UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACION DE INSTRUMENTOS DE PLAZO FIJO Y OTRAS APLICACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

CARLOS ENRIQUE DOMINGUEZ GUTIERREZ

MEXICO, D. F. 1994

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Los abajo firmantes, comunicamos a Usted, que habiendo revisado el trabajo de Tesis que realiz(ó)ron el pasante(s) CARLOS ENRIQUE DOMINGUEZ GUTIERREZ

con número de cuenta 8731759-8 con el Título: "VALUACION DE INSTRUMENTOS DE PLAZO FIJO Y OTRAS APLICACIONES".

Otorgamos nuestro **Voto Aprobatorio** y consideramos que a la brevedad deberá presentar su Examen Profesional para obtener el título de ACTUARIO

GRADO	NOMBRE(S) APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. EN C.	JOSE GUERRERO GRAJEDA	
Director de Tesis		
DR.	FRANCISCO JAVIER CARDENAS RIOSECO	
M. EN C.	VIRGINIA ABRIN BATULE	Virginia Abrín Batule
M. EN C.	MARIA ELENA GARCIA ALVAREZ	
Suplente		
MAT.	BENITO MARTINEZ SALGADO	
Suplente		

DEDICO ESTE TRABAJO A MI QUERIDISIMA UNIVERSIDAD, POR DARME LA OPORTUNIDAD DEL CONOCIMIENTO, POR DARME LA SED DE APRENDER CADA DIA MAS, Y POR ENZEÑARME COMO APAGARLA.

PARA TÍ UNAM.

CARLOS DOMÍNGUEZ

1- JUL- 1994

Valuación de Instrumentos de Plazo Fijo y Otras Aplicaciones.

CAPITULO I

INTRODUCCION

El trabajo que aquí presento es una posible respuesta a un problema del sistema financiero mexicano, el cual he podido palpar al desempeñar mis labores dentro del Banco de México; este problema es ahora latente, requiriendo una solución para el correcto desempeño de esta institución.

La valuación de los pasivos de los intermediarios financieros es un problema al que se enfrentan las autoridades en la identificación y valuación de riesgos financieros.

La solución a este problema lleva implícita la solución de un par de problemas que frecuentemente se presentan en el ámbito de las matemáticas aplicadas, a saber, la interpolación y el alisamiento de datos; problemas numéricos, para los cuales existe una gran cantidad de métodos de solución. La encrucijada está en cuál de ellos utilizar de manera que la solución refleje verdaderamente el comportamiento del fenómeno en estudio.

Por último, la instrumentación del método es un problema más a resolver, pues puede tenerse teóricamente un método de solución que refleje el fenómeno con un error mínimo, pero que difícilmente se pueda instrumentar.

En nuestro caso, se tiene ya desarrollada una teoría numérica y la instrumentación adecuada gracias a un paquete (software) que permite encontrar una gama de posibles soluciones. El objeto de este trabajo es entonces presentar la teoría numérica, el software y el marco de referencia del problema de manera que encontremos la mejor solución en términos de nuestro interés.

CAPITULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA FINANCIERO

VALUACIÓN DE PASIVOS.

El Banco de México como institución de Banca Central, está encargada de vigilar, supervisar y regular la actividad financiera del país. La vigilancia y supervisión de esta actividad se logra a través de la regulación de los intermediarios que trabajan en el sistema financiero mexicano, como son las instituciones de banca múltiple, las arrendadoras, las casas de bolsa o las empresas de factoraje, por dar algunos ejemplos. Los más importantes de estos, por el tamaño y variedad de operaciones que realizan son los bancos nacionales por lo que la regulación y vigilancia hacia ellos es intensa. La vigilancia hacia éstos se reflejará sobre todos los demás intermediarios de manera subsecuente, debido a que en nuestro sistema financiero los bancos son líderes de grupos financieros de los que se derivan otros intermediarios.

La regulación y vigilancia de las instituciones bancarias, consiste en la medición de los riesgos que estas adquieren al actuar como intermediarios del sistema financiero, y que deben estar respaldados por el capital correspondiente a ese nivel de riesgos. El tamaño del capital (la diferencia del activo menos el pasivo, valuados a precios de mercado) es el factor más importante para todos los intermediarios financieros ya que la escasez de capital inhibe la capacidad de los intermediarios de prestar servicios y reduce la probabilidad de pago de los acreedores del banco (los acreedores de un banco son los inversionistas que depositan sus ahorros en la institución), mientras que el capital en exceso reduce los rendimientos esperados para los inversionistas de los propios intermediarios (accionistas). En consecuencia, los intermediarios tienden a exponerse más al riesgo tratando de obtener mayores rendimientos sobre el capital.

Algunos de los riesgos a los que están expuestos los bancos al igual que otros intermediarios financieros que realicen operaciones similares son los siguientes:

RIESGO DE CRÉDITO: Este es el riesgo más importante y el más analizado por los intermediarios financieros. Las instituciones financieras prestan a individuos y empresas, por lo tanto, corren el riesgo de incumplimiento de la contraparte.

RIESGO DE TASAS DE INTERÉS: Las instituciones financieras, por lo general, renuevan las tasas de interés de sus pasivos más veces que las de sus activos. Por lo que si las tasas de interés se incrementan, la tasa pasiva será renovada antes al nuevo nivel de tasas, mientras que la activa se incrementara solo hasta el vencimiento del activo, sus ingresos netos y la solvencia de los intermediarios disminuirán.

RIESGO DE TIPO DE CAMBIO: Tomemos el caso en que un intermediario capta en una divisa (dólares) y presta en otra (pesos); si esta última se devalúa con respecto a la primera, el banco no tendrá recursos para pagarle a sus depositantes en dólares. Para reducir este riesgo, el banco debe procurar prestar en la moneda que capta y verificar que el acreditado tenga recursos en esa divisa para hacer frente al crédito.

RIESGO DE LIQUIDEZ: Las instituciones financieras, generalmente, prestan a un plazo mayor que el de sus depósitos. Cuando los ahorradores por algún temor real o ficticio sospechan de la solvencia de la institución retiran sus depósitos. Si estos retiros son cuantiosos, las instituciones financieras no soportan tal demanda y se presenta el problema de liquidez.

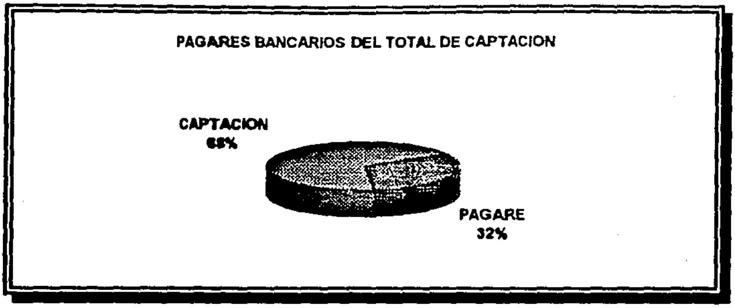
RIESGO DE OPERACIÓN: Toda institución está expuesta a que sus empleados le cometan fraudes o robos. Si esto sucede, evidentemente su capacidad de pago pude reducirse.

En el momento en que los riesgos asumidos por las instituciones son excesivos y las contingencias se presentan, la solvencia y el capital del banco se reducen. Cuando las perdidas son tan grandes que absorben el capital, la probabilidad de pago a los acreedores es mínima: Es entonces cuando el banco central respalda de una u otra forma a estos intermediarios y garantiza el pago a los acreedores a un costo excesivo.

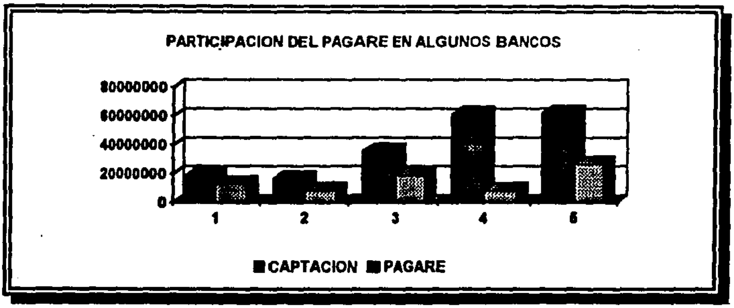
Por ello, es de suma importancia tener un buen método de medición de los riesgos adquiridos por los bancos, valuando correctamente el nivel de su capital. Esto es, tener un buen método de valuación de sus activos y pasivos.

Ahora bien, dentro de la valuación de activos y pasivos de un banco se consideran la administración de sus riesgos financieros, lo que incluye -valuación de riesgos en todas las dimensiones-, estructura política, estructura del banco, capital y medidas internas de rendimiento. También incluye los planes de contingencia aplicados a cambios inesperados de las tasas de interés, condiciones competitivas o cambios en el crecimiento económico, y cómo respondería a los cambios que él mismo puede medir con sus análisis del medio ambiente.

Sin embargo dentro de los pasivos que poseen las instituciones bancarias, resaltan por su cantidad los pagarés bancarios que son instrumentos de renta fija emitidos por las mismas instituciones con los cuales se comprometen a pagar una tasa de interés más el pago del principal al final de un plazo convenido.



De esta forma la valuación de los pagarés bancarios permite conocer en cada momento una gran parte de los pasivos y por tanto es posible la valuación de los riesgos a los que están sujetas las instituciones bancarias.



Las principales características de estos instrumento son las siguientes (Circular 2008 del Banco de México a la banca comercial.):

ACREDITANTES: Estos préstamos podrán recibirse de personas físicas y morales.

MONTOS: Las instituciones podrán fijar libremente con su clientela los montos mínimos a partir de los cuales estén dispuestos a recibir estos prestamos.

RENDIMIENTO: Las partes pactaran libremente, en cada caso, la tasa de los títulos. Se mantendrá fija durante la vigencia del titulo no procediendo revisión alguna.

PLAZOS: Al expedirse los pagarés las partes pactaran libremente, en cada caso, el plazo de los mismos. Se pactarán por días naturales, no debiendo ser menor a un día y será forzoso para ambas partes.

AMORTIZACIÓN: Serán amortizados al vencimiento del plazo contratado.

VALUACIÓN DEL PAGARÉ BANCARIO.

Considerando las caracteristicas de los pagares bancarios el método de valuación de un pagaré es muy simple; valuarlo simplemente implica descontar el flujo futuro pactado en el contrato, con la tasa de mercado actual.

Por ejemplo, consideremos un pagaré vendido por Banamex a uno de sus clientes: el monto del pagaré es de N$ 100,000. y la tasa ofrecida en el contrato es de 13.90% a un plazo de 91 días. El inversionista pagara a Banamex N$ 100,00. y recibirá a cambio un pagaré bancario. Con el mismo, la institución se compromete a en 91 días después de la emisión del titulo, reembolsar N$ 100,000. mas 13.90% de intereses ganados en el plazo, esto es:

$$100,000\left(1+\frac{0.1390}{\frac{360}{91}}\right)=N\$\ 103,513.6$$

Si el inversionista mantiene hasta el vencimiento el pagaré, el habrá obtenido una ganancia de N$14,638.5 en los 91 dias de su inversión. Pero si este desea vender el título a otro inversionista antes del vencimiento, deberá calcular el precio de mercado del titulo en ese momento.

Siguiendo nuestro ejemplo supongamos que el inversionista decide vender su titulo después de 18 días de la fecha de emisión; es decir, el desea vender un pagaré bancario con un plazo de 73 días. El inversionista querrá descontar N$114,638.5 (flujo futuro) a la tasa que sea ofrecida en el mercado por un pagaré bancario de 73 días. Supongamos también que ese mismo dia se emitió un pagaré con rendimiento de 13.0 % liquidable en 73 días. El precio de mercado del pagaré con vencimiento original de 91 dias después de 18 dias de su emisión estará dado por:

$$\frac{103,513.6}{\left(1+\frac{\frac{0.13}{360}}{73}\right)} = \text{N\$} \quad 100,855.0$$

No obstante dadas las características del pagaré bancario, no existen emisiones de pagares para cada uno de los posibles plazos, desde un día en adelante; los títulos son emitidos por diferentes montos a diferentes tasas y no se emiten todos los días. El problema en la valuación de los pagares bancarios es entonces el siguiente:

¿Cuál es el valor de la tasa con el que se debe descontar el flujo futuro, en caso de que no se haya emitido un pagaré con el plazo requerido?.

La solución a este problema esta dada por una interpolación de los datos, esto es, encontrar una función que tome las observaciones de las tasas ofrecidas en el mercado y proporcione valores para cada uno de los plazos.

De esta forma si encontramos un método de "interpolación" adecuado usando la información existente, la valuación de los intermediarios será mas precisa y en consecuencia los riesgos adquiridos son mejor supervisados.

En este trabajo no mencionamos la metodología necesaria a seguir para la valuación de un intermediario financiero, es decir la valuación de activos y pasivos de los bancos, ya que esto implica una serie de consideraciones especiales y seria materia de otro trabajo.

CAPITULO III

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA NUMÉRICO

El problema financiero antes expuesto se puede traducir de la siguiente manera: encontrar una aproximación del valor de la tasa de interés ofrecida por el pagaré bancario para los dias en los que las observaciones no proporcionan datos.

Las técnicas numéricas a aplicar para la solución del problema deberán ser tales que la aproximación de los datos concuerde con las expectativas del mercado a corto, mediano y largo plazo; si el mercado ofrece una tasa de interés baja para un largo plazo, la solución obtenida debe reflejar esta situación para un largo plazo y viceversa. Así también, la solución debe reflejar las políticas económicas existentes en el medio ambiente económico.

El problema numérico es entonces, encontrar el mejor método de solución para las aproximaciones de la tasa del pagaré bancario, así como una implementación computacional adecuada.

LOS OBJETIVOS SON:

- Encontrar una "interpolación" para los datos faltantes en cada tabla de observaciones, utilizando los datos del mercado.
- Lograr que la función encontrada aproxime suficientemente bien el conjunto de observaciones.
- Y lograr implementar el método de interpolación en un programa computacional.

CAPITULO IV

ANÁLISIS DE LOS DATOS Y MARCO DE REFERENCIA

En esta parte presentaremos un marco de referencia o una serie de parámetros que nos indiquen el tipo de solución que esperamos obtener, de acuerdo a las variables que por experiencia sabemos que influyen directamente en el movimiento del fenómeno en estudio. Y conoceremos brevemente las caracteristicas de la tasa que queremos "interpolar".

ANÁLISIS DE LOS DATOS.

Las observaciones de la tasa de interés del pagaré bancario que son recabadas del reporte que todos los bancos hacen al banco central, son las tasas de interés que ofrece cada uno de los bancos de la banca múltiple a los grandes, medianos y pequeños ahorradores que soliciten este tipo de inversión. Con las operaciones realizadas en cada banco (ver tabla 1) se realiza este concentrado de datos.

Cabe mencionar que la información es un corte transversal en el tiempo, no logitudinal. Esto es, la tabla de observaciones recolecta las tasas de interés pactadas en un solo día para cada uno de los plazos en los que se contrato algún pagaré.

PAGARÉ TRADICIONAL CON RENDIMIENTO LIQUIDABLE AL VENCIMIENTO.

TABLA 1

PLAZO DÍAS	MONTO N P	NUMERO COLOC	NUMERO BANCOS	TASA DE INTERÉS MÍNIMA	MÁXIMA	PONDERADA
1	2406.897	99	6	13.40	22.40	19.21
2	15507	12	4	14.40	19.55	19.01
5	7227	8	3	18.94	19.90	19.02
6	989	8	4	18.40	20.37	20.19
7	307260	83	10	5.00	22.83	19.98
8	3445	7	3	1.80	21.25	20.81
9	150	4	2	19.80	20.40	20.06
12	202	3	2	19.80	20.60	20.59
13	3044	3	3	119.80	20.55	18.59
14	25471	27	8	18.55	20.55	19.45
15	19	3	1	5.00	19.85	19.85
16	7	2	1	19.85	19.85	19.85
20	104	2	1	19.85	20.15	20.14
21	6701	11	7	6.40	20.25	19.70
22	2152	2	2	19.90	21.15	21.15
23	332	4	3	19.80	20.40	19.98
26	89	3	1	19.85	19.90	19.86
27	1525	12	3	18.40	20.40	20.20
28	940548	100	10	6.40	28.50	20.54
29	80153	13	4	19.35	27.25	19.67
30	4191	3	2	15.00	20.40	26.56
33	926	10	1	19.90	22.10	20.39
35	5781	2	2	19.50	19.50	22.10
40	1	1	1	19.50	21.15	19.50
61	4919	3	2	20.64	21.45	20.64
64	14631	7	1	5.90	17.00	21.10
84	147	1	1	17.00	17.00	17.00
89	2940	1	1	18.73	18.73	18.73
90	399	2	2	16.30	21.84	20.77
91	23538	7	5	5.40	21.40	19.87
93	146	2	1	21.40	21.40	21.40
179	13	1	1	19.21	19.21	19.21
182	266	4	2	4.90	19.35	18.77
364	11	1	1	18.88	18.88	18.88
378	2	1	1	4.40	4.40	4.40
392	7	1	1	17.15	17.15	17.15

Este reporte muestra los plazos de las emisiones privadas realizadas en una fecha determinada, el monto total de las emisiones (la suma del capital recibido por la emisión), el número de colocaciones (número de contratos con una tasa a cierto plazo), el número de bancos que vendieron pagarés a ese plazo y por último las tasas de interés que ofrecieron estos pagarés al ser contratados; así como la tasa de interés más alta y la más baja a las que fueron colocados los pagarés. La tasa ponderada porcentual es la tasa obtenida por:

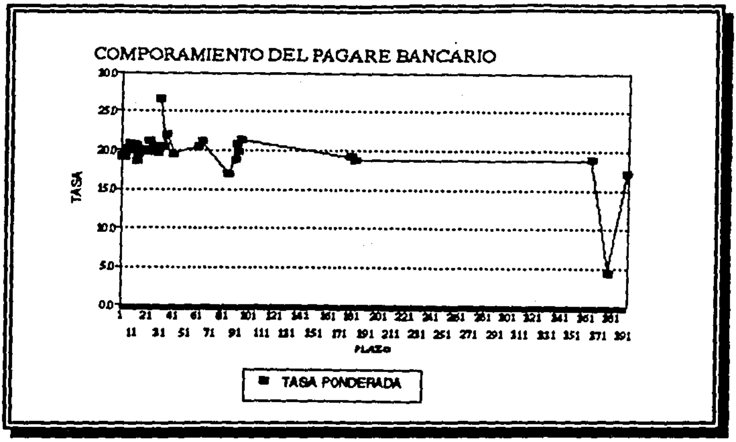
$$\textit{Tasa ponderada porcentual} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i t_i}{\sum_{i=1}^{s} m_i}$$

Donde m_i es el monto contratado en la inversión i y, t_i la tasa pagada por la misma en un plazo determinado; n el numero de contratos pactados en el plazo i; y s es el numero de pagares contratados el día de la observación en todos los plazos.

Esta tasa es el dato a partir del cuál calcularemos la "interpolación", ya que es la tasa que en promedio se ofreció para un plazo fijo y un monto promedio.

Como podemos notar, las tasas de las diferentes colocaciones pueden variar demasiado, es decir, en un intervalo pequeño, el movimiento de las tasas puede ser grande. Tomemos el intervalo con plazos de 16 a 20 días; en éste la tasa varía de 19.85% a 20.14% una diferencia de .29 puntos porcentuales, una variación muy grande para la diferencia de días tan pequeña. Esto que es una característica de la función, debe estar considerado dentro del método con el cual se pretende encontrar la "interpolación" de los datos.

Observemos el comportamiento de las tasas del pagaré a través de una gráfica de los datos de la tabla 1.



Debemos notar también, que los datos pueden contener observaciones erróneas o que no reflejen realmente la tasa de interés que el mercado pide por inversiones a cierto plazo; por ejemplo, para un pagaré a 378 días la tasa ponderada promedio a la que se colocaron el día de la observación fue de 4.40%, una tasa por supuesto ilógica (en relación a la tasa de 365 días 18.88%). Estos problemas serán detallados en el método de solución, aunque fácilmente podemos notar las dificultades que se presentan en los datos.

MARCO DE REFERENCIA.

DETERMINANTES DE LAS TASAS DE INTERÉS.

De manera muy general describiremos los factores que influyen sobre la tasa del pagaré bancario para dar una visión del marco de referencia. La tasa del pagaré bancario es un caso particular de las tasas ofrecidas por las inversiones de renta fija, los rendimientos ofrecidos por estas inversiones son determinados por la tasa ofrecida en el sistema financiero nacional, ésta tasa a su vez se acopla a la tasa de inflación y a la tasa real que el mismo sistema tiene. Mencionemos entonces algunas características de las inversiones de renta fija y de las tasas de interés; de inflación y de la tasa real.

INVERSIONES DE RENTA FIJA.

La tasa a "interpolar" es la tasa promedio porcentual del pagaré bancario. Este es un instrumento o inversión de renta fija que se diferencia de otras inversiones por otorgar un rendimiento fijo en un plazo fijo. Esta característica se deriva del hecho de que una inversión de renta fija es un préstamo que el inversionista hace al emisor del instrumento. Dicho inversionista presta el monto principal durante un plazo convenido y requiere un rendimiento adecuado durante ese plazo más, al final, la devolución del monto principal. Este tipo de inversión también es ofrecida por otros instrumentos en un corto plazo; por ejemplo, las aceptaciones bancarias, los certificados de la tesorería (CETES), el pagaré empresarial, el papel comercial bursátil y el extra bursátil ofrecen también una renta fija, mientras que en el largo plazo existen instrumentos como los bonos de indemnización bancaria (bibs), bonos de renovación urbana (bores) o también las obligaciones bancarias. Los pagarés bancarios son inversiones de renta fija clasificadas como bancarias, junto con los depósitos retirables en días preestablecidos y los certificados de deposito (cd's.)

INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA
CORTO PLAZO
Aceptaciones Bancarias ***Certificados de la Tesorería*** ***Pagaré Empresarial*** ***Papel Comercial Bursátil*** ***Papel Comercial Extra-Bursátil***
LARGO PLAZO
Bonos de indemnización bancaria (bibs) ***Bonos de renovación urbana (bores)*** ***Obligaciones bancarias***

El rendimiento que ofrecen cada uno de estos instrumentos se determina según el nivel general de las tasas de interés en el sistema financiero, por lo tanto el dato continuo y el pronóstico de este nivel se vuelven de suma importancia para la toma de decisiones.

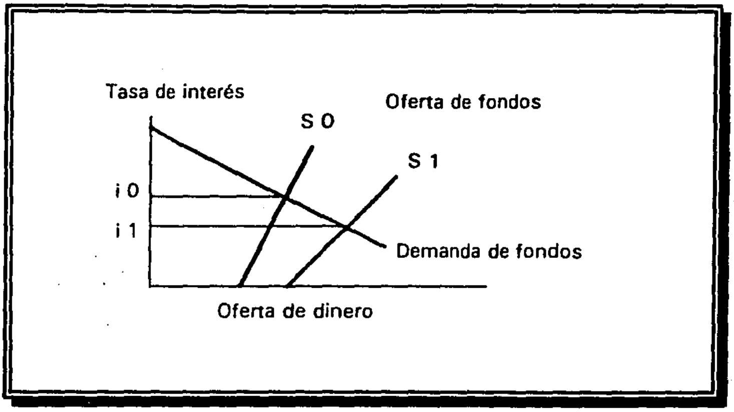
Describamos entonces los factores que determinan la tasa de interés de un sistema financiero.

TASA DE INTERÉS.

En cierta forma, la economía puede ser concebida como si estuviera compuesta de dos sectores, el sector real y el financiero. El sector real se refiere a la producción de bienes y servicios que se realiza con dos recursos físicos: trabajo y capital. Ejemplos importantes de los componentes del sector real incluyen la producción de automóviles, la producción de acero, y la construcción de viviendas. El sector financiero es el correspondiente a la transferencia de fondos de prestamistas a prestatarios. Algunos de los ejemplos de entidades que participan en el sector financiero son los bancos comerciales, compañías de seguros y casas de bolsa.

En el sector financiero cuando la demanda por créditos es igual a la oferta por fondos disponibles, se dice que existe equilibrio. La tasa de interés es la variable que causa esta igualdad o equilibrio.

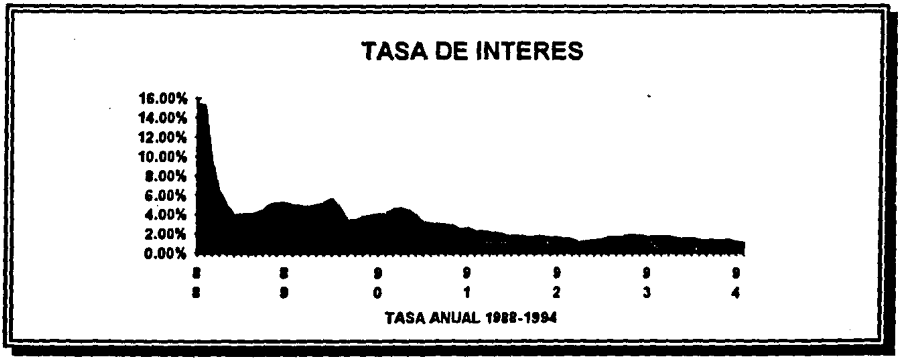
Para un individuo que trata de decidir entre consumir ahora una cantidad de dinero, o abstenerse de consumir y ofrecer los fondos al sector financiero (*i.e.* ahorrar), la tasa de interés puede ser vista como una compensación por abstenerse de consumir hoy. Por ejemplo, un individuo con N$ 100 de ingreso disponible cuando la tasa de interés es 10 % debe decidir entre consumir los N$ 100 hoy o ahorrarlos por un año, después de los cuales el individuo podría tener N$ 110 para consumir. A mayor premio (*i.e.* a mayor tasa de interés), mas ahorradores estarán dispuestos a ofrecer sus fondos al sector financiero. En suma la oferta de fondos esta directamente relacionada a las tasas de interés; esto se ve reflejado en la pendiente creciente de la curva del siguiente cuadro.



Para un prestatario de fondos, la tasa de interés representa un costo. En el contexto del ejemplo anterior, a una tasa de interés del 10 %, endeudarse un año por N$ 100 cuesta N$ 10 en intereses. Para un productor, estos N$ 10 de interés es el costo de endeudarse para obtener bienes de capital y equipo. Si un productor puede hacer operaciones mas eficientes con esta inversión, y por consecuencia aumentar sus beneficios, el podrá endeudarse. No obstante, a mayor tasa de interés, los beneficios obtenidos de la inversión tendrán que ser mayores para satisfacer el repago de la deuda. Ya que es mayor la cantidad de inversionistas o productores que pueden pagar bajas tasas de interés, que altas tasas de interés, la demanda por fondos baja cuando la tasa de interés sube. Es por esta razón, que la curva de la demanda por fondos en el cuadro anterior tiene una pendiente negativa.

El catalizador para lograr la igualdad entre la oferta de fondos de inversión y la demanda de los mismos es la tasa de interés. No obstante, el sector financiero no es un mercado uniforme. Es decir, el sector financiero esta compuesto de un numero de instituciones y mercados financieros que aunque distintos están interrelacionados. Cada uno de estos componentes del sector financiero esta especializado en atraer fondos de algún tipo de ahorradores específicos y ponerlos disponibles para un tipo especifico de prestatarios. De cualquier modo existen casos en los que los ahorradores y/o prestatarios, quienes usualmente piden prestado o prestan en una parte del sector financiero pueden conectarse a un sector diferente debido a un cambio en las tasas de interés relativas. Las tasas de interés llevan a la oferta y la demanda hacia una igualdad en cada parte del sistema financiero y operan de la misma manera para llevar el total o agregado de la oferta y la demanda de los fondos en el sistema financiero hacia el equilibrio.

Las tasas de interés no son constantes, esto es, varían en el tiempo. La clave para entender las operaciones del sector financiero es entender que afecta a las tasas de interés y porque son variables. La determinación de las tasas de interés y su variabilidad esta explicada por diversas teorías. Describiremos estas tres teorías, pensando en el nivel general de las tasas de interés, no en alguna tasa en particular.



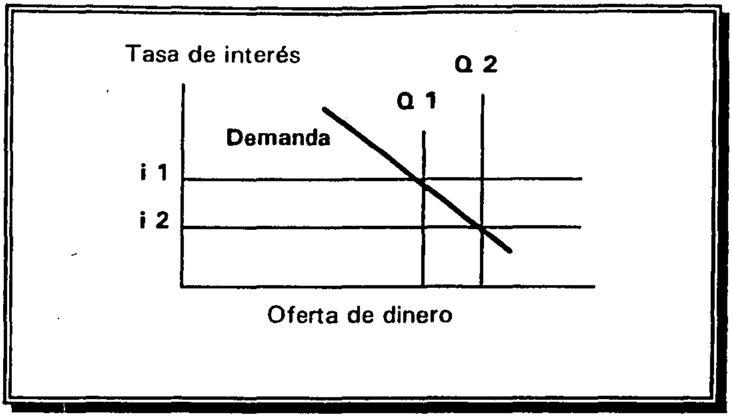
PREFERENCIA DE LIQUIDEZ.

Preferencia de liquidez es sinónimo de "demanda de dinero"; y como en el caso de la demanda de activos y pasivos , la demanda por el dinero depende del nivel de las tasas de interés.

La relación entre la demanda por el dinero y las tasas de interés puede ser explicada de dos maneras. La primera se basa en una construcción Keinesiana llamada "la demanda especulativa del dinero". En esta teoria, se asume que el inversionista es tenedor de efectivo que tiene rentabilidad cero y cero riesgo, o que posee un bono que tiene dos formas de rentabilidad: un cupón y una perdida o ganancia de capital. Si la perdida de capital del bono es lo suficientemente grande para exceder el tamaño del cupón, el rendimiento total del bono será negativo, y tener dinero con un rendimiento cero siempre será preferible.

Ya que el precio de los instrumentos de rendimiento fijo y las tasas de interés se mueven inversamente, los bonos obtienen perdidas de capital cuando las tasas de interés suben y una ganancia de capital cuando las tasas bajan. Entonces, cuando las tasas de interés son bajas, tipicamente hay la expectativa de que estas crecerán, provocando una perdida de capital en los bonos. Debido a esto antes de una perdida de capital, tener efectivo es preferible. Inversamente, si las tasas de interés son altas, tipicamente se esperaria que las tasas de interés caerán y tener bonos es preferible.

Las tasa de interés afecta la demanda por dinero y bonos como se ilustra en la curva de demanda decreciente del cuadro siguiente La demanda del dinero se incrementa tanto como decrezca la tasa de interés vigente debido a que a menores tasas de interés mayor es la expectativa de que la tasa de interés se incremente; entonces mayor es la expectativa de perdidas de capital y la mayoría de los inversionistas se inclinan a tener efectivo. Con respecto al siguiente cuadro si las tasas de interés se incrementan de i_2 a i_1, la cantidad de dinero demandado se decrementa de Q_2 a Q_1.



El segundo camino para explicar la relación entre las tasas de interés y la demanda del dinero es concebir la tasa de interés como el rendimiento perdido por tener dinero en lugar de la tasa de interés de un activo poco productivo. En consecuencia, a mayor tasa de interés mayor el rendimiento perdido por poseer el dinero, y menor la cantidad de dinero poseída. En otras palabras, tanto como las tasas de interés suban una menor cantidad de dinero es retenida.

De acuerdo a la ultima explicación, la preferencia de liquidez explica el nivel de las tasas de interés en términos de la oferta y la demanda de dinero. Entonces, si la tesorería incrementa (disminuye) la oferta de dinero y no hay cambios en la relación de la demanda, la tasa de interés disminuirá (crecerá). Observemos de nueva cuenta el cuadro anterior, si incrementamos la oferta de dinero de Q_1 a Q_2 mientras no se den cambios en la relación de la demanda el resultado será un punto de equilibrio con una tasa de interés inferior. En general, un incremento en la oferta o un decremento en la demanda ocasiona una caída en las tasas de interés, o viceversa un decremento en la oferta o un incremento en la demanda ocasiona un incremento de tasas.

La teoria de preferencia de liquidez puede ser usada para calcular las tasas de corto y largo plazo. Un análisis parcial de corto plazo para el calculo de la tasa de interés se basa únicamente en la experiencia y análisis de los movimientos de corto plazo en la oferta del dinero. Ya que la tesorería tiene la responsabilidad de determinar la oferta del dinero , se han capacitado analistas de las tasas de interés, quienes continuamente monitorean e interpretan las actividades de la tesorería para poder inferir de estas actividades cuales serán las necesidades futuras de la tesorería y como afectaran la oferta del dinero y por consecuencia a las tasas de interés. Las estadísticas de oferta de dinero anunciadas semanalmente por la tesorería las tardes de los martes y que son ampliamente diseminadas en los intermediarios financieros son examinadas cuidadosamente ya que son indicadores de los cambios de las políticas de la tesorería y que pueden afectar las tasas de interés.

Una mejor aplicación de la teoria de la preferencia de liquidez esta basada en la relación entre la oferta del dinero y el nivel del producto internol bruto (PIB). Esta relación esta formalmente expresada por la ecuación:

$$M \times V = P \times Y$$

llamada la teoria de la cantidad de dinero M, donde V es la velocidad del dinero, P es el nivel de precios, y Y es el producto nacional bruto real. El producto de P y Y es el producto nacional bruto PIB.

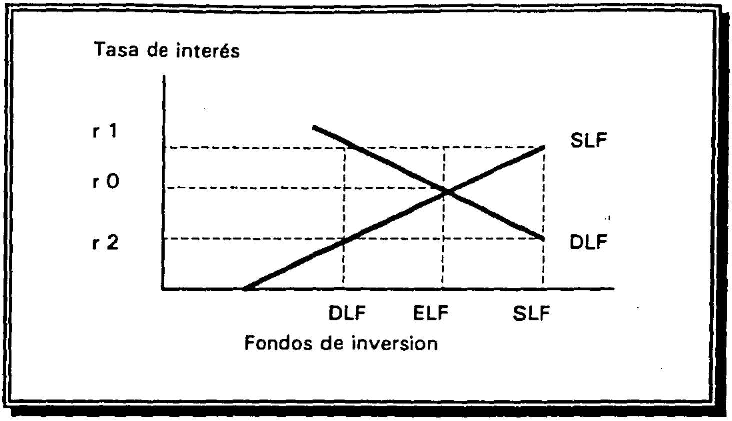
De acuerdo a esta teoria, si el nivel de la oferta del dinero en algún periodo de tiempo es menor (mayor) que el actual monto necesario para soportar el nivel esperado del PIB, entonces el nivel de tasas de interés muy probablemente crecerá (decrecerá). A causa de esta relación, los pronosticadores de la economia, a través de un complejo ejercicio estiman el PIB, la oferta del dinero, y su relación para poder pronosticar las tasas de interés.

FONDOS DE INVERSIÓN.

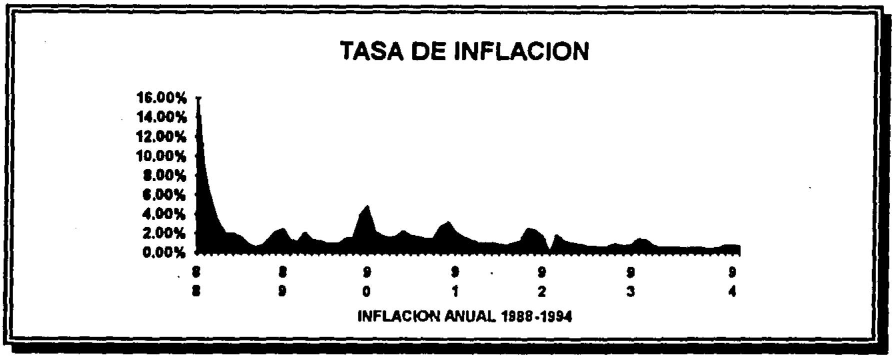
La teoria de *fondos de inversión* para la determinación de las tasas de interés esta basada en un razonamiento relacionado a la oferta y demanda de fondos de inversión. Esta teoria de la determinación de las tasas de interés depende de los fondos de los ahorradores disponibles para prestamos y de la demanda de estos fondos de inversión de los productores. Como mencionamos, conforme crezca el rendimiento obtenido por prestar fondos, la oferta de fondos de inversión crecerá. Inversamente, conforme la tasa de interés disminuya, el rendimiento de los prestamistas disminuye y por consecuencia la oferta de estos fondos.

Ya que las tasas de interés representan un costo para los productores, la relación inversa se cumple para los productores.: Conforme la tasa de interés crezca, la demanda de los productores disminuye, y conforme las tasas de interés disminuyan, la demanda de los productores se incrementa. La relación es ilustrada en el siguiente cuadro.

En este cuadro el equilibrio de las tasas de interés es r_0, y la cantidad de fondos ahorrados y prestados a esta tasa es E_{LF}. si la tasa de interés fuera inicialmente mayor que r0 (*i.e.* r_1), la oferta de fondos, S_{LF}, podria exceder la demanda, D_{LF} , a esta tasa. Este exceso de oferta de fondos podria hacer presión negativa en las tasas de interés causando una reducción hacia r_0, el punto al cual la oferta y la demanda estarian en equilibrio. Alternativamente, si las tasas de interés estuvieran por debajo del nivel de equilibrio (*i.e.* a r_2), entonces la demanda podria exceder la oferta. Las presiones del mercado en este caso podrian causar un nuevo incremento en las tasas al nivel de equilibrio, r_0.



INFLACIÓN Y LA TASA DE INTERÉS REAL.



Las tasas de interés representan un rendimiento para los ahorradores y un costo para los productores. Para que esta sea una representación significativa del costo o rendimiento, las tasas de interés deben relacionarse a la tasa del cambio de precios. Consideremos un ahorrador que a colocado en un fondo del mercado de dinero N$ 5,000 ganando un rendimiento del 12 % por año. Al final del año el ahorrador tendrá N$ 5,600 con un incremento del 12 % de poder de compra. Sin embargo, si el nivel de precios se ha incrementado 10 % en un año, entonces el incremento neto en el poder de compra de los ahorros seria de solo 2%.

El 12 % de rendimiento en los ahorros es conocido como la "tasa de interés nominal" ya que mide el incremento porcentual en el numero nominal de dólares ganados o pagados en un periodo de tiempo. La medida de el cambio en el poder de compra del 2% es conocido como la "Tasa de interés real" ya que esta mide el cambio real en el poder de compra. La diferencia entre estas dos tasas es la tasa de inflación. Entonces, la tasa de interés real es igual a la tasa de interés nominal menos la tasa de inflación.

Desde el punto de vista de los prestamistas, la tasa de interés real representa un incremento en el poder de compra resultante de evitar el consumo (ahorrar). Desde el punto de vista de los prestatarios, la tasa de interés real representa el costo real de endeudarse. El componente de la inflación de la tasa de interés nominal que el prestatario paga al prestamista de los fondos representa el deterioro del monto principal del préstamo, no el costo real de endeudarse. Entonces, hay principalmente dos determinantes de la tasa de interés real. El primero es el rendimiento de la inversión, o el rendimiento del capital. Si un negocio puede operar con eficiencia y ganar una tasa de rendimiento mayor sobre la inversión, este podrá pagar una tasa de rendimiento real mayor sobre los fondos del préstamo. El segundo determinante es la preferencia de los consumidores. Entre mas consumidores prefieran consumir hoy que dejar de consumir, mayor será la tasa de rendimiento real que los inducirá a alterar sus planes originales y a ahorrar.

La tase de interés real y la tasa de inflación, determinan la tasa de interés nominal. El efecto de la tasa de inflación en la tasa de interés nominal es causar que la tasa nominal cambie de tal forma que la tasa real no sea afectada por la inflación. Los prestamistas a menos que estén sujetos a la "ilusión del dinero", estarán consientes del rendimiento del poder de compra real en sus depósitos mas que en el rendimiento nominal. Estas situaciones inducen a los consumidores a negociar por tasas de interés nominal que mantengan sus tasas de rendimiento real por lo menos constante. Para que sus ahorros sean sensibles a la tasa de rendimiento real, un incremento en la inflación sin el correspondiente aumento en la tasa de interés real puede causar un decremento en los ahorros. En consecuencia, hay presiones positivas en la tasa de interés nominal en periodos de inflación, que previenen que la tasa de interés real caiga de su nivel original. Para prevenir caídas en los ahorros se requiere un incremento en la tasa de interés nominal igual al incremento en la tasa de inflación.

La inflación tiene un efecto similar en los deseos de los prestatarios de pagar una mayor tasa de interés nominal por sus deudas. La inflación afecta el rendimiento de los inversionistas al afectar los precios de bienes y servicios producidos. Una inversión que rinde un monto dado de interés podría ganar una alta tasa de interés nominal después de la inflación porque el valor de bienes y servicios producidos con la inversión han sido inflados. Si los pagos de interés de los prestamos no se incrementa de la misma forma, entonces la tasa de rendimiento real sobre las inversiones podría incrementarse. Presumiblemente bajo estas circunstancias, los prestatarios podrían incrementar su demanda de fondos hasta que el costo nominal de endeudarse se haya incrementado al costo real del nivel preinflacionario.

No obstante en el tiempo, las tasas de interés pueden cambiar por dos razones. Primero, debido a que la tasa de interés real es el rendimiento real del capital, la tasa de interés real puede decrecer durante recesiones a causa de montos de capital improductivo o montos de capital poco productivos. Similarmente, puede incrementarse durante periodos económicos de crecimiento ya que el capital es empleado productivamente.

La segunda razón que explica los cambios en la tasa real esta relacionada con los cambios inesperados de la tasa de inflación. La tasa de interés nominal de un instrumento, debe en cualquier momento, reflejar la tasa de inflación promedio esperada durante el plazo del instrumento. Si el mercado financiero espera una tasa de inflación alta en el futuro, la tasa de interés nominal debe reflejar estas expectativas. Sin embargo, si la inflación cambia inesperadamente, la tasa nominal inicial no reflejara correctamente el cambio, y la tasa de rendimiento real actual seria diferente del nivel de la tasa real normal en dirección opuesta al cambio inesperado en la tasa de inflación.

Así, las tasas de interés y en particular la tasa del pagaré bancario, dependen tanto de la tasa de inflación como de la tasa real del sistema; entonces, la solución esperada para la "interpolación" y alisamiento de la tasa del pagaré deberá considerar necesariamente estas variables. No describiremos de manera explícita la solución que se desea obtener, pues cada una de las variables son dinámicas, pero resaltemos que la solución no debe salirse del marco de referencia ya que de hecho el comportamiento de la tasa está determinada por variables dentro del sistema financiero.

De esta forma hemos analizado los aspectos fundamentales que determinan la tasa de interés, pero ¿cómo es que se determina la pendiente de la curva de las tasas de interés? y ¿Que es esta?.

DETERMINANTES TEÓRICOS DE LA PENDIENTE DE LA TASA DE INTERÉS

La pendiente de la tasa de interés o la estructura de plazos de tasas de interés da una caracterización de las tasas de interés en función del plazo. Si los compradores o emisores de productos de plazo fijo fueran indiferentes entre productos de diferente plazo, podria no existir la pendiente de la curva de tasas de interés. Todos los rendimientos de diferente plazo serian iguales, por lo tanto, del hecho de que las curvas de rendimiento no son perfectamente horizontales (o planas) podemos sugerir que algunas preferencias de plazos deben existir; razones que han sido presentadas por la estructura de plazos, son en efecto teorias o hipótesis acerca de las preferencias de los plazos entre los inversionistas. Cinco de estas teorias sobresalen por los resultados obtenidos con ellas; éstas son: la hipótesis de segmentación de mercados, la hipótesis de las expectativas, hipótesis de premio de liquidez, hipótesis de preferencia de hábitats y aproximación de no arbitraje o de procesos estocásticos.

Presentamos aquí estas cinco teorias que ayudan a definir los resultados que deseamos obtener.

HIPÓTESIS DE LA SEGMENTACIÓN DE MERCADOS.

Supongamos que los compradores de productos de instrumentos de ingreso fijo están separados en dos grupos: uno con una fuerte preferencia por instrumentos de corto plazo y otro con una fuerte preferencia de largo plazo. Si hay una pequeña diferencia en el rango de plazos y cada grupo de inversionistas la considera aceptable para la inversión de su portafolio, entonces el mercado de instrumentos de plazo fijo será segmentado en dos submercados. Si un grupo de inversionistas gana en el otro mercado en términos de fondos viables para inversión, entonces, en ausencia de una respuesta descubierta por parte de los prestatarios, este grupo subirá los precios y entonces forzará a los rendimientos de los instrumentos a caer en su submercado preferencial. El mismo resultado podría ocurrir de un incremento relativo en la cantidad de bonos emitidos por los prestatarios en uno de los rangos de vencimientos[1/].

Esto, en pocas palabras, es la teoría de segmentación de mercado, conocida también como institucional o teoría de cubrir presiones de la estructura de plazos. Esta teoría parece ser particularmente popular entre las prácticas de los inversionistas profesionales; los bancos comerciales se identifican como la fuente primaria de demanda de instrumentos a corto plazo y la demanda para instrumentos de largo plazo se asocia con las compañías de seguros de vida, abogando esta hipótesis de conocimientos en la que estos dos tipos de instituciones no confinan sus inversiones únicamente a una de las expectativas de vencimiento. Aún más, reconocen la presencia de otros inversionistas, incluyendo a algunos que operan satisfactoriamente en cualquier rango de vencimiento, pero también creen que los bancos y las aseguradoras son tan dominantes y sus preferencias de plazos son tan marcadas que los rendimientos a corto y largo plazo se comportan como si los mercados fueran segmentados como se mencionó en estas líneas.

1/ Los prestatarios en un mercado eficiente deben actuar para cubrir los cambios en la posición relativa de los inversionistas de los dos submercados, al subir sus tasas en el submercado favorecido y restableciendo la igualdad en las tasas. En ausencia de grandes preferencias, este cambio en las tasas es lo que se espera que hagan los prestamistas racionales (reguladores). No obstante las formulaciones típicas de la hipótesis asumen que las tasas de interés de los prestatarios están determinadas exógenamente.

Es usualmente cierto que una compañía de seguros de vida que demanda bonos a largo plazo tenga una demanda estable a lo largo del tiempo. Por otro lado con base en la historia de segmentación de mercados, un banco que demanda instrumentos a corto plazo demandará éstos con mayor volatilidad, ya que los bancos prefieren prestar directamente a personas físicas y morales, cuando es posible, depositando los fondos excedentes en instrumentos. Pero la demanda de las personas físicas y morales por los créditos a corto plazo es muy volátil. En periodos de una actividad económica fuerte estos prestatarios requieren fondos para expansión y fusión de negocios, los bancos venden instrumentos para satisfacer las demandas y los rendimientos a corto plazo aumentan en relación a los rendimientos a largo plazo. En periodos flojos, esos prestatarios pagan sus créditos y los bancos tienen un exceso de fondos para los cuales buscan una salida en los instrumentos a corto plazo, manejando rendimientos pequeños y decrecientes en comparación con los rendimientos a largo plazo.

Los investigadores que se oponen a la hipótesis de segmentación de mercados se basan principalmente en la creencia de que algunas otras hipótesis brindan una mejor explicación sobre el comportamiento de la estructura de plazos. Abogando por otras hipótesis, se cree que la hipótesis de segmentación de mercados sostiene la credibilidad de los bancos, compañías de seguros y muchos otros inversionistas para atraer a la corriente de estructura de plazos que aparenta ofrecer un ingreso mayor, en lugar de eliminar temporalmente las diferencias de rendimientos.

HIPÓTESIS DE LAS EXPECTATIVAS PURAS O IMPARCIALES.

La hipótesis de las expectativas es la explicación más ampliamente dada para la pendiente de la estructura de plazos. Esta hipótesis permanece en contraste a la teoria de la segmentación de mercados, ya que está basada en el supuesto de que los inversionistas a plazo fijo y posibles prestatarios actúan para eliminar cualquier diferencia comparativa de los instrumentos con un plazo específico. En efecto, se conoce que la preferencia de plazos puede existir inicialmente a causa de las expectativas del futuro nivel de las tasas de interés, pero acierta en que los participantes en el mercado responderán razonablemente para obtener ganancias de estas expectativas. En el proceso neutralizan las preferencias de plazos, pero también crean diferencias sistemáticas de las tasas entre los instrumentos de diferentes plazos.

Un ejemplo simple nos ayudará a comprender las hipótesis de las expectativas. Suponga que la curva de rendimientos es plana, los rendimientos son del 6% anual tanto en inversiones de 1 y 2 años y los inversionistas en general están de acuerdo en que estos rendimientos se incrementen al 8% en un año. Bajo estas condiciones, la estructura de plazos no permaneceria plana si no que se inclinaria hacia arriba. Equilibrios plausibles o tasas indiferentes son del 6% a un año (corto plazo) y 7% a dos años (largo plazo).

Para ver por qué sucede esto, consideremos primero un inversionista con un horizonte a largo plazo, es decir a dos años. El objetivo del inversionista es obtener la mayor tasa de rendimiento por su dinero a lo largo de estos dos años y es indiferente entre comprar un instrumento a este lapso y conservarlo o comprar un instrumento a un año renovándolo para el siguiente. Antes del ajuste de tasas, la primera alternativa brinda un 6% cada año, bajo la segunda alternativa sabe que puede obtener un 6% durante el primer año y espera poder obtener un 8% en el segundo, teniendo un promedio aproximado a lo largo de los dos años. Por consiguiente, preferirá la segunda alternativa y comprará un instrumento a un año a una tasa del 6% en lugar de un instrumento por dos años a una tasa del 6%. Así como él, otros inversionistas se comportarán de la misma manera, los precios en los instrumentos a dos años bajarán y los rendimientos se incrementarán. Sólo cuando los rendimientos de estos instrumentos a dos años alcancen un 7%, los inversionistas considerarán su compra que será tan atractiva como las inversiones de dos instrumentos a un año.

Podemos obtener el mismo resultado considerando un inversionista que busca el mayor rendimiento total sobre el siguiente año (un cupón más un cambio en el precio), teniendo un horizonte a corto plazo. Bajo nuestro escenario inicial de rendimiento, él sabe que su rendimiento total por su instrumento a un año será del 6%, por el cuál pagará a la par en un año. Por otro lado, su rendimiento total esperado en el instrumento a dos años para el siguiente año es inicialmente 4%.

Para ver esto, asúmase que el instrumento a dos años tiene un cupón del 6%. Al final de un año, será un instrumento a un año (esto es, tendrá un año de vida remanente). Si el instrumento ofrece el rendimiento esperado al vencimiento del 8%, éste será vendido por aproximadamente 98 unidades. En este precio un comprador obtendrá en el segundo año un cupón del 6% y una ganancia del dos para un rendimiento total de $(6+2)/98 \approx 8\%$. Pero si los instrumentos a dos años se venden a 98 al final del año, su rendimiento total sobre el primer año es únicamente del 4% debido a la pérdida de valor en un 2%; esto es, $(6-2)/100 \approx 4\%$. Bajo estas circunstancias el instrumento a dos años no será atractivo. Entonces preferirá el instrumento a un año del 6% evitando el instrumento a dos años con 6% hasta que el precio de este último caiga a 98 y su rendimiento al vencimiento alcance un 7%. En este punto le es indiferente, como la siguiente tabla nos ayuda a establecer:

	PLAZO	
	1 AÑO	*2 AÑOS*
CUPÓN	*6%*	*6%*
RENDIMIENTO INICIAL AL VENCIMIENTO	*6%*	*7%*
PRECIO INICIAL	*100%*	*98%*
GANANCIA DE CAPITAL		
AÑO 1	*0*	*0*
AÑO 2	-	*2*
INGRESO EN EL PLAZO	*6/100 = 6%*	*(6+6+2)/98 = 14%* *≅ 7% POR AÑO*
PRECIO AL FINAL DEL AÑO AL 8%	-	*98*
RENDIMIENTO		
AÑO 1	*6/100 = 6%*	*6/98 ≅ 6%*
AÑO 2	-	*(6+2) / 98 ≅ 8%*

A un precio inicial de 98, los productos a dos años ofrecen un rendimiento al vencimiento del 7% por año, basado en sus cupones del 6% cada año más una ganancia de capital de 2 en un año en una inversión inicial de 98. En consecuencia, si el precio al final de un año llega a 98, consistente con un rendimiento al vencimiento de 8% en el segundo año, entonces sus ingresos totales en el primer año son sólo del 6%; no hay pérdida ni ganancia de capital. Entonces, sus tasas de rendimiento total en el primer año son exactamente iguales a las del instrumento a un año, aunque los rendimientos al vencimiento son diferentes, al inversionista no le importa cuál comprar.

Este ejemplo ilustra las implicaciones significantes severas de las hipótesis de las expectativas puras; primero, en cada periodo, se espera que las tasas totales de rendimiento (cupón más ganancia o pérdida de capital) sean las mismas en todos los instrumentos, independiente del plazo de vencimiento. Segundo, las expectativas de consenso de los rendimientos futuros o tasas pueden ser inferidas de la estructura de plazos presente; por ejemplo, observando un rendimiento al vencimiento del 6% en un instrumento a un año y un rendimiento al vencimiento del 14% en un instrumento a dos años, sabemos que el pronóstico concertado de la tasas *forward* a un año debe ser del 8%. Tercero, los rendimientos en instrumentos a largo plazo son iguales al promedio de los rendimientos de inversiones a corto plazo más rendimientos futuros esperados o rendimientos en instrumentos a corto plazo; por ahora el precio del 7% de una inversión a 2 años es aproximadamente igual al promedio del rendimiento actual del 6% en una inversión a un año y al rendimiento futuro esperado del 8%.

Se cree que esta última estimación para la tendencia observable de rendimientos a corto plazo fluctuará más que los rendimientos a largo plazo.

HIPÓTESIS DEL PREMIO DE LIQUIDEZ O RIESGO EN LAS TASAS DE INTERÉS.

En la hipótesis de expectativas se asume que los inversionistas actuarán con base en los rendimientos esperados de los bonos o instrumentos de diferentes plazos; sin tomar en cuenta alguna noticia de la posibilidad de que los rendimientos actuales (y tasas de interés futuras) puedan desviarse de sus expectativas. Las hipótesis del premio de liquidez o riesgo en la tasa de interés consideran esta posibilidad.

Regresemos a nuestro ejemplo anterior con un bono a un año y otro a dos años; cada uno de los cuáles paga un cupón del 6% en un medio ambiente y del 6% de tasa de interés. Ahora supongamos que todas las tasas de interés instantáneamente suben a un 7%: ¿qué sucede con los rendimientos de estos instrumentos?

Como hemos visto, el precio del instrumento a dos años caerá hasta 98 unidades. En este precio ofrece una ganancia diferencial de capital de 2 unidades en dos años o 1 por año, y un cupón de 6 % cada año. Si la tasa de interés alcanza al 7%, entonces el precio al final del primer año es 99; el rendimiento en el primer año es (6+1/98) ≈7% y en el segundo año de (6+1/99) ≈ 7%.

¿Qué pasa con el instrumento a un año? nosotros esperaríamos que su precio cayera inmediatamente hasta 99. En este precio parece que el instrumento a dos años, después de un año que hubiese transcurrido, ha ofrecido un rendimiento de capital de 1, que al ser sumado al cupón de 6% representa un rendimiento total del 7% en la inversión inicial de 99.

La disminución de los precios en respuesta al incremento en un punto de los rendimientos son del 1 y 2% de los precios iniciales de los instrumentos a uno y dos años, respectivamente. Para instrumentos de más largo plazo, la disminución del precio sería aún mayor. En realidad el decremento en el precio no es proporcional con el cambio del vencimiento; por consiguiente, tenemos la siguiente moraleja: "entre más caigan los precios, la inversión inicial es menor y entonces menor el precio adicional requerido para que un monto dado alcance el rendimiento deseado".

HIPÓTESIS DE LA PREFERENCIA DE HÁBITATS.

La hipótesis del premio de liquidez considera solamente el riesgo del precio, aunque el precio de reinversión puede ser también importante. Por ejemplo, un bono a un año puede ofrecer menor riesgo de precio que un bono a dos años a un inversionista con un horizonte de inversión a dos años, pero éste también expone al inversionista a una tasa de reinversión incierta para el segundo año. La consideración del horizonte de inversión de los inversionistas (y compradores) y sus efectos en sus preferencias de plazos da lugar a la hipótesis de la preferencia de hábitats.

De acuerdo con esta teoria, los inversionistas tienen preferencias de vencimientos que no son necesariamente para los instrumentos de corto plazo. Estas preferencias pueden afectar el esquema de plazos de rendimientos; los fondos de pensión, por ejemplo, tienen pasivos a largo plazo y aparentan preferir inversiones de largo plazo, porque del riesgo reducido ha forzado a reinvertir una gran proporción de sus portafolios cuando las tasas son bajas. Ellos podrían preferir alejarse de su rango de plazos, solamente por un precio más atractivo. Con una preponderancia de estos inversionistas y acciones de no cobertura por parte de emisores de bonos, el riesgo de premio podría decrecer con el plazo. El punto principal de la hipótesis de preferencia de hábitats es que las preferencias de los participantes del mercado pueden ser sustanciales pero no realmente impactar predeciblemente la estructura de plazos de las tasas de interés.

HIPÓTESIS DE CURVA DE RENDIMIENTO ECLÉCTICA.

La segmentación de mercados, expectativas puras, riesgo de premio de tasas de interés y la hipótesis de preferencia de hábitats no son caminos mutamente excluyentes de la manera de pensar sobre las tasas de interés. Es probablemente fácil de decir que la mayoría de los que observan los mercados de crédito y dinero creen que por lo menos dos y posiblemente las cuatro de estas influencias se presentan en la estructura de tasas cada momento. Por ejemplo, uno podría ser de la opinión de que los rendimientos relativos son usualmente determinados por suplir condiciones de demanda del mercado en el corto y largo plazo, con alguna tendencia hacia tasas bajas en el corto plazo; sin embargo, creer que en algún momento en particular las expectativas de un crecimiento de las tasas bajas influencia la estructura de tasas.

APROXIMACIÓN DE NO ARBITRAJE DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

En la última década, una nueva corriente de relaciones con la estructura de plazos ha evolucionado; nosotros nos referiremos a ésta como modelos de *procesos estocásticos de equilibrio o no-arbitraje* para la estructura de tasas. Esta aproximación tiene tres características notables o supuestos fundamentales. Primero: la estructura de tasas y el precio de bonos están relacionados a ciertos factores estocásticos.("estocástico" básicamente significa aleatorio o incierto). Segundo: estos factores fundamentales se asume que evolucionan en el tiempo de acuerdo a procesos estocásticos hipotéticos. Tercero: las tasas de interés y los precios de bonos resultantes deben satisfacer condiciones de "no-arbitraje" o "dinero no fácil". El concepto de una estructura de plazos en equilibrio bajo incertidumbre fue presentado en 1973 por Robert Merton, y desde entonces, una gran cantidad de investigaciones han hecho significativas contribuciones a la aproximación.

Muchos aspectos de la aproximación de equilibrio de procesos estocásticos son valiosos de comentar antes de examinar una ilustración. Posiblemente la más significativa es que esta aproximación está arraigada en el modelo de incertidumbre; éste explícitamente reconoce que las tasas de mercado son predecibles sólo hasta un punto y entonces las tasas de interés observadas (o precios de bonos) pueden contener un elemento de sorpresa. Con las teorías tradicionales, esta incertidumbre es implícita, como el énfasis tiende a ser en los valores esperados (en un sentido estadístico).

La aproximación de equilibrio de procesos estocásticos es descrito aquí más como una *aproximación o modelo* que como una hipótesis porque la hipótesis envuelve el proceso estocástico o procesos asumidos para llegar a la estructura de tasas. Es a este nivel que la individualidad y oportunidad para mejorar de ciertos modelos es mayor.

La aproximación de equilibrio de procesos estocásticos no es consistente con las aproximaciones más tradicionales de la estructura de plazos. La idea fundamental de un proceso estocástico generando los precios de instrumentos de rendimiento fijo tiene un paralelo en el proceso para generar precios de acciones que fundamenta muchos modelos de precios de opciones, tales como el modelo de Black-Scholes. Más aún, la valuación de opciones de instrumentos de ingreso fijo, provisiones de llamada, características de prepago y otros reclamos contingentes requieren algún supuesto acerca del proceso de generación de estructuras de plazo. Muchas de las investigaciones en el área de estructuras de plazos han sido estimuladas por el deseo de valuar estos reclamos contingentes.

En un esfuerzo para analizar la curva de rendimientos, notas recientemente emitidas por diversas instituciones financieras, usan un modelo en el cuál sólo un factor estocástico manipula los precios de los bonos y la estructura de plazos, la tasa de interés libre de riesgo, instantánea. El proceso aquí usado para representar la evolución de esta tasa es uno muy popular:

$$dr = \beta(\mu - r)dt + \sigma r dz$$

donde dr representa el cambio instantáneo en esta tasa, β un componente de velocidad de ajuste, $(\mu\text{-}r)$ representa la cantidad por la cual la tasa de interés actual excede $(r > \mu)$ o es menor $(r < \mu)$ de algún nivel promedio μ establecido, dt es igual a un instante de tiempo, dz es un proceso estocástico y σ la desviación estándar del proceso.

Interpretando la ecuación observamos que el cambio en la tasa de interés tiene dos componentes, uno predecible y uno impredecible. El componente predecible es igual al grado en que difieren las tasas actuales de sus valores a largo plazo, multiplicados por un coeficiente que mide sus tasas de ajuste hacia los valores de largo plazo. Este componente incorpora una observación muy común, se ha visto que la tasa de interés tiende hacia alguna tasa normal y más tendiente a caer cuando este nivel normal $(\mu\text{-}r)$ es negativo y a subir cuando $(\mu\text{-}r)$ es positivo.

La forma de este componente también implica que el tamaño del movimiento en la tasa de interés sea mayor cuando la tasa está más alejada de su nivel normal, así como el componente predecible es una *proporción* constante de la diferencia de las dos.

El componente impredecible es igual al producto de la desviación estándar de la tasa por el nivel inicial de la tasa más algún proceso estocástico (pensemos en un proceso estocástico comparándolo a una ruleta; conocemos mucho acerca de cómo opera, pero no del siguiente valor que generará.). Entonces el componente impredecible corresponde con la noción del sentido común de que la tasa de interés es mas volátil en términos absolutos, cuando éste es mayor que cuando es pequeño. A causa de este componente, siempre que la tendencia de la tasa se mueve hacia μ al componente predecible, la tasa actual puede moverse al igual más allá de μ.

Cuando Ogden estimó este modelo del periodo de 1977 hasta julio de 1985, usando datos mensuales de Tresury Bills de 90 días, los valores anualizados fueron 0.6384 para β, .1053 para μ y 0.2881 para σ. La implicación es que las tasas observadas podría esperarse se movieran 64 por ciento hacia 0.1053 en el curso de un año y tener una desviación estándar de 303 puntos base por año cuando $r = \mu$ (ó 0.2881*0.1053*100).

También es posible modelar la estructura de plazos haciéndola dependiente de dos factores estocásticos. El segundo factor en adición a la tasa de corto plazo, es la tasa de un bono de largo plazo. Michel Brennan y Eduardo Schwartz desarrollaron este modelo, el cual es ampliamente utilizado en la valuación de reclamos contingentes de ingreso fijo.

Los dos modelos: el modelo del factor único como el usado por Ogden y el modelo de dos factores, son consistentes con la teoría de las expectativas puras. Estos modelos pueden ser usados para el pronóstico de tasas futuras que pueden ser construidas dentro de la estructura de plazos. Ellos pueden generar estructuras de plazos en donde la tasa crezca o decrezca con el vencimiento de los instrumentos. Algunas aproximaciones de procesos estocásticos de no arbitraje también incorporan un factor por el riesgo de premio que resulta de los inversionistas con aversión al riesgo y de la tendencia resultante de la mayor volatilidad de los instrumentos a largo plazo con respecto a los de corto plazo. Con este factor del premio de riesgo, la aproximación de procesos estocásticos de no arbitraje es consistente con la hipótesis de las expectativas puras.

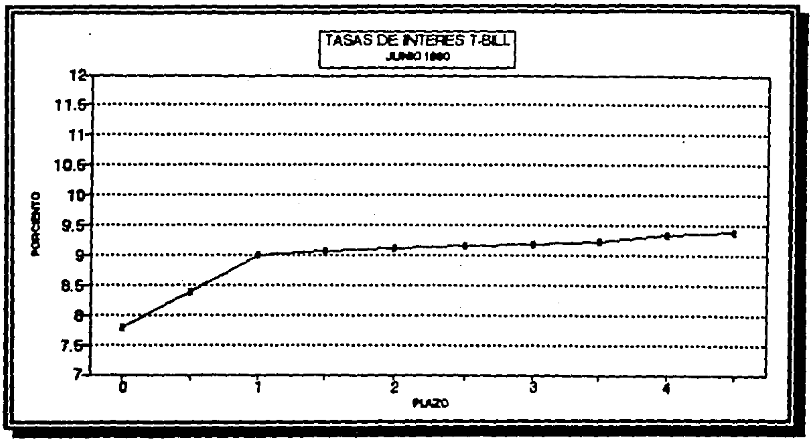
Curvas de Rendimiento Clásicas y sus Explicaciones.

En las siguientes figuras se muestran cuatro diferentes curvas que pueden ser descritas como clásicas, en el sentido de que son prototipos de las formas dentro de las cuales todas las curvas de rendimiento pueden caer. Es importante observar el nivel al cual estas curvas son graficadas, como también su pendiente, ya que el nivel de tasas juega un importante papel en las hipótesis usuales que tratan de explicar las pendientes.

Presentamos, además de la fecha en que se presentó esta estructura, las explicaciones que dan algunas de las hipótesis anteriores para el comportamiento de la curva. La curva está basada en los datos del Tresury bill.

Las cuatro formas son:

1. ***NORMAL.*** Las tasas de interés son de niveles moderados. Los rendimientos suben continuamente con un incremento del plazo pero con una suave y continua inclinación decreciente:



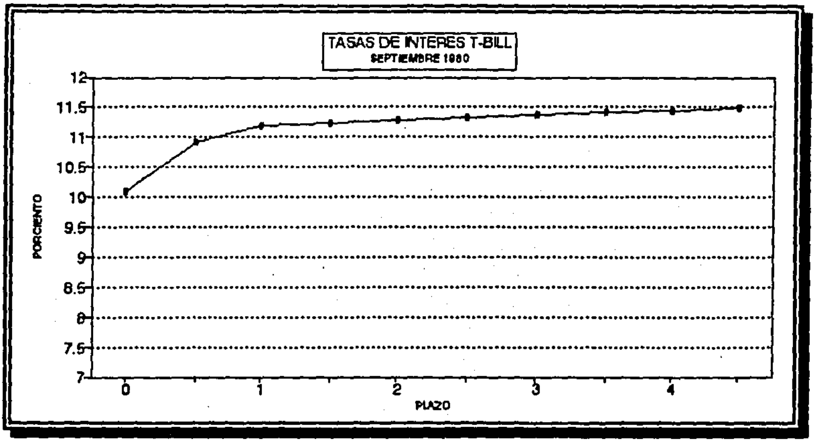
Segmentación de mercados: Los bancos tienen exceso de fondos inestables a diferencia de los fondos de las compañías de seguros.

Expectativas puras: Se espera que los rendimientos suban moderadamente.

Premio de liquidez: El premio de liquidez se incrementa con el plazo y a una tasa decreciente.

Preferencia de hábitats. Se espera que los remanentes de los rendimientos permanezcan sin cambio; el premio de liquidez se incrementa, con respecto al vencimiento a una tasa decreciente.

2. *CRECIENTE.* Las tasas de interés son bajas de historia o de otros estándar. Los rendimientos crecen substancialmente con un incremento del plazo, pero probablemente con alguna reducción de la tasa de incremento para vencimientos largos.



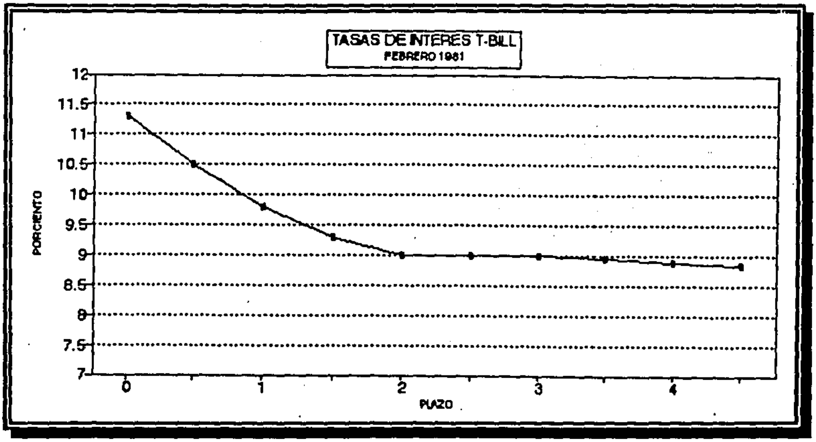
Segmentación de mercados: Los bancos, a diferencia de las compañías de seguros, tienen fondos de inversión con substanciales excesos.

Expectativas puras: Se espera que los rendimientos se incremente substancialmente

Premio de liquidez: El premio de liquidez se incrementa en función del vencimiento

Preferencia de hábitats: Se espera que los rendimientos se incrementen substancialmente; el premio de liquidez se incrementa en función del vencimiento a una tasa decreciente.

3. ***DECRECIENTE*.** Los rendimientos son extremadamente altos de estándar históricos y declinan sobre el rango de plazos entero de la curva de rendimientos.



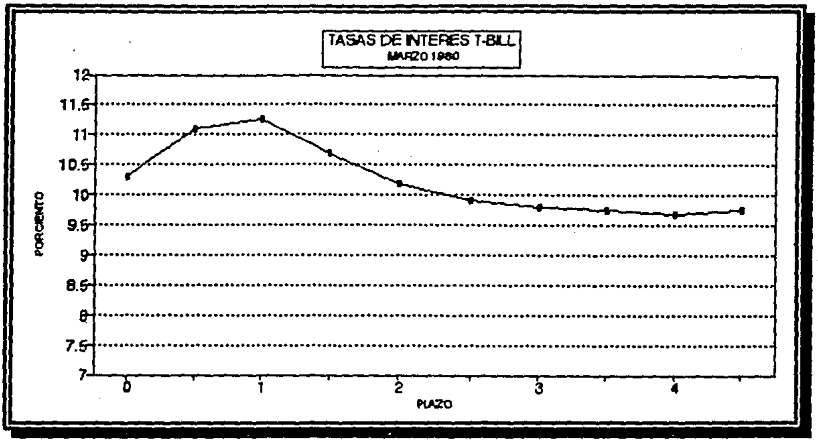
Segmentación de mercados: Los bancos están en un déficit extremo de sus fondos invertibles en comparación a las compañías de seguros.

Expectativas puras: Se espera que los rendimientos se decrementen substancialmente.

Premio de liquidez: No da explicación.

Preferencia de hábitats: Se espera que los rendimientos decrezcan substancialmente; el premio de liquidez se incrementa en función del vencimiento a una tasa decreciente.

4. ***ENCORVADA.*** Las tasas de interés son altas de estándares históricos. La curva de rendimientos primero crece conforme crece el plazo, pero entonces llega al punto máximo y decrece a mayor plazo.



Segmentación de mercados: Los bancos y las compañías de seguros poseen posiciones equivalentes en sus fondos invertibles; existe aversión entre sus preferencias de vencimientos.

Expectativas puras: Se espera que los rendimientos primero se incrementen para decrementar después.

Premio de liquidez: No da explicación.

Preferencia de hábitats: Se espera que los rendimientos bajen; el premio de liquidez se incrementa con respecto al vencimiento a una tasa decreciente.

CAPITULO V

METODO DE SOLUCION.

Comparación de Métodos y Método de Solución Propuesto.

En este momento entraremos de lleno a la discusión de la solución propuesta para el problema planteado, para la interpolación de la tasa del pagaré en intervalos dentro de la tabla de observaciones; presentaremos argumentos que nos lleven a optar por la interpolación con funciones spline cúbicas, que por sus características son usadas en muchos problemas para encontrar aproximaciones o funciones como la que nosotros requerimos.

Comparación de Métodos de Interpolación de datos

¿Cómo interpolar la tasa para encontrar un valor aproximado para la tasa de interés del pagaré bancario enmarcado en el tipo de solución buscado?.

Usualmente y a través de la experiencia se ha demostrado que en una gran cantidad de fenómenos de contenido humano, como la mortalidad, las enfermedades, las inhabilitaciones, los retiros, tasas de mortalidad, etc., el mejor resultado se obtiene al interpolar los datos con un polinomio que tome datos de la observación y los utilice para encontrar la función que describe el movimiento. Así pues, tratemos de utilizar un polinomio para interpolar los datos.

En general cuando se desea interpolar datos intermedios de una tabla de valores se tiene una tabla de datos a los cuales se les tiene asociados valores.

datos	valores asociados
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
.	.
.	.
x_n	y_n

debiendo encontrar el valor y' asociado al dato x' donde;

$$x_k < x' < x_{k+1}, \qquad k = 1,\ldots,n-1$$

La primer solución entonces, estaria dada por la curva que pase por cada una de las observaciones, esto es, un polinomio de grado menor o igual al número de datos de cada observación. Este polinomio es único (existen una infinidad de polinomios que pueden tomar cada uno de los datos, pero sólo uno de grado menor o igual a n). El inconveniente de utilizar este método de solución es que para nuestro problema n es igual a 356, con lo que obtendriamos un polinomio de 360 grados. Pueden imaginarse fácilmente los problemas de un polinomio de este tamaño, como la gran cantidad de cálculos para obtener los coeficientes del polinomio, esto a pesar de la base que se utilice para calcular el polinomio.

El tomar todos los datos de cada observación de manera conjunta para obtener una sola función es absurdo si consideramos que sólo es necesario interpolar datos en algunos intervalos dentro de cada observación, considerando esto podemos utilizar polinomios de un grado menor en cada intervalo en el que sea necesario interpolar algunos datos, es decir, debemos elegir un polinomio de grado adecuado para interpolarlo por los puntos tomados en consideración y encontrar los valores deseados.

De cualquier manera debemos considerar primero, la magnitud de los intervalos en donde se van a interpolar los datos.

$$[x_k, x_{k+1}]$$

y segundo, la rapidez de variación de la función asociada a las parejas de valores: (x_i , y_i). Pues si los intervalos de interpolación son demasiado grandes o la rapidez de variación de nuestra función es muy grande, la interpolación encontrada para cada intervalo puede contener errores grandes.

Antes de interpolar los datos debemos considerar los siguientes puntos:

1. Observar globalmente la información proporcionada por los valores de la tabla de datos.

2. La rapidez de variación de la función asociada a las parejas de valores.

3. La magnitud de los intervalos de interpolación y consideración de los datos con los cuales se interpolará.

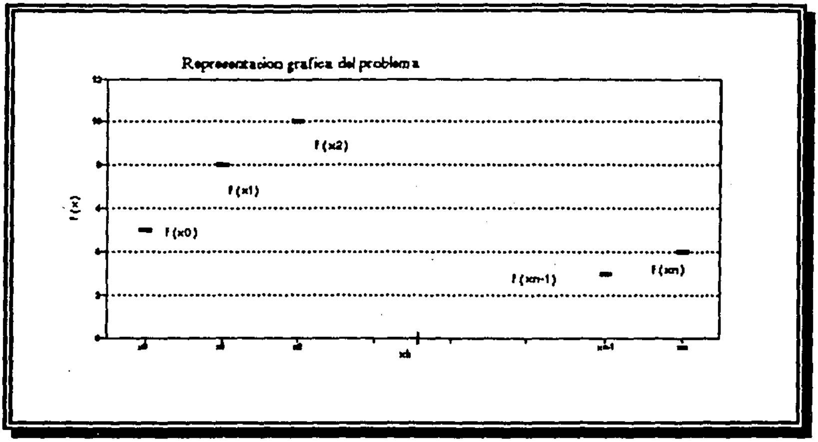
4. Selección del grado del polinomio de interpolación.

Nuestro problema en estudio, puede verse entonces, como un caso particular del siguiente:

Dada una tabla de datos

$$(X_i, Y_i) \quad \text{para los valores de } i = 0,1,..,n$$

donde $Y_i = f(x_i)$, f es una función desconocida, $a = x_0 < x_1 <..<. x_n = b$, determinar el valor de $f(x_k)$, para $k = 1,..,n$ $x_k \in [a, b]$.



Esto es conocido como el problema de interpolación, y su solución consiste en construir una función g de la cual se pide que:

$$g(x_i) = y_i, \quad \text{para los valores de } i = 0, 1,..,n$$

tratando con esto, que la "distancia" $d(f(x), g(x))$, $x \in [a, b]$ sea pequeña, en algún sentido.

Un método usual de solución es proponer a g como un elemento del espacio de los polinomios, por dos razones fundamentales. Primero existe un resultado clásico del análisis matemático que asegura que via polinomios es posible aproximarnos tanto como queramos a la función f y segundo, los polinomios son funciones fácilmente manipulables desde el punto de vista del cálculo numérico.

Entonces, ¿ Que polinomio debemos tomar, y cómo debemos construirlo?

Nuevamente la teoría nos dice que dados los n puntos de una tabla de datos, existe un único polinomio, digamos P (x), de grado ≤ n, con la siguiente propiedad:

$$P(x_i) = Y_i, \quad \text{para los valores de } i = 0,1,2,..,n.$$

Con base en este resultado, el problema se reduce entonces a la construcción de P(x), conocido como el polinomio de interpolación para nuestra tabla de datos. Al respecto, existen diversas alternativas para llegar a determinar P(x), dependiendo de la base que se elija para el subespacio de los polinomios de grado menor o igual a n; algunas de ellas son:

1.- Utilizando la base canónica $\beta_1 = \{1, x, x^2,.., x^n\}$ obtendremos el subespacio de polinomios de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n$$

Y donde los coeficientes $a_0, a_1,...,a_n$ pueden obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$A * C = Y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & . & x_1^n \\ . & . & . & x_2^n \\ 1 & x_n & . & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Este sistema resulta de satisfacer las condiciones de interpolación:

$$P(x_i) = y_i \qquad \text{para los valores de } i = 0,1,2,..,n$$

aunque es dificil de resolver debido al hecho de que la matriz A, resulta ser generalmente muy sensible al redondeo; (esto significa que a pesar de que se usara un "buen método" numéricamente estable, para resolver el sistema), no debemos esperar resultados de buena calidad. Ademas el vector de observaciones Y; donde cada componente del vector es formado por una solución exacta y un error de observación o variaciones, (debidas a factores contingentes), que pueden ser amplificadas si el sistema de ecuaciones lineales es mal condicionado; podría generar soluciones todavia mas inexactas.

2.-Utilizando la base de Lagrange $\beta_l = \left\{ l_i(x) = \left(\frac{\prod_{j\neq i, j=0}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i, j=0}^{n}(x_i - x_j)} \right) \quad i = 0,1,..,n \right\}$

La solución esta dada por el subespacio de polinomios de la forma:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i l_i(x) \quad \text{con} \quad C_i = p(x_i) \ \text{ tomando } P(x_i) = y_i.$$

3.- Usando la base de Newton $\beta_n = \left\{ 1, (x - x_0), (x - x_1)(x - x_1), \dots, \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j) \right\}$ se obtiene el subespacio de polinomios de la forma:

$$p(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_n(x - x_0)(x - x_1)..(x - x_{n-1}).$$

Una vez teniendo la expresión para P (x), el problema de estimación diaria en un principio estaría resuelto; sin embargo, resulta que en general puede haber problemas con la estimaciones obtenidas de esta manera. Para mostrarlo, considérese la expresión:

$$E(x) = f(x) - P(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

donde f (x) es nuestra función desconocida inicial, P (x) es el polinomio de interpolación y $M_{n+1} = max\left|f^{(n+1)}(t)\right| \quad con \ t \in [x_0, x_n]$.

Es claro que mientras mas grandes sean las diferencias (x-x_i), los errores permisibles entre P (x) y f (x) pueden ser bastante grandes; de tal forma, que los resultados numéricos pueden no tener sentido en el contexto del problema.

Con el fin de evitar este posible problema, una alternativa que tiene bastante aceptación cuando se tiene un intervalo de interpolación grande y se requiere una representación global del fenómeno descrito parcialmente por los datos de la tabla, se recurre a una interpolación sustentada en una condición adicional: suponiendo que la función no tiene oscilaciones arbitrarias y que tampoco son grandes en el intervalo que se esta trabajando, se trata de obtener una función interpolante cuya gráfica sea una curva en cierto sentido lo mas suave posible. Se puede mostrar que una curva con esta propiedad corresponde a un tipo de función llamada spline (que simbolizaremos como S (x)).

Método de solución propuesto.

Interpolación cubica por tramos.

El splien cubico de interpolación natural S (x), esta definido por las siguientes propiedades:

i) S (x) es continua en su primera y segunda derivadas en [a, b]

ii) $S(x_i) = y_i$ para los valores de $i = 0,..,n$.

iii) S (x) es un polinomio cubico en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, 1,..,n-1$.

iv) $S''(x_0) = 0$, y $S''(x_n) = 0$

Notemos que en contraste a la interpolación polinomial, que incrementa el grado de interpolación a más puntos aquí, el grado es fijo y se utilizan más polinomios. Cuesta trabajo calcular un spline y es más problemático utilizarlo, ya que este esta formado por una colección de polinomios, pero los splines son una solución muy satisfactoria para suavizar interpolaciones.

Lo primero que demostraremos es que las propiedades mencionadas definen una función S (x) única. Podemos hacer esto mostrando como construirla, y de manera que haga un buen algoritmo de construcción. Por notación, sea:

$$h_i = x_{i+1} - x_i,$$

$$S_i(x) \equiv S(x) \text{ con } x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$s_i = S''(x_i).$$

Por supuesto aun no sabemos que son las s_i.

Así como sucesivamente requerimos que S (x) satisfaga las propiedades antes mencionadas (i, iv), encontramos ecuaciones para s_i. Más adelante mostraremos como resolver estas ecuaciones, que no únicamente prueban que S (x) existe, sino que muestran como calcularla.

Ya que $S_i(x)$ es un polinomio cubico, $S_i''(x)$ es un polinomio lineal y puede ser expresado de la forma:

$$S''_i(x) = s_i \frac{x_{i+1} - x}{hi} + s_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, \qquad i = 0, 1, .., n-1$$

$$s_{i+1} + 2s_i\left(\frac{h_i + h_{i-1}}{h_i}\right) + \frac{h_{i-1}}{h_i} s_{i-1} = \frac{6}{h_i}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 1, 2, .., n-1 \quad (5)$$

$$S''_i(x) = s_i \frac{x_{i+1} - x}{hi} + s_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, \qquad i = 0, 1, .., n-1 \qquad (1)$$

Vemos claramente que una función S"(x) definida en los subintervalos es una función continua en x en [a, b]. Para obtener expresiones $S_i(x)$, integramos dos veces la ecuación anterior y obtenemos:

$$S_i(x) = \frac{s_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{s_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + c_1(x - x_i) + c_2(x_{i+1} - x) ......(2)$$

Las constantes de integración c_1 y c_2 pueden ser determinadas de la condición de interpolación $S_i(x_i) = y_i$, $S_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$. Entonces,

$$S_i(x) = f_i = \frac{s_i}{6} h_i^2 + c_2 h_i.$$

$$S_i(x_{i+1}) = f_{i+1} = \frac{s_{i+1}}{6} h_i^2 + c_1 h_i$$

dan lugar a las ecuaciones:

$$c_1 = \frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{s_{i+1}h_i}{6}, \qquad c_2 = \frac{f_i}{h_i} - \frac{s_i h_i}{6}$$

Al substituir estas en la ecuación (2) tenemos:

$$S_i(x) = \frac{s_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{s_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{s_{i+1}h_i}{6}\right)(x - x_i) +$$
$$\left(\frac{f_i}{h_i} - \frac{s_i h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x), \qquad i = 0,1,2,..,n-1. \qquad (3)$$

La condición de interpolación hará a la función S(x) continua en [a, b]. Diferenciándola , obtenemos

$$S_i'(x) = -\frac{s}{6h}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{s_i}{2h_i}(x - x_i)^2 + \frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{f_i}{6}(s_{i+1} - s_i) \qquad (4)$$

Para obtener una función S' (x) continua necesitamos que

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \qquad i\ 0, 1, 2,.., n-1.$$

Usando la ecuación (4) tenemos que

$$s_{i+1} + 2s_i\left(\frac{h_i + h_{i-1}}{h_i}\right) + \frac{h_{i-1}}{h_i}s_{i-1} = \frac{6}{h_i}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 1,2,..,n-1 \quad (5)$$

El conjunto de ecuaciones (5) es un sistema de n-1 ecuaciones lineales en los $s_0, s_1,.., s_n$ intervalos conocidos. Si podemos encontrar una solución, entonces habremos producido una función S (x) con las propiedades (i,ii,iii). Dos condiciones adicionales son necesarias para especificar una solución única . El requisito (iv), es decir, $s_0 = 0$, y $s_n = 0$, da lugar a lo que es llamado el spline cubico natural.

Una vez descrito el spline cubico de interpolación se alisan los datos vía spline. El fundamento teórico es sumamente complicado y esta totalmente expuesto en otro trabajo[5]

Así pues, la solución propuesta para la interpolación de la tasa del pagare bancario es la obtenida de aplicar la interpolación por alisamiento vía spline cubico a los datos observados.

[5] Todo el desarrollo teorico esta expuesto en: ALISAMIENTO DE DATOS. Teoria y metodos numericos. Avances de investigacion Num. 16 Irene Sanchez Guevara Universisdad Autonoma Metropolitana. Mexico 1991.

CAPITULO VI.

DESCRIPCION DEL SOFWARE UTILIZADO

El paquete utilizado para la interpolación de la tasas del pagare bancario fue desarrollado por.la Maestra Irene Sanchez Guevara como un proyecto de investigación en la Universidad Autónoma Metropolitana, y la Univesisdad Nacional Autónoma de México. Aquí presentamos una simple descripción del algoritmo utilizado en este paquete.

RESUMEN DEL ALGORITMO.

Como vimos en la construcción del spline cubico, este tiene la forma:

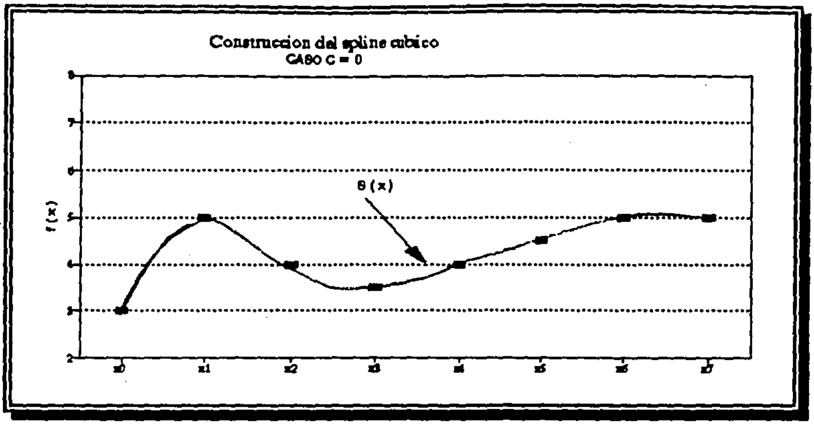
$$S_i(x) = \frac{s_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{s_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left(\frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{s_{i+1}h_i}{6}\right)(x-x_i) + \left(\frac{f_i}{h_i} - \frac{s_i h_i}{6}\right)(x_{i+1}-x), \qquad \mathrm{i} = 0,1,2,..,\mathrm{n}-1. \qquad (3)$$

Se puede demostrar que S_i (x) es solución del siguiente problema :

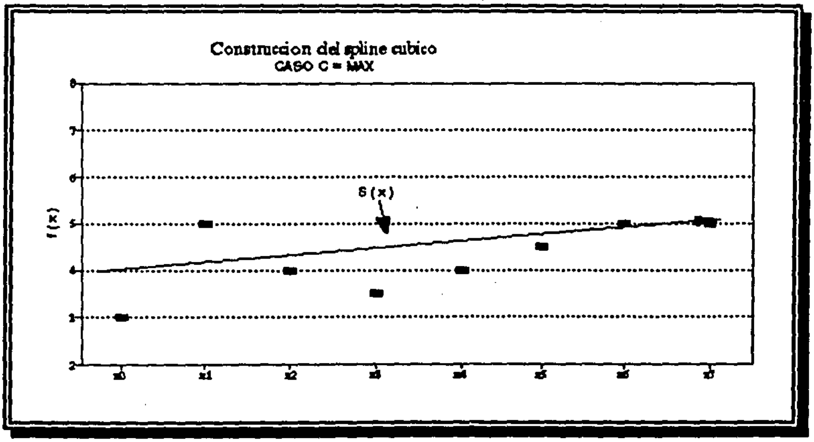
$$Min\, f \int_{xi}^{xn} \left(f''(z)^2\right) \partial z$$

sujeto a la siguiente restricción $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i)-y_i}{w_i}\right)^2 \leq c$

Si, por ejemplo, c = 0, se tendrá que la solución será la función de menor curvatura, es decir la mas lisa, que satisface $f(x_i) = y_i$; esto es, el spline cubico de interpolación que discutimos en el método de solución propuesto.



Por otra parte, si c toma un valor distinto de 0 en cierto rango, se tendrán splines de alisamiento que no necesariamente pasaran por los puntos de la tabla, existiendo un valor para c, con el cual se obtiene el máximo alisamiento; este valor corresponde a la recta de mínimos cuadrados.



Una descripción del algoritmo usado para los cálculos numéricos, es la siguiente:

1) Lectura de los datos (x_i, y_i, w_i, n).

Donde (x_i,y_i) son las parejas de datos a interpolar, w_i son los pesos asignados por el usuario y n es el numero de datos.

2) Proceso numérico.

2.1 Se calcula Cmax, y se pide un valor de c, tal que, $0 \leq c \leq$ Cmax

2.2 El problema de minimización, planteado como un problema variacional, da lugar a un sistema de ecuaciones del tipo $(S'DS+\gamma T)c=\gamma S'y$ que resolviéndolo da los coeficientes C_i, del termino de segundo grado del spline.

2.3 Los restantes coeficientes del spline se calculan, en términos de c y de los datos iniciales.

3) Resultados (S_i (x), i = 1,...,n-1)

Se obtienen los resultados de la interpolación, con el grado de alisamiento seleccionado y con los pesos seleccionados.

CAPITULO VII

RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados que aquí presentamos son el producto de muchos ensayos y pruebas que terminan en el siguiente método de solución. Cada vez que se probaba con un diferente conjunto de datos se busco una solución al problema, considerando el marco de referencia, las características de los datos, y tratando, por supuesto, de obtener las soluciones deseadas. El método es el siguiente.

El primer método que se uso, fue interpolar los datos con el splien cubico sin ponderar ningún dato de la observación y sin alisar los datos. Los resultados no fueron favorables, ya que la volatilidad de los datos en algunos intervalos es muy grande; los intervalos de interpolación tampoco son estables lo que implico mucho trabajo, y para la solución requerida, algunos datos son mas importantes que otros lo que no se consideraba en este método. El primer paso importante que se observo de esta interpolación, fue que los datos siempre debían ser "limpiados" antes de interpolarlos, ya que por pequeña que fuera la ponderación para algunos datos, o grande que fuera el alisamiento la interpolación no resultaba como la esperada; así los datos siempre fueron limpiados, eliminando las observaciones que salieran 1.5 veces la desviación estandar ponderada de los datos, prefiriendo interpolar estos datos.

El segundo método fue entonces ponderar los datos. Los resultados obtenidos con este método empezaban a dar una solución como la esperada, algunos datos eran alisados considerando solo los que eran mas pesados o los que reflejaban mejor las tasas del mercado para ciertos plazos. La forma de asignar los diferentes pesos fue diversa. En un principio se quiso ponderar los datos solamente con el monto en pesos que se habia colocado en cada plazo, el problema es que las el monto de la colocación disminuye con el plazo (ya que los pagares a menor plazo tienen que renovarse muchas mas veces) por lo que las tasas a 182 días y 365 días o mas, eran despreciadas. Se intento evadir el problema ponderando de alguna forma estas observaciones, pero se presento el siguiente problema. Ya que el intervalo de interpolación para los plazos de 60 a 365 dias aumenta considerablemente con respecto a los intervalos de 1 a 60 dias, la función de interpolación describe una curva que no refleja el tipo de solución requerida con lo que el valor del alisamiento requerido tendria que aumentar.

Fue entonces cuando se decidió separar el problema de interpolación en dos intervalos, el primero, el intervalo en el cual los datos eran mas densos (intervalos de interpolación mas pequeños), las ponderaciones de los datos pueden darse con el monto total de las colocaciones y el valor del alisamiento esta dato como el punto medio del intervalo [0, Cmax][6]. El segundo el intervalo de datos donde estos son pocos (plazos de 60 días o mas), las ponderaciones también están dadas con el plazo pero la escala se reduce y el valor del alisamiento, aunque se obtiene de la misma forma, es diferente. Los resultados que se obtuvieron para las primeras interpolaciones, fueron muy halagadoras. El alisamiento considera muy bien las observaciones que reflejan mejor la tasa del mercado, la curva describe una estructura de plazos afectada por las diferentes necesidades de liquidez, y elimina observaciones erróneas del mercado.

Los resultados de los intervalos de interpolación mas grandes no fueron tan buenos como los primeros, aunque no son malos. La ponderación de estos datos aunque relacionada a el monto que se coloco, en algunos casos resulta ser "dispareja" para algunas observaciones. Otro problema es que aunque se hayan limpiado los datos, se ponderen y se alisen la curva descrita por la interpolación no es del tipo esperado como solución, es decir no se comporta como una tasa de interés.

En resumen el método de interpolación propuesto es el siguiente:

- Separar los datos de las observaciones en dos, plazos de 1 a 60 días y de 60 días en adelante.

---

[6]Este valor se escogio asi, ya que el alisamiento que se quiere es el minimo, sujeto a que el error de los errores de g(x) a f(x) sean los minimos.

- Limpiar los datos eliminando todos aquellos que se salgan de 1.5 veces la desviación estandar de cada intervalo de interpolación.

- Ponderar los datos de acuerdo a los montos colocados para cada plazo y de acuerdo a la siguiente tabla:

COLC./MONTO	PESO
> .1	1
>.01	2
>.001	3
>.0001	4
>.00001	5

- Alisar cada uno de los intervalos de interpolación, dando como valor de interpolación el punto medio del [0, Cmax].

Presentamos tres observaciones de los datos, con sus resultados, los resultados intermedios obtenidos de las diversas pruebas son ociosos e innecesarios.

DATOS Y RESULTADOS. OBSERVACIÓN 1.

PLAZO[7]	TASA[8]	MONTO[9]	PESO[10]	INT[11]	PLAZO	TASA	MONTO	PESO	INT
1	19.88	7929489	1	19.85	47				20.03
2				19.71	48				20.01
3	19.43	16692	3	19.59	49				19.98
4				19.49	50				19.95
5				19.42	60				19.1
6				19.39	63	18.91	6067	4	18.92
7	19.17	378657	2	19.39	70				19.18
8				19.43	80				19.26
9				19.48	89	19.46	17888	1	16.31
10	20.38	13001	3	19.52	90				19.31
11				19.51	91	19.36	22929	1	19.32
12				19.47	100				19.33
13	19.33	7400	4	19.45	110				19.36
14	18.72	25426	3	19.45	120				19.39
15	18.98	556	5	19.49	130				19.40
16	18.99	117	5	19.56	140				19.39
17	20.15	121281	2	19.61	150				19.38
18	19.26	226	5	19.61	160				19.36
19				19.57	170				19.34
20				19.52	179	19.44	427	3	19.31
21	18.82	7586	4	19.45	180				19.30
22	19.71	165	5	19.41	182	19.02	186	3	19.29
23	19.54	429	5	19.38	190				19.28
24				19.36	200				19.27
25				19.39	210				19.26
26				19.45	220				19.26
27				19.54	230				19.26
28	19.47	1608801	1	19.67	240				19.27
29	19.78	278787	2	19.81	250				19.28
30	18.65	260269		19.92	260				19.29
31	20.49	33297	3	19.99	270				19.31
32	19.90	2090	4	20.03	280				19.33
33				20.05	290				19.36
34				20.05	300				19.38
35	19.65	69	5	20.05	310				19.41
36				20.05	320				19.44
37				20.05	330				19.47
38				20.05	340				19.51
39				20.05	350				19.54
40				20.05	360				19.57
41				20.05	365	19.61			19.59
42				20.04					
43				20.04					
44				20.04					
45	19.70	4000	4	20.04					
46				20.04					

[7] El plazo es considerado en días naturales.
[8] El valor de la tasa es el ponderado porcentual; expresada en términos nominales y anualizados.
[9] Expresado en miles de nuevos pesos.
[10] El peso se obtiene a través del método descrito.
[11] La interpolación de la tasa con el método propuesto.

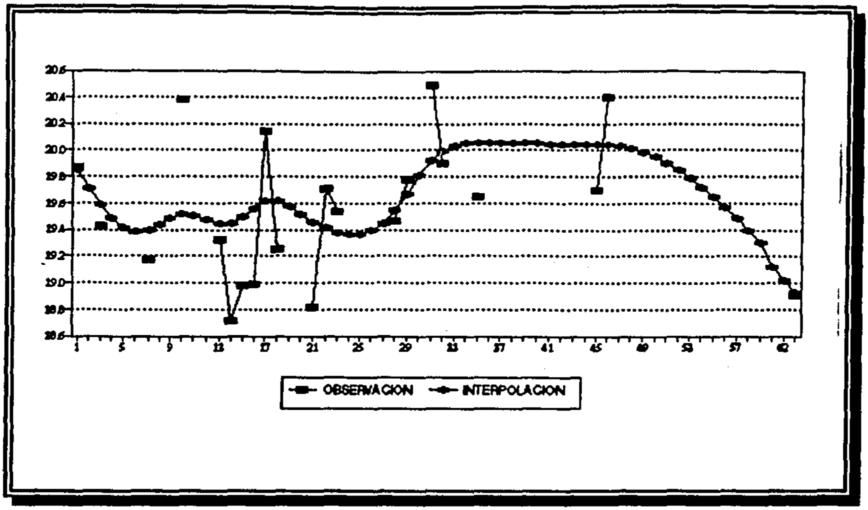
DATOS Y RESULTADOS. OBSERVACIÓN 2

PLAZO	TASA	MONTO	PESO	INT	PLAZO	TASA	MONTO	PESO	INT
1	20.12	7471165	1	19.92	47	19.25	564	4	20.15
2				19.83	48				20.12
3	17.4	26	5	19.73	49				20.09
4	19.81	24968	2	19.64	50				20.05
5	19.61	6540	2	19.56	60	19.75	2283		19.72
6	17.4	960	3	19.49	63	18.90	4951		19.84
7	19.5	292007	1	19.43	70				20.04
8	19.07	1824	3	19.38	80				20.26
9				19.35	89	19.46	50441		20.43
10				19.32	90	22.38	6288		20.45
11	19.17	498	4	19.30	91	20.35	386409		20.46
12	18.44	50	5	19.29	100				20.60
13	19.33	7710	2	19.29	110				20.72
14	19.72	23305	2	19.30	120				20.80
15	18.56	173	4	19.31	130				20.85
16				19.32	140				20.86
17				19.34	150				20.84
18	19.49	9574	2	19.36	154	20.91	76200		20.83
19	19.29	134	4	19.39	160				20.79
20	18.65	34	5	19.41	170				20.72
21	19.37	26021	2	19.45	180	20.00	4		20.64
22	19.23	839	3	19.48	182	20.31	52604		20.62
23				19.52	190				20.55
24				19.55	200				20.47
25	19.13	278	4	19.55	210				20.38
26	20.01	18693	2	19.59	220				20.29
27	19.95	3240293	1	19.62	230				20.20
28	19.99	1007926	1	19.68	240				20.11
29	19.20	1920158005	1	19.70	250				20.01
30				19.74	260				19.90
31				19.78	270				19.79
32	19.31	1198092	1	19.84	280				19.67
33	19.38	22703	2	19.91	290				19.55
34	18.90	204	4	19.99	300				19.41
35	20.79	130987	1	20.06	310				19.27
36				20.12	320				19.11
37				20.17	330				18.95
38				20.21	340				18.77
39				20.23	350				18.57
40				20.25	360				18.37
41				20.25	365	19.61	14	5	18.26
42				20.25	370				18.15
43				20.24	378	18.1	32	5	17.96
44				20.22	380				17.91
45				20.20	392	17.15	3398	3	17.62
46	20.40	427	4	20.18					

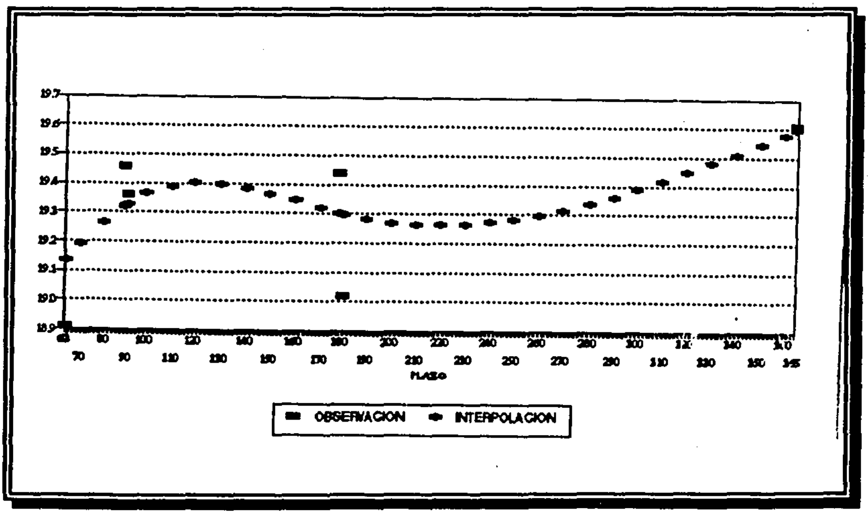
DATOS Y RESULTADOS. OBSERVACIÓN 3

PLAZO	TASA	MONTO	PESO	INT	PLAZO	TASA	MONTO	PESO	INT
1	10.61	5869922	1	10.62	48				9.78
2				10.60	49				9.70
3	11.3	220	5	10.56	50				9.64
4	10.24	56529	3	10.51	51				9.62
5	10.07	3732	4	10.47	52				9.62
6	10.98	25280	3	10.44	53				9.63
7	10.26	924460	2	10.37	54	9.7	12	5	9.65
8				10.29	55				9.68
9				10.22	56	9.70	70	5	9.72
10				10.18	57				9.77
11				10.16	58				9.82
13	10.19	3311	4	10.21	59				9.88
14	10.18	520557	2	10.30	60	9.95	1347	3	10.04
15	10.09	2342	4	10.41	64	9.63	2395	3	10.09
16				10.49	70				10.18
17				10.53	80				10.31
18				10.53	89	11.50	2000	3	10.40
19				10.51	90	10.26	210690	1	10.41
20	10.65	1251	5	10.47	91	10.53	415494	1	10.42
21	10.35	117979	3	10.42	100				10.48
22				10.37	110				10.52
23				10.35	120				10.53
24				10.35	130				10.52
25	9.49	204	5	10.39	140				10.49
26				10.45	150				10.44
27	10.55	3723816	1	10.44	160				10.39
28	10.06	593207	2	10.32	170				10.33
29	9.75	110	5	10.24	180	10.20	85	4	10.27
30	9.83	10092	4	10.27	182	10.02	629	4	10.26
31				10.39	190				10.21
32	10.74	244230	2	10.52	200				10.16
33	10.50	89814	3	10.59	210				10.11
34	9.70	45	5	10.64	220				10.70
35	10.92	318347	2	10.69	230				10.04
36	9.70	123	5	10.70	240				10.01
37				10.74	250				9.99
38				10.81	260				9.98
39				10.87	270				9.97
40				10.90	280				9.97
41				10.90	290				9.97
42	11.12	7664	4	10.83	300				9.99
43				10.69	310				10.01
44				10.49	320				10.05
45				10.27	330				10.09
46	9.75	16	5	10.07	340				10.14
47				9.90	350				10.19

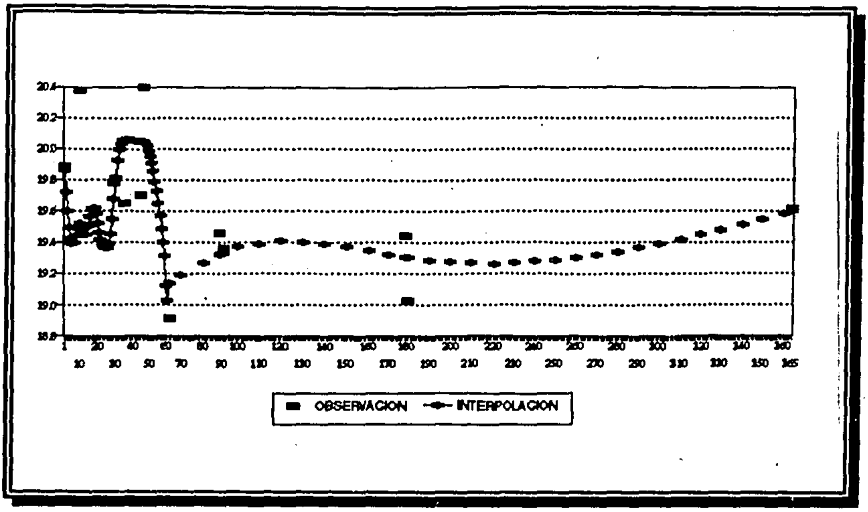
GRAFICA OBSERVACIÓN 1. PLAZO DE 0 A 60 DÍAS.



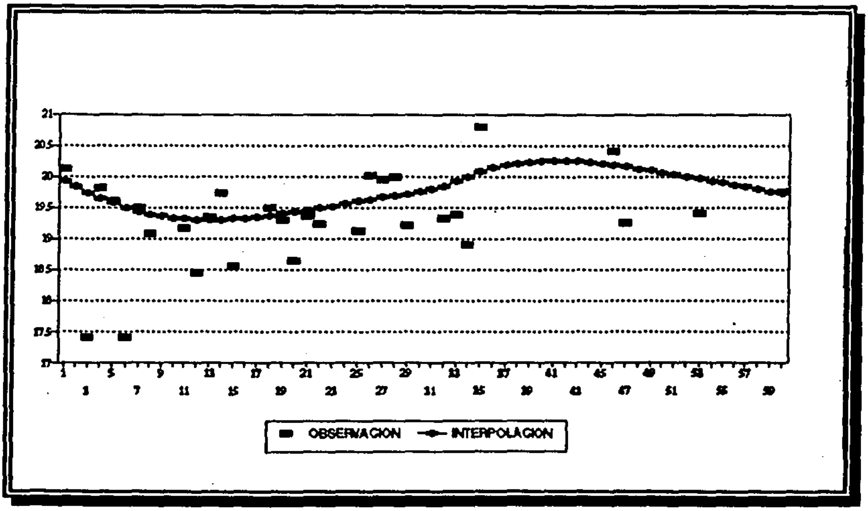
GRAFICA OBSERVACIÓN 1. PLAZO 60 A 365 DÍAS.



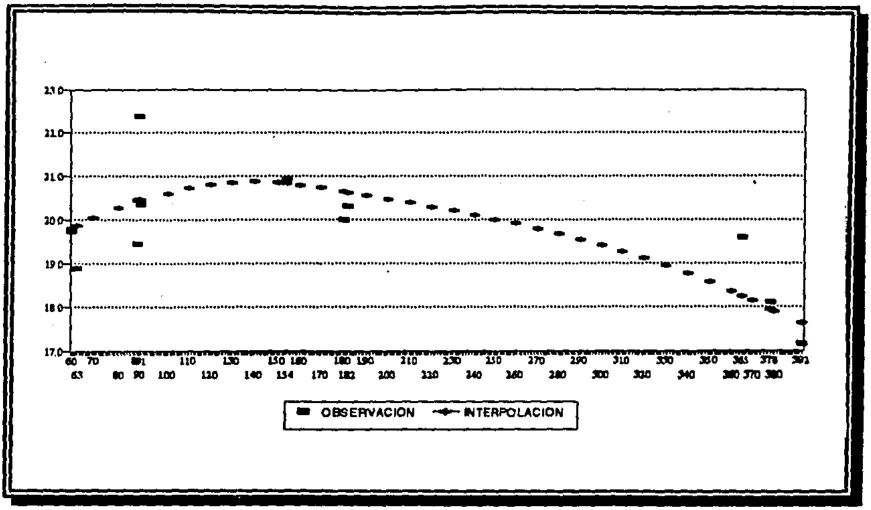
INTERPOLACIÓN PAGARÉ BANCARIO. OBSERVACIÓN 1.



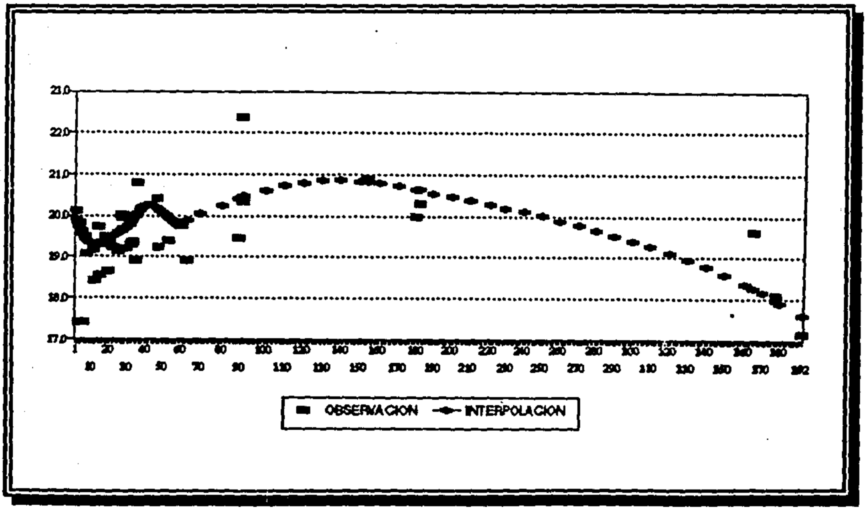
GRÁFICA OBSERVACIÓN 2. PLAZO 0 A 60 DÍAS.



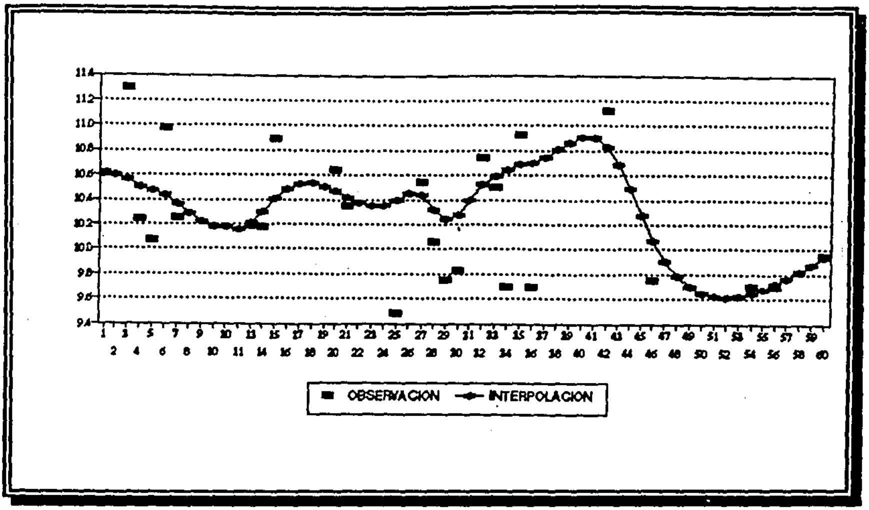
GRÁFICA OBSERVACIÓN 2. PLAZO 60 A 360 DÍAS.



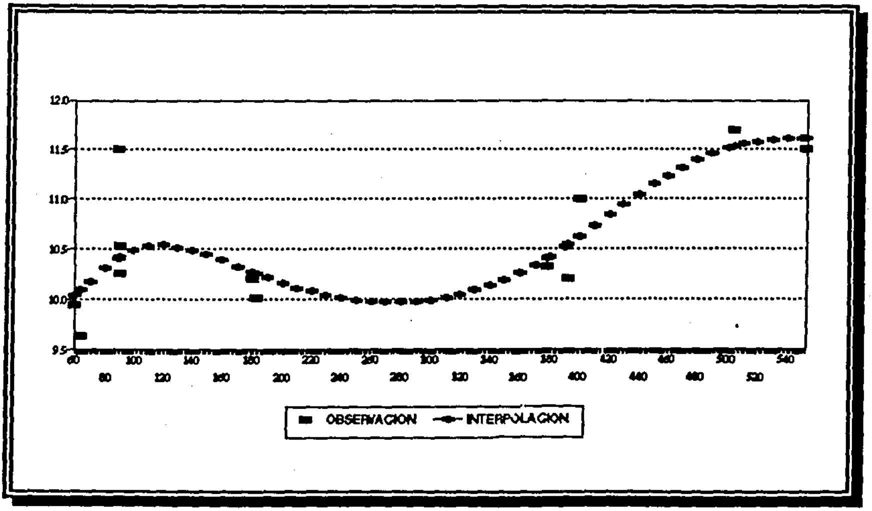
INTERPOLACIÓN PAGARÉ BANCARIO OBSERVACIÓN 2.



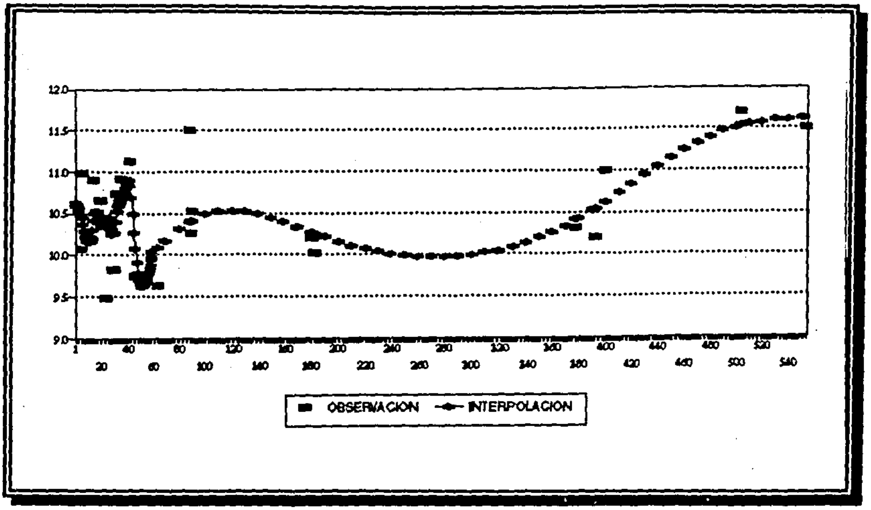
GRÁFICA OBSERVACIÓN 3. PLAZO 0 A 60 DÍAS



GRAFICA OBSERVACIÓN 3. PLAZO 60 365 DÍAS



INTERPOLACIÓN PAGARÉ BANCARIO. OBSERVACIÓN 3.



CAPITULO VIII

OTRAS APLICACIONES

En los capítulos anteriores planteamos un problema latente del sistema financiero mexicano, los métodos posibles de solución y la solución propuesta por este trabajo, así como el sofware y los resultados obtenidos para este problema.

Al llevar a cabo la investigación, encontramos que existen muchos mas problemas que se resuelven con una interpolación y alisamiento de datos de las tasas de interés de algún instrumento.

El modelar una estructura de plazos es un problema que invita a mas de un grupo a tratar de encontrar posibles soluciones para estos problemas. Y exactamente, modelar una estructura de plazos para la tasa de interés de los pagares bancarios es lo que realizamos en este trabajo.

Si aplicáramos el mismo tratamiento a las tasas de interés de los CETES o cualquier otro instrumento que sea suficientemente representativo de la tasa de interés del mercado (tasa spot) obtendremos la estructura de plazos de tasas de interés.

La estructura de plazos de tasas de interés da una caracterización de las tasas de interés en función del plazo. Esto facilita el análisis de tasas y rendimientos; da la base para la investigación de rendimientos de portafolios; también, puede ser usada en la valuación de productos de rendimiento fijo y para la valuación de futuros y reclamos contingentes.

Algunos de los usos de la estructura de plazos incluyen las siguientes:

1.-*Analisis de los rendimientos de activos compuestos por diferentes plazos.* Los gerentes de inversiones de ingreso fijo varian sus portafolios en muchas dimensiones, incluyendo calidad, nivel del cupón y tipo de emisor. Pero ninguna dimensión es tan importante como la dimensión del plazo; esta es la influencia mas grande que afecta la ganancia o perdida del portafolio en ambientes de tasas de interés volátiles. La pendiente de la curva muestra los premios que pueden ser esperados por instrumentos de diferentes plazos.

2.-*Calculo detallado de las tasas de interés futuras.* En la inversión de plazo fijo, el administrador que desea hacer una mejor predicción del nivel de las tasas de interés, puede beneficiarse enormemente.

3.-*Calculando el precio de bonos y otros contratos de pagos fijos.* En el calculo de obligaciones financieras, es esencial la consideración dada por los posibles rendimientos de otras alternativas de inversión con características similares.

4.- *Calculando los reclamos contingentes de instrumentos de ingreso fijo.* Muchos instrumentos convencionales contienen implícitas opciones call o características de prepagos. El calculo del precio de estos reclamos contingentes requiere que la estructura de plazos sea modelada.

5.- *Arbitrando entre bonos de diferentes plazos.* En el manejo de portafolios de instrumentos de plazo fijo, es necesario apreciar los efectos del plazo en el portafolio; esto no es dificil si los vencimientos o la duración de los instrumentos es idéntica. Si esto no ocurre, el análisis de la estructura de tasas puede hacer que los rendimientos sean mas comparables y facilitar el análisis.

De estos numerosos usos, la estimación de la estructura de plazos ha recibido una considerable atención de investigadores y aficionados.

Dentro del trabajo, también se encontró un modelo que aproxima la estructura de plazos con el fin de valuar bonos; presentamos este modelo como un apéndice de este trabajo; cabe mencionar que dentro de este modelo se considera el uso de splines cúbicos, como medio de interpolación de las tasas de los bonos. La razón expuesta por el autor, por la cual no es suficientemente buena esta interpolación es que "los polinomios tienen una curvatura diferente a la exponencial", afirmando que la curvatura de las tasas de interés es exponencial. Sin embargo en este trabajo planteamos como medio de solución el alisamiento via spline.

Planteamos de cualquier modo este modelo especifico de valuación de bonos.

CAPITULO XI

CONCLUSIONES.

Mas que conclusiones son comentarios finales, ya que las principales conclusiones están dentro de los resultados obtenidos.

Como lo planteamos desde un principio los datos no son muy amigables presentan dificultades, y son muy subjetivos, lo que no favorece a ningún método que trate de ser objetivo. La variabilidad de los datos es grande, las tasas pueden cambiar demasiado en pequeños intervalos, dificultando la suavización de los datos. Estas características de los datos pueden ir disminuyendo conforme las características del mercado mexicano empiecen a ser como las de un mercado eficiente, en donde no se presentarían las discontinuidades de los datos permitiendo acciones de arbitraje con muchas ganancias.

Aunque los resultados obtenidos con el método aquí planteado, son evidentemente discontinuos, los datos no son precisamente continuos, por lo que se pueden considerar como aceptables los resultados, sobre todo en las primeras partes de los intervalos de interpolación.

El trabajo como surgió originalmente, conjunto la teoría desarrollada del alisamiento vía spliens cúbicos, el paquete desarrollado por la Maestra Irene Sanchez Guevara, y aplico todo esto a un problema financiero. La solución a este problema no hubiera sido posible sin la existencia de el paquete con el cual se hicieron cientos de ensayos.

Aunque en un el método planteado funciona para el mercado, el método no es el final, sino que debe ser modificado conforme cambie el mercado, en cuanto a la densidad de los datos y la variabilidad de los datos. Conjuntamente los resultados obtenidos desgraciadamente no son del todo objetivos (sobre todo en los intervalos mas grandes), y métodos como el uso del splien exponencial deberían ser probados. Este trabajo no es final y plantea muchas mas opciones de solución. La mejor solución solo puede ser medida conforme el mercado acepte y reconozca los resultados obtenidos; esta es la mejor evaluación de la calidad de los resultados obtenidos con algún método de solución usado.

Lo que da mayor relevancia a este trabajo, que encontró una aplicación directa a el trabajo realizado por muchas personas, es que solo es la unión de diversos trabajos que van desde el planteamiento del problema, hasta la solución obtenida.

BIBLIOGRAFIA

BARRERA SANCHEZ, PABLO. (et-al)

"El a b c de los splines."

Versión preliminar, Facultad de Ciencias. U:N:A:M:

1992, México.

FABOZZI J., FRANK. (et-al)

"The Handbook of Fixed Income Securities."

3a. ed., Ed. Advisory Board.

1991, E:U:A: 1419 pp.

Prol. William L. Nemerevei.

HEYMAN TIMOTHY.

"Inversión vs Inflación."

3a ed., Ed. Milenio.

1988, México. 359 pp.

MANSELL CARSTENS, CATHERINE.

"Las Nuevas Finanzas en México."

1a ed., Ed. Milenio.

1992, México. 535 pp.

Prol. Timothy Heyman.

SANCHEZ GUEVARA, IRENE.

"Alisamiento de Datos. Teoria y Métodos Numéricos."

Cc. Avances de iInvestigación. vol 16. U.A.M.

1991, México. 138 pp.

SHAMPINE AND ALLEN.

"Numerical Computing an Introduction."

la ed., Ed, W.B. Saunders Company.

1973, E.U.A. 258 pp.

WONNACOTT, PAUL AND RONALD WONNACOTT.

"Economía."

2a ed. Ed. MacGraw-Hill.

1986, México. XLVL+959 pp.

"INDICADORES ECONOMICOS".

Banco de México. (varios números).

"THE JOURNAL OF FINANCE."

vol 37, Mayo 1982 No 2, Ed. Michel J. Brennan.

The American Finance Association.

06/29/94 02:42 PM

APÉNDICE Modelo de la estructura de plazos usando splines exponenciales.

Un buen número de modelos teóricos de equilibrio ha propuesto en el pasado reciente describir la estructura de plazos de tasas de interés (Brennan y Schwartz, Cox, Ingresoll y Ross). Estos modelos postulan supuestos alternativos acerca de la naturaleza del proceso estocástico dentro de las tasas de interés, y deducen una caracterización de la estructura de plazos implicada por estos supuestos en un mercado que opere eficientemente. La tasa spot resultante tiene una forma específica que depende de pocos parámetros.

Desafortunadamente, la curva de la tasa spot derivada de estos modelos (por lo menos en los casos en que es posible obtener fórmulas explícitas) no es muy consistente a los datos observados de rendimientos de precios de bonos. Tipicamente, las curvas de rendimiento actuales exhiben más y más variados picos, que los justificados por los modelos de equilibrio. Es indudablemente una pregunta de tiempo: qué tanto un modelo teórico se aproxime suficientemente a los datos.

El objetivo en la estimación empírica de la estructura de plazos es estimar una curva de la tasa spot (o cualquier otra descripción equivalente de la estructura de plazos, como la función de descuento) que (1) estime el dato suficientemente bien, y (2) sea una función suficientemente suave. El segundo requerimiento, es menos cuantificable que el primero y frecuentemente olvidado. Este es sin embargo por lo menos tan importante como el primero, particularmente desde que es posible conseguir arbitrariamente una buena aproximación si el modelo empírico da los suficientes grados de libertad, con la consecuencia de que la estructura de plazos resultante sea poco sensible. (Ver Langeting and Smoot.)

Una simple aproximación para la estimación de la estructura de plazos es suponer que los pagos de los bonos ocurren sólo en un conjunto discreto de fechas específicas, y asumir que no hay relación entre los factores de descuento correspondientes a estas fechas. Los factores de descuento pueden entonces ser estimados como los coeficientes de una regresión con los pagos del bono en el conjunto de fechas dado como las variables independientes y el precio del bono como la variable dependiente. Esta aproximación ha sido dada por Carlenton y Cooper. Ellos incluyeron productos de la tesorería de los Estados Unidos y Federal Home Loan Banks (FHLB) en la estimación, con un ajuste por el riesgo de crédito de los bonos FHLB. La función de descuento resultante es discreta más que continua, y la tasa forward resultante no es posible suavizarla.

McCulloch introdujo la metodología para aproximar la función de descuento usando polinomios splines. Este procedimiento estima la función de descuento como una función continua del tiempo.

A través de splines de orden cúbico o mayor, la tasa forward es una función suavizable. Como el modelo es lineal en la función de descuento, las técnicas de mínimos cuadrados ordinarios pueden ser usadas.

En dirección al efecto de graduación, McCulloch estimó la estructura de plazos de tasas de interés, después de impuestos y la tasa de ingresos marginales con impuestos, logrando estimaciones de la tasa de impuestos al minimizar el error standard de la regresión.

Esta estimación de la tasa de impuestos es usada para convertir la estructura de plazos antes de impuestos en una estructura de plazos después de impuestos.

Este procedimiento hace a la estimación de tasas forward muy sensible a cualquier error en la estimación de la tasa de impuestos. Más aún, ya que el efecto de impuestos es estimado de aproximar grandes errores, la inclusión de productos especiales como los bonos con piso tiende a perjudicar los resultados.

CONCEPTOS Y TÉRMINOS.

La tasa de interés spot para un plazo dado es definida como el redimiendo de un bono descontado puro a este plazo. La tasa spot es la tasa de descuento que determina el valor presente de un único pago en un momento dado en el futuro. La tasa spot considerada en función del plazo es conocida como la *estructura de plazos de tasa de interés.*

La tasa spot no es directamente observable, por lo que hay pocos bonos puros descontados con vencimiento más allá de un año. Estos tienen que ser estimados de los rendimientos de los productos actuales a través de un modelo de estructura de plazos. Cada bono de cupones pude ser considerado como un paquete de bonos descontados a saber, uno por cada pago de cupón y uno por el pago del principal. El precio de cada componente del bono descontado es igual a el monto del pago descontado con la tasa spot del plazo correspondiente a este pago. El precio del bono es entonces la suma de estos componentes del bono descontados. El rendimiento al vencimiento en un bono es la tasa interna de retorno de los pagos del bono, o la tasa de descuento que puede igualar el valor presente de los pagos con el precio del bono. Notemos que el rendimiento es la combinación de tasas spot de varios plazos. En el cálculo del rendimiento, cada cupón es descontado por la misma tasa, mejor dicho, por la tasa spot correspondiente al plazo de tal pago. Descomponer el rendimiento actual de un bono en las tasas spots es la principal tarea del modelo de estructura de plazos.

La tasa spot describe la estructura de plazos al especificar la tasa de interés actual para un plazo dado. Las implicaciones de la tasa spot actual para tasas futuras puede ser descrita en términos de las tasas forward. Las tasas forward son tasas de reinversion futuras por un periodo, implícitas en la estructura de plazos actual de las tasas spot.

Matemáticamente, si R_1, R_2, R_3, ...etc. son las tasas spot actuales, la tasa forward F_t para el periodo t está dado por la ecuación:

$$1+F_t=\frac{(1+R_t)^t}{(1+R_{t-1})} \qquad para\ t = 1,2,\ldots,n \qquad (1)$$

Esta ecuación quiere decir que la tasa forward para un periodo dado en el futuro es la tasa marginal de rendimiento de realizar una inversión en un bono descontada por un periodo más. Por definición, la tasa forward para el primer periodo es igual a la tasa spot del primer periodo, $F_1 = R_1$.

La relación de las tasas forward descritas en la ecuación anterior puede ser mostrada en la siguiente forma equivalente.

$$(1+R_t)^t = (1+F_1)\ (1+F_2)\ldots(1+F_t) \qquad (2)$$

Esta ecuación muestra que las tasas spot son obtenidas a partir de la composición de las tasas forward sobre el plazo de la tasa spot. Entonces, la tasa forward F_t puede ser interpretada como la tasa de interés del periodo de t-1 a t que está implícita en la estructura actual de las tasas spot.

Así como las tasas forward son determinadas por las tasas spot usando la ecuación 1, las tasas spot pueden ser obtenidas a partir de las tasas forward de la ecuación 2. Entonces, cualquiera, la tasa spot o la tasa forward pueden ser tomadas de maneras alternativas de la descripción de la estructuras de plazos. La elección depende de cual de estas dos caracterizaciones equivalentes es más conveniente para nuestros propósitos. Las tasas spot describen tasas de interés en periodos a partir de la fecha actual a una fecha futura dada. Las tasas forward describen tasas de interés en intervalos de un periodo en el futuro.

Existe un tercer modo de caracterizar la estructura de plazos, a saber, por el significado de la *función de descuento*. La función de descuento especifica el valor presente de una unidad en el futuro. Es este el precio descontado de un bono puro sin riesgo con vencimiento dado. La función de descuento D_t, está relacionada con las tasas spot por la ecuación:

$$D_t = (1+R_t)^{-t} \qquad (3)$$

Y con las tasas forward con la ecuación:

$$D_t = 1/[(1+F_1)\ (1+F_2)\ldots(1+F_t)] \qquad (4)$$

La función de descuento D_t considerada en el tiempo continuo t es una curva suavizada decreciente del valor inicial $D_0 = 1$ para t = 0 (ya que el valor de un peso ahora es un peso) a cero para vencimientos muy largos. Típicamente tiene una pendiente exponencial.

Mientras que la función de descuento es usualmente más difícil de interpretar como una descripción de la estructura de las tasas de interés que cualquiera de las tasas spot o forward, es útil en la estimación de la estructura de plazos del precio de los bonos. La razón es que los precios de los bonos pueden ser expresados de una manera muy simple en términos de la función de descuento, a saber, la suma de los pagos multiplicada por su valor presente. En términos de las tasas forward o spot los precios son una función más complicada (no lineal) de los valores de las tasas a estimar.

El concepto de tasa forward está estrechamente relacionado al de pronósticos implícitos del mercado. El pronóstico implícito del mercado de $M_{t,s}$ de una tasa de vencimiento s así como el de una fecha futura t, es la tasa que igualaría el rendimiento total de una inversión a la tasa spot R_t por t periodos reinvertida a la tasa $M_{t,s}$ por s periodos más. Con la inversión continua por t + s periodos a la actual tasa spot R_{t+s}. Matemáticamente esto puede ser escrito como sigue:

$$(1 + R_t)^t (1 + M_{t,s})^s = (1 + R_{t+s})^{t+s} \tag{5}$$

El pronóstico implícito del mercado puede ser visto como un pronóstico de las tasas spot futuras de los participantes del mercado. Supongamos que la tasa actual de un año es 12%, y que hay un sentimiento general de los inversionistas de que la tasa a un año dentro de un año será 13%. Entonces la tasa spot actual a dos años será 12.5%, ya que

$$(1 + 0.1250)^2 = (1 + 0.12)(1 + 0.13)$$

La tasa a dos años puede ser de tal manera que el producto de dos años tenga el mismo rendimiento al renovar sobre un año productos por dos años. Puede no haber un sentimiento general de la tasa futura, y en ese caso el pronóstico podría no ser observado directamente. Conociendo las tasas spot de uno y dos años casi siempre, nos permite determinar la tasa futura para el segundo año a un bono a dos años equivalente en términos del rendimiento total a una renovación de un bono a un año. Esta tasa es el pronóstico implícito del mercado.

El pronostico implícito del mercado tiene un número de propiedades interesantes. La primer cosa a notar es que cuando un contrato futuro está disponible por un periodo dado futuro, la tasa en el contrato futuro es igual a el pronóstico implícito del mercado (hasta una diferencia atribuible a los costos de transacción). Si esto no fuera cierto, un arbitraje riesgoso puede ser dado entre un portafolio consistente de los contratos futuros y un producto con vencimiento en el día de ejecución en un lado, y un producto con vencimiento al vencimiento de el contrato por el otro. Estas oportunidades riesgosas de arbitraje podrían no existir en mercados financieros eficientes.

Otra caracterización del pronóstico implícito del mercado es que el rendimiento del periodo de posesión calculado usando estos pronósticos es el mismo para cualquier producto libre de default, sin importar su vencimiento. Esto es igual a la tasa spot correspondiente a el tamaño del periodo de posesión. Necesariamente, el ingreso total sobre un periodo de posesión de tamaño h en una emisión con plazo s (s > h) es igual a

$$\frac{(1+R_s)^s}{(1+M_{h,s-h})^{s-h}}$$

Recordando la definición del pronóstico implícito del mercado en la ecuación 5, el rendimiento total sobre el periodo de posesión es fácilmente calculado por

$$\frac{(1+R_s)^s}{(1+M_{h,s-h})^{s-h}} = \frac{(1+R_s)^s(1+R_h)^h}{(1+R_s)^s} = (1+R_h)^h$$

Entonces, el rendimiento del periodo de posesión es independiente del plazo del instrumento, y es dado por la tasa spot del periodo de posesión.

Esta es una caracterización del pronóstico implícito del mercado que puede servir actualmente como definición. Ningún otro pronóstico puede tener la propiedad de que el rendimiento del periodo de posesión sobre un periodo dado es el mismo para productos de todos los plazos (incluyendo bonos con cupón). En este sentido, el pronostico implícito del mercado es el pronóstico más "neutral". Esto es la expectación en equilibrio tal que vencimientos o esquemas de pagos no son ex-ante preferidos a otros.

La definición del pronostico implícito del mercado como el dado en la ecuación 5 es tal vez mas intuitivo expresado en términos de la tasa forward. Esto es dado por la siguiente ecuación.

$$(1+M_{t,s})^s = (1+F_{t+1})(1+F_{t+2})\dots(1+F_{t+s}) \qquad (6)$$

Especificamente, el pronóstico implícito del mercado de la tasa de un periodo es igual a la tasa forward por ese periodo,

$$M_{t,1} = F_t$$

Vemos de la ecuación 6 que el pronóstico es obtenido de componer la tasa forward sobre el periodo comenzando el día del horizonte del pronóstico y extendiéndolo por un intervalo correspondiente al plazo de la tasa pronosticada. En otras palabras, el pronóstico implícito corresponde a un escenario donde no cambian las tasas forward. La actual tasa spot cambia al renovar la serie de tasas forward a lo largo.

Una cosa más a mencionar del pronóstico es que desde este pronóstico de las futuras tasas spot podemos inferir el pronóstico de rendimientos, funciones de descuento, y todas las caracterizaciones de la estructura de plazos futura. La estructura de plazos actual y futura tienen como común denominador la tasa forward, que hace a la tasa forward el edificio básico de la estructura de tasas de interés.

EL MODELO.

En la especificación del modelo propuesto para la estimación de la estructura de plazos, usaremos la siguiente notación:

t Tiempo para pagar (medido en semestres)

D (t) Función de descuento, esto es, el valor presente de una unidad de pago realizado en el tiempo t.

R (t) Tasa spot de vencimiento t, expresada como la tasa semestral compuesta continuamente. La tasa spot está relacionada a la función de descuento por la ecuación

$$D(t) = e^{-tR(t)}$$

F (t) Tasa forward continua compuesta instantáneamente al tiempo t. La tasa forward está relacionada a la tasa spot por la ecuación

$$R(t) = \frac{-d}{dt}\log d(t)$$

n Número de bonos usados en la estimación de la estructura de plazos.

T_k Tiempo de vencimiento del k-ésimo bono, medido en semestres.

C_k Tasa del cupón semestral del k-ésimo bono, expresado como fracción del valor de redención.

P_k Precio del k-ésimo bono, expresado en fracción del valor de redención.

El modelo básico puede ser escrito en la siguiente forma;

$$P_k + A_k = D(T_k) + \sum_{j=1}^{L_k} C_k D(T_k - j + 1) - Q_k - W_k + \varepsilon_k \tag{7}$$

para los valores de $k = 1,2,3..., n$

Donde

$$A_k = C_k (L_k - T_k)$$

es la porción de interés resultante del valor de mercado del k-ésimo bono,

$$L_k = [T_k] + 1$$

es el número de pagos de cupones a recibir, Q_k es el precio descontado atribuido a los efectos de impuesto, Wk es el precio descontado debido a características ,y ε_k, es un error residual con $E\varepsilon_k = 0$.

El modelo especificado por la ecuación (7) es expresado en términos de la función de descuento, en vez de las tasas spot o forward. La razón para esta especificación es que el precio de un bono dado es lineal en la función de descuento, mientras que es no lineal en cualquiera de las tasas spot o forward. Una vez que la función de descuento es estimada, las tasas spot y forward son fácilmente calculadas.

Una parte integral de la especificación del modelo es una caracterización de la estructura de los residuos. Postulemos que el modelo sea homocedástico en rendimientos, en vez de serlo en los precios. Esto significa que la varianza del error residual en rendimientos es el mismo para todos los bonos. La razón para este requerimiento es que para un incremento dado en el precio, digamos 1.00% del valor de redención, tiene un efecto muy diferente en un bono corto a en uno largo. Evidentemente, un plazo erróneo en el precio de un T-bill a tres meses no puede tener la misma magnitud que en el precio de un bono a veinte años. Es razonable asumir que la magnitud del plazo erróneo sería el mismo para los rendimientos.

Bajo esta suposición, la varianza residual en la ecuación 7 está dada por:

$$E\varepsilon_k^{\,2} = \sigma^2 w_k, \quad k = 1,2,..,n \tag{8}$$

donde:

$$w_k = \left(\frac{dP}{dY}\right)_k^2 \tag{9}$$

es el cuadrado de la derivada del precio con respecto al rendimiento para k-ésimo bono, con el valor actual del rendimiento. La derivada dP/dY puede ser fácilmente evaluada a partir de la fecha de vencimiento, la tasa del cupón y el rendimiento actual. Además, asumiremos que los residuales para los diferentes bonos no están correlacionados.,

$$E\varepsilon_k \varepsilon_l = 0, \quad para\ k \neq l$$

Especificando los efectos de los impuestos, asumiremos que el término Q_k es proporcional al rendimiento actual C_k / P_k en el bono,

$$Q_k = q \frac{C_k}{P_k} \left(\frac{dP}{dY} \right)_k, \quad k = 1,2,..,n. \tag{10}$$

Para tal efecto, la especificación más simple es introducir una variable dummy I_k, igual a 1 para bonos reclamables y cero para bonos no reclamables, y asignar.

$$W_k = w I_k, \quad k = 1,2,..,n. \tag{11}$$

Aunque más complicaciones (tales como las basadas en la valuación de opciones) son posibles, la forma (11) parece funcionar bien con bonos del tesoro, los cuales han tenido invariablemente la misma estructura de los bonos call cinco años antes del vencimiento a la par.

Ahora veremos las especificaciones de la función de descuento D(t). Previas aproximaciones nos conducen a la función de descuento por medio de polinomios splines de segundo y tercer orden. Mientras que los splines constituyen una familia de curvas muy flexibles, hay severos obstáculos para su uso en las aproximaciones de funciones descuento. La función de descuento es principalmente de una pendiente exponencial,

$$D(t) \approx e^{-yt}, \quad 0 \leq t < \infty$$

Splines, formados por polinomios, son inherentemente usados para estimar una curva de tipo exponencial. Los polinomios tienen una curvatura diferente a la exponencial, y aunque un spline polinomial puede ser forzado arbitrariamente para tener una curva exponencial escogiendo un número suficientemente largo de puntos conocidos, la aproximación local no es buena. Una manifestación practica de este fenómeno es que un spline polinomial tiende a "ondear " alrededor de una exponencial, resultando en tasas forward más inestables (que son las derivadas del logaritmo de la función de descuento). Otro problema con los splines polinomiales son sus indeseables propiedades asintóticas. Los splines polinomiales no pueden ser forzados a tomar una forma exponencial con vencimientos crecientes.

Seria conveniente que pudiéramos trabajar con el logaritmo de la función de descuento (log D(t)), que es escencialmente una linea recta y pude ser muy bien aproximada a la recta con splines. Desafortunadamente el modelo dado por la ecuación 7 seria entonces no lineal en la función transformada, la cual requiere el uso de técnicas de estimación no lineales complicadas.

Una salida a este dilema está dado por la siguiente aproximación, que es usada en nuestro modelo. En vez de usar una transformación de la función D(t) podemos aplicar una transformación del argumento de la función. Sea α una constante y sea

$$t = -\frac{1}{\alpha}\log(1-x), \quad 0 \le x < 1 \tag{12}$$

Entonces G (x) se define como

$$\mathrm{D(t)} = \mathrm{D}\left(-\frac{1}{\alpha}\log(1-x)\right) = G(x) \tag{13}$$

Y es una nueva función con las siguientes propiedades:

a) G (x) es una función decreciente definida en [0 , 1]. Con G (0)=1, G (1) = 0,

b) Con la extensión de que D(t) es aproximadamente exponencial

$$D(t) \approx e^{-\gamma t}, \quad 0 \le \mathrm{t} < \infty$$

La función G (x) es aproximadamente una función poderosa

$$\mathrm{G(x)} \approx (1\text{-x})^{\gamma/\alpha} \quad 0 \le \mathrm{x} \le 1;$$

c) El modelo especificado por la ecuación 7 es lineal en G .Entonces, hemos remplazado la función D (t) para estimarla por la función poderosa aproximada G (x) la cual puede ser exitosamente aproximada por splines polinomiales, mientras preservamos la linealidad del modelo. Aún más, las propiedades asintóticas deseadas pueden conseguirse fácilmente.

Si G (x) es polinomial con G' (1) ≠ 0, entonces el parámetro constituye el valor limite de la tasa forward

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \alpha$$

Necesariamente, en este caso

$$G(x) = -G'(1)(1-x) + o(1-x)$$

Y como consecuencia

$$D(t) = -G'(1)e^{-\alpha t} + o(e^{-\alpha t})$$

Cuando $t \rightarrow \infty$. Usando splines polinomiales para estimar la función G (x) aseguraremos la convergencia deseada de las tasas forward. El valor limite puede ser estimado para el dato junto con los otros parámetros de estimación.

Sea $g_i(x)$ con x en [0 , 1], i = 1,2,..,m. una base de un espacio spline polinomial. Cualquier spline en ese espacio puede ser expresado como combinación lineal de la base. Si G (x) es estimado por una función de este espacio

$$G(x)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i g_i(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{14}$$

el modelo de la ecuación 7 puede ser escrito como

$$P_k + A_k = \sum_{i=1}^{m}\beta_i\left(g_i(X_{k1}) + \sum_{j=1}^{L_k} C_k g_i(X_{kj})\right) - q\frac{C_k}{P_k}\left(\frac{dP}{dY}\right)_k - wI_k + \varepsilon_k \tag{15}$$

$$E\,\varepsilon_k = 0 \quad , \; E\,\varepsilon_k^2 = \sigma^2 w_k \quad , E\,\varepsilon_k\,\varepsilon_i = 0 \quad \text{para } k \neq i$$

donde:

$$X_{kj} = 1 - e^{-\alpha(T_j - j + 1)}, \qquad j = 1,2,..,L_k$$

El modelo descrito por la ecuación 15 es usado en la estimación de la estructura de plazos. Es lineal en los parámetros β_1 , β_2 , ... , β_m , q , w con la matriz de covarianza residual proporcional a

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \omega_n \end{vmatrix}$$

si escribimos

$$U_k = P_k + A_k$$

$$Z_{ki} = g_i(X_{k1}) + \sum_{j=1}^{L_k} C_k g_i(X_{kj}), \qquad i = 1,2,..,m.$$

$$Z_{k,m+1} = -\frac{C_k}{P_k}\left(\frac{dP}{dY}\right)_k$$

$$Z_{k,m+2} = -I_k$$

para k = 1,2,.., n., entonces la estimación de los mínimos cuadrados de $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta m, q, w)'$ condicional en el valor de α puede ser directamente calculado por la ecuación de la regresión de mínimos cuadrados

$$\beta = (Z' \Omega^{1} Z)^{-1} Z' \Omega^{1} U$$

donde $U = (U_k), \quad Z = (Z_{ki}).$

La suma de los cuadrados

$$S(\alpha) = U' \Omega^{1} U - \beta' Z' \Omega^{1} U$$

es entonces una función únicamente de α . Podemos entonces encontrar el valor que minimiza S (α) usando un procedimiento numérico, como el método de minimización de tres puntos de Newton.

Una vez que han sido determinados los valores mínimos cuadrados de los coeficientes β_1 , β_2 , ... , βm, q, w de la regresión y el parámetro α , la función de descuento estimada esta dada por

$$D(t) = \Sigma_{i=1} \beta_i g_i (1 - e^{-\alpha t}), \qquad t \geq 0 \qquad (16)$$

Igual que para el espacio de spline elegimos spline cúbicos de menor orden con derivadas continuas.

Las condiciones de bondad son G (0) = 1, G (1) = 0. La base (g_i (x)) deberian ser elegidas para estar razonablemente cerca a la ortogonal, en orden tal que la matriz de la regresión

$$Z' \Omega^{1} Z$$

puede ser invertida con suficiente precisión.

Aunque el modelo es aproximado en su versión transformada dada por la ecuación 15, puede ser ilustrativo rescribirla en el parámetro original D. En cualquier intervalo entre puntos consecutivos, G (x) es un polinomio cúbico y D(t) toma la forma

$$D(t) = a_0 + a_1 e^{-\alpha t} + a_2 e^{-2\alpha t} + a_3 e^{-3\alpha t}$$

en cada intervalo entre . La función D (t) y su primera y segunda derivadas son continuas en los puntos . Esta familia de curvas, usada para aproximar la función de descuento, puede ser descrita como el spline exponencial de tercer orden.

Dado que los métodos de mínimos cuadrados son mas sensibles a errores en datos, usamos un procedimiento por pasos para identificar y excluir errores. Observaciones con residuales mayores a cuatro desviaciones standard son excluidos y el modelo es aproximado de nuevo. Este procedimiento se repite hasta que no se presenten los errores.

06/28/94 02:09 PM