOREMA 13.- Si una recta paralela a un lado de un triángulo intersecta en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a dichos lados.

O de otra manera: En el ΔABC, sean O y E puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tales que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Entonces,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

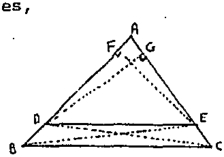


Figura 63

DEMOSTRACIÓN. Trazos auxiliares: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DG} \perp \overline{AC}$.

En los triángulos ΔADE y ΔBDE, tenemos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ como bases, respectivamente.

Entonces, $\overline{EF}$ es la altura de ambos triángulos.

Consideremos el área de cada uno de ellos.

$$\text{Área}(\Delta BDE) = \frac{\overline{BD}\cdot\overline{EF}}{2} \text{ y Área}(\Delta ADE) = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{EF}}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Área}(\Delta BDE)}{\text{Área}(\Delta ADE)} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \quad (1)$$

Análogamente, en los triángulos ADE y CDE, consideramos $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$ como bases respectivamente. Entonces $\overline{DE}$ es la altura de ambos triángulos.

Consideremos el área de cada uno de ellos.

$$\text{Área}(\Delta CDE) = \frac{\overline{CE}\cdot\overline{DG}}{2} \text{ y Área}(\Delta ADE) = \frac{\overline{AE}\cdot\overline{DG}}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Área}(\Delta CDE)}{\text{Área}(\Delta ADE)} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \quad (2).$$

Ahora bien, los triángulos BDE y CDE tienen la misma base $\overline{DE}$ y también tienen la misma altura, pues $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Por lo tanto, Área(ΔBDE) = Área(ΔCDE). (3).

De las tres ecuaciones (1), (2) y (3), obtenemos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \qquad (4).$$

Sumando 1 a ambos miembros de la ecuación (4), obtenemos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} + 1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} + 1;$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BD}+\overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}+\overline{AE}}{\overline{AE}},$$

o sea,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}},$$

como queríamos demostrar.∎

El recíproco del teorema fundamental de la proporcionalidad es más fácil de demostrar.

TEOREMA 14.- Si una recta intersecta a dos lados de un triángulo y determina sobre dichos lados segmentos proporcionales a ellos, entonces es paralela al tercer lado.

O de otra manera: Sea ΔABC y sean D un punto entre A y B, y E un punto entre A y C.

Si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\overrightarrow{BC'}$ la recta que pasa por B, paralela a DE, y que intersecta a $\overline{AC}$ en C'.

Por el teorema anterior, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AE}}$.

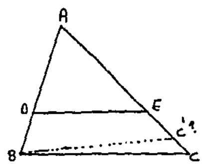


Figura 64

Puesto que por hipótesis, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, tenemos que

$\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, y entonces $\overline{AC'} = \overline{AC}$.

Por tanto, C = C' y entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.∎

TEOREMAS DE SEMEJANZA

TEOREMA 15.- (ÁNGULO-ÁNGULO). Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

DEMOSTRACIÓN

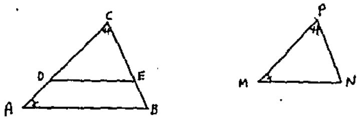


Figura 65

$\angle A = \angle M$; $\angle C = \angle P$

Construcción auxiliar. Sea $\overline{CD} = \overline{PM}$ y tracemos $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ formándose el $\triangle CDE$.

En $\triangle CDE$ y $\triangle MNP$ $\angle E = \angle B$, por ser ángulos correspondientes y $\overline{CD} = \overline{PM}$, por construcción.

Por otro lado:

$\angle C = \angle C$,

$\angle C = \angle P$; $\angle A = \angle M$. (datos)

$\triangle CDE \approx \triangle CAB$ por el teorema 13

$\angle D = \angle A$ por ser ángulos correspondientes,

$\angle N = \angle E$ por ser $\triangle CDE \cong \triangle MNP$ y

$\angle D = \angle M$, $\angle N = \angle B$, por transitividad.

Entonces $\triangle CDE \cong \triangle MNP$ (ALA).

Por lo tanto, $\triangle ABC \approx \triangle MNP$ (por tener sus 3 ángulos respectivamente iguales).∎

TEOREMA 16.- (LADO-ÁNGULO-LADO). Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.

DEMOSTRACIÓN

Datos: $\angle C = \angle P$ y $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{NP}}$

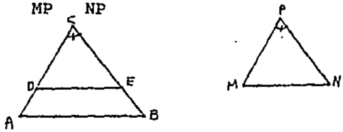


Figura 66

Construcción auxiliar.- Sea D tal que $\overline{CD} = \overline{PM}$ y tracemos $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, formando el ΔCDE.

En ΔCDE y ΔMNP por construcción

$\overline{CD} = \overline{PM}$ (1)

y sabemos que $\angle C = \angle P$.

En ΔABC y ΔCDE por el teorema 13,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{CE}} \qquad (3),$$

pero sabemos que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} \qquad (4)$$

comparando (3) y (4):

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}}.$$

Despejando:

$$CE = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{NP}}{\overline{BC}} = \overline{NP}.$$

Por lo tanto $\Delta CDE \cong \Delta MNP$, por LAL.

Como $\Delta ABC \sim \Delta CDE$, por el teorema 13 tenemos que $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.∎

TEOREMA 17.- (LADO-LADO-LADO). Dos triángulos son semejantes cuando tienen proporcionales sus tres lados.

DEMOSTRACIÓN

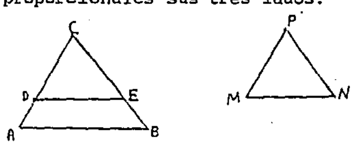


Figura 67

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}}$$

Construcción auxiliar.- Tomemos $\overline{DE} = \overline{MN}$ y tracemos $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, formándose el ΔCDE.

Por el teorema 13: $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}}$

Como $\overline{DE} = \overline{MN}$, entonce $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$

Como $\Delta ABC \simeq \Delta CDE$, por teorema 13, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$

Entonces, $\overline{CD} = \overline{MP}$ y $\overline{CE} = \overline{NP}$.

Esto significa que $\Delta CDE \cong \Delta MNP$ (por LLL).

Por lo tanto, $\Delta ABC \simeq \Delta MNP$.∎

Utilizaremos los teoremas anteriores para enunciar algunas proposiciones.

PROPOSICIÓN IV.- En un triángulo, si una recta paralela a uno de sus lados corta los otros dos, entonces forma un triángulo semejante a éste.

DEMOSTRACIÓN.

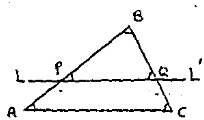


Figura 68

Hay que demostrar que si $\overrightarrow{LL'}$ es paralelala a $\overline{AC}$, entonces $\Delta PQB \simeq \Delta ACB$

En el ΔABC y ΔPBQ, tenemos que:

$\angle A = \angle P$ y $\angle C = \angle Q$ por ser ángulos correspondientes.

Entonces, por teorema 15, $\Delta ABC \simeq \Delta PBQ$.∎

PROPOSICIÓN V.- Si dostriángulos rectángulos tienen un ángulo agudo igual, entonces son semejantes.

DEMOSTRACIÓN

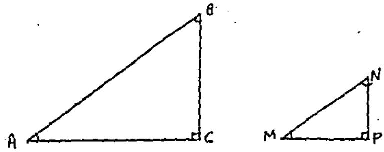


Figura 69

Hay que demostrar que si $\angle A = \angle M$, siendo $\angle C = \angle P = 90°$, entonces $\Delta ABC \simeq \Delta MNP$.

Si $\angle A = \angle M$ y $\angle C = \angle P$, entonces por teorema 15, $\Delta ABC \simeq \Delta MNP$.∎

Ejemplo: En la siguiente figura, $\overline{EB} \parallel \overline{CD}$. $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{BE} = 3$. Calcular $\overline{CD}$.

Solución: Se sabe que por la propiedad 1, $\Delta ABE \simeq \Delta ACD$.

Entonces, $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$, pero $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 2 + 4 = 6$.

Por lo tanto, $\dfrac{6}{\overline{CD}} = \dfrac{2}{3}$, esto es, $2\overline{CD} = 18$; $\overline{CD} = \dfrac{18}{2} = 9$.

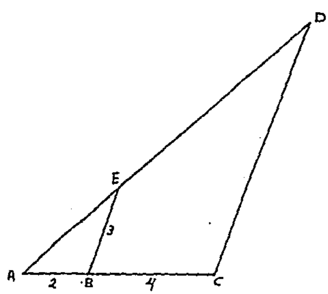


Figura 70

V Ejercicios

1) En el triángulo ABC, calcular la longitud de $\overline{CW}$ si $\overline{VW} \parallel \overline{BC}$.

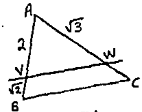


Figura 71

2) Un árbol proyecta una sombra de 6.5m, en ese mismo instante un poste de 1.5m proyecta una sombra de 1.75m. El árbol es perpendicular al suelo. Calcular la altura del árbol.

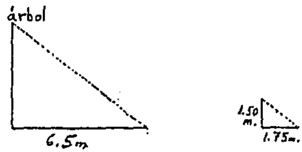


Figura 72

3) En la figura siguiente, calcular la longitud de $\overline{CB}$ si $\overline{HB} \parallel \overline{CD}$.

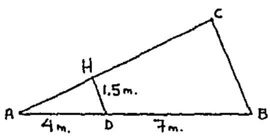


Figura 73

4) Calcular la longitud de $\overline{AB}$ en la siguiente figura, donde $\angle A$ y

$\measuredangle P$ son rectos.

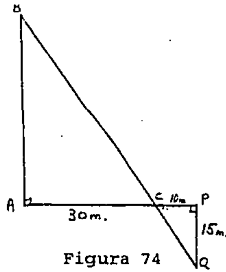


Figura 74

5) Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, calcular las longitudes de dichos segmentos, donde $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ son rectos.

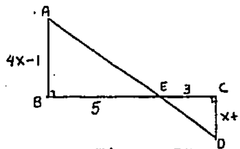


Figura 75

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO

Medianas: La mediana es el segmento que une a un vértice del triángulo con el punto medio de su lado opuesto.

TEOREMA 18.- Dos medianas de un triángulo se intersectan en un punto tal que divide a ambas medianas en dos segmentos que miden $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ de la longitud de la mediana respectiva trazada desde el vértice.

DEMOSTRACIÓN

Sea ABC un triángulo. Sean $\overline{CN}$ y $\overline{BM}$ dos medianas del mismo y O su punto de intersección.

Trazo auxiliar: $\overline{NM}$.

Consideremos los triángulos ANM y ABC: $\measuredangle A = \measuredangle A$ por ser ángulo común.

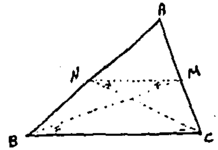


Figura 76

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}.\ \text{Por hipótesis.}$$

Por lo tanto, los triángulos son semejantes y por tanto, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}.$$

Consideremos los triángulos BOC y MON: tienen los siguientes lados paralelos: $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$,

$\angle N = \angle C$, $\angle B = \angle M$ (ángulos alternos internos)

$\overline{BO} \parallel \overline{OM}$ (porque son colineales).

$\overline{CO} \parallel \overline{ON}$ (porque son colineales).

Por lo tanto, $\Delta BOC \simeq \Delta MON$ y $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{BO}} = \dfrac{\overline{ON}}{\overline{CO}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \dfrac{1}{2}$.

Tenemos entonces que $2\overline{OM} = \overline{OB}$ y $2\overline{ON} = \overline{OC}$, pero $\overline{BO} + \overline{OM} = \overline{BM}$, sustituyendo $\overline{BO}$ por $2\overline{OM}$:

$$2\overline{OM} + \overline{OM} = \overline{BM},\ 3\overline{OM} = \overline{BM},\ \text{entonces},\ \overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{BM}.$$

Sustituyendo $\overline{OM}$ por $\frac{1}{2}\overline{BO}$

$$\overline{BO} + \frac{1}{2}\overline{BO} = \overline{BM};\ \frac{3}{2}\overline{BO} = \overline{BM};\ \overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{BM}.$$

También ocurre que $\overline{CO} + \overline{ON} = \overline{CN}$, sustituyendo $\overline{CO}$ por $2\overline{ON}$:

$$2\overline{ON} + \overline{ON} = \overline{CN},\ 3\overline{ON} = \overline{CN};\ \overline{ON} = \frac{1}{3}\overline{CN}.$$

Sustituyendo $\overline{ON}$ por $\frac{1}{2}\overline{CO}$:

$$\overline{CO} + \frac{1}{2}\overline{CO} = \overline{CN};\ \frac{3}{2}\overline{CO} = \overline{CN};\ \overline{CO} = \frac{2}{3}\overline{CN}.$$

Con lo cual queda demostrado que el punto O cumple la propiedad enunciada.■

TEOREMA 19.- Las tres medianas de un triángulo se intersectan en un solo punto.

DEMOSTRACIÓN

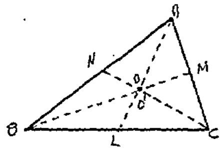


Figura 77

Sean $\overline{AL}$ y $\overline{BM}$ dos medianas del ΔABC. Sea O el punto de intersección.

Por el teorema 14 sabemos que $\overline{OA} = 2\overline{OL}$; $\overline{BO} = 2\overline{OM}$.

Sea $\overline{CN}$ la otra mediana y supongamos que $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ se intersectan en un punto O':

$\overline{BO'} = 2\overline{O'M}$ y $\overline{CO'} = 2\overline{O'N}$, tenemos entonces que:

$\overline{BO} = 2\overline{OM}$, $\overline{BO'} = 2\overline{O'M}$, por lo tanto O=O'.

Esto es, las tres medianas se intersectan en el mismo punto O. El punto de intersección de las medianas se llama *baricentro*.■

Mediatriz: La mediatriz de un segmento de recta es la perpendicular al segmento trazada por el punto medio del mismo.

TEOREMA 20.- Las mediatrices de un triángulo se intersectan en un punto.

DEMOSTRACIÓN

Sean M, N y P los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.

Tracemos $\overline{PR}\perp\overline{BC}$ y $\overline{MS}\perp\overline{AB}$. Sea O el punto de intersección de ambas rectas. Consideremos los triángulos BOP y COP.

$\overline{BP} = \overline{CP}$, (por hipótesis)

$\overline{OP} = \overline{OP}$ (lado común).

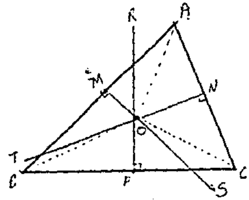


Figura 78

$\angle BPO = \angle CPO = 90°$, (por hipótesis).

Por LAL los triángulos son congruentes y $\overline{BO} = \overline{OC}$.

Esto es, cualquier punto de la mediatriz $\overline{OP}$ es equidistante de B y C.

Ahora bien, como O es el punto de intersección de las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, eL punto O tienen la propiedad:

$\overline{OA} = \overline{AB}$ por estar en la mediatriz de $\overline{AB}$

$\overline{OB} = \overline{OC}$ por estar en la mediatriz de $\overline{BC}$.

Por lo tanto, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, esto es, O está también en la mediatriz de $\overline{AC}$.

Tenemos entonces que las tres mediatrices de un triángulo se intersectan en un punto. Este punto es equidistante de los vértices y por lo tanto es el centro del círculo que pasa por los vértices del triángulo.∎

Al punto de intersección de las mediatrices se le llama *circuncentro* y a la circunferencia que pasa por los vértices se le llama *circunferencia circunscrita*. Este teorema nos garantiza la existencia de un círculo circunscrito y también que éste es único, ya que el circuncentro es único.

Bisectriz: Si D está en el interior del $\angle BAC$ y $\angle BAD = \angle DAC$, entonces $\overrightarrow{AD}$ bisecta al $\angle BAC$, y $\overrightarrow{AD}$ se llama la bisectriz del $\angle BAC$.

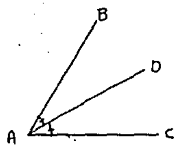


Figura 79

TEOREMA 21.- Todo punto en la bisectriz de un ángulo es equidistante de sus lados.

DEMOSTRACIÓN

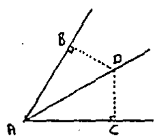


Figura 80

Sea α el ángulo formado por las rectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Sea D un punto en la bisectriz del $\angle\alpha$.

Trazamos desde D las perpendiculares a las rectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Consideramos los triángulos DAB y DAC:

$\angle DAB = \angle DAC$ (por estar D en la bisectriz del $\angle\alpha$)

$\angle DBA = \angle DCA = 90°$ (por hipótesis).

$\overline{AD} = \overline{AD}$, lado común.

Por ALA los triángulos ABD y ACD son congruentes y $\overline{DB} = \overline{DC}$.

Por lo tanto, D es equidistante de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. ∎

TEOREMA 22.- Todo punto equidistante de los lados de un ángulo está en la bisectriz del ángulo.

DEMOSTRACIÓN

Sea D un punto equidistante de las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Consideremos los triángulos ABD y ACD.

$\overline{DC} = \overline{DB}$ por hipótesis

$\angle ABD = \angle ACD = 90°$

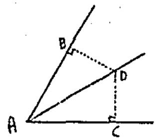


Figura 81

$\overline{AD} = \overline{AD}$, (lado común).

Los triángulos son rectángulos, entonces por el teorema de Pitágoras que demostraremos más adelante:

En ΔADC, $\overline{AD^2} - \overline{DC^2} = \overline{AC^2}$.

En ΔADB, $\overline{AD^2} - \overline{DB^2} = \overline{AB^2}$.

Por lo tanto, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ y $\overline{AC} = \overline{AB}$.

Entonces por LLL los triángulos ABD y ACD son congruentes y $\angle BAD = \angle DAC$. Con lo cual queda demostrado que $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz del $\angle BAC$.■

TEOREMA 23.- Las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se intersectan en un punto.

DEMOSTRACIÓN

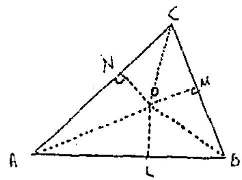


Figura 82

Sea ABC un triángulo. Sea O el punto de intersección de las bisectrices del $\angle A$ y el $\angle B$.

Trazamos desde O las perpendiculares a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$; sean L, M, N los pies de las perpendiculares respectivamente. El punto O tiene la propiedad:

$\overline{OL} = \overline{ON}$ (por estar O en la bisectriz del $\angle A$)

$\overline{OL} = \overline{OM}$ (por estar O en la bisectriz del $\angle B$),
por lo tanto $\overline{OM} = \overline{ON}$.

Entonces O está también en la bisectriz del $\angle C$, con lo cual queda demostrado que las tres bisectrices se intersectan en un punto.∎

El punto de intersección de las bisectrices interiores del triángulo se llama *incentro*.

Así como el circuncentro es el centro de la circunferrencia que pasa por los tres vértices del triángulo, el incentro es el centro de una circunferencia que toca en un punto a cada uno de los lados del triángulo.

TEOREMA 24.- Dado un triángulo, existe una circunferencia cuyo centro es el incentro del triángulo y que es tangente a los tres lados del mismo.

DEMOSTRACIÓN

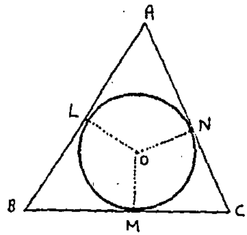


Figura 83

Sea ABC un triángulo, O su incentro y L, M, N los pies de las perpendiculares trazadas desde O a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente.

Trazamos la circunferencia con centro en O y que pase por N. Ya que $\overline{ON} = \overline{OL} = \overline{OM}$, la circunferencia pasa también por L y M. Esta circunferencia es tangente a los lados del triángulo por lo siguiente:

Consideremos en la figura anterior el radio $\overline{ON}$ y el lado $\overline{AC}$. Por hipótesis $\overline{ON}$ es perpendicular a $\overline{AC}$; como la distancia más corta de un punto a una recta es el segmento determinado por el pie de la perpendicular y el punto ($\overline{ON}$), entonces la distancia desde O a cualquier otro punto de $\overline{AC}$ es mayor que $\overline{ON}$ y ya que $\overline{ON}$ es el radio de la circunferencia, ésta no puede intersectar a $\overline{AC}$ en ningún otro punto.

En los otros dos lados ocurre lo mismo, por lo tanto la circunferencia es tangente a los tres lados del triángulo.

La circunferencia tangente a los tres lados del triángulo cuyo centro es el incentro se llama *circunferencia inscrita*.

Obsérvese que en todo momento hemos hablado de las bisectrices interiores del triángulo, ¿por qué?.

Dos rectas que se cortan en un punto V determinan dos ángulos suplementarios α y β.

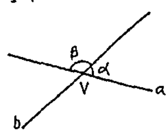


Figura 84

En la figura las rectas *a* y *b* determinan los ángulos α y β, que son suplementarios.

En general, consideraremos un triángulo como la figura formada por tres rectas que se cortan dos a dos.

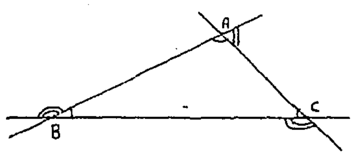


Figura 85

Estas tres rectas nos determinan seis ángulos, tres que son interiores al triángulo y tres que son exteriores al mismo. Así como los ángulos interiores tienen bisectriz, los ángulos exteriores también; por lo tanto, tenemos tres bisectrices interiores y tres bisectrices exteriores.

Hemos visto que las bisectrices interiores concurren en el incentro que es equidistante de los lados del triángulo.

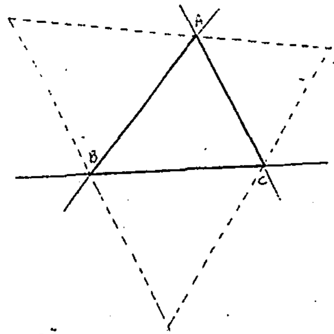


Figura 86

En la figura se aprecia claramente que las tres bisectrices exteriores no son concurrentes ya que forman un triángulo. Dos bisectrices interiores y una exterior no pueden ser concurrentes, ya que las interiores se intersectan en le incentro y este punto está dentro del triángulo; en cambio las tres bisectrices exteriores están fuera del triángulo.

Solamente nos queda analizar el caso de dos bisectrices exteriores y una interíor.

TEOREMA 25.- En un triángulo cualquiera las bisectrices de dos ángulos exteriores y la del tercero interior, son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN

Sean a, b, c los lados de un triángulo cuyos vértices opuestos son A, B, C respectivamente. Sea O el punto de intersección de las bisectrices exteriores del $\angle A$ y el $\angle C$.

Sean C', A', B' los pies de las perpendiculares desde O hasta c, a, b respectivamente.

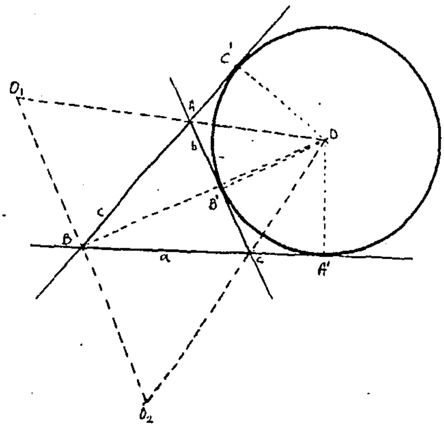


Figura 87

El punto O tiene la propiedad:

$\overline{OC'} = \overline{OB'}$ porque O está en la bisectriz exterior del $\angle A$.

$\overline{OA'} = \overline{OB'}$ porque O está en la bisectriz exterior del $\angle C$.

Por lo tanto, $\overline{OC'} = \overline{OA'}$, así que O es equidistante de los lados del $\angle B$.

Ya que las tres bisectrices exteriores no son concurrentes, la bisectriz del $\angle B$ que pasa por O debe ser la bisectriz del ángulo interior.∎

Al punto de intersección de dos bisectices exteriores y una interior se le llama *excentro*, y es el centro de la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo. Esta circunferencia se llama *excírculo* y toca exteriormente a dos lados del triángulo (*a* y *c* en la figura) y al tercero en un punto del segmento determinado por sus dos vértices correspondientes (*b*). En un triángulo hay tres excentros (O, O_1 y O_2) y en consecuencia tres excírculos.

Altura: Es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto ó a su prolongación.

TEOREMA 26.- Las alturas de cualquier triángulo se intersectan en un punto.

DEMOSTRACIÓN

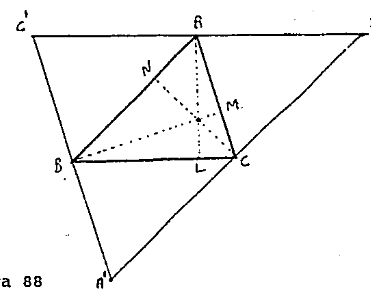


Figura 88

Sean $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ las alturas del ΔABC.

Trazamos por A la paralela a $\overline{BC}$, por B la paralela a $\overline{AC}$ y por C la paralela a $\overline{AB}$.

Sea A'B'C' el triángulo formado por estas rectas. Hay que demostrar que las alturas del ΔABC son las mediatrices del $\Delta A'B'C'$.

Por construcción:

$\overline{C'B'} \parallel \overline{BC}$, $\overline{C'A'} \parallel \overline{AC}$, $\overline{A'B'} \parallel \overline{BA}$

entonces las siguientes rectas son perpendiculares:

$\overline{AL} \perp \overline{C'B'}$, $\overline{BM} \perp \overline{C'A'}$, $\overline{CN} \perp \overline{A'B'}$.

Solamente falta demostrar que $\overline{C'A} = \overline{AB'}$, $\overline{C'B} = \overline{BA'}$, $\overline{A'C} = \overline{CB'}$. Consideremos los triángulos BCA' y ABC:

$\overline{BC} = \overline{BC}$ (lado común)

$\angle ABC = \angle BCA'$ (porque $\overline{BA} \parallel \overline{A'C}$)

$\angle ACB = \angle CBA'$ (porque $\overline{AC} \parallel \overline{BA'}$),

por lo tanto $\Delta BCA' \cong \Delta ABC$ y:

$$\overline{AC} = \overline{BA'},\ \overline{BA} = \overline{A'C}.$$

Consideremos los triángulos ABC y C'AB: por razones análogas a lo anterior:

$\Delta ABC \cong \Delta C'AB$ y:

$\overline{BC} = \overline{C'A},\ \overline{AC} = \overline{C'B}.$

También $\Delta ABC \cong \Delta AB'C$ y:

$\overline{BC} = \overline{AB'},\ \overline{BA} = \overline{CB'}.$

De estas seis igualdades obtenemos que:

$\overline{CA'} = \overline{AB'};\ \overline{C'B} = \overline{BA'};\ \overline{A'C} = \overline{CB'}.$

Entonces $\overline{AL}$, $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ son las perpendiculares por los puntos medios de los lados $\overline{C'B'}$, $\overline{C'A'}$ $\overline{A'B'}$ del $\Delta A'B'C'$; o sea, las mediatrices del mismo.

Pero las mediatrices de un triángulo son concurrentes (teorema 16), por lo tanto, $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$, alturas del ΔABC son concurrentes.■

El punto de intersección de las alturas se llama *ortocentro*.

TEOREMA DE PITÁGORAS

TEOREMA 27 El teorema de Pitágoras enuncia lo siguiente:

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

se le llama hipotenusa al lado opuesto al ángulo recto y se les llama catetos a los lados opuestos a los ángulos agudos.

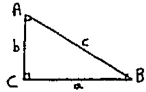


Figura 89

a, *b*: catetos y *c*: hipotenusa $a^2 + b^2 = c^2$.

Observación: En la demostración del teorema de Pitágoras, al hacer mención de algún segmento nos referimos a la longitud del mismo. Por ejemplo: *b* es la longitud del segmento $\overline{AC}$.

Se traza la altura $\overline{CD}$.

Sea r la longitud del segmento $\overline{AD}$.

Sea $c - r$ la longitud del segmento $\overline{DB}$.

Consideremos los triángulos rectángulos ACD y CBD que son ambos semejantes al ΔABC.

DEMOSTRACIÓN AL TEOREMA DE PITÁGORAS

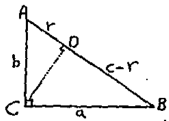


Figura 90

$\Delta ABC \approx \Delta ACD$ (por el teorema ángulo-ángulo):

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}, \text{ es decir, } \frac{b}{c} = \frac{r}{b} \Rightarrow b^2 = rc$$

$\Delta ABC \approx \Delta CBD$ por el teorema ángulo-ángulo:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}, \text{ es decir, } \frac{a}{c-r} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = c^2 - rc$$

Sumando: $a^2 + b^2 = c^2 - rc + rc = c^2$ que es lo que se quería demostrar.■

El recíproco del teorema de Pitágoras es también cierto.

TEOREMA 28.- Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo, con su ángulo recto opuesto a su lado más largo.

DEMOSTRACIÓN

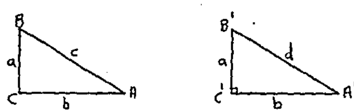


Figura 91

Sea ΔABC y $a^2 + b^2 = c^2$, como en la figura. Sea $\Delta A'B'C'$ un triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa d. Entonces, $c = d$, porque $d^2 = a^2 + b^2 = c^2$. Por el teorema LLL, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Luego $\angle C = \angle C'$. Como el $\angle C'$ es recto, lo es también 31 $\angle C$.■

Ejemplo 1: Calcular el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo.

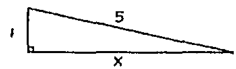


Figura 92

Solución: $1^2 + x^2 = 5^2$

$$1 + x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 25 - 1 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Nota: En estos casos se considera solamente la raíz cuadrada positiva por tratarse de una distancia.

Ejemplo 2: Calcular el valor de c si $a = 3m$ y $b = 4m$

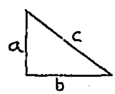


Figura 93

Solución: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = (3m)^2 + (4m)^2 \Rightarrow c^2 = 9m^2 + 16m^2$

$$c^2 = 25m^2 \Rightarrow c = \sqrt{25}m = 5m$$

Vamos a utilizar algunos de los teoremas vistos y demostrados hasta aquí para enunciar algunos corolarios.

COROLARIO.- En un triángulo rectángulo, el ortocentro es el vértice que contiene el ángulo recto.

DEMOSTRACIÓN

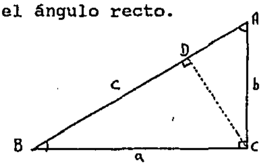


Figura 94

Sea el ΔABC.

La altura del vértice A es la recta AC, por ser $\overline{AC} \perp \overline{BC}$.

La altura del vértice B es la recta BC, por ser $\overline{BC} \perp \overline{AC}$.

La altura del vértice C es la recta CD.

El único punto en donde se intersectan las tres alturas es C. Por lo tanto, el vértice que contiene al ángulo recto (C) es el ortocentro.■

COROLARIO.- En un triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

DEMOSTRACIÓN

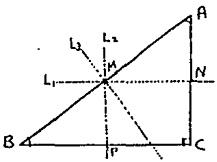


Figura 95

Sea ΔABC, siendo M, N, P los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.

La mediatriz de $\overline{AC}$ es la recta L_1, siendo $L_1 \parallel \overline{BC}$ por ser ambas perpendiculares a $\overline{AC}$.

Entonces, si L_1 corta a $\overline{AC}$ en su punto medio, corta también a $\overline{AB}$ en su punto medio, es decir, en M, siendo $\Delta AMN \approx \Delta ABC$.

La mediatriz de $\overline{BC}$ es la recta L_2, siendo $L_2 \parallel \overline{AC}$ por ser ambas perpendiculares a $\overline{BC}$. Entonces si L_2 corta a $\overline{BC}$ en punto su medio, también corta a $\overline{AB}$ en su punto medio, es decir, en M, siendo $\Delta BMP \approx \Delta ABC$.

La mediatriz de $\overline{AB}$ es la recta L_3 que obviamente pasa por M. Entonces la intersección de las tres mediatrices es el punto M, siendo por lo tanto, el circuncentro el punto medio de la hipotenusa.■

COROLARIO.-La longitud de la mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

DEMOSTRACIÓN

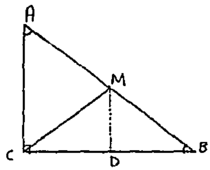


Figura 96

Sea el triángulo rectángulo ABC y sea $\overline{CM}$ la mediana correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$.

Hay que demostrar que $\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Construcción auxiliar: $\overline{MD} \parallel \overline{AC}$

Consideremos los triángulos rectángulos CMD y BMD.

$\overline{CD} = \overline{DB}$, por teorema 13.

$\angle CDM = \angle MDB = 90°$, por ser $\overline{MD} \perp \overline{CB}$

$\overline{MD} = \overline{MD}$ lado común.

Entonces, por LAL, $\Delta CDM \cong \Delta BDM$.

Por lo tanto, $\overline{CM} = \overline{MB} = \overline{AM}$

Como $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$

Sustituyendo: $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{AM} = 2\overline{AM} = 2\overline{CM}$

Por lo tanto: $\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.∎

COROLARIO.- En un triángulo equilátero, la mediana, la meditriz, la altura y la bisectriz que parten de un vértice, son la misma recta.

DEMOSTRACIÓN

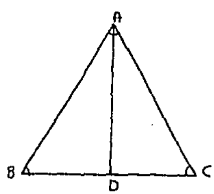


Figura 97

Sea ΔABC equilátero y sea $\overline{AD}$ la mediana del vértice A. Consideremos los triángulos ABD y ACD.

$\overline{BD} = \overline{DC}$ por hipótesis

$\overline{AD} = \overline{AD}$ lado común

$\overline{AB} = \overline{AC}$ por hipótesis

Entonces por LLL, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

Por lo tanto, $\angle BAD = \angle CAD$ y $\angle BDA = \angle CDA = 90°$.

Como $\angle BDA$ es recto, entonces $\overline{AD}$ es la altura de $\overline{BC}$. Como $\angle BDA$ es recto y D es el punto medio de $\overline{BC}$, entonces $\overline{AD}$ es la mediatriz de $\overline{BC}$.

Como $\angle BAD = \angle ACD$, entonces $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle A$.

Por lo tanto; la mediana, la mediatriz, la altura y la bisectriz que parten del vértice A son la misma recta,■

De la misma manera se puede de demostrar con los otros vértices.

COROLARIO.- En un triángulo isósceles, la mediana, la mediatriz, la altura y la bisectriz que parten del vértice opuesto al lado desigual, son la misma recta.

DEMOSTRACIÓN

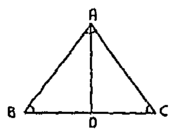


Figura 98

Sea el triángulo isósceles ABC, con $\overline{AB} = \overline{BC}$, y la mediana $\overline{AD}$. La demostración se hace de la misma manera que la del corolario.■

COROLARIO.- Si en un triángulo rectángulo se traza una altura a la hipotenusa dividiéndola en dos partes (no necesariamente iguales); entonces la longitud de la altura es igual a la raíz cuadrada del producto de estas partes.

DEMOSTRACIÓN

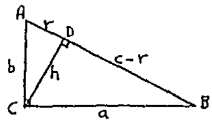


Figura 99

Sea el ΔABC rectángulo y sea $\overline{CD}$ la altura trazada desde C.
Hay que demostrar que:

$$h = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{CB}} = \sqrt{r(c-r)}$$

Consideremos los triángulos rectángulos ACD y BCD

En el triángulo ACD: $h^2 + r^2 = b^2$, por el teorema de Pitágoras.

Despejando: $h^2 = b^2 - r^2$ (1)

En el triángulo BCD: $h^2 + (c-r)^2 = a^2$, por el teorema de Pitágoras

Despejando: $h^2 = a^2 - (c-r)^2 = a^2 - (c^2-2cr+r^2) =$
$a^2 - c^2 + 2cr - r^2$ (2)

Restando (1) - (2): $0 = b^2 - r^2 - a^2 + c^2 - 2cr + r^2$
$0 = b^2 - a^2 + c^2 - 2cr$ (3)

En el triángulo ABC: $c^2 = a^2 + b^2$, por el teorema de Pitágoras.

Despejando: $b^2 = c^2 - a^2$ (4)

Sustituyendo (4) en (3): $0 = b^2 + b^2 - 2cr = 2b^2 - 2cr = 2(b^2-cr)$

Despejando: $b^2 = cr$ (5)

Sustituyendo (5) en(1): $h^2 = cr - r^2 = r(c-r)$

Extrayendo raíz cuadrada: $h = \sqrt{r(c-r)}$

Por lo tanto: $h = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{DB}}$

Ejemplo: Calcular los lados $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ del ΔABC si $\overline{AD} = 5m$ y $\overline{DB} =$ 28.8m siendo ABC un triángulo rectángulo.

Solución: Por el corolario anterior: $h = \sqrt{5(28.8)} = \sqrt{144} = 12$

En el ΔACD: $b^2 = h^2 + 25 = 144 + 25 = 169$, por lo tanto, $b = \sqrt{169}$ $= 13$

En el ΔACD: $a^2 = h^2 + (28.8)^2 = h^2 + 829.44$

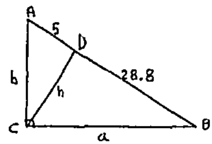


Figura 100

$$a^2 = 144 + 829.44 = 973.44$$

por lo tanto, $a = \sqrt{973.44} = 31.2$

Comprobación: En el ΔABC: $a^2 + b^2 = c^2$

$(31.2)^2 + (13)^2 = (5+28.8)^2 = (33.8)^2 \Rightarrow 973.44 + 169 = 1142.44 \Rightarrow$ $1142.44 = 1142.44$

VI Ejercicios:

Calcular el lado que falta si a, b son catetos y c es la hipotenusa.

1) $a = 6$, $b = 8$	6) $b = 5$, $c = 9$
2) $a = 12$, $c = 13$	7) $a = 2\sqrt{7}$, $b = 2\sqrt{2}$
3) $b = 21$, $c = 29$	8) $c = \sqrt{65}$, $a = 7$
4) $a = 2$, $b = 4$	9) $c = \sqrt{85}$, $b = 9$
5) $a = 3$, $c = 7$	10) $a = 3x$, $b = 2y$

11) Se cuenta con una escalera de 25m. de longitud y se desea subir al extremo de una torre de 10m. de altura. ¿A qué distancia se necesita colocar la base de la escalera para que el otro extremo coincida con la punta de la torre?

12) Se tiene una superficie en forma de triángulo retángulo. Sus catetos miden 300m. y 80m.?

a) ¿Cuánto mide su perímetro?

b) ¿Cuánto mide la altura trazada a la hipotenusa?

13) En el siguiente triángulo rectángulo, determinar las longitudes de a, b y h.

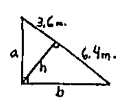


Figura 101

14) En el siguiente triángulo rectángulo, determinar las longitudes de h y x.

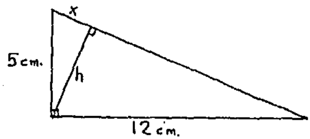


Figura 102

15) En el ΔABC, el punto D es el incentro. Si ∠A = 58° y ∠B = 70°. Determinar el valor del ∠BDC

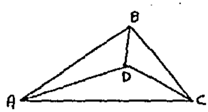


Figura 103

16) En la figura a continuación, Q es el baricentro del ΔABC.

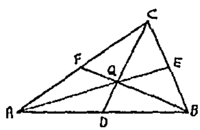


Figura 104

a) Si $\overline{AE} = 9$; ¿Cuánto mide $\overline{AQ}$?

b) Si $\overline{QD} = 5$; ¿Cuánto mide $\overline{CD}$?

c) Si $\overline{BQ} = 12$; ¿Cuánto mide $\overline{QF}$?

d) Si $\overline{QE} = 4$; ¿Cuánto mide $\overline{AQ}$?

17) En el triángulo recángulo ABC, sea $\overrightarrow{HG}$ la mediatriz del lado $\overline{AC}$. Si $\overline{GC} = 4$ y $\overline{AB} = 10$, determinar la longitud de $\overline{GH}$.

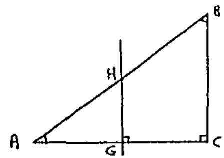


Figura 105

18) Si el ΔABC es rectángulo, determinar la distancia del ortocentro al circuncentro.

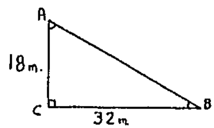


Figura 106

19) Si el ΔABC es equilátero, determinar la longitud de cada lado si la mediana $\overline{AD}$ mide $2\sqrt{3}$m.

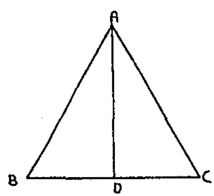


Figura 107

20) Si el ΔABC es isósceles, $\overline{AB} = \overline{AC} = 13cm$, la bisectriz $\overline{AD} = 4\sqrt{10}cm$. Determinar la longitud de $\overline{BC}$.

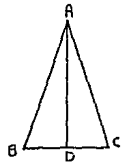
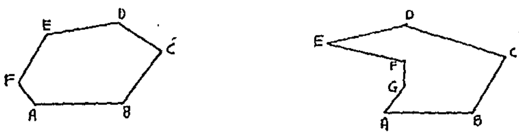


Figura 108

IV POLÍGONOS

DEFINICIÓN.- Se llama *polígono* a la porción de plano limitada por una curva cerrada.

Un polígono es convexo si todos sus ángulos interiores son convexos (menores de 180°). Si un polígono tienen al menos un ángulo interior cóncavo (mayor de 180°), entonces es cóncavo.



Polígono convexo

Polígono cóncavo
$\angle F$, $\angle G > 180°$

Figura 109

Los lados y vértices de la poligonal son los lados y vértices del polígono.

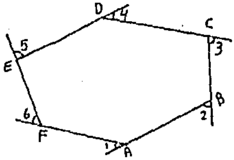
Ángulos internos o interiores de un polígono, son los formados por cada dos lados consecutivos.

Ángulos exteriores o externos de un polígono son los ángulos adyacentes a los interiores, obtenidos prolongando los lados en un mismo sentido.

En la figura siguientes tenemos:

Los lados del polígono son los lados de la poligonal: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, etc. El número de lados del polígono es igual al número de ángulos y vértices. La línea poligonal que limita al polígono se llama *contorno*.

Perímetro de un polígono es la longitud de su contorno, es decir, la suma de sus lados.



Ángulos internos		Ángulos externos	
∠ABC	∠DEF	∠1	∠4
∠BCD	∠EFA	∠2	∠5
∠CDE	∠FAB	∠3	∠6

Figura 110

En la figura anterior: Perímetro = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FA}$.

CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS.

Un polígono *equilátero* es el que tiene todos sus lados iguales.

Un polígono *equiángulo* es el que tiene todos sus ángulos iguales.

Un polígono *regular* es el que tiene todos sus lados y ángulos iguales, es decir, es equilátero y equiángulo.

DIAGONAL.- Se llama diagonal al segmento determinado por dos vértices no consecutivos.

En la figura: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales

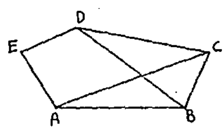


Figura 111

TEOREMA 29.- La suma de los ángulos interiores (S_i) de un polígono convexo es igual a tantas veces 180° como lados menos dos tiene el polígono.

DEMOSTRACIÓN

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, etc. son los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados.

Contrucción auxiliar. Desde un vértice cualquiera, tracemos todas las diagonales que parten de ese vértice. El polígono quedará descompuesto en n - 2 triángulos. La suma de los ángulos interiores de los n - 2 triángulos es igual a la suma de los ángulos interiores del polígono. La suma de los ángulos interiores de cada triángulo vale 180°.

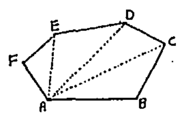


Figura 112

Como el número de triángulos en que se ha descompuesto el polígono de n lados es n - 2 resulta:

$S_i = 180°(n - 2)$.■

Ejemplo:

Aplicando la fórmula al polígono de esta figura tenemos:

$S_i = 180°(6 - 2) = 720°$

VALOR DE UN ÁNGULO INTERIOR DE UN POLÍGONO REGULAR.

Como el polígono regular tiene todos sus ángulos interiores iguales, el valor "i" de uno de ellos lo hallaremos dividiendo la suma entre el número "n" de ángulos.

$$i = \frac{S_i}{n}.$$

Y como $S_i = 180°(n - 2)$, resulta: $i = \dfrac{180°(n - 2)}{n}$.■

TEOREMA 30.- La suma de los ángulos exteriores (S_e) de todo polígono convexo es igual a 360°.

DEMOSTRACIÓN .

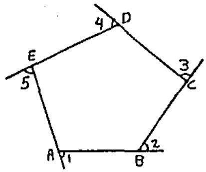


Figura 113

$\angle 1$, $\angle 2$, etc. son los ángulos exteriores de un polígono convexo de n lados.

El ángulo exterior y el ángulo interior en cada vértice, suman 180° por ser adyacentes. Multiplicando este valor por el número de vértices "n", tendremos la suma de todos los ángulos interiores, más la suma de todos los ángulos exteriores, es decir:

$S_i + S_e = 180°n$ de donde $S_e = 180°n - S_i$, pero $S_i = 180°(n - 2)$.

Sustituyendo $S_e = 180°n - 180°(n - 2)$

$S_e = 180°n - 180°n + 360°$

Por lo tanto, $S_e = 360°$.

VALOR DE UN ÁNGULO EXTERIOR EN UN POLÍGONO REGULAR.

Como todos los ángulos interiores de un polígono regular son iguales, los exteriores también lo serán. Para hallar el valor de "e" de un ángulo exterior, dividiremos la suma de todos ellos entre el número de ángulos que hay. Es decir:

$e = \frac{S_e}{n}$, y como $S_e = 360°$, resulta: $e = \frac{360°}{n}$.■

TEOREMA 31.- El número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice es igual al número de lados menos tres.

DEMOSTRACIÓN

Sea ABC... un polígono de n lados; d = número de diagonales desde un vértice.

Si desde un vértice cualquiera se trazan todas las diagonales posibles, siempre habrá tres vértices a los cuales no se puede trazar diagonal: el vértice desde el cual se trazan y los dos vértices contiguos.

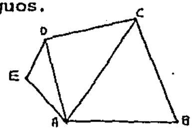


Figura 114

Como el número de vértices es igual al número de lados n, resulta: $d = n - 3$

Ejemplo:

Aplicando la fórmula al pentágono de la figura resulta;

$d = 5 - 3 = 2$.

TEOREMA 32 Si n es el número de lados del polígono, el número total de diagonales D, que pueden trazarse desde todos los vértices, está dado por la fórmula

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN

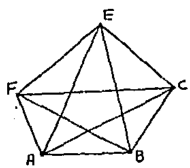


Figura 115

Sea ABC... un polígono de n lados y sea D = número de diagonales. Desde un vértice pueden trazarse $n - 3$ diagonales. Como hay n vértices, el número de diagonales será $n(n - 3)$. Pero como cada una une dos vértices, de esta manera hemos contado doble número de diagonales. Luego

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}. \blacksquare$$

Ejemplo:

Aplicando la fórmula al pentágono de la figura

$$D = \frac{5(5 - 3)}{2} = 5$$

VII Ejercicios

1.- Hallar la suma de los ángulos interiores de un cuadrado.

2.- Hallar la suma de los ángulos interiores de un octágono.

3.- Hallar la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

4.- ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 540°?

5.- ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1260°?

6.- ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1800°?

7.- Hallar el valor de un ángulo interior de un hexágono regular.

8.- Hallar el valor de un ángulo interior de un dodecágono regular.

9.- Hallar el valor de un ángulo interior de un decágono regular.

10.- Determinar cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior vale 135°.

11.- Determinar el valor de un ángulo exterior de un decágono regular.

12.- Determinar cuál es el polígono cuyo ángulo exterior vale 60°.

13.- Determinar el número de diagonales que se pueden trazar desde un octágono.

14.- Determinar el número de diagonales que se pueden trazar desde un endecágono.

15.- Determinar el número total de diagonales que se pueden trazar desde un eptágono.

16.- Determinar el número total de diagonales que se pueden trazar desde un icoságono.

17.- ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 20 diagonales en total?

18.- ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 35 diagonales en total?

V CUADRILÁTEROS

DEFINICIÓN.- Un *cuadrilátero* es un polígono de cuatro lados.
Lados opuestos.- Son los que no tienen ningún vértice común.
Lados consecutivos.- Son los que tienen un vértice común.
Vértices y ángulos opuestos.- Vértices opuestos son los que no pertenecen a un mismo lado. Ángulos opuestos son los que tienen vértices opuestos.

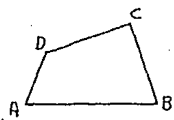


Figura 116

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son pares de lados opuestos.
$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$; $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$; $\overline{DA}$ y $\overline{AB}$; son pares de lados consecutivos A y C; B y D son pares de vértices opuestos.

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES.- La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero vale 360°.
Esto se puede demostrar por el teorema que nos dice que la suma de los ángulos interiores de un polígono es $S_i = 180°(n - 2)$. En este caso observamos que n = 4, por lo tanto,
$S_i = 180°(4 - 2) = 360°$.

DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE.- Desde un vértice de un cuadrilátero, sólo se puede trazar una diagonal.
En efecto, el número de diagonales desde un vértice en un polígono, está dado por la fórmula: $d = n - 3$. En este caso, n = 4, por lo tanto, $d = 4 - 3 = 1$.

NÚMERO TOTAL DE DIAGONALES.- El número total de diagonales que se pueden trazar en un cuadrilátero es 2.
En efecto, el número total de diagonales de un polígono, está

dado por la fórmula: $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Como se trata de un cuadrilátero, tenemos que $n = 4$, por lo tanto, $D = \dfrac{4(1)}{2} = 2$.

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros se clasifican atendiendo al paralelismo de los lados opuestos.

Si los lados opuestos son paralelos dos a dos la figura se llama *paralelogramo*.

En la figura: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

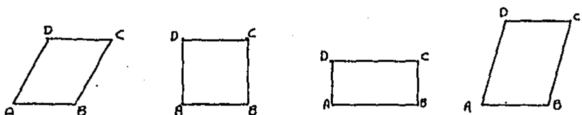


Figura 117

Cuando sólo hay paralelismo para un par de lados opuestos, la figura se llama *trapecio*.

Tenemos que : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ pero $\overline{AD}$ no es paralelo a $\overline{BC}$.

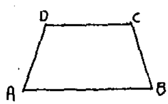


Figura 118

CLASIFICACIÓN DE LOS PARALELOGRAMOS

Rectángulo.- Tiene los 4 ángulos iguales y los lados consecutivos desiguales.

En la figura $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$

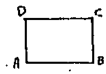


Figura 119

Cuadrado.- Tiene los 4 ángulos iguales y los 4 lados iguales.

En la figura: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.

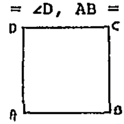


Figura 120

Romboide.- Tiene los lados y los ángulos contiguos desiguales.

Tenemos que: $\angle A \neq \angle B$; $\overline{AB} \neq \overline{BC}$

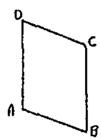


Figura 121

Rombo.- Tiene los 4 lados iguales y los ángulos contiguos desiguales.

En la figura: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, $\angle A \neq \angle B$

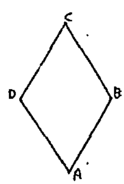


Figura 122

CLASIFICACIÓN Y ELEMENTOS DE LOS TRAPECIOS

Los trapecios se clasifican en : rectángulos, isósceles y escalenos.

Los rectángulos son los que tienen dos ángulos rectos. Se llaman isósceles si los lados no paralelos son iguales. Escalenos son los que no son rectángulos ni isósceles.

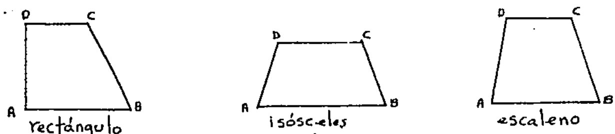


Figura 123

ELEMENTOS.- Los lados paralelos se llaman bases y como son desiguales, uno es la base mayor y otra la base menor.
La distancia entre las bases es la altura del trapecio. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se llama base media y tiene la importante propiedad de que es igual a la mitad de la suma de las bases. También se le suele llamar paralela media.

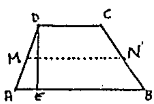


Figura 124

$\overline{AB}$: base mayor, $\overline{DC}$: base menor, $\overline{DE}$: altura y $\overline{MN}$: base media.

PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

Las propiedades que tienen los paralelogramos se demostrarán a partir de los siguientes teoremas:

TEOREMA 33.- Todo paralelogramo tiene sus lados opuestos iguales.
DEMOSTRACIÓN

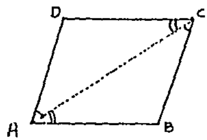


Figura 125

Sea ABCD un paralelogramo. Hay que demostrar que $\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Trazo auxiliar: Se traza la diagonal $\overline{AC}$ y se forman los triángulos ΔABC y ΔADC, que tienen el lado $\overline{AC}$ común.

En ΔABC y ΔACD tenemos

$\overline{AC} = \overline{AC}$ por ser lado común,

∠CAB = ∠DCA, por ser ángulos alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

∠DAC = ∠ACB, por ser ángulos alternos internos entre $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Por lo tanto, $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$ por oponerse a ángulos en triángulos congruentes.∎

El recíproco de este teorema se puede enunciar en el siguiente teorema:

TEOREMA 34.- Si cada par de lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, también son paralelos y el cudrilátero es un paralelogramo.

DEMOSTRACIÓN

En el cuadrilátero ABCD se verifica: $\overline{AB} = \overline{DC}$; $\overline{AD} = \overline{BC}$.

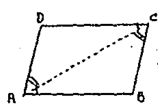


Figura 126

Hay que demostrar que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Trazo auxiliar: Se traza la diagonal $\overline{AC}$ formándose los triángulos ΔABC y ΔADC.

En los triángulos ABC y ACD: $\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$, por hipótesis.

$\overline{AC} = \overline{AC}$ por ser lado común.

Luego: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$, por LLL

Por tanto: $\angle CAB = \angle ACD$ y $\angle ACB = \angle DAC$ por ser ángulos opuestos a los lados iguales en triángulos congruentes.

Por tanto: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ por formar ángulos alternos internos iguales con la diagonal $\overline{AC}$.

Por lo tanto: ABCD es un paralelogramo.■

TEOREMA 35.- Todo paralelogramo tiene iguales sus ángulos opuestos.

DEMOSTRACIÓN

En el cuadrilátero ABCD se verifica: $\overline{AB} = \overline{DC}$; $\overline{AD} = \overline{BC}$.

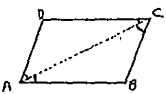


Figura 127

Hay que demostrar que: $\angle D = \angle B$; $\angle DAB = \angle DCB$.

Como ya se comprobó en el teorema anterior que $\Delta ABC \cong \Delta ADC$, y que $\angle CAB = \angle ACD$ y que $\angle ACB = \angle DAC$, entonces:

$\angle DAC + \angle CAB = \angle ACB + \angle ACD$, suma de cantidades iguales

Pero: $\angle DAC + \angle CAB = \angle DAB$ y $\angle ACB + \angle ACD = \angle DCB$

Por lo tanto: $\angle DAB = \angle DCB$

Por lo tanto: $\angle B = \angle D$ por ser ángulos opuestos a lados iguales en triángulos congruentes.■

TEOREMA 36.- Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

DEMOSTRACIÓN

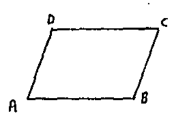


Figura 128

En el paralelogramo ABCD, hay que demostrar que:

$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$.

Como ya se comprobó en el teorema anterior:

$$\angle A = \angle C \text{ y } \angle B = \angle D. \quad (1)$$

Como la suma de los ángulos interiores de un cuadriláteros es igual a 360°, entonces: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

Sustituyendo de (1): $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$

$\Rightarrow 2\angle A + 2\angle B = 360°$

$\Rightarrow 2(\angle A + \angle B) = 360°$

$$\Rightarrow \angle A + \angle B = \frac{360°}{2}$$

Por lo tanto $\angle A + \angle B = 180°$.

De la misma manera se puede demostrar para las otras tres igualdades.■

TEOREMA 37.- En todo paralelogramo las diagonales se intersectan en el punto medio.

DEMOSTRACIÓN

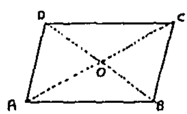


Figura 129

Sea ABCD un paralelogramo cuyas diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en el punto O. Hay que demostrar que: $\overline{AO} = \overline{OC}$ y que $\overline{BO} = \overline{OD}$.

En los triángulos AOB y COD:

$\overline{AB} = \overline{CD}$ por ser opuestos de un paralelogramo

$\angle BAO = \angle DOC$ y $\angle OAB = \angle ODC$ por ser ángulos alternos internos

Por lo tanto, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ por ALA. Por lo tanto, $\overline{AO} = \overline{OC}$ y también $\overline{BO} = \overline{OD}$.■

PROPIEDADES DEL RECTÁNGULO.

TEOREMA 38.- Todo ángulo interior de un rectángulo mide 90°.

DEMOSTRACIÓN

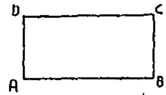


Figura 130

Sea ABCD un rectángulo.

Como sus 4 ángulos son iguales (por definición), entonces, cada uno de ellos mide $\frac{360°}{4} = 90°$.

Por lo tanto: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.■

TEOREMA 39.- Todo ángulo exterior de un rectángulo mide 90°.

DEMOSTRACIÓN.- En efecto, si la suma de los ángulos exteriores es 360° y en el rectángulo los 4 ángulos son iguales, resulta que 6 cada uno valdrá $\frac{360°}{4} = 90°$.■

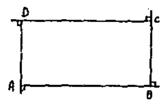


Figura 131

TEOREMA 40.- Las diagonales de un rectángulo son iguales.

DEMOSTRACIÓN

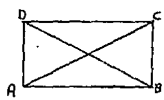


Figura 132

Sea ABCD un rectángulo, y sean $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus diagonales.

Consideremos los triángulos rectángulos ABC y ADC.

$\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$ por ser lados opuestos de un rectángulo, que es a su vez un paralelogramo.

Como $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ y $\overline{DB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2$, (Teorema de Pitágoras), entonces sustituyendo: $\overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$

Por lo tanto: $\overline{DB} = \overline{AC}$.■

PROPIEDADES DEL ROMBO

TEOREMA 41.- Las diagonales del rombo son perpendiculares.

DEMOSTRACIÓN

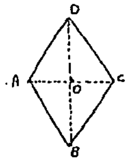


Figura 133

Sea ABCD un rombo, y sea O el punto de intersección de sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$.

Considérense los triángulos AOD y DOC.

$\overline{AO} = \overline{OC}$ pues la diagonal $\overline{DB}$ divide a lalongitud $\overline{AC}$ en partes iguales;

$\overline{AD} = \overline{DC}$ por hipótesis:

$\overline{DO} = \overline{DO}$ lado común.

Entonces, $\Delta AOD \cong \Delta DOC$ y por lo tanto, $\overline{DO}$ es una mediana del ΔACD que es isósceles, siendo además una mediatriz como ya se demostró anteriormente. Por lo tanto: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.■

TEOREMA 42.- Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

DEMOSTRACIÓN

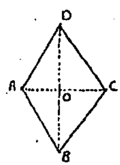


Figura 134

Sea ABCD un rombo y sea O el punto de intersección de sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Como ya se vió en el teorema anterior, el ΔACD es isósceles; y por lo tanto la mediana $\overline{DO}$ es también una bisectriz del mismo.

Por lo tanto, $\overline{DB}$ es bisectriz del $\angle ADC$ y del $\angle ABC$, y de la misma manera $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle DAB$ y del $\angle DCB$.∎

PROPIEDADES DEL CUADRADO

TEOREMA 43.- Los ángulos del cuadrado son rectos.

DEMOSTRACIÓN.- Se demuestra de la misma manera que el teorema 38 correspondiente al rectángulo

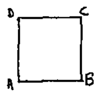


Figura 135

TEOREMA 44.- Cada ángulo exterior del cuadrado vale 90°.

DEMOSTRACIÓN.- Se demuestra de la misma manera que el teorema 39 correspondiente al rectángulo.∎

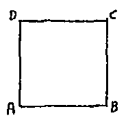


Figura 136

TEOREMA 45.- Las diagonales del cuadrado son iguales.

DEMOSTRACIÓN

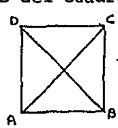


Figura 137

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ y $\overline{DB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2$ por el teorema de Pitágoras.

Como $\overline{DA} = \overline{BC}$ por definición, entonces sustituyendo:

$\overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$. Por lo tanto: $\overline{DB} = \overline{AC}$.

TEOREMA 46.- Las diagonales del cuadrado son perpendiculares.

DEMOSTRACIÓN: Se demuestra de la misma manera que el teorema 37 correspondiente al rombo.■

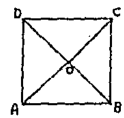


Figura 138

TEOREMA 47.- Las diagonales del cuadrado son bisectrices de los ángulos cuyos vértices únen.

DEMOSTRACIÓN.- Se demuestra de la misma manera que el teorema 38 correspondiente al rombo.■

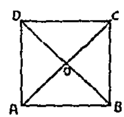


Figura 139

SECANTES A VARIAS RECTAS PARALELAS.- Si una secante corta a dos rectas L_1, L_2 en los puntos A y B, entonces decimos que L_1 y L_2 determinan o marcan el segmento $\overline{AB}$ en la secante.

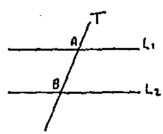


Figura 140

Supongamos que tenemos tres rectas dadas L_1, L_2, L_3 y una secante que las intersecta en los puntos A, B, y C. Si $\overline{AB} = \overline{BC}$, entonces decimos que tres rectas determinan segmentos congruentes en la secante.

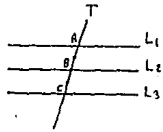


Figura 141

PROPIEDADES DE LOS TRAPECIOS

TEOREMA 48.- Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son iguales.

DEMOSTRACIÓN

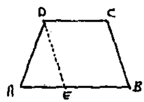


Figura 142

Sea ABCD un trapecio isósceles. Trazo auxiliar: $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$.

Se ha formado el paralelogramo DEBC

$\angle DEA = \angle B$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

$\overline{CB} = \overline{DE}$ y $\overline{CB} = \overline{AD}$ por definición, entonces $\overline{AD} = \overline{DE}$.

Consideremos el ΔADE: $\angle A = \angle DEA$ por ser ángulos opuestos a los lados iguales. Por lo tanto, $\angle A = \angle B$.∎

Este teorema tiene también su recíproco.

TEOREMA 49.- Si los ángulos de la base de un trapecio son iguales, el trapecio es isósceles.

DEMOSTRACIÓN

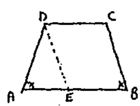


Figura 143

Sea ABCD un trapecio con $\angle A = \angle B$. Trazo auxiliar: $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$.

Se ha formado el paralelogramo DEBC.

$\angle DEA = \angle B$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

Sustituyendo $\angle DEA = \angle A$.

Consideremos el ΔDAE: $\overline{AD} = \overline{DE}$, lados opuestos a ángulos iguales.

$\overline{DE} = \overline{BC}$ por definición. Sustituyendo $\overline{AD} = \overline{CB}$.

Por lo tanto, ABCD es un trapecio isósceles.∎

PROPIEDADES Y TEOREMAS RELATIVOS A LOS PUNTOS MEDIOS Y PARALELAS MEDIAS DE UN TRIÁNGULO Y DE UN TRAPECIO.

TEOREMA 50.- Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo se traza la paralela a un segundo lado, esa paralela pasa por el punto medio del tercer lado.

DEMOSTRACIÓN

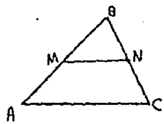


Figura 144

Si en el ΔABC, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ hay que demostrar que N es el punto medio de $\overline{BC}$.

Considérense los triángulos ΔABC y ΔMBN.

$\angle A = \angle BMN$; $\angle C = \angle BNM$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas;

$\angle B = \angle B$ ángulo común.

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ por ángulo-ángulo

Como $\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, entonces $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ y por lo tanto,: N es el punto medio de $\overline{BC}$.∎

TEOREMA 51.- El segmento que une los puntos medios de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de éste.

DEMOSTRACIÓN

Si en el ΔABC, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N el punto medio de

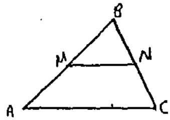


Figura 145

$\overline{BC}$, entonces $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BA}$ y $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Esto significa que $\Delta ABC \approx \Delta MBN$, por lo tanto, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

Como estos dos triángulos son semejantes entonces, $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$.

TEOREMA 52.- El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases de éste e igual a la mitad de su suma.

DEMOSTRACIÓN

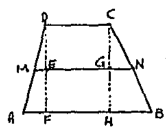


Figura 146

Sea el trapecio ABCD, Y sean M el punto medio de $\overline{AD}$ y N el punto medio de $\overline{CB}$.

Trazo auxiliar: $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ que corta a $\overline{MN}$ en el punto E, $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ que corta a $\overline{MN}$ en el punto G.

Como $\overline{DM} = \overline{MA}$ y $\overline{CN} = \overline{NB}$ entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ y a su vez $\overline{MN} \parallel \overline{DC}$.

Entonces $\Delta DME \approx \Delta DAF$ y $\Delta CNG \approx \Delta CBH$

$$\overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{MA} \Rightarrow \overline{ME} = \frac{1}{2}\overline{AF}$$

$$\overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{CB} \Rightarrow \overline{GN} = \frac{1}{2}\overline{HB}$$

$\overline{DC} = \overline{EG} = \overline{FH}$ por construcción.

Entonces $\overline{MN} = \overline{ME} + \overline{EG} + \overline{GN}$

Sustituyendo $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AF} + \overline{FH} + \frac{1}{2}\overline{HB}$

$\Rightarrow \overline{DC} + \overline{AB} = \overline{DC} + \overline{AF} + \overline{FH} + \overline{HB}$ sustituyendo

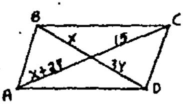
$\overline{DC} + \overline{AB} = \overline{FH} + \overline{AF} + \overline{FH} + \overline{HB} = \overline{AF} + 2\overline{FH} + \overline{HB}.$

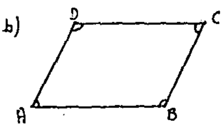
$$\Rightarrow \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} = \frac{1}{2}\overline{AF} + \overline{FH} + \frac{1}{2}\overline{HB}$$

Por lo tanto, $\overline{MN} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2}$. ∎

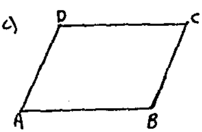
VIII Ejercicios:

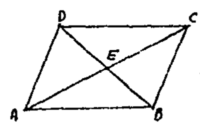
1) Si ABCD es un paralelogramo, determinar los valores de X y de Y.

a) 

b) 

$\angle A = 3X - 20$, $\angle B = Y$, $\angle C = X + 10$

c) 

d) 

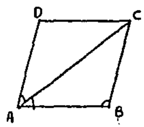
$\overline{AD} = 2X$, $\overline{DC} = 3Y + 8$,
$\overline{BC} = 7X - 25$, $\overline{AB} = 5Y - 10$

$\overline{AE} = 2X + Y$, $\overline{AC} = 30$
$\overline{BE} = 5X + Y$, $\overline{BD} = 24$

Figura 147

2) En los siguientes casos, si ABCD es un rombo, determinar los valores de X y de Y.

Figura 148



$\angle ABC = Y$, $\angle CAB = 4X - 15$, $\angle DAC = 2X + 15$

Figura 149

3) Si ABCD es un rombo, determinar los valores de X y de Y en los casos siguientes:

a) $\overline{BC} = 35$, $\overline{CD} = 8X - 5$, $\overline{BD} = 5Y$, $\angle C = 60°$.

b) $\overline{AB} = 43$, $\overline{AD} = 4X + 3$, $\overline{BD} = Y + 8$, $\angle B = 120°$.

c) $\overline{AB} = 7X$, $\overline{AD} = 3X + 10$, $\overline{BC} = Y$.

d) $\overline{AB} = X + Y$, $\overline{AD} = 2X - Y$, $\overline{BC} = 12$

e) $\angle B = 130°$, $\angle ADB = 3X - 10$, $\angle A = 2Y$

f) $\angle ADB = 8X - 29$, $\angle CDB = 5X + 4$, $\angle ABC = Y$

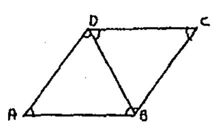
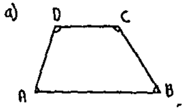


Figura 150

4) Si ABCD es un trapecio, determinar los valores de X y de Y.



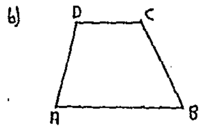


Figura 151

$\angle A = X + 5$, $\angle B = 70°$

$\angle C = Y$, $\angle D = 2X - 5$

$\angle A = 3Y$, $\angle B = 2X + 10$

$\angle C = 9X + 5$, $\angle D = 105°$

5) Si ABCD es un trapecio isósceles, determinar los valores de X y de Y en los siguientes casos:

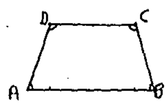


Figura 152

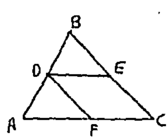
a) $\angle A = 5X$, $\angle B = 3X + 20$, $\angle C = Y$

b) $\angle A = 2X$, $\angle B = Y$, $\angle D = 3X$

c) $\angle A = 2X + 10$, $\angle B = 4X - 30$, $\angle D = Y$

d) $\angle A = 2X$, $\angle C = 7X$, $\angle D = Y$

6) Determinar los valores de X y de Y si D, E y F son los puntos medios del triángulos ABC.



$\overline{AC} = X$, $\overline{BC} = 25$

Figura 153

7) Determinar $\overline{AD}$ si $\overline{BC} = 35$ y $\overline{MP} = 40$, siendo $\overline{MP}$ la paralela media del trapecio ABCD.

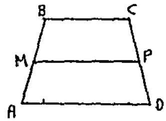


Figura 154

VI CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO

DEFINICIÓN: Se llama *circunferencia* al conjunto de puntos en un plano que equidistan de otro punto fijo llamado centro.

Se llama *círculo* a la región del plano limitada por una circunferencia.

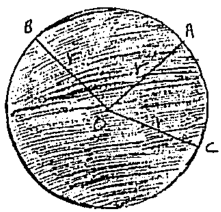


Figura 155

En la figura, O es el centro de la circunferencia; A, B y C son puntos de la circunferencia. $\overline{OA}$ es el radio de la circunferencia; $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$. A la parte sombreada se le llama círculo.

PUNTOS Y RECTAS NOTABLES EN UNA CIRCUNFERENCIA.

Cuerda: Es un segmento que tiene por extremos a dos puntos sobre la circunferencia.

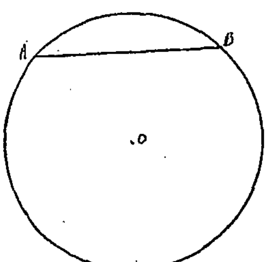


Figura 156

En la figura, $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia.

Diámetro: Es cualquier cuerda que pase por el centro, y es igual a dos radios.

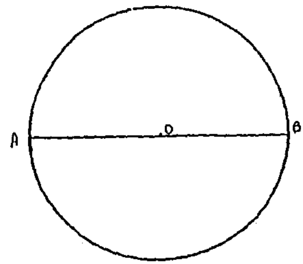


Figura 157

En la figura, $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia.

Secante: Es una recta que intersecta a una circunferencia en dos puntos.

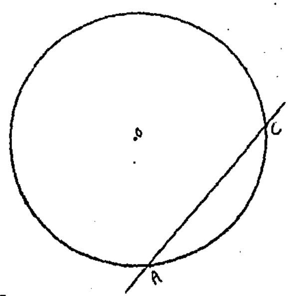


Figura 158

En la figura, la recta que pasa por los puntos A y C es una secante.

Tangente: Es una recta que intersecta a la circunferencia en un único punto, a tal punto se le llama punto de contacto o de tangencia y se dice que la recta y la circuferencia son tangentes en dicho punto.

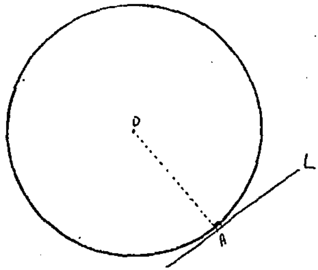


Figura 159

En la figura, la recta L es una tangente. El punto A es el punto de contacto o de tangencia.

Arco: Se denomina arco a cualquier porción de la circunferencia y se simboliza mediante $\frown$.

Así, $\widehat{AB}$ denota al arco AB. El arco de 1° es la $\frac{1}{360}$ parte de la circunferencia.

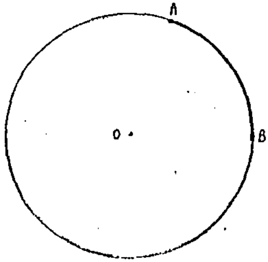


Figura 160

TEOREMA 53. Una recta perpendicular a un radio en su punto de tangencia es tangente a la circunferencia.

DEMOSTRACIÓN

Sea L una recta perpendicular al radio $\overline{OA}$ y sea Q un punto cualquiera en L distinto de A.

Como OAQ es un triángulo rectángulo con hipotenusa $\overline{OQ}$, entonces $\overline{OQ} > \overline{OA}$. Por tanto, el único punto de L que está en la circunferencia es A. Por lo tanto, L es tangente.∎

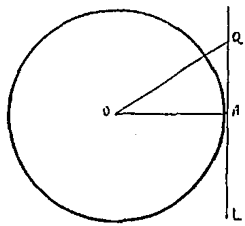
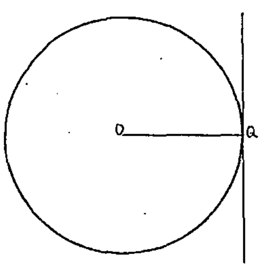


Figura 161

TEOREMA 54. Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.

DEMOSTRACIÓN La figura de la izquierda representa este caso



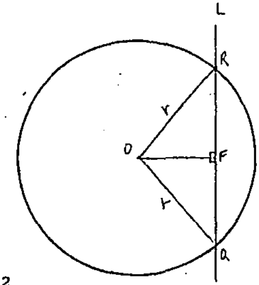


Figura 162

exactamente como ocurre. La figura de la derecha ilustra la demostración ofrecida a continuación.
Sea L tangente a la circunferencia en el punto Q. Supongamos que L no es perpendicular a $\overline{OQ}$. Demostraremos que esta suposición conduce a una contradicción.
Sea F el pie de la perpendicular de O a L. Entonces $F \neq Q$. Sea R un punto del rayo opuesto a $\overline{FQ}$ tal que $\overline{FR} = \overline{FQ}$. Entonces $\Delta OFR \cong \Delta OFQ$, por Pitágoras. En consecuencia $\overline{OR} = \overline{OQ} = r$ y R está en la circunferencia. Por consiguiente, L corta a la circunferencia en dos puntos en lugar de uno. Pero, esto es imposible, pues L es una recta tangente a la circunferencia. Luego, nuestra suposición es falsa y $L \perp \overline{OQ}$ en Q como queríamos.∎
DEFINICIÓN: Dos circunferencias son *congruentes* si tienen radios iguales.

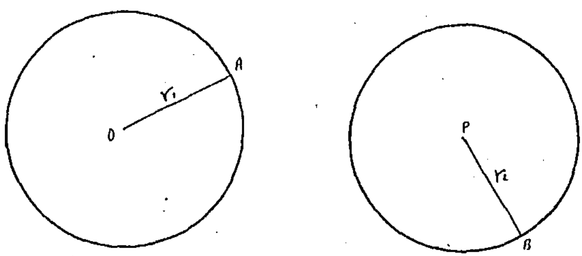


Figura 163

En la figura, $\overline{OA} = \overline{PB}$, es decir, $r_1 = r_2$
DEFINICIÓN: Dos o más circunferencias son *concéntricas* si están contenidas en el mismo plano y tienen el mismo centro.

Toda circunferecia es concéntrica consigo misma.

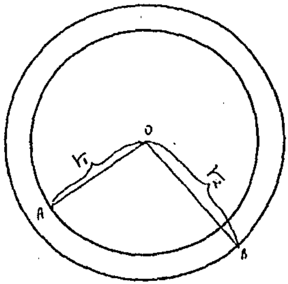
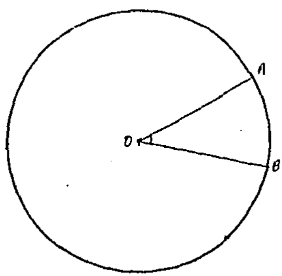


Figura 164

ÁNGULOS Y ARCOS DE LA CIRCUNFERENCIA

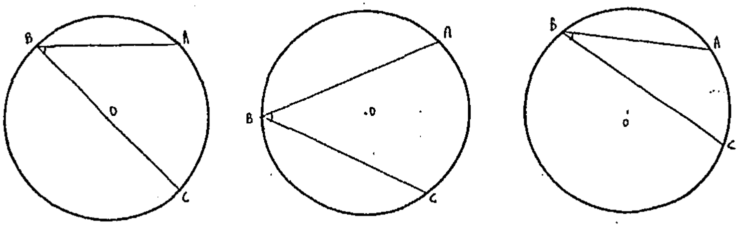
Ángulo central: Es aquel cuyo vértice está en el centro de la circunferencia.



En la figura, ∠AOB es un ángulo central.

Figura 165

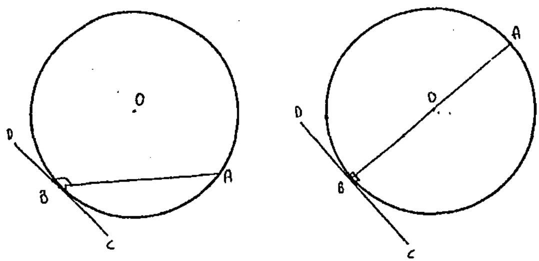
Ángulo inscrito: Es aquel cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados contienen cuerdas de ella.



En la figura, ∠ABC son ángulos inscritos.

Figura 166

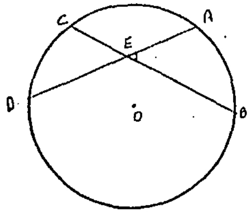
Ángulo semi-inscrito: Es el formado por una tangente y una cuerda que va al punto de tangencia.



En la figura, ∠ABC y ∠ABD son ángulos semi-inscritos.

Figura 167

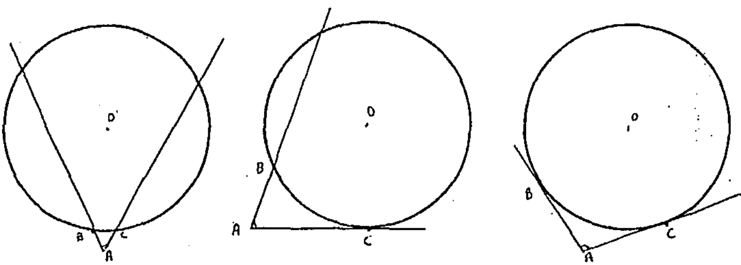
Ángulo interior: Es el que tiene su vértice en el interior de la circunferencia.



En la figura, ∠AEB es un ángulo interior, lo mismo se puede decir de ∠AEC, ∠CED y ∠DEB.

Figura 168

Ángulo exterior: Es el que tiene su vértice en el exterior de la circunferencia y está formado ya sea por dos secantes, por dos tangentes o por una secante y una tangente.



Dos secantes secante y tangente dos tangentes
∠BAC son ángulos exteriores

Figura 169

PROPIEDADES DE ÁNGULOS Y ARCOS DE LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA 55. La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central.

DEMOSTRACIÓN.

Demostraremos tres casos:

CASO I. El centro está en uno de los lados del ángulo.

Sea $\angle COA = X$. Consideremos el ΔBOC.

$\overline{OB} = \overline{OC}$, por ser radios iguales,

$\angle B = \angle C$, por ser ángulos opuestos a lados iguales,

$\angle BOC = 180° - X$, por ser el suplemento del $\angle COA$.

Entonces: $\angle B + \angle C + \angle BOC = 180°$

Sustituyendo: $\angle B + \angle B + 180° - X = 180°$

$\Rightarrow 2\angle B - X = 0 \Rightarrow 2\angle B = X \Rightarrow \angle B = \dfrac{X}{2}$

Por lo tanto, $\angle B$ es igual a la mitad del $\angle COA$.

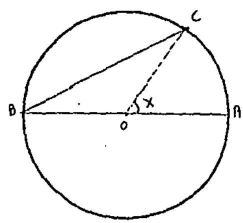


Figura 170

CASO II. El centro está en el interior del ΔABC

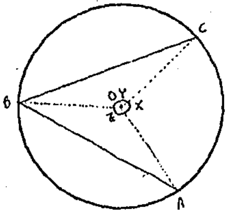


Figura 171

Sea $\angle COA = X$. Tracemos el segmento $\overline{OB}$ y sean $\angle BOC = Y$ y $\angle BOA = Z$

Entonces: $X + Y + Z = 360°$ (1)

Consideremos el ΔBOC

$\angle CBO = \angle C$, por ser ángulos opuestos a lados iguales y

$\angle CBO + \angle C + Y = 180°$, por el teorema 7.

Sustituyendo: $2\angle CBO + Y = 180°$

Despejando: $\angle CBO = \dfrac{180° - Y}{2}$.

Consideremos el ΔBOA

$\angle OBA = \angle A$, por ser ángulos opuestos a lados iguales y

$\angle OBA + \angle A + Z = 180°$ por el teorema 7.

Sustituyendo: $2\angle OBA + Z = 180°$

Despejando: $\angle CBO = \dfrac{180° - Z}{2}$.

Entonces: $\angle CBA = \angle CBO + \angle OBA$

$$\angle CBA = \frac{180° - Y}{2} + \frac{180° - Z}{2} = \frac{360° - Y - Z}{2} \qquad (2)$$

Despejando X en (1): $X = 360° - Y - Z$

Suatituyendo en (2): $\angle CBA = \dfrac{X}{2}$

Por lo tanto, $\angle CBA$ es igual a la mitad del $\angle COA$.

CASO III. El centro está fuera del ΔABC.

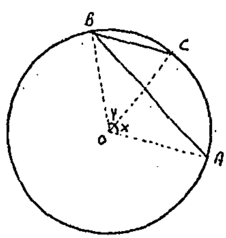


Figura 172

Sea $\angle COA = X$. Tracemos el segmento $\overline{OB}$. Sea $\angle BOC = Y$ y consideremos el ΔBOA

$\angle OBA = \angle A$, por ser ángulos opuestos a lados iguales y

$\angle OBA + \angle A + \angle BOA = 180°$ por el teorema 7.

Sustituyendo: $\angle OBA + \angle OBA + \angle BOA = 180°$

$$2\angle OBA + \angle BOA = 180°$$

Pero $\angle BOA = X + Y$

Entonces: $2\angle OBA + X + Y = 180°$

Despejando: $\angle OBA = \dfrac{180° - X - Y}{2}$ (1).

Consideremos el ΔBOC

$\angle OBC = \angle C$, por ser ángulos opuestos a lados iguales y

$\angle CBO + \angle C + Y = 180°$ por el teorema 7.

Sustituyendo: $\angle OBC + \angle OBC + Y = 180°$, $2\angle OBC + Y = 180°$

Despejando: $\angle OBC = \dfrac{180° - Y}{2}$ (2).

Pero $\angle CBA = \angle OBC - \angle OBA$

Restando (1) de (2): $\angle CBA = \dfrac{180° - Y}{2} - \dfrac{180° - X - Y}{2}$

$$\angle CBA = \frac{180° - Y - 180° + X + Y}{2} = \frac{X}{2}$$

Por lo tanto, $\angle CBA$ es igual a la mitad de $\angle COA$.■

COROLARIO. Todo ángulo inscrito cuyos lados intersectan los extremos de un mismo diámetro es un ángulo recto.

DEMOSTRACIÓN.

$\angle ACB$ es recto porque es igual a la mitad del ángulo $\angle AOB$, que es igual a 180°.■

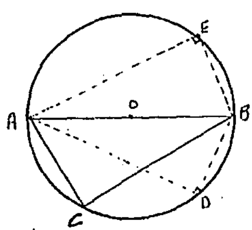


Figura 173

TEOREMA 56. La medida del ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que subtiende la cuerda.

DEMOSTRACIÓN.

Hay que demostrar que $\angle DCA = \frac{1}{2}\angle DOC$.

Consideremos el ΔDOC. Sea $\angle DOC = X$

$\angle D = \angle OCD$, por ser ángulos opuestos a lados iguales y

$X + \angle D + \angle OCD = 180°$ por el teorema 7.

Sustituyendo: $X + \angle OCD + \angle OCD = 180°$

$$X + 2\angle OCD = 180°$$

Despejando: $X = 180° - 2\angle OCD$

$$\angle OCA = 90° - \angle OCD$$

Por lo tanto: $\angle OCA = \frac{1}{2}X = \frac{1}{2}\angle DOC$.■

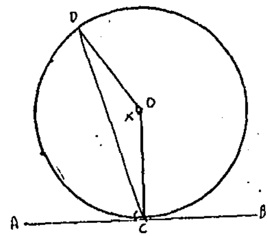


Figura 174

COROLARIO. Un diámetro trazado por el punto de contacto de una tangente es perpendicular a ella.

DEMOSTRACIÓN.

$\angle DOC = 180°$, por ser un diámetro.

La recta AB es tangente a la circunferencia en el punto C.

Por el teorema anterior, $\angle DCA = \frac{1}{2}\angle DOC = 90°$.

Entonces $\overline{DC} \perp \overline{AB}$.■

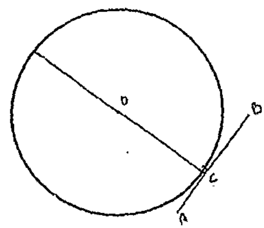


Figura 175

TEOREMA 57. La medida de un ángulo interior a una circunferencia es igual a la mitad de la suma de las medidas de los ángulos centrales interceptados por el ángulo y su opuesto por el vértice.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\angle AEB$ un ángulo interior a la circunferencia y sean $\angle AOB$ y $\angle COD$ los ángulos centrales comprendidos por los lados.

Hay que demostrar que $\angle AEB = \dfrac{\angle AOB + \angle COD}{2}$

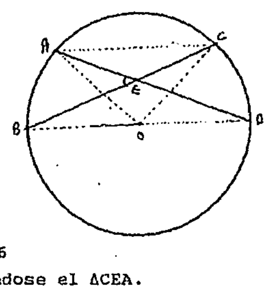


Figura 176

Trazo auxiliar: Se une A con C formándose el $\triangle CEA$.

$\angle AEB = \angle EAC + \angle ACE$, por ser ángulo exterior al $\triangle CEA$. (1)

Pero: $\angle EAC = \angle DAC$ y $\angle ACE = \angle ACB$

$\angle DAC = \dfrac{\angle COD}{2}$ y $\angle ACB = \dfrac{\angle AOB}{2}$, por ser ángulos inscritos.

Sustituyendo en (1): $\angle AEB = \angle DAC + \angle ACB = \dfrac{\angle COD}{2} + \dfrac{\angle AOB}{2}$

Por lo tanto: $\angle AEB = \dfrac{\angle AOB + \angle COD}{2}$. ■

TEOREMA 58. La medida de un ángulo exterior a una circunferencia (en cualquiera de sus casos) es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los ángulos centrales que subtienden sus lados.

DEMOSTRACIÓN.

CASO I. Si el ángulo está formado por dos secantes.

El $\angle BAC$ es un ángulo exterior a la circunferencia.

$\angle BOC$ y $\angle EOD$ son los ángulos centrales comprendidos por sus lados.

Hay que demostrar que $\angle BAC = \dfrac{\angle BOC - \angle EOD}{2}$

Trazo auxiliar: Se une C con E formándose el ΔCEA.

$\angle BEC = \angle BAC + \angle ECA$ por ser ángulo exterior del ΔCEA; entonces $\angle BAC = \angle BEC - \angle ECA$

Pero $\angle BEC = \dfrac{\angle BOC}{2}$, por ser ángulo inscrito

y $\angle ECA = \angle ECD = \dfrac{\angle EOD}{2}$, por ser ángulo inscrito

Sustituyendo: $\angle BAC = \dfrac{\angle BOC}{2} - \dfrac{\angle EOD}{2} = \dfrac{\angle BOC - \angle EOD}{2}$

Por lo tanto, $\angle BAC = \dfrac{\angle BOC - \angle EOD}{2}$.

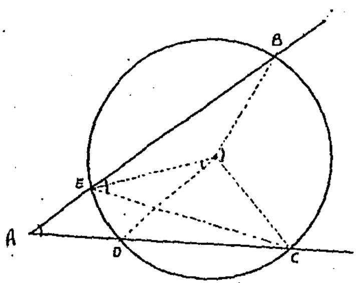


Figura 177

CASO II. Si el ángulo está formado por dos tangentes.

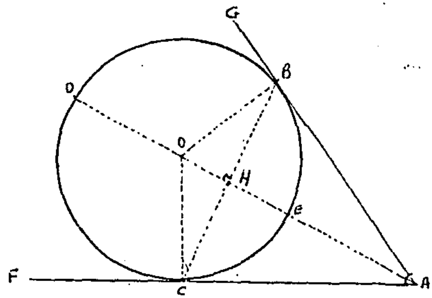


Figura 178

El $\angle BAC$ es un ángulo exterior a la circunferencia.

Sean $\angle BOC$ ($\angle BOD + \angle DOC$) y $\angle BOC$ ($\angle BOC + \angle EOC$) los ángulos centrales comprendidos por sus lados.

Trazo auxialiar: Se une C con B formándose el ΔCOB y el ΔBOH

Sea $\overline{OH}$ la altura del ΔCOB

Entonces $\overline{OH}$ es también mediatriz del triángulo isósceles ($\overline{OC} = \overline{OB}$) siendo O el vértice opuesto al lado desigual.

Por lo tanto, $\overline{CH} = \overline{HB}$.

Considérense los triángulos DHB y DHC

$\Delta OHB \cong \Delta DHC$ por LAL

Por lo tanto, $\overline{DC} = \overline{DB}$

Considérense los triángulos DOC y DOB

$\Delta DOC \cong \Delta DOB$ por LLL

Esto significa que $\angle DOB = \angle DOC$; $\angle ODB = \angle ODC$; $\angle DBO = \angle DCO$

$\angle DCF = \dfrac{\angle DOC}{2}$, por ser ángulo semi-inscrito

$\angle DBG = \dfrac{\angle DOB}{2}$, por ser ángulo semi-inscrito

Hay que demostrar que: $\angle BAC = \dfrac{\angle DOB + \angle DOC}{2} - \dfrac{\angle BOE + \angle COE}{2}$

Consideremos el cuadrilátero ABOC:

$\angle B = \angle C = 90°$, por ser tangentes,

$\angle O = \angle BOE + \angle COE$,

$\angle A + \angle B + \angle O + \angle C = 360°$ pues es la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero; sustituyendo:

$\angle A + 90° + \angle BOE + \angle COE + 90° = 360°$, y despejando:

$\angle A = 180° - (\angle BOE + \angle COE)$

Consideremos el cuadrilátero ABDC:

$\angle B = 180° - \angle DBG = 180° - \frac{\angle DOB}{2}$, por ser ángulos suplementarios,

$\angle C = 180° - \angle DCF = 180° - \frac{\angle DOC}{2}$, por ser ángulos suplementarios,

$\angle D = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle BOE + \angle COE)$, por ser ángulo inscrito,

$\angle A + \angle B + \angle D + \angle C = 360°$ por ser la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero; sustituyendo:

$\angle A + 180° - \frac{\angle DOB}{2} + \frac{1}{2}(\angle BOE + \angle COE) + 180° - \frac{\angle DOC}{2} = 360°$ y despejando

$$\angle A = \frac{\angle DOB}{2} - \frac{1}{2}(\angle BOE + \angle COE) + \frac{\angle DOC}{2}$$

Por lo tanto: $\angle A = \angle BAC = \frac{\angle DOB + \angle DOC}{2} - \frac{\angle BOE + \angle COE}{2}$

CASO III. Si el ángulo está formado por una secante y una tangente.

El $\angle BAC$ es un ángulo exterior a la circunferencia

Hay que demostrar que :

$\angle BAC = \frac{\angle EOD + \angle BOE}{2} - \frac{\angle BOC}{2}$ (1)

Trazo auxiliar: Se une A con E pasando por el centro O.

$\angle BAC = \angle BAE + \angle EAC$, por construcción.

Ahora bien:

$\angle BAE = \angle BAO = 90° - \angle BOA$, por ser ΔOAB un triángulo rectángulo siendo $\angle B$ recto.

$\angle EAC = \frac{\angle EOD - \angle COA}{2}$, por el caso I de este mismo teorema.

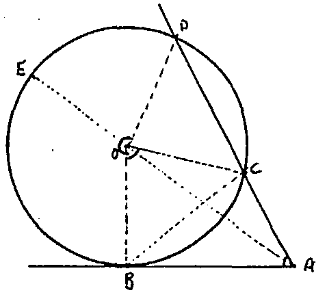


figura 179

Sustituyendo en (1): $\angle BAC = 90° - \angle BOA + \dfrac{\angle EOD - \angle COA}{2}$ (2)

Ahora bien: $\angle BOE + \angle BOA = 180°$, por ser suplementarios.

Dividiendo entre 2: $\dfrac{\angle BOE}{2} + \dfrac{\angle BOA}{2} = 90°$ (3)

Sustituyendo (3) en (2): $\angle BAC = \dfrac{\angle BOE}{2} + \dfrac{\angle BOA}{2} - \angle BOA + \dfrac{\angle EOD - \angle COA}{2}$

$$\angle BAC = \frac{\angle BOE}{2} + \frac{\angle EOD}{2} - \frac{\angle BOA}{2} - \frac{\angle COA}{2}$$

$$\angle BAC = \frac{\angle EOD + \angle BOE}{2} - \frac{\angle BOA + \angle COA}{2}$$

$$\angle BAC = \frac{\angle EOD + \angle BOE}{2} - \frac{\angle BOC}{2}. \blacksquare$$

Ejemplos:

1) Si $\angle AOC = 120°$, calcular $\angle ABC$.

2) Si $\angle ADC = 40°$. Determinar $\angle COB$ y $\angle BAC$.

Solución de 1)

$\angle ABC = \dfrac{\angle AOC}{2}$ (por ser ángulo inscrito)

$\Rightarrow \angle ABC = \dfrac{120°}{2} = 60°$

Solución de 2)

$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$ (por ser ángulo inscrito), como $40° = \frac{1}{2}\angle AOC$, entonces $\angle AOC = 80°$.

Como $\angle AOC$ es isósceles por ser $\overline{OA} = \overline{OC}$, entonces $\angle OAC = \angle OCA$.

Entonces: $80° + 2\angle OAC = 180° \Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = 50°$

Por lo tanto, $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle OAC = 100°$

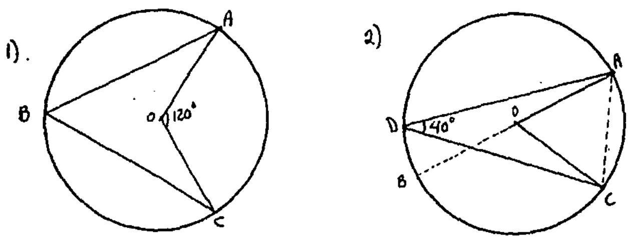


Figura 180

IX Ejercicios

1) Calcular el ángulo central $\angle POS$ si $\angle QTR = 62°$ y $\angle QOR = 101°$

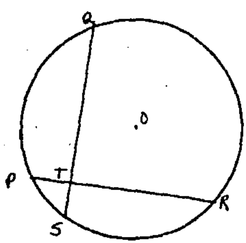


Figura 181

2) Si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son tangentes y $\angle BOD = 100°$. Calcular $\angle BAD$

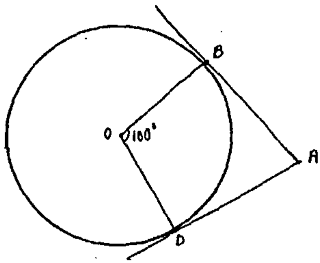


Figura 182

3) Calcular los ángulos: BPR y BAC en la siguiente figura

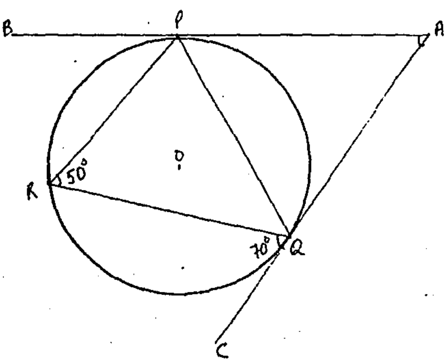


Figura 183

4) Si el $\angle AOB = 100°$ y $\overline{CB}$ es un diámetro. Calcular $\angle BAO$.

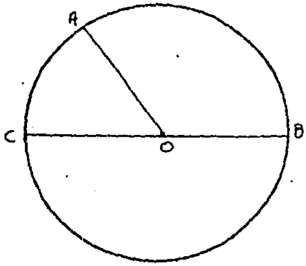


Figura 184

VII TRIGONOMETRÍA

DEFINICIÓN:

La *trigonometría* es la parte de las matemáticas que trata de las mediciones de las partes o elementos de un triángulo.

La trigonometría se vale de las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de los triángulos; de allí proviene su nombre que etimológicamente significa "medida de los triángulos".

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO.

Suponemos al estudiante familiarizado con la noción de ángulo formado por dos rectas como se estudia en geometría plana elemental. En esta sección nos limitaremos a la consideración de ángulos agudos.

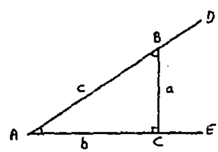


Figura 185

Sea EAD un ángulo menor de 90°, es decir, un ángulo agudo. Desde B, que es un punto cualquiera de uno de los lados del ángulo, tracemos una perpendicular al otro lado, formando así el triángulo rectángulo ABC. Sean $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ los ángulos interiores de los vértices A, B y C, respectivamente, y sean *a*, *b* y *c* las longitudes de los lados opuestos correspondientes en el triángulo rectángulo ΔABC. Sabemos por geometría, que los ángulos y lados de este triángulo son mutuamente dependientes. La trigonometría comienza por enseñar la naturaleza exacta de esta dependencia y para este objeto emplea las razones de sus lados. Estas razones se llaman *funciones trigonométricas.* Las seis funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo son:

senA, que se lee "seno de A"

cosA, que se lee "coseno de A"

tanA, que se lee "tangente de A"

cotA, que se lee "cotangente de A"

secA, que se lee "secante de A"

cscA, que se lee "cosecante de A"

Nota: En la designación de estas funciones eliminamos el símbolo "∠" para referirnos al ángulo. Así pues, el seno del ángulo A se expresa simplemente como senA. Lo mismo se hace para denotar a las funciones restantes.

Estas funciones (o razones) trigonométricas se definen como sigue (ver figura anterior).

(1) $\operatorname{sen}A = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$ (2) $\cos A = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

(3) $\tan A = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{a}{b}$ (4) $\cot A = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{b}{a}$

(5) $\sec A = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{c}{b}$ (6) $\csc A = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{c}{a}$

TEOREMA 59. El valor numérico de cualquiera de estas funciones depende solamente de la magnitud del ángulo A, es decir, que es independiente del punto B desde el cual se traza la perpendicular al otro lado. (Ver demostración en el apéndice).

Estas funciones son de importancia fundamental en el estudio de la trigonometría. En suma, no se puede hacer nungún progreso en este estudio sin un completo conocimiento de las seis definiciones anteriores. Estas son fáciles de aprenderse de memoria, observando que las tres primeras son recíprocas, respectivamente, de las tres últimas. En efecto:

$$\operatorname{sen}A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A};\qquad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A};\qquad \tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A};$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\operatorname{sen}A};\qquad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A};\qquad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}.$$

Apliquemos las definiciones (1) al (6) inclusive, al ángulo B de la figura anterior. En este caso, el lado opuesto es igual a $\overline{AC} = b$ y el lado adyacente $\overline{BC} = a$.

Por tanto:

$\text{senA} = \frac{b}{c}$; $\cos A = \frac{a}{c}$; $\tan A = \frac{b}{a}$; $\cot A = \frac{a}{b}$; $\sec A = \frac{c}{a}$; $\csc A = \frac{c}{b}$.

Comparando estas funciones con las del ángulo A, vemos que

senA = cosB; cosA = senB ; tanA = cotA; cotA = tanB; secA = cscB; cscA = secB.

El seno y el coseno se llaman cofunciones una de la otra. Similarmente la tangente y la cotangente, y la secante y la cosecante son cofunciones.

Como A + B = 90° (es decir, A y B son complementarios), los resultados anteriores pueden enunciarse como sigue:

TEOREMA 60. Una función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su ángulo complementario.

(Ver demostración en el apéndice)

El enunciado del teorema expresa las siguientes igualdades:

senA = cos(90° - A); cosA = sen(90° - A); tanA = cot(90° - A); cotA = tan(90°- A); secA = csc(90° - A); cscA = sec(90° - A).

Ejemplos: Calcular las funciones trigonométricas del ángulo A en el triángulo rectángulo (C=90°) cuyos catetos son a=3, b=4.

Solución: Por el teorema de Pitágoras tenemos que $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Aplicando las definiciones, tendremos:

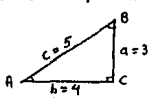


Figura 186

$\text{senA} = \frac{3}{5}$; $\cos A = \frac{4}{5}$; $\tan A = \frac{3}{4}$; $\cot A = \frac{4}{3}$; $\sec A = \frac{5}{4}$; $\csc A = \frac{5}{3}$.

Ejemplo 2. Calcular la funciones trigonométricas del triángulo rectángulo (C=90°) en que a = 3 y c = 4

Solución: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$\text{senB} = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\cos B = \frac{3}{4}$; $\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $\cot B = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$; $\sec B = \frac{4}{3}$;

$\csc B = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$.

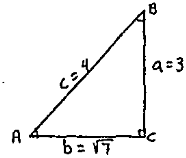


Figura 187

FUNCIONES DE 45°, 30° Y 60°.

Estos ángulos se presentan muy frecuentemente en los problemas que se resuelven usualmente por métodos trigonométricos. Es importante, en consecuencia, hallar los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos y aprenderse los resultados de memoria.

a) FUNCIONES DEL ÁNGULO DE 45°. Consideremos un triángulo rectángulo isósceles como ΔABC. Entonces $\angle A = \angle B = 45°$

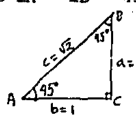


Figura 188

Como se puede tomar un triángulo cualquiera, con tal que satisfaga la condición de ser rectángulo e isósceles, podemo asignar a los catetos la longitud que queramos.

Escojamos, como caso más sencillo, catetos de longitud una unidad, es decir $a=1$ y $b=1$.

Entonces $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ y obtenemos

$\text{sen}45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 45° = 1$;

$\cot 45° = 1$; $\sec 45° = \sqrt{2}$; $\csc 45° = \sqrt{2}$.

b) FUNCIONES DEL ÁNGULO DE 30° Y 60°.- Dibujemos un triángulo equilátero como en la figura siguiente, sea éste ABD. Bajemos la perpendicular $\overline{BC}$ de B a $\overline{AD}$, y consideremos el triángulo ABC, en el que $\angle A = 60°$ y $\angle ABC = 30°$

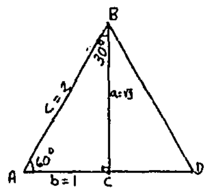


Figura 189

Si tomamos el lado más pequeño como unidad, es decir, si b=1, tendremos:

$c = \overline{AB} = \overline{AD} = 2\overline{AC} = 2b = 2 \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

Por lo tanto,

$\text{sen}60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$; $\cot 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$\sec 60° = 2$; $\csc 60° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;

del mismo triángulo:

$\text{sen}30° = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot 30° = \sqrt{3}$;

$\sec 30° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $\csc 30° = 2$

Concentrando la información en una tabla, tenemos:

Ángulo	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla I

Ejemplo 3. Dado el triángulo rectángulo (C=90°) en que A=60°, a=100; hallar los lados c y b así como el ángulo B.

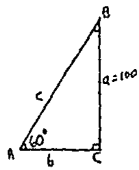


Figura 190

Solución: como $\text{sen}A = \frac{a}{c}$, entonces $\text{sen}60° = \frac{100}{c}$,

por lo que $c = \frac{100}{\text{sen}60°} = \frac{100}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 115.5$,

como $\tan A = \frac{a}{c}$, entonces $\tan 60° = \frac{100}{b}$,

por lo que $b = \frac{100}{\tan 60°} = \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57.7$

Por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo: $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 60° - 90° = 30°$.

X Ejercicios:

1) Hallar las funciones trigonométricas del ángulo A, sabiendo que a=8 y b = 15.

2) Hallar las funciones trigonométricas del ángulo B, sabiendo que b =

5, c = 13.

Sol: $\text{sen}B = \frac{5}{13}$, $\cos B = \frac{12}{13}$; $\tan B = \frac{5}{12}$; $\cot B = \frac{12}{5}$; $\sec B = \frac{13}{12}$; $\csc B = \frac{13}{5}$.

3) Dados $\text{sen}A = \frac{3}{5}$, $c = 200$; hallar a. Sol: $a = 120$

4) Dados $\cos A = 0.44$, $c = 30.5$; hallar b Sol: $b = 13.42$

5) Dados $\tan A = \frac{11}{3}$, $b = \frac{27}{11}$; hallar c Sol: $c = \frac{9\sqrt{130}}{11}$

6) Dados $A = 30°$, $a = 25$; hallar c, B y b Sol: $c = 50$, $B = 60°$, $b = 25\sqrt{3}$

7) Dados $B = 45°$, $b = 20$; hallar c, A y a Sol: $c = 20\sqrt{2}$, $A = 45°$, $a = 20$

8) Si $\sec B = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $c = 480$, calcular a, b, A y B.

Sol: $a = 240$, $b = 240\sqrt{3}$, $A = 60°$, $B = 30°$

9) Expresar cada una de las siguientes funciones como una función del ángulo complementario:

a) tan30°, b) cos20°, c) sec81°, d) sen33°33', e) csc72°17'4"

Sol:

a) cot60°, b) sen70°, c) csc9°, d) cos56°27', e)sec17°42'56".

VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

En la sección anterior se calcularon las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

Para calcular las funciones de cualquier ángulo agudo se pueden utilizar las tablas trigonométricas que aparecen en cualquier texto de trigonometría, o bien, utilizando la calculadora científica, ya tan de moda en la actualidad.

Hace algunos años, cuando la electrónica no estaba tan avanzada como ahora, se hacía indispensable el uso de dichas tablas; de hecho no había otra manera de encontrar el valor numérico de las funciones, pero ahora con los adelantos de la tecnología moderna, dichas tablas se volvieron obsoletas, razón por la cual, la gran mayoría de los estudiantes ya no las utiliza, y en cambio sí, muchos de ellos poseen ya la calculadora científica que abunda en el mercado.

Ejemplos

1) Calcular sen28° Sol: 0.46947156

2) Calcular cos48°20' Sol: 0.66479587

3) Calcular tan24°16'40" Sol: 0.45105047

4) Calcular cot32° Sol: 1.60033453

(recuérdese que $\cot 32° = \frac{1}{\tan 32°}$)

5) Calcular sec68°. Sol: 2.66946716

(recuérdese que $\sec 68° = \frac{1}{\cos 68°}$)

6) Calcular csc25°. Sol: 2.36620158

(recuérdese que $\csc 25° = \frac{1}{\operatorname{sen} 25°}$)

XI Ejercicios. Obtener, usando la claculadora científica, el valor de cada una de las funciones trigonométricas siguientes:

1) sec3°; 2) sen29°15'; 3) cos72°23'18"; 4) tan16°; 5) cot49°17'52"; 6) csc 58°19'44".

ÁNGULOS POSITIVOS Y NEGATIVOS.

Cuando un ángulo es engendrado por la rotación de la recta en sentido opuesto a las manecillas del reloj, se ha acordado llamar a tal ángulo *positivo.*

Cuando un ángulo es engendrado por la rotación de la recta en sentido de las manecillas del reloj, se ha acordado llamarlo ángulo *negativo.*

Los arcos que llevan las flechas se dibujarán con una línea continua cuando indiquen un ángulo positivo, y con línea punteada cuando indiquen un ángulo negativo.

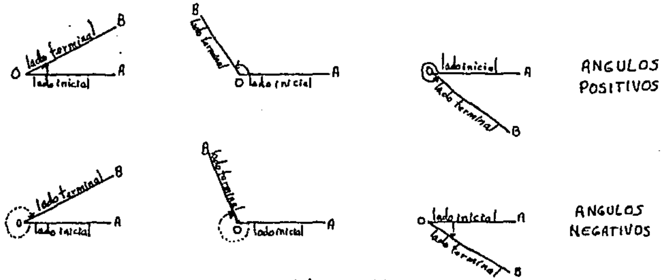


Figura 191

ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD. Aún cuando los ángulos tengan los mismos lados inicial y final, y hayan sido engendrados por una rotación en el mismo sentido, pueden ser diferentes en magnitud. Así, para obtener un ángulo recto, la recta gira hasta la posición $\overline{OB}$ como aparece en la siguiente figura.

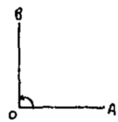


Figura 192

Si en cambio, la recta se detiene en la posición $\overline{OB}$ después de dar una revolución completa a partir de $\overline{OB}$, como se indica en la siguiente figura, hemos engendrado un ángulo cuya magnitud es de cinco ángulos rectos.

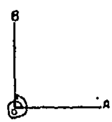


Figura 193

Si fueron dos revoluciones antes de detenerse, como se representa en la siguiente figura, entonces hemos engendrado un ángulo de magnitud igual a nueve ángulos rectos, y así sucesivamente.

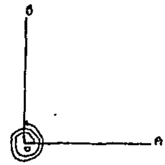


Figura 194

Esto muestra que los ángulos positivos pueden tener una magnitud cualquiera. Análogamente, se puede ver que dando una o varias revoluciones completas en el sentido de las manecillas del reloj, los ángulos negativos pueden tener también cualquier magnitud.

LOS CUATRO CUADRANTES.

Tomando como origen el vértice del ángulo que se considere, se acostumbra dividir el plano en cuatro partes llamadas cuadrantes, mediante dos rectas perpendiculares.

segundo cuadrante	primer cuadrante
O	lado inicial
tercer cuadrante	cuarto cuadrante

Así si O es el vértice, los diferentes cuadrantes se nombran como está indicado en la figura, considerándose como lado inicial la parte de recta horizontal situada a la derecha del vértice. Se dice que un ángulo está en (o pertenece a) un cierto cuadrante cuando su lado final está en ese cuadrante.

Ejemplos:

1) ¿En qué cuadrante se encuentra el ángulo de 1000°?

Solución: 1000° = 720° + 280° = 2(360°) + 280° =
2 revoluciones en sentido positivo + 280°.
El lado final de 280° está en el cuarto cuadrante.

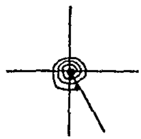


Figura 195

2) ¿En qué cuadrante se encuentra un ángulo de -568°

Solución: -568° = -360° - 208° =
una revolución en sentido negativo - 208°.
El lado final de -208° está en el segundo cuadrante.

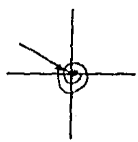


Figura 196

XII Ejercicios:

Determinar en qué cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos
1) 225°, 2) 162°, 3) 651°, 4) - 75°, 5) -910°, 6) 1500°, 7) -700°, 8) -872° 9) 540°, 10) -630°, 11) 630°.

COORDENADAS RECTANGULARES DE UN PUNTO EN EL PLANO.

Para definir las funciones de ángulos no agudos, es conviente introducir la noción de coordenadas. Sea $X'X$ una horizontal y sea $Y'Y$ una recta perpendicular a ella en el punto O. Cualquier punto del plano que contiene a estas rectas (como P) está determinado por dos números que miden en magnitud y signo su distancia a cada una de las perpendiculares $X'X$ y $Y'Y$. Su distancia a $Y'Y$ (como $\overline{NP}=a$) se llama *abscisa* del punto, y su distancia a $X'X$ (como $\overline{MP}=b$) se llama *ordenada* del punto.

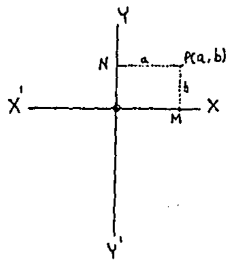


Figura 197

Las abscisas medidas hacia la derecha de $Y'Y$ son positivas.
Las abscisas medidas hacia la izquierda de $Y'Y$ son negativas.
Las ordenadas medidas hacia arriba de $X'X$ son positivas.
Las ordenadas medidas hacia abajo de $X'X$ son negativas.

El conjunto formado por la abscisa y la ordenada se llama *coordenadas* del punto. EL punto P, por ejemplo, está dado por sus coordenadas a y b, y se designa por el símbolo $P(a,b)$.

Las rectas $X'X$ y $Y'Y$ se llaman *ejes de coordenadas*, siendo $X'X$ el eje de las abscisas, el eje X, o eje de las X y la recta $Y'Y$ el eje de las ordenadas o eje de las Y; el punto O se llama origen de coordenadas.

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, como ya habíamos visto antes. Trazar un punto es localizar su posición a partir de sus coordenadas. La manera más conveniente de hacerlo es contar primero a partir de O a lo largo de $X'X$ un número de unidades igual a la abscisa, a la derecha o a la izquierda, según que la abscisa sea positiva o negativa.

Después, a partir del punto así determinado, contar el número de unidades igual a la ordenada, hacia arriba o hacia abajo, según que la

ordenada sea positiva o negativa. El trazo de puntos se simplifica mucho usando papel cuadriculado en el que se ha dividido el plano en cuadrados iguales, siendo los lados de estos cuadrados paralelos a los ejes. Así, para trazar el punto (4,-3), se cuentan cuatro divisiones a partir de O sobre el eje X hacia la derecha, y después tres divisiones hacia abajo, a partir del punto así determinado, sobre una recta paralela al eje Y.
Análogamente la siguiente figura muestra los puntos (-2,3), (-3,-4) y (0,3), (4,-3)

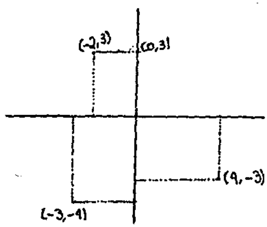


Figura 198

XIII Ejercicios

1) Trazar los puntos (5,4), (-3,4), (- 2,-4). (5,-1), (6,0), (-5,0) y (0,4).

2) ¿Cuál es la distancia de cada punto al origen? Podemos calcularla mediante el Teorema de Pitágoras.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO.

Se han definido ya las seis funciones trigonométricas para ángulos agudos. Ahora vamos a dar unas defínciones que se pueden aplicar a cualquier ángulo, y que concuerdan con las definiciones ya dadas para los ángulos agudos.
Tomemos el origen de coordenadas O como vértice del ángulo y el lado inicial como el eje X. Dibujamos un ángulo XOB en cada cuadrante.
Sea P un punto cualquiera del lado final OB del del ángulo y sean

(x,y) sus coordenadas. Sea Q el pie de la perpendicular desde P a la recta $X'X$. En todas las figuras se verifica de nuevo, por el Teorema de Pitágoras que:

$\overline{OQ} = x$, $\overline{QP} = y$, $\overline{OP} = r$; $\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2$; a la longitud $\overline{OP}$ la llamaremos radio y $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

a) ángulo en el primer cuadrante, b) ángulo en el segundo cuadrante, c) ángulo en el tercer cuadrante y d) ángulo en el cuarto cuadrante

Designando el ángulo en cada figura por XOB, las definiciones de las funciones son:

$\operatorname{sen} XOB = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{radio}} = \dfrac{y}{r}$; $\cos XOB = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{radio}} = \dfrac{x}{r}$; $\tan XOB = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \dfrac{y}{x}$;

$\cot XOB = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \dfrac{x}{y}$; $\sec XOB = \dfrac{\text{radio}}{\text{abscisa}} = \dfrac{r}{x}$; $\csc XOB = \dfrac{\text{radio}}{\text{ordenada}} = \dfrac{r}{y}$.

Estas definiciones aplicadas al ángulo XOB en el primer cuadrante conínciden con las ya vistas anteriormente.

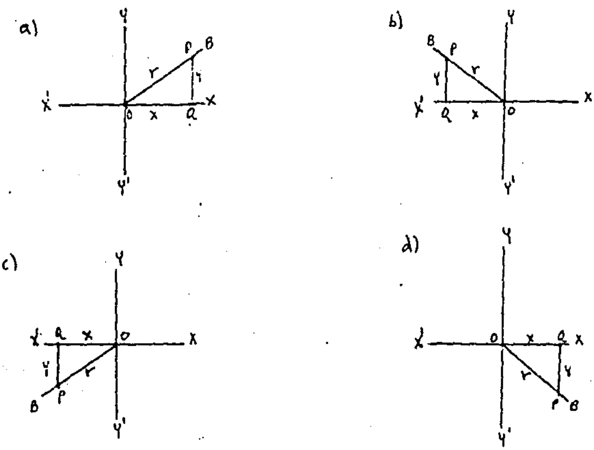


Figura 199

Cabe hacer notar que los valores de las funciones anteriores dependen, en cualquier caso, solamente de la posición del lado final OB (siendo fijo el lado *OX*). Es decir, tomando *OX* como lado inicial común, para todos las ángulos que tengan el mismo lado final OB, las funciones trigonométricas tendrán los mismos valores. Así, por ejemplo, los ángulos 40°, 400°, 760°, -320°, tienen las mismas funciones trigonométricas.

SIGNOS ALGEBRAICOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Teniendo en cuenta el valor positivo o negativo de las abscisas y ordenadas de los puntos, y recordando que la distancia $\overline{OP} = r$ es siempre positiva, vemos de inmediato, de las definiciones de las funciones trigonométricas ya comentadas, que:

En el PRIMER CUADRANTE: TODAS LAS FUNCIONES SON POSITIVAS

En el SEGUNDO CUADRANTE: SEN y CSC SON POSITIVAS, las restantes son negativas

En el TERCER CUADRANTE: TAN y COT SON POSITIVAS, las restantes son negativas

En el CUARTO CUADRANTE: COS y SEC SON POSITIVAS, las restantes son negativas

Estos resultados se resumen en la siguiente tabla:

La razón de los signos aparece abajo de la tabla.

Función	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
seno cosecante	+	+	-	-
coseno secante	+	-	-	+
tangente cotangente	+	-	+	-

Tabla II

En I: $x(+)$, $y(+)$; en II: $x(-)$, $y(+)$; en III: $x(-)$, $y(-)$; en VI: $x(+)$, $y(-)$. En todos los cuadrantes $r(+)$.

APLICACIONES. Como se vió anteriormente, se obtuvieron las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45°, 60°. A partir de estos valores se pueden deducir las funciones trigonométricas de muchos ángulos.

Ejemplo 1: Hallar las funciones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330°.

Solución: En la figura observamos que como $\angle B_2OB_4 = 180°$ y $\angle B_4OX = -\angle XOB_1 = 30°$:

$\angle XOB_2 = 150° = 180°-30° = 180° - \angle XOB_1$,

.0X$\angle XOB_3 = 210° = 180°+30° = 180°+\angle XOB_1$,

$\angle XOB_4 = 330° = 360°-30° = 360°-\angle XOB_1$,

Tomemos $\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = \overline{OP_3} = \overline{OP_4} = 2$. Entonces las razones trigonométricas obtenidas de los triángulos OM_1P_1, OM_2P_2, OM_2P_3, OM_1P_4 son iguales. Las ordenadas de los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 son

$P(\sqrt{3},1)$; $P(-\sqrt{3},1)$; $P(-\sqrt{3}.-1)$; $P(\sqrt{3}-1)$.

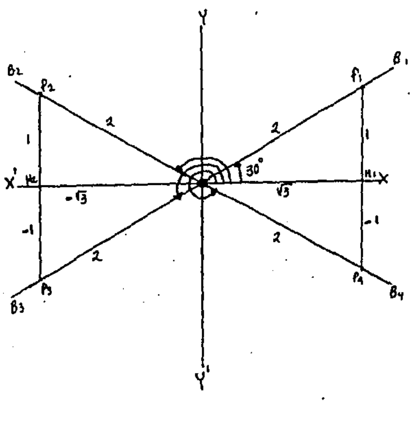


Figura 200

De esta manera hallamos la table siguiente:

Ángulo	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
150°	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
210°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2

Tabla III

Los valores en cada columna difieren solamente en el signo, y este signo se determina por el cuadrante en que el ángulo está colocado.

Ejemplo 2: Dada $\tan A=\frac{2}{3}$, hallar las otras funciones trigonométricas del ángulo A.

Solución: Cómo $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$ entonces estamos en el primer o tercer cuadrante. En ambos casos el radio es $r = \sqrt{13}$. Por tanto:

En el primer cuandrante tenemos:

$\operatorname{sen}A = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos A = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\cot A = \frac{3}{2}$; $\sec A = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $\csc A = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Y en el tercer cuadrante:

$\operatorname{sen}A = \frac{-2}{\sqrt{13}} = \frac{-2\sqrt{13}}{13}$; $\cos A = \frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{-3\sqrt{13}}{13}$; $\cot A = \frac{3}{2}$; $\sec A = \frac{-\sqrt{13}}{3}$; $\csc A = \frac{-\sqrt{13}}{2}$.

O bien, designando por A un ángulo que satisface la condición dada podemos escribir los resultados en forma más condensada, como sigue:

$\text{senA} = \frac{\pm 2\sqrt{13}}{13}$; $\cos A = \frac{\pm 3\sqrt{13}}{13}$; $\tan A = \frac{2}{3}$; $\cot A = \frac{3}{2}$; $\sec A = \frac{\pm\sqrt{13}}{3}$; $\csc A = \frac{\pm\sqrt{13}}{2}$.

El lado terminal de un ángulo queda determinado si se da el cuadrante en que el ángulo se encuentra y si se conoce también una de las funciones del ángulo. Las otras funciones se encuentran entonces facilmente, tal y como se vió en el ejemplo 2.

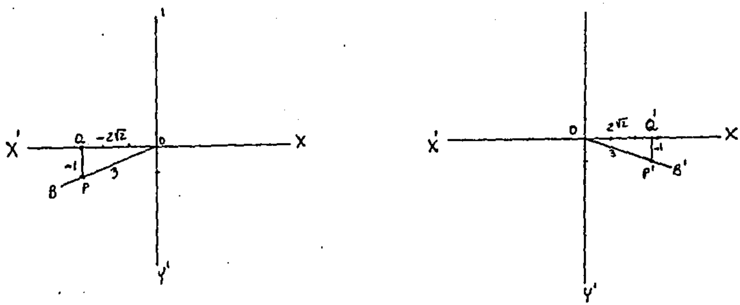
Ejemplo 3: Dado $\text{senA} = \frac{-1}{3}$, hallar las otras funciones trigonométricas del ángulo.

Según la tabla II, el ángulo A está en el tercero o en el cuarto cuadrante.

$\text{senA} = \frac{y}{r} = \frac{-1}{3}$. Tomemos $y = -1$, $r=3$. Ahora $x^2 = r^2 - y^2$. Por tanto, $x^2 = 9 - 1 = 8$, entonces $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

$\text{senA} = \frac{-1}{3}$; $\cos A = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$; $\tan A = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\cot A = 2\sqrt{2}$; $\sec A = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4}$; $\csc A = -3$

$\text{senA} = \frac{-1}{3}$; $\cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan A = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$; $\cot A = -2\sqrt{2}$; $\sec A = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\csc A = -3$.



Cuando A está en el tercer cuadrante

Cuando A está en el cuarto cuadrante

Figura 201

XIV Ejercicios:

1) Hallar las funcioens del ∠XOP para las siguientes posiciones de P (siendo $\overline{OX}$ el lado inicial en cada caso). Expresar las soluciones como fracciones comunes en la forma más simple, en el orden sen, cos, tan, cot, sec, csc.

a) (-4,3) b) (-1,-2) c) (1,1) d) (5,-12)

2) Determinar en qué cuadrante está el ∠A para cada una de las siguientes condiciones.

a) senA y tanA ambas positivass
b) senA positivo y cosA negativo
c) tanA positiva y secA negativa
d) cosA positivo y cscA negativa
e) cosA negativo y cotA negativa

3) Determinar el signo de cada una de las siguientes funciones:

a) sen160°; b) cos(-20°); c) tan200°; d) sen(-110°) e) cot460°; f) csc(-320°)

4) Dar los valores de A comprendidos entre 0° y 360° que satifacen cada una de las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen}A = \frac{1}{2}$; b) $\tan A = 1$; c) $\sec A = 2$; d) $\cot A = -\sqrt{3}$; e) $\csc A = -2$; f) $\cos A = \frac{-1}{2}$

5) Hallar los valores de las funciones trigonométricas en el orden sen, cos, tan, cot, sec, csc

a) $\operatorname{sen}A = \frac{3}{5}$; b) $\cos A = \frac{-1}{3}$; c) $\cot A = -3$; d) $\csc A = \frac{-13}{5}$; e) $\tan A = \frac{3}{4}$, senA negativo; f) $\cot A = \frac{-12}{5}$, cscA positiva.

VIII RELACIONES FUNDAMENTALES. FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

En las igualdades vistas anteriormente, llamemos A al ∠XOB. Entonces para cualquier ángulo A tendremos:

(1) $\text{sen}A = \frac{y}{r}$; (2) $\cos A = \frac{x}{r}$; (3) $\tan A = \frac{y}{x}$; (4) $\cot A = \frac{x}{y}$;

(5) $\sec A = \frac{r}{x}$; (6) $\csc A = \frac{r}{y}$.

TEOREMA 61. Las seis funciones trigonométricas de un ángulo A satisfacen las relaciones:

(7) $\text{sen}A\csc A = 1$; (8) $\cos A\sec A = 1$; (9) $\tan A\cot A = 1$;

(10) $\tan A = \frac{\text{sen}A}{\cos A}$; (11) $\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen}A}$; (12) $\text{sen}^2A + \cos^2A = 1$;

(13) $\sec^2 = 1 + \tan^2A$; (14) $\csc^2A = 1 + \cot^2A$.

DEMOSTRACIÓN

Demostración de (7):

De (1) y (4) tenemos $\text{sen}A\csc A = \frac{yr}{ry} = 1$

Demostración de (8):

De (2) y (5) tenemos $\cos A\sec A = \frac{xr}{rx} = 1$

Demostración de (9):

De (3) y (6) tenemos $\tan A\cot A = \frac{yx}{xy} = 1$

Demostración de (10):

Dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro de (3) entre r y teniendo en cuenta las igualdades (1) y (2), hallamos:

$$\tan A = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\text{sen}A}{\cos A}$$

Demostración de (11):

Dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro de (4) entre r y teniendo en cuenta las igualdades (1) y (2), hallamos:

$$\cot A = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

Demostración de (12): Recordemos que $x^2 + y^2 = r^2$, entonces:

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Demostración de (13):

$$\sec^2 A = \frac{r^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} = 1 + \tan^2 A$$

Demostración de (14):

$$\csc^2 A = \frac{r^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{x^2} = \frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = 1 + \frac{x^2}{y^2} = 1 + \cot^2 A. \blacksquare$$

También se deben de aprender las siguientes fórmulas deducidas de ellas.

$$\operatorname{sen} A = \frac{1}{\csc A};\ \operatorname{sen} A = \pm\sqrt{1 - \cos^2 A};\ \cos A = \frac{1}{\sec A};$$

$$\cos A = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A};\ \tan A = \frac{1}{\cot A};\ \tan A = \pm\sqrt{\sec^2 A - 1};$$

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{\operatorname{sen} A}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2}}{\cos A};\ \csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A};$$

$$\csc A = \pm\sqrt{1 + \cot^2 A};\ \sec A = \frac{1}{\cos A};\ \sec A = \pm\sqrt{1 + \tan^2 A};$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A};\ \cot A = \pm\sqrt{\csc^2 A - 1};$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \frac{\cos A}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 A}} = \frac{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}}{\operatorname{sen} A}.$$

Observación: El doble signo significa que obtenemos dos valores para algunas de las funciones, a menos que se dé una condición que determine si se ha de tomar el signo más o menos. La razón de esto es que existen dos ángulos menores de 360° para los cuales una función tiene un valor determinado, por ejemplo:

Ejemplo 1. Demostrar que $\sec A - \tan A \operatorname{sen} A = \cos A$

Solución: $\sec A - \tan A \operatorname{sen} A = \dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}\operatorname{sen} A$, por (8) y (10)

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A}{\cos A}, \text{ por } (12)$$

$$= \cos A$$

Ejemplo 2. Demostrar que

$\operatorname{sen} x(\sec x + \csc x) - \cos x(\sec x - \csc x) = \sec x \csc x$

Solución: $\operatorname{sen} x(\sec x + \csc x) - \cos x(\sec x - \csc x) =$

$\operatorname{sen} x\left(\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) - \cos x\left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 1 - 1 + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} =$

$\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\cos x \operatorname{sen} x}$ por (12)

$= \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \sec x \csc x$ por (7) y (8).

Observación: Generalmente suele ser buen procedimiento transformar la expresión dada en otra que contenga solamente senos y cosenos, y luego simplificarla hasta obtener la forma buscada. Es admisible cualquier operación que no altere el valor de la expresión. Evítese hasta donde sea posible el uso de radicales.

XV Ejercicios:

Demostrar las siguientes identidades:

1) $\cos x \tan x = \operatorname{sen} x$
2) $\operatorname{sen} x \sec x = \tan x$
3) $\operatorname{sen} y \cot y = \cos y$
4) $(1 + \tan^2 y)\cos^2 y = 1$
5) $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 A \tan^2 A = \tan^2 A$
6) $\cos A \csc A = \cot A$
7) $\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$
8) $\operatorname{sen}^2 B(1 + \cot^2 B) = 1$
9) $\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A$
10) $\cos^4 A - \operatorname{sen}^4 A + 1 = 2\cos^2 A$
11) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2$
12) $\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos^3 x = \operatorname{sen} x \cos x$

13) $\operatorname{sen}^2 B + \tan^2 B = \sec^2 B - \cos^2 B$

14) $\cot x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \csc x$

15) $\dfrac{\cos A}{1 - \tan A} + \dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cot A} = \operatorname{sen} A + \cos A$

16) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = 2\csc x.$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 0°, 90°, 180°, 270°. Tomemos un punto sobre cada uno de los lados terminales de estos ángulos a una unidad de distancia del origen. Las coordenadas de estos punto son:

P_0 determina un ángulo de 0°; sus coordenadas son $x = 1$, $y = 0$.
P_1 determina un ángulo de 90°; sus coordenadas son $x = 0$, $y = 1$.
P_2 determina un ángulo de 180°; sus coordenadas son $x = -1$, $y = 0$.
P_3 determina un ángulo de 270°; sus coordenadas son $x = 0$, $y = -1$.
En cada caso $r = 1$.

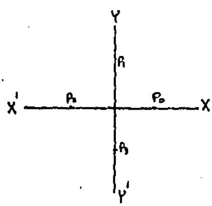


Figura 202

Sustituyendo estos valores en las igualdades (1) a (6), obtenemos los valores de las funciones trigonométricas que se buscan, excepto cuando el valor cero aparece en el denominador. Por ejemplo, para 0° tenemos:

$\operatorname{sen}0° = \dfrac{0}{1} = 0$; $\cos 0° = \dfrac{1}{1} = 1$; $\tan 0° = \dfrac{0}{1} = 0$; $\sec 0° = \dfrac{1}{1} = 1$

Pero (4) y (6) carecen de sentido ya que aparece en ellas "la división por cero". Se ha adoptado como una convención el hecho de que $\cot 0°=\infty$ y $\csc 0°=\infty$. El razonamiento es el mismo en cada caso en que el denominador es cero, es decir, cuando la función recíproca correspondiente se hace infinita.

Finalmente, como un segundo ejemplo, consideremos secA cuando A = 90°. Entonces (5) carece de sentido, ya que x = 0. Ahora bien, $\sec A = \frac{1}{\cos A}$, entonces por convención $\sec 90° = \infty$.

XVI Ejercicios: Hallar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones:

1) sen0° + cos90°; 2) sen180° + co270°; 3) cos0° + tan180°;
4) sen270° - sen90°; 5) sec0° + csc90°; 6) cos90°sen90° - cot90°.

REDUCCIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS A FUNCIONES DE ÁNGULOS AGUDOS.

A continuación veremos que las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud, positivo o negativo, pueden expresarse en términos de las funciones trigonométricas de un ángulo positivo menor de 90°, es decir, de un ángulo agudo. También veremos, aunque esto es de menor importancia, que las funciones de cualquier ángulo pueden encontrase cuando se conocen las de un ángulo positivo no mayor de 45°.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.

Por el teorema 60, que afirma que una función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su complemento, podemos asegurar, por ejemplo que:

sen72° = cos18°; cot65° = tan25°; sec82° = csc8°.

TEOREMA 62. Sea A un ángulo cualquiera, entonces:

a) sen(A + n360°) = senA; cot(A + n360°) = cotA
b) cosA + n360° = cosA; sec(A + n360°) = secA
c) tan(A + n360°) = tanA; csc(A + n360°) = cscA

(ver demostración en el apéndice).

XVII Ejercicios: Expresar las siguientes funciones trigonométricas en función de las del ángulo complementario:
1) cos68°: 2) tan48°20′; 3) sec81°16′32″; 4) sen53°20′: 5) cot17°; 6) csc52°18′

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS COMPRENDIDOS EN EL SEGUNDO CUADRANTE.

Sea OB_2 el lado terminal de un ángulo comprendido en el segundo cuadrante. Las funciones del $\angle XOB_2$ son las mismas que las funciones correspondientes al ángulo positivo $\angle B_2OX'$. Según puede verse en la figura:

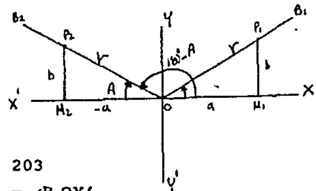


Figura 203

$\angle XOB_2 = 180° - \angle B_2OX'$.

Sea A la medida del ángulo agudo $\angle B_2OX'$. Entonces, tenemos $\angle XOB_2 = 180° - A$.

Construyamos en el primer cuadrante el ángulo $\angle XOB_1 = \angle B_2OX' = A$. Tomemos $\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = r$ y tracemos las ordenadas $\overline{M_1P_1}$ y $\overline{M_2P_2}$. Los triángulos rectángulos OM_1P_1 y OM_2P_2 son congruentes.

Se trata de comparar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos suplementarios A y 180° - A. Según la figura, el punto P_1 tiene coordenadas $x = \overline{OM_1} = a$, $y = \overline{M_1P_1} = b$ y el punto P_2 tiene coordenadas $x = \overline{OM_2} = -a$, $y = \overline{M_2P_2} = b$.

Por tanto, las fórmulas (1) a (6) nos dan:

$\operatorname{sen}(180° - A) = \dfrac{b}{r}$, $\operatorname{sen}A = \dfrac{b}{r}$

$\cos(180° - A) = \dfrac{-a}{r}$, $\cos A = \dfrac{a}{r}$

$$\tan(180° - A) = \frac{-b}{a},\ \tan A = \frac{b}{a}$$
$$\cot(180° - A) = \frac{-a}{b},\ \cot A = \frac{a}{b}$$
$$\sec(180° - A) = \frac{-r}{a},\ \sec A = \frac{r}{a}$$
$$\csc(180° - A) = \frac{r}{b},\ \csc A = \frac{r}{b}.$$

Y, por comparación, hallamos:

$\text{sen}(180° - A) = \text{sen}A$; $\csc(180° - A) = \csc A$;

$\cos(180° - A) = -\cos A$; $\sec(180° - A) = -\sec A$;

$\tan(180° - A) = -\tan A$; $\cot A(180° - A) = -\cot A$.

En consecuencia, tenemos el siguiente teorema: (Ver demostración en el apéndice)

TEOREMA 63. Las funciones trigonométricas de un ángulo comprendido on el segundo cuadrante son iguales, en valor absoluto, a las funciones del mismo nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado final y el ángulo terminal de 180°. Los signos algebraicos son los que corresponden a las funciones de un ángulo del segundo cuadrante (ver apéndice).

Algunos autores , al ángulo agudo al que se refiere este teorema, que en este caso es el suplemento del ángulo dado, le llaman ángulo relacionado. Por ejemplo, el ángulo relacionado de 165° es 15°.

Ejemplo 1. Expresar sen123° como función de un ángulo agudo, y hallar su valor.

Solución: Como $180° - 123° = 57°$, el ángulo relacionado es 57° y entonces $\text{sen}123° = \text{sen}(180° - 57°) = \text{sen}57° = 0.8387$

Ejemplo 2. Hallar el valor de sec150°

Solución: $\sec 150° = \sec(180° - 150°) = -\sec 30° = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 3. Hallar el valor de tan516°

Solución: $\tan 516° = \tan(516° - 360°) = \tan 156°$

$\tan 156° = \tan(180° - 156°) = -\tan 24° = -0{,}4452.$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS COMPRENDIDOS EN EL TERCER CUADRANTE.

Las funciones de un ángulo XOB_3 del tercer cuadrante, cuyo lado final sea OB_3 son las mismas que las funciones correspondientes del ángulo positivo $X'OB_3$ y, según la figura:

$$\angle XOB_3 = 180° + \angle X'OB_3.$$

Sea A la medida del ángulo agudo $X'OB_3$. Construyamos en el primer cuadrante, $\angle XOB_1 = \angle X'OB_3 = A$, y completemos la figura tal como hicimos en el caso referente al segundo cuadrante. Las coordenadas de P_1 son (a,b) y las coordenadas de P_3 son $(-a,-b)$ y $\overline{OP_1} = \overline{OP_3} = r$

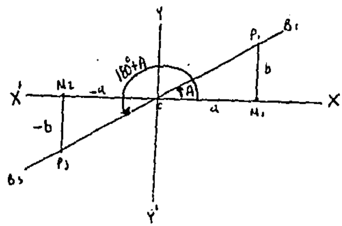


Figura 204

Por tanto, para los ángulos $180° + A = \angle XOB_3$ y $A = \angle XOB_1$:

$\mathrm{sen}(180° + A) = -\mathrm{sen}A$; $\cot(180° + A) = \cot A$;

$\cos(180° + A) = -\cos A$; $\sec(180° + A) = -\sec A$;

$\tan(180° + A) = \tan A$; $\csc(180° + A) = -\csc A$.

En consecuencia, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 64. Las funciones trigonométricas de un ángulo del tercer cuadrante son iguales, en valor absoluto, a las funciones correspondientes del ángulo agudo comprendido entre su lado terminal y el lado final de 180°. Los signos algebraicos son los que corresponden a un ángulo del tercer cuadrante. (Ver demostración en el apéndice)

Al ángulo agudo al que se refiere este teorema, algunos autores le llaman ángulo relacionado. Así, por ejemplo, el ángulo relacionado para 215° es 35°.

Ejemplo 4. Expresar cos217° como una función de un ángulo agudo, y hallar su valor.
Solución: Como 217° - 180° = 37°, el ángulo relacionado es 37°
$\cos 217° = \cos(180° + 37°) = -\cos 37° = -0.7986$.

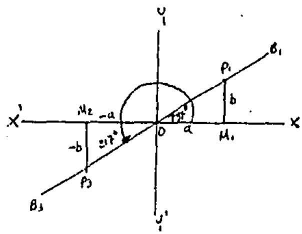


Figura 205

Ejemplo 5. Hallar el valor de csc225°
Solución: $\csc 225° = \csc(180° + 45°) = -\csc 45° = -\sqrt{2}$
Ejemplo 6. Hallar el valor de tan600°
Solución: $\tan 600° = \tan(600° - 360°) = \tan 240°$
$\tan 240° = \tan(180° + 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$.

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS COMPRENDIDOS EN EL CUARTO CUADRANTE

Las funciones de un ángulo XOB_4 del cuarto cuadrante cuyo lado final sea $\overline{OB_4}$ son las mismas que las funciones correspondientes del ángulo negativo $\angle B_4OX$ en valor absoluto y $\angle XOB_4 = 360° - A$, siendo A la medida del ángulo $\angle B_4OX$ en valor absoluto.
Los triángulos rectángulos OMP_1 y OMP_4 son congruentes. Las coordenadas de P_1 son (a,b). Las coordenadas de P_4 son $(a,-b)$ y $\overline{OP_1} = \overline{OP_4} = r$. Por tanto, para los ángulos 360° - A ($\angle XOB_4$) y A

($\angle XOB_1$), tendremos:

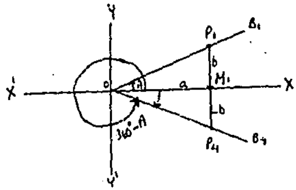


Figura 206

$\text{sen}(360° - A) = -\text{sen}A$; $\cot(360° - A) = -\cot A$;

$\cos(360° - A) = \cos A$; $\sec(360° - A) = \sec A$;

$\tan(360° - A) = -\tan A$; $\csc(360° - A) = -\csc A$.

En consecuencia tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 65. Las funciones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante son iguales, en valor absoluto, a las funciones correspondientes del ángulo comprendido entre su lado terminal y el lado final de 360°. Los signos algebraicos son los que corresponden a un ángulo del cuarto cuadrante. (Ver demostración en el apéndice)

Al ángulo agudo al que se refiere este teorema, se le suele llamar ángulo relacionado.

Ejemplo 7. Expresar sen327° como una función de un ángulo agudo y hallar su valor.

Solución: Como $360° - 327° = 33°$, el ángulo relacionado es 33°

$\text{sen}327° = \text{sen}(360° - 327°) = -\text{sen}33° = -0.5446$

Ejemplo 8. Hallar el valor de cot300°

Solución: Como $360° - 300° = 60°$, el ángulo relacionado es 60°

$$\cot 300° = \cot(360° - 60°) = -\cot 60° = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 9. Hallar el valor de cos1000°

Solución: $\cos 1000° = \cos(720° + 280°) = \cos 280°$

$\cos 280° = \cos(360° - 80°) = \cos 80° = 0.1736.$

XVIII Ejercicios:

Reducir las siguientes funciones a otras de un ángulo agudo y calcular su valor numérico.

a) sen111°; b) cos165°20′; c) tan170°48′; d) cot168°; e) sec883°; f) csc100°; g) cos212°; h) cot582°; i) csc910°; j) sen291°; k) sec324°; l) cot1050°.

REDUCCIÓN DE FUNCIONES DE ÁNGULOS NEGATIVOS.

Existen relaciones sencillas entre las funciones trigonométricas de los ángulos A y -A siendo A un ángulo cualquiera. Si A pertence al primer cuadrante, entonces -A pertenecerá al cuarto cuadrante, y viceversa, como los ángulos $\angle XOB_1$ y $\angle XOB_4$; si A pertence al segundo cuadrante, entonces -A pertenecerá al tercer cuadrante, y viceversa, como los ángulos $\angle XOB_2$ y $\angle XOB_3$.

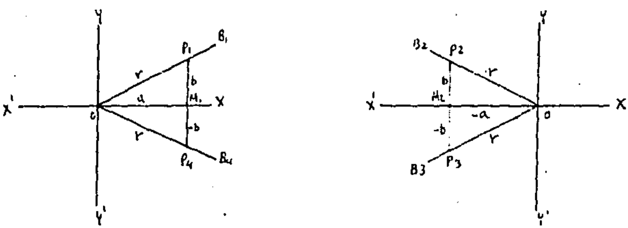


Figura 207

En cualquiera de las dos figuras, los puntos escogidos sobre los lados finales tienen la misma abscisa e iguales radios, y sus ordenadas difieren solamente en el signo.

Entonces, entre las funciones de los ángulos $\angle XOB_1$ y $\angle XOB_4$ de la figura de la izquierda, y $\angle XOB_2$ y $\angle XOB_3$ de la figura de la derecha, obtenemos las siguientes relaciones:

$sen(-A) = -senA$; $cot(-A) = -cotA$;

$cos(-A) = cosA$; $sec(-A) = secA$;

$\tan(-A) = -\tan A$; $\csc(-A) = -\csc A$.
En consecuencia, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 66. Las funciones trigonométricas de -A son iguales en valor absoluto a las funciones correspondientes de A. El signo algebraico, sin embargo, cambia para todas las funciones excepto para el coseno y la secante. (Ver demostración en el apéndice).

Ejemplo 1. Hallar el valor de cos(-240°).
Solución: $\cos(-240°) = \cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$
Ejemplo 2. Expresar tan(-29°) como una función de un ángulo agudo y hallar su valor.
Solución: $\tan(-29°) = -\tan 29° = -0.5543$
Ejemplo 3. Hallar el valor de sen(-540°)
Solución: $\text{sen}(-540°) = -\text{sen}540° = -\text{sen}180° = 0$.

XIX Ejercicios:
Hallar los valores de las siguientes funciones
a) sen(-67°); b) cos(-138°); c) tan(-33°); d) cot(-211°);
e) sec(-315°); f) csc(-510°).

IX PROBLEMAS RELATIVOS A TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

La solución de un problema dado dependerá frecuentemente de "resolver un triángulo". Un triángulo está compuesto de seis elementos, tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo es encontrar los elementos que no se conocen. Un triángulo puede resolverse si se conocen tres de sus elementos, de los cuales uno por lo menos debe ser un lado. En un triángulo rectángulo se conoce siempre un ángulo, el ángulo recto, por tanto, un triángulo rectángulo puede resolverse si se conocen dos lados, o un lado y un ángulo agudo. Como una de las aplicaciones más importantes de la trigonometría es la resolución de triángulos, vamos a empezar con la resolución de triángulos rectángulos.

REGLAS GENERALES PARA LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Primer paso.- Se construye una figura que represente al triángulo en cuestión.

Segundo paso.- Cuando se conoce un ángulo agudo, se resta de 90° para obtener el otro ángulo agudo.

Tercer paso.- Para hallar un elemento desconocido, se escoge de (1) a (6) una fórmula que contenga a dicho elemento y a otros dos conocidos, y se despeja de ella el elemento que se busca.

Cuarto paso.- Se comprueban los valores hallados observando si satisfacen relaciones diferentes de las empleadas en el tercer paso. Una comprobación numérica apropiada es la relación

$$a^2 = c^2 - b^2.$$

La aplicación de las normas que acabamos de dar puede verse en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Determinar los elementos restantes en el siguiente triángulo rectángulo en donde $A = 35°$, $c = 267$. Calcular su área.

Solución:

Primer paso. Dibujemos una figura indicando los elementos conocidos y las incógnitas.

Segundo paso. B = 90° − A = 90° − 35° = 55°

Tercer paso. Para hallar a, utilicemos la fórmuula (1) sen$A = \frac{a}{c}$.

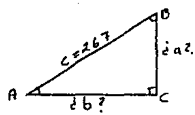


Figura 208

Sustituyendo el valor de sen$A$ = sen35° ≈ 0.5736 y c = 267, tenemos $0.5736 = \frac{a}{267}$.

Por tanto $a = 267(0.5736) \approx 153.2$

Para hallar b, usemos la fórmula (2) cos$A = \frac{b}{c}$.

Sustituyendo como anteriromente, tenemos $0.8192 = \frac{h}{267}$, ya que cos$A$ = cos35° ≈ 0.8192. Despejando b, tenemos

$b \approx 0.8192 \times 267 \approx 218.7$

Cuarto paso. Como comprobación numérica hallamos que los valores de a, b, c deben satisfacer la condición

$c^2 = a^2 + b^2$.

Para hallar el área del triángulo, tenemos

área $= \frac{ab}{2} \approx \frac{(153.2)(218.7)}{2} \approx 16{,}752.42$.

Ejemplo 2, Una escalera de 3 metros de largo está apoyada sobre la pared de un edificio, estando su base a 1.5 m del edificio. ¿Qué ángulo forma la escalera con el piso?

Solución: $\cos x = \frac{1.5}{3} = 0.5$, por lo tanto $x = 60°$

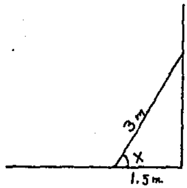


Figura 209

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ISÓSCELES.

Un triángulo isósceles queda dividido, por una de las alturas, en dos triángulos rectángulos semejantes; por tanto, la resolución de un triángulo isósceles puede hacerse depender de la resolución de uno de estos triángulos rectángulos. Los siguientes ejemplos ilustran el método:

Ejemplo 3. Los lados iguales de un triángulo isósceles tienen cada uno 40 cm de largo, y los ángulos en la base son cada uno iguales a 25°. Resolver el triángulo y hallar su área.

Solución:

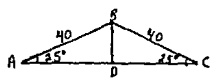


Figura 210

$B = 180° - (A + C) = 180° - 50° = 130°$

Tracemos la altura $\overline{BD}$

$$\cos A = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AB}\cos A = 40\cos 25° \approx 40(0.9063) \approx 36.25\text{cm}$$

$$\cos C = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{DC} = \overline{BC}\cos C = 40\cos 25° \approx 36.25\text{cm}$$

Por lo tanto, $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} \approx 36.25 + 36.25 \approx 72.5\text{cm}$

$$\text{sen}A = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{AB}\,\text{sen}A = 40\,\text{sen}25° \approx 40(0.42266) \approx 16.9\text{cm}$$

Comprobación: $\tan 25° = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \approx \dfrac{16.9}{36.25} \approx 0.4663$

Otra comprobación:

$$\left\{\frac{72.5}{2}\right\}^2 + \left\{16.9\right\}^2 \approx \left\{40\right\}^2;\ 1314.0625 + 285.61 = 1599.6725 \approx 1600$$

Finalmente, área $= \dfrac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{BD} \approx \dfrac{1}{2}(72.5)(16.9) \approx 612.62\text{cm}^2$

Ejemplo 4. Un establo de 6 m de ancho tiene un techo cuya forma aparece en la figura siguiente y cuyas vigas tienen longitud de $3\sqrt{2}$ m. ¿Cuál es la inclinación de las vigas del techo con respecto a la horizontal, y a qué distancia está el vertice superior B de la recta $\overline{AD}$?

Solución:

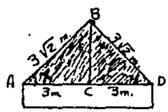


Figura 211

Tracemos la altura $\overline{BC}$. Entonces

$$\cos x = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por tanto, $x = 45°$ = inclinación de las alas del techo.

También $\operatorname{sen} x = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AB}\operatorname{sen} x = 3\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3$ m = altura del vértice superior B sobre el lado $\overline{AD}$.

Comprobación: $\overline{AB} = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

XX Ejercicios:

Resolver los siguientes triángulos rectángulos ($C = 90°$), dados:

1) $A = 20°$, $c = 80$
2) $A = 36°$, $c = 10$
3) $A = 10°$, $b = 30$
4) $a = 23.32$, $b = 50$
5) $c = 43$, $a = 38.31$
6) $A = 75°$, $a = 80$
7) Un árbol ha sido roto por el viento de tal forma que sus dos partes forman con la tierra un triángulo rectángulo. La parte superior forma un ángulo de 35° con el piso, y la distancia, medida sobre el piso, desde el tronco hasta la cúspide caída del árbol es de 5 m. Hallar la altura que tenía el árbol.
8) La base de un triángulo isósceles mide 3 m y su altura 1.5 m. Resolver el triángulo y calcular su área.
9) La base de un triángulo isósceles mide 100 m y su altura 35.01 m. Resolver el triángulo y calcular su área.

X FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Así como podemos determinar la función trigonométrica de un ángulo conocido, también se puede determinar el valor del ángulo conociendo el valor de una de sus funciones trigonométricas, si además conocemos en qué cuadrante se encuentra el ángulo.
Para ello se utilizan las funciones trigonométricas inversas que se designan de la manera siguiente:

angsen$x$, angcot$x$,
angcos$x$, angsec$x$,
angtan$x$, angcsc$x$.

Es decir; si $x = \text{sen}y \Rightarrow y = \text{angsen}x$
si $x = \cos y \Rightarrow y = \text{angcos}x$
si $x = \tan y \Rightarrow y = \text{angtan}x$
si $x = \cot y \Rightarrow y = \text{angcot}x$
si $x = \sec y \Rightarrow y = \text{angsec}x$
si $x = \csc y \Rightarrow y = \text{angcsc}x$.

Para calcular las funciones trigonométricas inversas de cualquier ángulo agudo se puede utilizar también la calculadora científica, utilizando la función inversa que aparece en cada una de ellas.

Ejemplo 1. Obtener angsen(0.4).
Solución: angsen(0.4) $\approx$ 23.57817848 $\approx$ 23°34'41"
Comprobación: sen23°34'41" = 0.4
Ejemplo 2. Obtener angcos(0.7128).
Solución: angcos(0.7128) $\approx$ 44.5368099 $\approx$ 44°32'13"
Comprobación: cos44°32'13" = 0.7128
Ejemplo 3. Obtener angtan(2.482).
Solución: angtan(2.482) $\approx$ 68.05545077 $\approx$ 68°03'20"
Comprobación: tan68°03'20" = 2.482

Ahora bien, si se desea cualquiera de las funciones angcot$x$, angsec$x$, angcsc$x$, debemos recordar lo siguiente: (Ver identidades trigonométricas)

$\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$ (9); $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ (8); $\csc A = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A}$ (7).

De aquí se desprende lo siguiente:

a) Si $y = \operatorname{angcot} x$, entonces $x = \cot y$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\cot y} = \tan y.$$

Entonces, $y = \operatorname{angtan}\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$, y por tanto,

$$\operatorname{angcot} x = \operatorname{angtan}\left\{\frac{1}{x}\right\}$$

b) Si $y = \operatorname{angsec} x$, entonces $x = \sec y$.

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sec y} = \cos y$$

Entonces, $y = \operatorname{angcos}\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$, y por tanto,

$$\operatorname{angsec} x = \operatorname{angcos}\left\{\frac{1}{x}\right\}$$

c) Si $y = \operatorname{angcsc} x$, entonces $x = \csc y$.

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\csc y} = \operatorname{sen} y$$

Entonces, $y = \operatorname{angcsc}\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$, y por tanto,

$$\operatorname{angcsc} x = \operatorname{angcos}\left\{\frac{1}{x}\right\}.$$

Ejemplo 4. Obtener angcot4

Solución: $\operatorname{angcot} 4 = \operatorname{angtan}\left\{\dfrac{1}{4}\right\} \approx 14.03624347 \approx 14°02'10''$

Comprobación: $\cot 14°02'10'' = \dfrac{1}{\tan 14°02'10''} \approx \dfrac{1}{0.25} \approx 4$

Ejemplo 5. Obtener angsec(1.5).

Solución: $\text{angsec}(1.5) = \text{angcos}\left\{\frac{1}{1.5}\right\} \approx 48.1896851 \approx 48°11'23''$.

Comprobación: $\sec 48°11'23'' = \frac{1}{\cos 48°11'23''} \approx \frac{1}{0.6666667} \approx 1.5$

Ejemplo 6. Obtener angcsc(1.7385)

Solución: $\text{angcsc}1.7385 = \text{angsen}\left\{\frac{1}{1.7385}\right\} \approx 35.1142358 \approx 35°06'51''$

Comprobación: $\csc 35°06'51'' = \frac{1}{\text{sen}35°06'51''} \approx \frac{1}{0.57520851} \approx 1.7385.$

Es conveniente hacer notar que los resultados obtenidos en la calculadora corresponden al primer cuadrante, pero en realidad, cada una de estas ecuaciones tiene dos soluciones, debido a que cada una de las funciones trigonométricas es positiva en dos de los cuatro cuadrantes y es negativa en los otros dos.

Volviendo al ejemplo 1:

angsen(0.4) = 23°34'41" en el primer cuadrante, pero también puede ser igual a 156°25'19" (su suplemento) en el segundo cuadrante.

EJEMPLOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

Ejemplo 7. Obtener angsen(-.0782)

Solución: Obtenemos angsen(0.782) = 51.44466002 = 51°26'41", haciendo caso omiso del signo momentáneamente.

Como el seno es negativo en los cuadrantes tercero y cuarto, este ángulo corresponde a 180° + 51°26'41" = 231°26'41" en el tercer cuadrante y a 360 - 51°26'41" = 308°33'19" en el cuarto cuadrante.

Ejemplo 8. Obtener angcos(-0.32)

Solución: Obtenemos angcos(0.32) = 71.33707512 = 71°20'13", haciendo caso omiso del signo momentáneamente.

Como el coseno es negativo en los cuadrantes segundo y tercero, este ángulo corresponde a 180° - 71°20'13" = 108°39'47" en el segundo cuadrante y a 180° + 71°20'13" = 251°20'13" en el tercer cuadrante.

Ejemplo 9. Obtener angtan(-1.6235)

Solución: Obtenemos angtan(1.6235) = 58.36887509 = 58°22'08". Como la tangente es negativa en los cuadrantes segundo y cuarto, este ángulo corresponde a 180° - 58°22'08" = 121°37'52" en el segundo cuadrante y a 360° - 58°22'08" = 301°37'52" en el cuarto cuadrante.

XXI Ejercicios: Hallar los valores de A correspondientes a cada una de las siguientes funciones:

1) tanA = 0.7673
2) senA = 0.9678
3) cosA = 0.7121
4) cotA = 0.5730
5) secA = 1.45
6) cscA = 2.164
7) senA = -0.824
8) cosA = -0.61
9) tanA = -0.9
10) cotA = -1.1625
11) secA = -2.5
12) cscA = -3.85.

XI RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

En geometría plana se enseña a resolver triángulos gráficamente. Es decir, se enseña a construir un triángulo conociendo:

CASO I. Dos ángulos y un lado.

CASO II. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

CASO III. Dos lados y el ángulo comprendido.

CASO IV. Tres lados.

Una vez construido el triángulo buscado, se pueden encontrar los elmentos desconocidos midiéndolos con una regla o un transportador.

Teniendo en cuenta las limitaciones de nuestros sentidos y las imperfecciones de los instrumentos usados, se comprende que los resultados obtenidos de tales medidas serán, en general aproximadas. Después de haber construido el triángulo con los elementos dados, por los métodos gemétricos, se verá que la trigonometría nos enseña cómo calcular los elementos desconocidos con cualquier grado de aproximación deseado, y los dos métodos pueden servir entonces como comprobación el uno del otro.

El estudiante debe tener siempre presentes al resolver el triángulo las dos propiedades geométricas siguientes que son comunes a todos los triángulos:

1) La suma de los tres ángulos interiores es igual a 180°.
2) El lado mayor se opone al ángulo mayor y recíprocamente.

La resolución trigonométrica de triángulos oblicuángulos depende de la aplicación de dos leyes. La ley de los senos y la ley de los cosenos, a cuya deducción vamos a enfocar nuestra atención.

LEY DE LOS SENOS

TEOREMA 67. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

DEMOSTRACIÓN

Figura 212

Las figuras representan triángulos, el primero de los cuales es acutángulo y el segundo de ellos obtusángulo ($\angle A$).

Tenemos que demostrar que:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}.$$

Tracemos la altura desde el vértice C. De cualquiera de las dos figuras, considerando el triángulo rectángulo ACD, se deduce:

$$\text{sen}A = \frac{h}{b}\ldots(\text{a})$$

Si consideramos el triángulo rectángulo BCD,

$$\text{sen}B = \frac{h}{a}\ldots(\text{b})$$

Dividiendo a) entre b) obtenemos:

$$\frac{\text{sen}A}{\text{sen}B} = \frac{\frac{h}{b}}{\frac{h}{a}} = \frac{a}{b}$$

o equivalentemente,

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}.$$

Análogamente, trazando la alturas correspondientes a los vértices A y B obtenemos:

$$\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}\ldots(\text{c})$$

y además

$$\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{a}{\text{sen}A}.$$

Igualando las proposiciones a), b), c) obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}.$$

LEY DE LOS COSENOS

TEOREMA 68. En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.

DEMOSTRACIÓN

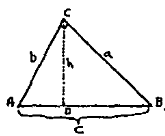


Figura 213

En el triángulo acutángulo ΔABC, se traza la altura desde el vértice C.

Supongamos que queremos encontrar el lado a en función de los otros dos lados, b y c y del ∠A que forman. El teorema que vamos a demostrar dice que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Considerando la figura tenemos:

$$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2;\ b^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Restando estas igualdades hallamos:

$$a^2 - b^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2 \ldots(1)$$

Pero $\overline{DB} = c - \overline{AD}$. Elevendo al cuadrado y sustituyendo en (1) tenemos:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2c\overline{AD} \ldots(2)$$

Pero $\overline{AD} = b\cos A$, luego sustituyendo en (2) y despejando a^2, hallamos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ldots(3)$$

En el triángulo obtusángulo ΔABC, se traza la altura desde el vértice C.

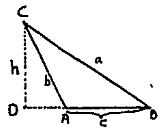


figura 214

Considerando la figura tenemos:

$$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2;\ b^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Restando estas igualdades hallamos:

$$a^2 - b^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2 \ldots (4)$$

Pero $\overline{DB} = \overline{AD} + c$. Elevendo al cuadrado y sustituyendo en (4) resulta:

$$a^2 - b^2 = c^2 + 2c\overline{AD} \ldots (5)$$

Pero $\overline{AD} = b\cos\angle DAC$

Entonces $\angle A = 180° - \angle DAC$, y por lo tanto $\cos A = -\cos\angle DAC$

Como $\overline{AD} = b\cos\angle DAC = -b\cos A$, podemos sustituir este valor en (5) y depejando a^2, obtenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ldots (6)$$

como ya habíamos obtenido anteriormente. Por lo tanto, en cualquiera de las dos figuras

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Análogamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \ldots (7)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \ldots (8) \blacksquare$$

Despejando en 6) 7) y 8) los cosenos de los ángulos obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Estas fórmulas son útiles para hallar los ángulos de un triángulo conociendo sus lados.

CASO I. Conocemos dos ángulos y un lado.

Ejemplo 1. Dados $A = 65°$, $B = 40°$ $a = 50m.$; resolver el triángulo.

Solución:

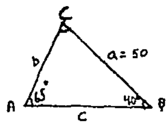


Figura 215

Como se conocen dos ángulos podemos obtener el tercero. Luego,

$$C = 180° - (A + B) = 180° - 105° = 75°$$

Como conocemos el lado a y el ángulo opuesto A, podemos emplear la ley de los senos, pero debemos cuidar de escoger tales razones de manera que no aparezca más que una incógnita. Así, para hallar el lado b, utilizamos:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B};$$

despejando:

$$b = \frac{a\text{sen}B}{\text{sen}A} = \frac{50\text{sen}40°}{\text{sen}65°} \approx 35.46\text{m}$$

Análogamente, para hallar el lado c usamos

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C};$$

depejando

$$c = \frac{a\text{sen}C}{\text{sen}A} = \frac{50\text{sen}75°}{\text{sen}65°} \approx 53.29\text{m}**\text{checar}$$

Como ya conocemos todos los lados y los ángulos del triángulo, podemos decir, que ya está resuelto.

Comprobación. Se puede comprobar por la ley de los senos debiendo ser iguales los tres cocientes (en nuestro caso no será así debido a que hemos estado utilizando aproximaciones numéricas)

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C};$$

$$\frac{50}{\text{sen}65°} \approx \frac{35.46}{\text{sen}40°} \approx \frac{53.29}{\text{sen}75°} \approx 55.16.$$

CASO II. Conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Ejemplo 2. Dados $a = 40$, $b = 30$, $A = 75°$; hallar los elementos restantes.

Solución:

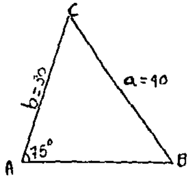


Figura 216

Por la ley de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B};$$

despejando:

$$\text{sen}B = \frac{b\,\text{sen}A}{a} = \frac{30\text{sen}75°}{40} \simeq 0.7244$$

$$B \simeq 46°25'22''$$

Entonces, $C = 180° - (A + B) = 180° - 121°25'22'' = 58°34'38''$

Para hallar c, tenemos por la ley de los senos

$$\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{a}{\text{sen}A},$$

de donde

$$c = \frac{a\,\text{sen}C}{\text{sen}A};\ c \simeq \frac{40\text{sen}58°34'22''}{\text{sen}75°} \simeq 35.34$$

Comprobación. Por la ley de los senos: $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{b}{\text{sen}B} = \dfrac{c}{\text{sen}C}$

$$\frac{40}{\text{sen}75°} \simeq \frac{30}{\text{sen}46°25'22''} \simeq \frac{35.34}{\text{sen}58°34'38''} \simeq 41.41.$$

CASO III. Conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Ejemplo 3. Resolver el triángulo dados $A = 47°$, $b = 8$, $c = 10$

Solución:

Para hallar el lado a, utilizamos la igualdad siguiente (ley de los cosenos):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 64 + 100 - 2(8)(10)\cos 47° \simeq 54.88;$$

$$a \approx \sqrt{54.88} \approx 7.408$$

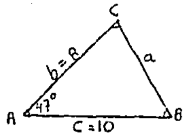


Figura 217

Para hallar el ángulo B, usando la ley de los cosenos,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos B \approx \frac{54.88 + 100 - 64}{2(7.408)(10)} \approx 0.61339,$$

de donde

$$B \approx 52°09'54''$$

Entonces, $C = 180° - (A + B) = 180° - (99°09'54'') \approx 80°50'06''$

Comprobación. Por la ley de los senos: $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{b}{\text{sen}B} = \dfrac{c}{\text{sen}C}$

$$\frac{7.408}{\text{sen}47°} \approx \frac{8}{\text{sen}52°09'54''} \approx \frac{10}{\text{sen}80°50'06''} \approx 10.129.$$

CASO IV.- Conocemos los tres lados.

Ejemplo 4. Resolver el triángulo dados $a = 7$, $b = 3$, $c = 5$

Solución:

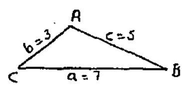


Figura 218

Utilizando la ley de los cosenos para hallar los ángulos obtenemos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 25 - 49}{2(3)(5)} = \frac{-15}{30} = -0.5,$$

de donde

$$A = 120°$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 25 - 9}{2(7)(5)} = \frac{65}{70} = \frac{13}{14},$$

de donde

$$B \approx 21°47'12''$$

Entonces, $C = 180° - (A + B) = 180° - 141°47'12'' \approx 38°12'48''$

Comprobación. Por la ley de los senos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$

$$\frac{7}{\operatorname{sen} 120°} \approx \frac{3}{\operatorname{sen} 21°47'12''} \approx \frac{5}{\operatorname{sen} 38°12'48''} \approx 8.083.$$

XXII Ejercicios. Resolver los siguientes triángulos y comprobar:

1) $a = 40$, $A = 60°$, $B = 45°$
2) $a = 550$, $A = 10°12'$, $B = 46°36'$
3) $c = 60$, $A = 50°$, $B = 75°$
4) $a = 12$, $b = 15$, $A = 52°$
5) $a = 50$, $b = 100$, $A = 30$
6) $b = 120$, $c = 80$, $B = 60°$
7) $a = 2$, $b = 3$, $C = 45°$
8) $a = 132$, $b = 224$, $C = 28°40'$
9) $a = 125$, $c = 125$, $B = 13°20'$
10) $a = 25.2$, $b = 37.8$, $c = 43.4$
11) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$
12) $a = 303$, $b = 404$, $c = 626$.

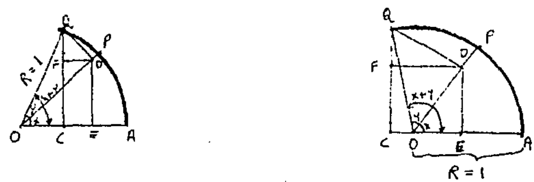
XII FUNCIONES DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Vamos a proceder ahora a obtener las funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de dos ángulos conocidas las de estos ángulos. Las formas fundamentales que vamos a deducir son las siguientes:

$$\operatorname{sen}(X + Y) = \operatorname{sen}X\cos Y + \cos X\operatorname{sen}Y \ldots (15)$$
$$\operatorname{sen}(X - Y) = \operatorname{sen}X\cos Y - \cos X\operatorname{sen}Y \ldots (16)$$
$$\cos(X + Y) = \cos X\cos Y - \operatorname{sen}X\operatorname{sen}Y \ldots (17)$$
$$\cos(X - Y) = \cos X\cos Y + \operatorname{sen}X\operatorname{sen}Y \ldots (18)$$

SENO Y COSENO DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS.

Demostración de las fórmulas (15) y (17): Sean X y Y dos ángulos positivos menores de 90°.



$\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{OQ} = 1$ en ambas figuras

Figura 219

En un círculo de radio igual a 1 cuyo centro es O, tracemos el ángulo ∠AOP = X y el ángulo ∠POQ = Y. Entonces el ∠AOQ = $X + Y$.

En la figura de la izquierda el ángulo $X + Y$ es menor de 90°, y en la figura de la derecha es mayor de 90°.

En ambas figuras $\overline{QD}$ es perpendicular a $\overline{OP}$; $\overline{QC}$ y $\overline{DE}$ son perpendiculares a $\overline{OA}$ (o a la prolongación de $\overline{OA}$), y $\overline{FD}$ es paralela a $\overline{OA}$. Los triángulos DFQ y DOE son semejantes. Por tanto, ∠FQD = X.

En el triángulo rectángulo ODQ:

$\overline{OD} = \overline{OQ}\cos Y = \cos Y$ (por ser $\overline{OQ} = 1$)

$\overline{DQ} = \overline{OQ}\,\mathrm{sen}Y = \mathrm{sen}Y$ (por ser $\overline{OQ} = 1$)

Y $\mathrm{sen}(X + Y) = \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{OQ}} = \overline{CQ}$.

Pero $\overline{CQ} = \overline{CF} + \overline{FQ} = \overline{ED} + \overline{FQ}$

Por lo tanto, $\mathrm{sen}(X + Y) = \overline{ED} + \overline{FQ}$.

En el triángulo rectángulo OED, $\overline{ED} = \overline{OD}\,\mathrm{sen}X = \cos Y \mathrm{sen}X$

En el triángulo rectángulo DQF, $\overline{FQ} = \overline{DQ}\cos X = \mathrm{sen}Y\cos X$.

Como $\mathrm{sen}(X + Y) = \overline{ED} + \overline{FQ}$, entonces

$\mathrm{sen}(X + Y) = \mathrm{sen}X\cos Y + \cos X\mathrm{sen}Y$

y tenemos entonces la identidad (15):

$$\mathrm{sen}(X + Y) = \mathrm{sen}X\cos Y + \cos X\mathrm{sen}Y.$$

Además $\cos(X + Y) = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OQ}} = \overline{OC}$ (por ser $\overline{OQ}= 1$)

Pero $\overline{OC} = \overline{OE} - \overline{CE} = \overline{OE} - \overline{FD}$, en ambas figuras, ya que los segmentos $\overline{OC}$, $\overline{OE}$, $\overline{CE}$ sobre el diámetro horizontal son segmentos dirigidos.

Por lo tanto, $\cos(X + Y) = \overline{OE} - \overline{FD}$.

En el triángulo rectángulo OED, $\overline{OE} = \overline{OD}\cos X = \cos Y\cos X$

En el triángulo rectángulo DQF, $\overline{FD} = \overline{DQ}\,\mathrm{sen}X = \mathrm{sen}Y\mathrm{sen}X$.

Como $\cos(X+Y) = \overline{OE} - \overline{FD}$,

entonces $\cos(X + Y) = \cos X\cos Y - \mathrm{sen}X\mathrm{sen}Y$,

y tenemos entonces la identidad (17):

$$\cos(X + Y) = \cos X\cos Y - \mathrm{sen}X\mathrm{sen}Y.$$

SENO Y COSENO DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS.

Demostración de las fórmulas (16) y (18). Estas fórmulas son simplemente casos especiales de (15) y (17) respectivamente. Así, por ejemplo, si en (15) $\mathrm{sen}(X + Y) = \mathrm{sen}X\cos Y + \cos X\mathrm{sen}Y$, sustituimos Y por $(-Y)$, tendremos:

$\text{sen}(X - Y) = \text{sen}X\cos(-Y) + \cos X\,\text{sen}(-Y)$.

Pero $\cos(-Y) = \cos Y$ y $\text{sen}(-Y) = -\text{sen}Y$.

Por lo tanto:

$$\text{sen}(X - Y) = \text{sen}X\cos Y + \cos X(-\text{sen}Y) = \text{sen}X\cos Y - \cos X\,\text{sen}Y.$$

Análogamente, si en (17) $\cos(X + Y) = \cos X\cos Y - \text{sen}X\,\text{sen}Y$, sustituimos Y por $(-Y)$, tendremos:

$\cos(X - Y) = \cos X\cos(-Y) - \text{sen}X\,\text{sen}(-Y)$

$\cos(X - Y) = \cos X\cos Y - \text{sen}X(-\text{sen}Y)$

$$\cos(X - Y) = \cos X\cos Y + \text{sen}X\,\text{sen}Y.$$

Ejemplo 1. Hallar sen75°, utilizando las funciones de 45° y 30°.

Solución: Como 75° = 45° + 30°, obtenemos de (15):

$$\text{sen}75° = \text{sen}(45° + 30°) = \text{sen}45°\cos30° + \cos45°\text{sen}30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Ejemplo 2. Hallar cos15°, utilizando las funciones de 45° y 30°.

Solución: De (18)

$$\cos15° = \cos(45° - 30°) = \cos45°\cos30° + \text{sen}45°\text{sen}30°$$

$$= = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

XXIII Ejercicios

1) Hallar el valor de cos75°, usando las funciones de 45° y 30°.

2) Si $\tan X = \frac{3}{4}$ y $\tan Y = \frac{7}{24}$, hallar $\text{sen}(X + Y)$ y $\cos(X + Y)$ cuando X y Y son ángulos agudos.

3) Demostrar que sen90° = 1 y cos90° = 0, usando las funciones de 60° y 30°.

4) Demostrar que sen180° = 0 y cos180° = -1, usando las funciones de 120° y 60°.

5) Demostrar que $\operatorname{sen}(45° + X) = \dfrac{\cos X + \operatorname{sen} X}{\sqrt{2}}$.

6) Demostrar que $\cos(60° + X) = \dfrac{\cos X - \sqrt{3}\operatorname{sen} X}{2}$.

7) Demostrar que $\operatorname{sen}(X + 60°) - \cos(X + 30°) = \operatorname{sen} X$.

8) Hallar el $\operatorname{sen} 15°$, usando las funciones de 45° y 30°.

9) Hallar el $\operatorname{sen} 15°$, usando las funciones de 60° y 45° y verificar que el resultado es igual al del problema anterior.

10) Hallar $\operatorname{sen}(X - Y)$ y $\cos(X - Y)$, sabiendo que $\operatorname{sen} X = \dfrac{1}{4}$ y $\operatorname{sen} Y = \dfrac{1}{3}$, siendo X y Y ángulos agudos.

11) Demostrar que $\operatorname{sen}(X - 120°) = -\dfrac{\operatorname{sen} X + \sqrt{3}\cos X}{2}$.

12) Demostrar que $\cos(30° + Y) - \cos(30° - Y) = -\operatorname{sen} Y$.

13) Demostrar que $\cos(X + 45°) + \operatorname{sen}(X - 45°) = 0$.

14) Demostrar que $\operatorname{sen}(X + Y)\operatorname{sen}(X - Y) = \operatorname{sen}^2 X - \operatorname{sen}^2 Y$.

TANGENTE Y COTANGENTE DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS.

Utilizando las fórmulas (10), (15) y (17) obtenemos:

$$\tan(X + Y) = \frac{\operatorname{sen}(X + Y)}{\cos(X + Y)} = \frac{\operatorname{sen} X\cos Y + \cos X\operatorname{sen} Y}{\cos X\cos Y - \operatorname{sen} X\operatorname{sen} Y}.$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos X\cos Y$, tendremos:

$$\tan(X + Y) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} X\cos Y}{\cos X\cos y} + \dfrac{\cos X\operatorname{sen} Y}{\cos X\cos Y}}{\dfrac{\cos X\cos Y}{\cos X\cos Y} - \dfrac{\operatorname{sen} X\operatorname{sen} Y}{\cos X\cos Y}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} X}{\cos X} + \dfrac{\operatorname{sen} Y}{\cos Y}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} X}{\cos X}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} Y}{\cos Y}} = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\tan Y}$$

Por lo tanto, resulta:

$$\tan(X + Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1-\tan X\tan Y}\ldots(19)$$

De la misma manera, de las fórmulas (16) y (18) se obtiene:

$$\tan(X - Y) = \frac{\tan X - \tan Y}{1+\tan X\tan Y}\ldots(20)$$

De las fórmulas (11), (15) y (17) hallamos:

$$\cot(X + Y) = \frac{\cos(X + Y)}{\operatorname{sen}(X + Y)} = \frac{\cos X\cos Y - \operatorname{sen}X\operatorname{sen}Y}{\operatorname{sen}X\cos Y + \cos X\operatorname{sen}Y}.$$

Dividiendo numerador y denominador por sen$X$sen$Y$, resulta:

$$\cot(X + Y) = \frac{\frac{\cos X\cos Y}{\operatorname{sen}X\operatorname{sen}y} - \frac{\operatorname{sen}X\operatorname{sen}Y}{\operatorname{sen}X\operatorname{sen}Y}}{\frac{\operatorname{sen}X\cos Y}{\operatorname{sen}X\operatorname{sen}Y} + \frac{\cos X\operatorname{sen}Y}{\operatorname{sen}X\operatorname{sen}Y}} = \frac{\frac{\cos X}{\operatorname{sen}X}\cdot\frac{\cos Y}{\operatorname{sen}Y} - 1}{\frac{\cos Y}{\operatorname{sen}Y} + \frac{\cos X}{\operatorname{sen}X}} = \frac{\cot X\cot Y-1}{\cot Y + \cot X}$$

Por lo tanto, resulta:

$$\cot(X + Y) = \frac{\cot X\cot Y-1}{\cot Y + \cot X}\ldots(21)$$

De la misma manera, de (16) y (18) podemos demostrar que

$$\cot(X - Y) = \frac{\cot X\cot Y+1}{\cot Y - \cot X}\ldots(22)$$

Las fórmulas (15) y (22) pueden escribirse en forma más resumida como sigue:

$$\operatorname{sen}(X \pm Y) = \operatorname{sen}X\cos Y \pm \cos X\operatorname{sen}Y$$

$$\cos(X \pm Y) = \cos X\cos Y \mp \operatorname{sen}X\operatorname{sen}Y$$

$$\tan(X \pm Y) = \frac{\tan X \pm \tan Y}{1\mp\tan X\tan Y}.$$

$$\cot(X \pm Y) = \frac{\cot X\cot Y\mp 1}{\cot Y \pm \cot X}.$$

Ejemplo 1. Hallar tan15°, usando las funciones de 60° y 45°.

Como 15° = 60° - 45°, entonces

$$\tan 15° = \tan(60° - 45°) = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60°\tan 45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1+\sqrt{3}\,(1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1+\sqrt{3}}$$

Ejemplo 2. Hallar cot105°, conocidas las funciones de 60° y 45°.

$$\cot 105° = \cot(60° + 45°) = \frac{\cot 60°\cot 45° - 1}{\cot 60° + \cot 45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 3}{3}}{\frac{\sqrt{3} + 3}{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} + 3}.$$

XXIV Ejercicios

1) Hallar $\tan(X + Y)$ y $\tan(X - Y)$, teniendo como datos $\tan X = \frac{1}{2}$ y $\tan Y = \frac{1}{4}$.

2) Si $\tan(X + Y) = \sqrt{3}$ y $\tan X = 1$, calcular $\tan Y$.

3) Demostrar que:

a) $\tan(45° + X) = \dfrac{1 + \tan X}{1 - \tan X}$

b) $\cot(Y - 45°) = \dfrac{1 + \cot Y}{1 - \cot Y}$

c) $\tan(A - 60°) = \dfrac{\tan A - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan A}$

d) $\cot(B + 210°) = \dfrac{\sqrt{3}\cot B - 1}{\cot B + \sqrt{3}}$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}(X + Y)}{\operatorname{sen}(X - Y)} = \dfrac{\tan X + \tan Y}{\tan X - \tan Y}$

f) $1 - \tan X\tan Y = \dfrac{\cos(X + Y)}{\cos X\cos Y}$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE.

Las fórmulas (15) a (22) son verdaderas para todos los valores posibles de X y Y; por tanto, deben ser válidas cuando X es igual a Y.

Para hallar sen $2X$ tomemos (15)

$$\operatorname{sen}(X + Y) = \operatorname{sen}X\cos Y + \cos X\operatorname{sen}Y$$

y hagamos $X = Y$. Resulta

$$\operatorname{sen}(X + X) = \operatorname{sen}X\cos x + \cos X\operatorname{sen}X,$$

o sea,

$$\text{sen}2X = 2\text{sen}X\cos X \ldots (23)$$

Para hallar cos $2X$ tomemos (17)

$$\cos(X + Y) = \cos X \cos Y - \text{sen}X\text{sen}Y$$

y hagamos $Y = X$

Entonces,

$$\cos(X + X) = \cos X \cos X - \text{sen}X\text{sen}X$$

o sea,

$$\cos 2X = \cos^2 X - \text{sen}^2 X \ldots (24)$$

Para hallar $\tan 2X$ tomamos (19)

$$\tan(X + Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}$$

y sustituimos Y por X. Resulta

$$\tan(X + X) = \frac{\tan X + \tan X}{1 - \tan X \tan X},$$

o sea,

$$\tan 2X = \frac{2\tan X}{1 - \tan^2 X} \ldots (25)$$

Para hallar $\cot 2X$ tomamos (21)

$$\cot(X + Y) = \frac{\cot X \cot Y - 1}{\cot Y + \cot X}$$

y sustituimos Y por X. Resulta

$$\cot(X + X) = \frac{\cot X \cot X - 1}{\cot X + \cot X}$$

o sea,

$$\cot 2X = \frac{\cot^2 X - 1}{2\cot X} \ldots (26)$$

Ejemplo 1. Sabiendo que $\tan X = 2$ y que X está en el tercer cuadrante, hallar $\text{sen}2X$, $\cos 2X$, $\tan 2X$ y $\cot 2X$.

Solución: Si $\tan X = 2$, entonces $\text{sen}X = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ y $\cos X = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, $\cot X = \frac{1}{2}$

$$\text{sen}2X = 2\text{sen}X\cos X = 2\left\{\frac{-2}{\sqrt{5}}\right\}\left\{\frac{-1}{\sqrt{5}}\right\} = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2X = \cos^2 X - \text{sen}^2 X = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-3}{5}$$

$$\tan 2X = \frac{2\tan X}{1 - \tan^2 X} = \frac{2(2)}{1 - 4} = \frac{-4}{3}$$

$$\cot 2X = \frac{\cot^2 X - 1}{2\cot X} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{3}{4}.$$

XXV Ejercicios

1) Si A está en el tercer cuadrante y $\operatorname{sen} A = -\frac{3}{5}$, hallar

a) $\cos(90° + A)$; Solución: $\frac{3}{5}$

b) $\tan 2A$; Solución: $\frac{24}{7}$

c) $\cot(180° - 2A)$; Solución: $\frac{-7}{24}$

d) $\sec(270° - 2A)$; Solución: $-\frac{25}{24}$

2) Si X es un ángulo del segundo cuadrante, y $\tan X = \frac{-5}{12}$, hallar

a) $\cot 2X$; Solución: $-\frac{119}{120}$

b) $\operatorname{sen}(180° - X)$; Solución: $\frac{5}{13}$

c) $\cos(270° - 2X)$; Solución: $\frac{120}{169}$

d) $\csc(180° + 2X)$; Solución: $\frac{169}{120}$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN FUNCIÓN DE LAS DEL ÁNGULO MITAD.

De (23), $\operatorname{sen} 2X = 2\operatorname{sen} X\cos X$. Reemplacemos $2X$ por Y y en consecuencia, X por $\frac{Y}{2}$.

Obtenemos:

$$\operatorname{sen} Y = 2\operatorname{sen}\frac{Y}{2}\cos\frac{Y}{2}.$$

De (24), $\cos 2X = \cos^2 X - \operatorname{sen}^2 X$. Reemplacemos $2X$ por Y y en consecuencia, X por $\frac{Y}{2}$.

$$\cos Y = \cos^2\frac{Y}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{Y}{2}.$$

De (25), $\tan 2X = \dfrac{2\tan X}{1 - \tan^2 X}$.

Reemplacemos $2X$ por Y y en consecuencia, X por $\frac{Y}{2}$.

Obtenemos;

$$\tan Y = \frac{2\tan\frac{Y}{2}}{1 - \tan^2\frac{Y}{2}}.$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD EN TÉRMINOS DEL COSENO DEL ÁNGULO.

Como $\cos 2X = \cos^2 X - \operatorname{sen}^2 X = 1 - \operatorname{sen}^2 X - \operatorname{sen}^2 X =$

$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 X = \cos^2 X - (1 - \cos^2 X) =$

$= 2\cos^2 X - 1$

Despejando: $2 \operatorname{sen}^2 X = 1 - \cos 2X$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 X = \frac{1 - \cos 2X}{2}.$$

Y como $2\cos^2 X = 1 + \cos 2X$

$$\Rightarrow \cos^2 X = \frac{1 + \cos 2X}{2}$$

Además,

$$\operatorname{sen} X = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2X}{2}};\ \cos X = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2X}{2}}.$$

Si ahora sustituimos $2X$ por Y y en consecuencia, X por $\frac{Y}{2}$, resulta

$$\operatorname{sen}\frac{Y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos Y}{2}} \ldots (27)$$

$$\cos\frac{Y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos Y}{2}} \ldots (28)$$

Para hallar $\tan\frac{Y}{2}$, basta dividir (27) entre (28), obteniendo

$$\tan\frac{Y}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{Y}{2}}{\cos\frac{Y}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos Y}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos Y}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos Y}{1 + \cos Y}}, \text{ por lo tanto,}$$

$$\tan\frac{Y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos Y}{1 + \cos Y}} \ldots (29)$$

Como la tangente y la cotangente son funciones recíprocas, tenemos inmediatamente de (29)

$$\cot\frac{Y}{2} = \frac{1}{\tan\frac{Y}{2}};$$

por lo tanto

$$\cot\frac{Y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos Y}{1 - \cos Y}} \ldots (30)$$

Ejemplo 1. Hallar seno, coseno, tangente y cotangente de 22°30′.

Solución: $22°30' = \frac{45°}{2}$, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}22°30' = \operatorname{sen}\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22°30' = \cos\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22°30' = \tan\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{1 + \cos 45°}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\cot 22°30' = \cot\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 45°}{1 - \cos 45°}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$$

XXVI Ejercicios

1) Hallar seno, coseno, tangente y cotangente de 15°, usando el ángulo de 30°.

2) Si A termina en el tercer cuadrante y $\cot A = \frac{4}{3}$, hallar

a) $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$; b) $\cos\frac{A}{2}$; c) $\tan\frac{A}{2}$; d) $\cot(180° - \frac{A}{2})$; e) $\tan(270° - \frac{A}{2})$;

f) $\cos 2A - \tan\frac{A}{2}$

3) Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen}32° + \operatorname{sen}28° = \cos 2°$

b) $\operatorname{sen}50° - \operatorname{sen}10° = \sqrt{3}\operatorname{sen}20°$

c) $\cos 80° - \cos 20° = -\operatorname{sen}50°$

d) $\cos 60° + \cos 30° = \sqrt{2}\cos 15°$

e) $\operatorname{sen}(60° + X) + \operatorname{sen}(60° - X) = \sqrt{3}\cos X$.

XIII IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN.- Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene funciones trigonométricas y que es verdadera para todos los valores de los ángulos para los cuales están definidas estas funciones. Así, las fórmulas de la (1) y (30) son identidades trigonométricas, ya que son verdaderas para todos los valores del ángulo para los cuales están definidas las funciones. Consideraremos dos métodos de demostración de identidades dadas.

I. Podemos reducir un miembro a la forma del otro miembro, usando identidades conocidas. En general, el miembro más complicado se reduce a la forma del miembro más sencillo.

II. Podemos reducir ambos miembros, usando identidades conocidas, a la misma expresión. Entonces como los dos miembros son idénticos a un misma expresión, son idénticos entre si.

No puede darse un método general a seguir en todos los casos. Es esencial un conocimiento completo de las relaciones fundamentales, porque estas relaciones sugieren frecuentemente las reducciones que deben hacerse.

En las identidades que contienen funciones de los ángulos múltiples, o ángulos fraccionarios, por regla general, es aconsejable expresar dichas funciones como funciones de los ángulos sencillos. Si después de haber hecho esto, no aparece ningún procedimiento factible, usualmente es ventajoso cambiar todas las funciones a senos y cosenos.

Veamos ahora algunos ejemplos de los dos métodos que acabamos de exponer.

Ejemplo 1. Demostrar que $1 + \tan 2X \tan X = \sec 2X$ es una identidad.
Solución: Primer método.

$$1 + \tan 2X \tan X = 1 + \frac{2\tan X}{1 - \tan^2 X}\cdot\tan X = 1 + \frac{2\tan^2 X}{1 - \tan^2 X} =$$

$$\frac{1 - \tan^2X + 2\tan^2X}{1 - \tan^2X} = \frac{1 + \tan^2X}{1 - \tan^2X} = \frac{1 + \dfrac{\text{sen}^2X}{\cos^2X}}{1 - \dfrac{\text{sen}^2X}{\cos^2X}} = \frac{\dfrac{\cos^2X + \text{sen}^2X}{\cos^2X}}{\dfrac{\cos^2X - \text{sen}^2X}{\cos^2X}} =$$

$$\frac{\cos^2X + \text{sen}^2X}{\cos^2X - \text{sen}^2X} = \frac{1}{\cos 2X} = \sec 2X.$$

Segundo método.

$$1 + \tan 2X \tan X = 1 + \frac{2\tan^2X}{1 - \tan^2X} = \frac{1 + \tan^2X}{1 - \tan^2X} = \frac{1 + \dfrac{\text{sen}^2X}{\cos^2X}}{1 - \dfrac{\text{sen}^2X}{\cos^2X}} =$$

$$\frac{\cos^2X + \text{sen}^2X}{\cos^2X - \text{sen}^2X} = \frac{1}{\cos^2X - \text{sen}^2X}$$

$$\sec 2X = \frac{1}{\cos 2X} = \frac{1}{\cos^2X - \text{sen}^2X}$$

Luego, $1 + \tan 2X \tan X = \sec 2X$ es una identidad.

Ejemplo 2. Demostrar que $\dfrac{\text{sen}(X + Y)}{\text{sen}(X - Y)} = \dfrac{\tan X + \tan Y}{\tan X - \tan Y}$ es una identidad.

Solución: Segundo método.

$$\frac{\text{sen}(X + Y)}{\text{sen}(X - Y)} = \frac{\text{sen}X\cos Y + \cos X\,\text{sen}Y}{\text{sen}X\cos Y - \cos X\,\text{sen}Y}$$

$$\frac{\tan X + \tan Y}{\tan X - \tan Y} = \frac{\dfrac{\text{sen}X}{\cos X} + \dfrac{\text{sen}Y}{\cos Y}}{\dfrac{\text{sen}X}{\cos X} - \dfrac{\text{sen}Y}{\cos Y}} = \frac{\dfrac{\text{sen}X\cos Y + \cos X\,\text{sen}Y}{\cos X\cos Y}}{\dfrac{\text{sen}X\cos Y - \cos X\,\text{sen}Y}{\cos X\cos Y}} =$$

$$\frac{\text{sen}X\cos Y + \cos X\,\text{sen}Y}{\text{sen}X\cos Y - \cos X\,\text{sen}Y}$$

Luego, $\dfrac{\text{sen}(X + Y)}{\text{sen}(X - Y)} = \dfrac{\tan X + \tan Y}{\tan X - \tan Y}$ es una identidad.

XXVII Ejercicios Demostrar que las siguientes igualdades son identidades:

1) $\tan X \operatorname{sen} X + \cos X = \sec X$

2) $\cot X - \sec X \csc X(1 - 2\operatorname{sen}^2 X) = \tan X$

3) $(\tan X + \cot X)\operatorname{sen} X \cos X = 1$

4) $\dfrac{\operatorname{sen} Y}{1 + \cos Y} = \dfrac{1 - \cos Y}{\operatorname{sen} Y}$

5) $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} A}{1 + \operatorname{sen} A}} = \sec A - \tan A$

6) $\cot^2 X = \cos^2 X + \left\{\dfrac{\cot X}{\sec X}\right\}^2$

7) $\operatorname{sen}^3 X + \cos^3 X = (\operatorname{sen} X + \cos X)(1 - \operatorname{sen} X \cos X)$

8) $\cos(X + Y)\cos(X - Y) = \cos^2 X - \operatorname{sen}^2 Y$

9) $\operatorname{sen}(A + B)\operatorname{sen}(A - B) = \cos^2 B - \cos^2 A$

10) $\dfrac{\cos(X - Y)}{\cos(X + Y)} = \dfrac{1 + \tan X \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}$

11) $\cot X + \cot Y = \dfrac{\operatorname{sen}(X + Y)}{\operatorname{sen} X \operatorname{sen} Y}$

12) $\operatorname{sen} 2X = \dfrac{2\tan X}{1 + \tan^2 X}$

13) $\cos 2X = \dfrac{1 - \tan^2 X}{1 + \tan^2 X}$

14) $\tan X + \cot X = 2\csc 2X$

15) $\cos^4 X - \operatorname{sen}^4 X = \cos 2X$

16) $\left\{\operatorname{sen} X + \cos X\right\}^2 = 1 + \operatorname{sen} 2X$

17) $\dfrac{\operatorname{sen} 2X}{1 - \cos 2X} = \cot X$

18) $\sec 2X = \dfrac{\csc^2 X}{\csc^2 X - 2}$

19) $\cot Y - \tan Y = 2\cot 2Y$

20) $\sec 2A - \tan 2A = \dfrac{\cos A - \operatorname{sen} A}{\cos A + \operatorname{sen} A}$

21) $\dfrac{\cos X}{1 - \operatorname{sen} X} = \dfrac{1 + \tan\frac{X}{2}}{1 - \tan\frac{X}{2}}$

22) $\cot\frac{X}{2} + \tan\frac{X}{2} = 2\csc X$

23) $\cos X = \dfrac{1 - \tan^2\frac{X}{2}}{1 + \tan^2\frac{X}{2}}$

24) $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\cos A - \cos B} = \cot\dfrac{(A - B)}{2}$

25) $1 + \cot^2\frac{X}{2} = 2\csc X\cot\frac{X}{2}$.

XIV ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La igualdad $3\csc^2 X + \sqrt{3}\operatorname{sen} X + 1 = 0$ es un ejemplo de una ecuación trigonométrica. No es una identidad, es decir, no es verdadera para todos los valores de X. Por ejemplo, no es verdadera cuando $X = 0°$. En efecto, cono $\operatorname{sen}0° = 0$, $\cos 0° = 1$, vemos que el primer miembro cuando $X = 0°$ es igual a 4 y no es igual a 0.

Luego, una ecuación trigonométrica difiere de una identidad en que no es verdadera para todos los valores del ángulo desconocido de que se trata.

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar los valores del ángulo desconocido que satisfacen a la ecuación dada.

No hay ningún método general para resolver ecuaciones trigonométricas, que se pueda seguir en todos los casos, pero se verá que son útiles las siguientes sugerencias:

PRIMER PASO.- Exprésense todas las funciones trigonométircas que entran en la ecuación, en términos de funciones un mismo ángulo, aprovechando las identidades conocidas. Así, si $2X$ y X aparecen en la ecuación, exprésense las funciones de $2X$ en términos de las funciones de X.

SEGUNDO PASO.- Exprésense todas las funciones en términos de la misma función.

TERCER PASO.- Resuélvase algebraicamente (factorizando o de cualquier otra forma) considerando como incógnita la única función que entra ahora en la ecuación.

Frecuentemente se introducen raices extrañas elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación o al quitar denominadores. Los valores del ángulo obtenido en tales casos, que no satisfacen a la ecuación dada, deben ser desechados. También debe cuidarse el que no se pierda ninguna raíz al extraer raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación, o al dividir ambos miembros por un factor.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$\cos 2X \csc X + \csc X + \cot X = 0$$

para valores de X entre 0° y 360°.

Solución: Como $\cos 2X = \cos^2 X - \operatorname{sen}^2 X$, obtenemos

$$(\cos^2 X - \operatorname{sen}^2 X)\csc X + \csc X + \cot X = 0$$

como $\csc X = \dfrac{1}{\operatorname{sen} X}$, y $\cot X = \dfrac{\cos X}{\operatorname{sen} X}$, sustituyendo resulta

$$\frac{\cos^2 X - \operatorname{sen}^2 X}{\operatorname{sen} X} + \frac{1}{\operatorname{sen} X} + \frac{\cos X}{\operatorname{sen} X} = 0$$

y por tanto:

$$\cos^2 X - \operatorname{sen}^2 X + 1 + \cos X = 0$$

Como $\operatorname{sen}^2 X = 1 - \cos^2 X$, sustituyenso tenemos

$$\cos^2 X - 1 + \cos^2 X + 1 + \cos X = 0$$

o sea,

$$2\cos^2 X + \cos X = 0$$

$$\cos X(2\cos X + 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor, obtenemos

$$(1)\ \cos X = 0 \text{ ó}$$

$$(2)\ 2\cos X + 1 = 0,$$

o sea $\cos X = -\dfrac{1}{2}$.

Los valores de X comprendidos entre 0° y 360° que satisfacen a la ecuación son, por lo tanto,

de (1): 90° y 270°

de (2) 120° y 240°.

Convirtiendo estos valores a radianes y ordenándolos en orden creciente de magnitud, hallamos las soluciones:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \text{ radianes.}$$

A cada uno de estos valores puede sumársele o restársele cualquier múltiplo de 2π, y de esta manera se obtienen absolutamente todas las soluciones, pero como se aclaró al principio de este ejemplo, y como lo haremos en los siguientes, solamente nos van a interesar los valores de X que están comprendidos entre 0° y 360°.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$2sen^2X + \sqrt{3}cosX + 1 = 0$$

para todos los valores de X desde 0° a 360°.

Solución: Como $sen^2X = 1 - cos^2X$, obtenemos

$$2 - 2cos^2X + \sqrt{3}cosX + 1 = 0$$

o sea:

$$2cos^2X - \sqrt{3}cosX - 3 = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado en $cosX$.

$$\Rightarrow cosX = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{27}}{4} = \frac{\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow cosX = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\ldots(1),$$

$$o\ cosX = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\ldots(2)$$

Ningún valor de X satisface la igualdad $cosX = \sqrt{3}$, ya que el valor del coseno no puede exceder de 1.

Si $cosX = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, hallamos que $X = 150° = \frac{5\pi}{6}$ y $X = 210° = \frac{7\pi}{6}$.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$5cosx = 4senX + 4$$

para todos los valores de X desde 0° hasta 360°.

Solución: Para evitar que aparezcan radicales al expresar todas las funciones en términos de una misma función, elevamos al cuadrado ambos miembros y obtenemos

$$25cos^2X = 16sen^2X + 32senX + 16$$

Usasndo la identidad $cos^2X = 1 - sen^2X$, obtenemos

$$25(1 - sen^2X) = 16sen^2X + 32senX + 16,$$

$$\Leftrightarrow 25 - 25sen^2X = 16sen^2X + 32senX + 16$$

$$\Leftrightarrow -41sen^2X - 32senX + 9 = 0$$

o sea,

$$41sen^2X + 32senX - 9 = 0.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\operatorname{sen}X = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 4(41)(-9)}}{2(41)} = \frac{-32 \pm \sqrt{2500}}{82} = \frac{-32 \pm 50}{82}$$

y obtenemos

$$\operatorname{sen}X = \frac{18}{82} = \frac{9}{41}\ldots(1),$$

o bien,

$$\operatorname{sen}X = -\frac{82}{82} = -1\ldots(2)$$

De (1) tenemos que los valores correspondientes de X compredidos entre 0° y 360° son:

$$X = 12°40'49'',\ X = 167°19'11''$$

De (2): el valor correspondiente es $X = 270°$.

Estos valores de X son las soluciones de la ecuación

$$41\operatorname{sen}^2X + 32\operatorname{sen}X - 9 = 0;$$

pero como elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación dada, podemos haber dado soluciones extrañas. En este caso, observamos que cos167°19'11" es negativo y que sen167°19'11" es positivo; luego para este ángulo el primer miembro de la ecuación dada es negativo y el segundo miembro es positivo. por tanto, la ecuación dada no se satiface y el ángulo de 167°19'11" debe ser desechado. Por sustitución se encuentra que los ángulos restantes sí satisfacen la ecuación dada. Las soluciones son

$$X = 12°40'49'' \text{ y } 270°.$$

XXVIII Ejercicios. Resolver las siguientes ecuaciones para valores de X comprendidos entre 0° y 360°:

1) $\operatorname{sen}^2X = \frac{1}{4}$

2) $\tan^2X - 3 = 0$

3) $\sec^2X - 4 = 0$

4) $\operatorname{sen}^2 2X = 1$

5) $\cot^2\frac{X}{2} = 3$

6) $4\cos^2 X \csc X + 8\cos^2 X - 3\csc X = 6$

7) $2\operatorname{sen}^2 X + 3\cos X = 0$

8) $\tan^2 X - (1 + \sqrt{3})\tan X + \sqrt{3} = 0$

9) $\operatorname{sen} X + \cos X = 0$

10) $\operatorname{sen} X + \cos X = 0$

11) $\cos 2X + \cos X = -1$

12) $2\operatorname{sen} X = \operatorname{sen} 2X$

13) $\operatorname{sen}(30° + X) - \cos(60° + X) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

14) $\tan X + \sec^2 X - 3 = 0$

15) $4\operatorname{sen} X + 3\cos X = 3$

16) $2\sec^2 X - \sec X = 0$

17) $\operatorname{sen}^2 X + \operatorname{sen} X = 6.$

XV LOGARITMOS

TEORÍA Y USO DE LOS LOGARITMOS EN LA TRIGONOMETRÍA.

Muchos de los problemas que se presentan en la trigonometría implican largos cálculos. Como el trabajo con ellos puede aminorarse grandemente con el uso de los logaritmos, resulta ventajoso usarlos en una gran parte de los cálculos trigonométricos. Esto es epecialmente cierto en los cálculos relacionados con la solución de los triángulos. A continuación vamos a dar los principios fundamentales de los logaritmos y a explicar brevemente el uso de la calculadora.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO.- Se llama logaritmo de un número, en una base dada, al exponente al cual debe elevarse la base para obtener el número.

Así, si

$$b^x = N, \text{ (forma esponencial)}$$

entonces x es el logaritmo de N de base b. Este enunciado se escribe en forma abreviada como sigue:

$$x = \log_b N \text{ (forma logarítmica)}$$

Ambas formas son, entonces, simplemente dos maneras diferentes de expresar la misma relación entre b, x y N.

El hecho de que un logaritmo sea un exponente puede expresarse más claramente escribiendo la forma exponencial en la forma

$$\left\{\text{base}\right\}^{\log} = \text{número}$$

Por ejemplo, las siguientes relaciones expresadas en forma exponencial:

$$3^2 = 9;\ 2^5 = 32;\ \left\{\frac{1}{2}\right\}^3 = \frac{1}{8};\ X^y = z,$$

se escriben, repectivamente, en la forma logarítmica:

$$2 = \log_3 9;\ 5 = \log_2 32;\ 3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8};\ y = \log_x z;$$

en donde,

2, 5, 3, y son los logaritmos (exponentes)

3, 2, $\frac{1}{2}$, x son las bases, y

9, 32, $\frac{1}{8}$, z son los números respectivamente.

De manera semejante las igualdades:

$\left\{25\right\}^{1/2} = \sqrt{25} = 5;\ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001;\ 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64}$ $= 4;\ b^0 = \frac{b^n}{b^n} = 1$

se escriben en forma logarítmica como sigue:

$\frac{1}{2} = \log_{25}5;\ -3 = \log_{10}0.001;\ \frac{2}{3} = \log_8 4;\ 0 = \log_b 1.$

Ejemplo 1. ¿Cuál es el logaritmo de 27 en base 9?

Solución: Sea $x = \log_9 27$, entonces, $9^x = 27$, o sea, $3^{2x} = 3^3$, por tanto, $2x = 3$, y $x = \frac{3}{2}$.

XXIX Ejercicios

1) Expresar las siguientes igualdades en forma logarítmica:

a) $5^2 = 25$; b) $10^3 = 1000$; c) $3^4 = 81$; d) $\sqrt{9} = 3$; e) $\left\{\frac{1}{3}\right\}^2 = \frac{1}{9}$;

f) $2^{-4} = \frac{1}{16}$; g) $\sqrt[3]{125} = 5$; h) $10^{-2} = 0.01$; i) $(0.01)^2 = 0.0001$

j) $a^0 = 1$; k) $b^4 = c$; l) $y = 4^{2x}$

2) Expresar las siguientes igualdades en forma exponencial:

a) $\log_4 64 = 3$; b) $\log_7 49 = 2$; c) $\log_6 216 = 3$; d) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$;

e) $\log_a a = 1$; f) $\log_a 1 = 0$; g) $\log_b a = c$.

3) Cuando la base es 2, ¿cuáles son los logaritmos de los números 1, $\frac{1}{2}$, 2, 4, $\frac{1}{4}$, 8, 64, 128?

4) Para base 4 los logaritmos de ciertos números son 0, 1, 2, 3, -1, -2, $\frac{1}{2}$, ¿cuáles son los números?

5) Hallar el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x = \log_3 9$; b) $x = \log_8 16$; c) $x = \log_{10}\sqrt{10}$ d) $\log_2 x = 3$;

e) $x = \log_3\frac{1}{9}$; f) $x = \log_{100}1000$; g) $x = \log_4\sqrt[3]{16}$;

h) $\log_3 x = -3$; i) $2\log_{25}x = 3$; j) $\log_x 16 = 2$.

TEOREMAS SOBRE LOS LOGARITMOS.

Las propiedades de los logaritmos deberán hallarse a partir del álgebra que rige a los exponentes.

TEOREMA I. El logaritmo del producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de los dos factores, es decir:

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N.$$

DEMOSTRACIÓN

Sean M y N los factores y sean x , y sus logaritmos en al misma base b. Entonces:

$$\log_b M = x \text{ y } \log_b N = y$$

Escribiendo estas igualdades en la forma exponencial

$$b^x = M \text{ y } b^y = N$$

Multiplicando miembro a miembro ambas igualdades

$$b^{x+y} = MN$$

Escribiendo esta igualdad en la forma logarítmica queda

$$\log_b MN = x + y = \log_b M + \log_b N.$$

Por aplicaciones sucesivas, este teorema se puede extender evidentemente al producto de un número cualquiera de factores.

Así, $\log_b MNPQ = \log_b M\cdot NPQ = \log_b M + \log_b NPQ =$

$$= \log_b M + \log_b N + \log_b PQ =$$

$$= \log_b M + \log_b N + \log_b P + \log_b Q.$$

TEOREMA II. El logaritmo del cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, es decir:

$$\log_b\frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N.$$

DEMOSTRACIÓN

Como en el teorema I, sean

$$\log_b M = x \text{ y } \log_b N = y.$$

Pasando a la forma exponencial, $b^x = M$ y $b^y = N$.

Dividiendo miembro a miembro ambas igualdades, obtenemos

$$b^{x-y} = \frac{M}{N}.$$

Pasando esta expresión a la forma logarítmica, resulta que

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y = \log_b M - \log_b N.$$

TEOREMA III. El logaritmo de la potencia de exponente p de un número es igual a p veces el logaritmo del número, es decir:

$$\log_b N^p = p\log_b N.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\log_b N = x$, $b^x = N$.

Elevando ambos miembros a la potencia p, $b^{px} = N^p$.

Escribiendo esto en la forma logarítmica, resulta que

$$\log_b N^p = px = p\log_b N.$$

TEOREMA IV. El logaritmo de la raíz de índice r de un número es igual al logaritmo del número dividido entre r, es decir:

$$\log_b \sqrt[r]{N} = \frac{1}{r}\log_b N.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\log_b N = x$, entonces $b^x = N$.

Extrayendo la raíz de índice r a ambos miembros,

$$b^{x/r} = N^{1/r}.$$

Escribiendo esta igualdad en la forma logarítmica, queda

$$\log_b N^{1/r} = \frac{x}{r} = \frac{\log_b N}{r} = \frac{1}{r}\log_b N.$$

De los cuatro teoremas anteriores se deduce que si usamos los logaritmos de los números en vez de los números mismos, entonces las operaciones de multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raices se reducen a las de suma, resta, multiplicación y división respectivamente.

Ejemplo 1. Hallar el $\log_{10}\sqrt{0.001}$.

Solución: $\log_{10}\sqrt{0.001} = \frac{1}{2}\log_{10}0.001$, por el teorema IV

$$= \frac{1}{2}\log_{10}10^{-3} = \frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2}$$

Ejemplo 2. Hallar $\log_b \sqrt[3]{\dfrac{27 \times 0.235 \times 7.63}{63.2 \times 7.86}}$ en forma desarrollada.

Solución: $\log_b \sqrt[3]{\dfrac{27 \times 0.235 \times 7.63}{63.2 \times 7.86}} = \dfrac{1}{3}\log_b \dfrac{27 \times 0.235 \times 7.63}{63.2 \times 7.86} =$

$= \dfrac{1}{3}\left\{\log_b(27 \times 0.235 \times 7.63) - \log_b(63.2 \times 7.86)\right\} =$

$= \dfrac{1}{3}\left\{\log_b 27 + \log_b 0.235 + \log_b 7.63 - (\log_b 63.2 + \log_b 7.86)\right\}$.

XXX Ejercicios

1) Hallar el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\log_{10}\sqrt{1000} + \log_{10}\sqrt{0.01}$; b) $\log_7\sqrt{\dfrac{1}{7}} + \log_7\sqrt{7}$; c) $\log_2\sqrt{8} + \log_3\dfrac{1}{9}$; d) $\log_5\sqrt{125} + \log_{11}\sqrt[3]{121}$.

2) Escribir las siguientes expresiones logarítmicas en forma abreviada:

a) $\log_{10}\dfrac{4.12 \times 7.34}{6.28}$; b) $\log_m\sqrt{\dfrac{s(s - b)(s - c)}{(s - a)}}$; c) $\log_m\dfrac{\text{absenC}}{z}$; d) $\log_{10}\dfrac{a^3b^2c^{1/2}}{4^3\sqrt{d}}$.

3) Escribir las siguientes expresiones logarítmicas en forma abreviada:

a) $2\log x + \dfrac{1}{2}\log y - 3\log z$;

b) $\dfrac{5}{3}\log(x - 1) - \dfrac{2}{3}\log x - \dfrac{1}{6}\log(x + 2) + \log(x + 1)$.

LOGARITMOS COMUNES.

Cualquier número positivo, excepto la unidad, puede tomarse como base, y a cada base particular escogida corresponde un conjunto o sistema de logaritmos. En los logaritmos comunes, también llamados vulgares o decimales, la base es 10, y son los más convenientes de usar en nuestro sistema de numeración decimal. En lo que sigue, cuando no se especifique la base, se debe tomar como 10.

Así, $\log_{10}100 = 2$ se escribe $\log 100 = 2$
El logaritmo común de un número dado es, por consiguiente, la respuesta a la pregunta: ¿Qué potencia de 10 será igual al número dado?
La siguiente tabla indica qué números tienen por logaritmos núemros enteros en el sistema decimal.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$10^4 = 10{,}000$	$\log 10{,}000 = 4$
$10^3 = 1{,}000$	$\log 1{,}000 = 3$
$10^2 = 100$	$\log 100 = 2$
$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
$10^{-1} = 0.1$	$\log 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\log 0.01 = -2$
$10^{-3} = 0.001$	$\log 0.001 = -3$
$10^{-4} = 0.0001$	$\log 0.0001 = -4$
etc.	etc.

Tabla IV

Suponiendo que cuando un número crece su logaritmo también crece, vemos que un número comprendido entre 100 y 1000 tiene un logaritmo comprendido entre 2 y 3. Análogamente, el logaritmo de un número comprendido entre 0.1 y 0.01 tiene un logaritmo comprendido entre -1 y -2. En resumen, el logaritmo de cualquier número que no sea un potencia exacta de 10 consta, en general, de una parte entera y una parte decimal.
Así, por ejemplo, como 4587 es un número comprendido entre 10^3 y 10^4, tenemos

$$\log 4587 = 3 + \text{una parte decimal}$$

De la misma manera, como 0.0067 es un número comprendido entre 10^{-3} y 10^{-2}

$$\log 0.0067 = -(2 + \text{una parte decimal}) =$$
$$= -2 - \text{una parte decimal.}$$

Por razones prácticas el logaritmo de un número se escribe

siempre en tal forma que la parte decimal sea positiva.
Cuando el logaritmo completo es negativo, la parte decimal puede hacerse positiva sumándole una unidad. Entonces, para no alterar el valor del logaritmo, agregamos una unidad negativa a la parte entera. Así en el último ejemplo,

$$\begin{aligned} \log 0.0067 &= (-2) + (-\text{una parte decimal}) = \\ &= (-1 - 2) + (1 - \text{una parte decimal}) \\ &= -3 + \text{una nueva parte decimal.} \end{aligned}$$

Para hacer resaltar el hecho de que la parte entera de un logaritmo es negativa, se escribe usualmente el signo menos encima de dicha parte entera.
Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \log 0.004712 &= -2.3268 = -2 - 0.3268 \\ &= (-1 - 2) + (1 - 0.3268) \\ &= \bar{3}.\ 6732. \end{aligned}$$

La parte entera de un logaritmo se llama *característica* del logaritmo. La parte decimal de un logaritmo se llama *mantisa* del logaritmo.
Así, si $\log 357 = 2.5527$ y $\log 0.004712 = \bar{3}.\ 6732$, la partes enteras, 2 y -3 son las caracteristicas y las partes decimales 0.5527 y 0.6732 las mantisas.
De las explicaciones dadas y de la tabla IV obtenemos reglas que se dan a continuación:

REGLA PARA DETERMINAR LA CARACTERÍSTICA DE UN LOGARITMO COMÚN
La característica del logaritmo de un número mayor que la unidad es positiva e igual a una unidad menor que el número de cifras que tiene el número a la izquierda del punto decimal.
La característica del logaritmo de un número menor que la unidad es negativa e igual a una unidad mayor numéricamente que el número de ceros comprendidos entre el punto decimal y la primera cifra significativa del número.
Ejemplo 1. Las características de los número 27683, 456.2, 9.67, 436000, 26, 0.04, 0.0000612, 0.7963 y 0.0012 son: 4, 2, 0, 5, 1, -2, -5, -1, -1 y -3.

TEOREMA V. Los números que difieren solamente en la posición del punto decimal tienen la misma mantisa.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos, por ejemplo, los números 54.37 y 5437.

Sea $10^x = 54.37$

Si multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por 100 ($= 10^2$) tenemos

$$10^2 \cdot 10^x = 10^{x+2} = 5437, \text{ o sea } x + 2 = \log 5437.$$

Por tanto, el logaritmo de uno de los números difiere del logaritmo del otro en su parte entera (característica).

Así si $\log 47120 = 4.6732$, entonces $\log 47.12 = 1.6732$ y $\log 0.004712 = \bar{3}.6732$.

Como la mantisa es siempre positiva, es deseable en algunos cálculos sumar y restar de la característica los mismos múltiplos de 10. Así, $\bar{2}.3416$ puede escribirse en la forma $8.3416 - 10$. En este caso se sumaron y restaron 10 a la característica -2. Los siguientes ejemplos harán ver la ventaja de escribir las características en esta forma.

Ejemplo 2. Sumar los logaritmos 2.4069 y 1.9842.

Sumando y restando 10, escribimos

$$\begin{array}{r} 8.4069 - 10 \\ 9.8842 - 10 \\ \hline 18.3911 - 20 \end{array} \qquad \text{o sea } \bar{2}.3911.$$

Ejemplo 3. Restar $\bar{3}.4492$ de 2.1163.

Escribimos
$$\begin{array}{r} 12.1163 - 10 \\ 7.4492 - 10 \\ \hline 4.6671 \end{array}$$

Ejemplo 4. Multiplicar $\bar{2}.7012$ por 3.

$$\begin{array}{r} 8.7012 - 10 \\ \times \qquad\quad 3 \end{array}$$

$$\frac{\overline{26.1036 - 30}}{}\text{ , o sea } \bar{4}.1036.$$

Ejemplo 5. Dividir $\bar{2}.2411$ por 3.

Aquí primero sumamos y después restamos 30.

$$\frac{28.2411 - 30}{3} = 9.4137 - 10 \text{ , o sea } \bar{1}.4137.$$

XXXI Ejercicios

1) Dados $\log 62.63 = 1.7968$ y $\log 7194 = 3.8569$, hallar los logaritmos de los siguientes números:

a) 6263; b) 0.006263; c) 0.7194; d) $(6.263)^2$; e) $0.06263\sqrt[3]{7.194}$.

2) Dados $\log 5.664 = 0.7531$ y $\log 0.7182 = \bar{1}.8562$, hallar los números que corresponden a los siguientes logaritmos:

a) 1.7531; b) 8.7531 - 10 ; c) 5.8562; d) 9.8562 - 10.

3) Dados $\log 2 = 0.3010$; y $\log 3 = 0.4771$, hallar los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log 8$; b) $\log 6$; c) $\log 2\sqrt{3}$; d) $\log\sqrt{0.125}$; e) $\log 2000\sqrt{30}$.

CÁLCULO DE LOGARITMOS

El cálculo del logaritmo en base 10 de un número dado, se puede hacer fácilmente mediante el uso de una calculadora electrónica científica, o bien, mediante el uso de tablas logarítmicas.

Ejemplos: $\log 3104 = 3.491921713$

$\log 31.04 = 1.491921713$

$\log 138.7 = 2.142076461$

$\log 17 = 1.230448921$

$\log 0.00152 = \bar{2}.818156412$

$\log 5.63 = 0.7505083949$

$\log 0.08 = \bar{1}.096910013$

XXXII Ejercicios.

Hallar los logaritmos de los siguientes números utilizando la calculadora

a) 1872; b) 0.7; c) 1.808; d) 0.01011; e) 17.35; f) 2500; g) 5; h) 20000; i) 0.000032; j) 9.95; k) 0.1289; l) 1.002

ANTILOGARITMO DE UN NÚMERO.- Para hallar un número cuando se conoce su logaritmo, al número correspondiente se le llama *antilogaritmo*. El antilogaritmo de un número se puede encontrar fácilmente mediante el uso de la calculadora electrónica.

Ejemplos. 1) Hallar el antilogaritmo de 4.8409

Solución: antilog4.8409 = $10^{4.8409}$ = 69326.61572

2) Hallar el antilogaritmo de $\bar{1}.3612$.

Solución: antilog$\bar{1}.3612$ = $10^{\bar{1}.3612}$ = .0435311

3) Hallar el antilogaritmo de 1.931652

Solución: antilog1.931652 = $10^{1.931652}$ = 85.43818.

XXXIII Ejercicios

Hallar los antilogaritmos de los siguientes números utilizando la calculadora.

a) 1.8055; b) 0.2164; c) $\bar{2}.0529$; d) 3.9774; e) 5.26; f) 3

USO DE LOS LOGARITMOS EN LOS CÁLCULOS.- Los siguientes ejemplos muestran el empleo de los logaritmos en los cálculos prácticos.

Ejemplo 1. Calcular por logaritmos 243 × 13.49

Solución: Sea y = 243 × 13.49

Tomando logaritmos de ambos miembros

logy = log243 + log13.49 = 2.385606274 + 1.13001195 = 3.515618224

y = antilog3.515618224 = 3278.07.

Ejemplo 2. Calcular por logaritmos $\dfrac{1375 \times 0.06423}{76420}$.

Solución: Sea $y = \dfrac{1375 \times 0.06423}{76420}$

logy = log1375 + log0.06423 - log 76420 = 3.138302698 + ($\bar{1}.192262078$) - 4.883207033 = $\bar{2}.937166413$

$y = \text{antilog}\bar{2}.937166413 = 0.001156.$

Ejemplo 3. Calcular $(5.664)^3$

Solución: Sea $y = (5.664)^3$

$\log y = 3\log 5.664 = 3(0.7531232447) = 2.259369734$

$y = \text{antilog}2.259369734 = 181.7061949$

Ejemplo 4. Calcular $\sqrt[3]{0.7182}$

Solución: Sea $y = \sqrt[3]{0.7182}$

$\log y = \frac{1}{3}\log 0.7182 = \frac{1}{3}(\bar{0}.1437545992) = \bar{0}.047918199$

$y = \text{antilog}\bar{0}.047918199 = 0.8955334268$

Ejemplo 5. Calcular $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7194} \times 87}{980.8}}$

Solución: Sea $y = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{7194} \times 87}{980.8}} = \left\{\frac{\sqrt{7194} \times 87}{980.8}\right\}^{1/3}$

$\log y = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\log 7194 + \log 87 - \log 980.8\right\} =$

$= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}(3.856970433) + 1.93951925 - 2.991580457\right\} = \frac{1}{3}(0.8764240124)$

$= 0.2921413375$

$y = \text{antilog}0.2921413375 = 1.959482267.$

XXXIV Ejercicios.

Por medio de logaritmos, hallar el valor de cada una de las siguientes expresiones:

1) 9238×0.9152; 2) $\frac{336.8}{7984}$; 3) $0.002934 \times 48.4 \times 47.37$;

4) $\frac{1500.8 \times 0.0843}{0.06376 \times 4.248}$; 5) $(0.07396)^3$; 6) $\sqrt{2}$; 7) $\sqrt[4]{5}$; 8) $\sqrt[3]{0.02305}$

9) $\sqrt[3]{\frac{0.03296}{7.962}}$; 10) $\left\{\frac{0.08726}{0.1321}\right\}^{5/3}$; 11) $\frac{12 \times 86.1 \times \sqrt{345}}{0.087 \times 4.11}$;

12) $\sqrt[8]{2} \times \sqrt[5]{3} \times \sqrt[7]{0.01}$.

CAMBIO DE BASE EN LOS LOGARITMOS.- Hemos visto cómo puede hallarse el logaritmo decimal de un número. Pero algunas veces se necesita el logaritmo de un número en una base diferente de 10. Para mayor generalidad supongamos que han sido calculados los logaritmos de los números en la base "a" (mayor que cero) y deseamos encontrar el logaritmo de un número N en una base "b" (mayor que cero); es decir, se trata de expresar $\log_b N$ en función de los logaritmos de la base "a".

Supongamos que

$$\log_b N = x, \text{ es decir, } b^x = N.$$

Tomando logaritmos de base "a" de ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$\log_a b^x = \log_a N$, o sea, $x\log_a b = \log_a N$

Despejando x, $x = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

Pero como $x = \log_b N$, resulta, $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

Es decir, el logaritmo de un número en una base "b" es igual al logaritmo del mismo número en la base original "a, dividido entre el logaritmo de "b" en la base "a".

De aquí en adelante, tomaremos a = 10, ya que los logaritmos que conocemos están calculados para la base 10.

Por lo tanto, resulta, $\log_b N = \dfrac{\log_{10} N}{\log_{10} b} = \dfrac{\log N}{\log b}$.

Ejemplo. Hallar el $\log_3 21$.

Solución: Sea $x = \log_3 21$, entonces, $3^x = 21$ y $x\log 3 = \log 21$ de donde $x = \dfrac{\log 21}{\log 3} = \dfrac{1.3222}{0.4771} = 2.771$.

XXXV Ejercicios.

Hallar los siguientes logaritmos: (redondear a 3 cifras decimales)

1) $\log_2 7$; 2) $\log_4 9$; 3) $\log_9 8$; 4) $\log_7 14$; 5) $\log_3 10$; 6) $\log_3 0.01$

7) $\log_{1/2}\dfrac{7}{11}$.

XVI ECUACIONES EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales.- Son aquellas en las cuales las cantidades desconocidas aparecen en los exponentes. Tales ecuaciones pueden resolverse frecuentemente por medio de logaritmos, como puede verse en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Hallar el valor de x en la ecuación $81^x = 10$.

Solución: Tomando logaritmos de ambos miembros

$$\log 81^x = \log 10,\ x\log 81 = \log 10;\ x = \frac{\log 10}{\log 81} = \frac{1}{1.9085} = 0.524.$$

Ejemplo 2. Expresar la solución de la ecuación: $a^{2x+3}b^x = c$, en función de los logaritmos de las cantidades conocidas.

Solución: Tomando logaritmos de ambos miembros

$$\log a^{2x+3} + \log b^x = \log c;\ (2x + 3)\log a + x\log b = \log c;$$

$$2x\log a + 3\log a + x\log b = \log c;\ x(2\log a + \log b) = \log c - 3\log a$$

$$x = \frac{\log c - 3\log a}{2\log a + \log b}.$$

Ejemplo 3. Resolver el sistema: $2^x \cdot 3^y = 100$

$$x + y = 4$$

Solución: Tomando logaritmos de ambos miembros de la primera ecuación y multiplicando por log2 la segunda ecuación,obtenemos:

$$x\log 2 + y\log 3 = 2$$

$$x\log 2 + y\log 2 = 4\log 2$$

Restando,

$$y\log 3 - y\log 2 = 2 - 4\log 2$$

$$y(\log 3 - \log 2) = 2 - 4\log 2$$

$$y = \frac{2 - 4\log 2}{\log 3 - \log 2} = \frac{2 - 1.2040}{0.4771 - 0.3010}$$

$$y = \frac{0.7960}{0.1761} = 4.52,\ x = -0.52$$

XXXVI Ejercicios

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $5^x = 12$; b) $(0.4)^{-x} = 7$; c) $4^{x-1} = 5^{x+1}$; d) $1.3^x = 7.2$;

e) $7^{x+3} = 5$.

2) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $4^x \cdot 3^y = 8$

$2^x \cdot 8^y = 9$

b) $2^x \cdot 2^y = 2^{22}$

$x - y = 4$

c) $a^{2x-3} \cdot a^{3x-2} = a^8$

$3x + 2y = 17.$

TEOREMA 59. El valor de una función trigonométrica depende solamente de la magnitud del ángulo A, es decir, que es independiente del punto B desde el cual se traza la perpendicular al otro lado.

DEMOSTRACIÓN:

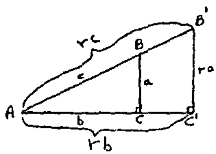


Figura 220

Sea ΔABC un triángulo rectángulo con a, b catetos y c la hipotenusa. Como $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, entonces $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$, es decir, $\angle B' = \angle B$ y $\angle C' = \angle C$, además de que, $\overline{B'C'} = ra$, $\overline{A'C'} = rb$, $\overline{A'B'} = rc$.

Por lo tanto, en el $\Delta AB'C'$:

$\text{sen}A = \dfrac{ra}{rc} = \dfrac{a}{c}$; $\cos A = \dfrac{rb}{rc} = \dfrac{b}{c}$; $\tan A = \dfrac{ra}{rb} = \dfrac{a}{b}$; $\cot A = \dfrac{rb}{ra} = \dfrac{b}{a}$;

$\sec A = \dfrac{rc}{rb} = \dfrac{b}{c}$; $\csc A = \dfrac{rc}{ra} = \dfrac{c}{a}$.

TEOREMA 60. Una función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su ángulo complementario.

DEMOSTRACIÓN:

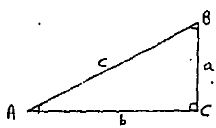


Figura 221

En el triángulo rectángulo ΔABC, en donde a, b son catetos y c la hipotenusa, $\angle A + \angle B = 90°$ (corolario teorema 7). Por tanto, $\angle A =$

$90° - \angle B$. Entonces:

$$\operatorname{sen}A = \operatorname{sen}(90° - B) = \operatorname{sen}90°\cos B - \cos 90°\operatorname{sen}B$$
$$= 1(\cos B) - 0(\operatorname{sen}B) = \cos B$$

$$\cos A = \cos(90° - B) = \cos 90°\cos B + \operatorname{sen}90°\operatorname{sen}B$$
$$= 0(\cos B) + 1(\operatorname{sen}B) = \operatorname{sen}B$$

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen}A}{\cos A} = \frac{\cos B}{\operatorname{sen}B} = \cot B;\ \cot A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen}A} = \frac{\operatorname{sen}B}{\cos B} = \tan B.$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\operatorname{sen}B} = \csc B;\ \csc A = \frac{1}{\operatorname{sen}A} = \frac{1}{\cos B} = \sec B.$$

TEOREMA 62. Sea A un ángulo cualquiera, entonces:

a) $\operatorname{sen}(A + n360°) = \operatorname{sen}A\cos(n360°) + \cos A\operatorname{sen}(n360°)$

$= \operatorname{sen}A(1) + \cos A(0) = \operatorname{sen}A$

b) $\cos(A + n360°) = \cos A\cos(n360°) - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}(n360°)$

$= \cos A(1) - \operatorname{sen}A(0) = \cos A$

c) $\tan(A + n360°) = \dfrac{\operatorname{sen}(A + n360°)}{\cos(A + n360°)} = \dfrac{\operatorname{sen}A}{\cos A} = \tan A$

d) $\cot(A + n360°) = \dfrac{\cos(A + n360°)}{\operatorname{sen}(A + n360°)} = \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen}A} = \cot A$

e) $\sec(A + n360°) = \dfrac{1}{\cos(A + n360°)} = \dfrac{1}{\cos A} = \sec A$

f) $\csc(A + n360°) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(A + n360°)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}A} = \csc A.$

TEOREMA 63. Las funciones trigonométricas de un ángulo mayor de 90° y menor de 180° coinciden (excepto por el signo) con las funciones trigonométricas correspondientes a su ángulo suplementarios.

DEMOSTRACIÓN:

Sea A un ángulo cualquiera.

$$\operatorname{sen}(180° - A) = \operatorname{sen}180°\cos A - \cos 180°\operatorname{sen}A$$
$$= 0(\cos A) - (-1)\operatorname{sen}A = \operatorname{sen}A$$

$$\cos(180° - A) = \cos 180°\cos A + \operatorname{sen}180°\operatorname{sen}A$$
$$= (-1)(\cos A) + (0)\operatorname{sen}A = -\cos A$$

$$\tan(180° - A) = \frac{\operatorname{sen}(180° - A)}{\cos(180° - A)} = \frac{\operatorname{sen}A}{-\cos A} = -\tan A$$

$$\cot(180° - A) = \frac{\cos(180° - A)}{\operatorname{sen}(180° - A)} = \frac{-\cos A}{\operatorname{sen}A} = -\cot A$$

$$\sec(180° - A) = \frac{1}{\cos(180° - A)} = \frac{1}{-\cos A} = -\sec A$$

$$\csc(180° - A) = \frac{1}{\operatorname{sen}(180° - A)} = \frac{1}{\operatorname{sen} A} = \csc A.$$

TEOREMA 64. Las funciones trigonométricas de un ángulo del tercer cuadrante son iguales en valor absoluto a las funciones del mismo nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado terminal y el lado final de 180°. Los signos algebraicos son los que corresponden a las funciones de un ángulo del tercer cuadrante.

DEMOSTRACIÓN:

Sea A un ángulo cualquiera.

$$\operatorname{sen}(A - 180°) = \operatorname{sen}A\cos 180° - \operatorname{sen}180°\cos A$$

$$= \operatorname{sen}A(-1) - \cos A(0) = -\operatorname{sen}A$$

$$\cos(A - 180°) = \cos A\cos 180° + \operatorname{sen}A\operatorname{sen}180°$$

$$= (-1)(\cos A) + (0)\operatorname{sen}A = -\cos A$$

$$\tan(A - 180°) = \frac{\operatorname{sen}(A - 180°)}{\cos(A - 180°)} = \frac{-\operatorname{sen}A}{-\cos A} = \tan A$$

$$\cot(A - 180°) = \frac{\cos(A - 180°)}{\operatorname{sen}(A - 180°)} = \frac{-\cos A}{-\operatorname{sen}A} = \cot A$$

$$\sec(A - 180°) = \frac{1}{\cos(A - 180°)} = \frac{1}{-\cos A} = -\sec A$$

$$\csc(A - 180°) = \frac{1}{\operatorname{sen}(A - 180°)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}A} = -\csc A.$$

TEOREMA 65. Las funciones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante son iguales en valor absoluto, a las funciones del mismo nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado terminal y el lado final de 360°. Los signos algebraicos son los que corresponden a las funciones de un ángulo del cuarto cuadrante.

DEMOSTRACIÓN:

Sea A un ángulo cualquiera.

$$\operatorname{sen}(360° - A) = \operatorname{sen}360°\cos A - \cos 360°\operatorname{sen}A$$

$$= 0(\cos A) - 1\operatorname{sen}A = -\operatorname{sen}A$$

$$\cos(360° - A) = \cos 360°\cos A + \operatorname{sen}360°\operatorname{sen}A$$

$$= (1)\cos A + (0)\operatorname{sen}A = \cos A$$

$$\tan(360° - A) = \frac{\operatorname{sen}(360° - A)}{\cos(360° - A)} = \frac{-\operatorname{sen}A}{\cos A} = -\tan A$$

$$\cot(360° - A) = \frac{\cos(360° - A)}{\text{sen}(360° - A)} = \frac{\cos A}{-\text{sen}A} = -\cot A$$

$$\sec(360° - A) = \frac{1}{\cos(360° - A)} = \frac{1}{\cos A} = \sec A$$

$$\csc(360° - A) = \frac{1}{\text{sen}(360° - A)} = \frac{1}{-\text{sen}A} = -\csc A.$$

TEOREMA 66.- Las funciones de -A son iguales en valor absoluto, a las funciones del mismo nombre de A. El signo algebraico, sin embargo, cambia para todas las funciones excepto para el coseno y la secante.

DEMOSTRACIÓN:

Sea A un ángulo cualquiera.

$$\text{sen}(-A) = \text{sen}(0° - A) = \text{sen}0°\cos A - \cos 0° \text{ sen}A$$
$$= 0 \cdot \cos A - 1 \cdot \text{sen}A = -\text{sen}A$$

$$\cos(-A) = \cos(0° - A) = \cos 0°\cos A + \text{sen}0°\text{sen}A$$
$$= 1 \cdot \cos A + 0 \cdot \text{sen}A = \cos A$$

$$\tan(-A) = \frac{\text{sen}(-A)}{\cos(-A)} = \frac{-\text{sen}A}{\cos A} = -\tan A$$

$$\cot(-A) = \frac{\cos(-A)}{\text{sen}(-A)} = \frac{\cos A}{-\text{sen}A} = -\cot A$$

$$\sec(-A) = \frac{1}{\cos(-A)} = \frac{1}{\cos A} = \sec A$$

$$\csc(-A) = \frac{1}{\text{sen}(-A)} = \frac{1}{-\text{sen}A} = -\csc A.$$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

I. 1).- a) $\frac{\pi}{3}$ radianes; b) $\frac{7\pi}{36}$ radianes; c) $\frac{3\pi}{10}$ radianes; d) 1.9082 radianes; e) 1.4357 radianes; f) 0.74847 radianes; g) 2.8044 radianes; h) 2.18756 radianes; i) $\frac{7\pi}{3}$ radianes; j) 6π radianes.

2) a) 60°; b) 40°; c) 270°; d) 70°58'31"; e) 44°58'22"; f) 114°35'30"; g) 102°51'26"; h) 283°36'20".

II. a) $\angle P = 74°15'$; $\angle Q = 105°45'$

b) $\angle P = 100°$; $\angle Q = 80°$

c) $\angle P = 79°42'51''$; $\angle Q = 100°17'09''$

d) $\angle P = 172°40'59''$; $\angle Q = 7°19'01''$

e) $\angle P = 43°34'17''$; $\angle Q = 136°25'43''$

f) $\angle P = 88°$; $\angle Q = 92°$

g) $\angle P = 30°$; $\angle Q = 150°$.

III. a) $\angle C = 81°23'$; $\angle X = 98°37'$

b) $\angle C = \frac{\pi}{4}$

c) $\angle A = 72°44'38''$; $\angle B = 37°08'17''$; $\angle C = 70°07'05''$.

d) $\angle B = 51°17'28''$; $\angle B = 77°25'04''$

e) $X = 15°$; $Y = 12°$.

IV. 1) Se puede demostrar fácilmente por LAL.

2) a) $X = 12°$; $Y = 17°$; b) $X = 6°$; $Y = 47°$; c) $X = 16$, $Y = 8$

V. 1) $\overline{CW} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; 2) $h = 5.57$m; 3) $\overline{CB} = 4.125$m; 4) $\overline{AB} = 45$m; 5) $\overline{AB} = \frac{25}{7}$; $\overline{CD} = \frac{15}{7}$.

VI. 1) $c = 10$; 2) $b = 5$; 3) $a = 20$; 4) $c = 2\sqrt{5}$; 5) $b = 2\sqrt{10}$; 6) $a = 2\sqrt{14}$; 7) $c = 6$; 8) $b = 4$; 9) $a = 2$; 10) $c = \sqrt{9x^2 + 4y^2}$; 11) 22.91m; 12) a) 690.46m y b) 77.3m; 13) $h = 4.8$m, $a = 6$m, $b = 8$m; 14) $h = \frac{60}{13}$m,

$x = \frac{25}{13}$cm; 15) 119°; 16) a) 6, b) 15, c) 6, d) 8; 17) 3; 18) $5\sqrt{7}$m; 19) 4m; 20) 6cm.

VII. 1) 360°; 2) 1080°; 3) 540°; 4) pentágono; 5) eneágono; 6) dodecágono; 7) 120°; 8) 150°; 9) 144°; 10) octágono; 11) 36°; 12) hexágono; 13) 20; 14) 44; 15) 14; 16) 170; 17) octágono; 18) decágono.

VIII. 1) a) X = 9, Y = 3; b) X = 30, Y = 110; c) X = 5, Y = 9; d) X = -1, Y = 17

2) a) X = 9, Y = 20; b) X = 23.5, Y = 3.5; c) X = 10, Y = 110

3) a) X = 5, Y = 7; b) X = 10, Y = 35; c) X = 2.5, Y = 17.5 d) X = 8, Y = 4; b) X = 25, Y = 25; c) X = 11, Y = 118

4) a) X = 60, Y = 110; b) X = 15, Y = 25

5) a) X = 10, Y = 130; b) X = 36, Y = 72; c) X = 20, Y = 130; d) X = 20, Y = 140

6) a) X = 24, Y = 12.5

7) $\overline{AD} = 45$

IX. 1) ∠POS = 23°; 2) ∠BAC = 80°; 3) ∠BPR = 60°; 4) ∠BAC = 80°; 5) ∠BAO = 40°

X. 1) sen$A = \frac{8}{17}$, cos$A = \frac{15}{17}$, tan$A = \frac{8}{15}$, cot$A = \frac{15}{8}$, sec$A = \frac{17}{15}$, csc$A = \frac{17}{8}$

2) sen$B = \frac{5}{13}$, cos$B = \frac{12}{13}$, tan$B = \frac{5}{12}$, cot$B = \frac{12}{5}$, sec$B = \frac{13}{12}$, csc$B = \frac{13}{5}$

3) $a = 120$; 4) $b = 13.42$; 5) $c = \frac{9\sqrt{130}}{11}$; 6) B = 60°, $c = 50$, $b = 25\sqrt{3}$;

7) $c = 20\sqrt{2}$, $a = 20$, A = 45°; 8) $a = 240$, $b = 240\sqrt{3}$, A = 60°, B = 30°;

9) a) cot60°, b) sen70°, c) csc9°, d) sen56°27′, e) sec17°42′56".

XI. 1) 1.00137235; 2) 0.48862124; 3) 0.30256397; 4) 0.28674539; 5) 0.86020318; 6) 1.17498327.

XII. 1) III; 2) II; 3) IV; 4) IV; 5) II; 6) I; 7) I; 8) III; 9) entre II y III; 10) entre I y II; 11) entre III y IV.

XIII. $\sqrt{41}$; 5; $\sqrt{20}$; $\sqrt{26}$; 6; 5; 4.

XIV. 1) a) $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{3}$; b) $\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, 2, \frac{1}{2}, -\sqrt{5}, \frac{-\sqrt{5}}{2}$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$; d) $-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{-12}{5}, \frac{-5}{12}, \frac{13}{5}, -\frac{13}{12}$

2) a) I, b) II, c) III, d) IV, e) II

3) a) +, b) +, c) +, d) −, e) −, f) +

4) a) 30°, 150°; b) 45°, 225°; c) 60°, 300°; d) 150°, 330°; e) 210°, 330°; f) 120°, 240°.

5) a) $\frac{3}{5}$, $\pm\frac{4}{5}$, $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{4}{3}$, $\pm\frac{5}{4}$, $\frac{5}{3}$; b) $\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\pm\frac{\sqrt{8}}{8}$, $\pm\sqrt{8}$, -3, $\pm\frac{3\sqrt{8}}{8}$; c) $\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $-\frac{1}{3}$, -3, $\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\pm\sqrt{10}$; d) $\frac{-5}{13}$, $\pm\frac{12}{13}$, $\frac{\pm 5}{12}$, $\pm\frac{12}{5}$, $\pm\frac{13}{12}$, $\frac{-13}{5}$; e) $-\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{5}{3}$; f) $\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{13}$, $\frac{-5}{12}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{13}{12}$, $\frac{13}{5}$.

XVI. 1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) −2; 5) 2; 6) 0.

XVII. 1) sen22°; 2) cot41°40′; 3) csc8°43′28″; 4) cos36°40′; 5) tan73° 6) sec37°42′.

XVIII. a) sen69° ó cos21° = 0.9336

b) −sen75°20′ ó −cos14°40′ = −0.9674

c) −tan9°12′ ó −cot80°48′ = −0.1620

d) −cot12° ó −tan78° = −4.7046

e) −sec17° ó −csc73° = −1.0457

f) csc80° ó sec10° = 1. 0154

g) −cos32° ó −sen58° = −0.848

h) cot42° ó tan48° = 1.1106

i) −csc10° ó −sec80° = −5.7588

j) −sen69° ó −cos21° = −0.9336

k) sec36° ó csc54° = 1.2361

l) −cot30° ó −tan60° = −1.732.

XIX. a) −0.9205; b) −0.7431; c) −0.6494; d) −1.6643; e) 1.4142; f) −2.

XX. 1) B = 70°, a = 27.36, b = 75.18

2) B = 54°, a = 5.88, b = 8.09

3) B = 80°, a = 5.29, c = 30.46

4) A = 25°, B = 65°, c = 55.18

5) A = 63°, B = 27°, b = 19.52

6) B = 15°, b = 21.43, c = 82.82

7) 9.605m

8) ángulo en el vértice: 90°, ángulos iguales: 45°, lados iguales: 2.12m, área = 2.25m^2

9) lados iguales: 61.04m, ángulos iguales 35°, ángulo en el vértice: 110°, área = 1750.5m².

XXI. 1) 37°29'56", 217°29'56"; 2) 75°25'14", 104°34'46"; 3) 44°35'38", 315°24'22"; 4) 60°11'14", 240°11'14"; 5) 46°23'50", 313°36'10"; 6) 27°31'23", 152°28'37"; 7) 235°29'14", 304°30'46"; 8) 127°35'22", 232°24'38"; 9) 138°00'46", 318°00'46"; 10) 139°17'51", 319°17'51"; 11) 113°34'41", 246°25'19"; 13) 195°03'17", 344°56'43".

XXII. 1) C = 75°, b = 32.66, c = 44.61; 2) C= 123°12', b = 2257, c = 2599; 3) C = 55°, b = 70.74, a = 56.10; 4) B = 80°04'05", C = 47°55'55" c = 11.30; 5) B = 90°, C = 60°, c = 86.60; 6) 35°15'52", A = 84°44'08", a = 137.98; 7) c = 212, A = 41°34'53", B = 93°25'07"; 8) c = 125.35, A = 30°20'32", B = 119°59'28"; 9) b = 29.02, A = 83°20', C = 83°20'; 10) A = 35°18'46", B = 60°07'07", C = 84°34'07"; 11) A = 28°57'18", B = 46°34'03", C = 104°28'39"; 12) A = 23°39'44", B = 32°21'09", C = 123°59'07".

XXIII. 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$; 8) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 9) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 10) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$, $\frac{2\sqrt{30}+1}{20}$.

XXIV. 1) $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$.

XXV. 1) a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{24}{7}$, c) $\frac{-7}{24}$, d) $-\frac{25}{24}$; 2) a) $\frac{-119}{20}$, b) $\frac{5}{3}$, c) $\frac{120}{169}$, d) $\frac{169}{120}$.

XXVI. 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$, $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-1\sqrt{3}}}$; 2) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, b) $\frac{-\sqrt{10}}{10}$, c) −3, d) $\frac{1}{3}$, e) $-\frac{1}{3}$, f) $\frac{82}{25}$.

XXVIII. 1) 30°, 150°, 210°, 330°; 2) 60°, 120°, 240°, 300°; 3) 60°, 120°, 240°, 300°; 4) 45°, 135°, 225°, 315°; 5) 60°, 300°; 6) 30°, 150°, 210°, 330°; 7) 120°, 240°; 8) 45°, 60°, 225°, 240°; 9) 135°, 315°; 10) 0°, 90°; 11) 90°, 120°, 240°, 270°; 12) 0°, 180°; 13) 210°, 330°; 14) 45°, 116°33'54", 225°, 296°33'54"; 15) 0°, 106°15'37"; 16) no tiene; 17) no tiene.

XXIX. 1) a) $\log_5 25 = 2$, b) $\log_{10} 1000 = 3$, c) $\log_3 81 = 4$, d) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, e) $\log_{1/3}\frac{1}{9} = 2$, f) $\log_2\frac{1}{16} = -4$, g) $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$, h) $\log_{10} .01 = -2$, i) $\log_{.01} .0001 = 2$, j) $\log_a 1 = 0$, k) $\log_b c = 4$, l) $\log_4 y = 2x$; 2) a) $4^3 = 64$, b) $7^2 = 49$, c) $6^3 = 216$, d) $4^{1/2} = 2$, e) $a^1 = , a$. f) $a^0 = 1$, g) $b^2 = a$; 3) 0, −1, 1, 2, −2, 3, 6, 7; 4) 1, 4, 16, 64 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, 2; 5) a) 2, b) $\frac{4}{3}$, c) $\frac{1}{2}$, d) 8, e) −2, f) $\frac{3}{2}$, g) $\frac{2}{3}$, h) $\frac{1}{27}$, i) 125, j) 4.

XXX. 1) a) $\frac{1}{2}$, b) 0, c) $-\frac{1}{2}$, d) $\frac{13}{6}$; 2) $\log 4.12 + \log 7.34$, $- \log 6.28$; b) $\frac{1}{2}\left\{\log_m s + \log_m (s - b) + \log_m (s - c) - \log_m (s - a)\right\}$, c) $\log_m a + \log_m b + \log_m \operatorname{sen} C - \log_m 2$, d) $3\log a + 2\log b + \frac{1}{2}\log c - \log 4 - \frac{1}{3}\log d$; 3) a) $\log\frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$, b) $\log\frac{(x - 1)^{5/3}(x + 1)}{x^{2/3}(x + 2)^{1/6}}$, c) $\log\frac{y(y - 1)}{\sqrt{y^2 + 4}}$.

XXXI. 1) a) 3.7968, b) $\bar{3}.7968$, c) $\bar{1}.8569$, d) 1.5936, e) $\bar{1}.0824$; 2) a) 56.64, b) 0.05664, c) 718200, d) 0,7182; 3) a) 0.9030, b) .07781, c) 0.5396, d) 9.5485 − 10, e) 4.0396.

XXXII. a) 3.2723, b) $\bar{1}.8451$, c) 0.2572, d) $\bar{2}.0048$, e) 1.2393, f) 3.3979, g) 0.699, h) 4.3010, i) $\bar{4}.4948$, j) 0.9978, k) $\bar{0}.8897$, l) 0.0008.

XXXIII. a) 63.89987373, b) 1.645886943, c) 0.00885319, d) 9492.923914, e) 181970.0859, f) 1000.

XXXIV. 1) 8454.617593; 2) 0.0421843; 3) 6.726805272; 4) 467.1082945; 5) 0.000002213; 6) 1.4142123562; 7) 1.495348781; 8) 0.2845926262; 9) 0.1605665256; 10) 0.5010187569; 11) 536.7015759; 12) 0.7036208738.

XXXV. a) 2.808, b) 1.585, c) 0.9464, d) 1.356, e) 2.096, f) −2.096, g) 0.6522.

XXXVI. 1) a) $x = 1.544$, b) $x = 2.124$, c) $x = -13.43$, d) $x = 7.527$, e) $x = -2.1729$; 2) a) $x = 0.9005$, $y = 0.7564$, b) $x = 13$, $y = 9$, c) $x = 5$, $y = 1$.

BIBLIOGRAFÍA

Baldor, J. A. Geometría plana y esférica. Publicaciones Cultural, 1985.

Moise, Edwin E. y Downs, Floyd Geometría moderna. Fondo de Cultura Económica, 1988.

Guzmán, H. Abelardo Geometría y trigonometría. Publicaciones Cultural 1991.

Anfossi, Agustín Trigonometría. Progreso 1976.

Granville - Smith - Mikesh. Trigonometría plana y esférica. Uteha 1990.

Dino, Doltori Trigonometría. Mc. Graw Hill 1975.

Wenworth y Smith Geometría. Ginn y Compañía 1979.