

1  
2ej.



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

Simulación Numérica de Yacimientos  
Naturalmente Fracturados

Tesis

Que para obtener el título de Ingeniero Petrolero  
presenta:

José Luis Avendaño Rodríguez



México, D.F., Junio de 1994.

**TESIS CON  
SELLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1  
29j

## AGRADECIMIENTOS.

Le doy gracias a Dios por permitirme ser parte de una familia tan hermosa, que me ha inculcado que lo mas bello de la vida se encuentra en ser una persona sencilla, humilde y amable con el prójimo.

No encuentro palabras para poder expresar mis mas sinceros agradecimientos para mis queridos padres, solamente les agradezco de todo corazón a mi querida madre y a mi adorable padre su cariño, amor, apoyo y confianza que siempre me brindaron para poder cumplir una meta tan anhelada. Gracias padres míos por haberme guiado por el buen camino, esperando seguir sus buenos consejos por el resto de mi vida. Que Dios te tenga en su santa gloria padre mio y a ti madre mia que te bendiga y te cuide siempre.

A mi querido hermano Fernando y a su familia les agradezco de todo corazón todo el apoyo que de ustedes he recibido, para poder cumplir una de mis mayores ilusiones. Que Dios siempre ilumine sus caminos y que siempre seas un excelente hijo, hermano y padre de familia. -Gracias!.

A mi querido hermano Alejandro y a su familia les doy gracias por toda esa ayuda que de ustedes obtuve para poder ver la meta cumplida. Que Dios los cuide y los bendiga y que sigas siendo un buen hijo, un excelente hermano y un formidable padre de familia. -Gracias!.

A mi querido hermano Damaso y a su familia les agradezco sinceramente todo lo que de ustedes he recibido para ver cumplido uno de mis grandes objetivos. Gracias por ser un excelente hermano, un buen hijo y un buen padre de familia. Que Dios los cuide y los bendiga. -Gracias!.

A mi querida novia(Lety), te doy mis mas sinceros agradecimientos por el apoyo incondicional que de ti he recibido. Gracias por los buenos consejos que me has dado en todo momento para poder salir adelante. Que Dios te cuide y te bendiga y que continúes siendo una maravillosa y linda persona. -Gracias!.

Al DR. Fernando Rodríguez de la Garza le agradezco sinceramente el apoyo, asesoramiento y dirección que recibí para el desarrollo de este trabajo. -Gracias!.

Al Ing. Agustín Galindo N. le agradezco sinceramente el apoyo y sus valiosos comentarios que recibí para la realización de este trabajo. Gracias!

Finalmente, les doy mis sinceros agradecimientos a todos mis amigos, compañeros y amistades que me apoyaron para la elaboración de este trabajo. Gracias!.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-I-080

**SR. JOSE LUIS AVENDAÑO RODRIGUEZ**  
Presente.

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Fernando Rodríguez de la Garza, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de ingeniero petrolero:

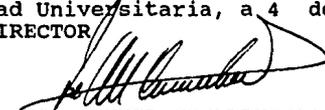
**SIMULACION NUMERICA DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS**

	<b>RESUMEN</b>
<b>I</b>	<b>INTRODUCCION</b>
<b>II</b>	<b>ECUACIONES DE FLUJO DE FLUIDOS EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS</b>
<b>III</b>	<b>SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DE FLUJO</b>
<b>IV</b>	<b>ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE YACIMIENTOS FRACTURADOS</b>
	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>
	<b>NOMENCLATURA</b>
	<b>REFERENCIAS</b>

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

A t e n t a m e n t e  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Ciudad Universitaria, a 4 de noviembre de 1993  
EL DIRECTOR

  
ING. JOSÉ MANUEL COVARRUBIAS SOLÍS

JMCS\*EGLM\*gggt\*

**FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE INGENIERIA EN CIENCIAS DE LA TIERRA  
DEPARTAMENTO DE EXPLOTACION DEL PETROLEO**

**TITULO: SIMULACION NUMERICA DE YACIMIENTOS  
NATURALMENTE FRACTURADOS**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. FERNANDO RODRIGUEZ DE LA GARZA**

**JURADO:**

**PRESIDENTE: M.I. RAFAEL RODRIGUEZ NIETO.**

**VOCAL : DR. FERNANDO RODRIGUEZ DE LA GARZA.**

**SECRETARIO: ING. SALVADOR MACIAS HERRERA.**

**1er.SUPL. : ING. JAVIER MOLINA OCAMPO.**

**2do.SUPL. :ING. ROBERTO PADILLA SIXTO.**

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D.F.**

**JUNIO 1994**

# CONTENIDO

## RESUMEN.

ii

I.	INTRODUCCION.	1
II.	ECUACIONES DE FLUJO DE FLUIDOS EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.	2
	II.1 Modelo de Doble Porosidad.	2
	II.2 Modelo de Doble Porosidad-Doble Permeabilidad.	3
	II.3 Procesos en el Flujo de Fluidos Matriz-Fractura.	4
	II.3.1 Imbibición de Agua.	6
	II.3.2 Drene Gravitacional de Aceite.	8
	II.3.3 Expansión del Sistema Roca-Fluido.	9
	II.3.4 Reimbibición de Aceite.	11
	II.4 Interacción Matriz-Fractura.	12
III.	SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DE FLUJO.	22
	III.1 Ecuaciones de Flujo en Diferencias Finitas.	22
	III.1.1 Modelo de Doble Porosidad.	22
	III.1.2 Modelo de Doble Porosidad-Doble Permeabilidad.	23
	III.2 Solución del Sistema de Ecuaciones de Flujo en Diferencias no Lineal: Formulación Totalmente Implícita (T.I.)	24
	III.2.1 Modelo de Doble Porosidad.	24
	III.2.2 Modelo de Doble Porosidad-Doble Permeabilidad.	30
	III.2.3 Modelo de Doble Porosidad con Subdominios.	32
IV.	ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.	41
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	45
	NOMENCLATURA.	46
	REFERENCIAS.	48
	APENDICE A.	50
	APENDICE B.	55
	APENDICE C.	59
	TABLAS.	62
	FIGURAS.	68

## RESUMEN.

En este trabajo se presenta una revisión bibliográfica de la literatura relacionada con la simulación numérica del flujo multifásico en yacimientos naturalmente fracturados.

Se presenta la conceptualización de dos modelos matemáticos que permiten representar el flujo de fluidos en un yacimiento naturalmente fracturado: modelo de doble porosidad y modelo de doble porosidad-doble permeabilidad.

Se revisan los diversos procesos que intervienen en la transferencia de fluidos entre la matriz y la fractura; tales procesos son: imbibición de agua, drene gravitacional de aceite, expansión del sistema roca-fluido y reimpibición de aceite.

Se indican diferentes modelos empleados para describir la transferencia de fluidos entre la matriz y la fractura. Se muestra la evolución de dichos modelos, partiendo de modelos simples, que no consideran el detalle del flujo dentro de los bloques de matriz o lo hacen de manera aproximada, hasta llegar a modelos que si toman en consideración dichos detalles, a través del uso de subdominios.

Se presenta la solución numérica de las ecuaciones de flujo mediante diferencias finitas y se analiza en detalle la aplicación del método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones de flujo en diferencias no lineal. Se analiza la estructura matricial de los sistemas de ecuaciones generados por los diversos modelos y su implicación desde el punto de vista de trabajo computacional. Se encuentra que el modelo de doble porosidad permite siempre una reducción del sistema de ecuaciones, permitiendo resolver de una manera mas eficiente el sistema.

Finalmente, se muestra el uso de un simulador numérico con el empleo de datos de campo, para analizar el comportamiento de un yacimiento naturalmente fracturado, variando la presión capilar de la matriz, presión capilar de la fractura, dimensiones de los bloques de matriz, relación de permeabilidades matriz-fractura y niveles de los contactos; dichas variaciones se llevan a cabo con respecto a los datos de campo.

## I. INTRODUCCION.

La simulación numérica constituye un recurso adecuado para el estudio del comportamiento de un yacimiento naturalmente fracturado, como consecuencia del avance tecnológico que se ha tenido en el área de la computación en los últimos años. La Ingeniería de Yacimientos hace uso cada vez mas frecuente de esta herramienta para determinar la mejor forma de explotar los yacimientos y así poder incrementar su recuperación final de aceite a los costos mas bajos.

Un yacimiento naturalmente fracturado se encuentra formado por fracturas y bloques de matriz. De acuerdo a la conceptualización de dichos yacimientos, se han presentado en la literatura dos modelos para su estudio: 1) modelo de doble porosidad<sup>1</sup>, que considera a las fracturas como un medio continuo o transportador de fluidos hacia el pozo y a los bloques de matriz como un medio discontinuo o almacenador de fluidos, y 2) modelo de doble porosidad-doble permeabilidad<sup>2</sup>, el cual considera a ambos medios como continuos. Ambos medios son aclopadados a través de una función de transferencia.

Una correcta representación del modelo de transferencia de fluidos matriz- fractura conduce a la obtención de un comportamiento del yacimiento adecuado. Debido a la importancia que reviste la función de transferencia en el modelamiento correcto de un yacimiento naturalmente fracturado, se han propuesto en la literatura diversos modelos de transferencia de fluidos matriz-fractura, los cuales se pueden clasificar desde modelos simples<sup>7,8,10,11,12,13,14</sup>, hasta modelos complejos o de detalle<sup>15,16,18</sup>.

El propósito de este trabajo es mostrar los diversos modelos que representan un yacimiento naturalmente fracturado, así como dar una revisión bibliográfica detallada de las distintas funciones de transferencia de fluidos matriz-fractura propuestos en la literatura. Además de presentar la solución numérica del sistema de ecuaciones mediante diferencias finitas y de indicar la aplicación del método de Newton para la solución de dicho sistema. Y por último mostrar el efecto en el comportamiento del yacimiento al variar diversos parámetros, ésto a través del empleo de un simulador<sup>19</sup>.

---

<sup>1</sup>Referencias al final

## II. ECUACIONES DE FLUJO DE FLUIDOS EN YACIMIEN- TOS NATURALMENTE FRACTURADOS.

Los yacimientos fracturados conceptualmente se consideran constituidos por dos medios, fracturas y bloques de matriz, que interactúan en el dominio del espacio del yacimiento y del tiempo. Ambos medios tiene características distintas, siendo los bloques de matriz los que generalmente presentan una capacidad alta de almacenamiento de hidrocarburos y una permeabilidad baja, además de tener una porosidad primaria formada durante la depositación y litificación de los sedimentos. Las fracturas, al contrario de los bloques de matriz, generalmente presentan una capacidad de almacenamiento baja y una permeabilidad alta y constituyen un medio de porosidad secundaria formada a través de movimientos tectónicos. Con base en las ideas anteriores, se han propuesto en la literatura dos modelos teóricos para representar un yacimiento fracturado:

- a) Modelo de doble porosidad.
- b) Modelo de doble porosidad-doble permeabilidad.

A continuación se describen cada uno de estos modelos y se presentan las ecuaciones de flujo de fluidos en el yacimiento. Para esto, se considera el flujo multifásico de fluidos tipo beta, donde las fases gas y aceite se consideran constituidas por dos pseudo-componentes: el aceite y el gas obtenidos en la superficie después del separador. Las fases aceite y agua se suponen inmiscibles en tanto que la fase gas es soluble en la fase aceite pero no en el agua.

### II.1 Modelo de Doble Porosidad.

El modelo de doble porosidad<sup>1</sup> considera a las fracturas como un medio continuo y a los bloques de matriz como un medio discontinuo. Las fracturas son el medio por el cual los fluidos fluyen del yacimiento hacia los pozos, mientras que los bloques de matriz se consideran desconectados entre si; su interacción se da sólo a través de las fracturas. Los bloques de matriz presentan una alta capacidad de almacenamiento y contienen la mayor parte de los fluidos del yacimiento. El aceite contenido en los bloques de matriz se transfiere a las fracturas bajo diversos mecanismos, y de ahí fluye hacia los pozos.

Las ecuaciones diferenciales que describen el flujo multifásico de fluidos en un yacimiento fracturado conforme al modelo de doble porosidad, ver el apéndice A, son:  
En las fracturas:

Aceite,

$$\nabla [\lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D)] + \hat{q}_o + \hat{\tau}_{omf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right] \quad (\text{II.1})$$

Gas,

$$\nabla [\lambda_g (\nabla p_o + \nabla P c_{go} - \gamma_g \nabla D)] + \nabla [\lambda_o R_s (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D)] + \hat{q}_g + \hat{q}_o R_s + \hat{\tau}_{gmf} + (\hat{\tau}_o R_s)_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi R_s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right] \quad (\text{II.2})$$

Agua,

$$\nabla [\lambda_w (\nabla p_o - \nabla P c_{wo} - \gamma_w \nabla D)] + \hat{q}_w + \hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right] \quad (\text{II.3})$$

y en los bloques de matriz:

Aceite,

$$-\hat{\tau}_{omf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_m \quad (\text{II.4})$$

Gas,

$$-\hat{\tau}_{gmf} - (\hat{\tau}_o R_s)_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} \right]_m + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi R_s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_m \quad (\text{II.5})$$

Agua,

$$-\hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right]_m \quad (\text{II.6})$$

Nótese que las ecuaciones (II.1) a (II.3) son las ecuaciones convencionales para representar el flujo en un medio poroso continuo, aumentadas por los términos  $\hat{\tau}_{omf}$ ,  $\hat{\tau}_{gmf}$ ,  $\hat{\tau}_{wmf}$ , que representan el gasto volumétrico @ c.s. de aceite, gas y agua respectivamente por unidad de volumen de roca, que fluye entre los bloques de matriz y las fracturas que los rodean. Como se verá posteriormente, existen diversas expresiones o modelos, para representar matemáticamente el ritmo de transferencia de fluidos matriz-fractura.

Nótese que las relaciones adicionales de saturación y presión capilar, ecuaciones (A.14) a (A.19) del apéndice A, se introdujeron en las ecuaciones (II.1) a (II.6), para reducir el sistema a 6 ecuaciones con 6 incógnitas:  $p_o$ ,  $S_g$ ,  $S_w$ ,  $p_{om}$ ,  $S_{gm}$  y  $S_{wm}$ .

## II.2 Modelo de Doble Porosidad-Doble Permeabilidad

El modelo de doble porosidad-doble permeabilidad<sup>2</sup>, a diferencia del modelo de doble porosidad, considera que no sólo las fracturas forman un medio continuo sino también los bloques de matriz.

Ambos medios a su vez intercambian fluidos por diversos procesos que se discutirán más adelante. Las ecuaciones que describen el flujo multifásico en un yacimiento fracturado conforme a este modelo son:

En las fracturas:

Aceite,

$$\nabla [\lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D)] + \hat{q}_o + \hat{\tau}_{omf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right] \quad (\text{II.7})$$

Gas,

$$\nabla [\lambda_g (\nabla p_o + \nabla P c_{go} - \gamma_g \nabla D)] + \nabla [\lambda_o R s (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D)] + \hat{q}_g + \hat{q}_o R s + \hat{\tau}_{gmf} + (\hat{\tau}_o R s)_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi R s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right] \quad (\text{II.8})$$

Agua,

$$\nabla [\lambda_w (\nabla p_o - \nabla P c_{wo} - \gamma_w \nabla D)] + \hat{q}_w + \hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right] \quad (\text{II.9})$$

y en los bloques de matriz:

Aceite,

$$\nabla [\lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D)]_m - \hat{\tau}_{omf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_m \quad (\text{II.10})$$

Gas,

$$\nabla [\lambda_g (\nabla p_o + \nabla P c_{go} - \gamma_g \nabla D)]_m + \nabla [\lambda_o R s (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D)]_m - \hat{\tau}_{gmf} - \hat{\tau}_{omf} R s = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} \right]_m + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi R s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_m \quad (\text{II.11})$$

Agua,

$$\nabla [\lambda_w (\nabla p_o - \nabla P c_{wo} - \gamma_w \nabla D)]_m - \hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right]_m \quad (\text{II.12})$$

Nótese que bajo la suposición de que existe continuidad en el flujo a través de los bloques de matriz, las ecuaciones (II.10) a (II.12) son de la misma forma que las ecuaciones (II.7) a (II.9). El dominio de aplicación de estas ecuaciones es también el dominio del yacimiento. Nótese que las relaciones adicionales de saturación y presión capilar, se introdujeron en las ecuaciones (II.7) a (II.12), para reducir el sistema a 6 ecuaciones con 6 incógnitas, como en el modelo previo.

### II.3 Procesos en el Flujo de Fluidos Matriz-Fractura.

A continuación se analizan los procesos que intervienen en la transferencia de fluidos matriz-fractura, tales procesos dependen de la posición de los bloques de matriz en el yacimiento, relativo a los contactos agua-aceite y gas-aceite.

Con el objeto de estudiar los procesos de transferencia matriz-fractura Van Golf-Racht<sup>3</sup> divide al yacimiento en tres zonas, de acuerdo a la distribución de los fluidos: zonas de aceite, gas y agua. Los bloques de matriz se pueden localizar en cualquiera de estas zonas, siendo los procesos de transferencia matriz-fractura diferentes en cada una de ellas.

En la Figura 1, se muestra la distribución inicial de los fluidos en el yacimiento. Inicialmente la zona de aceite se encuentra entre los contactos gas-aceite y agua-aceite definidos por  $Z_{cgoi}$  y  $Z_{cwoi}$  respectivamente. Al nivel de  $Z_{cgoi}$ , la presión estática inicial,  $p_{si}$ , es igual a la presión de burbujeo,  $p_b$ . Los bloques de matriz localizados entre  $Z_{cgoi}$  y  $Z_{cwoi}$  se encuentran saturados por aceite y agua intersticial. Abajo de  $Z_{cwoi}$  los bloques se encuentran saturados por agua, mientras que arriba de  $Z_{cgoi}$  los bloques de matriz se encuentran saturados por gas y agua intersticial.

Cuando el yacimiento empieza a producir, se origina una expansión de la capa de gas y del acuífero, que ocasiona una modificación en la posición original de los contactos. En estas condiciones, la presión estática inicial  $p_{si}$  @  $Z_{cgoi}$  disminuye a un valor de  $p_s$ , y los nuevos contactos agua-aceite y gas-aceite se localizan en  $Z_{cwon}$  y  $Z_{cgon}$  respectivamente.

En condiciones dinámicas existen las siguientes zonas en el yacimiento, como se ilustra en la Figura 2:

- a) Zona invadida por gas, comprendida entre  $Z_{cgoi}$  y  $Z_{cgon}$
- b) Zona invadida por agua, comprendida entre  $Z_{cwoi}$  y  $Z_{cwon}$
- c) Zona de aceite, comprendida entre  $Z_{cgon}$  y  $Z_{cwon}$

Debido que  $p_s$  es menor que  $p_b$  @  $Z_{cgoi}$ , la zona de aceite es posible subdividirla en dos subzonas distintas; la primera está comprendida entre  $Z_{cgon}$  y la intersección de la presión de burbujeo  $p_b$  con el gradiente de la presión estática del aceite  $p_s$ , llamada zona de aceite saturado, la segunda se encuentra entre la intersección arriba mencionada y  $Z_{cwon}$ , llamada zona de aceite bajosaturado, donde  $p_s > p_b$ .

Los procesos que predominan en la transferencia de fluidos matriz-fractura en cada una de las zonas que dividen al yacimiento son los siguientes:

Zona	PROCESO PREDOMINANTE
Zona invadida de Gas:	Drene gravitacional y reimpibición de aceite.
Zona invadida de Agua:	Drene gravitacional de aceite e imbibición de agua.
Zona de aceite:	
a) Aceite Saturado	Expansión roca-fluido, reimpibición de aceite.
b) Aceite Bajosaturado	Expansión del sistema roca-fluido.

A continuación se describen cada uno de estos procesos.

### II.3.1 Imbibición de Agua.

El proceso de imbibición de agua ocurre cuando un bloque de matriz se encuentra saturado por un fluido no mojante, aceite, y el sistema de fracturas que rodean al bloque de matriz se encuentra saturado por un fluido mojante, agua. El agua presente en las fracturas se imbebe en los bloques de matriz, desplazando al aceite contenido en estos a través de fuerzas capilares entre la fractura y la matriz y las fuerzas gravitacionales. En estas condiciones, el mecanismo de imbibición de agua contribuye a la recuperación de aceite del yacimiento en forma importante.

Si el bloque de matriz se encuentra totalmente rodeado por agua, ver Figura 3, la expresión que representa el gasto de transferencia de aceite entre la matriz y la fractura @ c.s. es<sup>3</sup>:

$$\tau_{omf} = \frac{P_{c_{wom}} + (L_z - Z_{c_{wom}})\Delta\gamma_{wo}}{\frac{Z_{c_{wom}}}{\lambda_w} + \frac{(L_z - Z_{c_{wom}})}{\lambda_o}} L_x L_y \quad (II.13)$$

donde,

$Z_{c_{wom}}$  es la altura del frente de agua dentro del bloque de matriz, medida desde la base del bloque de matriz.

$L_z$  altura del bloque de matriz.

$L_x$  longitud del bloque de matriz en dirección x.

$L_y$  longitud del bloque de matriz en dirección y.

$\Delta\gamma_{wo}$  es la diferencia de pesos específicos entre el agua y el aceite,

$$\Delta\gamma_{wo} = \gamma_w - \gamma_o$$

$P_{c_{wom}}$  presión capilar agua-aceite en la matriz en un proceso de imbibición,

$$P_{c_{wom}}(S_w) = p_{om} - p_{wm}$$

$\lambda_p$  movilidad de la fase p,  $\lambda_p = \frac{Kk_{r,p}}{\mu_p}$ ,  $p = o, g, w$

Nótese que la presión capilar,  $P_{c_{wom}}$ , puede expresarse en términos de una altura

equivalente de una columna de fluidos,  $hc_{wom}$  a través de la siguiente relación:

$$Pc_{wom} = hc_{wom}\Delta\gamma_{wo} \quad (II.14)$$

Cuando las fuerzas gravitacionales gobiernan el desplazamiento se tiene, de la ecuación (II.13), que:

$$(L_z - Z_{cwom})\Delta\gamma_{wo} \gg Pc_{wom} = hc_{wom}\Delta\gamma_{wo} \quad (II.15)$$

Esto es posible si:

a) El bloque de matriz es lo suficientemente grande, y  $Z_{cwom}$  lo suficientemente pequeña, de manera que  $(L_z - Z_{cwom}) \gg hc_{wom}$ .

b) La mojabilidad de la roca por el agua es pequeña, por lo tanto  $Pc_{wom}$  es pequeña.

En este caso la ecuación (II.13) puede ser reescrita como:

$$\tau_{omf} = \frac{(L_z - Z_{cwom})\Delta\gamma_{wo}}{\frac{Z_{cwom}}{\lambda_w} + \frac{(L_z - Z_{cwom})}{\lambda_o}} L_x L_y \quad (II.16)$$

Ahora bien, cuando las fuerzas capilares gobiernan el desplazamiento se tiene:

$$Pc_{wom} = hc_{wom}\Delta\gamma_{wo} \gg (L_z - Z_{cwom})\Delta\gamma_{wo} \quad (II.17)$$

Esto ocurre cuando:

a) El bloque de matriz es pequeño,  $L_z \ll hc_{wom}$ .

b) El frente de desplazamiento en el bloque ha avanzado tanto que  $Z_{cwom} \approx L_z$  y  $hc_{wom} > 0$ .

En este caso la ecuación (II.13) se puede reescribir como:

$$\tau_{omf} = \frac{Pc_{wom}}{\frac{Z_{cwom}}{\lambda_w} + \frac{(L_z - Z_{cwom})}{\lambda_o}} L_x L_y \quad (II.18)$$

Si el bloque de matriz se encuentra parcialmente rodeado por agua, Figura 4, la ecuación que representa el gasto de transferencia de aceite entre la matriz y la fractura @ c.s. es<sup>3</sup>:

$$\tau_{omf} = \frac{Pc_{wom} + (Z_{cwo} - Z_{cwom})\Delta\gamma_{wo}}{\frac{Z_{cwom}}{\lambda_w} + \frac{(L_z - Z_{cwom})}{\lambda_o}} L_x L_y \quad (II.19)$$

donde:

$Z_{cwo}$  es la altura del frente de agua en la fractura medida desde la base del bloque.

En las ecuaciones previas se supone que el desplazamiento de aceite por imbibición de agua se lleva a cabo en la dirección vertical, imbibiendo el agua en la cara inferior del bloque y desplazando el aceite por la cara superior de este, no afectando al proceso de imbibición la posición del frente de agua en la fractura vertical adjunta al bloque, ya que  $hc_{wom} > (Z_{cwo} - Z_{cwom})$ .

Si  $Z_{cwom} < Z_{cwo}$  las fuerzas gravitacionales contribuirán al desplazamiento de aceite. Por lo tanto, el desplazamiento de aceite de un bloque de matriz completamente rodeado por agua tendrá un gasto de transferencia mayor que si el bloque se encuentra parcialmente rodeado por agua.

### II.3.2 Drene Gravitacional de Aceite.

El mecanismo de drene gravitacional de aceite ocurre cuando la fase no mojante, gas, presente en las fracturas, desplaza a la fase mojante, aceite, en la matriz. En este mecanismo, las fuerzas capilares actúan en contra del desplazamiento mientras que las fuerzas gravitacionales actúan a favor.

Cuando el bloque de matriz se encuentra rodeado por gas, Figura 5, el gasto de transferencia matriz-fractura @ c.s.es<sup>3</sup>:

$$\tau_{omf} = \frac{(L_z - D_{gom})\Delta\gamma_{og} - Pc_{gom}}{\frac{D_{gom}}{\lambda_g} + \frac{(L_z - D_{gom})}{\lambda_o}} L_x L_y \quad (II.20)$$

donde:

$D_{gom}$  es la profundidad del frente de gas en el bloque de matriz, medida a partir de la cima del bloque de matriz.

$\Delta\gamma_{og}$  es la diferencia de pesos específicos del aceite y del gas,

$$\Delta\gamma_{og} = \gamma_o - \gamma_g.$$

$Pc_{gom}$  presión capilar gas-aceite en la matriz en un proceso de drene,

$$Pc_{gom} = p_{gm} - p_{om}.$$

Nótese que cuando un bloque de matriz está inicialmente saturado por aceite y agua intersticial y rodeado por gas, la presión capilar en la matriz es igual a la presión capilar de entrada,  $Pc_{gom}(S_{gm} = 0) = Pc_e$ . El ritmo inicial de transferencia de aceite matriz-fractura, de acuerdo con la ecuación (II.20), está dado por:

$$\tau_{omfi} = \lambda_o \frac{L_x L_y}{L_z} (\Delta\gamma_{og} L_z - Pc_e) \quad (II.21)$$

Esta ecuación indica que el drene gravitacional de aceite ocurre cuando:

$$\Delta\gamma_{og} L_z > Pc_e \quad (II.22)$$

o bien, en términos de la altura capilar equivalente a  $Pc_e$ ,

$$\Delta\gamma_{og} L_z > hc_e \Delta\gamma_{og} \quad (II.23)$$

o sea que el tamaño del bloque de matriz debe ser mayor que la altura capilar de entrada,  $hc_e$ .

donde,

$hc_e$  es la altura de la columna de fluidos equivalente a  $Pc_e$ .

El proceso termina cuando la posición del contacto gas-aceite dentro del bloque de matriz es tal que la presión hidrostática de la columna de aceite, descontada la del gas es equivalente a  $Pc_h$ .

Para el caso de un bloque de matriz rodeado parcialmente por gas, se procede de forma análoga al caso de un bloque totalmente rodeado por gas. La ecuación que representa el gasto de transferencia es<sup>3</sup>:

$$\tau_{omf} = \frac{(D_{go} - D_{gom})\Delta\gamma_{og} - Pc_{gom}}{\frac{D_{gom}}{\lambda_g} + \frac{(L_x - D_{gom})}{\lambda_o}} L_x L_y \quad (II.24)$$

donde,

$D_{go}$  profundidad del frente de gas en la fractura medida a partir de la cima del bloque de matriz

Nótese que el proceso de drene gravitacional de aceite, para este caso ocurre cuando, ver Figura 6:

$$\Delta\gamma_{og} D_{go} > hc_e \Delta\gamma_{og} \quad (II.25)$$

o sea que la profundidad del frente de gas en la fractura,  $D_{go}$ , debe ser mayor a la altura capilar de entrada,  $hc_e$ . Y el proceso termina de igual forma en que se menciono en el caso anterior.

Debido a que a una determinada posición del contacto gas-aceite en el bloque de matriz el desplazamiento cesa, parte del aceite queda sin recuperar, con lo que se forma una zona de aceite no recuperable, retenido por capilaridad. La altura de la zona de aceite no recuperable puede visualizarse a través de la curva de presión capilar de drene, ver Figura 7.

### II.3.3 Expansión del Sistema Roca-Fluido.

La expansión del sistema roca-fluido se debe a la existencia de una diferencia de presiones entre la matriz y la fractura lo que provoca la expulsión del aceite de los

bloques de matriz y el depresionamiento del sistema. El aceite presente en los bloques de matriz, y la misma roca, se expanden desalojando hacia las fracturas el aceite contenido en los bloques de matriz. Debido a que este mecanismo es importante en los bloques de matriz que se localizan en la zona en que la presión de burbujeo es menor a la presión existente, el gas se encuentra totalmente disuelto en el aceite, con lo que el mecanismo de transferencia es el resultado de la expansión del aceite y de la matriz, o sea; El ritmo de expansión del sistema roca-fluido es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{hc}b_o) = \frac{\partial(\phi_{hc}b_o)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (II.26)$$

pero,

$$\frac{\partial \phi_{hc} b_o}{\partial p} = \phi_{hc} \frac{\partial b_o}{\partial p} + b_o \frac{\partial \phi_{hc}}{\partial p} \quad (II.27)$$

$$c_o = \frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p}$$

$$c_r = \frac{1}{\phi_{hc}} \frac{\partial \phi_{hc}}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{hc}b_o) = \phi_{hc}b_o c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (II.28)$$

donde:

$c_t = c_o + c_r$ , compresibilidad total del sistema.

El proceso de transferencia debido a este mecanismo será mas importante si la compresibilidad y el ritmo de declinación de la presión son mas grandes, mientras que el ritmo de transferencia por unidad de volumen de roca aumenta si las dimensiones del bloque de matriz son mas pequeñas. Si las dimensiones de los bloques de matriz disminuyen, la superficie de contacto matriz-fractura por unidad de volumen es mayor y por lo tanto el ritmo de transferencia aumenta.

En los bloques de matriz que se encuentran en la zona de aceite saturado, donde la presión de saturación es mayor a la presión existente, el mecanismo de desplazamiento del aceite se deberá primordialmente al empuje de gas disuelto liberado, ya que si bien es cierto que tanto el aceite como la roca continuarán expandiéndose, su efecto resultará despreciable puesto que la compresibilidad del gas es mucho mayor.

Cuando la saturación de gas en los bloques de matriz es menor que su saturación crítica, el gas liberado permanecerá inmóvil y su expansión empujará al aceite alojado

en la matriz hacia las fracturas. Cuando el gas liberado constituye una fase móvil, el mecanismo de empuje dentro del bloque de matriz es una combinación entre empuje de gas liberado y la segregación del gas.

### II.3.4 Reimbibición de Aceite.

Dos fenómenos importantes asociados al mecanismo de drene gravitacional de aceite son: *Reimbibición de Aceite* y *Continuidad Capilar*. Antes de discutir el fenómeno de reimbibición de aceite, se hace notar que los mecanismos de transferencia mencionados previamente, son usualmente descritos mediante modelos simplificados basados en la interacción individual de los bloques de matriz con las fracturas. Ahora, en lugar de considerar la interacción individual de los bloques de matriz con las fracturas, se introduce el concepto de un conjunto de bloques de matriz apilados, interactuando entre sí y con las fracturas como resultado de la continuidad capilar, que ocurre principalmente en las caras inferior y superior de los bloques de matriz.

El proceso de reimbibición de aceite se refiere al caso en que el aceite drenado gravitacionalmente de un bloque de matriz rodeado por gas, se imbebe parcial o totalmente en los bloques de matriz situados mas abajo en el yacimiento.

Firoozabadi<sup>4,5</sup> desarrolló una solución analítica al problema de reimbibición para el caso de flujo de aceite unidimensional vertical. Aplicando la ley de Darcy, demostró que el gasto de drene gravitacional de un bloque de matriz es menor o igual al gasto de reinfiltración, lo que implica que el aceite drenado de un bloque de matriz se reinfiltra en un bloque inferior y que por lo tanto no existe flujo de aceite a través de las fracturas en la zona de gas.

La ecuación que representa el gasto de drene gravitacional en la cara inferior del bloque de matriz ( $z = 0$ ), y el gasto de reinfiltración en la cara superior ( $z = L_z$ ), obtenida por Festoy<sup>6</sup> es:

$$\tau_{omf} = \left( \frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \right)_{mf} \left[ \Delta\gamma_{og} - \frac{dP_{c_{gom}}}{dS_{om}} \frac{dS_{om}}{dz} \right] L_x L_y \quad (\text{II.29})$$

La Figura 8 muestra la representación esquemática del perfil de saturación de un bloque de matriz para dos posibles casos. Se observa que el término  $\frac{dS_{om}}{dz}$  puede ser positivo, negativo o cero. El término  $\frac{dP_{c_{gom}}}{dS_{om}}$  siempre es menor que cero.

En las condiciones iniciales, cuando el bloque de matriz se encuentra totalmente saturado de aceite,  $\frac{dS_{om}}{dz} = 0$ . Si además  $P_{c_e}$  es cero, se obtiene el gasto de drene máximo,

o sea;

$$[\tau_{omf}]_{z=0} = \left( \frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \right)_{mf} \Delta\gamma_{og} L_x L_y \quad (II.30)$$

Iniciado el proceso de drene gravitacional, se produce una desaturación en el bloque de matriz,  $[\frac{dS_{om}}{dz}]_{z=0} < 0$ , y el gasto de drene gravitacional de aceite disminuye. Por lo tanto, el gasto de drene gravitacional de aceite en la cara inferior es menor que el máximo,

$$[\tau_{omf}]_{z=0} = \left( \frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \right)_{mf} \left[ \Delta\gamma_{og} - \frac{dPc_{gom}}{dS_{om}} \frac{dS_{om}}{dz} \right] L_x L_y \leq \left( \frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \right)_{mf} \Delta\gamma_{og} L_x L_y \quad (II.31)$$

Con respecto al gasto de reinfiltración, Firoozabadi<sup>4</sup> observo que si se suministra demasiado líquido en  $z = L_x$ , y se cumple que  $[S_{om}]_{z=L_x} = 1$  y  $[\frac{dS_{om}}{dz}]_{z=L_x} = 0$ , entonces el gasto de reinfiltración es:

$$[\tau_{omf}]_{z=L_x} = \left( \frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \right)_{mf} \Delta\gamma_{og} L_x L_y \quad (II.32)$$

Sin embargo, si un bloque de matriz está parcialmente saturado y  $[S_{om}]_{z=L_x} = 1$ , entonces,  $[\frac{dS_{om}}{dz}]_{z=L_x} > 0$  y el gasto de reinfiltración es:

$$[\tau_{omf}]_{z=L_x} = \left( \frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \right)_{mf} \left[ \Delta\gamma_{og} + \frac{dPc_{gom}}{dS_{om}} \frac{dS_{om}}{dz} \right] L_x L_y \geq \left( \frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \right)_{mf} \Delta\gamma_{og} L_x L_y \quad (II.33)$$

Nótese que al aumentar  $[\frac{dS_{om}}{dz}]_{z=L_x}$  el gasto de reinfiltración también aumenta.

La implicación de las ecuaciones (II.30) y (II.32) es que inicialmente el gasto de drene y de reinfiltración para un bloque de matriz de flujo unidimensional son iguales, pero debido a la desaturación, el gasto máximo de reinfiltración es mayor que el gasto máximo de drene.

Festoy<sup>6</sup> en su artículo hace referencia a las implicaciones de la continuidad en los bloques de matriz, cuando el mecanismo de transferencia es el de drene gravitacional. En este caso, la pila de bloques se comporta como un bloque sencillo de longitud igual al de la pila, lo que evita la retención capilar del aceite en los bloques superiores, obteniéndose una mayor recuperación del aceite. Además, llevó a cabo un estudio en el que considero diferentes áreas de contacto entre los bloques de matriz y observo que aún cuando el área de contacto es pequeña, la recuperación de aceite aumenta considerablemente, comparado con el caso en que el área de contacto es cero y no existe continuidad capilar.

## II.4 Interacción Matriz-Fractura.

Uno de los aspectos mas complejos e importante al modelar un yacimiento fracturado es representar correctamente la transferencia de fluidos entre los bloques de matriz y el sistema de fracturas.

Algunos autores<sup>7,8,10,11,13,14</sup> han representado la interacción matriz-fractura por medio de modelos simplificados, los cuales suponen a los bloques de matriz como un medio con propiedades promedio, sin considerar el detalle de flujo dentro de ellos. Otros autores<sup>12,15,16,18</sup>, han representado la interacción modelando el detalle del flujo de fluidos dentro de los bloques de matriz y su efecto en la transferencia de fluidos con el sistema de fracturas.

Con base en el modelo desarrollado por Warren y Root<sup>1</sup>, para el flujo monofásico en yacimientos naturalmente fracturados, se han propuesto diversos modelos simplificados para describir la transferencia de fluidos entre los bloques de matriz y el sistema de fracturas, para el caso multifásico. A continuación se presenta un análisis de la evolución que han experimentado los modelos simplificados.

Kazemi y col<sup>7</sup>. fueron los pioneros en extender el modelo de Warren y Root<sup>1</sup> para flujo multifásico, considerando unicamente fuerzas capilares y fuerzas viscosas en la transferencia de fluidos matriz-fractura, no incluyendo fuerzas gravitacionales. El ritmo de flujo matriz-fractura de la fase  $p$  por unidad de volumen de roca, conforme a Kazemi y col.<sup>7</sup> es el siguiente:

$$\hat{\tau}_{pmf} = \sigma K_m \left( \frac{k_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{mf} [p_{pm} - p_p] \quad (\text{II.34})$$

$$p = o, g, w$$

donde:

- $\hat{\tau}_{pmf}$  gasto volúmetrico de transferencia matriz-fractura por unidad de volumen de roca,  $p = o, g, w$
- $\sigma$  factor de forma, dado por el área expuesta al flujo por el bloque de matriz, por unidad de volumen de roca y una longitud característica asociada con el flujo matriz-fractura. Gilman y Kazemi<sup>10</sup> lo definieron de la siguiente forma:

$$\sigma = 4 \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) \quad (\text{II.35})$$

Para el caso de bloques de matriz anisotrópicos, Rossen y Shen<sup>14</sup> introdujeron la

anisotropía definiendo el siguiente factor:

$$F_{sk} = 4 \left( \frac{K_{mx}}{L_x^2} + \frac{K_{my}}{L_y^2} + \frac{K_{mz}}{L_z^2} \right) \quad (\text{II.36})$$

Nótese, que el caso isotrópico,  $K_{mx} = K_{my} = K_{mz} = K_m$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$F_{sk} = \sigma K_m \quad (\text{II.37})$$

estableciéndose así la relación entre los factores  $\sigma$  y  $F_{sk}$ .

Posteriormente Thomas, Dixon y Pierson<sup>8</sup> en 1983 hacen uso de pseudofunciones, tanto en el sistema de fracturas como en los bloques de matriz, para tomar en cuenta los efectos gravitacionales en la transferencia de fluidos. Las pseudofunciones, según los autores, se obtienen aplicando el concepto de equilibrio vertical, sugerido por Coats<sup>9</sup>, sin embargo no presentan el detalle de su cálculo. Las ecuaciones que describen los ritmos de transferencia de los fluidos, según estos autores, son:

Aceite,

$$\hat{\tau}_{omf} = \sigma K_m \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} (p_{om} - p_o) \quad (\text{II.38})$$

Gas,

$$\hat{\tau}_{gmf} = \sigma K_m \left( \frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \right)_{mf} [(p_{om} - p_o) + (\hat{P}c_{gom} - \hat{P}c_{go})] + \sigma K_m \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} (p_{om} - p_o) \quad (\text{II.39})$$

Agua,

$$\hat{\tau}_{wmf} = \sigma K_m \left( \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \right)_{mf} [(p_{om} - p_o) + (\hat{P}c_{wo} - \hat{P}c_{wom})] \quad (\text{II.40})$$

donde:

$\hat{P}c$  pseudopresión capilar, que incluye los efectos gravitacionales.

En el mismo año en que Thomas, Dixon y Pierson<sup>8</sup> presentaron su modelo, otros autores, Gilman y Kazemi<sup>10</sup>, presentaron algunas modificaciones al modelo ya propuesto por Kazemi y col.<sup>7</sup>, ecuación (II.34). Gilman y Kazemi<sup>10</sup> intentaron manejar los efectos gravitacionales en el término de intercambio matriz-fractura, que no fueron incluidos

anteriormente<sup>7</sup>, definiendo diferentes profundidades para la matriz y para las fracturas dentro de una celda,  $D_m$  y  $D$  respectivamente como se muestra a continuación:

$$\hat{\tau}_{pmf} = \sigma K_m \left( \frac{k_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{mf} [p_{pm} - p_p - \gamma_p(D_m - D)]; \quad p = o, g, w \quad (II.41)$$

La diferencia entre  $D_m$  y  $D$ , representa la fuerza gravitacional. En ese trabajo, sin embargo, no se menciona la manera de definir el plano de referencia para las profundidades,  $D_m$  y  $D$ .

Se observa en la ecuación (II.37), que la diferencia entre las presiones capilares de la fractura y de la matriz para un proceso de imbibición representa la fuerza de empuje de imbibición, que interviene en el proceso de transferencia de fluidos matriz-fractura.

El término gravitacional introducido por Gilman y Kazemi<sup>10</sup> en la ecuación (II.41) es una aproximación estática. Esto implica que conforme el yacimiento es explotado, el ritmo de transferencia entre la matriz y la fractura, debido a efectos gravitacionales, permanece constante y no se toman en cuenta los cambios de saturación en los bloques de matriz con el tiempo. Para esto, Sonier<sup>11</sup> propone una aproximación dinámica. En el modelo de Sonier se supone que existe una segregación local de los fluidos en cada bloque de matriz y se obtienen expresiones que consideran los niveles de los fluidos en las fracturas y en la matriz en función del tiempo. Las expresiones para los ritmos de transferencia propuesta por Sonier<sup>11</sup> son las siguientes:

Aceite,

$$\hat{\tau}_{omf} = \sigma K_m \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} [p_o - p_{om} - d\gamma_{go}(Z_{cog} - Z_{cogm}) - d\gamma_{wo}(Z_{cwo} - Z_{cwom})] \quad (II.42)$$

Gas libre,

$$\hat{\tau}_{gmf} = \sigma K_m \left( \frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \right)_{mf} [p_o - p_{om} - (P_{cgom} - P_{cgo}) + d\gamma_{go}(Z_{cgo} - Z_{cgom})] \quad (II.43)$$

Agua,

$$\hat{\tau}_{wmf} = \sigma K_m \left( \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \right)_{mf} [p_o - p_{om} - (P_{cwo} - P_{cwom}) + d\gamma_{wo}(Z_{cwo} - Z_{cwom})] \quad (II.44)$$

donde:

$d\gamma_{go}$  representa la mitad de la diferencia del gradiente aceite-gas.

$d\gamma_{wo}$  representa la mitad de la diferencia del gradiente aceite-agua.

El ritmo de transferencia de aceite matriz-fractura debido a segregación, depende de la longitud del bloque de matriz y del cambio de saturación en los bloques de matriz

y en las fracturas que lo rodean. En el modelo de Sonier<sup>11</sup>, las saturaciones se convierten en niveles de fluidos hipotéticos, suponiendo segregación completa de las fases.

Las expresiones que definen los niveles de fluidos en la matriz y en las fracturas se obtienen de la manera indicada a continuación:

Considérese un bloque de matriz en la región aceite-agua con una distribución de saturaciones en la fractura, como se muestra en la Figura 9. Conforme a este esquema, la saturación de agua en las fracturas está dada por:

$$S_w = \frac{Z_{cwo}(1 - S_{orw}) + (L_z - Z_{cwo})S_{wc}}{L_z} \quad (\text{II.45})$$

Despejando  $Z_{cwo}$ , la posición de la interfase agua-aceite dentro de la fractura, se tiene:

$$Z_{cwo} = \frac{(S_w - S_{wc})L_z}{1 - S_{orw} - S_{wc}} \quad (\text{II.46})$$

Considerando el mismo bloque de matriz, con una distribución dada de saturaciones, se puede obtener de manera similar una expresión para la posición de la interfase agua-aceite en la matriz:

$$Z_{cwoM} = \frac{(S_{wm} - S_{wcm})L_z}{1 - S_{orwm} - S_{wcm}} \quad (\text{II.47})$$

Un análisis similar para la región gas-aceite nos proporciona las siguientes expresiones para la posición de la interfase gas-aceite en las fracturas y en la matriz:

$$Z_{cgo} = \frac{(S_g - S_{gc})L_z}{1 - S_{org} - S_{gc}} \quad (\text{II.48})$$

y

$$Z_{cgoM} = \frac{(S_{gm} - S_{gcm})L_z}{1 - S_{orgm} - S_{gcm}} \quad (\text{II.49})$$

donde:

- $S_{orw}$  saturación de aceite residual en la zona de agua en la fractura.
- $S_{wc}$  saturación de agua congénita en la fractura.
- $S_{orwm}$  saturación de aceite residual en la zona de agua en la matriz.
- $S_{wcm}$  saturación de agua congénita en la matriz.
- $Z_{cgo}$  altura del contacto gas-aceite en la fractura, medida desde la base del bloque de matriz.
- $Z_{cgoM}$  altura del contacto gas-aceite en la matriz, medida desde la base del bloque de matriz.
- $S_{gc}$  saturación de gas congénita en la fractura.
- $S_{gcm}$  saturación de gas congénita en la matriz.
- $S_{org}$  saturación de aceite residual en la zona de gas en la fractura.
- $S_{orgm}$  saturación de aceite residual en la zona de gas en la matriz.

Por otro lado, Gilman y Kazemi<sup>12</sup> consideraron el desplazamiento viscoso en los bloques de matriz, causado por un gradiente de presión en la fractura. Esta contribución había sido despreciada en los modelos de transferencia hasta entonces publicados<sup>7,8,10,11</sup>.

Gilman y Kazemi<sup>12</sup> discuten las consecuencias de considerar los efectos viscosos en la transferencia. En el modelo convencional, los bloques de matriz se consideran discontinuos, por lo que no existe comunicación entre ellos. En el modelo mejorado, cuando el gradiente de presión en la fractura, impuesto en cada uno de los bloques de matriz, es mayor que el gradiente de presión capilar existente en la matriz, el gradiente de presión puede causar que los fluidos en la fractura fluyan hacia la matriz en la cara corriente arriba, mientras que los fluidos contenidos en la matriz se mueven hacia la fractura en la cara corriente abajo.

Las expresiones propuestas para el ritmo de transferencia matriz-fractura considerando gradientes de presión en las fracturas, son:

$$\hat{\tau}_{mf_p} = \sigma K_m \left[ (\bar{\omega}_{px} + \bar{\omega}_{py} + \bar{\omega}_{pz}) \lambda_p + (3 - \bar{\omega}_{px} - \bar{\omega}_{py} - \bar{\omega}_{pz}) \lambda_{pm} \right] \left[ p_p - p_{pm} - \gamma_p (D - D_m) \right] + \left[ \bar{\omega}_{px} (1 - \bar{\omega}_{px}) g_{px} + \bar{\omega}_{py} (1 - \bar{\omega}_{py}) g_{py} + \bar{\omega}_{pz} (1 - \bar{\omega}_{pz}) g_{pz} \right] (\lambda_p - \lambda_{pm}) L_m \quad (11.50)$$

$$p = o, g, w$$

El factor de peso,  $\omega$ , a diferencia del propuesto también por los mismos autores en su artículo anterior<sup>10</sup>, es igual a 1 si la fractura es corriente arriba en ambas direcciones; es igual a cero si la matriz es corriente arriba en ambas direcciones y es igual a 0.5 si la fractura es corriente arriba en una dirección y corriente abajo en la dirección opuesta.

donde:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{px} = 1.0 & \quad \text{si} & \quad p_p - \gamma_p D - g_{px} \frac{L_m}{2} > p_{pm} - \gamma_p D_m \\ \bar{\omega}_{px} = 0.0 & \quad \text{si} & \quad p_p - \gamma_p D + g_{px} \frac{L_m}{2} < p_{pm} - \gamma_p D_m \\ \bar{\omega}_{px} = 0.5 & \quad \text{si} & \quad g_{px} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma_p \frac{\partial D}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Siendo  $g_p$  el gradiente de potencial en la fractura.

Gilman y Kazemi<sup>12</sup> también presentan expresiones generales para  $\hat{\tau}_{mf_p}$  que consideran un medio anisotrópico y dimensiones variables en el bloque de matriz.

Dean y Lo<sup>13</sup> al igual que Thomas, Dixon y Pierson<sup>8</sup> demuestran que el efecto gravitacional puede ser incluido a través del uso de pseudofunciones de presión capilar, en la

matriz y en la fractura, sin la necesidad de incluirlo explícitamente en las ecuaciones. Las pseudofunciones de presión capilar obtenidas por Dean y Lo<sup>13</sup>, además de considerar los efectos gravitacionales en los bloques de matriz, toman en cuenta el efecto de propiedades no uniformes dentro de los bloques de matriz. Las pseudofunciones de presión capilar para la matriz y para las fracturas se generan modificando por ensaye y error las presiones capilares en el modelo simplificado hasta ajustar los resultados correspondientes a una simulación del flujo detallado en un bloque de matriz, empleando una malla fina.

Si se comparan los resultados obtenidos de la simulación de un modelo de doble porosidad, empleando por un lado pseudofunciones y por otro lado valores de presión capilar obtenidos en el laboratorio, se tiene que la diferencia en la recuperación es debida a efectos gravitacionales, que por un lado son considerados a través del uso de pseudofunciones, mientras que por otro lado no los considera. Con respecto al modelo de doble porosidad-doble permeabilidad, los efectos gravitacionales son tomados en cuenta debido a que existe continuidad en el flujo a través de los bloques de matriz, lo cual se refleja en la recuperación.

Un inconveniente de la metodología propuesta por Dean y Lo para generar las pseudofunciones es el tiempo y el esfuerzo computacional requerido. Rossen y Shen<sup>14</sup> presentaron a su vez un procedimiento simplificado para calcular las pseudofunciones de presión capilar tanto en la fractura como en la matriz. Mencionan que la pseudofunciones de presión capilar para la fractura se calculan directamente de las propiedades de la roca y de las dimensiones de la matriz, mientras que las pseudofunciones de presión capilar para la matriz se obtiene de una sola simulación en un modelo de malla fina en un sólo bloque de matriz, sin la necesidad de realizar un ajuste del comportamiento en simulaciones del flujo en dicho bloque de matriz.

Las pseudofunciones de presión capilar para la matriz y para la fractura en un proceso de drene gravitacional de aceite, considerando un bloque de matriz totalmente rodeado por gas, como se muestran en el Apéndice C, son las siguientes:

Para las fracturas,

$$[\hat{P}c_{g_o}]_{S_g=1, S_{gm}=0} = \frac{K_{mz}}{F_{sk}L_z}(\gamma_o - \gamma_g) \quad (II.51)$$

y en los bloques de matriz,

$$[\hat{P}c_{g_{om}}]_{S_g=1, S_{gm}=0} = \frac{K_{mz}Pc_e}{L_z^2 F_{sk}} \quad (II.52)$$

Conforme el aceite se drena, la fractura adyacente al bloque de matriz permanece llena de gas y por lo tanto  $Pc_{g_o}$  permanece constante. Sin embargo,  $S_{gm}$  cambia, con lo que Rossen y Shen<sup>14</sup> calcularon  $Pc_{g_{om}}$  en función de  $S_{gm}$  de una sola simulación de un modelo de malla fina en un sólo bloque de matriz a presión constante.

El modelo de malla fina permite conocer  $S_{gm}$  y  $\frac{dS_{gm}(t)}{dt}$ , en función del tiempo, con lo que se obtiene la siguiente pseudofunción para la matriz:

$$\hat{P}c_{gom}(t) = \hat{P}c_{go} - \frac{\phi_m}{F_{sk} \frac{k_{ro}}{\mu_o}} \frac{dS_{gm}(t)}{dt} \quad (II.53)$$

Cuando la fractura está parcialmente saturada con gas,  $0 < S_g < 1$ , las pseudofunciones se obtienen a partir de las generadas en el caso en que la saturación de gas en las fracturas es total,  $S_g = 1$ , modificadas como sigue:

En los bloques de matriz,

$$\hat{P}c_{gom}(S_{gm}, S_g) = S_g \hat{P}c_{gom} \left( \frac{S_{gm}}{S_g} \right) \quad (II.54)$$

y en las fracturas,

$$\hat{P}c_{go}(S_g) = \frac{K_{mz}(\gamma_o - \gamma_g)}{L_z F_{sk}} S_g \quad (II.55)$$

El procedimiento dado para obtener las pseudofunciones para el caso de drene gravitacional, también se emplea para el caso de imbibición de agua. Considérese un bloque de matriz saturado con aceite y agua congénita,  $S_{om} + S_{wim} = 1$ , rodeado por fracturas saturadas totalmente por agua  $S_w = 1.0$ .

Para  $S_w = 1.0$

Para las fracturas,

$$[\hat{P}c_{wo}]_{S_w=1} = \left( \frac{K_{mz}}{L_z F_{sk}} \right) (\gamma_o - \gamma_w) \quad (II.56)$$

y en los bloques de matriz,

$$\hat{P}c_{wom}(S_{wm}) = \hat{P}c_{wo} + \left( \frac{\phi_m}{F_{sk} \frac{k_{ro}}{\mu_o}} \right) \left( 1 + \frac{k_{ro} \mu_w}{k_{rw} \mu_o} \right) (S_{wm}) \frac{dS_{wm}}{dt} \quad (II.57)$$

Para el caso en que los bloques de matriz esten parcialmente rodeados por agua,  $S_w < 1.0$ , se tiene:

En los bloques de matriz,

$$\hat{P}c_{wom}(S_{wm}, S_w) = S_w \hat{P}c_{wom} \left( \frac{S_{wm} - S_{wim}}{S_w} + S_{wim} \right) \quad (II.58)$$

y para las fracturas,

$$\hat{P}c_{wo}(S_w) = S_w \left( \frac{K_{mz}}{F_{sk} L_z} \right) (\gamma_o - \gamma_w) \quad (II.59)$$

Las pseudofunciones obtenidas, para representar los procesos de drene gravitacional e imbibición de agua, consideran los efectos capilares y los efectos gravitacionales.

Rossen y Shen calcularon las pseudofunciones capilares para la fractura y para la matriz empleando las ecuaciones (II.51) y (II.53) respectivamente. También simularon, a través del modelo de malla fina en la matriz, el caso de un depresionamiento. Los resultados obtenidos por medio de las pseudofunciones fue comparado con los obtenidos del modelo de malla fina, y encontraron que es posible aplicar las pseudofunciones obtenidas a presión constante, para el caso en que la presión cambia a lo largo del proceso.

A través del uso de pseudofunciones se ha tratado de representar, en modelos simplificados, el efecto de los gradientes de presión y saturación dentro de los bloques de matriz en el intercambio de fluidos matriz-fractura. En ocasiones, la función de transferencia de fluidos matriz-fractura basada en estos conceptos no es adecuada, ya que es una aproximación a los procesos que intervienen dentro de los bloques de matriz. De ahí que es necesario recurrir al empleo del método de subdominios<sup>15,16,18</sup>.

El objetivo del método de subdominios es captar el detalle del flujo de fluidos en los bloques de matriz, contenidos en una celda numérica, a través de la discretización de dichos bloques de matriz, donde el dominio de aplicación de las ecuaciones diferenciales se restringe al subdominio del bloque de matriz. A partir de la discretización de los bloques de matriz, se obtienen los perfiles de presión y saturación y se obtienen ritmos de transferencia matriz-fractura más precisos. En cambio los modelos que consideran valores promedios de las propiedades pueden conducir a ritmos de transferencia inadecuados. Un inconveniente del uso de subdominios es el incremento en el esfuerzo computacional requerido para simular el problema.

Saidi<sup>15</sup> fue el primero en considerar la importancia que tienen los mecanismos que actúan en el desplazamiento de los hidrocarburos de los bloques de matriz a las fracturas, debido a que considera que aproximadamente el 90 por ciento de los hidrocarburos se alojan en ellos. Hace mención a dos razones por las que los bloques de matriz deban ser tratados como subdominios:

- 1) Cuando un yacimiento fracturado está sujeto a decrementos de presión grandes y/o está compuesto de bloques de matriz grandes, el usar la formulación para flujo pseudo-permanente en los bloques, donde el flujo es transitorio, puede conducir a errores grandes y,
- 2) Cuando los procesos de drene gravitacional de aceite e imbibición de agua en los bloques de matriz son simulados a través de valores promedio en los bloques de matriz, también se producen errores grandes en la evaluación correcta del término de flujo entre matriz y fractura.

Por otra parte Gilman<sup>16</sup> mostro, por medio de la discretización de los bloques de matriz, que la segregación gravitacional dentro de los bloques de matriz, de estar presente, influye de manera importante en la recuperación final de aceite. Gilman menciona que

cuando los bloques de matriz son caracterizados por una función de transferencia simplificada, que considera valores medios de las propiedades, el modelo matemático usado para predecir el comportamiento llega a ser inadecuado para simular segregación gravitacional u otros fenómenos transitorios en los bloques de matriz.

Cuando los bloques de matriz son grandes y los pozos están cerrados o están produciendo a gastos bajos, el movimiento de los fluidos dentro de un bloque de matriz es un fenómeno importante. Los detalles del término de transferencia matriz-fractura, empleando el método de subdominios será visto en el siguiente capítulo.

### III. SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE FLUJO.

El conjunto de ecuaciones diferenciales, que describen el comportamiento de flujo de fluidos en el yacimiento, ecuaciones (II.1) a (II.6), ó (II.7) a (II.12), son no lineales, por lo tanto no pueden resolverse por métodos analíticos; pueden, sin embargo, resolverse numericamente mediante su aproximación en diferencias finitas, lo que genera un sistema algebraico de ecuaciones no lineales. En este capítulo se presentan las ecuaciones aproximadas de flujo para los modelos mencionados en el capítulo 1 y se revisa la aplicación del método de Newton a la solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales correspondientes.

#### III.1 Ecuaciones de Flujo en Diferencias Finitas.

La transformación de las ecuaciones diferenciales de flujo de su forma continua a su forma discreta, ecuaciones en diferencias, se logra empleando aproximaciones en diferencias finitas, como se muestra en el Apéndice B. A continuación se presenta la forma de las ecuaciones en diferencias para los modelos de doble porosidad y de doble porosidad- doble permeabilidad. Con el objeto de simplificar la exposición se considera flujo unidimensional.

##### III.1.1 Modelo de Doble Porosidad.

Las ecuaciones de flujo del modelo de doble porosidad, ecuaciones (II.1) a (II.6), aproximadas en diferencias finitas son las siguientes:

Para las fracturas:

Aceite,

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{o,i}^{n+1} + \tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i \quad (III.1)$$

Gas,

$$\Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P c_{go} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{g,i}^{n+1} + (q_o R_s)_i^{n+1} + \tau_{gmf,i}^{n+1} + (\tau_{omf} R_s)_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i \quad (III.2)$$

Agua,

$$\Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{wo} - \gamma_w \Delta D)]_i^{n+1} + q_{w,i}^{n+1} + \tau_{wmf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right]_i \quad (III.3)$$

y para los bloques de matriz,  
Aceite,

$$-\tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,i} \quad (\text{III.4})$$

Gas,

$$-\tau_{gmf,i}^{n+1} - (\tau_{omf}Rs)_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi Rs(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,i} \quad (\text{III.5})$$

Agua,

$$-\tau_{wmf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right]_{m,i} \quad (\text{III.6})$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nótese que las ecuaciones (III.1) a (III.6), constituyen un sistema de 6 ecuaciones no lineales para cada celda con 6 incógnitas en el nivel de tiempo  $n + 1$ ,  $(p_o, S_g, S_w, p_{om}, S_{gm}, S_{wm})_i^{n+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ .

### III.1.2 Modelo de Doble Porosidad-Doble Permeabilidad.

Las ecuaciones diferenciales de flujo del modelo de doble porosidad- doble permeabilidad, ecuaciones (II.7) a (II.12), aproximadas en diferencias finitas para flujo unidimensional son las siguientes:

Para las fracturas,  
Aceite,

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{o,i}^{n+1} + \tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i \quad (\text{III.7})$$

Gas,

$$\Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P c_{g_o} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o Rs (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{g,i}^{n+1} + (q_o Rs)_i^{n+1} + \tau_{gmf,i}^{n+1} + (\tau_{omf}Rs)_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi Rs(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i \quad (\text{III.8})$$

Agua,

$$\Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{w_o} - \gamma_w \Delta D)]_i^{n+1} + q_{w,i}^{n+1} + \tau_{wmf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right]_i \quad (\text{III.9})$$

y para los bloques de matriz:

Aceite,

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{m,i}^{n+1} - \tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,i} \quad (\text{III.10})$$

Gas,

$$\begin{aligned} & \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D)]_{m,i}^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{m,i}^{n+1} \\ & - \tau_{gmf,i}^{n+1} - (\tau_{omf} R_s)_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,i} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Agua,

$$\Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P_{cwo} - \gamma_w \Delta D)]_{m,i}^{n+1} - \tau_{wmf,i}^{n+1} = \left[ \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta t \frac{\phi S_w}{B_w} \right]_{m,i} \quad (\text{III.12})$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nótese que el modelo de doble porosidad-doble permeabilidad, al igual que el modelo de doble porosidad, nos proporciona un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, en cada nodo de la malla de cálculo en el nivel de tiempo  $n + 1$ ,  $(p_o, S_g, S_w, p_{om}, S_{gm}, S_{wm})_i^{n+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ .

Los sistemas de ecuaciones (III.1) a (III.6) y (III.7) a (III.12), para los modelos de doble porosidad y doble porosidad-doble permeabilidad respectivamente, son no lineales. Su solución puede obtenerse mediante diversas formulaciones. A continuación se presenta la solución mediante la formulación totalmente implícita, empleando el método de Newton.

### III.2 Solución del Sistema de Ecuaciones de Flujo en Diferencias no Lineal: Formulación Totalmente Implícita (T.I.).

El método de Newton, que constituye la base de la formulación totalmente implícita, resuelve el sistema no lineal de ecuaciones de flujo en diferencias en el nivel tiempo  $n + 1$ , a través de un proceso iterativo, como se indica a continuación<sup>17,21</sup>.

#### III.2.1 Modelo de Doble Porosidad.

Primeramente definimos, a partir de las ecuaciones (III.1) a (III.6), las siguientes funciones de residuos:

Para la fractura,

Aceite,

$$F_{oi}^{n+1} = \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{oi}^{n+1} + \tau_{omf,i}^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i = 0 \quad (III.13)$$

Gas,

$$F_{gi}^{n+1} = \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta Pc_{go} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o Rs (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{gi}^{n+1} + (q_o Rs)_i^{n+1} + \tau_{gmf,i}^{n+1} + (\tau_{omf} Rs)_i^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi Rs(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i = 0 \quad (III.14)$$

Agua,

$$F_{wi}^{n+1} = \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta Pc_{wo} - \gamma_w \Delta D)]_i^{n+1} + q_{wi}^{n+1} + \tau_{wmf,i}^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_i = 0 \quad (III.15)$$

y para los bloques de matriz

Aceite,

$$F_{omi}^{n+1} = -\tau_{omf,i}^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,i} = 0 \quad (III.16)$$

Gas,

$$F_{gmi}^{n+1} = -\tau_{gmf,i}^{n+1} - (\tau_{omf} Rs)_i^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi Rs(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,i} = 0 \quad (III.17)$$

Agua,

$$F_{wmi}^{n+1} = -\tau_{wmf,i}^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right]_{m,i} = 0 \quad (III.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La funcionalidad de las ecuaciones (III.13) a (III.18), en las incógnitas es la siguiente:  
Para las fracturas,

$$F_{pi}^{n+1} = F_{pi}[(p_o, S_g, S_w)_{i-1}, (p_o, S_g, S_w)_i, (p_o, S_g, S_w)_{i+1}, (p_o, S_g, S_w)_{m,i}]^{n+1} = 0 \quad (III.19)$$

y para los bloques de matriz

$$F_{pm,i}[(p_o, S_g, S_w)_i, (p_o, S_g, S_w)_{m,i}]^{n+1} = 0 \quad (III.20)$$

$$p = o, g, w$$

El algoritmo iterativo del método de Newton se establece<sup>17,21</sup> expandiendo las funciones de residuos en la iteración  $(\nu + 1)$  mediante una serie de Taylor truncada alrededor del nivel iterativo  $(\nu)$ , reteniendo los términos de menor orden. Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

Para las fracturas,

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} \left[ \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial p_{oj}} \right)^{(\nu)} \delta p_{oj}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{gj}} \right)^{(\nu)} \delta S_{gj}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{wj}} \right)^{(\nu)} \delta S_{wj}^{(\nu+1)} \right] + \frac{\partial F_{pi}}{\partial p_{om,i}}^{(\nu)} \delta p_{om,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{gm,i}}^{(\nu)} \delta S_{gm,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{wm,i}}^{(\nu)} \delta S_{wm,i}^{(\nu+1)} = -F_{pi}^{(\nu)} \quad (III.21)$$

y para los bloques de matriz,

$$\frac{\partial F_{pm,i}}{\partial p_{om,i}}^{(\nu)} \delta p_{om,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial S_{gm,i}}^{(\nu)} \delta S_{gm,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial S_{wm,i}}^{(\nu)} \delta S_{wm,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial p_{oi}}^{(\nu)} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial S_{gi}}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial S_{wi}}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} = -F_{pm,i}^{(\nu)} \quad (III.22)$$

$$p = o, g, w \quad i = 1, 2, \dots, I \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

donde los superíndices  $(\nu)$  y  $(\nu + 1)$  indican los niveles de iteración, conocido e incógnita respectivamente. Tenemos en (III.21) y (III.22) un sistema de ecuaciones, donde las incógnitas son los cambios iterativos de las presiones y saturaciones en cada uno de los nodos, tanto en la fractura como en la matriz. En particular,  $\delta p_{oi}^{(\nu+1)} = p_{oi}^{(\nu+1)} - p_{oi}^{(\nu)}$ ;  $\delta S_{gi}^{(\nu+1)}$ ,  $\delta S_{wi}^{(\nu+1)}$ ,  $\delta p_{om,i}^{(\nu+1)}$ ,  $\delta S_{gm,i}^{(\nu+1)}$  y  $\delta S_{wm,i}^{(\nu+1)}$  se definen similarmente.

El proceso iterativo del nivel de tiempo  $n + 1$  se inicia con la siguiente estimación de la solución:

$$(p_{oi}, S_{gi}, S_{wi})^{(0)} = (p_{oi}, S_{gi}, S_{wi})^n \quad (III.23)$$

$$(p_{om,i}, S_{gm,i}, S_{wm,i})^{(0)} = (p_{om,i}, S_{gm,i}, S_{wm,i})^n \quad (III.24)$$

y termina cuando se cumplen los siguientes criterios de convergencia, en todos los nodos de la malla de cálculo,  $i = 1, 2, \dots, I$  :

Para las fracturas,

$$\left| \delta p_{oi}^{(\nu+1)} \right| < \epsilon_p \quad \left| \delta S_{gi}^{(\nu+1)} \right| < \epsilon_S \quad \left| \delta S_{wi}^{(\nu+1)} \right| < \epsilon_S \quad (\text{III.25})$$

y para los bloques de matriz,

$$\left| \delta p_{om,i}^{(\nu+1)} \right| < \epsilon_p \quad \left| \delta S_{gm,i}^{(\nu+1)} \right| < \epsilon_S \quad \left| \delta S_{wm,i}^{(\nu+1)} \right| < \epsilon_S \quad (\text{III.26})$$

o bien, cuando, la norma del vector de residuos de la fractura y de los bloques de matriz,  $\mathbf{F} = (F_{o1}, F_{g1}, F_{w1}, F_{o2}, F_{g2}, F_{w2}, \dots, F_{oI}, F_{gI}, F_{wI})^T$ ,  $\mathbf{F}_m = (F_{om1}, F_{gm1}, F_{wm1}, F_{om2}, F_{gm2}, F_{wm2}, \dots, F_{omI}, F_{gmI}, F_{wmI})^T$ , cumple con:

$$\|\mathbf{F}\| < \epsilon_F \quad \|\mathbf{F}_m\| < \epsilon_F \quad (\text{III.27})$$

El sistema lineal de ecuaciones obtenido mediante el método de Newton en la iteración  $(\nu + 1)$ , ecuaciones (III.21) y (III.22), puede escribirse de una forma compacta como sigue:

$$[\mathbf{J}]^{(\nu)} \delta \mathbf{u}^{(\nu+1)} = -\mathbf{F}^{(\nu)} \quad (\text{III.28})$$

donde  $[\mathbf{J}]$  se conoce como la matriz Jacobiana,  $\delta \mathbf{u}$  es el vector de incógnitas y  $\mathbf{F}$  es el vector de residuos.

La estructura matricial del subsistema de ecuaciones para la celda  $i$ , es el siguiente<sup>21</sup>:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{ff} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \bar{a}_{ff} & \bar{a}_{fm} \\ \bar{a}_{mf} & \bar{a}_{mm} \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \bar{b}_{ff} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta u_m \end{bmatrix}_{i-1}^{(\nu+1)} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta u_m \end{bmatrix}_i^{(\nu+1)} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta u_m \end{bmatrix}_{i+1}^{(\nu+1)} = - \begin{bmatrix} F \\ F_m \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \quad (\text{III.29})$$

Los elementos de las matrices son submatrices de orden  $(3 \times 3)$ . Las submatrices  $\bar{a}_{ff}$  y  $\bar{a}_{fm}$ , contienen las derivadas de las funciones de residuos de las fracturas con respecto a las incógnitas de la fractura y de la matriz del nodo  $i$ , respectivamente. Las submatrices  $\bar{a}_{mf}$  y  $\bar{a}_{mm}$ , corresponden a las derivadas de las funciones de los bloques de matriz con respecto a incógnitas de las fracturas y de la matriz del nodo  $i$ , respectivamente. Las submatrices  $\bar{c}_{ff}$  y  $\bar{b}_{ff}$  contienen las derivadas de las funciones de residuos de las fracturas con respecto a las incógnitas de la fractura en  $i - 1$  y en  $i + 1$  respectivamente, o sea:

$$\bar{c}_{ff,i}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial p_{oi-1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi-1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{wi-1}} \\ \frac{\partial F_{oi}}{\partial p_{oi}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{wi}} \\ \frac{\partial F_{oi}}{\partial p_{oi-1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi-1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{wi-1}} \\ \frac{\partial F_{wi}}{\partial p_{oi-1}} & \frac{\partial F_{wi}}{\partial S_{gi-1}} & \frac{\partial F_{wi}}{\partial S_{wi-1}} \end{bmatrix}_i^{(\nu)}$$

y

$$\bar{b}_{ff,i}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial p_{oi+1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi+1}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{wi+1}} \\ \frac{\partial F_{gi}}{\partial p_{oi+1}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{gi+1}} & \frac{\partial F_{gi}}{\partial S_{wi+1}} \\ \frac{\partial F_{wi}}{\partial p_{oi+1}} & \frac{\partial F_{wi}}{\partial S_{gi+1}} & \frac{\partial F_{wi}}{\partial S_{wi+1}} \end{bmatrix}_i^{(\nu)}$$

Los elementos de los subvectores de incógnitas son los siguientes:

$$\delta u_i^{(\nu+1)} = \begin{bmatrix} \delta p_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \end{bmatrix}_i^{(\nu+1)}$$

$$\delta u_{m,i}^{(\nu+1)} = \begin{bmatrix} \delta p_{om} \\ \delta S_{gm} \\ \delta S_{wm} \end{bmatrix}_i^{(\nu+1)}$$

y los subvectores de residuos son:

$$F_i^{(\nu)} = \begin{bmatrix} F_o \\ F_g \\ F_w \end{bmatrix}_i^{(\nu)}$$

$$F_{m,i}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} F_{om} \\ F_{gm} \\ F_{wm} \end{bmatrix}_i^{(\nu)}$$

El subsistema de ecuaciones dado por (III.29) puede escribirse como sigue:

$$\bar{c}_{ff,i}^{(\nu)} \delta u_{i-1}^{(\nu+1)} + \bar{a}_{ff,i}^{(\nu)} \delta u_i^{(\nu+1)} + \bar{a}_{fm,i}^{(\nu)} \delta u_{m,i}^{(\nu+1)} + \bar{b}_{ff,i}^{(\nu)} \delta u_i^{(\nu+1)} = -F_i^{(\nu)} \quad (\text{III.30})$$

$$\bar{a}_{mf,i}^{(\nu)} \delta u_i^{(\nu+1)} + \bar{a}_{mm,i}^{(\nu)} \delta u_{m,i}^{(\nu+1)} = -F_{m,i}^{(\nu)} \quad (\text{III.31})$$

Nótese que la estructura matricial del sistema de ecuaciones mostrado en (III.29) permite llevar a cabo el acoplamiento de las ecuaciones de la matriz en las ecuaciones de la fractura, como se describe en la referencia 17. Esto es, de la ecuación (III.31), podemos resolver las incógnitas de la matriz  $\delta u_{m,i}^{(\nu+1)}$  en términos de las incógnitas de la fractura,  $\delta u_i^{(\nu+1)}$ , como sigue:

$$\bar{a}_{mf,i}^{(\nu)} \delta u_{m,i}^{(\nu+1)} = -\bar{a}_{mm,i}^{(\nu)} \delta u_i^{(\nu+1)} - F_{m,i}^{(\nu)} \quad (\text{III.32})$$

Ahora bien, premultiplicando (III.32) por el inverso de la matriz  $\bar{a}_{mf,i}^{(\nu)}$ , se tiene:

$$\delta u_{m,i}^{(\nu+1)} = -(\bar{a}_{mf,i}^{(\nu)})^{-1} (F_{m,i}^{(\nu)} + \bar{a}_{mm,i}^{(\nu)} \delta u_i^{(\nu+1)}) \quad (\text{III.33})$$

A partir de (III.33) se obtiene la representación de la solución de las incógnitas de la matriz, en función de las incógnitas de la fractura, esto es:

$$\delta p_{om,i}^{(\nu+1)} = \alpha_{oi}^{(\nu)} + \alpha_{ooi}^{(\nu)} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{ogi}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{owi}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} \quad (\text{III.34})$$

$$\delta S_{gm,i}^{(\nu+1)} = \alpha_{gi}^{(\nu)} + \alpha_{goi}^{(\nu)} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{ggi}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{gwi}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} \quad (\text{III.35})$$

$$\delta S_{wm,i}^{(\nu+1)} = \alpha_{wi}^{(\nu)} + \alpha_{woi}^{(\nu)} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{wgi}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{wwi}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} \quad (\text{III.36})$$

donde los coeficientes,  $\alpha$ , son el resultado de las operaciones implícitas en (III.33).

Sustituyendo las ecuaciones (III.34), (III.35) y (III.36), en (III.21) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial p_{oi-1}} \delta p_{oi-1}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{gi-1}} \delta S_{gi-1}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{wi-1}} \delta S_{wi-1}^{(\nu+1)} + \\ & \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial p_{oi}} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{gi}} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{wi}} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} + \\ & \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial p_{oi+1}} \delta p_{oi+1}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{gi+1}} \delta S_{gi+1}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{wi+1}} \delta S_{wi+1}^{(\nu+1)} + \\ & \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial p_{omi}} \left[ \alpha_{oi}^{(\nu)} + \alpha_{ooi}^{(\nu)} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{ogi}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{owi}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} \right] + \\ & \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{gmi}} \left[ \alpha_{gi}^{(\nu)} + \alpha_{goi}^{(\nu)} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{ggi}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{gwi}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} \right] + \\ & \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{wmi}} \left[ \alpha_{wi}^{(\nu)} + \alpha_{woi}^{(\nu)} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \alpha_{wgi}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \alpha_{wwi}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} \right] = -F_{pi}^{(\nu)} \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Reacomodando las incógnitas de la ecuación (III.37), resulta la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial p_{oi-1}} \delta p_{oi-1}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{gi-1}} \delta S_{gi-1}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{wi-1}} \delta S_{wi-1}^{(\nu+1)} + \\ & \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial p_{oi+1}} \delta p_{oi+1}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{gi+1}} \delta S_{gi+1}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{wi+1}} \delta S_{wi+1}^{(\nu+1)} + \\ & \left( \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial p_{oi}} + \theta_{poi}^{(\nu)} \right) \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{gi}} + \theta_{pgi}^{(\nu)} \right) \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \\ & \left( \frac{\partial F_{pi}^{(\nu)}}{\partial S_{wi}} + \theta_{pwi}^{(\nu)} \right) \delta S_{wi}^{(\nu+1)} = -(F_{pi}^{(\nu)} + \xi_{pi}^{(\nu)}) \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

$$p = o, g, w$$

donde  $\theta_{p_o}$ ,  $\theta_{p_g}$ ,  $\theta_{p_w}$  y  $\xi_p$  son los términos resultantes del acoplamiento de las ecuaciones de la matriz en las ecuaciones de las fracturas.

La estructura matricial de este sistema de ecuaciones reducido es igual a la estructura matricial para un yacimiento no fracturado.

El acoplamiento de las ecuaciones, en la manera descrita, reduce fuertemente la cantidad de memoria y de tiempo de cómputo requeridos en la simulación de yacimientos fracturados, siendo tales requerimientos ligeramente mayores a los correspondientes a yacimientos no fracturados<sup>17</sup>. Una vez que se han resuelto los cambios iterativos de las incógnitas de las fracturas, en la iteración  $(\nu+1)$ , se resuelven los cambios iterativos de las incógnitas de la matriz en dicha iteración, aplicando directamente las ecuaciones (III.34), (III.35) y (III.36) en cada nodo  $i$  de la malla de cálculo.

### III.2.2 Modelo de Doble Porosidad-Doble Permeabilidad.

Se definen funciones de residuos a partir de las ecuaciones (III.7) a (III.12), esto es:

Para las fracturas;

Aceite,

$$F_{o,i}^{n+1} = \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{o,i}^{n+1} + \tau_{omf,i}^{n+1} - \frac{V r_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i = 0 \quad (III.39)$$

Gas,

$$F_{g,i}^{n+1} = \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P c_{g_o} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{g,i}^{n+1} + (q_o R_s)_i^{n+1} + \tau_{gmf,i}^{n+1} + (\tau_{omf} R_s)_i^{n+1} - \frac{V r_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i = 0 \quad (III.40)$$

Agua,

$$F_{w,i}^{n+1} = \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{w_o} - \gamma_w \Delta D)]_i^{n+1} + q_{w,i}^{n+1} + \tau_{wmf,i}^{n+1} - \frac{V r_i}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_i = 0 \quad (III.41)$$

y para los bloques de matriz,

Aceite,

$$F_{om,i}^{n+1} = \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{m,i}^{n+1} - \tau_{omf,i}^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,i} = 0 \quad (\text{III.42})$$

Gas,

$$F_{gm,i}^{n+1} = \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P c_{g_o} - \gamma_g \Delta D)]_{m,i}^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{m,i}^{n+1} - \tau_{gmf,i}^{n+1} - (\tau_{omf} R_s)_i^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,i} = 0 \quad (\text{III.43})$$

Agua,

$$F_{wm,i}^{n+1} = \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{w_o} - \gamma_w \Delta D)]_{m,i}^{n+1} - \tau_{wmf,i}^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_{m,i} = 0 \quad (\text{III.44})$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La funcionalidad de las ecuaciones (III.39) a (III.44), en las incógnitas es la siguiente:  
Para las fracturas:

$$F_{p,i}^{n+1} = F_{p,i} \{ (p_o, S_g, S_w)_{i-1}, (p_o, S_g, S_w)_i, (p_o, S_g, S_w)_{i+1}, (p_o, S_g, S_w)_{m,i} \}^{n+1} \quad (\text{III.45})$$

y para los bloques de matriz:

$$F_{pm,i}^{n+1} = F_{pm,i}^n \{ (p_o, S_g, S_w)_{m,i-1}, (p_o, S_g, S_w)_{m,i}, (p_o, S_g, S_w)_{m,i+1}, (p_o, S_g, S_w)_i \}^{n+1} \quad (\text{III.46})$$

$$p = o, g, w$$

El algoritmo iterativo para resolver el sistema no lineal de ecuaciones (III.39) a (III.44), se establece conforme al procedimiento mencionado previamente en el problema de doble porosidad. Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

Para las fracturas:

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} \left[ \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial p_{oj}} \right)^{(\nu)} \delta p_{oj}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{gj}} \right)^{(\nu)} \delta S_{gj}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{wj}} \right)^{(\nu)} \delta S_{wj}^{(\nu+1)} \right] + \frac{\partial F_{pi}}{\partial p_{om,i}}^{(\nu)} \delta p_{om,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{gm,i}}^{(\nu)} \delta S_{gm,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{wm,i}}^{(\nu)} \delta S_{wm,i}^{(\nu+1)} = -F_{pi}^{(\nu)} \quad (\text{III.47})$$

y para los bloques de matriz:

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} \left[ \left( \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial p_{omj}} \right)^{(\nu)} \delta p_{omj}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial S_{gmj}} \right)^{(\nu)} \delta S_{gmj}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial S_{wmj}} \right)^{(\nu)} \delta S_{wmj}^{(\nu+1)} \right] + \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial p_{oi}}^{(\nu)} \delta p_{oi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial S_{gi}}^{(\nu)} \delta S_{gi}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,i}}{\partial S_{wi}}^{(\nu)} \delta S_{wi}^{(\nu+1)} = -F_{pm,i}^{(\nu)} \quad (\text{III.48})$$

$$p = o, g, w \quad i = 1, 2, \dots, I \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

El inicio y fin del proceso iterativo de solución de las incógnitas es igual al mencionado anteriormente, ecuaciones (III.23) a (III.26).

La ecuación (III.48) muestra que las funciones de residuos de los bloques de matriz, dependen no sólo de las incógnitas de la matriz en el nodo  $i$ , sino que también dependen de tales incógnitas en los nodos  $i - 1$  e  $i + 1$ .

La estructura matricial del subsistema de ecuaciones de la celda  $i$  es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{ff} & [0] \\ [0] & \bar{c}_{mm} \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \bar{a}_{ff} & \bar{a}_{fm} \\ \bar{a}_{mf} & \bar{a}_{mm} \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \bar{b}_{ff} & [0] \\ [0] & \bar{b}_{mm} \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta u_m \end{bmatrix}_{i-1}^{(\nu+1)} = - \begin{bmatrix} F \\ F_m \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \quad (\text{III.49})$$

o bien:

$$\bar{c}_{ff,i}^{(\nu)} \delta u_{i-1}^{(\nu+1)} + \bar{a}_{ff,i}^{(\nu)} \delta u_i^{(\nu+1)} + \bar{a}_{fm,i}^{(\nu)} \delta u_{m,i}^{(\nu+1)} + \bar{b}_{ff,i}^{(\nu)} \delta u_{i+1}^{(\nu+1)} = -F_i^{(\nu)} \quad (\text{III.50})$$

$$\bar{c}_{mm,i}^{(\nu)} \delta u_{m,i-1}^{(\nu+1)} + \bar{a}_{mf,i}^{(\nu)} \delta u_i^{(\nu+1)} + \bar{a}_{mm,i}^{(\nu)} \delta u_{m,i}^{(\nu+1)} + \bar{b}_{mm,i}^{(\nu)} \delta u_{m,i+1}^{(\nu+1)} = -F_{m,i}^{(\nu)} \quad (\text{III.51})$$

Nótese que la estructura matricial resultante en el modelo de doble porosidad-doble permeabilidad no permite desacoplar las ecuaciones y expresar las incógnitas de la matriz en función de las incógnitas de la fractura, como en el caso del modelo de doble porosidad. Es necesario, entonces resolver simultáneamente tanto las incógnitas de las fracturas como de los bloques de matriz, lo cual requiere de un mayor esfuerzo computacional, comparado con el modelo de doble porosidad.

### III.2.3 Modelo de Doble Porosidad con Subdominios.

Los modelos de doble porosidad convencionales<sup>7,8,10,12</sup>, expuesto anteriormente, no son capaces de modelar el detalle del flujo de fluidos dentro de los bloques de matriz y su efecto sobre la transferencia de fluidos matriz-fractura y consecuentemente sobre la recuperación de aceite del yacimiento. Esto se debe al carácter simplificado del modelo empleado para representar la transferencia de fluidos matriz-fractura, que en el mejor de los casos hacen uso de pseudofunciones de presión capilar con el objeto de captar de manera aproximada tales procesos.

Una alternativa que existe para captar el detalle del flujo dentro de los bloques de matriz, es el empleo de subdominios<sup>15,16,18</sup>. De acuerdo a este enfoque, en cada celda de la malla numérica existe un bloque, o un conjunto de bloques, típico, que se manejan como un subdominio dentro del dominio del yacimiento. En cada subdominio se aplican las ecuaciones de flujo y se genera una submalla de cálculo, ver Figura 10, con el objeto de resolver la distribución de presiones y saturaciones en el subdominio, así como los volúmenes de aceite, gas y agua transferidos entre la matriz y la fractura durante la etapa de tiempo. Nótese que estos parámetros se calculan en cada una de las celdas de la malla que discretiza al yacimiento, simultáneamente con las presiones y saturaciones en las fracturas.

Las ecuaciones para el modelo de doble porosidad con subdominios en su forma diferencial, son similares a las ecuaciones del modelo de doble porosidad- doble permeabilidad, excepto que el dominio de aplicación de las ecuaciones diferenciales de la matriz se limita al subdominio del bloque o bloques típico de la matriz. Nótese que no existe aportación de fluidos de los bloques de matriz hacia el pozo, con lo que el término fuente en las ecuaciones de los bloques de matriz no son considerados. Conforme a lo descrito, las ecuaciones de flujo en su forma de diferencias para este caso son:

Para las fracturas:

Aceite,

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{o,i}^{n+1} + \tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i \quad (\text{III.52})$$

Gas,

$$\Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta Pc_{g_o} - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o Rs (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{g,i}^{n+1} + (q_o Rs)_i^{n+1} + \tau_{gmf,i}^{n+1} + (\tau_{omf} Rs)_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi Rs (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_i \quad (\text{III.53})$$

Agua,

$$\Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{wo} - \gamma_w \Delta D)]_i^{n+1} + q_{w,i}^{n+1} + \tau_{wmf,i}^{n+1} = \frac{V r_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right] \quad (\text{III.54})$$

Las ecuaciones de flujo en diferencias finitas en la subcelda  $j$ , del bloque de matriz representativo de la celda  $i$ , considerando flujo unidimensional en el subdominio, son:

Aceite,

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_{m,ji}^{n+1} - \tau_{omf,ji}^{n+1} = \frac{V r_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi(1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,ji} \quad (\text{III.55})$$

Gas,

$$\Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P c_{go} - \gamma_g \Delta Z)]_{m,ji}^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{m,ji}^{n+1} - \tau_{gmf,ji}^{n+1} - (\tau_{omf} R_s)_{ji}^{n+1} = \frac{V r_i}{\Delta t} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_g - S_w)}{B_o} \right]_{m,ji} \quad (\text{III.56})$$

Agua,

$$\Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{wo} - \gamma_w \Delta Z)]_{m,ji}^{n+1} - \tau_{wmf,ji}^{n+1} = \frac{V r_i}{\Delta t} \Delta_t \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_{m,ji} \quad (\text{III.57})$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, N_{sub}$$

donde  $j$  es el índice de las  $N_{sub}$  subceldas que discretizan el bloque de matriz representativo de la celda  $i$ .

Los términos  $\tau_{pmf,ji}$ ,  $p = o, g, w$ , que aparecen en las ecuaciones (III.55) a (III.57), representan el ritmo local de transferencia de fluidos matriz-fractura de la subcelda  $j$  correspondiente a la celda  $i$ . Nótese que  $\tau_{pmf,i}$ ,  $p = o, g, w$ , en las ecuaciones (III.52) a (III.54) de la fractura deben cumplir la siguiente condición:

$$\tau_{pmf,i} = \sum_{j=1}^{N_{sub}} \tau_{pmf,ji} \quad (\text{III.58})$$

donde:

$$\tau_{pmf,ji} = T_{pmf,ji} \Delta \Phi_{pmf,ji}^* \quad (\text{III.59})$$

y

$$\Delta \Phi_{pmf,ji}^* = [p_{pm,ji} - p_{pi} - \gamma_{pm,ji} (D_{m,ji} - D_i)] \quad (\text{III.60})$$

En la Figura 10 se presentan diversas formas en que se pueden discretizar los bloques de matriz, según Gilman y cols.<sup>16</sup>

Inicialmente, Gilman y cols.<sup>16</sup> consideraron que los fluidos se encontraban dispersos en las celdas que discretizan a las fracturas; esto trajo la incertidumbre sobre la posición en que debían situarse los nodos de las fracturas y las correspondientes subceldas al calcular la diferencia de potencial en ambos medios,  $\Delta\Phi_{pm,ji}^*$ . Para esto, Gilman y Kazemi<sup>12</sup> realizaron una modificación al método anterior<sup>16</sup>, suponiendo que el fluido en las fracturas se encuentra completamente segregado, con lo que es posible determinar la presión en la fractura a la altura de cada subcelda. La presión en la fractura a las elevaciones de las subceldas se evalúan suponiendo que el potencial en la fractura es constante y que la presión capilar es igual a cero.

Considerando agua y aceite en las fracturas, y partiendo de la presión en la fractura,  $p_i$ , en la parte media del bloque de matriz, ( $\frac{L_z}{2}$ ), la ecuación para la presión en el contacto agua-aceite,  $p_{li}$ , de la fractura es:

$$p_{li} = p_i + \gamma_p \left( \frac{L_z}{2} - Z_{cwo,i} \right) \quad (\text{III.61})$$

donde  $Z_{cwo,i}$  se calcula de la misma forma en que lo hizo Sonier<sup>11</sup> y  $\gamma_p$  corresponde al gradiente de presión estático, que depende de la posición del contacto en la fractura. Si  $Z_{cwo,i}$  es mayor a  $\frac{L_z}{2}$  consideramos el gradiente del agua, en caso contrario el del aceite.

Una vez obtenida la presión en el contacto agua-aceite, se procede a obtener la presión a la altura del subcelda  $p_{pji}$ .

$$p_{pji} = p_{li} + \gamma_p (Z_{cwo,i} - Z_{ji}) \quad (\text{III.62})$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, N_{sub}$$

donde  $Z_{ji}$  es la altura del centro de la subcelda,  $ji$ , a la base del bloque de matriz. La diferencia de potencial entre la fractura y la subcelda es:

$$\Delta\Phi_{pmfs}^* = p_{pm,ji} - p_{pji} \quad (\text{III.63})$$

La ecuación (III.63) reemplaza a la ecuación (III.60)<sup>10</sup>.

La permeabilidad relativa de la fractura en la subcelda,  $ji$ , se determina dependiendo de la altura del contacto en la fractura<sup>12</sup>, considerando agua y aceite, la permeabilidad relativa al agua se calcula como:

$$k_{rwf,ji} = \frac{Z_{cwo,i} - (Z_{ji} - \frac{\Delta Z_{ji}}{2})}{\Delta Z_{ji}} \quad (\text{III.64})$$

Si  $k_{rwf,ji} > 1$ , la subcelda estotalmente cubierta de agua y  $k_{rw} = 1$

Si  $k_{rwf,ji} < 0$ , el contacto aún no alcanza la altura de la subcelda y  $k_{rw} = 0$ .

donde:

$\Delta Z_{ji}$  espesor de la subcelda, ji.

Un subdominio mas sofisticado, como se muestra en la Figura 11, fue el propuesto por Beckner<sup>18</sup>, quién considero flujo bidimensional, horizontal y vertical, dentro de los bloques de matriz. Además considero dos tipos de distribución de fluidos en la fractura: 1) fluido disperso y 2) fluido segregado. La manera de calcular la presión en la fractura a la altura de la subcelda, es diferente para cada tipo de distribución.

De acuerdo con Beckner, si se considera al fluido segregado en la fractura, los gastos de transferencia de fluido matriz-fractura y la recuperación de aceite serán menores a los gastos y recuperación obtenidos considerando a los fluidos dispersos. Esto se debe a que cuando el agua se considera dispersa, se encuentra expuesta en una área mayor de la matriz y por lo tanto se intercambia mas agua con el aceite de la matriz, debido a imbibición capilar.

El término de transferencia matriz-fractura propuesto por Beckner es la suma de la transferencia local del fluido en todas las subceldas del bloque de matriz que se encuentra en contacto con la fractura, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{t}_{pmf} = & \sum_{j=1, k=1}^{j=N_{sub}, k=1} T_{pmf, jki} (p_{p, jki}^* - p_{pm, jki} + \frac{1}{2} \gamma_p^* \Delta Z_{ki}) + \\ & \sum_{j=1, k=M_{sub}}^{j=N_{sub}, k=M_{sub}} T_{pmf, jki} (p_{p, jki}^* - p_{pm, jki} - \frac{1}{2} \gamma_p^* \Delta Z_{ki}) + \\ & \sum_{j=N_{sub}, k=1}^{j=N_{sub}, k=M_{sub}} T_{pmf, jki} (p_{p, jki}^* - p_{pm, jki}) \end{aligned} \quad (III.65)$$

$$p = o, g, w$$

donde:

$N_{sub}$  es el número de subceldas en dirección horizontal.

$M_{sub}$  es el número de subceldas en dirección vertical.

$p_{p, jki}^*$  es la presión en la fractura a la elevación de la subcelda k.

La distribución de fluido en la fractura determina la forma en que se calcula la presión en la fractura. Si la distribución de fluido en la fractura se considera dispersa, la

presión en la fractura a la elevación de la subcelda es:

$$p_{p,jki}^* = \gamma^* \Delta Z_{ki} \quad (\text{III.66})$$

$$\gamma^* = \sum_p \gamma_p S_p \quad (\text{III.67})$$

Beckner<sup>18</sup> calcula la presión en la fractura, para el caso en que la distribución de los fluidos en la fractura sea segregada, de la misma en que lo hizo Gilman y Kazemi<sup>12</sup>.

Las ecuaciones del modelo de doble porosidad con subdominios, considerando un subdominio con flujo unidimensional, escritas en forma residual dependen de las siguientes incógnitas:

Para las fracturas:

$$F_{pi}^{n+1} = F_{pi}[(p_o, S_g, S_w)_{i-1}, (p_o, S_g, S_w)_i, (p_o, S_g, S_w)_{i+1}, (p_{om}, S_{gm}, S_{wm})_{1i}, (p_{om}, S_{gm}, S_{wm})_{2i}, \dots, (p_{om}, S_{gm}, S_{wm})_{(N_{sub})i}]^{n+1} = 0 \quad (\text{III.68})$$

y para los bloques de matriz:

$$F_{pm,ji}^{n+1} = F_{pm,ji}[(p_o, S_g, S_w)_i, (p_{om}, S_{gm}, S_{wm})_{(j-1)i}, (p_{om}, S_{gm}, S_{wm})_{ji}, (p_{om}, S_{gm}, S_{wm})_{(j+1)i}]^{n+1} = 0 \quad (\text{III.69})$$

El algoritmo iterativo del método de Newton se establece de la manera indicada previamente. Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

Para las fracturas:

$$\sum_{k=i-1}^{i+1} \left[ \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial p_{ok}} \right)^{(\nu)} \delta p_{ok}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{gk}} \right)^{(\nu)} \delta S_{gk}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{wk}} \right)^{(\nu)} \delta S_{wk}^{(\nu+1)} \right] + \sum_{j=1}^{N_{sub}} \left[ \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial p_{om,ji}} \right)^{(\nu)} \delta p_{om,ji}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{gm,ji}} \right)^{(\nu)} \delta S_{gm,ji}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pi}}{\partial S_{wm,ji}} \right)^{(\nu)} \delta S_{wm,ji}^{(\nu+1)} \right] = -F_{pi}^{(\nu)} \quad (\text{III.70})$$

y para los bloques de matriz:

$$\sum_{l=j-1}^{j+1} \left[ \left( \frac{\partial F_{pm,ji}}{\partial p_{omli}} \right)^{(\nu)} \delta p_{omli}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm,ji}}{\partial S_{gmli}} \right)^{(\nu)} \delta S_{gmli}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm,ji}}{\partial S_{wmli}} \right)^{(\nu)} \delta S_{wmli}^{(\nu+1)} \right] + \frac{\partial F_{pm,ji}}{\partial p_{o,i}} \delta p_{o,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,ji}}{\partial S_{g,i}} \delta S_{g,i}^{(\nu+1)} + \frac{\partial F_{pm,ji}}{\partial S_{w,i}} \delta S_{w,i}^{(\nu+1)} = -F_{pm,ji}^{(\nu)} \quad (\text{III.71})$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad j = 1, 2, \dots, N_{sub} \quad (\nu) = 0, 1, 2, \dots$$

La estructura matricial del modelo de doble porosidad con subdominios es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{ff} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \bar{a}_{ff} & \bar{a}_{fm} \\ \bar{a}_{mf} & \bar{a}_{mm} \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \bar{b}_{ff} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta u_m \end{bmatrix}_{i-1}^{(\nu+1)} = - \begin{bmatrix} F \\ F_m \end{bmatrix}_i^{(\nu)} \quad (\text{III.72})$$

donde:

$$\bar{a}_{ff,i}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{oi}}{\partial p_{oi}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{oi}}{\partial S_{wi}} \\ \frac{\partial F_{mi}}{\partial p_{oi}} & \frac{\partial F_{mi}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{mi}}{\partial S_{wi}} \\ \frac{\partial F_{wi}}{\partial p_{oi}} & \frac{\partial F_{wi}}{\partial S_{gi}} & \frac{\partial F_{wi}}{\partial S_{wi}} \end{bmatrix}_i^{(\nu)}$$

$$\bar{a}_{fm,i}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_o}{\partial p_{om,1}} & \frac{\partial F_o}{\partial S_{gm,1}} & \frac{\partial F_o}{\partial S_{wm,1}} & \dots & \frac{\partial F_o}{\partial p_{om,Nsub}} & \frac{\partial F_o}{\partial S_{gm,Nsub}} & \frac{\partial F_o}{\partial S_{wm,Nsub}} \\ \frac{\partial F_g}{\partial p_{om,1}} & \frac{\partial F_g}{\partial S_{gm,1}} & \frac{\partial F_g}{\partial S_{wm,1}} & \dots & \frac{\partial F_g}{\partial p_{om,Nsub}} & \frac{\partial F_g}{\partial S_{gm,Nsub}} & \frac{\partial F_g}{\partial S_{wm,Nsub}} \\ \frac{\partial F_w}{\partial p_{om,1}} & \frac{\partial F_w}{\partial S_{gm,1}} & \frac{\partial F_w}{\partial S_{wm,1}} & \dots & \frac{\partial F_w}{\partial p_{om,Nsub}} & \frac{\partial F_w}{\partial S_{gm,Nsub}} & \frac{\partial F_w}{\partial S_{wm,Nsub}} \end{bmatrix}_i^{(\nu)}$$

$$\bar{a}_{mf,i}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om1}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{om1}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{om1}}{\partial S_w} \\ \frac{\partial F_{gm1}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{gm1}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{gm1}}{\partial S_w} \\ \frac{\partial F_{wm1}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{wm1}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{wm1}}{\partial S_w} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{om,Nsub}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{om,Nsub}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{om,Nsub}}{\partial S_w} \\ \frac{\partial F_{gm,Nsub}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{gm,Nsub}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{gm,Nsub}}{\partial S_w} \\ \frac{\partial F_{wm,Nsub}}{\partial p_o} & \frac{\partial F_{wm,Nsub}}{\partial S_g} & \frac{\partial F_{wm,Nsub}}{\partial S_w} \end{bmatrix}_i^{(\nu)}$$

$$\bar{a}_{mm,i}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & [0] & [0] & \dots & [0] \\ C_2 & A_2 & B_2 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & C_3 & A_3 & B_3 & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & \dots & C_{Nsub} & A_{Nsub} \end{bmatrix}_i^{(\nu)}$$

donde los elementos de la matriz  $\bar{a}_{mm,i}$  son submatrices de orden  $(3 \times 3)$ , definidos como sigue:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om1}}{\partial p_{o1}} & \frac{\partial F_{om1}}{\partial S_{g1}} & \frac{\partial F_{om1}}{\partial S_{w1}} \\ \frac{\partial F_{gm1}}{\partial p_{o1}} & \frac{\partial F_{gm1}}{\partial S_{g1}} & \frac{\partial F_{gm1}}{\partial S_{w1}} \\ \frac{\partial F_{wm1}}{\partial p_{o1}} & \frac{\partial F_{wm1}}{\partial S_{g1}} & \frac{\partial F_{wm1}}{\partial S_{w1}} \end{bmatrix}^{(\nu)} \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om1}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{om1}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{om1}}{\partial S_{w2}} \\ \frac{\partial F_{gm1}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{gm1}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{gm1}}{\partial S_{w2}} \\ \frac{\partial F_{wm1}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{wm1}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{wm1}}{\partial S_{w2}} \end{bmatrix}^{(\nu)}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om2}}{\partial p_{o1}} & \frac{\partial F_{om2}}{\partial S_{g1}} & \frac{\partial F_{om2}}{\partial S_{w1}} \\ \frac{\partial F_{gm2}}{\partial p_{o1}} & \frac{\partial F_{gm2}}{\partial S_{g1}} & \frac{\partial F_{gm2}}{\partial S_{w1}} \\ \frac{\partial F_{wm2}}{\partial p_{o1}} & \frac{\partial F_{wm2}}{\partial S_{g1}} & \frac{\partial F_{wm2}}{\partial S_{w1}} \end{bmatrix}^{(\nu)} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om2}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{om2}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{om2}}{\partial S_{w2}} \\ \frac{\partial F_{gm2}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{gm2}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{gm2}}{\partial S_{w2}} \\ \frac{\partial F_{wm2}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{wm2}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{wm2}}{\partial S_{w2}} \end{bmatrix}^{(\nu)}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om2}}{\partial p_{o3}} & \frac{\partial F_{om2}}{\partial S_{g3}} & \frac{\partial F_{om2}}{\partial S_{w3}} \\ \frac{\partial F_{gm2}}{\partial p_{o3}} & \frac{\partial F_{gm2}}{\partial S_{g3}} & \frac{\partial F_{gm2}}{\partial S_{w3}} \\ \frac{\partial F_{wm2}}{\partial p_{o3}} & \frac{\partial F_{wm2}}{\partial S_{g3}} & \frac{\partial F_{wm2}}{\partial S_{w3}} \end{bmatrix}^{(\nu)}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om3}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{om3}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{om3}}{\partial S_{w2}} \\ \frac{\partial F_{gm3}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{gm3}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{gm3}}{\partial S_{w2}} \\ \frac{\partial F_{wm3}}{\partial p_{o2}} & \frac{\partial F_{wm3}}{\partial S_{g2}} & \frac{\partial F_{wm3}}{\partial S_{w2}} \end{bmatrix}^{(\nu)} \quad A_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om3}}{\partial p_{o3}} & \frac{\partial F_{om3}}{\partial S_{g3}} & \frac{\partial F_{om3}}{\partial S_{w3}} \\ \frac{\partial F_{gm3}}{\partial p_{o3}} & \frac{\partial F_{gm3}}{\partial S_{g3}} & \frac{\partial F_{gm3}}{\partial S_{w3}} \\ \frac{\partial F_{wm3}}{\partial p_{o3}} & \frac{\partial F_{wm3}}{\partial S_{g3}} & \frac{\partial F_{wm3}}{\partial S_{w3}} \end{bmatrix}^{(\nu)}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om3}}{\partial p_{o4}} & \frac{\partial F_{om3}}{\partial S_{g4}} & \frac{\partial F_{om3}}{\partial S_{w4}} \\ \frac{\partial F_{gm3}}{\partial p_{o4}} & \frac{\partial F_{gm3}}{\partial S_{g4}} & \frac{\partial F_{gm3}}{\partial S_{w4}} \\ \frac{\partial F_{wm3}}{\partial p_{o4}} & \frac{\partial F_{wm3}}{\partial S_{g4}} & \frac{\partial F_{wm3}}{\partial S_{w4}} \end{bmatrix}^{(\nu)}$$

Así como se definieron los elementos para las tres primeras subceldas, se continúa definiendo los elementos para las subceldas subsiguientes, hasta llegar a la subcelda  $N_{sub}$ .

$$C_{N_{sub}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om,N_{sub}}}{\partial p_{o,N_{sub}-1}} & \frac{\partial F_{om,N_{sub}}}{\partial S_{g,N_{sub}-1}} & \frac{\partial F_{om,N_{sub}}}{\partial S_{w,N_{sub}-1}} \\ \frac{\partial F_{gm,N_{sub}}}{\partial p_{o,N_{sub}-1}} & \frac{\partial F_{gm,N_{sub}}}{\partial S_{g,N_{sub}-1}} & \frac{\partial F_{gm,N_{sub}}}{\partial S_{w,N_{sub}-1}} \\ \frac{\partial F_{wm,N_{sub}}}{\partial p_{o,N_{sub}-1}} & \frac{\partial F_{wm,N_{sub}}}{\partial S_{g,N_{sub}-1}} & \frac{\partial F_{wm,N_{sub}}}{\partial S_{w,N_{sub}-1}} \end{bmatrix}^{(\nu)}$$

$$A_{N_{sub}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{om,N_{sub}}}{\partial p_{o,N_{sub}}} & \frac{\partial F_{om,N_{sub}}}{\partial S_{g,N_{sub}}} & \frac{\partial F_{om,N_{sub}}}{\partial S_{w,N_{sub}}} \\ \frac{\partial F_{gm,N_{sub}}}{\partial p_{o,N_{sub}}} & \frac{\partial F_{gm,N_{sub}}}{\partial S_{g,N_{sub}}} & \frac{\partial F_{gm,N_{sub}}}{\partial S_{w,N_{sub}}} \\ \frac{\partial F_{wm,N_{sub}}}{\partial p_{o,N_{sub}}} & \frac{\partial F_{wm,N_{sub}}}{\partial S_{g,N_{sub}}} & \frac{\partial F_{wm,N_{sub}}}{\partial S_{w,N_{sub}}} \end{bmatrix}^{(\nu)}$$

Como se observa, el orden de las submatrices  $\bar{a}_{fm,i}$ ,  $\bar{a}_{mf,i}$ , y  $\bar{a}_{mm,i}$ , dependen del número de subceldas existentes en cada bloque de matriz. La submatriz  $\bar{a}_{fm,i}$  tiene un orden de  $(3N_{sub} \times 3)$ ,  $\bar{a}_{mf,i}$  tiene un orden de  $(3 \times 3N_{sub})$ , y por último  $\bar{a}_{mm,i}$  tiene un orden de  $(3N_{sub} \times 3N_{sub})$ .

Nótese que la estructura matricial resultante en el modelo de doble porosidad con subdominios, permite de nuevo desacoplar las ecuaciones, y expresar las incógnitas de la matriz en función de las incógnitas de la fractura, ver sección III.2.1. El número de incógnitas de la matriz aumenta conforme se incrementa el número de subceldas.

#### **IV. ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE YACIMIEN- TOS NATURALMENTE FRACTURADOS.**

En este capítulo se presenta la aplicación de un simulador numérico de yacimientos fracturados<sup>19</sup> al estudio del comportamiento multifásico hacia un pozo naturalmente fracturado.

El yacimiento inicialmente se encontró bajosaturado y permaneció así durante la etapa de tiempo estudiada. Los datos empleados en el simulador se clasifican de forma indicada en las siguientes tablas<sup>20</sup>:

La tabla IV.1 contiene diversos datos relacionados con el pozo, las tablas IV.2 y IV.3 engloban los datos correspondientes a la malla de cálculo, las tablas IV.4 y IV.5 contienen los datos de las fracturas y de los bloques de matriz, respectivamente, las tablas IV.6 y IV.7 muestran los datos petrofísicos de los sistemas gas-aceite y agua-aceite, respectivamente, correspondientes a los bloques de matriz, mientras que las tablas IV.9 y IV.10 contienen los datos petrofísicos de los mismos sistemas correspondientes a las fracturas; finalmente las tablas IV.8, IV.11 y IV.12 muestran los datos PVT del aceite, agua y gas respectivamente.

Se efectuó un análisis de sensibilidad del comportamiento del pozo, variando parámetros del sistema de fracturas y de los bloques de matriz, tomando como base el comportamiento obtenido con los datos de las tablas anteriores. Los parámetros que se variaron son: presión capilar de la matriz, tamaño de los bloques de matriz, presión capilar de la fractura, relación de permeabilidades matriz-fractura y posición del contacto agua-aceite.

Nótese que la historia de producción, de gasto variable presentada en el pozo, fué modificada a una historia de producción de gasto constante, siendo este de 5200 m<sup>3</sup>/día. Esta modificación fué realizada para permitir que los parámetros en estudio pudieran reflejar mas claramente el efecto que tiene sobre el comportamiento del pozo.

La Figura 12 muestra el efecto de la presión capilar de la matriz sobre el comportamiento del flujo fraccional de agua del pozo a lo largo del tiempo. Se consideron variaciones de la presión capilar de la matriz de  $\pm 50$  por ciento respecto a los valores del caso base, mostrados en la tabla IV.7.

Se observa de la Figura 12, que conforme la presión capilar de la matriz es mayor el flujo fraccional de agua a un tiempo determinado es mas alto. En el caso contrario,

cuando la presión capilar de la matriz es menor el flujo fraccional es mas bajo. Esto es consecuencia de que a mayor presión capilar en la matriz, mayor será la zona de transición entre el contacto agua-aceite, donde  $S_w = 1$ , y la profundidad en que la saturación de agua en la matriz corresponde a la intersticial, o inmóvil.

El agua móvil se encuentra a una distancia mas corta del intervalo productor y por lo tanto la irrupción de agua en el pozo por efecto de conificación ocurre a un tiempo menor. Para el caso en que la presión capilar de la matriz es menor se tiene una zona de transición de agua menor y la saturación de agua móvil esta mas retirada del intervalo productor, retardando la irrupción del cono.

La Figura 13 muestra el efecto de las dimensiones de los bloques de matriz sobre el comportamiento del flujo fraccional de agua del pozo a lo largo del tiempo. Se consideron bloques de matriz cúbicos, con dimensiones aumentadas y disminuidas en un factor de 10, comparando con las dimensiones del caso base mostradas en la tabla IV.5. Se observa de la Figura 13, que conforme los bloques matriz son mas grandes el flujo fraccional de agua es mas alto. Esto se debe a, que a medida que las dimensiones de los bloques de matriz aumentan la transmisibilidad de ellos disminuye, ya que existe una área menor, por unidad de volumen de roca, expuesta por los bloques de matriz a la transferencia de los fluidos con las fracturas.

El agua conificada que viaja a través de las fracturas tendrá de esta manera mayor dificultad para embeberse en los bloques de matriz y mayor facilidad para moverse hacia el pozo.

Se muestra a continuación el efecto que tiene la presión capilar de la fractura en el comportamiento del pozo. Normalmente la presión capilar de la fractura se considera despreciable en estudios de simulación numérica de yacimientos naturalmente fracturados. La Figura 14 muestra el efecto de considerar la presión capilar de la fractura diferente de cero sobre el comportamiento del flujo fraccional de agua a lo largo del tiempo. El valor considerado para la presión capilar de la fractura es de  $0.35 \text{ Kg/cm}^2$ , para un rango de saturaciones de agua de  $0.011 < S_w < 0.98$ .

Se observa de la Figura 14 que cuando la presión capilar de la fractura es diferente de cero el flujo fraccional de agua del pozo es mayor. El caso en que la presión capilar de la fractura es diferente de cero se forma una zona de transición de agua en las fracturas, con lo que el agua móvil se localiza en una posición mas cercana del intervalo productor y por lo tanto su surgencia en el pozo ocurre mas rápido. Para el caso en que la presión capilar de la fractura es cero, no se tiene una zona de transición y por lo tanto el agua móvil se encuentra mas alejada del intervalo productor.

La Figura 15 muestra el efecto de la relación de permeabilidades matriz- fractura,  $\frac{k_m}{k_f}$ , sobre el comportamiento del flujo fraccional de agua a lo largo del tiempo. Se aumenta

y disminuye la permeabilidad de la matriz, respecto al valor mostrado en la tabla IV.5 para el caso base, en un valor de 4.

Se observa de la Figura 15, que conforme disminuye el valor de la permeabilidad de la matriz, el flujo fraccional de agua del pozo es mayor. Esto se debe a que cuando la permeabilidad de la matriz es menor la transmisibilidad disminuye, es decir, existe una facilidad menor del flujo de agua hacia los bloques de matriz y por lo tanto el porcentaje de agua que fluye en las fracturas y llega a los pozos es mayor.

Nótese, que el efecto de variar las dimensiones de los bloques de matriz sobre el comportamiento del flujo fraccional de agua del pozo es inversamente proporcional al efecto causado por la permeabilidad de la matriz. Es decir, una disminución en las dimensiones de los bloques de matriz produce una misma respuesta que si se aumentara la permeabilidad de la matriz, por lo tanto la variación de un parámetro u otro en sentido contrario proporciona los mismos resultados.

Finalmente, la Figura 16 muestra el efecto de la posición del contacto agua-aceite sobre el comportamiento del flujo fraccional a lo largo del tiempo. Se consideran variaciones en la posición del contacto agua-aceite de  $\pm 40$  m, respecto a los valores mostrados en la tabla IV.1.

Se observa de la Figura 16, que conforme la posición del contacto agua-aceite se encuentre mas arriba, el flujo fraccional de agua es mas alto. Esto es consecuencia de que al subir el contacto agua-aceite, el agua móvil se encuentra mas próxima al intervalo productor y por lo tanto el agua tarda menos tiempo en llegar al pozo, que si el contacto estuviera mas profundo.

Ahora bien, analizando los parámetros en estudio en términos de su efecto sobre la presión de fondo fluyendo y de presión media, se tiene en lo general que conforme el volumen producido acumulado de agua es mayor, ver Figuras 17 a 19, la presión de fondo fluyendo y la presión media son menores. Esto se debe a que si el volumen total de fluidos producidos por el pozo es mayor, causa una mayor caída de presión. Además si se tiene una mayor cantidad de agua en el yacimiento, debido a lo anteriormente expuesto, la compresibilidad total del sistema será menor y por consecuencia habra un depresionamiento mayor. Las Figuras 20 a 29 muestran el efecto de los parámetros estudiados sobre el comportamiento de la presión de fondo fluyendo y de la presión media.

Nótese que en el caso en que la posición del contacto agua-aceite es diferente, la presión media inicial adquiere distintos valores, ver Figura 30. Esto es, cuando la posición del contacto está mas cercano al intervalo productor se tiene una columna de agua mayor y por lo tanto existe un gradiente de presión del sistema mayor, en comparación a que si la

posición del contacto agua-aceite estuviera mas abajo. Entonces, la presión media inicial es mayor cuando el contacto agua-aceite se encuentra menos profundo o mas cercano al intervalo productor.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Analizando el trabajo elaborado en esta tesis, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

1. El modelamiento correcto de la interacción matriz-fractura es sumamente importante en la simulación numérica de yacimientos naturalmente fracturados, debido que la recuperación final de aceite depende fuertemente de ello.
2. El uso de modelos simplificados con pseudofunciones permite representar de manera aproximada y sencilla los procesos que ocurren dentro de los bloques de matriz y su efecto sobre la transferencia de fluidos matriz-fractura.
3. El uso de subdominios, permite representar en detalle los procesos que ocurren dentro de los bloques de matriz y su efecto en la transferencia de fluidos matriz-fractura.
4. Los requerimientos de memoria y de tiempo de cómputo de la simulación numérica de yacimientos naturalmente fracturados empleando el modelo de doble porosidad son menores que cuando se emplea el modelo de doble porosidad-doble permeabilidad. Esto se debe a que el sistema de ecuaciones resultantes posee una estructura matricial tal que permite su reducción. El sistema de ecuaciones reducido es equivalente al que se obtiene en el caso de yacimientos no fracturados.
5. Para el caso en que se utilice el modelo de doble porosidad-doble permeabilidad, la simplificación anterior no es posible realizarla, con lo que, se tendrá que resolver un sistema mas grande de ecuaciones, lo que implica mayores costos de simulación.
6. Se observó que el efecto de la presión capilar en la fractura es importante en el comportamiento de flujo multifásico hacia el pozo.

### Recomendaciones

1. Debido a la importancia que representa la función de transferencia en el modelamiento correcto de yacimientos naturalmente fracturados, se recomienda seguir realizando estudios para obtener funciones transferencia simples que modelen adecuadamente la transferencia de fluidos matriz-fractura.
2. Se recomienda investigar metodologías para evaluar la presión capilar en las fracturas.

## NOMENCLATURA

<i>A</i>	Area expuesta al flujo, $cm^2$
<i>B</i>	Factor de volumen, $\frac{cm^3@c.y.}{cm^3@c.s.}$
<i>b</i>	$\frac{1}{B}$ , Factor de encogimiento, $\frac{cm^3@c.s.}{cm^3@c.y.}$
<i>c<sub>r</sub></i>	Compresibilidad de la roca, $(atm)^{-1}$
<i>D</i>	Profundidad medida con respecto a un plano de referencia, $cm$
<i>F</i>	Función de residuos.
<i>F<sub>w</sub></i>	Flujo fraccional de agua, fracción.
<i>g</i>	Aceleración de la gravedad, $\frac{cm}{seg^2}$
<i>h</i>	Longitud, $cm$
<i>I</i>	Número de celdas.
<i>K</i>	Permeabilidad absoluta, Darcies
<i>k<sub>r</sub></i>	Permeabilidad relativa, fracción
<i>L<sub>x</sub></i>	Longitud del bloque de matriz en dirección x, $cm$
<i>L<sub>y</sub></i>	Longitud del bloque de matriz en dirección y, $cm$
<i>L<sub>z</sub></i>	Longitud del bloque de matriz en dirección z, $cm$
<i>p</i>	Presión, $atm$
<i>P<sub>c</sub></i>	Presión capilar, $atm$
<i>Ĥ<sub>c</sub></i>	Pseudopresión capilar, $atm$
<i>P<sub>c<sub>e</sub></sub></i>	Presión capilar que se opone al inicio del proceso de drene gravitacional, $atm$
<i>p<sub>med</sub></i>	Presión media, $atm$
<i>p<sub>wf</sub></i>	Presión de fondo fluyendo, $atm$
<i>q</i>	Gasto volumétrico de Iny./Prod., $\frac{cm^3}{seg}$
<i>q̇</i>	Gasto volumétrico de Iny./Prod. por unidad de volumen de roca, $\frac{cm^3}{Vrseg}$
<i>q*</i>	Gasto másico de Iny./Prod. por unidad de volumen de roca, $\frac{q}{Vrseg}$
<i>R<sub>s</sub></i>	Relación de solubilidad del gas en el aceite, $\frac{cm^3@c.s.}{cm^3@c.s.}$
<i>S</i>	Saturación, fracción
<i>t</i>	Tiempo, $seg$
<i>T</i>	Transmisibilidad
<i>V<sub>r</sub></i>	Volumen de roca, $cm^3$
<i>W<sub>p</sub></i>	Producción acumulada de agua, $cm^3@c.s.$
<i>z</i>	Altura medida con respecto a un plano de referencia, $cm$

Símbolos Griegos

$\gamma$	Peso específico , $\frac{g}{cm^3}$
$\delta$	Cambio iterativo
$\Delta$	Operador de diferencias finitas
$\nabla$	Operador diferencial.
$\epsilon$	Tolerancia
$\lambda$	Movilidad
$\mu$	Viscosidad , $cp$
$\rho$	Densidad , $\frac{g}{cm^3}$
$\sigma$	Factor de forma
$\tau_{mf}$	Gasto volumétrico de transferencia matriz-fractura , $\frac{cm^3}{seg}$
$\hat{\tau}_{mf}$	Gasto volumétrico de transferencia matriz-fractura por unidad de volumen de roca , $\frac{cm^3}{cm^3 \cdot seg}$
$\tau_{mf}^*$	Gasto másico de transferencia matriz-fractura por unidad de volumen de roca , $\frac{g}{cm^3 \cdot seg}$
$\phi$	Porosidad, fracción
$\omega$	Factor de Peso
$\Phi$	Potencial del fluido, $atm.$

### Subíndices

$b$	Burbujeo
$g$	Gas
$hc$	Hidrocarburo
$i$	Variación de celdas en el yacimiento.
$j$	Variación de subceldas en el bloque de matriz.
$k$	Variación de subceldas en el bloque de matriz.
$m$	Matriz
$mf$	Matriz-Fractura.
$o$	Aceite
$p$	Fases $o, g, w$
$w$	Agua

### Superíndices

$n$	Nivel de tiempo
$\nu$	Nivel de iteración
$T$	Transpuesta de un vector.

**REFERENCIAS.**

1. Warren, J.E. and Root, P.D.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", SPEJ (Sept. 1963) 245-44; Trans., AIME, 228
2. Hill, A.C. and Thomas, G.W. "A new Approach for Simulating Complex Fractured Reservoirs", paper SPE 13537 presented at the 1985 SPE Reservoir Simulation Symposium, Dallas, Feb. 10-13
3. Van Golf Racht, T.D.: *Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering*, Amsterdam (1982)
4. Firoozabadi, A., and Ishimoto, K.: "Theory of Reinfiltration in Fractured Porous Media, Part 1-one Dimensional Model.", SPE 21796, paper presented at the 1991 Western Regional Meeting Long Beach, CA, Mar. 20-22
5. Firoozabadi, A., and Ishimoto, K. and Dindorak K.B.: "Theory of Reinfiltration in Fractured Porous Media, Part 2-two Dimensional Model.", SPE 21978, paper presented at the 1991 Western Regional Meeting Long Beach, CA, Mar. 20-22
6. Festoy, S. and Van Golf Racht, T.D.: "Gas Gravity Drainage in Fractured Reservoirs Through New Dual-Continuum Approach", SPERE (Aug. 1988) 21-78
7. Kazemi, H. y col.: "Numerical Simulation Of Water-Oil Flow in Naturally Fractured Reservoirs", SPEJ (Dec. 1976) 317-326 Trans., AIME, 261
8. Thomas, L.K., Dixon, T.N. and Pierson, R.G.: "Fractured Reservoir Simulation", SPEJ (Feb. 1983) 42-54
9. Coats, K.H., Dempsey, J.R. and Henderson, J.H.: "The use of Vertical Equilibrium in two-Dimensional Simulation of Three-Dimensional Reservoir Performance", SPEJ (March 1971) 63-71
10. Gilman, J.R. and Kazemi, H.: "Improvements in Simulation of Naturally Fractured Reservoirs", SPEJ (Aug. 1983) 695-707
11. Sonier, F., Souillard, P. and Blaskovich, F.T.: "Numerical Simulation of Naturally Fractured Reservoirs", SPERE (Nov. 1988) 1114-22; Trans., AIME, 285
12. Gilman, J.R. and Kazemi, H.: "Improved Calculations for Viscous and Gravity Displacement in Matrix Blocks in Dual-Porosity Simulators", JPT (Jan. 1988) 60-70
13. Dean, R.H. and Lo, L.L.: "Simulations of Naturally Fractured Reservoirs", SPERE (May 1988) 638-48; Trans., AIME, 285

14. R.H. Rossen and E.I.C.Shen.: "Simulation of Gas/Oil Drainage and Water/Oil Imbibition in Naturally Fractured Reservoirs", SPERE (Nov. 1989) 464-470
15. Saidi, A.M.: "Simulation of Naturally Reservoirs", paper SPE 12270, presented at the 1983
16. Gilman, R.H.: "An Efficient Finite-Difference Method for Simulating Phase Segregation in The Matrix Block in Double-Porosity Reservoirs", SPERE (July 1986) 403-13
17. Rodríguez de la Garza, F.: "Un Simulador Numérico de Flujo Multifásico Hacia Pozos Naturalmente Fracturados", Revista de Ingeniería Petrolera ( Junio, 1987) 17-23
18. Beckner, B.L., Mc Donald, A.E., Chan, H.M., Wooten, S.O. and Jones, T.A.: "Simulating Naturally Fractured Reservoirs Using a Subdomain Method", paper 21241 presented at the 1991 SPE Symposium on Reservoir Simulation, Anaheim, CA, February 17-20.
19. Galindo Nava A. y Osorno Manzo J.: " Simulador Numérico del Flujo de Fluidos en un Yacimiento Global o Hacia un Pozo en un Yacimiento Naturalmente Fracturado o no Fracturado.", DEPFI, UNAM.
20. Herrera Robles J. y Rodríguez de la Garza F.: "Aplicaciones Prácticas del Simulador CONIMP-FRAC. Estudios de Conificación de los Pozos Bellota 1-A, KU-26 y Abkatum 20", Revista Ingeniería Petrolera (Febrero 1988) 37-49.
21. Rodríguez de la Garza, F.: "Apuntes del curso de simulación Avanzada de Yacimientos", DEPFI, UNAM. (1992)

## APENDICE A

Un yacimiento naturalmente fracturado se concibe formado por dos medios, fracturas y matriz, que interactúan en espacio y en tiempo. Se requieren por lo tanto de dos tipos de ecuaciones para modelar el flujo de fluidos a través de ellos: (1) Ecuaciones de las fracturas y (2) Ecuaciones de los bloques de matriz.

La deducción de las ecuaciones que describen el flujo multifásico de fluidos en un yacimiento naturalmente fracturado parte de la aplicación del principio de conservación de masa. La interacción entre los medios se modela a través de un término de transferencia de masa matriz-fractura, tal como lo conceptualizó Warren y Root<sup>1</sup>.

Se considera el flujo multifásico de fluidos tipo beta, partiendo de la premisa que la composición de las fases HC, aceite y gas, permanecen constantes a lo largo de la vida productora del yacimiento. Desde el punto de vista composicional, las fases aceite y gas están constituidas por los pseudocomponentes aceite y gas del separador, como se muestra en diagrama siguiente. La fase agua está constituida sólo por el componente agua:

Fase		Componente
Aceite(o)	←	Aceite(o)
Gas(g)	← ↙	Gas(g)
Agua(w)	←	Agua(w)

A continuación se presenta la deducción de las ecuaciones para el modelo de doble porosidad y doble porosidad-doble permeabilidad.

### Modelo de doble porosidad.

Conforme a lo expuesto en el capítulo II sección 1, en el modelo de doble porosidad, las fracturas se consideran un medio continuo y los bloques de matriz un medio discontinuo.

Aplicando el principio de conservación de masa en un volumen de control representativo del medio de fracturas, ver Figura 31, y considerando flujo unidimensional en la dirección  $x$ , se tiene, para el pseudocomponente  $p$ , aceite o gas del separador y para el componente agua, la siguiente expresión general:

Ritmo de entrada de masa del pseudocomponente  $p$  al elemento menos el ritmo de salida de masa del pseudocomponente  $p$  del elemento más el ritmo de Inyección/Producción de masa del pseudocomponente  $p$  en el elemento más el ritmo de transferencia de masa matriz-fractura del pseudocomponente  $p$  en el elemento es igual al ritmo de acumulación del pseudocomponente  $p$  en el elemento.

o bien:

$$\begin{aligned} & [(\rho_o C_{po} \bar{v}_o)_x - (\rho_o C_{po} \bar{v}_o)_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [(\rho_g C_{pg} \bar{v}_g)_x - (\rho_g C_{pg} \bar{v}_g)_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + \\ & [(\rho_w C_{pw} \bar{v}_w)_x - (\rho_w C_{pw} \bar{v}_w)_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [q_o^* C_{po} + q_g^* C_{pg} + q_w^* C_{pw} + \tau_{omf}^* C_{po} + \\ & \tau_{gmf}^* C_{pg} + \tau_{wmf}^* C_{pw}] (\Delta x \Delta y \Delta z) = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (C_{po} \rho_o S_o + C_{pg} \rho_g S_g + C_{pw} \rho_w S_w)] \quad (A.1) \end{aligned}$$

donde:

$q_p^*$  gasto másico del pseudocomponente p por unidad de volumen de roca @ c.y.

$\tau_{pmf}^*$  gasto másico de transferencia matriz-fractura del pseudocomponente p por unidad de volumen de roca @ c.y.

$C_p$  fracción másica del pseudocomponente p.

Dividiendo la ecuación (A.1) entre  $(\Delta x \Delta y \Delta z)$  y tomando el límite cuando  $x \rightarrow 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} [(\rho_o C_{po} \bar{v}_{ox}) + (\rho_g C_{pg} \bar{v}_{gx}) + (\rho_w C_{pw} \bar{v}_{wx})] + q_o^* C_{po} + q_g^* C_{pg} + q_w^* C_{pw} + \\ & \tau_{omf}^* C_{po} + \tau_{gmf}^* C_{pg} + \tau_{wmf}^* C_{pw} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (C_{po} S_o \rho_o + C_{pg} S_g \rho_g + C_{pw} S_w \rho_w)] \quad (A.2) \end{aligned}$$

De acuerdo a la conceptualización del flujo multifásico de fluidos tipo beta, anteriormente expuesto, se tiene que las fracciones másicas son definidas como sigue:

$$C_{oo} = \frac{\rho_{o,c.e.}}{\rho_o B_o}; \quad C_{go} = \frac{\rho_{g,c.e.}}{\rho_o B_o} R_g; \quad C_{ow} = 0 \quad (A.3)$$

$$C_{og} = 0; \quad C_{gg} = 1 = \frac{\rho_{g,c.e.}}{\rho_g B_g}; \quad C_{gw} = 0 \quad (A.4)$$

$$C_{ow} = 0; \quad C_{gw} = 0; \quad C_{oo} = 1 = \frac{\rho_{w,c.e.}}{\rho_w B_w} \quad (A.5)$$

Ahora bien, la ecuación de movimiento para cada pseudocomponente p (ley de Darcy) es:

$$\bar{v}_p = -\frac{K k_{rp}}{\mu_p} (\nabla p_p - \gamma_p \nabla D); \quad p = o, g, w \quad (A.6)$$

Sustituyendo las relaciones másicas correspondientes, ecuaciones (A.3) a (A.5), y la ecuación de movimiento para cada pseudocomponente p, ecuación (A.6), en la ecuación (A.2) y haciendo el procedimiento extensivo para flujo tridimensional, se tienen las siguientes ecuaciones para el sistema de fracturas:

Acerte,

$$\nabla \left[ \frac{K k_{ro}}{\mu_o B_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) \right] + \hat{q}_o + \hat{\tau}_{omf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_o}{B_o} \right] \quad (A.7)$$

Gas,

$$\begin{aligned} \nabla \left[ \frac{K k_{rg}}{\mu_g B_g} + (\nabla p_g - \gamma_g \nabla D) \right] + \nabla \left[ \frac{K k_{ro}}{\mu_o B_o} R_s (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) \right] + \\ \hat{q}_g + \hat{q}_o R_s + \hat{\tau}_{gmf} + (\hat{\tau}_o R_s)_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi R_s S_o}{B_o} \right] \end{aligned} \quad (A.8)$$

Agua,

$$\nabla \left[ \frac{K k_{rw}}{\mu_w B_w} (\nabla p_w - \gamma_w \nabla D) \right] + \hat{q}_w + \hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right] \quad (A.9)$$

donde:

$\hat{q}_p$  gasto volumétrico del pseudocomponente p por unidad de volumen de roca.

$\hat{\tau}_{pmf}$  gasto volumétrico de transferencia matriz-fractura del pseudocomponente p por unidad de volumen de roca @ c.s.

Ahora bien, aplicando el principio de conservación de masa en los bloques de matriz, considerando que no existe continuidad en el flujo a través de ellos, se tiene:

Menos el ritmo de transferencia de masa matriz-fractura del pseudocomponente p en el elemento es igual al ritmo de acumulación de masa del pseudocomponente p en el elemento. o bien:

$$-\tau_{omf}^* C_{po} - \tau_{gmf}^* C_{pg} - \tau_{wmf}^* C_{pw} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_o S_o C_{po}) + (\rho_g S_g C_{pg} + (\rho_w S_w C_{pw}))]_m \quad (A.10)$$

Sustituyendo las relaciones de fracciones másicas correspondientes, ecuaciones (A.3) a (A.5), en la ecuación (A.10) para pseudocomponente p, se tienen las siguientes ecuaciones para los bloques de matriz:

Aceite,

$$-\hat{\tau}_{omf} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)_m \quad (A.11)$$

Gas

$$-\hat{\tau}_{gmf} - \hat{\tau}_{omf} R_s = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_o R_s}{B_o} + \frac{\phi S_g}{B_g} \right]_m \quad (A.12)$$

Agua,

$$-\hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_m \quad (A.13)$$

Además se tienen las siguientes relaciones:

$$(S_o + S_g + S_w) = 1 \quad (A.14)$$

$$Pc_{go} = p_g - p_o \quad (\text{A.15})$$

$$Pc_{wo} = p_o - p_w \quad (\text{A.16})$$

y en los bloques de matriz,

$$(S_{om} + S_{gm} + S_{wm}) = 1 \quad (\text{A.17})$$

$$Pc_{gom} = p_{gm} - p_{om} \quad (\text{A.18})$$

$$Pc_{wom} = p_{om} - p_{wm} \quad (\text{A.19})$$

Las ecuaciones (A.7) a (A.9) y (A.11) a (A.19) definen un conjunto de 12 ecuaciones con 12 incógnitas.

### Modelo de doble porosidad-doble permeabilidad.

Conforme en el capítulo II sección 2, en el modelo de doble porosidad- doble permeabilidad, las fracturas y los bloques de matriz se consideran un medio continuo. Las ecuaciones del sistema de fractura en modelo de doble de doble porosidad-doble permeabilidad son iguales a las del modelo de doble porosidad, ecuaciones (A.7) a (A.9). En cambio las ecuaciones de los bloques de matriz, para este modelo, se les adiciona un término de flujo debido a la continuidad entre ellos.

Aplicando, nuevamente, el principio de conservación de masa en un volumen representativo del medio de los bloques de matriz y considerando flujo unidimensional en la dirección  $x$ , se tiene, para el pseudocomponente  $p$ , aceite o gas del separador y para el componente agua, la siguiente expresión general:

Ritmo de entrada de masa del pseudocomponente  $p$  al elemento menos el ritmo de salida de masa del pseudocomponente  $p$  del elemento menos el ritmo de transferencia de masa matriz-fractura del pseudocomponente  $p$  en el elemento es igual al ritmo de acumulación de masa del pseudocomponente  $p$  en el elemento.

o bien:

$$-\frac{\partial}{\partial t} [(\rho_o C_{po} \bar{v}_{ox}) + (\rho_g C_{pg} \bar{v}_{gx}) + (\rho_w C_{pw} \bar{v}_{wx})]_m - \tau_{omf}^* C_{po} - \tau_{gmf}^* C_{pg} - \tau_{wmf}^* C_{pw} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(C_{po} \rho_o S_o + C_{pg} \rho_g S_g + C_{pw} \rho_w S_w)]_m \quad (\text{A.20})$$

Sustituyendo las relaciones de las fracciones másicas correspondientes ecuaciones (A.3) a (A.5), y la ecuación de movimiento para cada pseudocomponente, ecuación (A.6), en la ecuación (A.20), y haciendo el procedimiento extensivo para flujo tridimensional, se

tienen las siguientes ecuaciones para los bloques de matriz:

Aceite,

$$\nabla \left[ \frac{K k_{ro}}{\mu_o B_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) \right]_m - \hat{\tau}_{omf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_o}{B_o} \right]_m \quad (\text{A.21})$$

Gas,

$$\begin{aligned} \nabla \left[ \frac{K k_{ro}}{\mu_o B_o} R_s (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) + \frac{K k_{rg}}{\mu_g B_g} (\nabla p_g - \gamma_g \nabla D) \right]_m - \\ \hat{\tau}_{omf} R_s - \hat{\tau}_{gmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \left( \frac{S_o R_s}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right) \right]_m \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Agua,

$$\nabla \left[ \frac{K k_{rw}}{\mu_w B_w} (\nabla p_w - \gamma_w \nabla D) \right]_m - \hat{\tau}_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_m \quad (\text{A.23})$$

Al igual que en el modelo de doble porosidad, las ecuaciones (A.7) a (A.9) junto con las ecuaciones (A.21) a (A.23) y (A.14) a (A.19), también definen un conjunto de 12 ecuaciones con 12 incógnitas.

## APENDICE B

El sistema de ecuaciones que representan el comportamiento del flujo de fluidos en yacimientos naturalmente fracturados, es un sistema no lineal en donde la presión y la saturación varían con respecto al tiempo y a la posición, el cual no puede resolverse por medios analíticos.

Entonces, es necesario transformar las ecuaciones de su forma continua a su forma discreta, mediante lo cual se llega a una solución aproximada del sistema de ecuaciones.

La solución numérica del sistema de ecuaciones se refiere a resultados en puntos discretos dentro del sistema. La discretización en el espacio se lleva a cabo dividiendo al yacimiento en bloques llamados celdas, cuyo conjunto constituye una malla. Esto se realiza, mediante el empleo de diferencias centrales. La discretización del tiempo se efectúa segmentando el tiempo en intervalos consecutivos,  $n = 0, 1, 2, \dots$  de tamaño arbitrario, mediante el empleo de diferencias regresivas.

A continuación se presenta la aproximación de las ecuaciones diferenciales en ecuaciones de diferencias, para el método de doble porosidad, obtenidas a través de un esquema en diferencias finitas.

### Modelo de doble porosidad

Realizando el análisis para el medio de las fracturas y partiendo de la ecuación (II.1), para el pseudocomponente aceite, considerando una sola dirección en el nivel de tiempo  $(n + 1)$  y empleando un esquema implícito, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Kk_{ro}}{\mu_o B_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_i^{n+1} + \hat{q}_{o,i}^{n+1} + \hat{r}_{omf,i}^{n+1} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)_i^{n+1} \quad (\text{B.1})$$

Si

$$u = \lambda_{ox} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (\text{B.2})$$

donde:

$$\lambda_{ox} = \frac{Kk_{ro}}{\mu_o B_o} \quad (\text{B.3})$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (B.2) y (B.3) en el término de flujo de la ecuación (B.1), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_{ox} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_i^{n+1} = \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} \quad (\text{B.4})$$

Empleando diferencias centrales en la ecuación (B.4), se tiene:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i} \quad (\text{B.5})$$

donde:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ \frac{p_{o,i+1} - p_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} \quad (\text{B.6})$$

y

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = (\lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ \frac{p_{o,i} - p_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.6) y (B.7) en (B.5), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} &= \frac{1}{\Delta x_i} \left[ (\lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \frac{p_{o,i+1} - p_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] - \\ &\quad \frac{1}{\Delta x_i} \left[ (\lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \frac{p_{o,i} - p_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Discretizando el término de acumulación empleando diferencias regresivas en tiempo, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \left[ \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)_i^n \right] \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.8) y (B.9) en (B.1), se tiene:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta x_i} \left[ (\lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \frac{p_{o,i+1} - p_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] - \\ &\frac{1}{\Delta x_i} \left[ (\lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \frac{p_{o,i} - p_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] + \hat{q}_{o,i}^{n+1} + \hat{\tau}_{omf,i}^{n+1} = \\ &\quad \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \left[ \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right)_i^n \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Multiplicando la ecuación (B.10) por el volumen de roca de la celda  $i$ ,  $A \Delta x_i = V r_i$ , se tiene:

$$\left( \frac{\lambda_{ox} A}{\Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{o,i+1} - p_{o,i} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} (D_{i+1} - D_i) \right]^{n+1} -$$

$$\left(\frac{\lambda_{ox}A}{\Delta x}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} [p_{o,i} - p_{o,i-1} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}}(D_i - D_{i-1})]^{n+1} + q_{o,i}^{n+1} + \tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \left[ \left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)^{n+1} - \left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)^n \right]_i \quad (B.11)$$

Introduciendo el concepto de transmisibilidad:

$$T_{px} = \frac{\lambda_{px}A}{\Delta x}; \quad p = o, g, w \quad (B.12)$$

Sustituyendo la ecuación (B.12) en (B.11), se tiene:

$$T_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{o,i-\frac{1}{2}}^{n+1} (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + q_{o,i}^{n+1} + \tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t \left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)_i \quad (B.13)$$

La ecuación (B.13) se puede expresar de una manera más compacta, empleando operadores en diferencias, como se muestra a continuación:

$$\Delta [T_o(\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + q_{o,i}^{n+1} + \tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t \left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)_i \quad (B.14)$$

donde:

$\Delta u_i^{n+1}$  es el operador de diferencias centrales, definido como:  $\Delta u_i^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$

$\Delta u_t$  es el operador de diferencias regresivas, definido como:  $\Delta_t u_i^{n+1} = u_i^{n+1} - u_i^n$

Procediendo en forma similar para el pseudocomponente gas y para el componente agua, en el medio de las fracturas, se tienen las siguientes expresiones:

Gas,

$$\Delta [T_g(\Delta p_g - \gamma_g \Delta D)]_i^{n+1} + \Delta [T_o Rs (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + \hat{q}_{g,i}^{n+1} + (\hat{q}_o Rs)_i^{n+1} + \hat{\tau}_{gmf,i}^{n+1} + (\hat{\tau}_o Rs)_{mf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi Rs S_o}{B_o}\right)_i \quad (B.15)$$

Agua,

$$\Delta [T_w(\Delta p_w - \gamma_w \Delta D)] + \hat{q}_{w,i}^{n+1} + \hat{\tau}_{wmf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)_i \quad (B.16)$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ahora bien, para el medio de los bloques de matriz, debido a su conceptualización, únicamente se discretiza el término de acumulación, presentando las siguientes ecuaciones:

Aceite,

$$-\tau_{omf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t \left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)_{m,i} \quad (B.17)$$

Gas,

$$-\tau_{gmf,i}^{n+1} - (\tau_{omf}Rs)_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi Rs S_o}{B_o} \right]_{m,i} \quad (\text{B.18})$$

Agua,

$$-\tau_{wmf,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right]_{m,i} \quad (\text{B.19})$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Acoplando las relaciones adicionales de presión capilar y saturación para las ecuaciones de las fracturas (B.14), (B.15) y (B.16) y para las ecuaciones de los bloques de matriz (B.17), (B.18) y (B.19), se obtiene un sistema no lineal de 6 ecuaciones algebraicas con 6 incógnitas.

Como se aprecia, las ecuaciones (B.14) a (B.19) aplicadas en el nivel de tiempo  $n + 1$ , en cada una de las celdas  $i = 1, 2, \dots$ , genera un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas, cuya solución proporciona una distribución de presión y saturación en cada una de las celdas de cálculo.

La discretización de las ecuaciones para el modelo de doble porosidad y doble permeabilidad, se lleva a cabo de forma similar, al empleado anteriormente en el modelo de doble porosidad. Obteniéndose las ecuaciones presentadas en el capítulo III sección 1.2.

## APENDICE C

Se presenta a continuación el procedimiento propuesto por Rossen y Shen<sup>14</sup> para calcular las pseudofunciones de presión capilar,  $\hat{P}c$ .

Considérese un sólo bloque de matriz saturado con aceite y agua congénita,  $S_{om} + S_{ucm} = 1$ , rodeado por fracturas saturadas totalmente por gas,  $S_g = 1$ . El gasto inicial de drene de aceite en un bloque,  $\tau_{omfi}$ , está dado por:

$$\tau_{omfi} = L_x L_y \frac{K_{mz}}{L_z} \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} [(\gamma_o - \gamma_g)L_z - Pc_e] \quad (C.1)$$

El gasto inicial de drene aportado en un volumen  $Vr$  del yacimiento,  $\tau_{omfTi}$  es:

$$\tau_{omfTi} = \tau_{omfi} \frac{Vr}{L_x L_y L_z} \quad (C.2)$$

Sustituyendo (C.1) en (C.2), se obtiene:

$$[\tau_{omfTi}]_{S_{gf}=1, S_{gm}=0} = L_x L_y \frac{K_{mz}}{L_z} \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} [(\gamma_o - \gamma_g)L_z - Pc_e] \frac{Vr}{L_x L_y L_z} \quad (C.3)$$

Considerando el término de transferencia de aceite matriz-fractura dado por Dean y Lo y omitiendo la transferencia de masa entre las fases se tiene:

$$\tau_{omf} = F_{sk} \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} Vr(p_{om} - p_o) \quad (C.4)$$

Igualando (C.3) y (C.4)

$$\frac{K_{mz}}{L_z^2} \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} [(\gamma_o - \gamma_g)L_z - Pc_e] Vr = F_{sk} \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} Vr(p_{om} - p_o) \quad (C.5)$$

Despejando  $(p_{om} - p_o)$  de (C.5) se tiene que:

$$p_{om} - p_o = \frac{K_{mz}}{F_{sk} L_z^2} [(\gamma_o - \gamma_g)L_z - Pc_e] \quad (C.6)$$

Ahora bien, si se supone que el drene se lleva a cabo a presión constante en la matriz, se tiene:

$$\tau_{gmf} = - \left( \frac{\phi}{B_g} \right)_m \frac{\partial S_{gm}}{\partial t} = \left( \frac{\phi}{B_g} \right)_m \frac{\partial S_{om}}{\partial t} \quad (C.7)$$

y

$$\tau_{omf} = - \left( \frac{\phi}{B_o} \right)_m \frac{\partial S_{om}}{\partial t} \quad (C.8)$$

Igualando la ecuaciones (C.7) y (C.8), se tiene:

$$B_g \tau_{gmf} = -B_o \tau_{omf} \quad (C.9)$$

La ecuación (C.9) establece que el volumen drenado del bloque de matriz es reemplazado por un volumen igual de gas.

$$\tau_{omf} = F_{sk} \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} V_r (p_{om} - p_o) \quad (C.10)$$

$$\tau_{gmf} = F_{sk} \left( \frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \right)_{mf} V_r (p_{om} - p_o + \hat{P}c_{gom} - \hat{P}c_{go}) \quad (C.11)$$

Sustituyendo (C.10) y (C.11) en (C.9), se tiene:

$$\left( \frac{F_{sk} k_{ro}}{\mu_o} \right) (p_{om} - p_o) + \left( \frac{F_{sk} k_{rg}}{\mu_g} \right) [(p_{om} - p_o) + (\hat{P}c_{gom} - \hat{P}c_{go})] = 0 \quad (C.12)$$

Sustituyendo (C.6) en (C.12) y despejando  $(\hat{P}c_{go} - \hat{P}c_{gom})$  se tiene:

$$-\hat{P}c_{gom} + \hat{P}c_{go} = \left( 1 + \frac{\mu_g k_{ro}}{\mu_o k_{rg}} \right) [(\gamma_o - \gamma_g) L_z - P c_e] \frac{K_{mz}}{F_{sk} L_z^2} \quad (C.13)$$

Si  $\mu_g \ll \mu_o \rightarrow \frac{\mu_g k_{ro}}{\mu_o k_{rg}} \approx 0$ , finalmente se obtiene

$$-\hat{P}c_{gom} + \hat{P}c_{go} = \frac{K_{mz}}{F_{sk} L_z} (\gamma_o - \gamma_g) - \frac{K_{mz}}{F_{sk} L_z^2} P c_e \quad (C.14)$$

Definiendo:

$$[\hat{P}c_{go}]_{S_g=1, S_{gm}=0} = \frac{K_{mz}}{F_{sk} L_z} (\gamma_o - \gamma_g) \quad (C.15)$$

$$[\hat{P}c_{gom}]_{S_g=1, S_{gm}=0} = \frac{K_{mz}}{F_{sk} L_z^2} P c_e \quad (C.16)$$

Ahora bien, en el caso más general, a medida que el aceite se drena, la fractura adyacente al bloque de matriz permanece llena de gas por lo que  $\hat{P}c_{go}$  permanece constante. Sin embargo, las condiciones de saturación en el bloque de matriz cambian, con lo que Rossen

y Shen determinaron  $\hat{P}_{c_{gom}}(S_{gm})$  en función de  $S_{gm}$ , a través de la simulación del flujo detallado en un bloque de matriz, empleando una malla fina a presión constante.

De la simulación detallada de flujo de un sólo bloque de matriz, se obtiene la relación  $\hat{P}_{c_{gom}}$  Vs  $S_{gm}$  y de ahí  $S_{gm}(t)$  y  $\frac{dS_{gm}}{dt}$ . De (C.12) despejando  $(p_{om} - p_o)$ , se tiene:

$$p_{om} - p_o = \left( \frac{-\hat{P}_{c_{gom}} + \hat{P}_{c_{go}}}{\frac{k_{ra}}{\mu_o} + \frac{k_{rg}}{\mu_g}} \right) \frac{k_{rg}}{\mu_g} \quad (C.17)$$

Sustituyendo (C.17) en (C.10), se tiene:

$$\tau_{omf} = F_{sk} \left( \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right)_{mf} V_r \frac{k_{rg}}{\mu_g} \left( \frac{-\hat{P}_{c_{gom}} + \hat{P}_{c_{go}}}{\frac{k_{ra}}{\mu_o} + \frac{k_{rg}}{\mu_g}} \right) \quad (C.18)$$

Pero para drene a presión de la matriz ( $p_m$ ) constante, se tiene:

$$\tau_{omf} B_o = -\phi_m V_r \frac{dS_{om}}{dt} = \phi_m V_r \frac{dS_{gm}}{dt} \quad (C.19)$$

Igualando (C.18) y (C.19), se tiene:

$$\left( \frac{\phi_m V_r}{B_o} \right) \frac{dS_{gm}}{dt} = -F_{sk} \frac{V_r}{B_o} \left( \frac{\hat{P}_{c_{gom}} - \hat{P}_{c_{go}}}{\frac{\mu_o}{k_{ro}} + \frac{\mu_g}{k_{rg}}} \right) \quad (C.20)$$

Despejando  $\hat{P}_{c_{gom}}$  de (C.20), se tiene:

$$\hat{P}_{c_{gom}}(t) = \hat{P}_{c_{go}} - \frac{\phi_m}{F_{sk} \frac{k_{ra}}{\mu_o}} \left( 1 + \frac{\mu_g k_{ro}}{\mu_o k_{rg}} \right) \frac{dS_{gm}(t)}{dt} \quad (C.21)$$

Si se supone que  $\mu_g \ll \mu_o$  se tiene:

$$\hat{P}_{c_{gom}}(t) = \hat{P}_{c_{go}} - \frac{\phi_m}{F_{sk} \frac{k_{ra}}{\mu_o}} \frac{dS_{gm}(t)}{dt} \quad (C.22)$$

Este procedimiento permite calcular  $\hat{P}_{c_{gom}}(S_{gm})$  sin la necesidad de realizar el procedimiento de ensayo y error, mencionado anteriormente.

**TABLA IV.1**

POZO KU No. 26

DATOS PROPORCIONADOS.

Espesor de la formación	(m)	566.00
Radio de drene	(m)	1,550.00
Radio del pozo	(m)	0.06
Presión inicial	(kg/cm <sup>2</sup> )	260.00
Nivel de referencia de presión inicial	(MBNM)	3,064.00
Profundidad media de los disparos	(MBNM)	3,064.00
Longitud del intervalo disparado	(m)	28.00
Profundidad de la cima de la formación	(MBNM)	2,994.00
Profundidad del contacto agua-aceite	(MBNM)	3,160.00
Compresibilidad de las fracturas	(kg/cm <sup>2</sup> ) <sup>(-1)</sup>	0.000079
Compresibilidad de los bloques de matriz	(kg/cm <sup>2</sup> ) <sup>(-1)</sup>	0.000079

**TABLA IV.2**

DATOS DE LA MALLA.

Número de celdas en la dirección radial	8
Número de celdas en la dirección vertical	12
Posición del intervalo disparado	
Capa(s)	5      6      7

**TABLA IV.3**

Dirección radial			Dirección vertical		
Celda	Longitud (m)	Radio del nodo (m)	Celda (capa)	Espesor (m)	Profundidad del nodo (m)
1	0.15	0.10	1	28.0	14.0
2	0.53	0.36	2	10.0	33.0
3	1.89	1.30	3	10.0	43.0
4	6.78	4.64	4	8.0	52.0
5	24.28	16.64	5	10.0	61.0
6	87.02	59.63	6	10.0	71.0
7	311.84	213.69	7	8.0	80.0
8	1,117.46	765.75	8	20.0	94.0
			9	20.0	114.0
			10	20.0	134.0
			11	22.0	155.0
			12	400.0	366.0

**TABLA IV.4**

DATOS DEL MEDIO FRACTURADO.

Capa	Porosidad (fracción)	Permeabilidad Horizontal (darcies)	Permeabilidad Vertical (darcies)
1	0.025	2.500	4.5000
2	0.025	2.500	4.5000
3	0.025	2.500	4.5000
4	0.025	2.500	4.5000
5	0.025	2.500	4.5000
6	0.025	2.500	4.5000
7	0.025	2.500	4.5000
8	0.025	2.500	4.5000
9	0.025	2.500	4.5000
10	0.025	2.500	4.5000
11	0.025	2.500	4.5000
12	0.025	2.500	4.5000

**TABLA IV.5**

DATOS DE LOS BLOQUES DE MATRIZ.

Capa	Porosidad (fracción)	Permeabilidad (darcies)	Longitud de los bloques de matriz. (m)		
			$L_x$	$L_y$	$L_z$
1	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
2	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
3	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
4	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
5	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
6	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
7	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
8	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
9	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
10	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
11	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00
12	0.130	0.015	5.00	5.00	5.00

**TABLA IV.6**

DATOS DE LOS BLOQUES DE MATRIZ.  
Datos Petrofísicos del Sistema Gas-Aceite.

$S_g$	$k_{rog}$	$k_{rg}$	$P_{c_{gom}}$ (Kg/cm <sup>2</sup> )
0.0000	1.0000	0.0000	0.01
0.1000	0.6000	0.0000	0.01
0.2000	0.3300	0.0220	0.01
0.3000	0.1000	0.1000	0.02
0.4000	0.0200	0.2400	0.02
0.6000	0.0000	0.3400	0.02
0.6500	0.0000	0.4200	0.20
0.7000	0.0000	0.5000	0.40
0.8000	0.0000	0.8100	1.00
0.9000	0.0000	1.0000	2.30
1.0000	0.0000	1.0000	3.20

**TABLA IV.7**

Datos Petrofísicos del Sistema Agua-Aceite.

$S_w$	$k_{row}$	$K_{rw}$	$P_{c_{wom}}$ (drene) (kg/cm <sup>2</sup> )	$P_{c_{wom}}$ (imbibición) (kg/cm <sup>2</sup> )
0.0000	1.0000	0.0000	6.00	6.00
0.1000	1.0000	0.0000	6.00	6.00
0.2000	0.4000	0.0700	4.50	4.50
0.3000	0.1250	0.1500	1.10	1.10
0.4000	0.0649	0.2400	0.60	0.60
0.5000	0.0048	0.3300	0.20	0.20
0.6000	0.0000	0.6500	0.05	0.05
0.8000	0.0000	0.8300	0.04	0.00
0.9000	0.0000	1.0000	0.03	0.00
1.0000	0.0000	1.0000	0.02	0.00

**TABLA IV.8**

DATOS DEL PVT DEL ACEITE.

Presión (kg/cm <sup>2</sup> )	Factor de Volumen m <sup>3</sup> a c.y./m <sup>3</sup> a c.s.	Rel. de solub. gas/aceite. m <sup>3</sup> a c.s./m <sup>3</sup> a c.s.	Viscosidad (cp)	Densidad (gr/cm <sup>3</sup> )
0.00	1.0370	0.00	6.1300	0.8609
50.00	1.2050	41.02	3.0500	0.8048
100.00	1.2750	65.19	2.2100	0.7842
150.00	1.3340	88.13	1.7000	0.7664
188.00	1.3810	110.16	1.4800	0.7531
200.00	1.3760	110.16	1.4900	0.7556
250.00	1.3620	110.16	1.5800	0.7613
300.00	1.3540	110.16	1.6600	0.7680
350.00	1.3470	110.16	1.7300	0.7720

**TABLA IV.9**

DATOS DEL MEDIO FRACTURADO.

Datos petrofísicos del Sistema Gas-Aceite.

$S_g$	$k_{rog}$	$k_{rg}$	$Pc_{go}$ (Kg/cm <sup>2</sup> )
0.0000	1.0000	0.0000	0.00
0.0100	1.0000	0.0000	0.00
0.9900	0.0000	1.0000	3.20
1.0000	0.0000	1.0000	3.20

**TABLA IV.10**

Datos Petrofísicos del Sistema Agua-Aceite.

$S_w$	$k_{row}$	$k_{rw}$	$Pc_{wo}$ (drene)(Kg/cm <sup>2</sup> )	$Pc_{wo}$ (imb.)(Kg/cm <sup>2</sup> )
0.0000	1.0000	0.0000	6.00	6.00
0.0100	1.0000	0.0000	6.00	6.00
0.0220	0.9800	0.0000	0.00	0.00
0.9900	0.0000	1.0000	0.00	0.00
1.0000	0.0000	1.0000	0.00	0.00

**TABLA IV.11**

DATOS PVT DEL AGUA

Presión(Kg/cm <sup>2</sup> )	Factor de volumen	Viscosidad(cp)	Densidad(gr/cm <sup>3</sup> )
0.00	1.0600	0.9600	0.9800
70.32	1.0580	0.9600	0.9995
140.65	1.0570	0.9600	1.0017
210.97	1.0565	0.9600	1.0032
281.29	1.0540	0.9600	1.0384
351.62	1.0520	0.9600	1.0384
421.94	1.0515	0.9600	1.0480

**TABLA IV.12**

DATOS PVT DEL GAS

Presión(Kg/cm <sup>2</sup> )	Factor de volumen	Viscosidad(cp)	Densidad(gr/cm <sup>3</sup> )
50.00	0.0240	0.0140	0.0420
100.00	0.0110	0.0160	0.0770
150.00	0.0076	0.0180	0.1160
175.00	0.0070	0.0200	0.1410

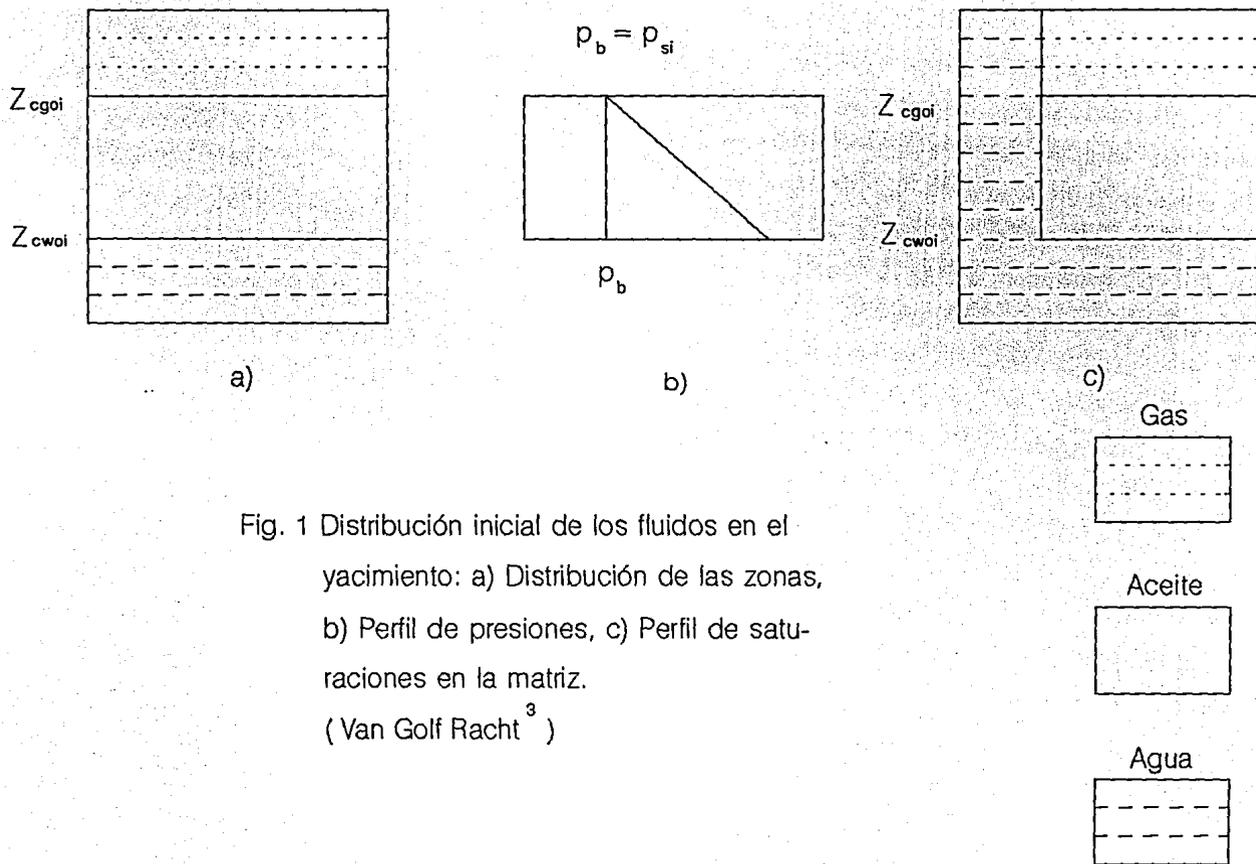


Fig. 1 Distribución inicial de los fluidos en el yacimiento: a) Distribución de las zonas, b) Perfil de presiones, c) Perfil de saturaciones en la matriz.  
( Van Golf Racht<sup>3</sup> )

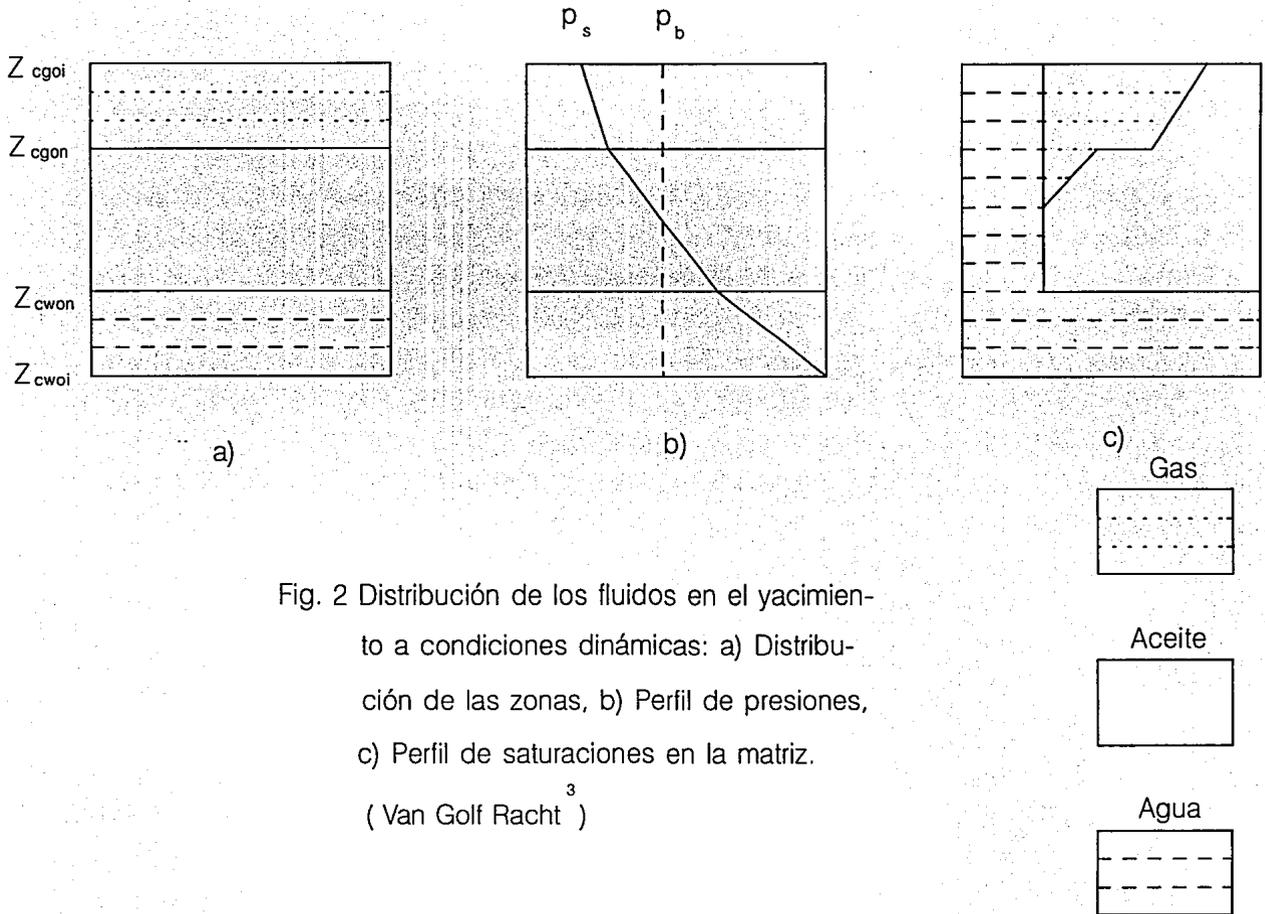


Fig. 2 Distribución de los fluidos en el yacimiento a condiciones dinámicas: a) Distribución de las zonas, b) Perfil de presiones, c) Perfil de saturaciones en la matriz.

( Van Golf Racht <sup>3</sup> )

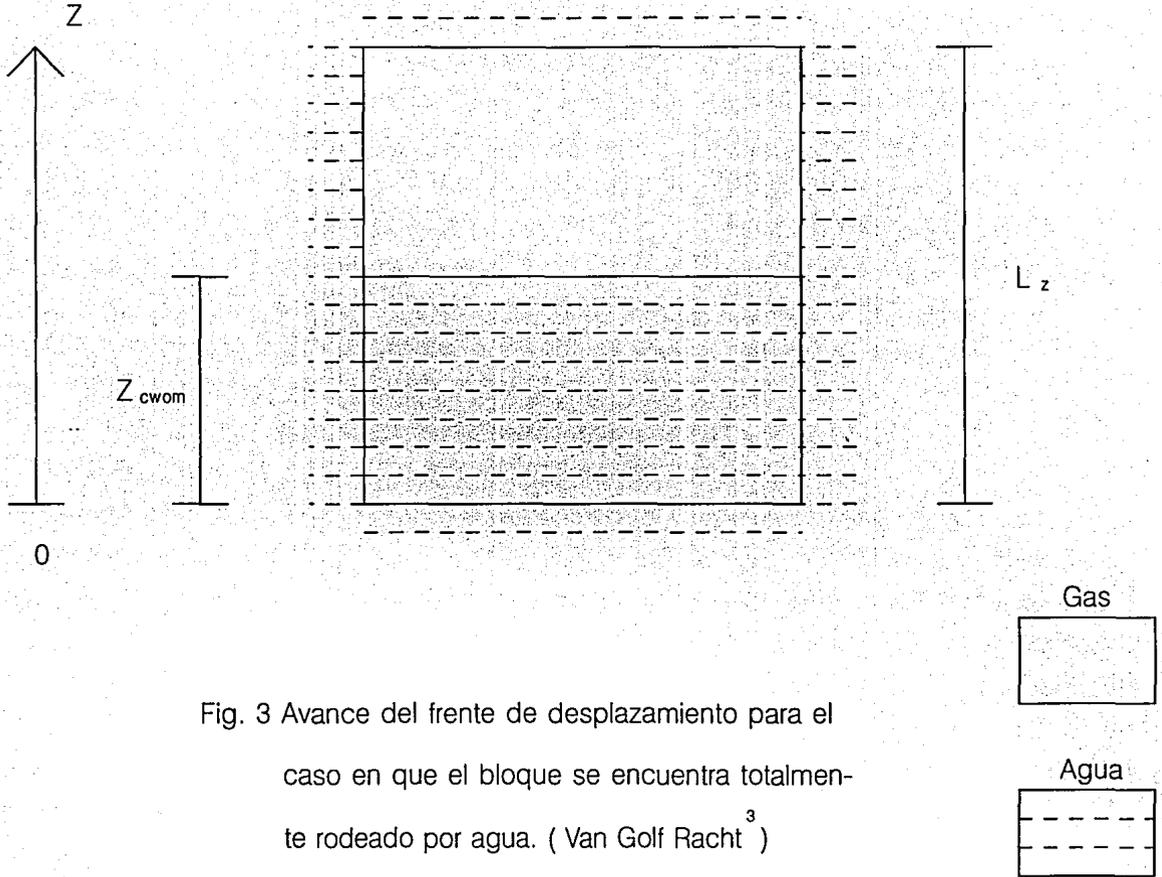


Fig. 3 Avance del frente de desplazamiento para el caso en que el bloque se encuentra totalmente rodeado por agua. ( Van Golf Racht <sup>3</sup> )

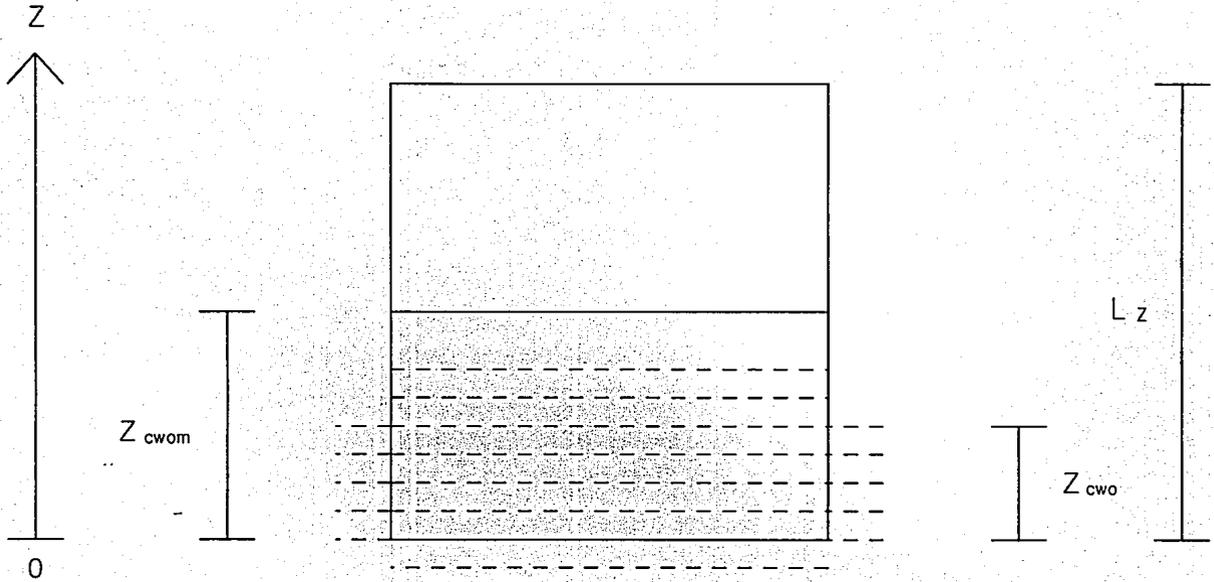
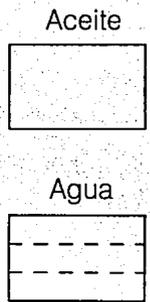


Fig. 4 Avance del frente de desplazamiento para el caso en que el bloque se encuentra parcialmente rodeado por agua. ( Van Golf Racht )



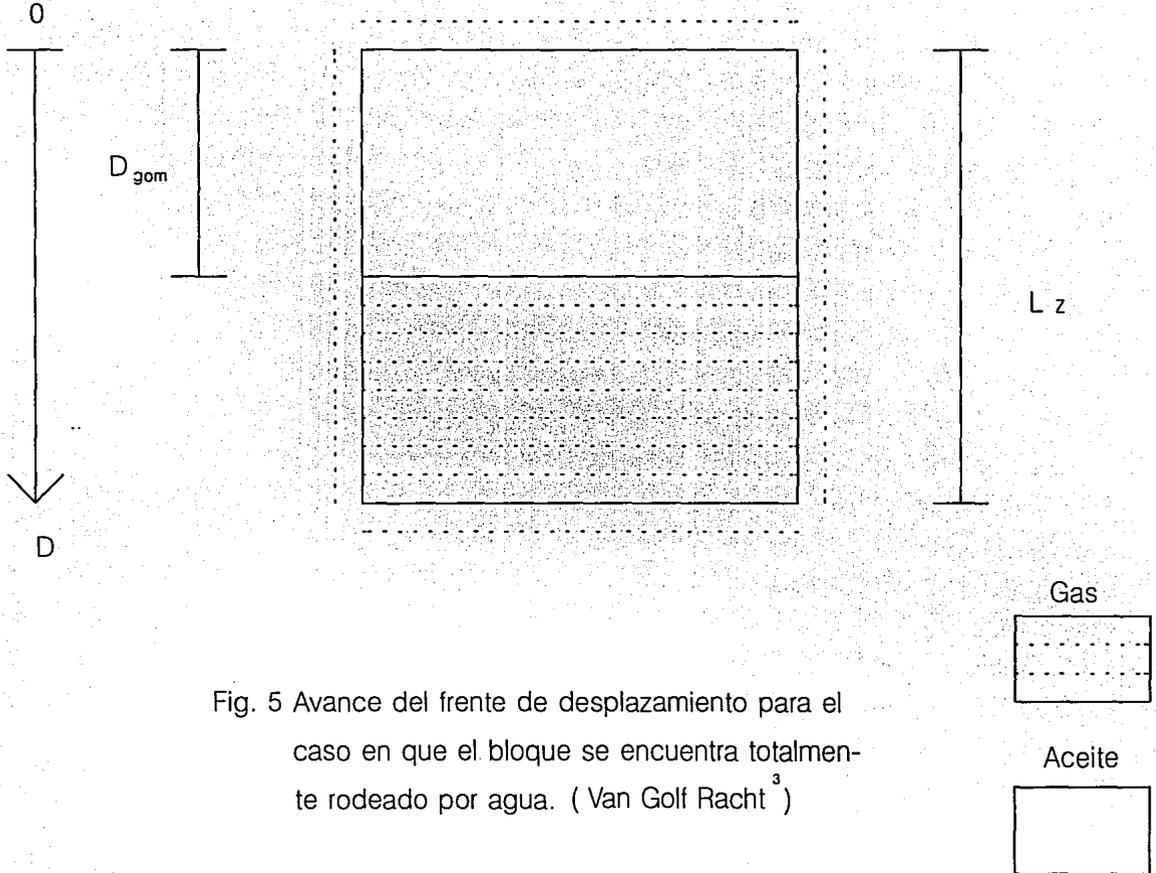


Fig. 5 Avance del frente de desplazamiento para el caso en que el bloque se encuentra totalmente rodeado por agua. ( Van Golf Racht<sup>3</sup> )

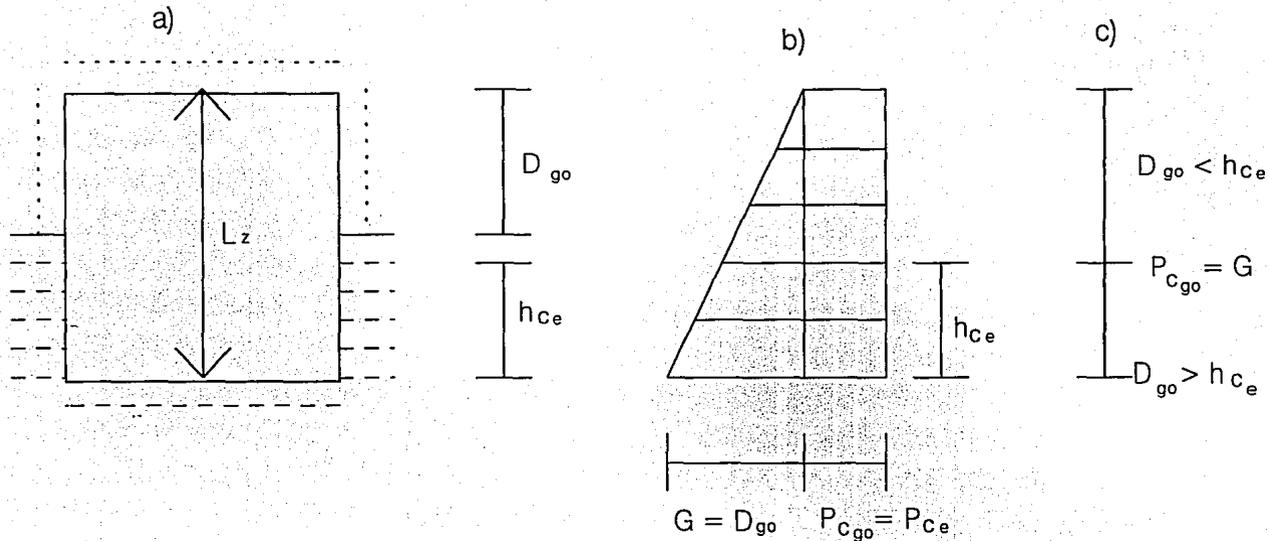
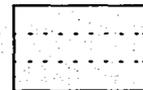


Fig. 6 Bloque saturado de aceite, rodeado parcial-  
mente por gas: a) Bloque rodeado por aceite  
y gas, b) Distribución de presión contra pro-  
fundidad, c) Distribución de zonas.

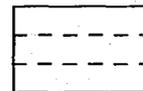
3

( Van Golf Racht )

Gas



Agua



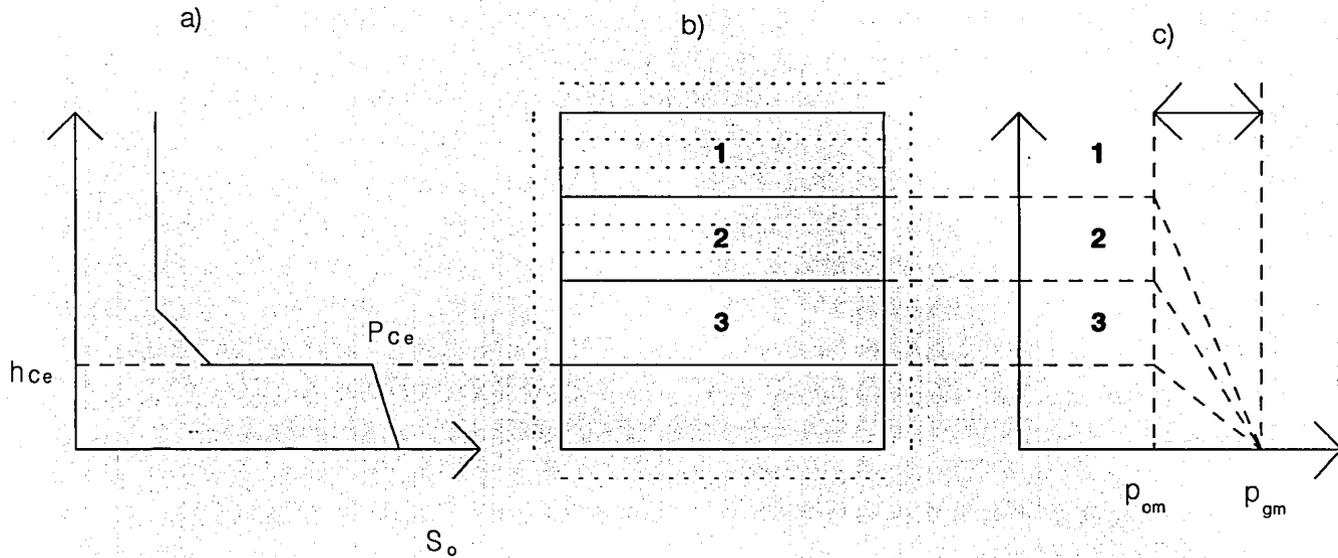
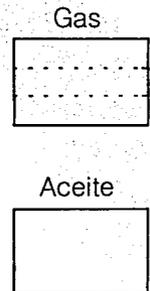


Fig. 7 Relación entre fuerzas capilares y gravitacionales en un proceso de drene gravitacional: a) Curva capilar, b) Desplazamiento del proceso de drene gravitacional en el bloque c) Perfil de presiones. ( Van Golf Racht <sup>3</sup>)



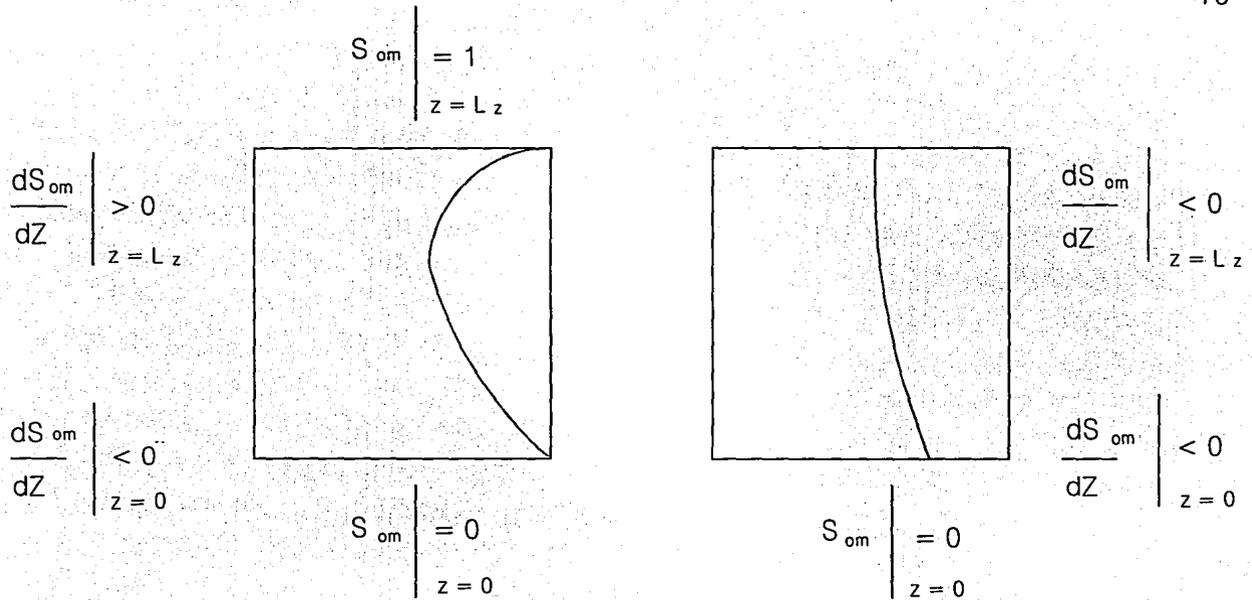


Fig. 8 Representación esquemática del perfil de saturaciones en un bloque de matriz para dos posibilidades diferentes. ( Firoozabadi <sup>4</sup> )

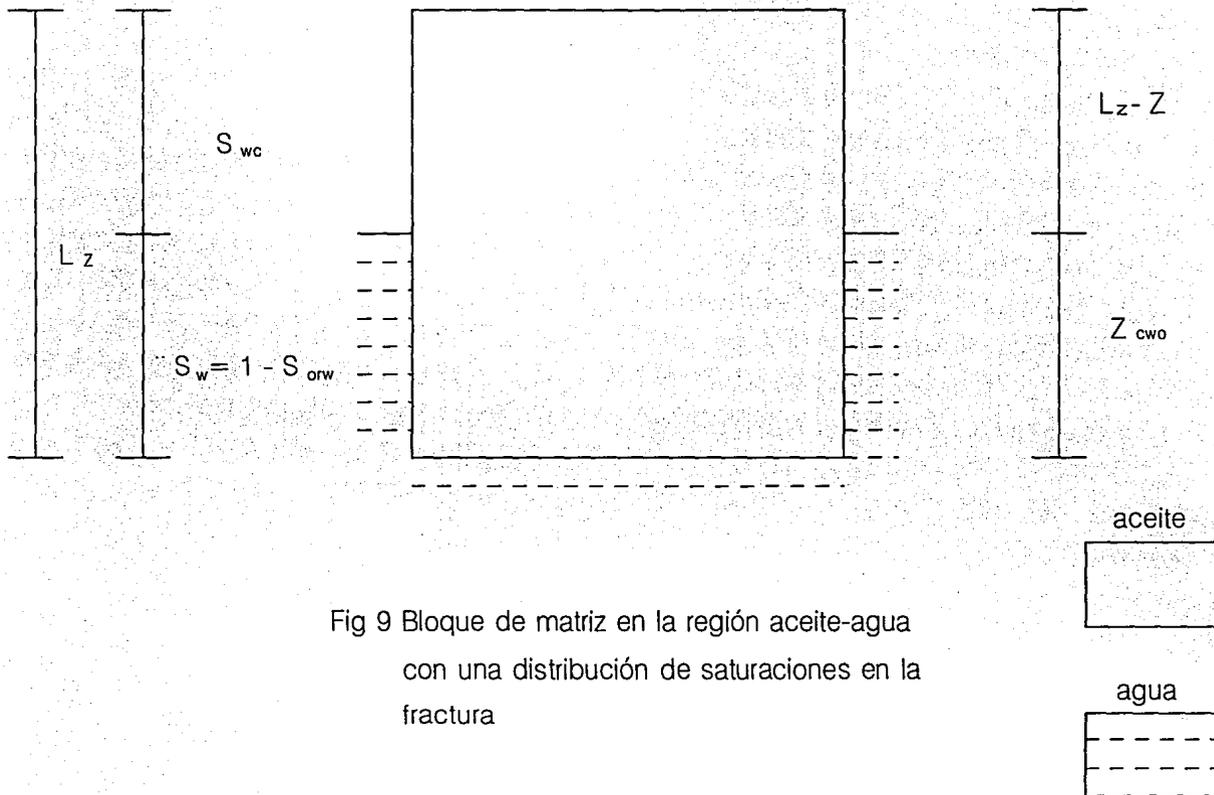


Fig 9 Bloque de matriz en la región aceite-agua  
con una distribución de saturaciones en la  
fractura

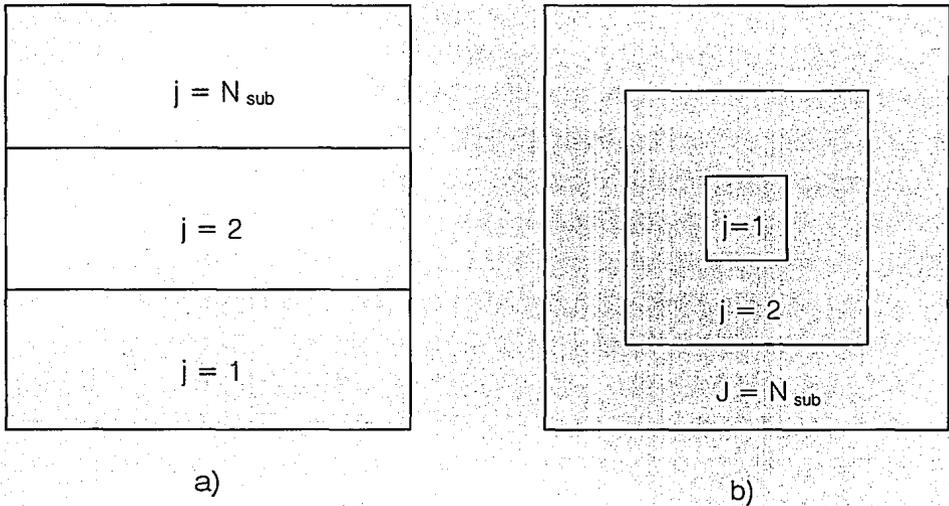


Fig. 10 Dos posibles formas de subdividir los bloques de matriz: a) Las subceldas están conectadas a las fracturas, b) No todas las subceldas interactúan con las fracturas.

( Gilman<sup>16</sup> )

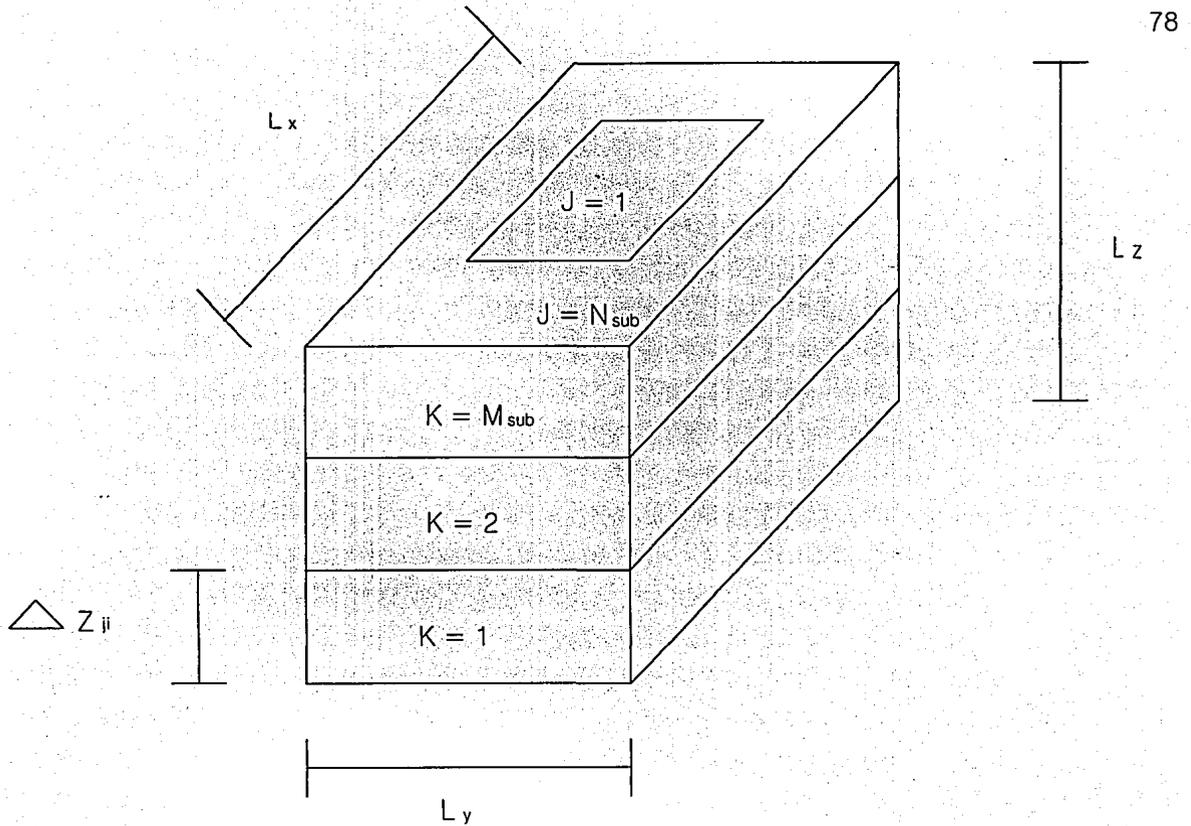


Fig. 11 Discretización del bloque de matriz, considerando flujo bidimensional. ( Beckner<sup>18</sup> )

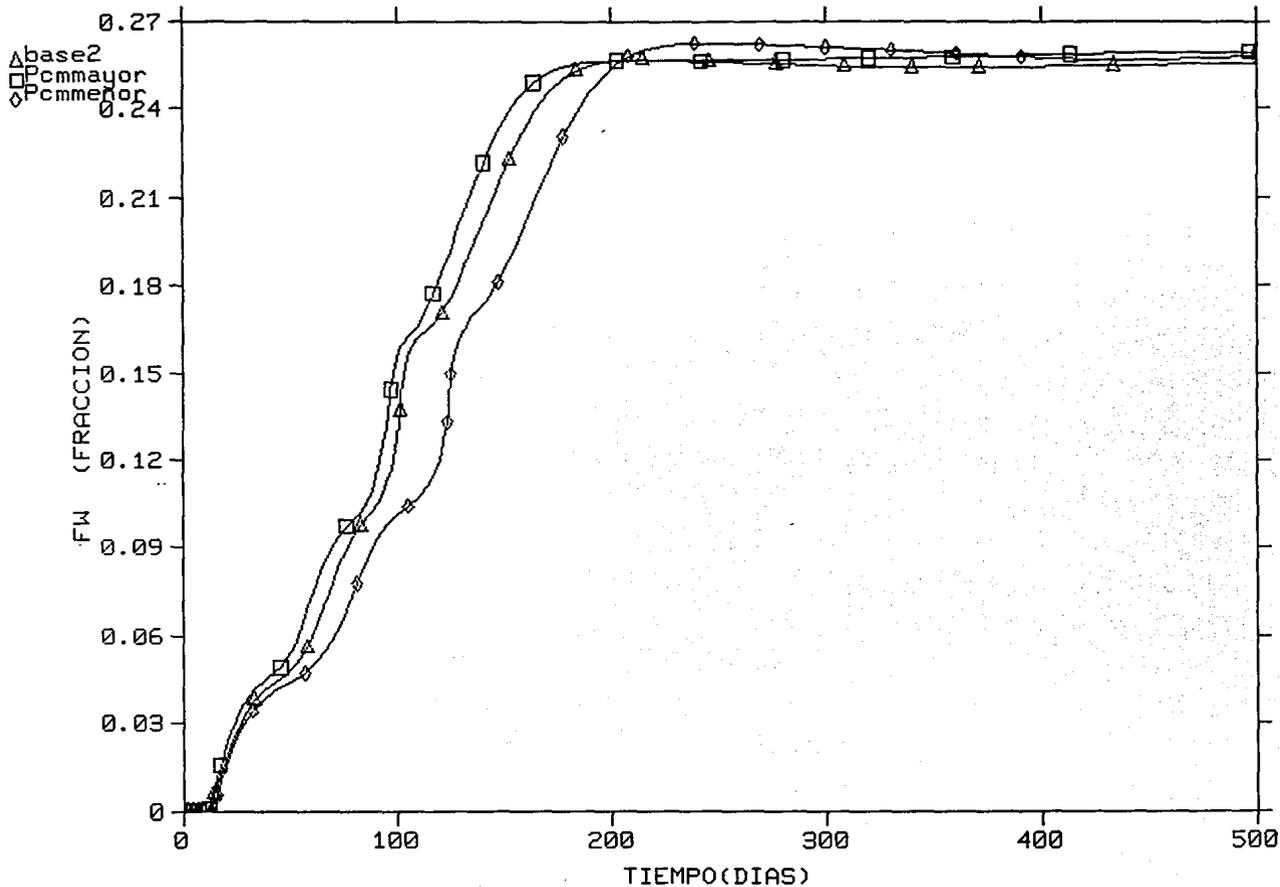


FIG. FW VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

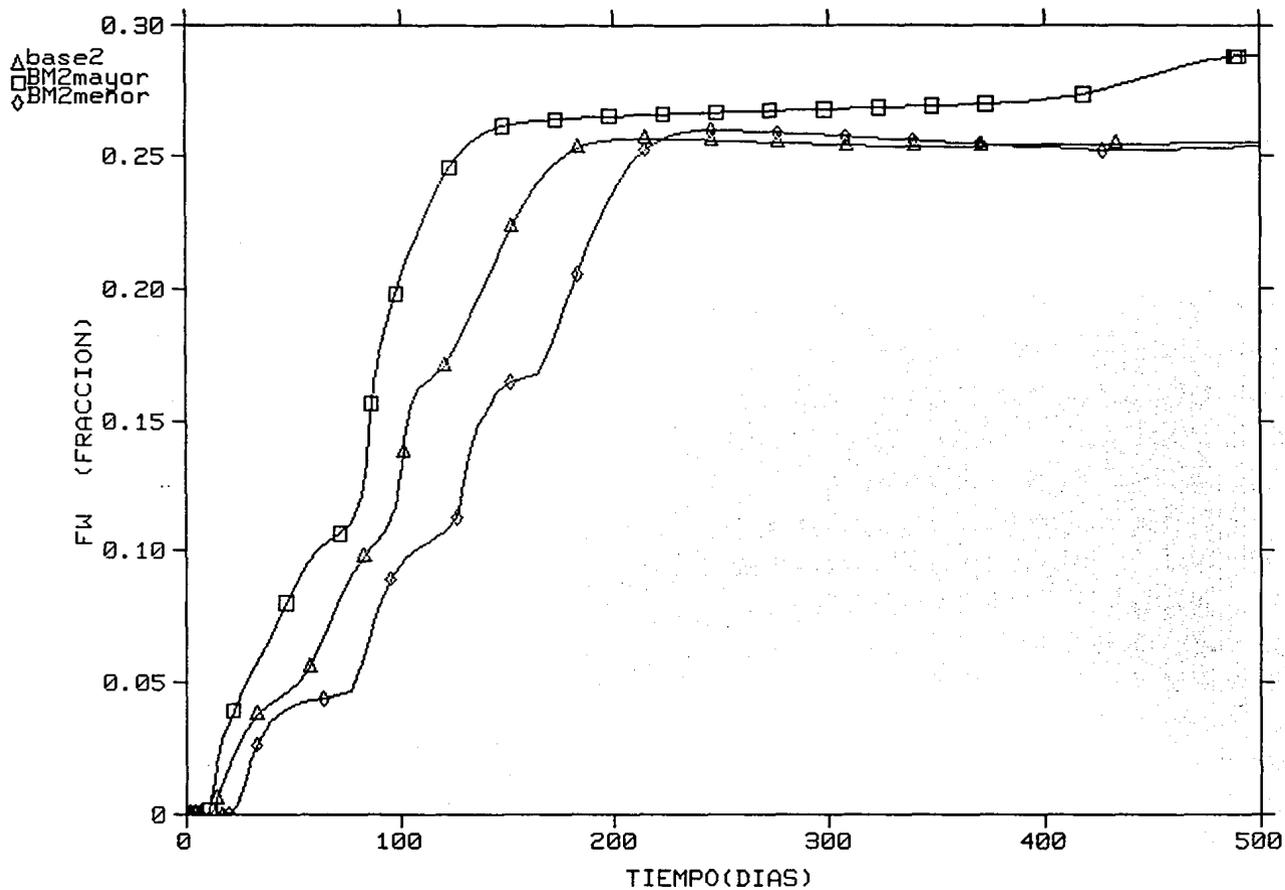


FIG. FW VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

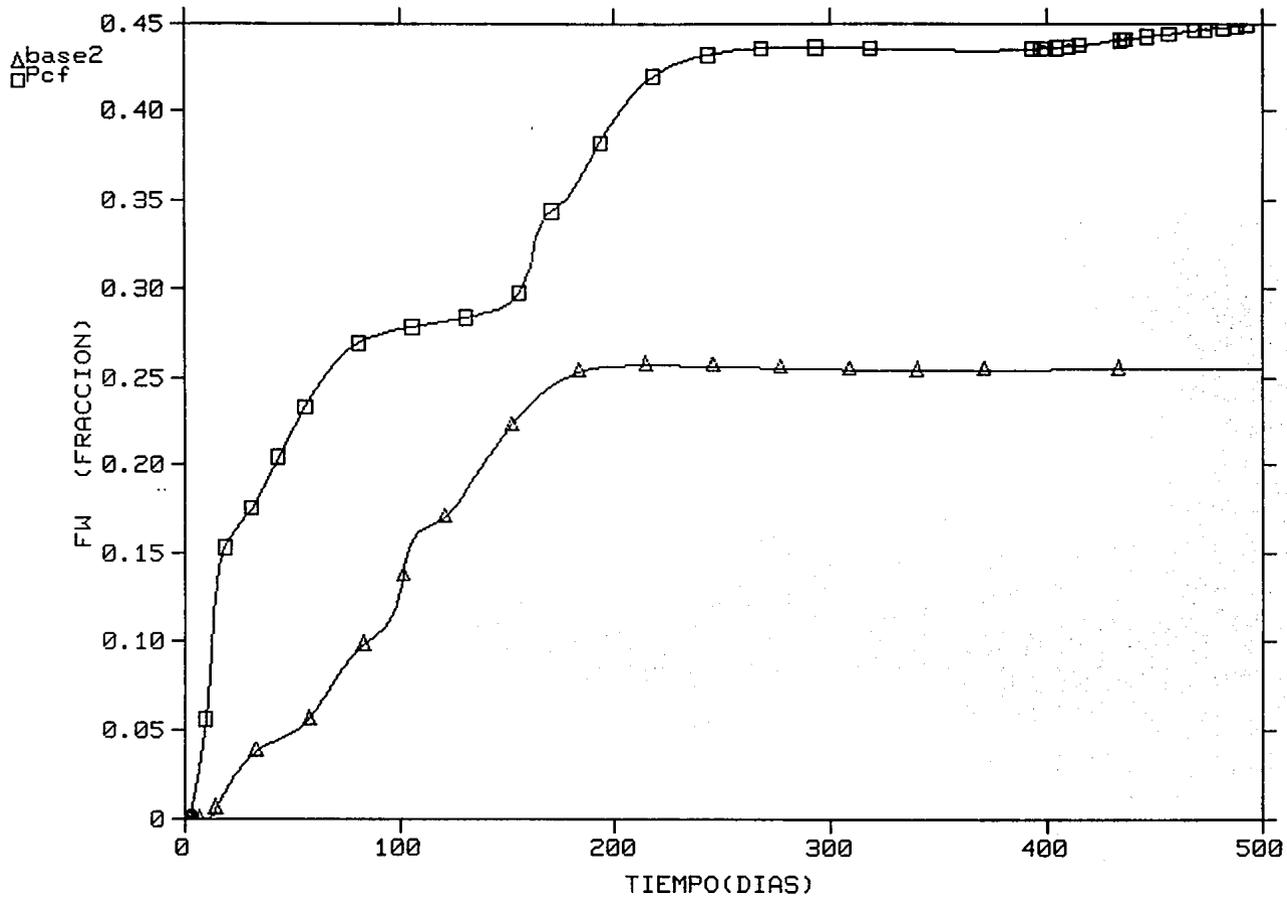


FIG. FW VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

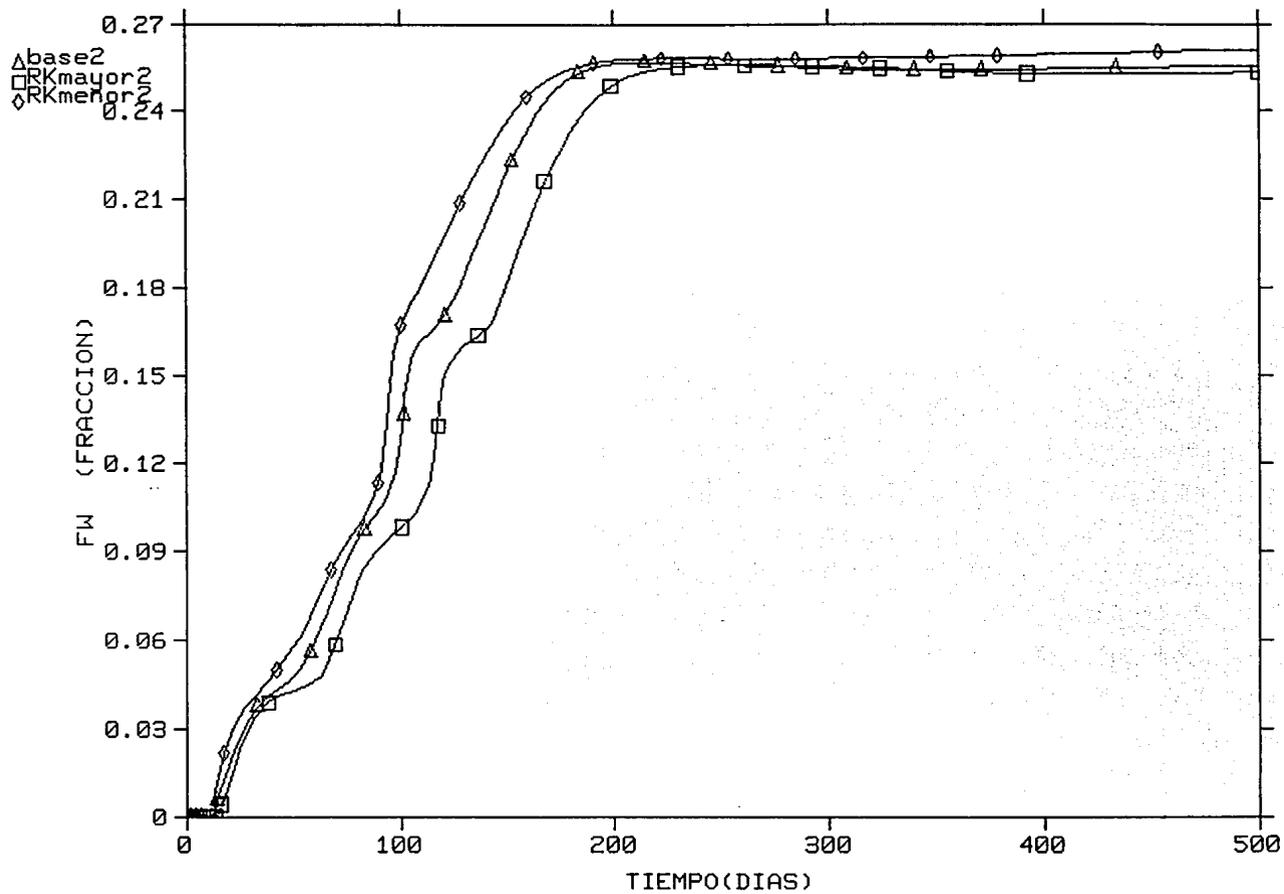


FIG. FW VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

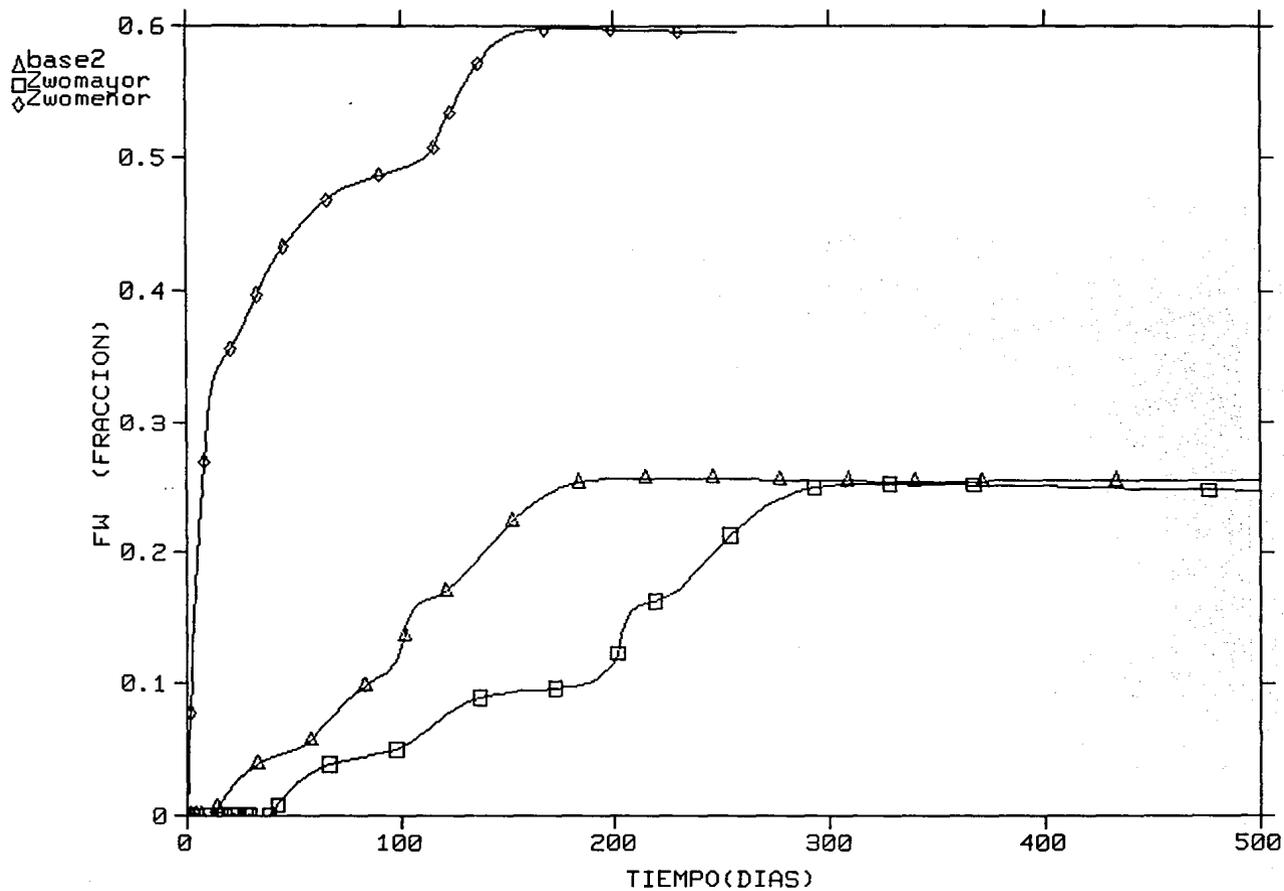


FIG. FW VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

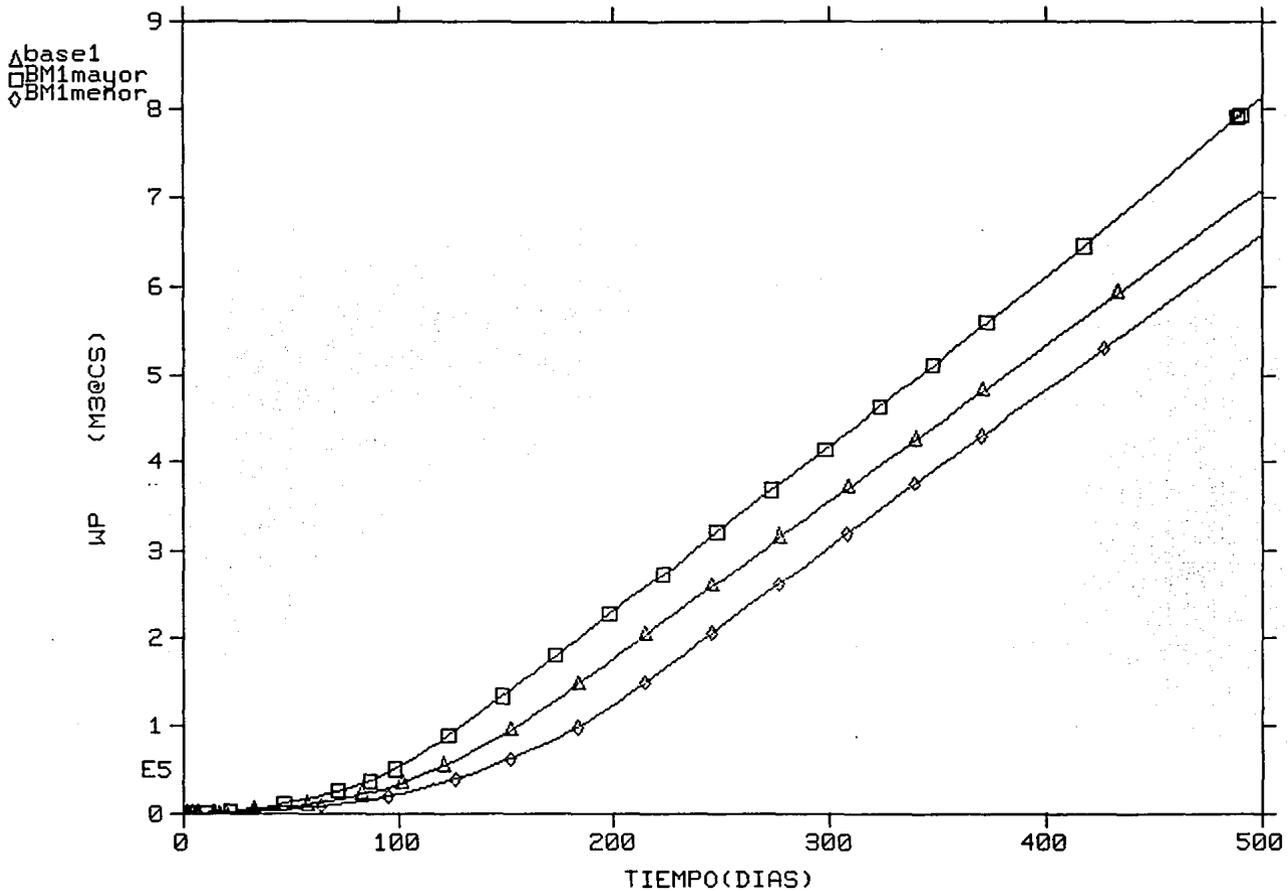


FIG. WP VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

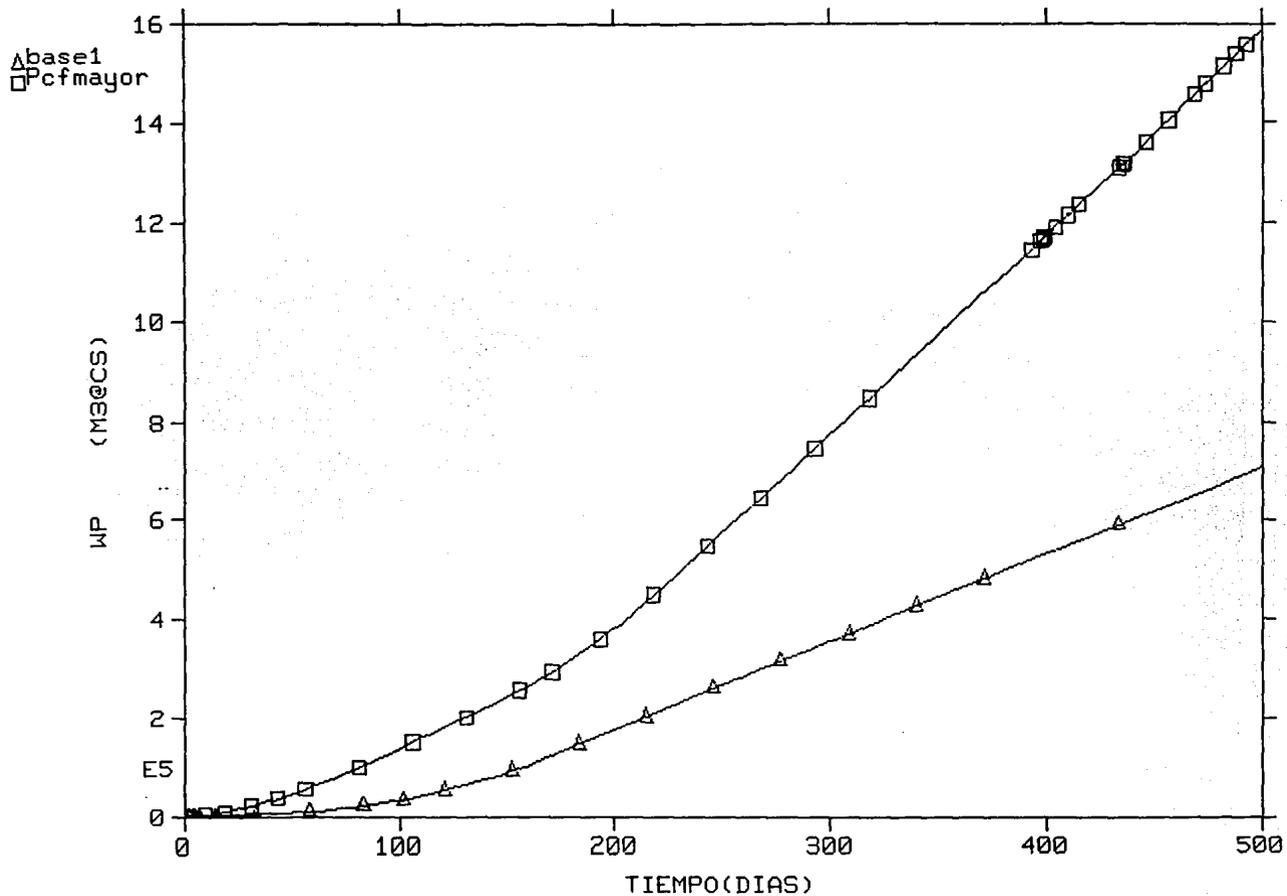


FIG. WP VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

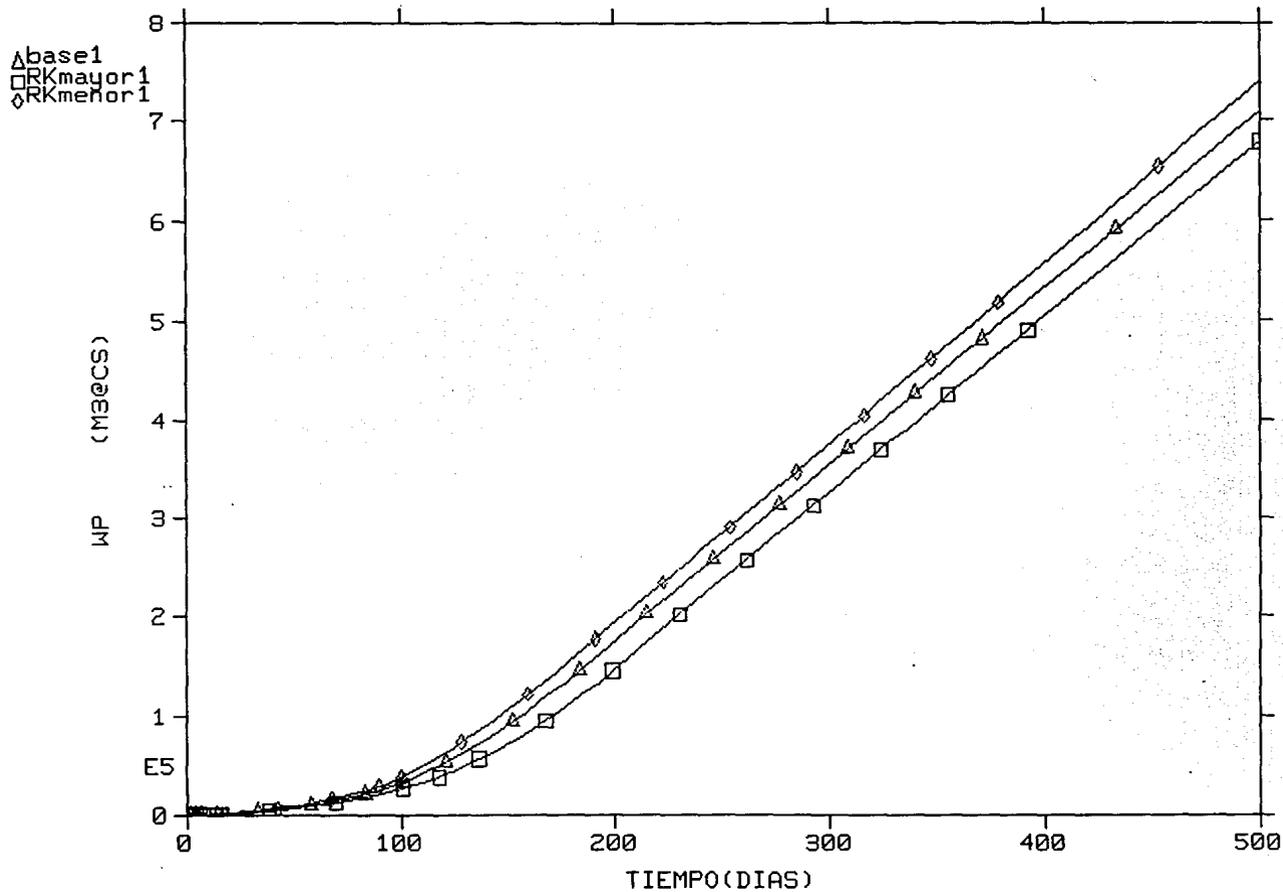


FIG. WP VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

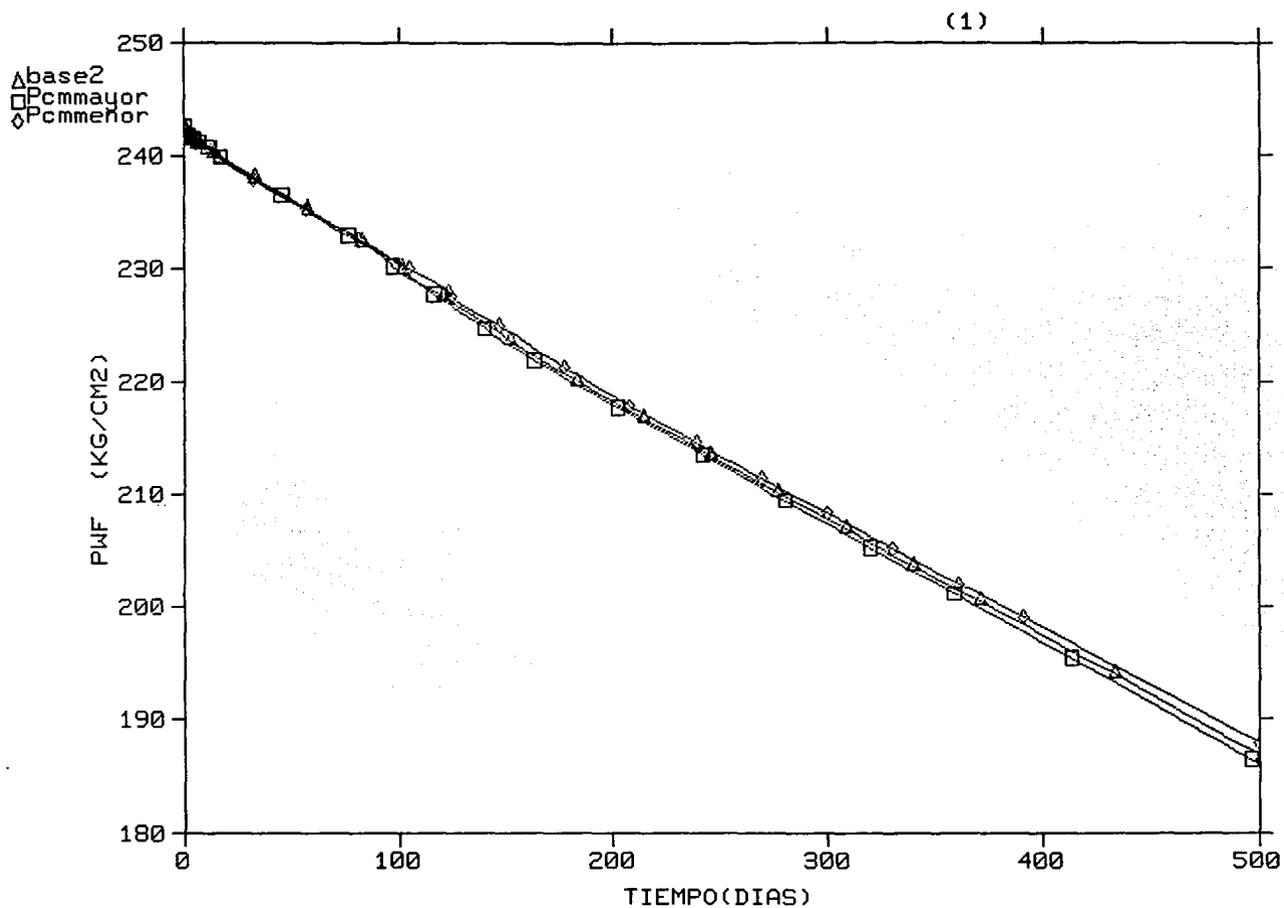


FIG. PWF VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

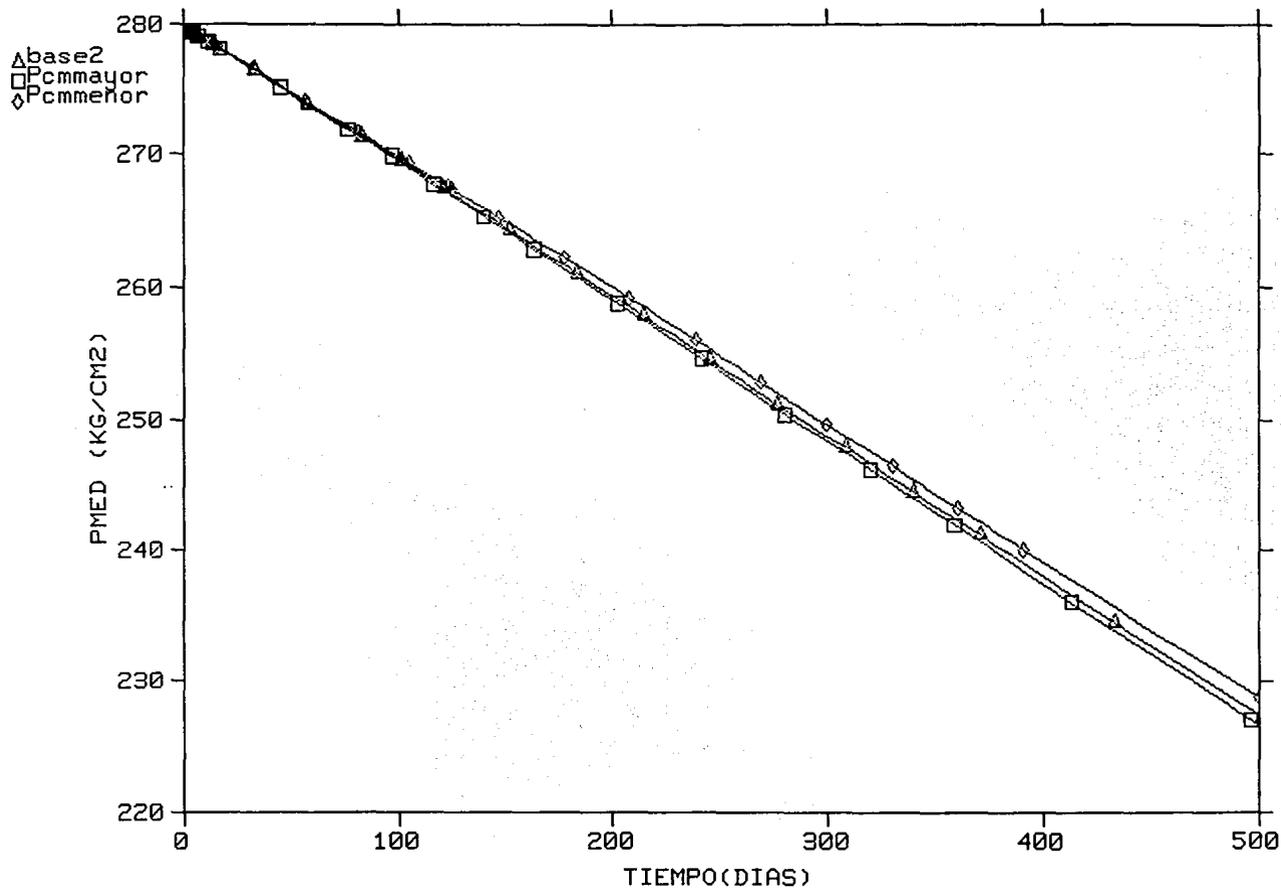


FIG. PMED VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

(1)

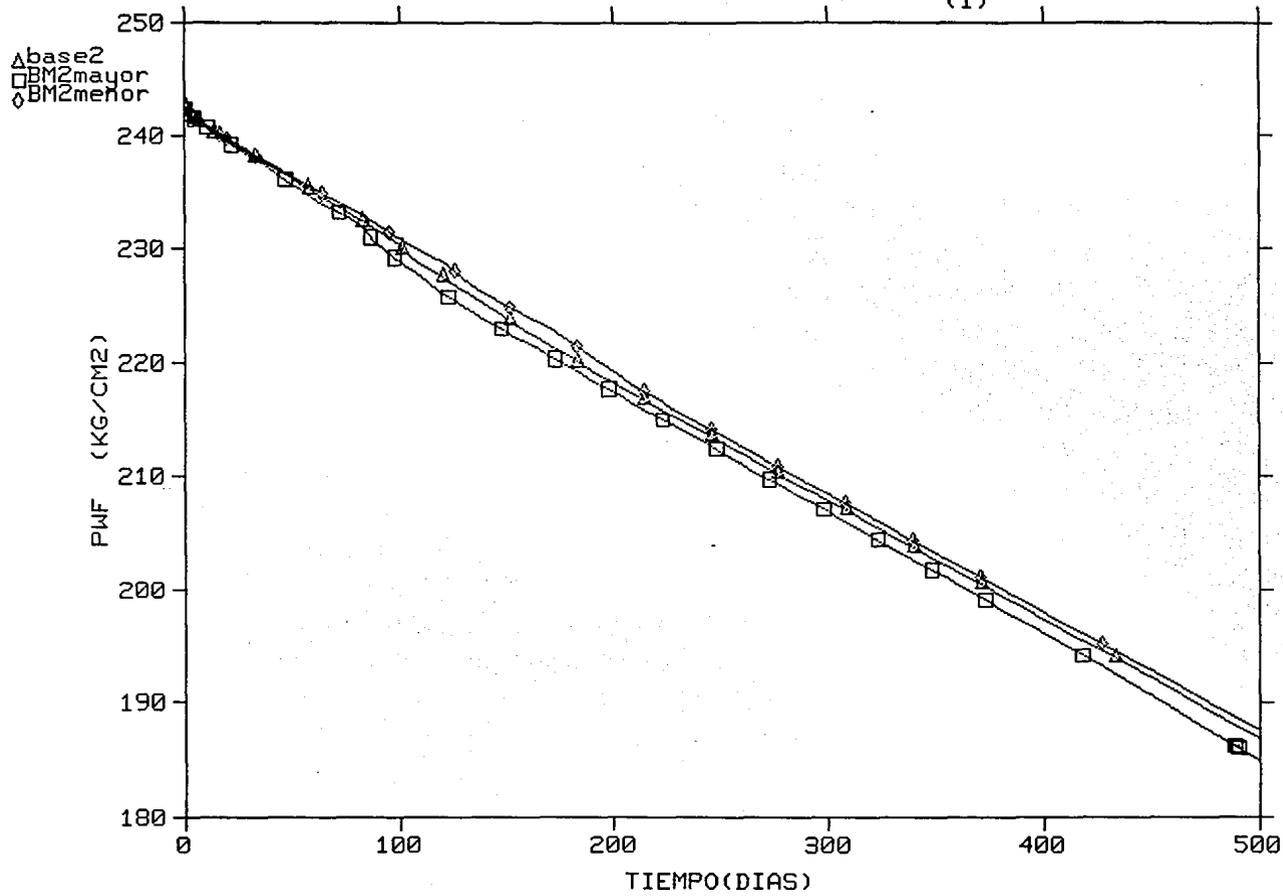


FIG. PWF VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

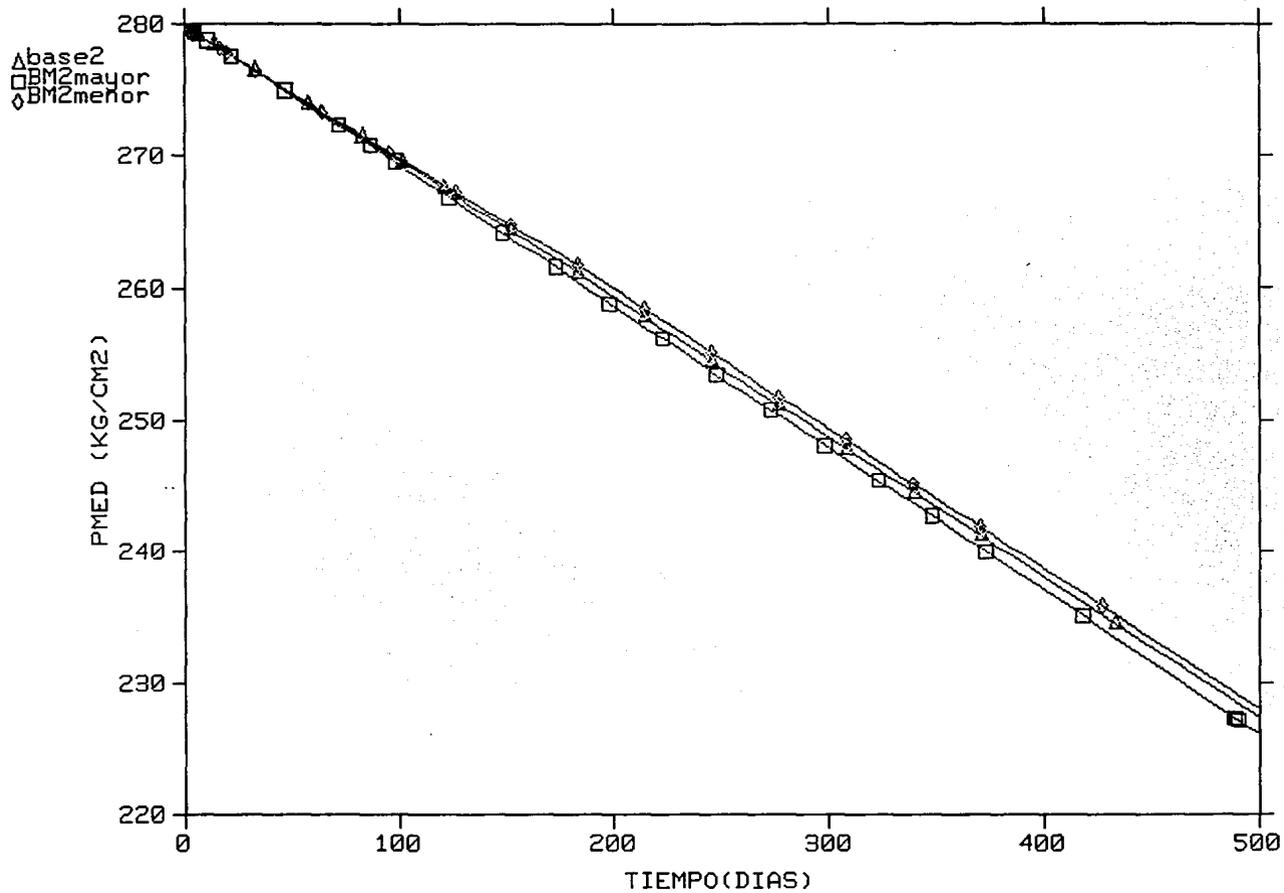


FIG. PMED VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

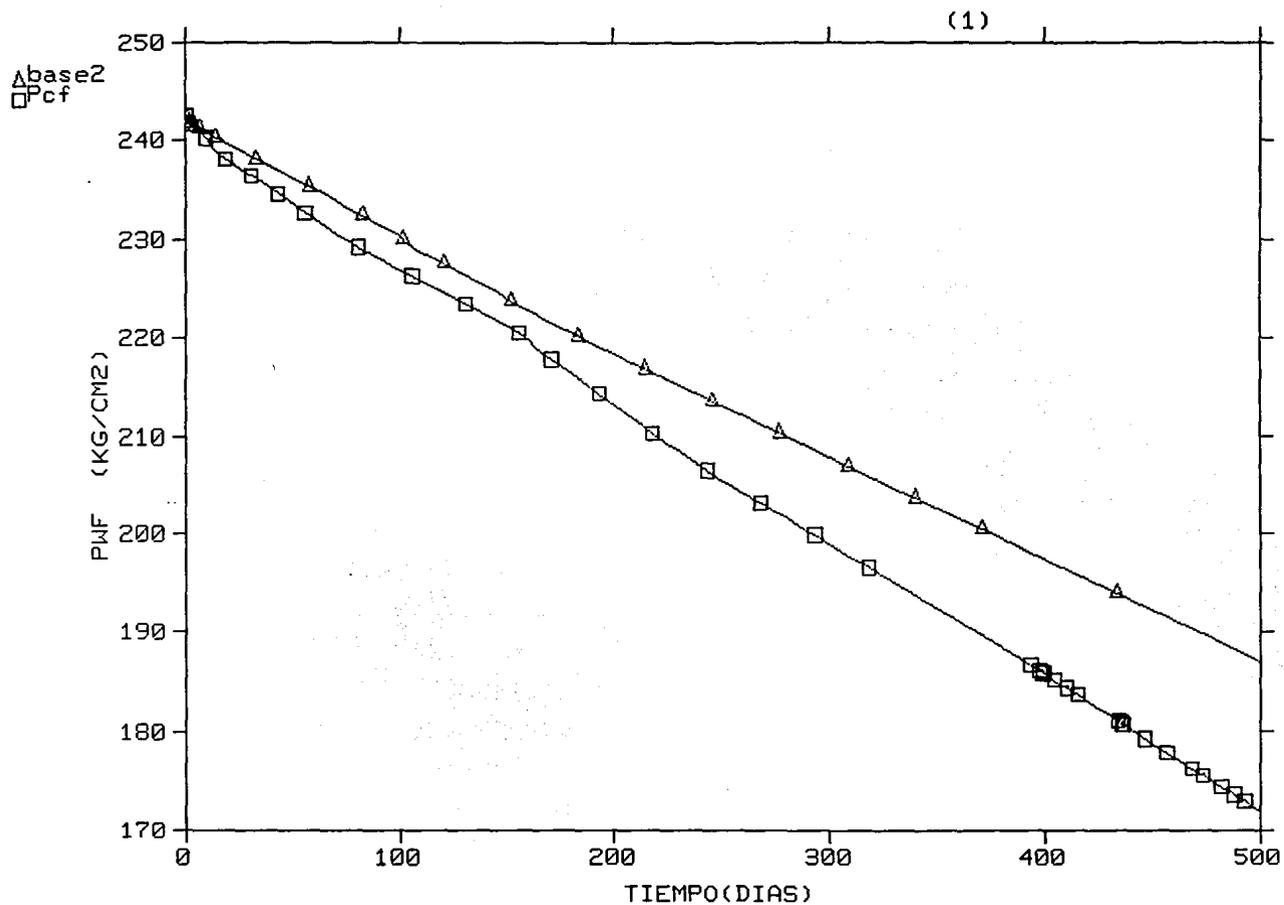


FIG. PWF VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

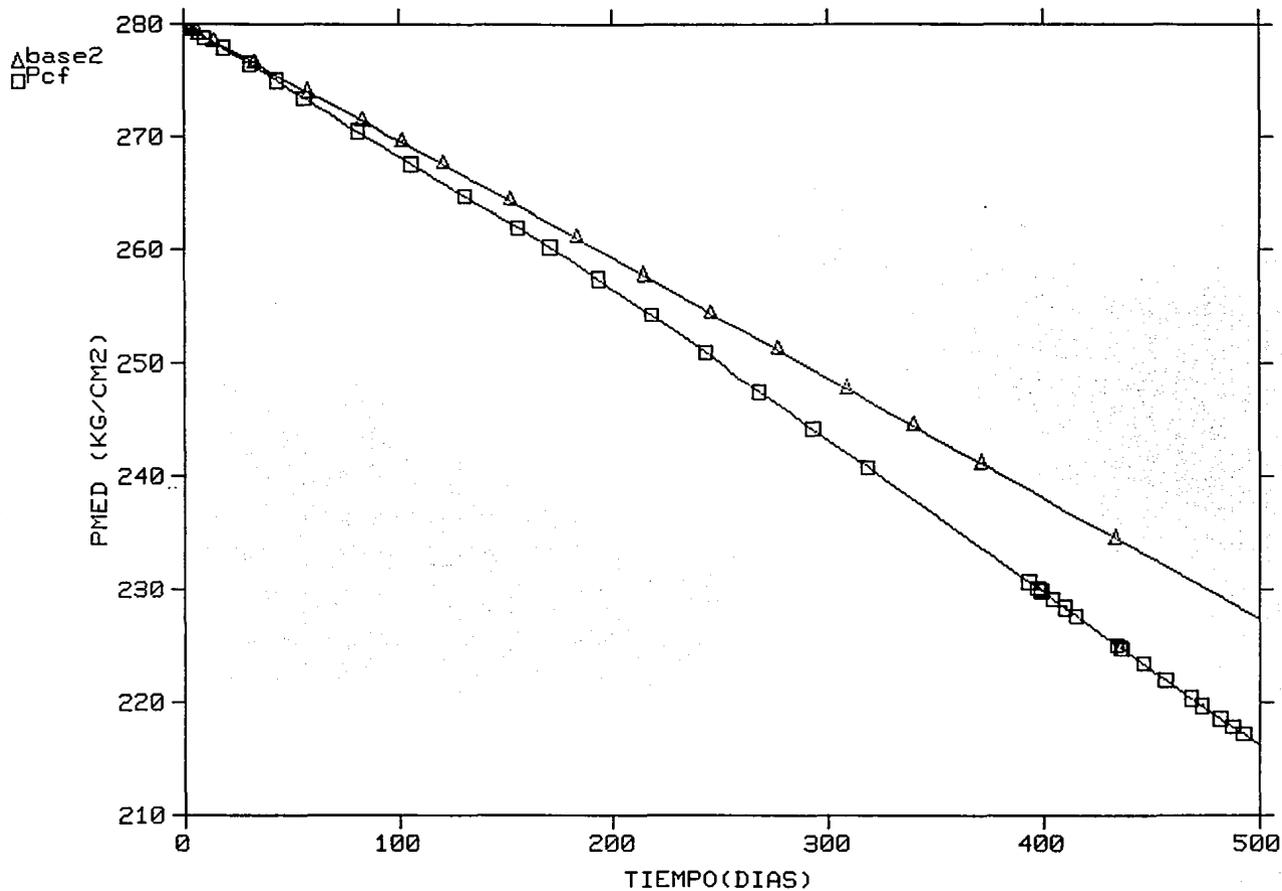


FIG. PMED VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

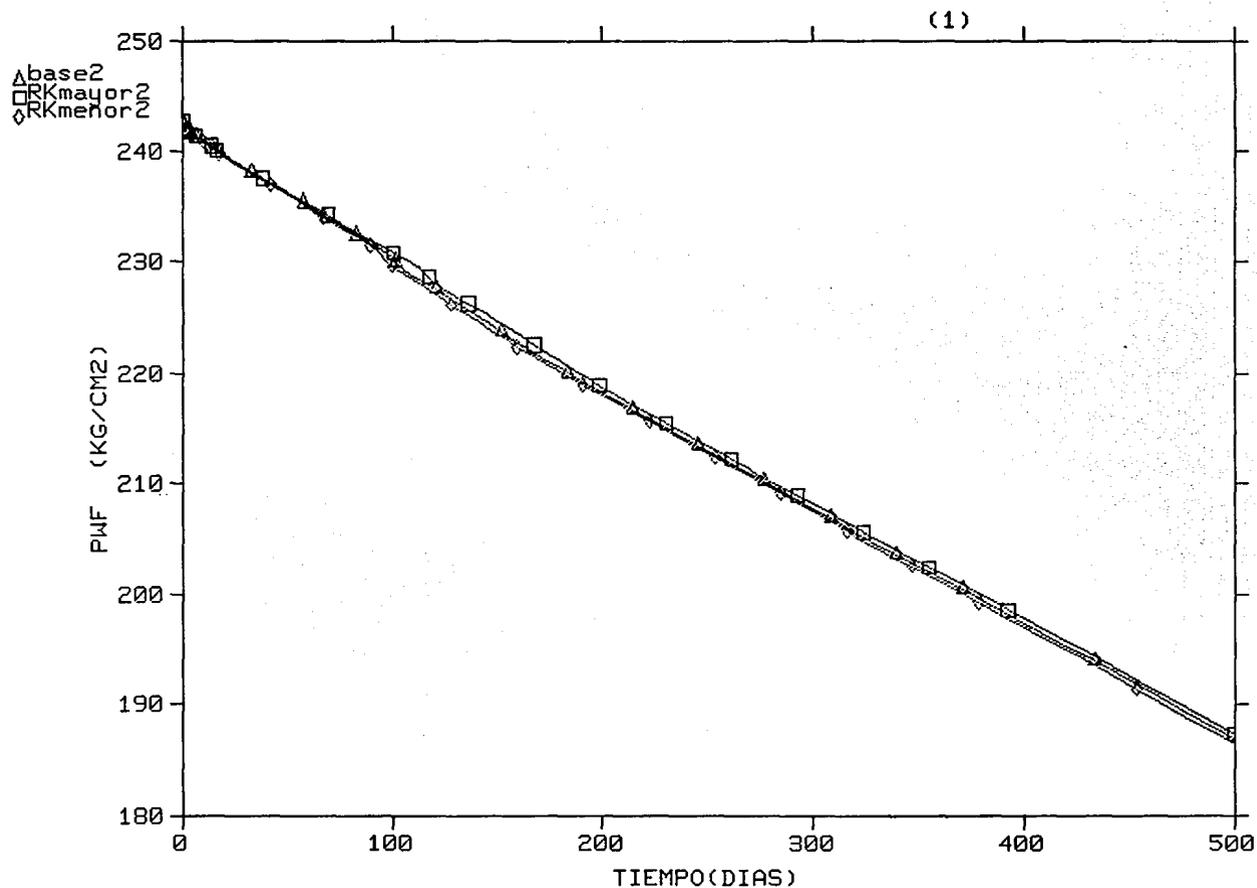


FIG. PWF VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

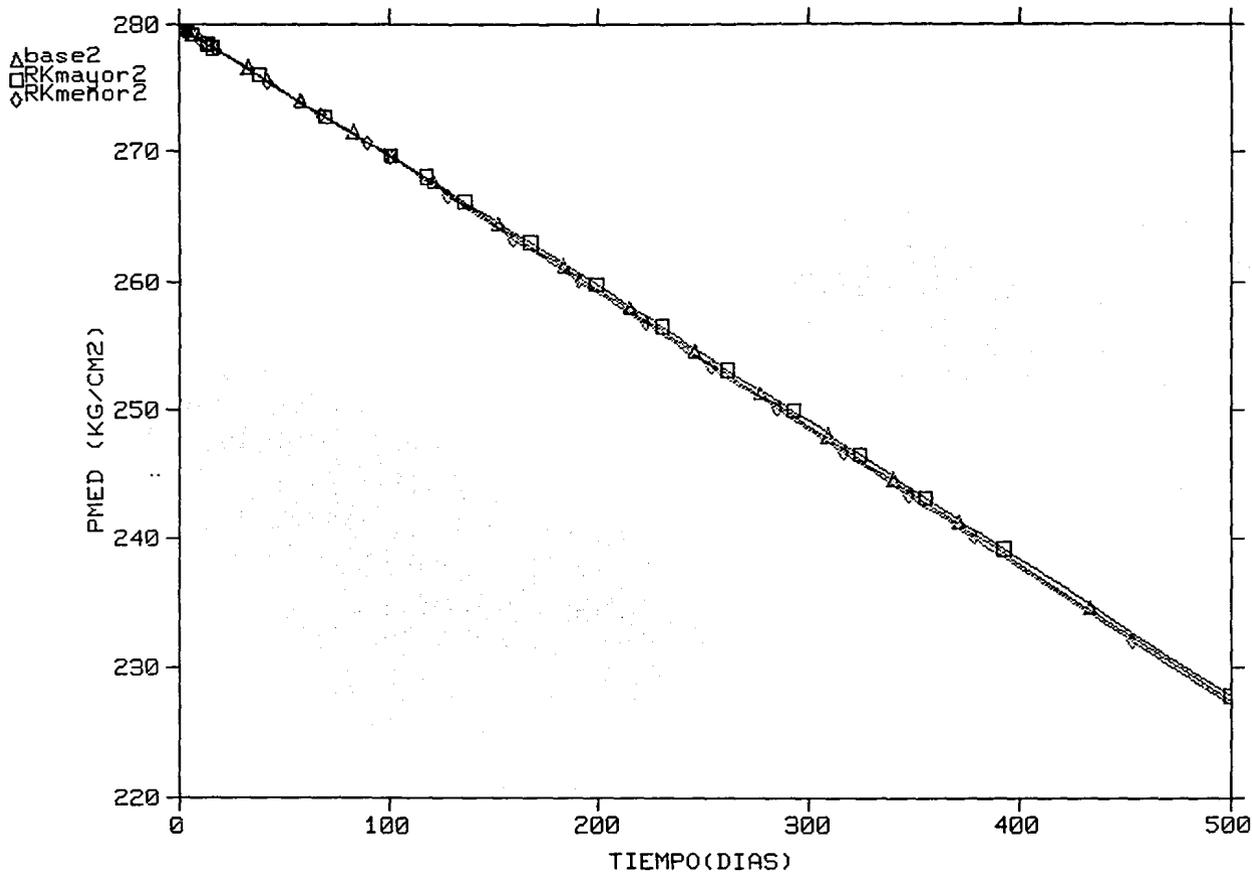


FIG. PMED VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

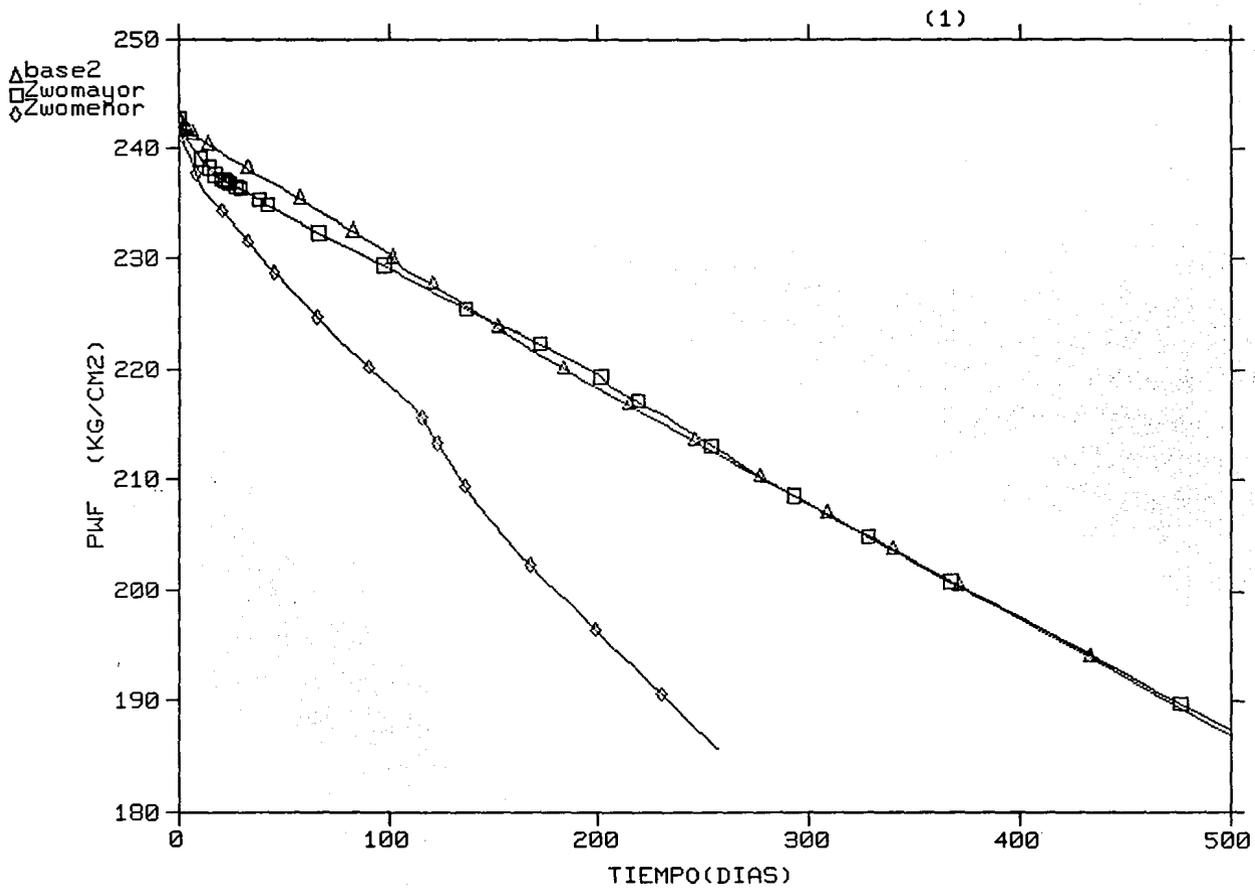


FIG. PWF VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

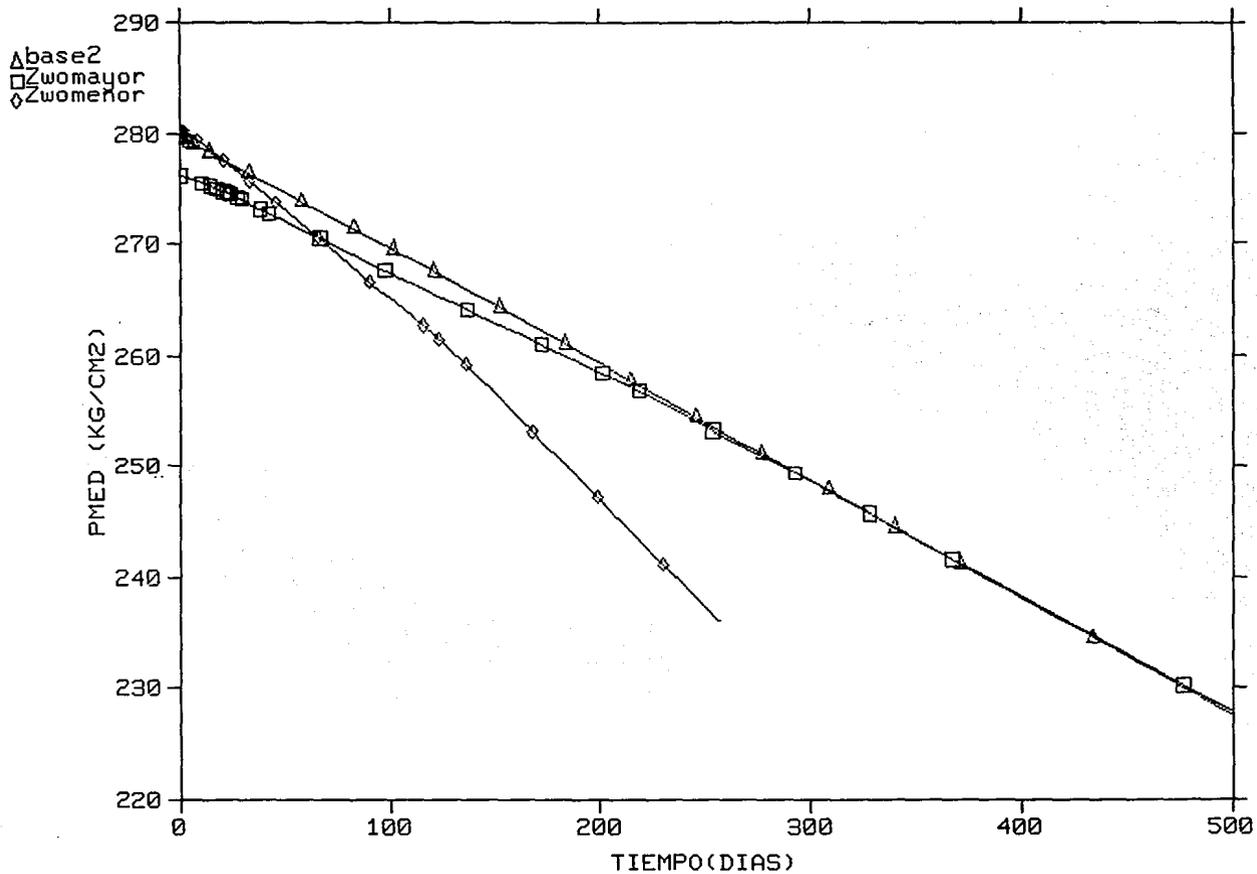


FIG. PMED VS TIEMPO

\*\*\*

POZO KU NO. 26

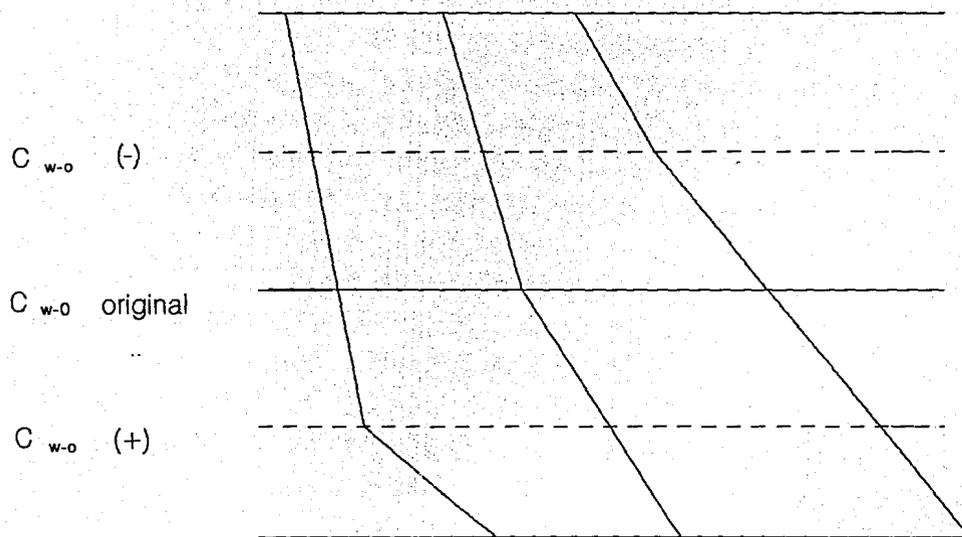


Fig. 30 Distribución de presiones para el caso en que el contacto agua-aceite se encuentra mas arriba (-) y para cuando se encuentra mas abajo (+) respecto al contacto original.

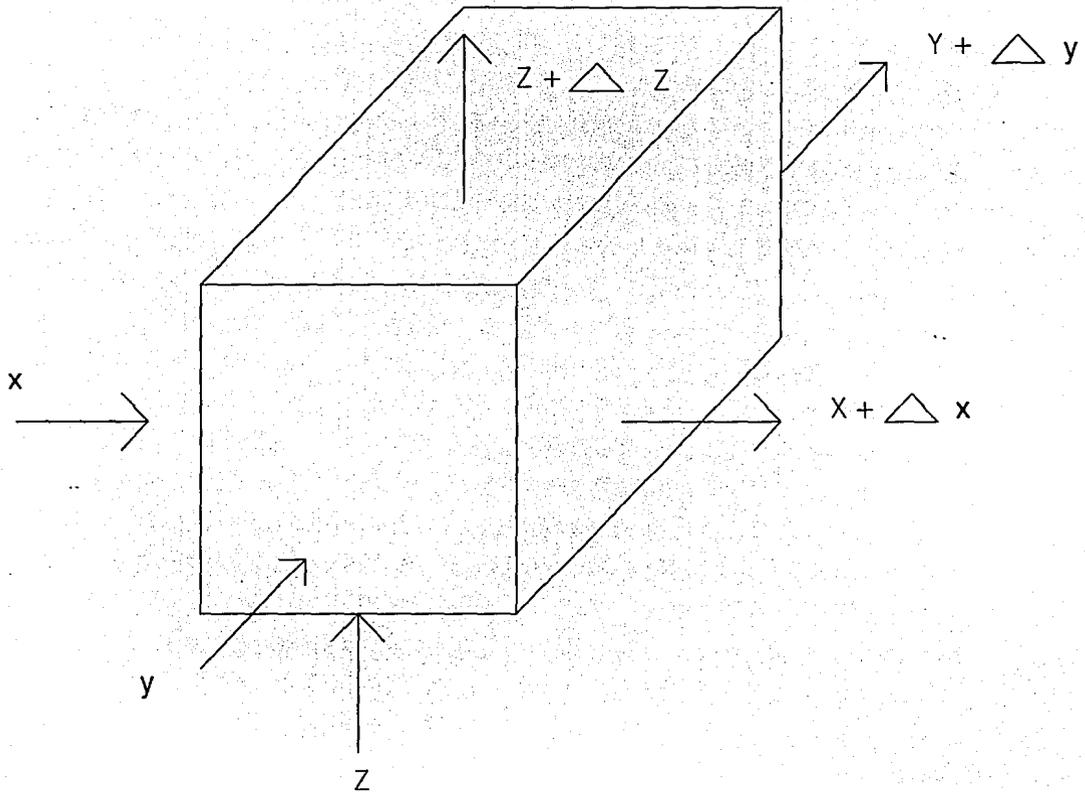


Fig. 31 Volumen de control representativo del medio de fracturas.