UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ASPECTO LUDICO DE LAS MATEMATICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ADRIAN GIRARD ISLAS

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

México, D.F. 1994

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CIUDAD UNIVERSITARIA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realizó el pasante ADRIAN GIRARD ISLAS con número de cuenta 8552753-7 con el título: "UN ASPECTO LUDICO DE LAS MATEMATICAS"

Consideramos que reune los méritos necesarios para que pueda continuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de MATEMATICO.

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
M. en C. VIRGINIA ABRIN BATULE Director de Tesis	Virginia Abrín Batule
M. en C. RODOLFO SAN AGUSTIN CHI	
M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA	
MAT. BENITO FERNANDO MARTINEZ SALGADO Suplente	
MAT. OSCAR DAVALOS OROZCO Suplente	

Ciudad Universitaria, D.F., a de de 199

A Ti, que has llenado mi vida con tu presencia .

A mi madre, por su amor y sus sacrificios.

A Virginia, por su amistad y paciencia.

A mis profesores, a quien debo mi formación.

A mis hermanos, amigos y familiares, por su comprensión y cariño.

En especial a mis compañeros y amigos Oscar, Benito, José Antonio y Rodolfo, por su participación en este trabajo.

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia podemos encontrar numerosos ejemplos del interés de los seres humanos en buscar diversas formas de entretenimiento y diversión. Las matemáticas han participado desde entonces, aunque a veces de manera oculta, en las más ingeniosas formas de satisfacer esta inquietud. A través de acertijos, juegos o trucos, el hombre ha puesto a prueba su capacidad de razonar y resolver problemas aún sin mayor recompensa que la satisfacción de haber triunfado sobre ellos.

Cuando el matemático se enfrenta a alguno de estos problemas constituye un verdadero reto, pues su espíritu inquieto lo lleva a buscar más allá de una respuesta. Además de una solución, con la cual la generalidad de la gente se sentiría satisfecha, el matemático se plantea nuevas interrogantes a partir de ésta: examina las características de la solución, se pregunta si ésta será única o si existirán más, analiza el acertijo o juego y hará lo posible por hallar una forma general de éste y por lo tanto buscará una solución general también, planteará problemas similares estableciendo variaciones del original, etc...

Con el fin contar con un compendio de acertijos, juegos y trucos, en los cuales se vean involucrados conceptos o técnicas relacionadas en alguna forma con las matemáticas, se han resuelto y analizado de manera detallada en el presente trabajo una pequeña muestra de tales problemas.

Se han tomado, del inmenso acervo que ha logrado reunir la humanidad en esta clase de pasatiempos, algunos problemas cuya estructura o técnica para lograr la solución resulte accesible a aquellas personas que han adquirido conocimientos de enseñanza media superior en matemáticas. Aún así es posible que algunos de los conceptos que aquí se presentarán constituyan una novedad para el lector, pero se tratará en general de conceptos sencillos que no requieran de una investigación exhaustiva para lograr comprenderlos.

Pensamos que esta breve recopilación pueda brindar un apoyo a los profesores de nivel bachillerato en cuanto a la aplicación de algunos conceptos propios del nivel, o bien como motivación para los estudiantes con el fin de invitarlos a practicar ejercicios de este tipo que les ayuden a desarrollar ciertas habilidades en la resolución de problemas.

Aplicamos en los problemas seleccionados algunos resultados de diferentes ramas de las matemáticas tales como Aritmética, Algebra, Teoría de las Gráficas, Redes y Combinatoria.

Con el fin de evitar un formalismo innecesario, en desacuerdo con los objetivos de este trabajo, no incluimos las demostraciones de los resultados aplicados, sin embargo proporcionamos en esos casos la bibliografía necesaria para aquellos interesados en tales pruebas.

COLUMNAS Y RENGLONES

Es conocido en algunos lugares un tablero numerado, pariente cercano de las "tablas de sumar" que nos eran enseñadas, en la escuela primaria. Este tablero tiene, además, una curiosa propiedad aritmética que estará fácilmente a nuestro alcance si aplicamos correctamente las instrucciones indicadas.

En primer lugar debemos construir un tablero como el que se muestra en la figura, y conseguir además 20 fichas, que bien pueden ser monedas o botones que alcancen a cubrir los números que se encuentran en las casillas.

7	13	10	19	8
1	7	4	13	2
13	19	16	25	14
4	10	7	16	5
6	12	9	18	7

Una vez que se cuente con el material señalado comencemos a observar el comportamiento de los números del tablero:

Seleccionemos cualquiera de las 25 casillas. Cubramos con fichas las demás casillas que se encuentran en el renglón de la elegida. Cubramos en la misma forma las casillas que pertenecen a su columna, cuidando de dejar a ésta destapada.

Ejemplo: si seleccionamos la casilla que contiene al número 25 tendremos que cubrir las casillas que contienen al 13, 19, 16 y 14 que pertenecen a su renglón y también las que contienen al 19, 13, 16 y 18 que pertenecen a su columna.

Fijemos ahora nuestra atención en alguna otra casilla que no haya sido cubierta y nuevamente tapemos las otras que pertenecen a su renglón y a su columna.

Repitamos dos veces más esta operación para observar solamente descubiertas aquellas cinco casillas que se han elegido, y que además en cada uno de los renglones y de las columnas del tablero hay sólo una casilla destapada.

Sumemos ahora los números que podemos observar y anotemos el resultado en un papel.

Si realizamos todo este proceso algunas veces más, encontramos que al realizar la suma de los números, que al final quedan descubiertos, tenemos siempre 53 como resultado sin importar cuales hayan sido las casillas elegidas en cada ocasión.

Suponemos que la propiedad anterior depende de la relación guardan entre sí los números que allí aparecen, y quisiéramos encontrar si existen otros números que colocándose en una posición adecuada cumplan también con dicha propiedad.

Un análisis cuidadoso del tablero nos muestra que al disminuir en 6 unidades cada uno de los elementos del primer renglón tenemos como resultado los elementos correspondientes al segundo; de esta misma forma al incrementarlos en 6 unidades obtenemos fácilmente el tercer renglón. Observamos entonces que cada uno de los renglones del tablero ha sido el resultado de aumentar o disminuir en alguna cantidad fija los elementos del primer renglón, al que hemos considerado como referencia, aunque podemos tomar a cualquiera de los otros en la misma forma sin que esto cambie la situación, ya que notamos que no existe regla alguna en cuanto a la elección de los números que conforman este renglón.

Observamos también que al eliminar igual número de columnas y de renglones la propiedad se conserva, incluyendo el caso mínimo que consiste de un tablero con sólo dos renglones y dos columnas.

Si deseáramos incrementar la dimensión del tablero, sin perder éste sus características especiales, debemos aumentar por igual el número de renglones y de columnas, elegir además nuevos elementos que encabecen los renglones y las columnas añadidas, completar la tabla realizando los cálculos necesarios, que serán únicamente sumas.

Ya que conocemos la forma de construcción estamos en la posibilidad de generalizar a ***n*** columnas y ***n*** renglones obteniendo una tabla en la forma siguiente:

a_1+k_1	a_2+k_1	...	a_i+k_1	...	$a_{n-1}+k_1$	a_n+k_1
a_1+k_2	a_2+k_2	...	a_i+k_2	...	$a_{n-1}+k_2$	a_n+k_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1+k_i	a_2+k_i	...	a_i+k_i	...	$a_{n-1}+k_i$	a_n+k_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1+k_{n-1}	a_2+k_{n-1}	...	a_i+k_{n-1}	...	$a_{n-1}+k_{n-1}$	a_n+k_{n-1}
a_1+k_n	a_2+k_n	...	a_i+k_n	...	$a_{n-1}+k_n$	a_n+k_n

En el caso general, el proceso de cubrir las casillas de la manera antes descrita, lo podemos realizar en *n-1* pasos aplicando el siguiente algoritmo:

1) Fíjate en algún número destapado, es decir que no hayas elegido con anterioridad. Al inicio del juego podemos elegir este número de n^2 formas.

2) Cubre con las fichas las casillas destapadas que corresponden al renglón y a la columna del número que elegiste.

3) Si todavía hay más de ***n*** casillas destapadas realiza otra vez este proceso iniciando desde el paso 1), si ya son ***n*** únicamente los números que se encuentran a la vista continúa con el paso 4).

4) Suma los ***n*** números que no están cubiertos por una ficha y anota el resultado.

Realiza repetidas veces este procedimiento desde el principio, seleccionando números diferentes cada vez y anotando el resultado de la suma en cada ocasión.

Al finalizar los pasos indicados para el tablero de ***n*** X ***n***, obtendremos una tabla final en la cual permanecerán ***n*** casillas destapadas las cuales tienen las características siguientes:

a) Para $i = 1,2, \ldots ,n$ cada a_i se encuentra en uno y sólo un renglón lo cual nos asegura que al hacer la suma sólo tenemos a cada a_i una vez como sumando.

b) También se tiene que para $i = 1,2, \ldots, n$, k_i tiene la propiedad mencionada anteriormente en (a) de aquí que al final de cada juego el número que se obtiene es:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} k_i$$

y es constante.

Mencionamos, en el primer párrafo que este tablero guarda cierta familiaridad con las tablas de sumar que se nos enseñaban en la primaria, y es que resulta que si damos a las a_i's y a las k_i's valores desde 0 hasta $n-1$ de la siguiente forma:

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=2,\ \ldots.\ a_i=i-1\ \ldots\ a_n=n-1$

$k_1=0,\ k_2=1,\ k_3=2,\ \ldots.\ k_i=i-1\ \ldots.\ k_n=n-1$

lo que tenemos es precisamente la tabla de sumar hasta n :

0	1	2	...	*i*	...	*n*
1	2	3	...	*i+1*	...	*n+1*
2	3	4	...	*i+2*	...	*n+2*
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	*i+1*	*i+2*	...	*i+i*	...	*i+n*
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	*n+1*	*n+2*	...	*n+i*	...	*n+n*

Recordemos que para efectuar la suma de dos números, utilizando la tabla, debemos localizar el primer sumando en el primer renglón y el segundo sumando en la primera columna y la suma se encontrará en la casilla en donde dicho renglón y columna se cruzan.

Estas observaciones nos permiten deducir que en realidad el tablero inicial es una tabla de sumar en donde obtenemos siempre una suma aumentada en el número a_i+k_i. ya que si pretendemos sumar dos números, usando la tabla del ejemplo inicial, para obtener el valor decimal de la suma debemos disminuir esta en 7 unidades. En esta tabla de sumar aumentada, no es necesario que los números de los renglones y columnas sean consecutivos puesto que la operación funciona para cualesquiera dos números.

ADIVINA LA EDAD

Podemos adivinar la edad de cualquier persona si le pedimos que haga lo siguiente:

1.- Escriba uno detrás de otro dos dígitos cuya diferencia entre la más grande y la más pequeña sea mayor que 1.

2.- Escriba entre los dos dígitos dados un tercer dígito.

3.- Intercambie los dos primeros dígitos dados.

4.- De los pasos obtenidos en 2 y 3 deberá restar el número menor del mayor.

5.- Ponga los dígitos del resto en orden inverso;

6.- Sume este nuevo número al obtenido en 4.

7.- Añada a este número la edad que tiene.

El interlocutor nos dice el resultado final de todas las operaciones, y nosotros le decimos la edad que él tiene.

Solución:

Como en muchos de los trucos aritméticos de adivinación, al sumar la edad al resultado de las operaciones previas, es de imaginar que este resultado debe ser constante puesto que sólo así se está en posibilidad de calcular mediante una resta la edad del interlocutor.

Esta constante es muy particular por lo que realizaremos un ejemplo para apreciar de que número se trata:

- Escribimos dos cifras que se diferencien en más de 1:		6 8	(1
- Escribimos entre ellas una tercera cifra:		6 5 8	(2
- Invertimos el orden de las cifras:		8 5 6	(3
- Restamos el número menor del mayor:			
		8 5 6	
	-	6 5 8	(4
		-------	
		1 9 8	
- Ponemos las cifras del resto en orden inverso:		8 9 1	(5

- Sumamos este número al resto anterior:

$$\begin{array}{r} 198 \\ +\quad 891 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Si efectuamos estas mismas operaciones con cualesquiera tres cifras sorprendentemente obtendremos siempre el mismo resultado 1089; esto mismo lo demostraremos en general utilizando herramienta algebraica:

1) Escribimos dos dígitos separados: a c y $|a-c| > 1$

2) Escribimos un tercer dígito cualquiera entre ellos: a b c

3) Intercambiamos los dos primeros dígitos dados: c b a

4) Restamos el número menor del mayor:

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que abc > cba y tomemos en cuenta lo siguiente:

Al expresar los número en notación decimal tenemos que
$a\,b\,c = ax10^2 + bx10^1 + cx10^0$ y $c\,b\,a = cx10^2 + bx10 + ax10^0$

$$\begin{aligned} \text{si } abc > cba &\implies ax10^2 + bx10 + cx10^0 > cx10^2 + bx10 + ax10^0 \\ &\implies 100a + cx10^0 > 100c + ax10^0 \\ &\implies 100a - a > 100c - c \\ &\implies 99a > 99c \\ &\implies a > c \end{aligned}$$

Como a > c, al efectuar el algoritmo tradicional para la suma de un número con el inverso aditivo de otro tenemos que disminuir en 10 unidades al dígito inmediato a la izquierda esto es al que representa las decenas :

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \\ -\ c\,b\,a \\ \hline \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} a & (b-1) & (10+c) \\ c & b & a \\ \hline \end{array}$$

de la misma forma como $(b-1) < b$ tendremos que efectuar el mismo proceso, con la diferencia de que ahora se tratará de las centenas, en esta operación el resultado de las decenas será siempre 9 :

$$\begin{array}{rccc} & (a-1) & (10+b-1) & (10+c) \\ - & c & b & a \\ \hline & (a-1-c) & 9 & (10+c-a) \end{array}$$

Notemos que como $a > c$ y además $|\ a - c\ | > 1$ podemos obtener siempre el número correspondiente a las centenas como a-1-c. De esta manera tenemos el resultado de la resta conformado por los tres números.

Invirtiendo el orden de $(a-1-c)\ 9\ (10+c+a)$ tenemos:

$$(10+c-a)\quad 9\quad (a-1-c)$$

Sumemos este nuevo número con el obtenido en 1:

$$\begin{array}{rccc} & (a-1-c) & \cdot 9 & (10+c-a) \\ + & (10+c-a) & 9 & (a-1-c) \\ \hline \end{array}$$

$$[(a-1-c)+(10+c-a)]x10^2 + 18X10 + [(10+c-a)+(a-1-c)]$$

$$\begin{aligned} \text{por lo tanto:}\quad & [a-1-c+10+c-a]x10^2 + 180 + [10+c-a+a-1-c] && = \\ & [\ -1 +10\ ]x100 + 180 + [10-1] && = \\ & 900 + 180 + 9 && = 1089 \end{aligned}$$

como se puede comprobar, no importa que digitos se tomen inicialmente el resultado de las operaciones es independiente y es siempre 1089.

Por lo tanto al tener esta constante y sumarle cualquier número es realmente muy sencillo restar 1089 al número que se nos indique como suma para obtener el último sumando que debe corresponder en este caso a la edad del interlocutor.

OTRA FORMA DE ADIVINAR LA EDAD

Adivinar la edad de una persona es una tarea que podemos realizar por diferentes métodos, el que tratamos ahora es realmente muy sencillo, es suficiente que el entrevistado identifique y nos haga saber en cuales de las siete tarjetas que se le muestran se encuentra escrita su edad.

Las tarjetas son las siguientes:

2	38	74
3	39	75
6	42	78
7	43	79
10	46	82
11	47	83
14	50	86
15	51	87
18	54	90
19	55	91
22	58	94
23	59	95
26	62	98
27	63	99
30	66	102
31	67	103
34	70	106
35	71	107

1

1	37	73
3	39	75
5	41	77
7	43	79
9	45	81
11	47	83
13	49	85
15	51	87
17	53	89
19	55	91
21	57	93
23	59	95
25	61	97
27	63	99
29	65	101
31	67	103
33	69	105
35	71	107

2

64	82	100
65	83	101
66	84	102
67	85	103
68	86	104
69	87	105
70	88	106
71	89	107
72	90	
73	91	
74	92	
75	93	
76	94	
77	95	
78	96	
79	97	
80	98	
81	99	

3

4	38	76
5	39	77
6	44	78
7	45	79
12	46	84
13	47	85
14	52	86
15	53	87
20	54	92
21	55	93
22	60	94
23	61	95
28	62	100
29	63	101
30	68	102
31	69	103
36	70	
37	71	

4

8	42	76
9	43	77
10	44	78
11	45	79
12	46	88
13	47	89
14	56	90
15	57	91
24	58	92
25	59	93
26	60	94
27	61	95
28	62	104
29	63	105
30	72	106
31	73	107
40	74	
41	75	

5

32	49	98
33	50	99
34	51	100
35	52	101
36	53	102
37	54	103
38	55	104
39	56	105
40	57	106
41	58	107
42	59	
43	60	
44	61	
45	62	
46	63	
47	96	
48	97	

6

16	42	82
17	50	83
18	51	84
19	52	85
20	53	86
21	54	87
22	55	88
23	56	89
24	57	90
25	58	91
26	59	92
27	60	93
28	61	94
29	62	95
30	63	
31	80	
48	81	

7

Una vez identificadas las tarjetas que contienen la edad a adivinar lo único que debemos hacer es sumar los primeros números que aparecen en la esquina superior izquierda, de cada una de las tarjetas señaladas. El resultado de esta suma es la edad del entrevistado.

Este truco está basado en la llamada aritmética binaria, que no es otra cosa que representar cantidades en base 2 o bien representar cantidades utilizando solamente dos digitos: el "0" y el "1". Es decir que una misma cantidad puede tener diferentes representaciones en diferentes sistemas numéricos.

Fundamentación:

Las sucesiones de números que aparecen en cada una de las tarjetas no parecen tener ninguna relación, con excepción de la tarjeta número 2 que presenta la sucesión de naturales impares hasta 107, las demás tarjetas muestran sucesiones de números que son consecutivos pero que de pronto saltan a otro más distante para comenzar de nuevo una secuencia consecutiva. El mayor número que aparece es 107 sin que se tenga una razón importante para este hecho.

Sin embargo al practicar suficientes veces el truco, podemos darnos cuenta que los números que se suman para adivinar la edad, y que encabezan las tarjetas, son potencias de 2, además aparecen, aunque no en orden, todas las potencias de 2.

$2^0 = 1$	aparece encabezando la tarjeta	No. 2
$2^1 = 2$	aparece encabezando la tarjeta	No. 1
$2^2 = 4$	" " " "	No. 4
$2^3 = 8$	" " " "	No. 5
$2^4 = 16$	" " " "	No. 7
$2^5 = 32$	" " " "	No. 6
$2^6 = 64$	" " " "	No. 3

Esta observación nos conduce a pensar en la expansión de un número decimal como una serie de potencias de 2, es decir su traducción al sistema binario.

$$A = a_n x2^n + a_{n-1} x2^{n-1} + \cdots + a_1 x2^1 + a_0 x2^0$$

donde los coeficientes a_is son únicamente 0s ó 1s.

Recordemos el algoritmo que nos permite cambiar la expresión de un número A a su forma en base 2:

1) Dividir el último cociente entre 2, al inicio el número A es el que se divide, obtener un nuevo cociente y residuo.

2) Escribir el residuo a la izquierda de los residuos obtenidos en pasos anteriores.

3) Si el cociente es mayor que 1 volver al paso 1), si el cociente es igual a 1 anotar este cociente a la izquierda de la sucesión de residuos.

De esta forma obtenemos la expresión binaria de cualquier número decimal por ejemplo:

28 es un número decimal, lo llevaremos a su expresión binaria.

```
                                                         (último
                                                         cociente)
     14              7               3               1 ==╗
   ┌────          ┌────          ┌────           ┌────   ║
 2 │ 28         2 │ 14         2 │ 7           2 │ 3     ║
     0  <=========  0 <==========  1  <==========  1 <===╝
  (primer        (segundo       (tercer         (cuarto
  residuo)        residuo)      residuo)        residuo)
```

Por lo tanto la expresión binaria de $(28)_{10}$ es $(11100)_2$.

Es decir que cualquier decimal lo podemos expresar, de una única forma, como una suma de potencias de 2

$$(28)_{10} = 1X2^4 + 1X2^3 + 1X2^2 + 0X2^1 + 0X2^0$$

Observemos ahora el proceso inverso en que llevamos un número binario a su expresión decimal:

De acuerdo a la posición en que se encuentra cada uno de los dígitos estos van representando cantidades de la misma manera que sucede en las expresiones decimales, es decir que las unidades, las decenas, las centenas, etc... van representando las diferentes potencias de 10 siendo multiplicadas por los números que en dicho lugar aparecen.

En esta forma en el sistema binario hablamos de unidades binarias (0, 1) "decenas" binarias, etc... que van representando a las potencias de 2 de acuerdo a la posición que ocupan los dígitos que aparecen en el número, por ejemplo, hallaremos la representación decimal de $(11100)_2$

1 1 1 0 0

$$
\begin{aligned}
0 \times 2^0 &= 0 \quad + \\
0 \times 2^1 &= 0 \quad + \\
1 \times 2^2 &= 4 \quad + \\
1 \times 2^3 &= 8 \quad + \\
1 \times 2^4 &= 16 \\
\hline
&\ \ 28
\end{aligned}
$$

Por lo tanto : $(28)_{10} = (11100)_2$

En base a estas observaciones podemos interpretar la construcción de las tarjetas; observemos que el mayor de los números es 107, esto obedece a que es una edad difícil de alcanzar y no habrá muchas personas que puedan tener más de este número de años.

Para identificar cada tarjeta daremos un orden para la representación binaria de los números decimales:

......	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	8a. Posición	7a. Posición	6a. Posición	5a. Posición	4a. Posición	3a. Posición	2da. Posición	1a.Posición

Podemos asociar cada tarjeta a una de las potencias de 2, de esta forma la tarjeta 1 está formada por aquellos números decimales menores o iguales a 107 que poseen un 1 en la segunda posición de su representación binaria. La tarjeta 2 la forman aquellos números decimales menores o iguales a107 los cuales presentan un 1 en la primera posición de su representación binaria, es decir que finalizan en 1, por lo tanto fácilmente observamos que todos los impares se encuentran en esta situación. En la tarjeta 3 aparecen enlistados aquellos números decimales menores o iguales a 107 en los cuales aparece un 1 en la séptima posición de su representación binaria. La tarjeta 4 corresponde a aquellos números decimales menores o iguales a 107 que tienen un 1 en la tercera posición de su representación binaria. La tarjeta 5 corresponde a los números decimales menores o iguales a 107 que poseen un 1 en la cuarta posición de su representación binaria. La tarjeta 6 corresponde a aquellos números decimales menores o iguales a 107 que poseen un 1 en la sexta posición de su representación binaria. Y por último, la tarjeta 7 corresponde a aquellos números decimales menores o iguales a 107 que poseen un 1 en la quinta posición de su representación binaria.

Notemos que las tarjetas están numeradas en desorden para que no sea demasiado obvia la naturaleza de su construcción. Para esto, se fueron expresando los números en su representación binaria y clasificándolos en cada tarjeta de acuerdo a la ubicación de los 1s que aparecen en dicha representación.

De la misma forma se podrían construir tarjetas en sistemas de base 3 o más y podríamos adivinar no sólo la edad sino cualquier número que deseáramos dependiendo de que tantos números se pudieran contener en las tarjetas.

UNA TRISTE NOTICIA

Al morir el sultán dejó varias viudas. El acostumbraba decir que el número de esposas que tenía era perfecto ya que: (a) se podía leer de atrás hacia adelante como al contrario; (b) todos los días de la semana él podía separarlas en grupos del mismo número y cada día los grupos que se formaban tenían una cantidad distinta de mujeres, y además siempre sobraba una con la cual pasaba la noche; (c) sin embargo no era conveniente separarlas en grupos de 7 o sus múltiplos, pues en esos casos tendría que dormir solo. Para que usted no se pierda en un desierto de números, aclaramos que la población del sultanato es de cerca de medio millón de personas.

Analicemos las condiciones especificadas por el relato para empezar a buscar la solución:

La condición (a) indica que el número de viudas es uno de esos números denominados palindrómicos, los cuales pueden ser leídos tanto de derecha a izquierda (lo normal) como de izquierda a derecha, por ejemplo: 1357531 es un número palindrómico.

La condición (b) nos dice que al dividir el número entre siete números diferentes tendremos residuo 1 en cada división.

Al considerar la condición (c) nos damos cuenta de que estamos buscando un múltiplo de 7.

Y la información final limita al número buscado, éste no debe ser mayor que 500,000.

Solución:

Para resolver este problema podemos suponer que el sultán formaba los grupos de esposas de una manera natural es decir, separándolas cada día en grupos 2,3,4,5,6,8 y 9 esposas.

Con ayuda de una calculadora de bolsillo busquemos entre los múltiplos de 7 aquellos que sean palindrómicos y tomando en cuenta las consideraciones siguientes que ahorrarán tiempo en la búsqueda:

- Si el número de viudas es de un dígito, sólo el 7 es candidato pero vemos que no cumple con la condición b, puesto que su residuo no es 1 al dividirlo entre 4.

- Si el número de viudas es de dos dígitos sólo el 77 es palindrómico y múltiplo de 7, pero al dividirlo entre 3 el residuo es 2 por lo cual no es el número buscado.

- Las posibilidades crecen cuando consideramos múltiplos palindrómicos de siete con tres dígitos, los presentamos con sus observaciones en la tabla siguiente:

NÚMERO	DIVISOR	RESIDUO	SOLUCIÓN
161	2 3	1 2	NO
252	2	0	NO
343	2 3 4	1 1 3	NO
434	2	0	NO
525	2 3	1 0	NO
595	2 3 4	1 1 3	NO
616	2	0	NO
686	2	0	NO
707	2 3	1 2	NO
777	2 3	1 0	NO
868	2	0	NO
959	2 3	1 2	NO

Por lo tanto el número buscado no es de tres dígitos.

Analicemos ahora los números de cuatro dígitos:

NÚMERO	DIVISOR	RESIDUO	SOLUCIÓN
1001	2 3	1 2	NO
1771	2 3 4	1 1 3	NO
2002	2	0	NO
2772	2	0	NO
3003	2 3	1 0	NO
3773	2 3	1 2	NO
4004	2	0	NO
4774	2	0	NO
5005	5	0	NO
5775	5	0	NO
6006	2	0	NO
6776	2	0	NO
7007	2 3	1 3	NO
7777	2 3 4 5	1 1 1 2	NO
8008	2	0	NO
8778	2	0	NO
9009	2 3	1 0	NO
9779	2 3	1 2	NO

Por lo tanto el número de viudas tampoco es de cuatro dígitos.

Probemos ahora con los números de cinco digitos:

NÚMERO	DIVISOR	RESIDUO	SOLUCIÓN
10101	2 3	1 0	NO
10801	2 3 4 5 6 8 9	1 1 1 1 1 1 1	SI

Por lo tanto 10801 es el número de viudas que andamos buscando, es además menor de 500,000 como se requiere.

La solución se logra también, de una manera más corta, si se toma en cuenta la observación siguiente:

Sea X el número buscado, como se tiene residuo 1 para cada uno de los divisores podemos concluir que X-1 es divisible entre cada uno de dichos divisores:

(X-1)/2, (X-1)/3, (X-1)/4, (X-1)/5, (X-1)/6, (X-1)/8 y (X-1)/9 son todos enteros.

Expresemos todos los divisores como sus potencias de primos con el objeto de hallar su mínimo común múltiplo:

$2, 3, 2^2, 5, 2\ 3, 2^3, 3^2$ por lo tanto el m.c.m. es $2^3\ 3^2\ 5 = 360$

Busquemos ahora entre los múltiplos de 360 el número al cual si lo aumentamos en 1 resulta palindrómico y múltiplo de 7.

Con mucha facilidad llegamos a encontrar al 1440, que se vuelve palindrómico al sumarle 1, 1441, pero este no es múltiplo de 7, por lo cual queda descartado. El segundo número de este tipo es el 10,800, al cual si le sumamos 1 llegamos al 10801 que es palindrómico y múltiplo de 7 por lo cual es el número de viudas que dejó el sultán.

OCHO OCHOS

Este problema consiste en expresar el número 1,000 con ocho ochos:

$$8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8 = 1{,}000$$

Este problema puede ser atacado de diferentes formas debido a que la pregunta no especifica el tipo de relación que deben tener los ochos entre sí, pero esto hace más interesante la tarea aunque la solución tarde un poco más en ser descubierta. De cualquier forma el razonamiento que presentamos a continuación nos permite resolver el acertijo.

Al intentar resolver este problema lo primero que se nos ocurre es revisar las potencias de 8 puesto que son cantidades que pueden ser expresadas como el producto de varios ochos además pueden crecer acercándose al 1,000 que es lo que tenemos como meta.

$8^1 = 8$
$8^2 = 64$
$8^3 = 512$
$8^4 = 4096$

8^4 es el límite puesto que evidentemente el resultado obtenido se aleja mucho de 1,000.

Otro subconjunto que resulta importante en la búsqueda de la solución es el conjunto de los primeros 8 múltiplos de 8 ya que pueden ser expresados como sumas de ochos:

8	= 8
8+8	= 16
8+8+8	= 24
8+8+8+8	= 32
8+8+8+8+8	= 40
8+8+8+8+8+8	= 48
8+8+8+8+8+8+8	= 56

Podríamos también combinar sumas de potencias con la misma finalidad, pero para no ensayar una por una estas combinaciones lo más práctico será construir una tabla de los múltiplos de ocho que nos permita visualizar mejor las posibles formas de solución.

8	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**	**56**	**64**	72	80
88	96	104	112	120	**128**	136	144	152	160
168	176	184	**192**	200	208	216	224	232	240
248	**256**	264	272	280	288	296	304	312	**320**
328	336	344	352	360	368	376	**384**	392	400
408	416	424	432	440	**448**	456	464	472	480
488	496	504	**512**	520	528	536	544	552	560
568	**576**	584	592	600	608	616	624	632	**640**
648	656	664	672	680	688	696	**704**	712	720
728	736	744	752	760	**768**	776	784	792	800
808	816	824	**832**	840	848	856	864	872	880
888	**896**	904	912	920	928	936	944	952	**960**
968	976	984	992	1000	1008	1016	**1024**	1032	1040

Los números que aparecen resaltados son las combinaciones de 8^2 con otros múltiplos como ejemplo del tipo de combinaciones que pueden formarse para tratar de conseguir el 1,000.

Pero al construir la tabla de múltiplos nos damos cuenta de que no hemos considerado otra forma de interpretar la relación que podría existir entre los ochos, es decir que nos percatamos de que existen los números 88 y 888 que también son múltiplos de ocho y que además son los que generan la solución siguiente:

$$
\begin{array}{r}
888 \\
88 \\
+ \quad 8 \\
8 \\
8 \\
\hline
1{,}000
\end{array}
$$

Tomando en cuenta estas mismas consideraciones podemos fácilmente resolver otros problemas semejantes como los siguientes:

1) Expresar 1,000 con 16 cuatros.

2) Expresar 100 con 7 cuatros.

MULTIPLICACIONES EN CUADRADOS

Coloque los números del 1 al 9 en las casillas, de manera que al multiplicarlos entre sí tanto en la dirección horizontal como en la vertical, presenten los resultados que aparecen en la columna del lado derecho y en el último renglón:

			= 70
			= 48
			= 108
= 64	= 45	= 126	

En vez de empezar a ensayar números para encontrar la solución, pensamos que una forma más eficaz consistirá en expresar cada uno de los números 70, 48, 108, 64, 45 y 126 como el producto de sus factores primos y tratar de reconocer en tales productos los números del 1 al 9 que deban ser colocados en cada casilla. Es importante que notemos que cada número aparece en dos productos, lo cual servirá para encontrar la posición correcta de cada número.

El resultado de la descomposición en factores primos es la siguiente:

Horizontales:

$70 = 2 \times 5 \times 7$
$48 = 2^4 \times 3$
$108 = 2^2 \times 3^3$

Verticales:

$64 = 2^6$
$45 = 3^2 \times 5$
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

Después de observar cuidadosamente los productos expresados en esta forma podemos deducir que en el renglón correspondiente al 70 deben aparecer el 2, el 5 y el 7, el orden dependerá de los productos en las verticales, es decir que el 7 debe aparecer en la columna del 126, el 5 en la columna del 45 y por lo tanto el 2 corresponde a la columna del 64.

Si disminuimos los números que ya han sido acomodados en las casillas de los productos a los cuales pertenecen podremos más fácilmente ubicar los números faltantes.

Los números que aparecen en negritas son los que ya han sido colocados:

Horizontales:

$70 = \mathbf{2} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}$
$48 = 2^4 \times 3$
$108 = 2^2 \times 3^3$

Verticales:

$64 = \mathbf{2} \times 2^5$
$45 = 3^2 \times \mathbf{5}$
$126 = 2 \times 3^2 \times \mathbf{7}$

Sucesión: 1,**2**,3,4,**5**,6,**7**,8,9

Tratemos de ubicar al 9. En los horizontales debe necesariamente aparecer en el renglón del 108 que es la única opción posible, en los verticales el 9 o lo que es lo mismo 3^2 puede parecer en la columna del 45 o en la del 126, pero si lo ubicamos en ésta última tendríamos que el 2 también debería aparecer en la misma columna, de tal forma que esto no es posible puesto que el 2 ya ha sido asignado a la columna del 64. Por lo tanto el 9 debe pertenecer a la columna del 45.

Horizontales:

$70 = \mathbf{2} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}$
$48 = 2^4 \times 3$
$108 = 2^2 \times \mathbf{3^2} \times 3$

Verticales:

$64 = \mathbf{2} \times 2^5$
$45 = \mathbf{3^2} \times \mathbf{5}$
$126 = 2 \times 3^2 \times \mathbf{7}$

Sucesión: 1,**2**,3,4,**5**,6,**7**,8,**9**

En este momento nos damos cuenta que el 45 ha sido completado como producto con únicamente dos números, por lo cual deducimos que el 1 aparece en esa columna en el único lugar posible que es la casilla del centro.

Horizontales:

$70 = \mathbf{2} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}$
$48 = \mathbf{1} \times 2^4 \times 3$
$108 = 2^2 \times \mathbf{3^2} \times 3$

Verticales:

$$64 = \mathbf{2} \times 2^5$$
$$45 = \mathbf{1} \times \mathbf{3^2} \times \mathbf{5}$$
$$126 = 2 \times 3^2 \times \mathbf{7}$$

Sucesión: **1**,**2**,3,4,**5**,6,**7**,8,**9**

Al ocupar el 1 la casilla central vemos que el 48 debe ser expresado como un producto de dos números, ambos entre 1 y 9, por lo cual concluimos que debe tratarse del 6 y del 8; el 6 expresado en la forma 2 x 3 aparece en también en la columna del 126 de aquí que se asigne en la casilla correspondiente, y por lo tanto el 8 expresado en la forma 2^3 deberá ser colocado en la columna correspondiente al 64:

Horizontales:

$$70 = \mathbf{2} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}$$
$$48 = \mathbf{1} \times \mathbf{2^3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{3}$$
$$108 = 2^2 \times \mathbf{3^2} \times 3$$

Verticales:

$$64 = \mathbf{2} \times \mathbf{2^3} \times 2^2$$
$$45 = \mathbf{1} \times \mathbf{3^2} \times \mathbf{5}$$
$$126 = \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 3 \times \mathbf{7}$$

Sucesión: **1**,**2**,3,4,**5**,**6**,**7**,**8**,**9**

Únicamente nos falta colocar el 4 (2^2) y el 3 que están ya determinados para las últimas casillas desocupadas, por lo tanto el 4 quedará en el renglón asociado con el 108 y la columna del 64; el 3 quedará en el mismo renglón del 108 y en la columna del 126 quedando asignados ya todos los números del 1 al 9 como se pedía.

La solución construida se presenta a continuación:

2	5	7	= 70
8	1	6	= 48
4	9	3	= 108
= 64	= 45	= 126	

COSAS DE GRANJEROS

- Un granjero tenía su propia granja. Cuando un trabajador de la oficina del censo agropecuario le preguntó cuántas aves y cuántas bestias tenía, el respondió: "tengo 36 cabezas y 100 patas juntas", El empleado de la oficina del censo tuvo que calcular cuantas de cada una tenia el granjero. ¿ Cuántas aves y cuántas bestias tenia ?

La respuesta del granjero proporciona todos los elementos necesarios para calcular el número de aves y de bestias. Al decir que tenia 36 cabezas significa que en total son 36 animales sólo es necesario distribuir los 50 pares de patas para saber cuales corresponden a aves y cuales a bestias.

Para ayudarnos a encontrar la solución construiremos una tabla de la siguiente forma, supondremos que tenemos sólo bestias, es decir que las 100 patas son todas de bestia; considerando que cada bestias tiene exactamente 4 patas se tendrian entonces 25 bestias.

Si consideramos 24 bestias tendríamos que aumentar en 2 el número de aves y por lo tanto se tendrian 26 cabezas, etc...

No. Cabezas	No Bestias	No. Aves	No. Patas
25	25	0	100
26	24	2	96 + 4 = 100
27	23	4	92 + 8 = 100
28	22	6	88 + 12 = 100
29	21	8	84 + 16 = 100
30	20	10	80 + 20 = 100
31	19	12	76 + 24 = 100
32	18	14	72 + 28 = 100
33	17	16	68 + 32 = 100
34	16	18	64 + 36 = 100
35	15	20	60 + 40 = 100
36	14	22	56 + 44 = 100

La tabla nos muestra que si se tienen 36 cabezas debe necesariamente de tratarse de 14 bestias y 22 aves, ya que de esta forma se tienen las 100 patas cosideradas.

Podemos obtener la misma solución si utilizamos un poco de algebra,
sean x = número de aves
y = número de bestias

Como ya sabemos que se trata de 36 animales en total estamos en posibilidad de expresar este hecho con la siguiente ecuación:

$$x + y = 36 \qquad (1$$

Sabemos que se cuentan en total 100 patas y que cada ave tiene sólo dos patas y que cada bestia posee 4 patas, por lo tanto

$$2x + 4y = 100 \qquad (2$$

despejando x en (1 obtenemos

$$x = 36 - y \qquad (3$$

sustituyendo (3 en (2

$$2(36\text{-}y) + 4y = 100 \qquad (4$$

simplificando la expresión

$$72-2y+4y = 100$$
$$72+2y = 100$$
$$2y = 28$$
$$y = 14$$

sustituyendo el valor de y en (3 tenemos que $x = 36 - 14 = 22$

por lo tanto verificamos que efectivamente se trata de 22 aves y 14 bestias.

- Dos granjeros estaban llevando sus ovejas al mercado y uno de ellos dijo: "Dame una de tus ovejas y tendré tantas como tú tengas". El otro respondió: "Si, pero si tú me das una de las tuyas yo tendré dos veces el número de las que tú tengas".

¿ Cuántas ovejas tenía cada uno al principio ?

Sea X el número de ovejas que tenia el primero de los granjeros.
Sea Y el número de ovejas que tenia el segundo de los granjeros.

Por lo tanto podemos expresar la situación por medio de dos ecuaciones:

La primera ecuación depende del comentario hecho por el primero de los granjeros:

$$a)\quad X + 1 = Y - 1$$

La segunda ecuación depende de la respuesta dada por el segundo granjero:

$$b)\quad Y + 1 = 2(X - 1)$$

por lo tanto resolviendo el sistema tenemos:

de a) sabemos que $Y = X + 2$

sustituyendo en b): $X + 2 + 1 = 2(X - 1)$

simplificando: $X + 3 = 2X - 2$

por lo tanto $X = 5$.

y $Y = 5 + 2 = 7$

$X = 5$
$Y = 7$ es la solución buscada.

COSAS DEL CENSO

Un amigo mío que trabajó como recolector de datos para un censo me dijo que quedó agotado por el trabajo, pues había entrevistado a más de 100 personas.

- Sí, fueron más de 100 pero menos de 1,000. Lo más increíble es que el número exacto que entrevisté es igual a la suma de los cubos de siete números naturales. Y como si fuera poco, si sumamos 1 a ese número, el resultado será la suma de los cubos de sólo seis números naturales.

Finalmente, ¿ A cuántas personas entrevistó mi amigo ?

En busca de la solución:

Consideremos a X como el número de entrevistados por mi amigo.

La condición del problema nos indica que:

$$X = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 + g^3$$

donde a, b, c, d, e, f y g son números enteros entre 0 y 9 ya que $10^3 = 1000$ marca el límite indicado por el problema para el número de entrevistados.

Además, $X + 1 = h^3 + i^3 + j^3 + k^3 + l^3 + m^3$

debido a que el número de entrevistados más uno debe ser la suma de seis cubos.

El problema es encontrar entonces el valor de X que depende directamente de los valores de a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l y m.

Para encontrar la solución observemos en la tabla siguiente como se comportan los cubos de los números enteros de 0 a 9:

n	n^3
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729

Podemos ensayar diferentes combinaciones formando subconjuntos de 7 y de 6 cubos y efectuar sus sumas, pero basta hacer una pequeña observación en la tabla. Como la diferencia entre X y X + 1 es precisamente 1 y como necesitamos sumas de 6 y 7 cubos tratemos de encontrar una pareja de cubos cuya suma sea otro de los cubos menos uno.

Con esta estrategia de búsqueda localizamos rápidamente los números
$216 + 512 = 728$ por lo tanto $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$

Como X no puede ser mayor que 1,000 tenemos que:

$X = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 8^3 =$

$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 512 = 953$

$X + 1 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 9^3 =$

$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 729 = 954$

Por lo tanto mi amigo entrevistó a 953 personas exactamente.

CUENTAS MÁGICAS

La aritmética nos sorprende una vez más con el truco que ahora presentamos:

1) Escriba un número cualquiera de tres dígitos.
2) Escríbalo de nuevo junto al anterior para formar un número de seis dígitos.
3) Divídase este número de seis dígitos entre 7.
4) Divídase el resultado de la división anterior entre 11.
5) Divídase nuevamente el resultado anterior entre 13.
6) Mágicamente hemos llegado al número de tres dígitos que se pidió al inicio y además no tenemos residuo en ninguna de las divisiones realizadas.

Ejemplo:
1) Escribimos el número 473.
2) Completamos a seis dígitos: 473473
3) Dividimos 473473 / 7 = 67639 y no hay residuo.
4) Dividimos 67639 / 11 = 6149 y no hay residuo.
5) Dividimos 6149/ 13 = 473 y no hay residuo.

Justificación del truco:

1) Tomamos un número, **abc**, de tres dígitos.
2) Completamos a seis dígitos, **abcabc**.
3) Para justificar los pasos 3, 4 y 5 observemos en conjunto la operación realizada:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{abcabc}{7}}{11}}{13}$$

Para resolver esta operación utilizaremos la propiedad de las fracciones conocida como "la ley del Sandwich" que enuncia lo siguiente:

sean a,b,c,d cualesquiera números reales, tenemos que:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{axd}{bxc}$$

Aplicando "la ley del sandwich" con respecto al 11, tenemos la siguiente fracción:

$$\frac{\frac{abcabc}{7}}{\frac{11}{1}}=\frac{abcabcx1}{7x11}$$

aplicándola ahora con respecto al 13 tendremos:

$$\frac{\frac{abcabc}{7x11}}{\frac{13}{1}}=\frac{abcabcx1}{7x11x13}$$

por lo tanto en resultado final será:

$$\frac{abcabc}{1001}$$

Para comprobar la divisibilidad descompongamos el número abcabc como la suma de potencias de 10:

$$abcabc=ax10^5+bx10^4+cx10^3+ax10^2+bx10+c=$$

factorizando la expresión anterior de acuerdo a los coeficientes obtenemos:

$$abcabc = ax10^2(10^3+1) + bx10(10^3+1) + c(10^3+1)$$

a partir de esta expresión podemos observar que el 1001 aparece en cada término, por lo cual la suma es divisible entre 1001.

Al efectuar las divisiones indicadas en el proceso realmente estamos dividiendo entre 1001 ya que 7 X 11 X 13 = 1001.

El resultado de las divisiones es por lo tanto $ax10^2 + bx10 + c$, es decir **abc** como esperábamos.

DOS NÚMEROS

Se pide que alguien piense dos números positivos (pueden ser iguales y no necesariamente enteros) y que realice las operaciones que a continuación se describen:

i) Formar un tercer número aumentando en 1 el segundo número pensado y dividiendo por el primero.

ii) Formar un cuarto número sumando 1 al tercero y dividiendo entre el segundo.

..... continuar de esta forma hasta llegar al paso siguiente .....

v) Formar un séptimo número sumando 1 al sexto y dividiendo entre el quinto.

Entonces nos daremos cuenta que el sexto y el séptimo número son nuevamente el primero y el segundo. Es decir que la sucesión formada de esta manera es periódica con 5 términos en el periodo.

Comprobación:

Sean a y b los dos números pensados.

Paso i) $\dfrac{b+1}{a}$ es el tercer número.

Paso ii)

$$\frac{\frac{b+1}{a}+1}{b}=\frac{\frac{b+1+a}{a}}{\frac{b}{1}}=\frac{a+b+1}{ab}$$

por lo tanto $\dfrac{a+b+1}{ab}$ es el cuarto número.

Paso iii)

Calculando el quinto número:

$$\frac{\frac{a+b+1}{ab}+1}{\frac{b+1}{a}}=\frac{\frac{a+b+ab+1}{ab}}{\frac{b+1}{a}}=\frac{a(b+1)+(b+1)}{b(b+1)}=\frac{a+1}{b}$$

de aquí tenemos que $\frac{a+1}{b}$ es el quinto número.

Paso iv)

Obtengamos en igual forma el sexto número:

$$\frac{\frac{a+1}{b}+1}{\frac{a+b+1}{ab}}=\frac{\frac{a+b+1}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}}=\frac{ab(a+b+1)}{b(a+b+1)}=a$$

Podemos observar que efectivamente "a" es el sexto número.

Paso v)

Busquemos ahora el séptimo número:

$$\frac{a+1}{\frac{a+1}{b}}=\frac{\frac{a+1}{1}}{\frac{a+1}{b}}=\frac{b(a+1)}{1(a+1)}=b$$

Como se tenía que probar "b" es efectivamente el séptimo número.

SEND MORE MONEY

Uno de los acertijos más populares es el siguiente:

Dada la operación

$$\begin{array}{r} SEND \\ +\underline{\ MORE} \\ MONEY \end{array}$$

se debe encontrar el valor de cada una de las letras observando las reglas descritas a continuación:

a) El valor de cada una de las literales debe ser un número entre 0 y 9.
b) Letras diferentes deben tener valores diferentes.
c) Letras iguales deben poseer el mismo valor.
d) La operación debe ser aritméticamente correcta.

Observemos que la principal dificultad que presenta este problema es que no sabemos si al empezar a sumar por el método que aprendimos en la escuela primaria, la suma de los dígitos que corresponden a las unidades, en este caso el valor $D+E$, sobrepasa a 9 y por lo tanto tendremos que incrementar en uno la suma de las decenas, y así sucesivamente con cada pareja de dígitos que se deben sumar para completar la suma final[1].

Podemos darnos cuenta fácilmente que la suma $S + M$ debe ser un valor entre 10 y 19 inclusive. Debe ser mayor que 10 debido a que fue necesario agregar un dígito más a la izquierda, y debe ser menor que 19 ya que ninguna suma de dos dígitos diferentes puede llegar a 20. Por esta razón concluimos que M debe tener el valor 1.

Tenemos la operación siguiente:

$$\begin{array}{r} SEND \\ +\underline{\ 1ORE} \\ 1ONEY \end{array}$$

Para hallar los valores de las letras restantes representaremos la situación por medio de un sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
D + E &= Y + 10x \\
N + R + x &= E + 10y \\
E + O + y &= N + 10z \\
S + 1 + z &= O + 10
\end{aligned}
$$

en donde las literales x,y,z sólo pueden tomar valores 0 ó 1 dependiendo si la suma de cada pareja de dígitos excede el valor de 9 ó no respectivamente.

Podríamos analizar todas las posibilidades para los valores de x,y,z, pero esto resultaría demasiado largo puesto que tendríamos que considerar los ocho casos que se muestran a continuación:

x	y	z	CASO
0	0	0	I
0	0	1	II
0	1	0	III
1	0	0	IV
1	1	0	V
1	0	1	VI
0	1	1	VII
1	1	1	VIII

Proponemos entonces, para resolver el problema, una forma más ágil como la siguiente:

Ya hemos visto que M debe ser igual a 1. M = 1.

Tomado la última ecuación del sistema propuesto vemos que:

$S + 1 + z = O + 10$ por lo tanto

$O + 10 = S + 1 + z \leq 9 + 1 + 1 \leq 11$ puesto que el valor más grande para S es 9 y para z es 1.

Considerando los extremos de esta última expresión tenemos que,

$O + 10 \leq 11$ por lo tanto $O \leq 11 - 10 = 1$ por lo tanto $O \leq 1$

los únicos valores posibles para O son entonces 0 y 1 pero como ya sabemos que M es igual a 1 por lo tanto el único valor restante para O es 0.

Sustituyendo el valor hallado para O en la ecuación $E + O + y = N + 10z$ tenemos que

$$E + y = N + 10z$$

como ya se sabe que $O = 0$ y $M = 1$ entonces el valor más pequeño que pueden tener alguna de las letras faltantes debe ser 2, por lo tanto

$$10z + 2 \leq N + 10z = E + y \leq 9 + 1 = 10$$

la segunda desigualdad se debe a que 9 es el mayor de los valores para cualquiera de las letras E,N,D,R y 1 para y.

De la expresión anterior concluimos que si $10z + 2 \leq 8$ entonces $z = 0$, por lo tanto

$$E + y = N$$

y como $E \neq N$ entonces $y \neq 0$ por lo tanto $y = 1$ y entonces $N = E + 1$.

Podemos sustituir los valores encontrados para z y para O en la ecuación $S + 1 + z = O + 10$ y tenemos

$$S + 1 = 10$$

por lo cual $S = 9$.

Sustituyendo ahora en la ecuación $N + R + x = E + 10y$ los valores de N y de y tenemos

$$E + 1 + R + x = E + 10$$

por lo cual $R + x = 9$ y como se tiene que $S = 9$ entonces x no puede ser 0 sino que debe ser 1, por lo tanto si $x = 1$ entonces $R = 8$.

Las letras que aún quedan sin identificar son E, D, Y y N, las cuales no pueden tomar los valores de 0, 1, 8 ó 9, por lo que sabemos que

$$E + 1 = N \leq 7$$

y de aquí que $E \leq 6$.

En la ecuación $Y + 10x = D + E$ sustituimos el valor de x y aplicamos la última desigualdad:

$$Y + 10 = D + E \leq D + 6.$$

Considerando que $6 = 2 + 4 \leq Y + 4 = D \leq 7$ existen dos posibles valores para D que son 6 y 7.

si $D = 6$ entonces $Y + 10 = 6 + E$ y además $E = Y + 4 \geq 2 + 4 = 6$ pero esto no es posible ya que $D = 6$. por lo cual $D = 7$ y $N = 6$.
Como $E + 1 = N$ por lo tanto $E = 5$, además como

$$Y + 10 = D + E = 7 + 5 = 12$$

entonces $Y = 2$.

Hemos encontrado ya todos los valores necesarios para obtener la solución, por lo que los enlistaremos y verificaremos que cumplan con la operación aritmética propuesta.

$O = 0$
$M = 1$
$Y = 2$
$E = 5$
$N = 6$
$D = 7$
$R = 8$
$S = 9$

$$\begin{array}{r} SEND \\ +\underline{MORE} \\ MONEY \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9567 \\ +\underline{1085} \\ 10652 \end{array}$$

ésta es la solución buscada.

LA RESTA DE HARPAGON

Teniendo en cuenta la operación siguiente:

$$\begin{array}{r} AABB \\ -\ \underline{BBAA} \\ CDDC \end{array}$$

hallar el valor de C D D C.

Con base en el algoritmo utilizado en las escuelas primarias para enseñar las restas, representaremos la operación a través de diferentes ecuaciones, las cuales nos permitirán llegar a la solución buscada.

Considerando que el valor de A pudiera ser mayor que B tenemos la siguiente ecuación para las unidades:

$10x + B - A = C$ en donde x puede tomar valores 0 ó 1.

La diferencia en la columna de las decenas se representa en la forma siguiente:

$10y + B - (A + x) = D$ en donde x toma el mismo valor que tuvo la ecuación anterior. y puede ser 0 ó 1.

Para las centenas tenemos:

$10z + A - (B + y) = D$ en la cual y toma el valor anterior y z puede ser 0 ó 1.

Y por último:

$A - (B + z) = C$ donde z toma el mismo valor anterior.

Una vez representada la operación a través de ecuaciones estamos en posibilidad de analizar los casos que se presenten para los diferentes valores que pueden tomar x,y y z. Todos estos casos están enlistados en la tabla a continuación:

x	y	z	CASO
0	0	0	1
1	0	0	2
0	1	0	3
0	0	1	4
1	1	0	5
1	0	1	6
0	1	1	7
1	1	1	8

Revisaremos caso por caso hasta hallar una solución:

Para el Caso 1 tenemos que x,y, y z tienen todas el valor 0, por lo tanto tenemos el siguiente sistema:

1) B - A = C
2) B - A = D
3) A - B = D
4) B - A = C

de 1) y 2) tenemos que C = D,

además de 2) y 3) podemos deducir que B - A = A - B por lo tanto

A = B

sustituyendo A en 1) tenemos B - B = C por lo tanto C = 0 como
C = D entonces también D = 0.

En este caso como A = B tenemos que A A B B = B B A A por lo tanto es lógico pensar que C D D C sea 0 0 0 0. Caso que resulta poco interesante aunque posible.

Caso 2. Para $x = 1$, $y = 0$ y $z = 0$. El sistema a considerar es:

$$\begin{aligned} &1)\ 10 + B - A = C \\ &2)\ B - A - 1 = D \\ &3)\ A - B = D \\ &4)\ A - B = C \end{aligned}$$

a partir de 1) obtenemos que	$B - A = C - 10$
de 2) obtenemos que	$B - A = D + 1$
igualando ambas	$C - 10 = D + 1$
por lo tanto	$C = D + 11$

Este resultado nos permite deducir que para este caso no existe ninguna solución posible ya que C al igual que los otros valores buscados debe corresponder a un número de un sólo dígito.

Caso 3. Consideramos los valores siguientes: $x = 0$, $y = 1$, y $z = 0$.

El sistema a revisar es el siguiente:

$$\begin{aligned} &1)\ B - A = C \\ &2)\ 10 + B - A = D \\ &3)\ A - B - 1 = D \\ &4)\ A - B = C \end{aligned}$$

de 1) y 2) tenemos que $B - A = C$ y $B - A = D - 10$ por lo tanto $C = D - 10$

de 3) y 4) concluimos que $A - B = D + 1$ y $A - B = C$ por lo tanto $C = D + 1$

pero C no puede tomar los valores $D - 10$ y $D + 1$ al mismo tiempo por lo que concluimos que este caso tampoco conduce a la solución.

Caso 4. Para los valores de $x = 0$, $y = 0$ y $z = 1$.

Por lo cual el sistema correspondiente es:

$$\begin{aligned} &1)\ B - A = C \\ &2)\ B - A = D \\ &3)\ 10 + A - B = D \end{aligned}$$

$$4)\ A - B - 1 = C$$

de 1) Y 4) concluimos que $B - A = A - B - 1$

de 2) y 3) tenemos que $B - A = 10 + A - B$

de estas dos ecuaciones tenemos $A - B - 1 = 10 + A - B$
por lo tanto llegamos a una contradicción.

Caso 5. Los valores de x, y y z son 1, 1, y 0 respectivamente.

El sistema para este caso es:

$$\begin{array}{ll} 1) & 10 + B - A = C \\ 2) & 10 + B - A - 1 = D \\ 3) & A - B - 1 = D \\ 4) & A - B = C \end{array}$$

Igualando 1) con 4) tenemos:

$$\begin{array}{cl} 10 + B - A = A - B & \text{por lo tanto} \\ 10 + 2B = 2A & \text{simplificando} \\ 5 + B = A & \end{array}$$

Sustituyendo este último valor de A en 1):

$10 + B - 5 - B = C$ de donde obtenemos $C = 5$

Sabemos por 4) que $C = A - B$ y que $C = 5$ por lo cual al sustituir en 3 tenemos que $5 - 1 = D$ por lo que $D = 4$

tenemos resuelto el problema puesto que el objetivo es hallar el valor de C D D C que es 5 4 4 5.

La solución es:

$$\begin{array}{r} A\,A\,B\,B \\ -\ \underline{B\,B\,A\,A} \\ 5\,4\,4\,5 \end{array}$$

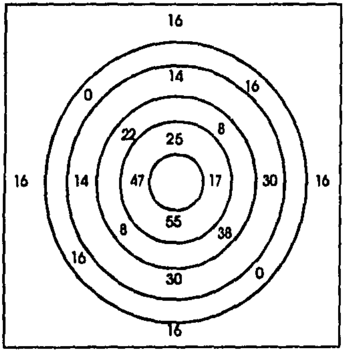
Una observación interesante para este problema es que los valores de A y B pueden variar si se cuida de cumplir con la lógica de la operación. Por ejemplo A puede tomar valores de 5 a 9 y la operación es aritméticamente correcta. Si deseamos que A tome el valor de 7 tendremos que B deberá ser 2.

Se puede demostrar por procedimientos análogos a los anteriores que para los casos 6, 7 y 8 que no se han analizado no existen otras soluciones por lo cual sólo se tienen las soluciones correspondientes a los casos 1 y 5.

LA OBSERVACIÓN DEL PROFESOR DUCCI

En la década de los 30s se atribuyó la siguiente observación al profesor italiano E. Ducci:

Ponemos cualesquiera cuatro enteros no negativos alrededor de un círculo, por ejemplo 25, 17, 55 y 47, como se muestra en la figura, y colocamos en un círculo más grande cuatro números enteros que se obtienen restando el menor del mayor de las parejas de números que son adyacentes. Después de haber efectuado este procedimiento un número finito de veces se llega a un ciclo con sus cuatro números iguales, por ejemplo:



Para cuatro enteros no negativos g,h,k,l que son colocados en un ciclo; los valores absolutos de las cuatro diferencias estarán también colocadas en forma cíclica para formar un nuevo ciclo de cuatro números, cada uno de estos ciclos está formado por el valor absoluto de las diferencias de los miembros adyacentes del ciclo anterior. Después de un número finito de pasos llegamos a un ciclo que está formado por cuatro enteros iguales.

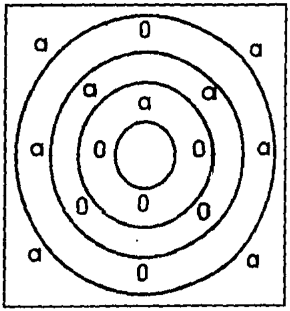
Prueba: Si nuestro cuarteto inicial consta de cuatro números enteros iguales no tenemos nada que probar. Si existen al menos dos números distintos, mostraremos que el entero más grande debe disminuir en cuatro o menos pasos.

Por ejemplo, si el número más grande en algún punto es 30, entonces no debe ser mayor de 29 después de cuatro pasos, no mayor de 28 después de otros cuatro pasos, etc.; entonces en a lo más 120 pasos este número, que era el mayor, debe llegar a cero.

Pero si el número mayor es 0, los otros tres números deben haber llegado ya a cero, y antes de que esto pueda suceder los cuatro números del ciclo previo deben haber sido todos iguales. Por lo tanto lo que debemos demostrar es que el número mayor decrece en cuatro o menos pasos.

Claramente el número mayor será inmediatamente disminuido si ninguno de los cuatro números es cero. Sin embargo, si en alguno de los pasos un cero está presente podría suceder que el número mayor escapara sin ser disminuido al siguiente ciclo. Probaremos entonces que los ceros son solamente un fenómeno temporal; un cuarteto con uno, dos o tres ceros llegará a estar libre de ceros en al menos tres pasos.

i) Tres ceros. La figura a continuación demuestra por sí misma lo deseado. Todos los ceros han desaparecido en tres pasos.



ii) Dos ceros. Sean a y b dos números con valor diferente de cero.

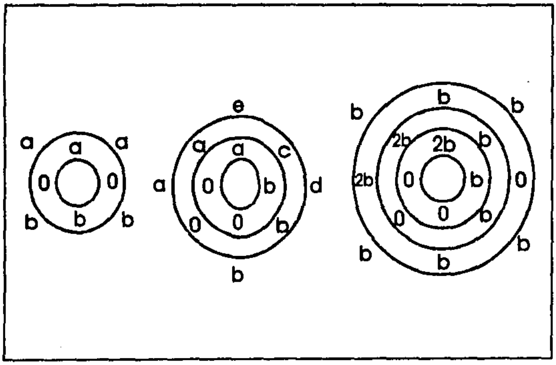
a) Si los dos ceros están en posiciones opuestas alrededor del círculo, como se muestra en la figura a), ambos habrán desaparecido en el siguiente paso.

b) Si los dos ceros están en posiciones contiguas en el círculo, como se muestra en la figura b), consideremos los dos pasos siguientes, aquellos cuyos cuartetos son presentados como (0,a,c,b), (a,e,d,b). Consideremos dos casos $c = 0$, $c \neq 0$.

b_1) $c = 0$ ocurre cuando los valores iniciales a y b son iguales, este caso corresponde al segundo ciclo de la figura anterior en donde podemos observar que los ceros desaparecieron después de dos pasos.

b_2) $c \neq 0$ ocurre si $a \neq b$. Este caso se divide en dos subcasos, $d = 0$ y $d \neq 0$, lo cual ocurre cuando $b = c$ y cuando $b \neq c$ respectivamente.

En el primer subcaso, $c = |a-b| = b$, y las únicas soluciones de esta ecuación son $a = 0$ y $a = 2b$. Como a no es cero, quiere decir que en realidad comenzamos con el cuarteto formado por (2b,b,0,0). La figura siguiente muestra que todos los ceros desaparecen en tres pasos:

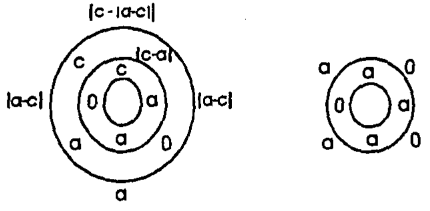


En el caso $d \neq 0$, tenemos que considerar e. Pero el papel que desempeña e es muy similar al que desempeñó d, es decir si $e = 0$,

$a = c = |a-b|$, de tal forma que $b = 2a$, el cuarteto original fue $(a,2a,0,0)$ y todos los ceros desaparecen como ya vimos en tres pasos.

iii) Un cero. Si los otros tres números son diferentes, el cero desaparece inmediatamente después de un paso. Lo mismo es cierto si los valores diferentes de cero están diametralmente opuestos en el círculo y además son iguales entre sí pero diferentes del tercer número.

Si dos números adyacentes son iguales pero diferentes del tercero, es decir $a = b$ y $a \neq c$, entonces vemos que no queda ningún cero después de dos pasos debido a que $|\, c - |\, a - c \,|\, | \neq 0$ como se puede apreciar en la figura siguiente, por lo tanto $a \neq 2c$.



(a) (b)

Si $a = 2c$ entonces el último ciclo en la figura anterior se reduce a $0,c,2c,c$ lo cual produce los números c,c,c,c en el siguiente paso.

Si $a = b = c$, no aparece ningún cero después de tres pasos, ver la figura anterior y el segundo ciclo en la primero figura de esta prueba.

Con estas observaciones hemos terminado de probar lo que se pretendía.

EL NÚMERO 6174

Dado el número 6174, cambiemos el orden de sus dígitos de tal forma que obtengamos el número más grande posible, esto es poner sus dígitos en orden decreciente. Si también arreglamos el orden de sus dígitos de tal forma que obtengamos el número más pequeño posible y al mayor restamos el menor obtenemos lo siguiente:

$$7641 - 1467 = 6174$$

el número 6174 con el que iniciamos aparece nuevamente.

Apliquemos estas operaciones a cualquier otro número de cuatro dígitos y observemos que sucede:

- Sea 3668 el número a considerar,

- obteniendo el número mayor con estos dígitos, 8663

- obteniendo el número más pequeño posible, 3668

- Efectuando la diferencia, 8663 - 3668 = 4995,

no parece haber sucedido nada extraordinario pero efectuemos estas operaciones nuevamente con la diferencia calculada 4995,

*) 9954 - 4599 = 5355, efectuemos una vez más el mismo proceso.

*) 5553 - 3555 = 1998, una vez más

*) 9981 - 1899 = 8082, de nuevo

*) 8820 - 0288 = 8532, una última vez,

*) 8532 - 2358 = 6174, esta vez obtuvimos un número que ya nos es familiar.

Lo curioso resulta ser que no importa que número de cuatro dígitos consideremos, que no tenga sus cuatro dígitos todos iguales por supuesto, este proceso, repetido a lo más siete veces, nos devuelve siempre el número 6174.

Prueba:

Sea M un número de cuatro dígitos los cuales no son todos iguales. Formamos los números M_1 y M_2 ordenando los dígitos de manera decreciente y creciente respectivamente, y efectuamos la diferencia $D_1 = M_1 - M_2$.

Con este método estamos asignado a cada posible número M con cuatro dígitos un número de cuatro dígitos D_1, con la posibilidad de considerar al cero como dígito a la izquierda de los dígitos significativos.

Esta forma de asignar al número M un nuevo número D_1 lo podemos expresar como la transformación

$$T: X \to D$$

donde X = {x/x es un número natural de cuatro dígitos}
y D es el subconjunto de los números obtenidos mediante las operaciones descritas en el párrafo anterior.

Es decir que si $M \in X$ y $D_1 \in D$ entonces:

$$T(M) = D_1$$

Lo que debemos probar es que en a lo más siete aplicaciones de esta transformación se produce el número 6174. es decir,

$T(M) = D_1$, $T^2(M) = D_2$, ..., $T^k(M) = D_k = 6174$ para $k = 7$.

Podemos fácilmente calcular que existen $10^4 = 10{,}000$ números naturales de cuatro dígitos, si descontamos aquellos que bajo la transformación T producen el 0000, es decir aquellos cuyos cuatro dígitos son el mismo número (3333, por ejemplo) tenemos $10^4 - 10 = 9{,}990$ números de cuatro dígitos con no todos sus dígitos iguales.

Mostraremos primero que la transformación T lleva a estos 9,990 números a sólo 54 números de cuatro dígitos. Sean a,b,c,d los dígitos de M de tal forma que

$$a \geq b \geq c \geq d$$

Notemos que no todas la igualdades pueden cumplirse al mismo tiempo.

Calculemos T(M) :

$M_1 = 1000a + 100b + 10c + d,$
$M_2 = 1000d + 100c + 10b + a,$

$D_1 = M_1 - M_2 = 1000(a-d) + 100(b-c) + 10(c-b) + (d-a) =$
$T(M) = 999(a-d) + 90(b-c)$

Observamos que T(M) depende de las diferencias (a-d) y (b-c). Como no todos los dígitos son iguales sabemos que $a - d > 0$,

y que $b - c > 0$. Y más aún, que b y c se encuentran entre a y d, de tal forma que

$$a-d \geq b-c$$

De las últimas dos desigualdades concluimos que a - d puede tomar valores entre 1, 2, 3, ..., 9 y que si toma un valor n de entre éstos entonces b - c puede tomar a lo más valores entre 0, 1, 2, ..., n. Por ejemplo, si $a - d = 1$, las únicas posibilidades para b - c son 0 y 1, como consecuencia T(M) tomaría valores

$$999(1) + 90(0) = 0999,$$
$$999(1) + 90(1) = 1089$$

en este caso.

De la misma forma si $a - d = 2$, T(M) tendría para b - c los valores 0, 1, 2. Sumando el número posible de valores para b - c en todos los casos:

para	a - d = 1	tenemos	2 valores para	b - c
	a - d = 2	tenemos	3 valores para	b - c
	a - d = 3		4	b - c
	⋮		⋮	⋮
	a - d = 9		10	b - c

por lo tanto tendremos $2 + 3 + 4 + ... + 10 = 54$ posibles valores para T(M).

por lo tanto tendremos 2 + 3 + 4 + ... + 10 = 54 posibles valores para T(M).

Lo siguiente que observaremos es que a dos números M y N que tienen los mismos dígitos, aunque en diferente orden, les corresponde el mismo resultado bajo la transformación T, es decir T(M) = T(N).

Digamos que dos números son equivalentes si contienen los mismos cuatro dígitos. Entre los 54 posibles valores que puede tomar T(M), solamente 30 no son equivalentes y son los que se presentan a continuación:

9990	9981	9972	9963	9954	9810
9711	9621	9531	9441	8820	8730
8721	8640	8622	8550	8532	8442
7731	7641	7632	7551	7533	7443
6642	6552	6543	6444	5553	5544

Si efectuamos el procedimiento descrito al inicio con cada uno de estos números veremos que a lo más en seis veces obtendremos el número 6174.

MUY BUENAS NOCHES

La historia que presentamos a continuación termina planteándonos un acertijo del cual deberemos encontrar la solución, si es que ésta existe:

"Una noche mi mujer y yo fuimos a una de esas fiestas jartas, llenas de ceremonias. Era el cumpleaños de la mujer del jefe, ustedes ya comprenderán. Eramos cuatro parejas. Cuando nos encontramos nos dimos un apretón de manos, cumpliendo con el saludo de *buenas noches*. Quedándome yo fuera de la cuenta, cada uno de los otros apretó un número diferente de manos. Y si se tiene en cuenta que cada uno no apretó su propia mano ni la de su mujer, le pregunto: ¿Cuántas manos apretó mi mujer? Para evitar confusiones debo aclarar que nadie apretó la misma mano más de una vez".

La forma de buscar la solución a este acertijo será muy sencilla si consideramos los elementos que en él intervienen:

- Un conjunto de 8 personas (los asistentes a la reunión).
- Una relación entre ellos (los saludos).

Tomando en cuenta estos elementos estamos en posibilidad de utilizar una poderosa herramienta matemática que es la Teoría de Gráficas, a través de la cual modelaremos las condiciones del problema para tratar de encontrar su solución.

Cada uno de los asistentes a la reunión será representado por un vértice, es decir que estamos considerando una gráfica con ocho vértices.

La relación de adyacencia entre vértices estará definida por los saludos, es decir que dos vértices serán adyacentes si las personas representadas por dichos vértices se saludaron, por lo tanto existirá una arista que une a dichos vértices.

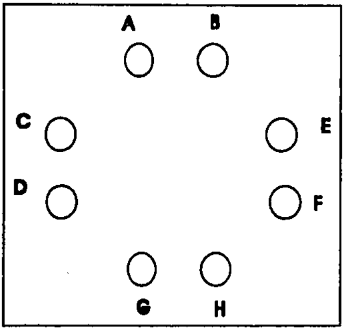
Comencemos, pues, a construir el modelo gráfico de la situación:

Asistieron ocho personas, en cuatro parejas:

A y B, C y D,

E y F, G y H representan a las parejas respectivamente.

Supongamos que H es la persona que narra la historia y que se queda fuera de la cuenta al decir que todos los demás apretaron un número diferente de manos. Notemos que esta afirmación indica que él apretó el mismo número de manos que alguno de los otros



Tomando en cuenta la aclaración de que "nadie apretó ni su propia mano ni la de su mujer" podemos establecer que :

A no es adyacente a B,
C no es adyacente a D,
E no es adyacente a F y
G no es adyacente a H.

En el lenguaje de las gráficas, el número de apretones de manos que realiza una persona corresponde a lo que se define como el grado de un vértice, por lo que la gráfica que representará la solución deberá tener siete de sus vértices con grados diferentes y el grado del vértice H igual a alguno de los siete anteriores, más específicamente diremos que la sucesión de grados deberá ser la siguiente:

$$x, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

debido a que el máximo número de manos que puede apretar una persona sin apretar la propia ni la de su mujer es precisamente 6. x representa, además, el grado del vértice H.

Como cada saludo se realiza entre dos personas la suma de los grados de todos los vértices, d, debe ser un número par, por lo tanto esto restringe los posibles valores de x de la siguiente forma:

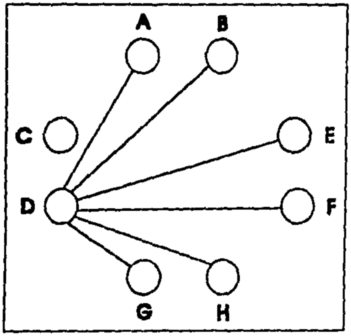
$$d = x + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = x + 21$$

como 21 es impar x debe ser par con el fin de lograr una suma par, debido a que en cada saludo intervienen dos personas, además x debe ser mayor que 0 y menor que 6, por lo que sólo hay tres posibilidades:

1) x = 1   ó 2) x = 3   ó 3) x = 5

Analicemos cada una de estas opciones:

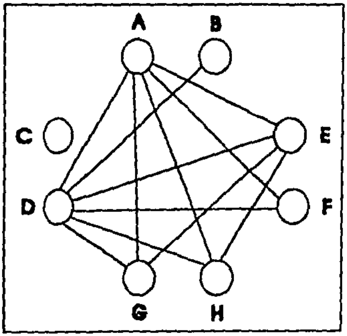
1) x = 1



En este caso, sin pérdida de generalidad, supongamos que el vértice D es el que tiene grado máximo, 6. Al realizar esta asignación de grado, podemos observar que ya se tienen los vértices G y H con grado 1, el cual es el que se debe repetir. Al tratar de asignar, en cualquier forma, el grado 5 a alguno de los otros vértices, vemos que no es posible hacerlo sin incrementar el grado de G o de H o sin romper la regla de imposibilidad de saludar a la pareja propia.

2) x = 3

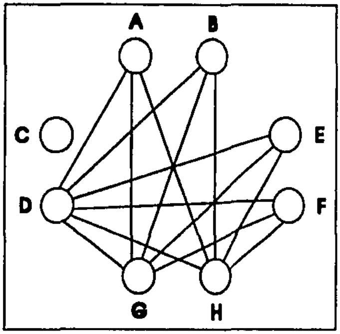
En este caso supongamos también, sin pérdida de generalidad que es el vértice D el que tiene el grado máximo, 6. Por esta asignación, el vértice C está obligado a tener grado 0 ya que todos los demás tienen ya grado 1. Tomemos al vértice A como el que tiene grado 5 y por lo cual su pareja, el vértice B, está obligado a tener grado 1 puesto que los demás vértices ya tienen al menos grado 2. Al tomar al vértice E como el de grado 4, su pareja, el vértice F, está obligado a quedar con grado 2.



Podemos observar, como esperábamos, que los vértices G y H tienen ambos grado 3. Por lo que esta gráfica representa una solución al acertijo, es decir que la mujer del narrador y él mismo saludaron exactamente a 3 personas.

Consideremos el último caso con el fin de conseguir otra solución:

3) $x = 5$



Para este caso consideremos, al igual que en los anteriores, que el vértice D es el que posee el grado 6, por lo cual su pareja, el vértice C, está obligado a tener grado 0. Como los vértices que repiten el grado 5 deben ser G y H vemos que es posible realizar esta asignación sin romper las reglas establecidas en cuanto a apretar la mano propia y la de la pareja, pero al hacerlo ya no habrá ningún vértice con grado 2 y 1, por lo que esta gráfica no representa solución al problema.

Después de revisar los tres casos anteriores vemos que la única solución posible está representada por la gráfica indicada en el caso 2).

Es posible generalizar este acertijo a una reunión de cualquier número, n, de parejas. La solución puede ser encontrada de manera análoga a la presentada para el caso de cuatro parejas. Las gráficas que se obtienen al representar las soluciones constituyen una familia de gráficas que se caracteriza por tener un número par de vértices, con una sucesión de grados desde 0 hasta n-2, con dos únicos vértices con el mismo grado, (n-2)/2.

LA FIESTA DE GRADUACIÓN

En una escuela se han formado diferentes comisiones para organizar la fiesta de graduación. Los siguientes nueve alumnos participan en varias comisiones como se muestra a continuación:

- Presupuesto: Tomás, Maria y Juan

- Música: Juan, Guillermo y Elena

- Comida: Tomás, Alicia y Sofía

- Propaganda: Alicia, Cristina y Enrique

- Decoración: Sofía, Cristina y Elena

Si los alumnos disponen únicamente de dos horas diarias para reunirse en las comisiones, por lo que sólo pueden tratar los asuntos de una comisión cada vez, cual será el menor número de días necesarios para que cada uno de ellos pueda asistir sin problemas a las reuniones correspondientes de las comisiones a las cuales forma parte ?

Solución:

Para encontrar la solución buscada representaremos la situación a través de una gráfica que servirá como modelo. Haremos, para esto, corresponder un vértice a cada una de las cinco comisiones que se han formado y diremos que dos vértices son adyacentes, es decir que son extremos de una arista, si existe algún alumno que participe en ambas comisiones. Por lo tanto la gráfica del problema se construye en la forma siguiente:

- Tomás participa en Presupuesto y Comida.

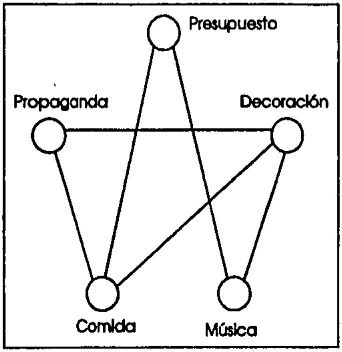
- Juan participa en Presupuesto y Música

- Elena participa en Música y Decoración

- Alicia participa en Comida y Propaganda

- Sofía participa en Comida y Decoración

- Cristina participa en Propaganda y Decoración por lo tanto en la gráfica existirán seis aristas.



El procedimiento para hallar la solución es el siguiente:

1) Contemos el número de aristas a las que pertenece cada uno de los vértices, (en el lenguaje de teoría de gráficas decimos que se calcula el grado de cada vértice).

2) Ordenemos los vértices en forma decreciente de acuerdo a su grado.

3) Tomemos uno de los vértices de grado mayor y marquemos todos aquellos vértices con los cuales éste comparte alguna arista.

4) Ubiquemos el vértice elegido y todos aquellos vértices que no han sido marcados en el paso anterior; las actividades correspondientes a cada uno de estos vértices deben ser programadas para un mismo día.

5) Hagamos desaparecer los vértices cuyas actividades ya fueron programadas y también todas las aristas a las cuales pertenecen estos vértices.

6) Si todavía existen vértices cuyas actividades no han sido programadas realicemos nuevamente desde el paso 1 con la gráfica restante.

Apliquemos el procedimiento descrito anteriormente al caso de la fiesta que hemos planteado.

1) Los vértices tienen los siguientes grados:

Presupuesto	... 2
Propaganda	... 2
Decoración	... 3
Comida	... 3
Música	... 2

2) Ordenados en forma decreciente

Decoración	... 3
Comida	... 3
Presupuesto	... 2
Propaganda	... 2
Música	... 2

3) Podemos elegir Decoración ó Comida. Elegimos Decoración y marcamos Música, Comida y Propaganda, con los cuales comparte aristas.

4) Programamos por lo tanto Decoración y Presupuesto para el primer día que puede ser lunes.

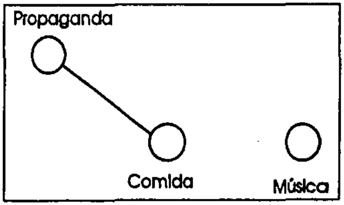
5) Hacemos desaparecer Decoración y Presupuesto y quedan solamente:

Comida, Propaganda, Música

Regresamos al paso 1 con la nueva lista.

1) Se tienen ahora los vértices siguientes:

Comida	... 1
Propaganda	... 1
Música	... 0



2) Vemos que los vértices están en orden decreciente.

3) Podemos elegir entre Comida y Propaganda, cuyos vértices tienen grado 1. Elegimos Comida y marcamos Propaganda con el que comparte una arista.

4) Programamos para un segundo día, martes, el vértice correspondiente a Comida que fue el elegido y Música que no fue marcado.

5) Al hacerlos desaparecer queda solamente el vértice que representa a Propaganda.

6) El vértice Propaganda es asignado a un tercer día, miércoles, con lo cual queda completa la programación de las reuniones.

Por lo tanto el calendario será:

Lunes reunión de Decoración y Presupuesto.
Martes reunión de Comida y Música.
Miércoles reunión de Propaganda.

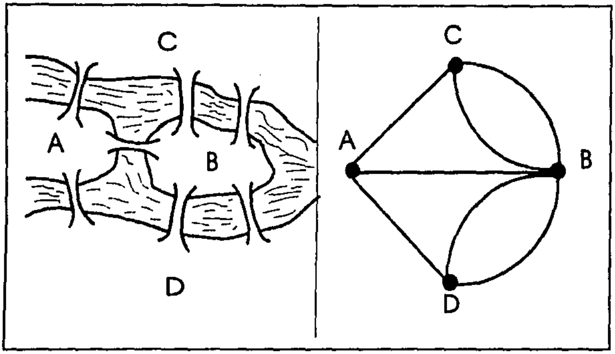
Al aplicar este método de asignación podemos percibir que esta solución no es la única posible, puesto que tenemos en el paso 3 diferentes alternativas para elegir.

Al elegir cada vez, en el paso 3, el vértice con mayor grado estamos asegurando que se eliminará el mayor número de aristas en el paso 5 con lo cual garantizamos que nadie tendrá que asistir a dos reuniones que se realicen el mismo día; al hacer desaparecer, en el paso 5, todos los vértices no marcados aseguramos que la asignación ocupará el menor número de días posible.

Este proceso servirá para realizar una asignación de este estilo en cualquier gráfica.

RECORRIDOS EULERIANOS

El primer artículo de Teoría de Gráficas, escrito por Euler en 1736, demuestra la imposibilidad de recorrer cada uno de los puentes de la ciudad de Königsberg comenzando y terminando en el mismo sitio. La situación se ilustra en la figura siguiente:



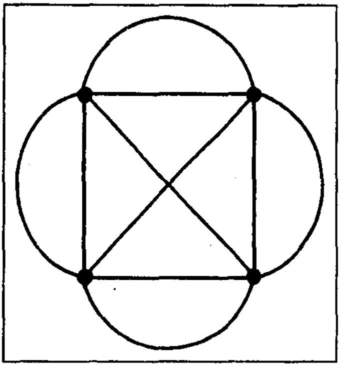
Encontrar un recorrido en el cual se utilicen todos los puentes iniciando y terminando en el mismo punto, equivale en Teoría de las Gráficas a encontrar un Paseo Euleriano.

A partir de este problema han surgido, a lo largo de la historia de la Teoría de Gráficas, muchos otros juegos en los que se pretende encontrar un recorrido de esta naturaleza.

Presentamos a continuación algunos ejemplos de estos juegos y sus soluciones, si es que éstas existen:

LA FIRMA DEL DIABLO

Uno de los más antiguos acertijos de ésta especie es la llamada "*Firma del Diablo*", que consiste en dibujar la figura que se muestra a continuación sin despegar el lápiz del papel y sin trazar más de una vez cada línea, terminando en el mismo punto donde se inició el recorrido.



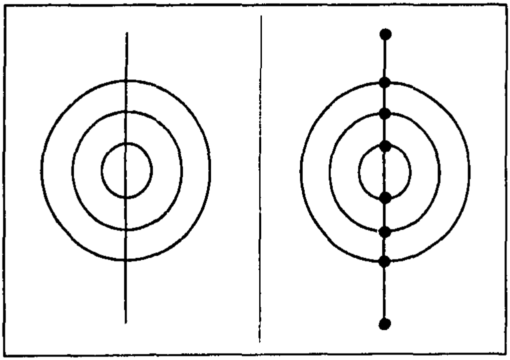
Este acertijo gráfico se ha difundido mucho debido precisamente a que no es posible realizarlo con las reglas dadas, a pesar de ser una gráfica relativamente sencilla.

Una demostración intuitiva del "Por que" no es posible llevar a cabo esta tarea consiste en observar, en primer lugar, que cada uno de los cuatro vértices pertenece exactamente a cinco aristas, por lo cual al intentar un recorrido sería indispensable que cada vez que se elija un vértice como inicial sea posible regresar a él para terminar precisamente en él el recorrido, es claro que esto involucra un número par de aristas.

Como en la gráfica que se quiere dibujar en la forma descrita sus cuatro vértices pertenecen a un número impar de aristas resulta imposible poder iniciar y terminar un recorrido en el mismo vértice.

EL ACERTIJO DEL RETRATO

Una joven artista fue nombrada para pintar el retrato del ganador de un concurso de acertijos. Pero no sabía que el modelo sería el acertijo mismo. Impávida no sólo realizó el retrato con gran sentido artístico, sino que al hacerlo, resolvió el acertijo. Después de mojar su pincel en una buena cantidad de pintura, trazó el dibujo que se muestra a continuación con una línea continua. En ningún momento levantó el pincel de la tela ni repintó ninguno de los tramos. ¿ Puede usted encontrar también la solución ?

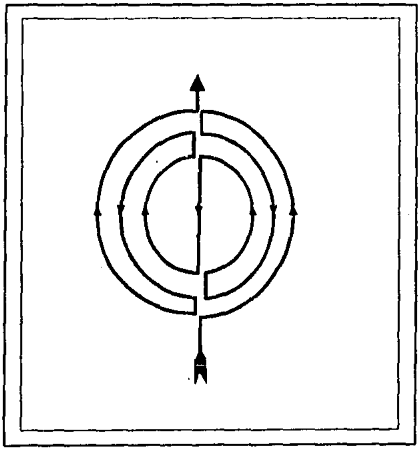


En la figura anterior se muestra el dibujo que se debe realizar de un sólo trazo y la gráfica que modela la situación. La solución será, evidentemente, localizar en la gráfica un recorrido que pase por cada una de sus aristas. En este caso no se pide que el recorrido empiece y termine en el mismo lugar por lo que buscamos solamente un "Paseo Euleriano Abierto" en la gráfica.

Aunque no existe un método eficaz para localizar Paseos Eulerianos en gráficas, podemos sin embargo garantizar la existencia de estos en una gráfica debido al siguiente Teorema:

"*Una gráfica conexa tiene un Paseo Euleriano Abierto si y sólo si tiene a lo más dos vértices de grado impar*".[1]

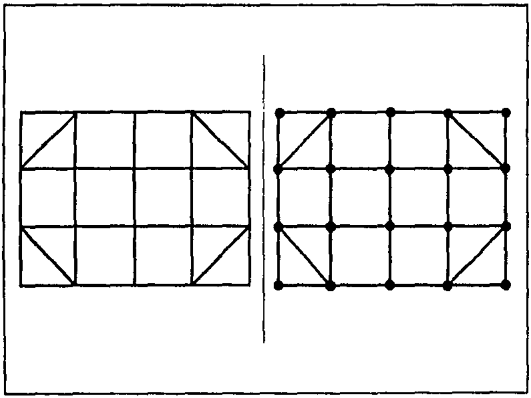
Revisando los elementos del problema en cuestión podremos observar que se trata de buscar un *Paseo Euleriano Abierto* en una gráfica que cumple con las condiciones del teorema anterior por lo cual queda garantizada la existencia de dicho Paseo. Ahora podemos ensayar hasta localizar el recorrido deseado; éste se muestra en la figura a continuación:



1. Ver Demostraciones en: Curcó Cobos Ma. del Carmen, Una Introducción a la Teoría de Gráficas, Notas de Clase, Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., Comunicaciones Internas No.165, 1989, Cap. 9.

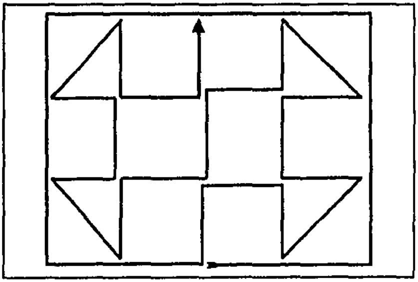
EL ACERTIJO DEL CONCURSO

El profesor Dudosovich examina la respuesta ganadora al acertijo No.77 durante el Concurso Internacional de Acertijos del año pasado. El Profesor quiere asegurarse de que no se haya repintado ninguna línea de la solución. Para verificar lo que él hace trace usted la figura que aquí le mostramos de manera continua. En ningún momento podrá pasar dos veces por el mismo tramo ni levantar el lápiz del papel. Tampoco podrá doblar éste por ningún punto.



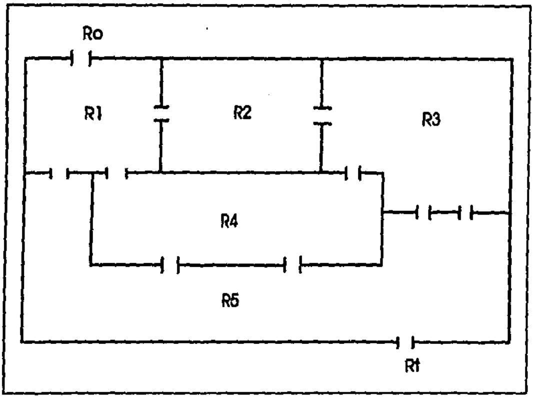
La figura anterior muestra el dibujo a realizar y su gráfica.
Nótese que cada uno de los vértices de la gráfica pertenece a 2 ó 4 aristas y únicamente existen dos vértices los cuales pertenecen a 3 aristas por lo que se satisfacen nuevamente las condiciones del Teorema 2), es decir que se garantiza la existencia de un Paseo Euleriano Abierto en dicha gráfica.

Después de varios intentos fallidos llegamos finalmente a la siguiente solución:



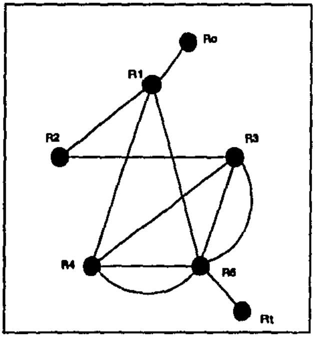
LA CASA ENCANTADA

Mostramos a continuación el plano de una casa encantada. Una vez que entras en ella la puerta principal se cierra a tus espaldas. Tú corres de cuarto en cuarto buscando desesperadamente una salida, pero cada vez que atraviesas una puerta ésta se cierra inmediatamente por arte de magia. ¿ Si te atreves a entrar en esta casa quedarás atrapado en alguno de sus cuartos ?



Para determinar si podemos encontrar una salida de la casa encantada construyamos una gráfica a partir del plano mostrado en la figura. Representemos con el vértice Ro el área en donde se encuentra la entrada, con Rt el área donde está la salida y con los vértices R1, R2, R3, R4 y R5 cada uno de los cuartos de la casa. Digamos que estos vértices son adyacentes si existe una puerta que comunique a dos cuartos. Por lo tanto existirán tantas aristas como puertas.

La gráfica que resulta es la que se muestra a continuación:



En esta gráfica podemos tomar en cuenta las siguientes características:

- Con excepción de los vértices Ro y Rt todos los demás pertenecen a un número par de aristas, lo que significa que siempre que se entra a uno de esos cuartos existe una puerta aún abierta por la cual se puede salir.

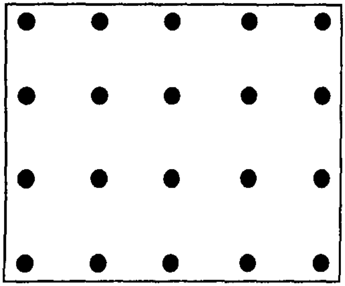
- Los vértices que pertenecen a un número impar de aristas, Ro y Rt, son precisamente el vértice que corresponde a la entrada y el vértice que representa a la salida.

Estas observaciones nos permiten ver que efectivamente será posible encontrar un Paseo Euleriano abierto en la gráfica, (Ver teorema en la sección Recorridos Eulerianos) por lo que existirá un recorrido en la casa que empiece en la puerta principal y termine en la salida sin importar en cuales cuartos se entre siempre se podrá salir de ellos.

La casa encantada no resulta entonces tan peligrosa como se pensaba al inicio por lo cual puedes entrar sin ningún temor.

COMPLETA CUADROS

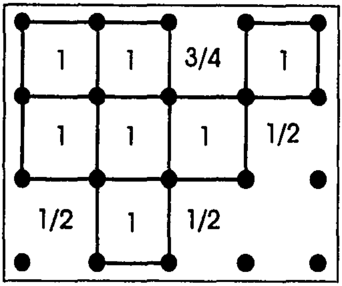
Aplicando este juego en sus clases Jack Frohlichstein observó que sus alumnos lo disfrutaban enormemente. El juego se realiza en una figura compuesta por un rectángulo formado por cuatro renglones de cinco puntos cada uno como se muestra a continuación:



Se comienza en cualquiera de los puntos y se trata de conectar con una línea continua cada uno de los puntos. Para dibujar la línea se permiten únicamente trazos verticales u horizontales considerándose como un trazo el segmento de línea que une dos puntos, además no se debe levantar el lápiz del papel ni repintar ningún trazo previamente realizado. El turno termina cuando ya no es posible efectuar ningún trazo.

El objetivo del juego es tratar de completar el mayor número de cuadrados posibles, teniendo los cuadrados completos el valor es de 1, si se trazaron tres lados se cuentan 3/4, si fueron 2 lados 1/2 y por un lado 1/4.

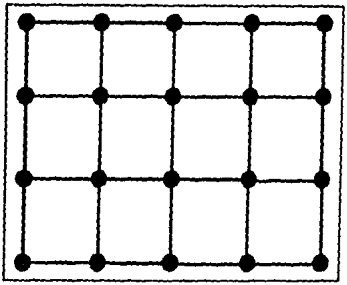
Por ejemplo, la figura que aparece abajo tuvo un valor de 9 enteros y 1/4.



El mejor resultado obtenido en la clase de Frohlichstein fue de 10 enteros 3/4, pero adelante demostraremos que existe otro mejor, de hecho el máximo valor que se puede alcanzar es 11. Debido a las condiciones del problema podemos traducirlo fácilmente a los términos de la Teoría de Gráficas.

Como el problema consiste en unir los puntos a través de una línea continua (sólo en sentido vertical u horizontal) y sin despegar el lápiz del papel y sin repintar ningún trazo previo entonces como cada trazo realizado aumenta el valor de la puntuación final se busca efectuar el máximo número de trazos posibles.

Observemos que la situación óptima resultaría de efectuar los trazos que unieran todos los puntos en todos los sentidos posibles, estos trazos darían lugar a la figura que a continuación se presenta.



La puntuación máxima sería de 12 enteros en caso de que existiera un recorrido que permitiera obtener esta figura.

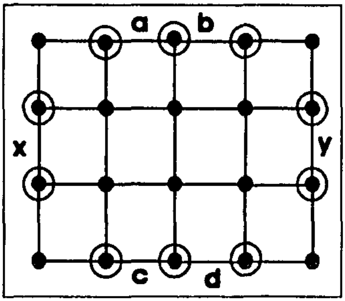
La figura anterior constituye evidentemente una gráfica y el recorrido deseado corresponde a localizar en ella un paseo euleriano cerrado.

Con base en el teoremas enunciado en la sección denominada "Recorridos Eulerianos" podemos catalogar a la gráfica de este juego como una gráfica que no posee ni ciclos eulerianos ni paseos eulerianos puesto que en ella podemos observar exactamente 10 vértices los cuales pertenecen a 3 (número impar) aristas. Por lo que acabamos de exponer concluimos que 12 constituye una puntuación inalcanzable.

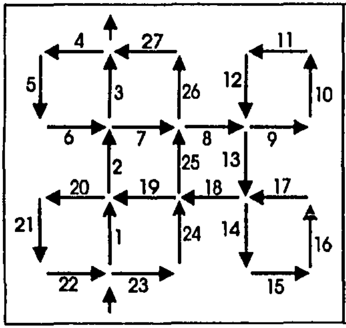
Para garantizar la máxima puntuación posible bastará con construir otra gráfica, a partir de la anterior, la cual posea un paseo euleriano. Para lograr esto recordemos que se debe tener a lo más dos vértices que tengan un número impar de aristas. El método que seguiremos será el de quitar algunas aristas a la gráfica cuya puntuación es 12.

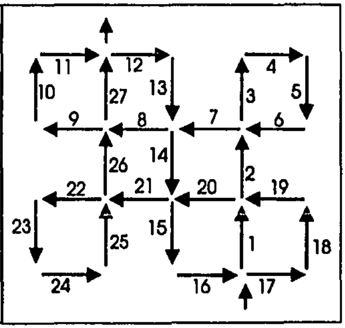
Las aristas que deben removerse serán lógicamente aquellas que pertenezcan a vértices con número impar de aristas. Vemos que el menor número posible de aristas que deben ser retiradas es cuatro para dejar sólo dos vértices con número impar de aristas, pero no son cualesquiera cuatro aristas, ilustramos en la figura siguiente aquellas aristas que podrán ser removidas:

Ubiquemos los 10 vértices cuyo número de aristas es impar.



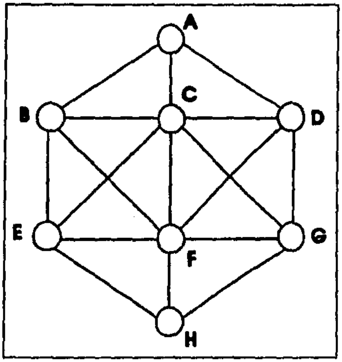
Las aristas x y y deben necesariamente ser removidas, de lo contrario no podremos tener la situación deseada. Por lo tanto nos quedan sólo dos aristas más para retirar, éstas deben ser una de entre a y b y la otra de entre c y d, permitiendo las dos posibles gráficas que se muestran abajo y en las cuales existe al menos un paseo euleriano, por lo que su puntuación, 11, es máxima en ambos casos y cuyos recorridos quedan expuestos.





NO CONSECUTIVOS

El problema que presentamos consiste en colocar en los 8 círculos que se muestran en la figura los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 pero no se deben poner dos números consecutivos en círculos que estén unidos por una línea. ¿ Es posible hacerlo ?

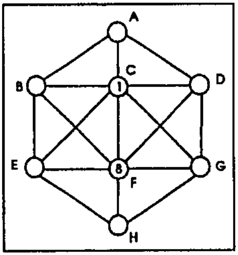


Para dar solución a este problema analicemos la estructura de la figura desde el punto de vista de la Teoría de Gráficas. Se trata de una gráfica con 8 vértices y 18 aristas, pero lo más significativo en este momento es observar el número de aristas que inciden en cada uno de los vértices, es decir, el grado de cada vértice:

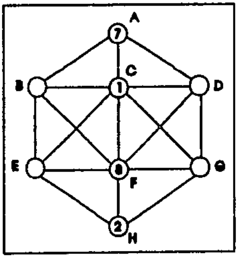
Los vértices A y H tienen grado 3,
los vértices B, D, E y G tienen grado 4, y
los vértices C y F tienen grado 6.

Con esta observación concluimos que los vértices en los cuales correremos un riesgo mayor de quebrantar la restricción son C y F puesto que tienen un número mayor de vértices adyacentes. Por lo cual trataremos de asignar en estos vértices el conjunto de números que contenga la menor cantidad de números consecutivos.

Revisemos ahora la sucesión numérica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 8.
Cada uno de estos números tienen un inmediato superior e inferior, con excepción del 1 que sólo tiene un número inmediato superior y del 8 que sólo tiene un número inmediato inferior, debido a que son los extremos inferior y superior de la sucesión respectivamente. Por esta razón serán nuestros mejores candidatos para ocupar los vértices C y F.
Podemos establecer que 1 ocupe el vértice C y 8 el F.

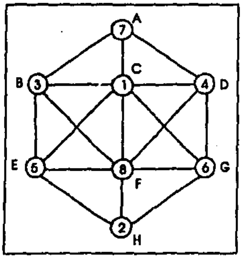


En los vértices A y H podemos colocar 2 y 7 pero para no romper la regla colocaremos a 7 en A y a 2 en H.



Existen diferentes formas de asignar los cuatro números restantes en los vértices adecuados, una de ellas consiste en considerar la pareja 3 y 4 para los vértices de la horizontal superior, es decir 3 en B y 4 en D, de esta forma quedan obligados los números 5 y 6 para los vértices de la horizontal inferior E y G respectivamente.

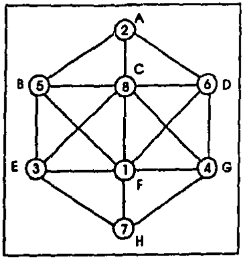
La solución que hemos construido está presentada en la figura siguiente:

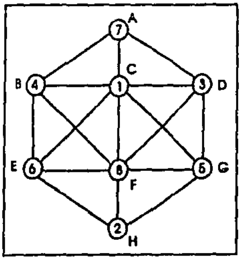


Esta solución no es la única pues aún tomando en cuenta el mismo criterio de construcción podemos realizar variaciones en la asignación de algunos vértices. Presentamos a continuación algunas de estas otras soluciones:

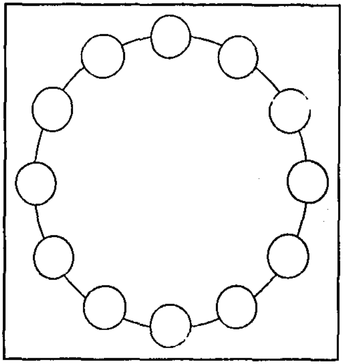
i) Intercambiando 1 y 8 de lugar y reflejando todos los demás vértices.

ii) Permutando los números en las horizontales, 3 y 4, 5 y 6.





UN ANTIGUO PROBLEMA BABILONIO



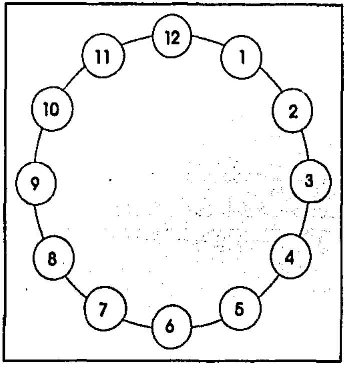
Intenta cubrir once de los círculos de la figura de arriba con fichas o monedas, observando las siguientes reglas:

1. Puedes comenzar en cualquiera de los círculos, cuéntalo como uno y continua contando círculos hasta seis en el sentido de las manecillas del reloj. Deja una ficha en el sexto círculo.

2. Elige otro círculo vacío y como en el paso anterior cuenta seis círculos (incluye en tu cuenta aún los círculos cubiertos con fichas) y deja una ficha en el último.

3. Repite el paso 2, empezando siempre en un círculo vacío, hasta que sean cubiertos exactamente once círculos.

Este juego parece muy sencillo, en realidad lo es, pero también es muy probable que no se lleguen a cubrir los once círculos en el primer intento. Mostremos un ejemplo tomando como base la figura a continuación, cuyos círculos se han numerado, como en la carátula de un reloj, con el fin de describir fácilmente los movimientos que se realizarán:



1. Iniciemos tomando el círculo con el número 1, contémoslo y contemos cinco más hasta llegar a seis círculos. Cubramos ahora con una ficha el círculo con el número 6 que fue el último en ser contado. Notemos que ya no es posible empezar a contar desde este círculo ya que está cubierto; por lo tanto no podremos cubrir el círculo 11 ya que es precisamente en el círculo 6 en el cual se tendría que iniciar el conteo para poder hacerlo.

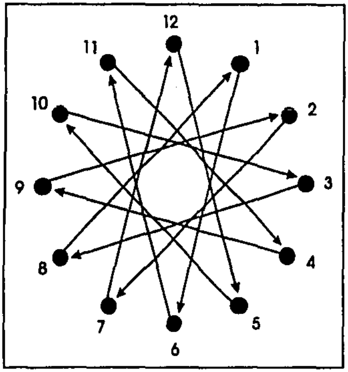
2. Iniciemos la cuenta desde el círculo 2 y llegaremos al siguiente círculo que deberá ser cubierto que es el 7. Por esta razón el círculo 12 ya no podrá ser cubierto.

Ya en este momento nos damos cuenta de que con las elecciones tomadas existen dos círculos que no podrán ser cubiertos, a saber el 11 y el 12, por lo que no se logrará de esta manera el objetivo del juego.

Debido a que la figura que resulta es un ciclo nos induce, naturalmente a usar la Teoría de Gráficas para analizar la situación que representa al juego, y para localizar, si es que ésta es posible, una solución.

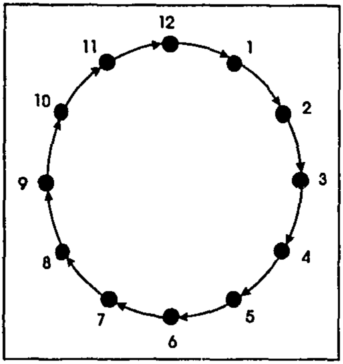
Construyamos la gráfica que representa al juego. Tomemos un vértice por cada círculo y consideremos aristas dirigidas debido a que los círculos se cuentan en un sentido; éstas tendrán su inicio en el vértice que representa a un círculo a partir del cual se empieza a contar y terminarán en el vértice correspondiente al vértice al cual se llega en el conteo hasta seis.

Por lo tanto la gráfica del juego es la siguiente:



En esta gráfica se muestran todos los movimientos que son posibles de realizar en cualquier momento del juego. Notemos que cada uno de los vértices es el inicio de una arista y el final de otra. Si intentamos un recorrido por las aristas de la gráfica, iniciando en cualquiera de los vértices, nos damos cuenta de que es posible hacerlo, siguiendo el sentido de las flechas, tocando una sola vez cada uno de los vértices y terminando el recorrido en el vértice inicial. Se pasa además por cada una de las aristas.

Con las observaciones anteriores vemos que a pesar de la existencia de cruces de aristas en la gráfica, ésta es un ciclo de longitud 12. Por lo cual la dibujaremos en una forma, sin cruces, que nos permita observar mejor sus características:



Puesto en esta forma el ciclo, C_{12}, nos permite ver que para lograr once círculos cubiertos podemos seleccionar los círculos en el orden inverso al cual aparecen en el ciclo. Por ejemplo si elegimos como vértice inicial al 11 quedará cubierto el 4; el 11 será cubierto si iniciamos desde el 6; éste será cubierto eligiendo esta vez el 1, etc... el último vértice en cubrirse será el 2 al seleccionar el 9, y éste será el único que quedará descubierto por haber sido inicialmente cubierto el 4.

Generalización:

Las condiciones que se dan como reglas para este juego pueden ser aplicadas en otras versiones del mismo en las cuales las variantes sean el número de círculos que se tienen como base y el número de círculos que tienen que ser contados para cubrir a otro.

En este juego intervienen realmente dos gráficas. La primera es precisamente la que podemos observar desde el inicio, cuyos vértices son los círculos que tienen que ser cubiertos y sus aristas son las líneas que unen dichos círculos. Estas gráficas son siempre ciclos cuya longitud es igual al número de vértices (círculos) o al número de aristas (líneas) ya que en un ciclo el número de vértices coincide con el número de aristas. A esta gráfica nos referiremos en adelante como la gráfica base del juego.

La segunda gráfica que interviene es precisamente la gráfica que se construye para representar los movimientos que se pueden realizar durante el juego. Sus vértices representan a los círculos del juego y cada una de sus aristas, dirigidas, representa un movimiento en el juego es decir, conecta a dos vértices cuando el vértice final es el último en ser contado siguiendo las reglas del juego. A esta gráfica la llamaremos la gráfica de movimientos. Estas gráficas no siempre son ciclos que posean a todos los vértices ya que en algunas ocasiones tendrán más de una componente, es decir que la gráfica no será de una sola pieza.

En las tablas que presentamos a continuación percibimos algunas relaciones entre los elementos de las gráficas que estamos utilizando. Estas tablas ofrecen información de los posibles casos que van desde el mínimo número posible de vértices, 3, hasta un juego con 14 círculos, siendo también contados los círculos en todos las posibilidades, desde 1 hasta el número de vértices menos uno.

Decimos que una trayectoria dirigida en una digráfica se define como una sucesión de vértices y aristas en las cuales el vértice final de una es el vértice inicial de la siguiente, con excepción de las aristas de los extremos. Consideramos la longitud de una trayectoria dirigida como el número de aristas que componen dicha trayectoria. Como en el juego se tiene que tomar en cuenta el sentido de las manecillas del reloj podemos decir que se trata de una digráfica, y podemos por lo tanto ubicar trayectorias dirigidas de diferentes longitudes. De esta forma si en las reglas del juego se propone contar n círculos para cubrir a otro círculo, podemos decir que la regla pide, para cubrir un círculo, encontrar una trayectoria de longitud n-1 en la gráfica base del juego. Por lo tanto cada arista en la gráfica de movimientos representa a una trayectoria en la gráfica base.

De la información contenida en las tablas podemos deducir que no siempre es posible proponer juegos para cualquier número de círculos ni cualquier número de círculos a ser contados, ya que cuando la gráfica de movimientos consta de dos o más piezas no será posible dejar sólo un círculo sin cubrir. Esto sucede, como se nota en la tabla, cuando el número de vértices y la longitud de la trayectoria tienen más de un factor común. Conocemos además que el número de piezas que forman la gráfica de movimientos es precisamente el máximo común divisor del número de vértices y la longitud de la trayectoria.

De aquí que podemos predecir desde el inicio si se podrá en uno de estos juegos dejar destapado únicamente uno de los círculos.

Para dibujar las gráficas de movimientos procedemos, con el fin de no omitir ninguna arista, dibujando los ciclos en la forma en la que se van formando: "terminando una arista en un vértice y comenzando la siguiente precisamente en ese vértice". Este ejercicio nos induce a calcular cual será el vértice al que debe llegar la arista que se está dibujando, por lo que se sigue una regla específica: "se suma siempre una misma cantidad al número del vértice en el que se inicia la arista".

Tomemos como ejemplo las gráficas de movimientos para el caso en el que se tienen 10 vértices comenzando por movimientos cuya longitud es uno y habiendo numerado los vértices comenzando desde el 0 como se muestra en las figuras al final de este artículo. Veamos que si sumamos al número de un vértice el número correspondiente a la longitud de la trayectoria con la cual fue construida esta gráfica obtenemos el número del vértice final de la arista a la que pertenecen dichos vértices, por lo cual nos damos cuenta que cada una de estas gráficas representa una tabla de sumar. En los casos de 10 vértices podemos fácilmente apreciar que se trata de las tablas de sumar que aprendimos en la primaria pero restringiéndonos a las unidades cuando la suma excede a 10. Este tipo de operación es definida en las matemáticas como la suma módulo 10. Para los casos con n vértices las gráficas de movimientos corresponden a las tablas de sumar módulo n.

Para observar estas características ofrecemos como ejemplos, al final de este artículo, las gráficas que representan a las tablas de sumar módulo 10 para 1, 2 y 3, así como para las tablas módulo 6 de 1, 2, 3, 4 y 5. Nótese en estas últimas gráficas el cambio de orientación de las aristas de acuerdo al aumento en la longitud de las trayectorias con las que fueron construidas.

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Número de Vértices	Long. trayectoria	No.Componentes	Fact.Comunes
3	1	1	1
3	2	1	1
4	1	1	1
4	2	2	1,2
4	3	1	1
5	1	1	1
5	2	1	1
5	3	1	1
5	4	1	1
6	1	1	1
6	2	2	1,2
6	3	3	1,3
6	4	2	1,2
6	5	1	1
7	1	1	1
7	2	1	1
7	3	1	1
7	4	1	1
7	5	1	1
7	6	1	1
8	1	1	1
8	2	2	1,2
8	3	1	1
8	4	4	1,2,4
8	5	1	1
8	6	2	1,2

Número de Vértices	Long. Trayect.	No. Componentes	Factores Comunes
8	7	1	1
9	1	1	1
9	2	1	1
9	3	3	1,3
9	4	1	1
9	5	1	1
9	6	3	1,3
9	7	1	1
9	8	1	1
10	1	1	1
10	2	2	1,2
10	3	1	1
10	4	2	1,2
10	5	5	1,5
10	6	2	1,2
10	7	1	1
10	8	2	1,2
10	9	1	1
11	1	1	1
11	2	1	1
11	3	1	1
11	4	1	1
11	5	1	1
11	6	1	1
11	7	1	1
11	8	1	1

Número de Vértices	Long. Trayectoria	No.Componentes	Fact. Comunes
11	9	1	1
11	10	1	1
12	1	1	1
12	2	2	1,2
12	3	3	1,3
12	4	4	1,2,4
12	5	1	1
12	6	6	1,2,3,6
12	7	1	1
12	8	4	1,2,4,
12	9	3	1,3
12	10	2	1,2
12	11	1	1
14	1	1	1
14	2	2	1,2
14	3	1	1
14	4	2	1,2
14	5	1	1
14	6	2	1,2
14	7	7	1,7
14	8	2	1,2
14	9	1	1
14	10	2	1,2
14	11	1	1
14	12	2	1,2
14	13	1	1

GRÁFICAS DE MOVIMIENTOS

Tabla del 1 mod 10:

1 + 0 = 1	1 + 5 = 6
1 + 1 = 2	1 + 6 = 7
1 + 2 = 3	1 + 7 = 8
1 + 3 = 4	1 + 8 = 9
1 + 4 = 5	1 + 9 = 0

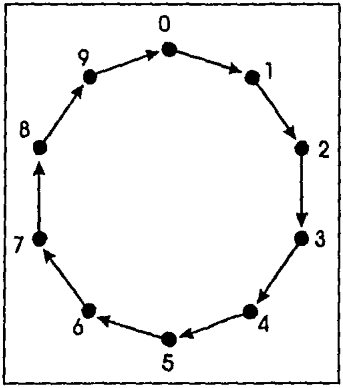


Tabla del 2 mod 10:

2 + 0 = 2	2 + 5 = 7
2 + 1 = 3	2 + 6 = 8
2 + 2 = 4	2 + 7 = 9
2 + 3 = 5	2 + 8 = 0
2 + 4 = 6	2 + 9 = 1

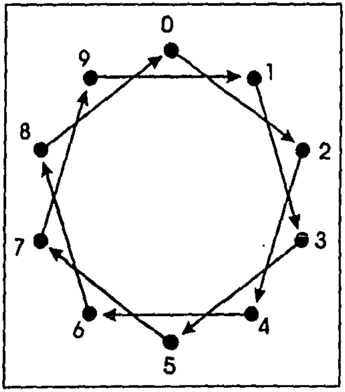
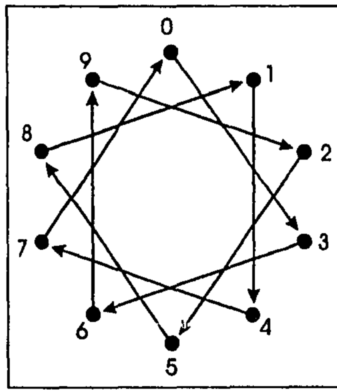


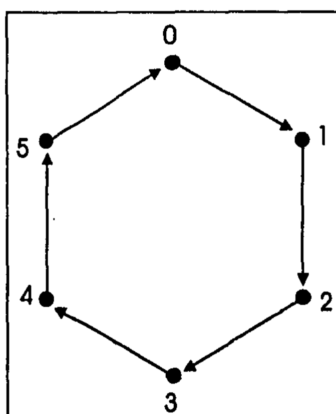
Tabla del 3 mod 10:

3 + 0 = 3
3 + 1 = 4
3 + 2 = 5
3 + 3 = 6
3 + 4 = 7
3 + 5 = 8
3 + 6 = 9
3 + 7 = 0
3 + 8 = 1
3 + 8 = 2

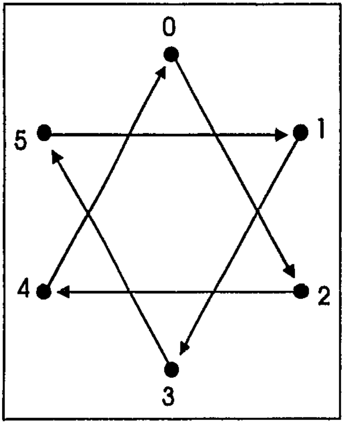


Tablas mod 6:

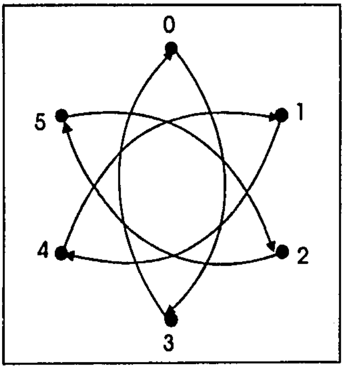
1 + 0 = 1
1 + 1 = 2
1 + 2 = 3
1 + 3 = 4
1 + 4 = 5
1 + 5 = 0



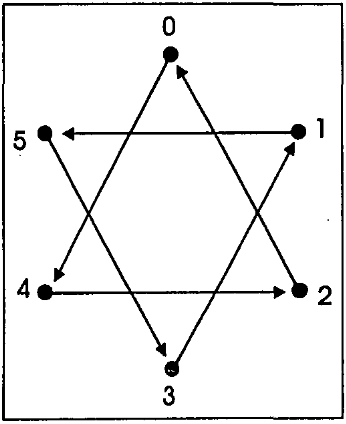
2 + 0 = 2
2 + 1 = 3
2 + 2 = 4
2 + 3 = 5
2 + 4 = 0
2 + 5 = 1



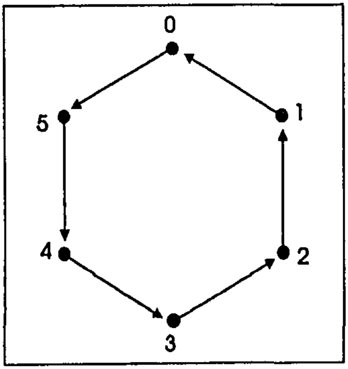
3 + 0 = 3
3 + 1 = 4
3 + 2 = 5
3 + 3 = 0
3 + 4 = 1
3 + 5 = 2



$4 + 0 = 4$
$4 + 1 = 5$
$4 + 2 = 0$
$4 + 3 = 1$
$4 + 4 = 2$
$4 + 5 = 3$

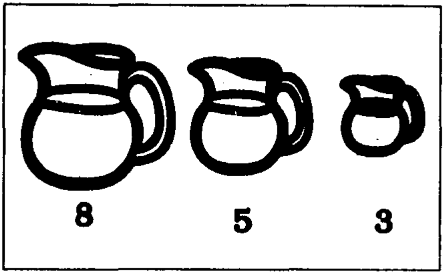


$5 + 0 = 5$
$5 + 1 = 0$
$5 + 2 = 1$
$5 + 3 = 2$
$5 + 4 = 3$
$5 + 5 = 4$



COMPARTIENDO LITROS

Dos hombres tienen una garrafa llena de vino, con capacidad de ocho litros. Cuentan también con otras dos vacías, una con capacidad para 5 litros y la más pequeña puede contener sólo 3 litros. Estos hombres desean repartir el vino en cantidades iguales para ambos. ¿ Cual será la forma más sencilla de realizar el reparto ?



Repartir los ocho litros de vino utilizando solamente los recipientes cuyas capacidades son 8, 5 y 3 puede no ser una tarea muy complicada, pero el problema sugiere encontrar la forma más sencilla. Debemos por lo tanto interpretar el problema como realizar la tarea solicitada con el menor número de movimientos posible, por lo cual el método de ensayo y error puede no llevarnos a la solución buscada rápidamente.

Este acertijo es muy conocido y ha sido abordado en diferentes formas, ahora lo trataremos como un problema de optimización es decir buscando el mínimo número de pasos para realizar la división equitativa del vino.

La herramienta que utilizaremos para este fin pertenece al Análisis de Redes que podemos considerar como una aplicación de la Teoría de Gráficas. Por lo cual construiremos el modelo gráfico correspondiente aunque, para este caso, la construcción de dicho modelo no es tan natural como en algunos otros problemas presentados en este capítulo.

Como en toda gráfica necesitamos dos conjuntos, uno de vértices y el otro de aristas, y además la relación de adyacencia entre los vértices. Consideraremos en este caso cada vértice de la gráfica como una terna de valores que represente el estado en que se encuentran las garrafas en un momento dado, es decir que el primer número de la terna nos indicará cuantos litros está conteniendo la garrafa de 8 litros, el segundo número nos dirá los litros contenidos en la garrafa de 5 litros y el tercer número será el correspondiente a los litros contenidos en la garrafa más pequeña. Por ejemplo, el vértice que representa la situación inicial será el vértice (8,0,0) pues es el recipiente más grande (8 litros) el que contiene los 8 litros de vino en tanto que los otros dos recipientes se encuentran vacíos.

La relación de adyacencia entre los vértices será la siguiente: Existe una arista dirigida que va de un vértice inicial a otro final si podemos pasar inmediatamente de un estado a otro con un único movimiento. Por ejemplo, existe la arista dirigida cuyo vértice inicial es (8,0,0) y cuyo vértice final es (5,0,3), esto debido a que consideramos como un movimiento al hecho de llenar el recipiente con capacidad de 3 litros quedando 5 litros en el recipiente de mayor capacidad. Se debe tomar en cuenta que estos movimientos deben garantizar que se conoce con precisión en cualquier momento cuantos litros exactos contienen cada uno de los recipientes.

Tomando en cuenta estas propiedades podemos construir la gráfica dirigida correspondiente a la situación, la cual además nos mostrará algunas soluciones evidentes. Aunque deberemos encontrar después la solución que corresponda al número mínimo de pasos.

<u>Construcción de la Gráfica:</u>

El estado (8,0,0) es representado por el vértice inicial. El estado final estará representado por el vértice (4,4,0). Tendremos que calcular los vértices intermedios que nos vayan llevando a la solución. Para esto consideraremos a partir del inicio cada una de las posibilidades que ofrece el estado previo en cada caso.

Observemos que se siempre se puede regresar de un estado posterior a uno anterior.

Sea A = (8,0,0) tenemos a partir de aquí dos posibilidades:

B = (3,5,0) y C = (5,0,3)

por lo tanto existen las aristas dirigidas AB, AC, BA y CA.

A partir de B y C construimos: D = (0,5,3) E = (3,2,3) F = (5,3,0)

y vemos que es posible dibujar las aristas BD, DB, BE, EB, CD, DC, CF, FC, FA, FB y ED.

Construimos después: G = (6,2,0) H = (2,3,3)

y las aristas EG, GE, GB, FH, HF y HD.

Al construir los vértices: I = (6,0,2) J = (2,5,1)

tenemos que considerar las aristas GI, IG, IA, IC, HJ, JH, JD y JB.

Con los vértices: K = (1,5,2) L = (7,0,1)

tenemos las aristas IK, KI, KB, KD, JL LJ, LA y LC,

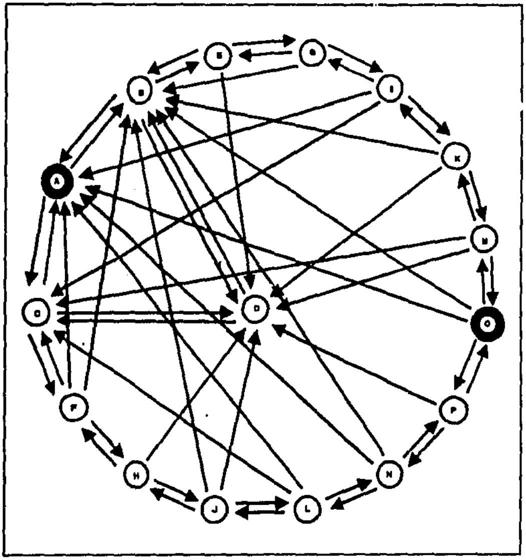
y con los vértices: M = (1,4,3) N = (7,1,0)

tenemos las aristas KM, MK, MD, MC, LN, NL y NA.

Finalmente tenemos los vértices: O = (4,4,0) P = (4,1,3)

y las aristas MO, OM, OP, OB, OA, PO, NP, PN, NB y PD.

por lo tanto la gráfica será la mostrada en la página siguiente:



Los vértices A y O representan el inicio y el fin de la ruta buscada.

El peso en cada una de las aristas es 1 por lo cual no ha sido necesario indicarlo en cada una de ellas.

Decimos que una Red es una gráfica dirigida cuando ésta tiene asociado algún valor numérico (peso) en cada una de sus aristas o de sus vértices. Para el problema que nos ocupa podemos asignar peso 1 a cada uno de las aristas de la gráfica para tener una red con todas sus características.

En los términos del Análisis de Redes lo que pretendemos es encontrar la ruta más corta entre el vértice inicial A y el vértice final O, entendiéndose por la ruta más corta el camino para el cual la suma de los pesos de las aristas que lo forman es mínima. Para resolver específicamente problemas de ruta más corta entre dos vértices se cuenta con un algoritmo muy eficiente conocido como el algoritmo de Dijkstra. Este algoritmo encuentra en cada una de sus iteraciones la ruta más corta entre el vértice inicial y uno de los vértices de la red, repitiendo este proceso hasta encontrar el vértice deseado como final.

Para poder aplicar el algoritmo de Dijkstra en una red ésta debe cumplir con las siguientes condiciones:

a) Que exista un camino entre el vértice inicial y el final.
b) Que no existan circuitos negativos, tales que haya un camino del vértice inicial a alguno de los vértices del circuito y de alguno de los vértices del circuito al vértice final. (Un circuito negativo es una sucesión de aristas dirigidas para las cuales sucede que el vértice terminal de la última arista del circuito es el vértice inicial de la primera arista del circuito, además la suma de los pesos de todas las aristas del circuito es un número negativo)

Ambas condiciones se cumplen en la red de nuestro problema.

<u>Aplicando el Algoritmo de Dijkstra:</u>

Consideramos A como el vértice inicial.
Sea d(x) = min{ d(x), d(p)+d(p,x)} para todo vértice de la red, donde p es el vértice que se analiza en cada una de las iteraciones y d(x) es la distancia mínima encontrada desde el vértice inicial hasta el vértice que representa el estado actual, d(p,x) es además la distancia entre el vértice p y el vértice x que se esté analizando .

Paso 1. Sea d(A)=0 debido a que A es el vértice inicial. Consideramos a A dentro del conjunto de vértices marcados con etiqueta permanente, es decir que se ha encontrado la ruta más corta desde el inicio hasta el, obviamente en este caso la longitud de esta ruta es 0 puesto que A es el vértice inicial.

Para todo vértice x en la red hacemos $d(x)=\infty$, y consideramos sus etiquetas como temporales, es decir que no se ha encontrado la ruta más corta entre el vértice inicial y ellos.

$a(x)$ nos indicará cual es el vértice predecesor de los vértices analizados en las iteraciones del algoritmo. Para el vértice inicial $a(A)=A$ puesto que este vértice inicial no tiene predecesor en la red.

Paso 2. Actualización de etiquetas. Consideramos $D^{+}(x)$ al conjunto de vértices con etiqueta temporal los cuales son extremos finales de una arista cuyo inicio está en el vértice x. Por lo tanto $D^{+}(A)=\{B,C\}$

Calculamos:

$d(B)=\min\{d(B),\ d(A)+d(A,B)\} = \min\{\infty,0+1\} = 1$ $\quad a(B)=A$
$d(C)=\min\{d(C),\ d(A)+d(A,C)\} = \min\{\infty,0+1\} = 1$ $\quad a(C)=C$

Como ambas distancias han sido cambiadas, ya que en el paso 1 tenían valor infinito, se calcula mediante $a(x)$ el predecesor que forma parte de su ruta mínima.

Se considera ahora la menor de las distancias $d(x)$ con etiqueta temporal en este caso como ambas son iguales a 1 cualquiera de las dos puede ser etiquetada permanentemente. Tomemos $X^{*} = C$.

Vértices con etiquetas permanentes: {A, C}
Vértices con etiquetas temporales! {B, D, E, F,... P}

Paso 3. Como no hemos alcanzado el vértice final iremos nuevamente al paso 2.

Iteración 2. $\qquad D^{+}(C)=\{D,F\}$

$d(D)=\min\{d(D),\ d(C)+d(C,D)\}= \min\{\infty,1+1\} = 2$ $\quad a(D)=C$
$d(F)=\min\{d(F),\ d(C)+d(C,F)\}= \min\{\infty,1+1\} = 2$ $\quad a(F)=C$

$X^{*} = B$. Marcamos B con etiqueta permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B}
Vértices con etiquetas temporales: {D,E,F,...P}

Iteración 3. $D^{+}(B)=\{D,E\}$

$d(D)= \min\{2, d(B)+d(B,D)\}= \min\{2, 1+1\}= 2$ a(D) no cambia
$d(E)= \min\{d(E), d(B)+d(B,E)\} = \min\{ \infty , 1+1\} = 2$ $a(E)=B$

$X^{*} = E$. Marcamos E con etiqueta permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E}
Vértices con etiquetas temporales: {D,F,G,...P}

Iteración 4. $D^{+}(E)=\{D,G\}$

$d(D)= \min\{d(D), d(E)+d(E,D)\}= \min\{2,2+1\}= 2$ a(D) no cambia
$d(G)= \min\{d(G), d(E)+d(E,G)\}= \min\{ \infty , 2+1\}= 3$ $a(G)=E$

$X^{*} = D$. Marcamos D con etiqueta permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E,D}
Vértices con etiquetas temporales: {F,G,H...P}

Iteración 5.

$D^{+}(D)= \phi$ esto se debe a que todos los vértices los cuales son extremos finales de aristas con inicio en D están ya marcados como permanentes. Por lo tanto consideramos la menor de las distancias de entre los vértices con etiqueta temporal.

Por lo tanto $X^{*} = F$. Marcamos F como permanente.

Vértices con etiqueta permanente: {A,C,B,E,D,F}
Vértices con etiquetas temporales: {G,H,I,...P}

Iteración 6. $D^{+}(F)=\{H\}$

$d(H)= \min\{d(H), d(F)+d(F,H)\}= \min\{ \infty,2+1\}= 3$ $a(H)=F$

$X^{*} = H$. Marcamos H como permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E,D,F,H}
Vértices con etiquetas temporales: {G,I,J,...P}

Iteración 7. $D^+(H)=\{J\}$

$d(J)=\min\{d(J),\ d(H)+d(H,J)\}=\min\{\infty,3+1\}=4$ $a(J)=H$

$X^* = G$. Marcamos G como permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E,D,F,H,G}
Vértices con etiquetas temporales: {I,J,K,...P}

Iteración 8. $D^+(G)=\{I\}$

$d(I)=\min\{d(I),\ d(G)+d(G,I)\}=\min\{\infty,3+1\}=4$ $a(I)=G$

$X^* = I$. Marcamos I con etiqueta permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E,D,F,H,G,I}
Vértices con etiquetas temporales: {J,K,L,M,N,O,P}

Iteración 9. $D^+(I)=\{K\}$

$d(K)=\min\{d(K),\ d(I)+d(I,K)\}=\min\{\infty,4+1\}=5$ $a(K)=I$

$X^* = J$. Marcamos J con etiqueta permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E,D,F,H,G,I,J}
Vértices con etiquetas temporales: {K,L,M,N,O,P}

Iteración 10. $D^+(J)=\{L\}$

$d(L)=\min\{d(L),\ d(J)+d(J,L)\}=\min\{\infty,4+1\}=5$ $a(L)=J$

$X^* = L$. Marcamos L con etiqueta permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E,D,F,H,G,I,J,L}
Vértices con etiquetas temporales: {K,M,N,O,P}

Iteración 11. $D^+(L)=\{N\}$

$d(N)=\min\{d(N),\ d(L)+d(L,N)\}=\min\{\infty,5+1\}=6$ $a(N)=L$

X^* = K. Marcamos K como permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E,D,F,H,G,I,J,L,K}
Vértices con etiquetas temporales: {M,N,O,P}

Iteración 12. D⁺(K)={M}

d(M)= min{d(M), d(K)+d(K,M)}= min{ ∞,5+1}= 6 a(M)=K

X^* = M. marcamos M como permanente.

Vértices con etiquetas permanentes: {A,C,B,E,D,F,H,G,I,J,L,K,M}
Vértices con etiquetas temporales: {N,O,P}

Iteración 13. D⁺(M)={O}

d(O)= min{d(O), d(M)+d(M,O)}= min{ ∞,6+1}= 7 a(O)=M

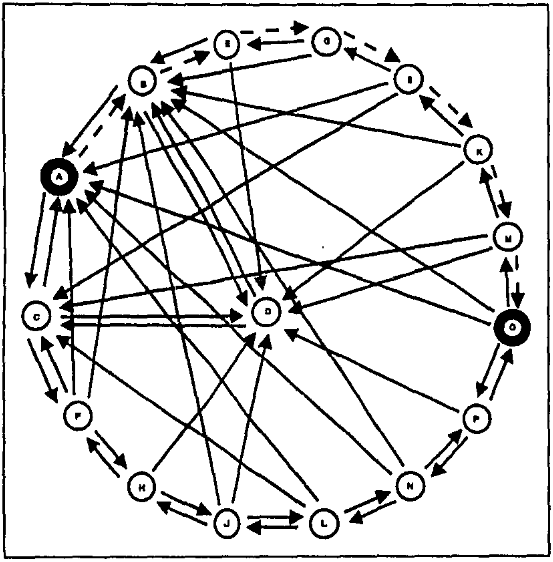
X^* = O. marcamos O como permanente.

Paso 3. Como O es el vértice al cual deseábamos llegar y ha sido marcado como permanente entonces el algoritmo ha finalizado.

d(O) = 7 es la longitud de la ruta más corta desde A hasta O. Recuperamos la sucesión de vértices de esta ruta a través de a(x).

a(O)=M, a(M)=K, a(K)=I, a(I)=G, a(G)=E, a(E)=B, a(B)=A

Por lo tanto la ruta más corta es la siguiente: A,B,E,G,I,K,M,O. la mostramos además en la gráfica a continuación:



Las aristas dibujadas con línea discontinua son las que forman parte de la ruta más corta entre A y O.

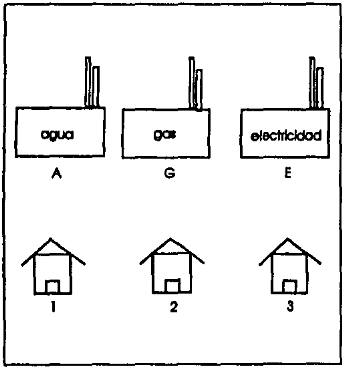
Regresando a nuestro problema original interpretemos la ruta obtenida por el algoritmo:

PASOS	VÉRTICE	ESTADO
0 (inicio)	A	(8,0,0)
1	B	(3,5,0)
2	E	(3,2,3)
3	G	(6,2,0)
4	I	(6,0,2)
5	K	(1,5,2)
6	M	(1,4,3)
7 (fin)	O	(4,4,0)

lo cual constituye la solución de nuestro problema.

AGUA, GAS Y ELECTRICIDAD

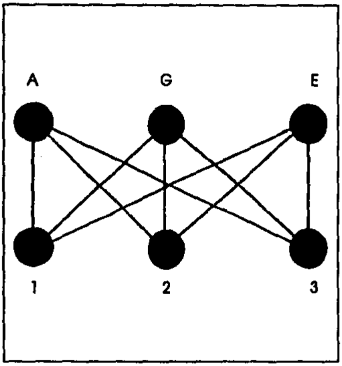
La ilustración muestra tres plantas abastecedoras. Una de agua, la otra de gas y la última de electricidad. Exactamente enfrente se encuentran tres casas las cuales ocupan los servicios de cada una de las tres plantas. Los propietarios de cada una de las casas necesitan acudir con frecuencia a las tres plantas puesto que tienen que pagar por los servicios que reciben. Esta sería una situación común si los propietarios de las casas no se odiaran a muerte, por lo cual para evitar cualquier posible encuentro entre ellos es necesario construir caminos de cada una de las casas a cada una de las plantas sin que ningún par de estos tengan algún punto en común. ¿ Será posible que se construyan los nueve caminos sin ningún cruce entre ellos ?



Para solucionar este problema se antoja inmediatamente, por las características que presenta, pensarlo como un problema de Teoría de Gráficas. Resulta realmente sencillo establecer el modelo para la situación de la siguiente forma:

Representemos cada una de las plantas abastecedoras y las casas mediante un vértice. Por lo cual la gráfica correspondiente tendrá únicamente seis vértices. Cada uno de los caminos que deben construirse entre las plantas y las casas será representado por una arista.

Sin tomar en cuenta por el momento la condición que prohibe el cruce de dos caminos tenemos que la gráfica que modela la situación es la siguiente:

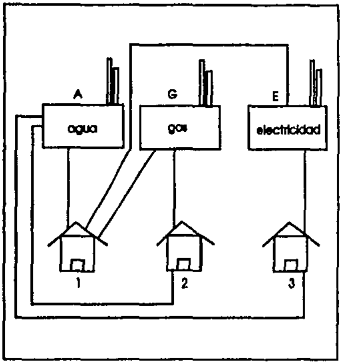


Esta es una gráfica de características muy particulares las cuales han sido objeto de estudio, por los estudiosos de la Teoría de las gráficas, durante algún tiempo.

Se trata de una gráfica cuyos vértices pueden ser agrupados en dos conjuntos con la particularidad de que ninguna pareja de vértices pertenecientes a un mismo conjunto es adyacente entre sí, pero cada vértice de uno de estos conjuntos es adyacente a todos los vértices que se encuentran en el otro conjunto. A este tipo de gráficas se les denomina gráficas *bipartitas completas* y se les representa con el nombre de $K_{m,n}$ donde m y n son números naturales donde m corresponde al número de vértices en uno de los conjuntos y n al número de vértices del otro conjunto.

Por lo tanto la gráfica correspondiente al problema que nos ocupa resulta ser $K_{3,3}$.

Entonces nuestro problema será encontrar una forma de dibujar $K_{3,3}$ sin que ninguna de sus aristas se cruce. Uno de entre muchos intentos de realizar esta tarea es el que se muestra en seguida:



En este intento podemos darnos cuenta que es imposible trazar una arista que una al vértice E con el 2 sin cruzar alguna otra arista.

Algunas propiedades de las gráficas están relacionadas con las superficies sobre las cuales se dibujan. Recordemos que existen diferentes tipos de superficies y no únicamente el plano; por mencionar algunos tenemos la esfera, el toro, los paraboloides, la banda de moëbious, etc. Una de estas propiedades resulta ser la planaridad y es precisamente dicha condición la que se requiere para la solución de nuestro problema.

Decimos que una gráfica es plana si está dibujada en el plano de manera tal que sus aristas sólo se intersectan en vértices de la gráfica misma.[1]

Una curva de Jordan es una curva cerrada simple. El teorema de la curva de Jordan dice lo siguiente: Si J es una curva de Jordan en el plano, cualquier línea que una a un punto del interior de J con otro en el exterior de J, debe cruzar la curva J en algún punto.
1

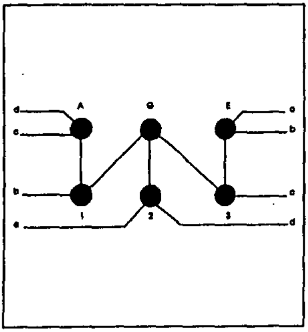
[1] Una Introducción a la Teoría de Gráficas, Curcó Cobos Ma. del carmen, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., Vínculos Matemáticos No.165, 1989.

Podemos identificar en la figura anterior al ciclo G,1,A,3,G como una curva de Jordan, el vértice 2 resulta entonces un punto interior de J y el vértice E es un punto exterior de J por lo tanto cualquier línea que pretenda unir E con 2 deberá cortar al ciclo en algún punto violando la condición pedida.

Con base en el teorema de la curva de Jordan se puede probar que $K_{3,3}$ no es una gráfica plana y por lo tanto nuestro problema no tiene una solución con las características solicitadas.

Una alternativa consiste en cambiar la superficie en la cual se dibuja la gráfica, es decir utilizar una superficie que no sea el plano.

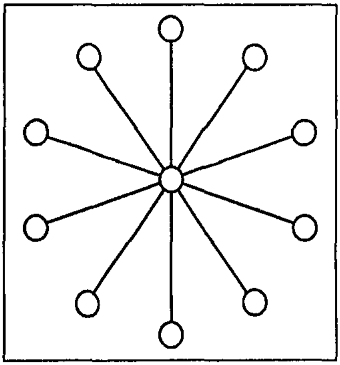
La superficie sobre la cual se puede dibujar $K_{3,3}$ sin que sus aristas se crucen es la llamada Banda de Möbius, esta superficie puede ser construida fácilmente con una tira de papel, dando media vuelta a uno de sus extremos y pegándolo con el otro. Esta banda tiene la propiedad de tener un único lado, es decir que se puede recorrer toda la banda sin pasar nunca por el borde. En la figura que se muestra a continuación presentamos una solución construida en la banda de möbius:



Aunque esta solución de dibujar $K_{3,3}$ en la banda de moebius no representa una solución para el problema de las casas nos induce a pensar que una posibilidad se encuentra en una superficie diferente al plano, podría tratarse entonces de construir un puente para evitar el cruce de dos caminos.

ESTRELLA NUMÉRICA

1) Se pueden acomodar los números del 1 al 11 en los círculos de manera que la suma de los tres números que se encuentran en cada línea recta sea siempre la misma ?



Solución:

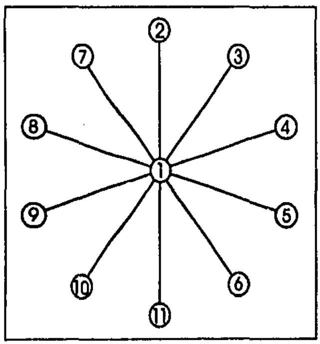
a) Una primera solución para este juego la encontramos mediante la observación siguiente:

En la sucesión

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

podemos formar 5 parejas de números cuya suma sea 13 asociándolos como se muestra a continuación:

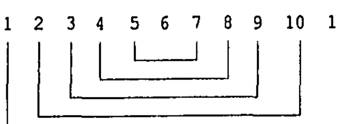
el número 1 que queda sin pareja será el elemento que se colocará en el círculo central, y haciendo corresponder a cada una de las parejas formadas una línea recta de la figura obtenemos la solución:



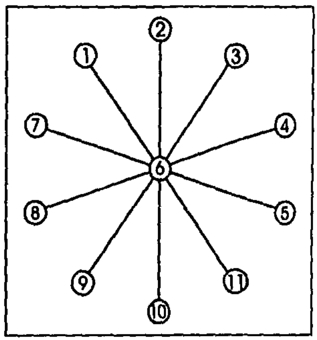
La suma de los tres números contenidos en cualquiera de las líneas rectas es 14 en esta solución.

Es importante notar que el elemento 1 que ocupó el lugar central en la solución también es el primer elemento en la sucesión de números

b) Una segunda solución la obtenemos al formar parejas de números, cuya suma sea 12, en la forma que se muestra a continuación:

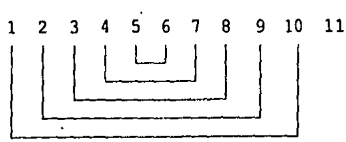


En este caso el elemento que ocupará el círculo central en la figura será el número 6 que se encuentra a la mitad de la sucesión.



Para esta solución la suma de los tres números que se encuentran en cualquiera de las rectas es 18.

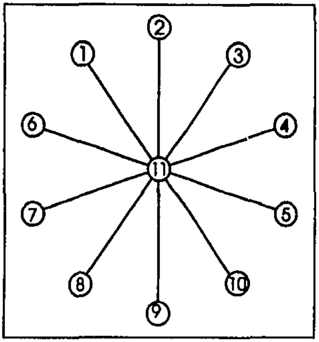
c) La tercera (y última) solución la obtenemos al considerar al último elemento de la sucesión, 11, como el elemento central en la figura, de esta forma las parejas, cuya suma será 11, estarán asociadas como se muestra a continuación:



Para este caso la suma de los tres números de cualquiera de las rectas es 22.

Notemos que el elemento central en esta solución corresponde al 11, último elemento de la sucesión.

La solución se presenta en la figura a la derecha:

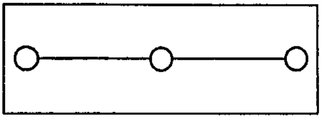


La posibilidad de encontrar soluciones para este juego depende de los números que se tratan de ubicar en los círculos. Podemos observar, en este caso, que se trata de una sucesión finita de números naturales con un número impar de términos consecutivos, lo cual permite que exista cierta simetría entre los elementos que la conforman dando lugar a las tres diferentes formas de encontrar parejas de números cuya suma es constante.

Como las soluciones dependen de la sucesión numérica, y sabemos que existen una infinidad de estas sucesiones, tenemos por lo tanto la posibilidad de construir una infinidad de juegos con esta misma estructura con sólo aumentar o disminuir el número de rectas en la figura que se tiene como base.

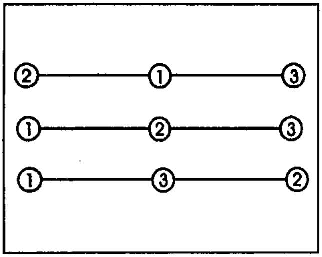
Construyamos el caso más pequeño, es decir, el caso en el que se tiene únicamente una recta en la figura

La sucesión para este caso tiene solamente tres elementos:
1, 2, 3.

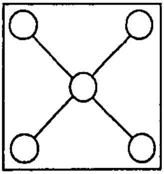


Las soluciones son triviales, ya que no se tienen más rectas con las cuales comparar la suma. Aunque si se pueden obtener las tres diferentes soluciones que corresponden a ubicar el primer elemento, el elemento medio, y el último elemento de la sucesión, en el círculo central.

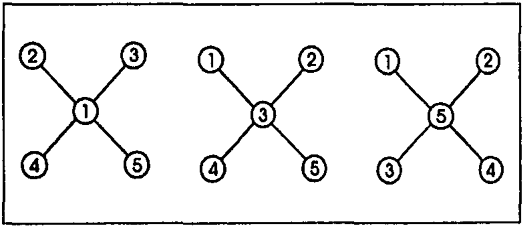
La suma de los tres números en la única recta es 6 sin importar cual de los elementos aparece en el círculo central.



El caso siguiente corresponde a la figura que posee dos líneas rectas y la sucesión 1, 2, 3, 4, 5 :

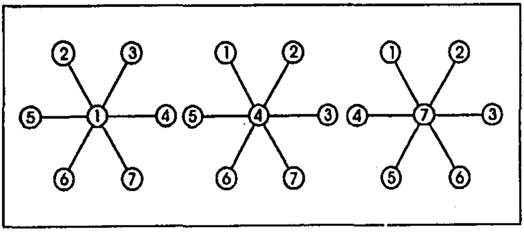


las soluciones se construyen en forma análoga al ejemplo inicial, es decir se toma como elemento central al 1 para la primera solución, al elemento medio, 3, para la segunda solución y al último elemento, 5, para la tercera solución, construyendo en cada caso las parejas correspondientes en la forma descrita.



La suma de los números de cualquier recta es 8 en la primera solución, 9 en la segunda y 10 en la tercera.

El caso con tres rectas y la sucesión 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 es el último que desarrollamos explícitamente y sus tres soluciones se presentan en la figura a continuación:



La suma de los tres números en cualquiera de las rectas es 10 en la primera solución, 12 en la segunda y 14 en la tercera.

Podemos decir en general que en el caso que tengamos la sucesión 1, 2, 3, 4, ..., n-1, n (con n impar) tendremos una figura con (n-1)/2 líneas rectas y sus soluciones tendrán la forma descrita anteriormente con las sumas siguientes en cada recta:

a) Para 1 en el círculo central (primera solución) tendremos:

$$\begin{array}{rl} n+2 & \text{en cada pareja} \\ +\quad 1 & \text{en el centro} \\ \hline n+3 & \end{array}$$

b) Para el elemento medio (n+1)/2 en el círculo central (segunda solución) tendremos:

$$\begin{array}{rl} 1+n & \text{en cada pareja} \\ +\ (n+1)/2 & \text{en el centro} \\ \hline \dfrac{3(n+1)}{2} & \text{siempre es un entero ya que como n es impar n+1 es par y divisible entre 2.} \end{array}$$

c) Para n en el círculo central (tercera solución) tendremos:

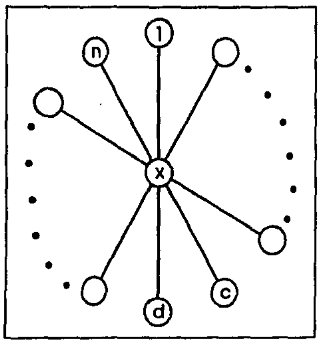
$$\begin{array}{rl} (n-1) + 1 & \text{en cada pareja} \\ +\qquad n & \text{en el centro} \\ \hline 2n & \end{array}$$

Demostraremos ahora que existen, para cualquier caso de este juego, únicamente las tres soluciones a las que se ha hecho referencia desde el inicio:

Tomemos el caso general como aquel en el que se considera la sucesión 1, 2, 3, ..., n.

Supongamos que x es el elemento de la sucesión que se encuentra en el centro de una solución y que $x <> 1$, $x <> n$ y $x <> (n-1)/2$

Sean c,d elementos de la sucesión con $c>1$ y $d<n$



Como n y 1 no están en el centro existen en la solución las rectas cuya sumas son $x + n + c$ y $x + 1 + d$

$x + n + c = x + 1 + d$ por estar en la solución, entonces se debe cumplir que $n + c = 1 + d$.

Pero como $d < n$ entonces $-d > -n$ y como $c > 1$

sumando ambas desigualdades $c-d > 1-n$

de aquí que $c + n > 1 - d$ con lo cual tenemos una contradicción.

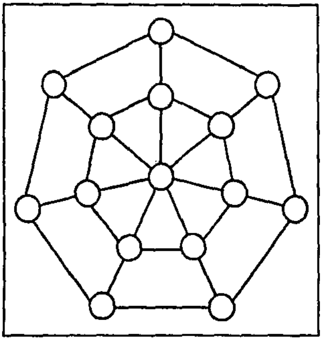
Por lo tanto concluimos que si existen soluciones para el juego estas deben tener a 1, a n ó a $(n-1)/2$ como números centrales.

RUEDA NUMÉRICA

Coloque correctamente los números enteros desde 0 hasta 14 en los círculos de la rueda de tal forma que se cumplan las condiciones siguientes:

a) la suma de los números en cada uno de los siete radios del círculo formado por el eptágono exterior debe ser la misma.

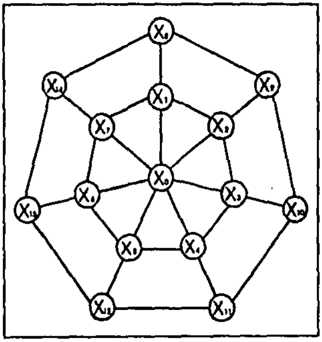
b) los siete números contenidos en los círculos del eptágono externo deben sumar el doble de los siete números contenidos en los círculos del eptágono interno.



Para encontrar la solución a este problema asignaremos, sin pérdida de generalidad, una variable a cada uno de los círculos de la rueda de tal forma que éstas representen a los números que deben estar allí contenidos. Procediendo de esta manera tendremos 15 variables $X_0, X_1, \ldots, X_{13}, X_{14}$

Para cumplir con la condición a) tendremos que en base a la figura anterior se deberán de cumplir las ecuaciones que se muestran a continuación:

(1) $X_0 + X_1 + X_8 = C$
(2) $X_0 + X_2 + X_9 = C$
(3) $X_0 + X_3 + X_{10} = C$
(4) $X_0 + X_4 + X_{11} = C$
(5) $X_0 + X_5 + X_{12} = C$
(6) $X_0 + X_6 + X_{13} = C$
(7) $X_0 + X_7 + X_{14} = C$
donde C es la constante deseada en la suma de cada radio.



Como $X_i \in Z$ y $0 \le X_i \le 14$ con $i = 0, 1, \ldots, 14$ por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{14} X_i = \sum_{i=1}^{14} i = \frac{i(i+1)}{2} = \frac{14(15)}{2} = 105$$

Sumando las ecuaciones (1) hasta (7) y asociando adecuadamente tenemos,

$$7X_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{13} + X_{14} = 7C$$

como $\sum_{i=0}^{14} i = 105$ sustituyendo en la ecuación anterior

$$6X_0 + 105 = 7C \rightarrow C = \frac{105 + 6X_0}{7}$$

la constante C debe ser un número entero ya que es la suma de enteros por lo cual

$$C = \frac{105}{7} + \frac{6X_0}{7} = 15 + \frac{6X_0}{7}$$

por lo tanto para que $\frac{6X_0}{7}$ sea un entero con $0 \le X_i \le 14$ existen solamente tres opciones,

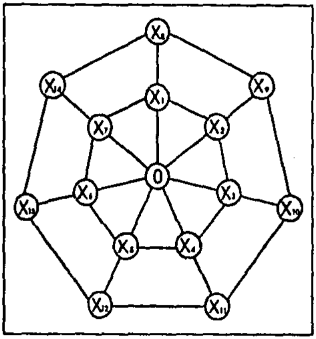
i) $X_0 = 0$ para la cual $C = 15$ ó
ii) $X_0 = 7$ para la cual $C = 21$ ó
iii) $X_0 = 14$ para la cual $C = 27$

Trataremos de hallar soluciones para cada caso, comenzando por el caso *i)*:

Para $X_0 = 0$ observamos que

$$C = 15 + \frac{6X_0}{7} = 15 + 0 = 15$$

por lo tanto la suma en cada uno de los radios deberá ser 15 (condición a).



Y tomando en cuenta la condición b) se debe cumplir que :

$$1)\cdots X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7=a$$

$$2)\cdots X_8+X_9+X_{10}+X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=2a$$

sumando 1) y 2)

$$\sum_{i=1}^{14} i=3a\rightarrow 105=3a\rightarrow a=35$$

por lo tanto los números en la rueda interna deben sumar 35 y los números sobre la rueda externa deben sumar 70, por lo cual las posibilidades de satisfacer la condición b) estarán dadas por aquellas combinaciones de 7 números tomados de entre 1 y 14 y que sumen 35.

Con la ayuda del programa I encontramos que de entre las 3432 combinaciones posibles de 14 números tomados en grupos de 7 sólo las 15 que se enlistan a continuación suman 35:

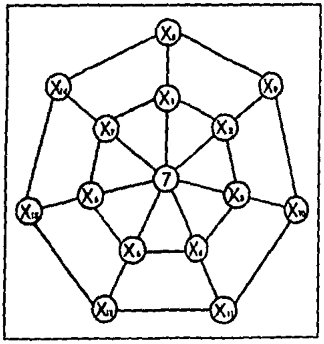
1) 2,3,4,5,6,7,8	2) 1,2,3,5,7,8,9	3) 1,2,4,5,6,8,9
4) 1,3,4,5,6,7,9	5) 1,2,3,4,6,9,10	6) 1,2,3,4,7,8,10
7) 1,2,3,5,6,8,10	8) 1,2,4,5,6,7,10	9) 1,2,3,4,5,9,11
10) 1,2,3,4,6,8,11	11) 1,2,3,5,6,7,11	12) 1,2,3,4,5,8,12
13) 1,2,3,4,6,7,12	14) 1,2,3,4,5,7,13	15) 1,2,3,4,5,6,14

todas estas combinaciones cumplen con la condición b) ya que la suma de sus elementos es 35, por lo cual deberán pertenecer a la rueda interna, pero necesitamos ahora seleccionar de entre ellas las que puedan satisfacer simultáneamente la condición a) es decir debemos tomar cada uno de los números contenidos en las combinaciones y buscar su pareja correspondiente en la rueda externa, es decir, aquel con el que sume 15.

Podemos afirmar que si alguna de estas combinaciones posee una pareja de elementos cuya suma sea 15 esta combinación no puede ser una solución, ya que esto implica que dichos elementos deberían estar en la rueda interna y en la externa a la vez.

Por ejemplo en la combinación 1) 7 + 8 = 15 por lo tanto 7 está en la rueda interna puesto que pertenece a la combinación y su diferencia con 15 es 8 precisamente, que también está en la combinación y por consiguiente en la rueda interna, como 7 y 8 no pueden pertenecer a la rueda interna y a la externa al mismo tiempo resulta que la combinación 1) no puede ser solución.

Tomando en cuenta la consideración anterior podemos descartar 14 de las 15 posibles combinaciones satisfaciendo las condiciones a) y b) únicamente la combinación número 11, que es realmente la única solución para este caso.



Caso ii) Para $X_0 = 7$

Tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{14} i = \sum_{i=1}^{14} i - X_0 = 105 - 7 = 98$$

por lo tanto si sumamos (1) ... $X_1 + X_2 + ... + X_7 = a$
con (2) ... $X_8 + X_9 + ... + X_{14} = 2a$

tendremos :

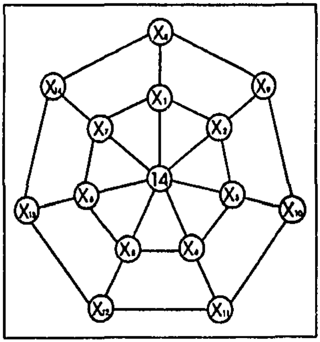
$$\sum_{i=1}^{14} i = 3a \rightarrow 98 = 3a \rightarrow a = \frac{98}{3} \rightarrow a = 32.66...$$

El valor de a no es entero, lo cual implica que no existe una combinación de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14 que cumpla con la condición b) y por lo tanto no hay solución posible para este caso.

Para el caso $X_0 = 14$

Tenemos que :

$$\sum_{i=0}^{14} i = \sum_{i=1}^{14} i - X_0 = 105 - 14 = 91$$



de la misma forma que en el caso anterior:

$$91 = 3a \rightarrow a = \frac{91}{3} \rightarrow a = 30.333...$$

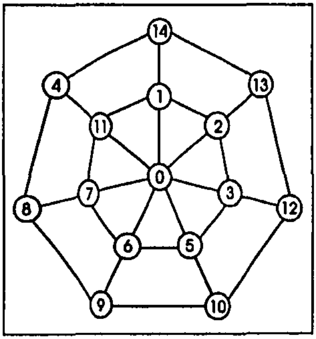
como el valor de a no es entero no existe una combinación de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13 que satisfaga la condición b) por lo tanto tampoco existe solución para este caso.

Una vez que hemos analizado las tres posibilidades para la solución de este problema, llegamos de inmediato a la conclusión de que la solución hallada en el caso i), y que presentamos a continuación, es la única posible.

Solución:

a) la suma en cada uno de los radios es 15.

b) la suma de los números en el eptágono externo es 70 y la suma de los números en el eptágono interno es 35, exactamente la mitad.

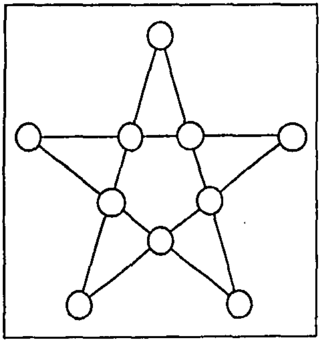


ESTRELLAS MÁGICAS

Una estrella mágica es un polígono cerrado en forma de estrella al cual se le han asociado números en cada uno de sus vértices de tal forma que la suma de los números en cada lado del polígono es constante. Debemos aclarar que se entiende por un vértice al punto de intersección entre cualesquiera dos lados del polígono.

El polígono más simple para formar una de estas estrellas es el llamado Pentagrama (o estrella de cinco picos), en los círculos que se han dibujado en cada uno de sus vértices se deberán colocar los números del 1 al 10.

¿ Será posible construir el Pentagrama mágico ?



Antes de empezar a ensayar posibles soluciones es importante tratar de conocer la llamada constante mágica, es decir la suma que deberá aparecer en cada uno de los lados, esto nos permitirá buscar la solución en una dirección más acertada.

Para calcular la constante mágica observemos lo siguiente:

1) La suma de los números 1 al 10 es:

$$\sum_{i=1}^{10} i = \frac{10x11}{2} = 55$$

2) Como cada vértice pertenece a dos lados diferentes, la suma de los números que aparecen en los cinco lados es 55 x 2 = 110.

por lo tanto,

3) La suma de los cuatro números en cada lado será $\frac{110}{5} = 22$

que es, para este caso, la constante mágica.

En este momento podemos tratar de hallar alguna solución ensayando combinaciones de cuatro números, entre 1 y 10, cuya suma sea 22. Debemos de encontrar cinco de dichas combinaciones y colocarlas en los vértices señalados.

Hemos hecho la observación de que cada uno de los vértices pertenece a exactamente dos líneas, por lo cual podemos considerarlos indistintamente, es decir que para asignar inicialmente un número a alguno de los vértices podemos hácerlo sobre cualquiera de ellos sin que esto afecte la posible solución.

Fijemos nuestra atención en el número 1 y ubiquémoslo en cualquiera de los vértices.

Construyamos ahora las combinaciones de cuatro números en las cuales participe el 1 y cuya suma de elementos sea 22.

Sigamos un proceso ordenado en la construcción de tales combinaciones:

a)1,2,9,10	e)1,4,8,9
b)1,3,8,10	f)1,5,7,9
c)1,4,7,10	g)1,6,7,8
d)1,5,6,10	

Consideremos ahora las posibles combinaciones de 4 números cuya suma de elementos sea 22 en las cuales participe otro de los números pero sin que en éstas intervenga el 1, tomemos por ejemplo al 10:

h)2,3,7,10
i)2,4,6,10
j)3,4,5,10

las combinaciones a,b,c y d indican que el 1 y el 10 pertenecen a vértices en una misma línea de la estrella, como el 1, al igual que los otros números, participa en otra línea simultáneamente tenemos diferentes posibilidades.

Por ejemplo, si se tiene la combinación a) en la solución se debe tener también la combinación g), puesto que en dos combinaciones sólo se puede repetir un elemento. Con este criterio formamos parejas de combinaciones factibles:

a) y g) pueden estar en la solución.
b) y f) " "
d) y e) " "
c) no puede estar en la solución.

Si consideramos la pareja a) y g) y tomando en cuenta que el elemento 10 debe estar en otra de las líneas restantes, es decir que no contenga al 1, podemos encontrar estas combinaciones que son únicamente h), i) y j). Pero podemos observar también con facilidad que con ninguna de éstas podríamos obtener una solución, puesto que se tienen más de un elemento común en alguna línea o bien no se tiene ninguno.

Con la pareja b) y f) sucede exactamente lo mismo, no es posible acomodarlas con h), i) ó j) para lograr una solución.

De la misma manera resulta imposible asociar alguna de las combinaciones h), i) ó j) con la pareja d) y e) para tratar de obtener una solución.

Como con ninguna de las combinaciones en las que aparece el 1 hemos logrado construir una solución y como este análisis se pudo haber realizado con cualquiera de los otros números concluimos que no el problema planteado no tiene solución para los números propuestos.

Otros problemas alternativos consisten en identificar si para algún otro conjunto de números se puede hallar una solución en la misma estructura o si con el mismo conjunto de pueden tener soluciones en estructuras similares.

PIRÁMIDE DE CARTAS

El truco matemático con cartas que presentamos a continuación se debe al mago Harry Lorayne. El truco se realiza con una baraja francesa de la cual se han eliminado las cartas con figuras (J,Q,K,joker) y los dieces. Se pide a una persona del público que elija cinco cartas y que las coloque destapadas formando una fila horizontal, esta fila será la base de la pirámide que el mago construirá posteriormente. Una vez que se ha colocado la base de la pirámide el mago toma una carta de entre el montón restante y la coloca tapada en lo que será la cúspide de la pirámide.

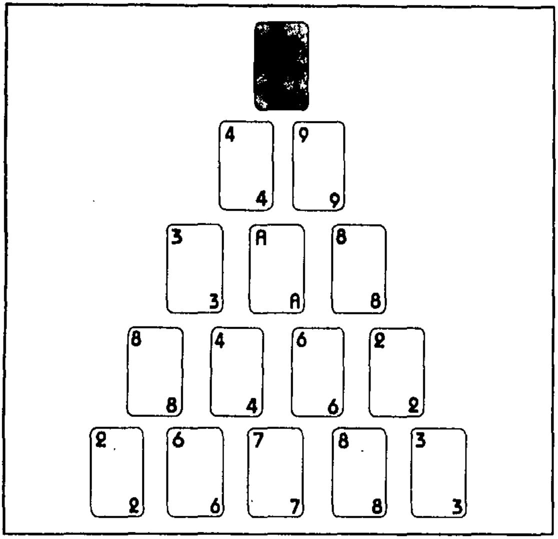
Una vez terminados estos pasos se procede a construir el cuerpo de la pirámide de la forma siguiente: Cada par de cartas adyacentes de la fila inicial se suman por el procedimiento de "eliminar los nueves", si la suma es mayor que 9 se resta este número, pero la operación se puede resolver más fácilmente si se suman los dígitos de la suma. Por ejemplo, si tenemos en la fila inicial un 7 y un 6 el resultado de la suma será 13 por lo tanto 1 más 3 da como resultado 4 que será el valor de la carta que deberá ser colocada justamente arriba de ambas cartas. Se procederá de igual forma con todos los pares de cartas adyacentes para formar así una segunda fila que estará compuesta por cuatro cartas. Se sigue con este procedimiento para obtener una tercera fila con tres cartas, una cuarta fila con dos cartas y la carta previamente seleccionada por el mago constituirá la quinta y última fila con una carta.

Lo sorprendente del truco radica en que al momento de revelar el número de la carta oculta éste coincide con la misma regla con la que fue construida la pirámide, es decir corresponde a la "suma con eliminación de nueves" de las dos cartas de la cuarta fila.

Presentamos, en la figura siguiente, un ejemplo de una pirámide construida con estas reglas.

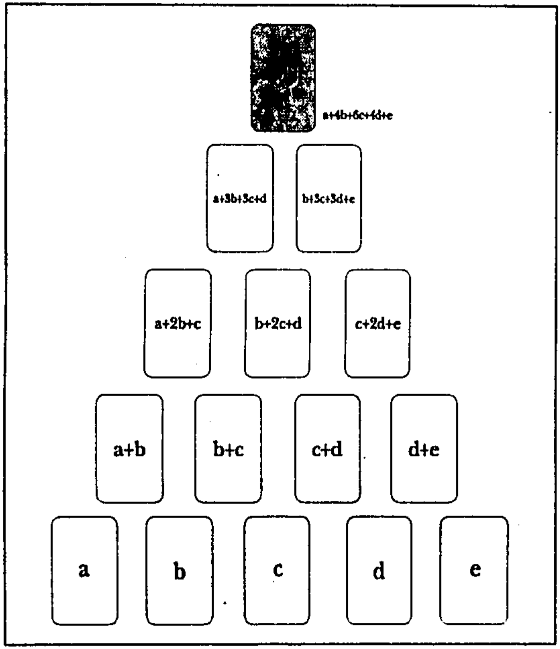
Como se puede observar cada carta, con excepción de las cinco que forman la base, corresponde a la suma (con eliminación de nueves) de las dos cartas que se encuentran exactamente abajo de ella.

La carta oculta que se encuentra en la cúspide deberá tener el valor de 4 para que el truco esté bien realizado.



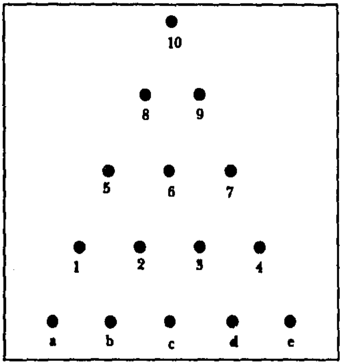
El truco presentado tiene un fundamento matemático interesante, consiste precisamente en saber elegir la carta que permanecerá oculta y que no rompa la regla de construcción de la pirámide. Es lógico pensar que el número de la carta en la cima pudiera tratarse del resultado de la suma con eliminación de nueves de las cinco cartas de la base, pero puede comprobarse fácilmente que este no es el método de elección que se debe seguir.

El método de elección está basado en la siguiente observación:
Tomemos la pirámide y representemos los valores de las cartas de la base con las letras a,b,c,d y e. Por lo tanto si consideramos la suma normal tendremos una pirámide de la siguiente forma:



Como podemos observar en la construcción de la pirámide anterior el valor de la carta oculta es a + 4b + 6c + 4d + e, los coeficientes son los números 1,4,6,4,1 que corresponden, como podemos fácilmente comprobar, al número de caminos con los que se puede alcanzar la carta de la cúspide desde cada uno de las cartas de la base si consideramos que los caminos solamente permiten desplazamientos ascendentes. Mostramos a continuación los caminos a los cuales nos referimos:

Representamos cada carta con un vértice y numeramos cada uno de los vértices que obtenemos etiquetando nuevamente los elementos de la base con las letras a,b,c,d y e como hicimos anteriormente:



Por lo tanto para llegar por un camino exclusivamente ascendente del vértice "a" a la cima, marcada con el vértice 10, tenemos sólo la opción (a,1,5,8,10) por lo cual el valor "a" sólo aparece considerado una vez en la suma final (ya sea una suma normal o una suma con eliminación de nueves o módulo nueve como es definida por los matemáticos). Para alcanzar el vértice 10 desde el punto "b" tenemos las opciones ascendentes (b,1,5,8,10), (b,2,5,8,10), (b,2,6,8,10) y (b,2,6,9,10) razón por la cual el valor "b" está considerado cuatro veces en la suma final. Tenemos las siguientes 6 opciones ascendentes para llegar a 10 desde "c": (c,2,5,8,10), (c,2,6,8,10), (C,2,6,9,10), (C,3,6,8,10), (C,3,6,9,10) y (C,3,7,9,10). El valor "c" está considerado entonces 6 veces en la suma que da como resultado el valor del vértice 10. De forma análoga se obtienen los caminos (d,3,6,8,10), (d,3,6,9,10), (d,3,7,910) y (d,4,7,9,10) para el vértice "d" y la única opción (e,4,7,9,10) para el vértice "e".

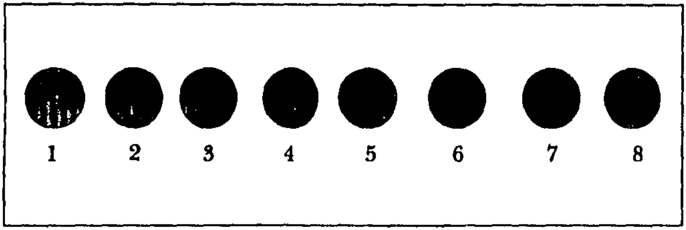
Los números 1,4,6,4,1 corresponden también al cuarto renglón del famoso "triángulo de Pascal" que permite una generalización de este truco para formar una pirámide con cualquier número de cartas en la base.

La forma de elegir la carta más alta (en cuanto a la posición) de la pirámide será entonces la siguiente: se multiplican los números que presentan las cartas iniciales por su correspondiente posición en la sucesión 1,4,6,4,1 y se efectúa la suma con eliminación de nueves de los productos obtenidos, de esta forma se sabe cual será la carta que deberá ir en la cima de la pirámide desde el inicio. Para facilitar la elección de la carta, estos cálculos pueden irse haciendo parcialmente sumando (con eliminación de nueves) el número de la primera carta, de izquierda a derecha o viceversa, con el resultado de la multiplicación del número de la siguiente carta por 4, y así sucesivamente, hasta obtener como último resultado el valor de la carta que permanecerá oculta. Es importante notar que si el resultado final es un número mayor que 9, por ejemplo 17, se debe de restar 9 a este número, o bien sumar sus dígitos, para poder colocar una de las cartas con las que se está trabajando.

PARES DE MONEDAS

Uno de los juegos de monedas más antiguos y mejores consiste en colocar en fila ocho piezas sobre la mesa y tratar de agruparlas, mediante cuatro movimientos, en cuatro montones de dos monedas cada uno.

Hay una condición: en cada movimiento la moneda debe "saltar" exactamente sobre otras dos (en cualquier dirección) y aterrizar sobre la siguiente moneda sencilla. El salto puede hacerse sobre dos monedas sencillas o sobre una pareja apilada.



Para encontrar una solución a este juego numeramos las monedas de la 1 a la 8 como se muestra en la figura anterior. Probaremos las diferentes posibilidades para movimientos iniciales con el fin de encontrar aquellos que lleven a las posiciones buscadas. Simplificaremos la situación considerando la simetría que presenta la colocación inicial de las monedas, es decir que cada movimiento puede ser reflejado en dirección inversa, por lo cual bastará analizar en uno sólo de los sentidos en que es posible hacer movimientos.

a) Si hacemos saltar la moneda 1 sobre la 2 y la 3, para ser colocada sobre la 4 estaremos dejando a la moneda 2 sin la posibilidad de ser aparejada con cualquiera otra, ya que ésta no podrá saltar sobre la pareja 4,1 ni aún haciendo previamente saltar la 3 sobre dicha pareja para ser colocada sobre la 5. Por lo tanto este movimiento inicial no puede llevar a la solución.

b) Si hacemos saltar la moneda 2 sobre la 3 y la 4 para ser colocada sobre la 5 estamos dejando a la moneda 1 sin la posibilidad de ser alcanzada o de alcanzar a alguna otra moneda.

Observemos que la moneda 1 no puede saltar a la 3 y la 4 ya que tendria que ser colocada sobre la 5 que ya tiene a la 2 como su pareja. La moneda 3 no debe saltar tres monedas por lo tanto no puede saltar a la 4 y a la pareja 5,2. La moneda 4 puede saltar a la pareja 5,2, cayendo sobre la 6, pero en este caso la moneda 7 ya no podrá saltar hacia ningún lado. Por lo tanto este movimiento inicial no nos conduce a encontrar la solución.

c) Si hacemos saltar la moneda 3 sobre la 4 y la 5 para ir a caer sobre la 6 tenemos únicamente dos posibilidades para continuar moviendo:

- Podemos mover la moneda 1 sobre la 2 y la 4 para caer sobre la 5, pero esto impide cualquier movimiento posterior.

- Podemos mover la moneda 7 sobre la pareja 6,3 para caer sobre la 5, pero esto impide cualquier movimiento posterior.

Por lo tanto este movimiento nos deja claro que no es recomendable iniciar así para hallar la solución.

d) Si hacemos saltar la moneda 4 sobre la 5 y la 6 para caer sobre la 7 tenemos varias posibilidades para un segundo movimiento:

- Si pretendemos mover la moneda 1 sobre la 2 y la 3 para caer sobre la 5 dejamos a la moneda 2 inalcanzable, por lo que este movimiento resulta inútil.

- Si movemos la moneda 2 sobre la 3 y la 5 para caer sobre la 6 estamos dejando aislada a la moneda 8. De aquí que no es conveniente efectuar dicho movimiento

- Si hacemos saltar la moneda 6 sobre la pareja formada por la 4 y la 7 para caer sobre la 8 tendremos la posibilidad de realizar un movimiento más que consistirá en formar la pareja 1,6, pero tampoco nos lleva a la solución.

- Si desplazamos la misma moneda 6 en sentido contrario, es decir sobre la 5 y la 3 para caer sobre la 2 observamos que la solución se presenta en dos movimientos más, ya que tendremos una pareja previamente formada entre dos monedas sencillas, por lo cual basta que cualquiera de las sencillas salte a la pareja que tiene junto para formar una nueva pareja.

Por ejemplo: la moneda 1 puede saltar a la pareja 6,2 para caer sobre la moneda 3. Y la moneda 5 puede saltar a la pareja 4,7 para caer sobre la moneda 8. Esta es la solución buscada. Es decir se formaron, observando las condiciones, cuatro parejas de monedas en cuatro movimientos.

La solución presentada no es única puesto que podemos encontrar otra que resulta de efectuar movimientos semejantes en el sentido inverso obteniendo igual resultado.

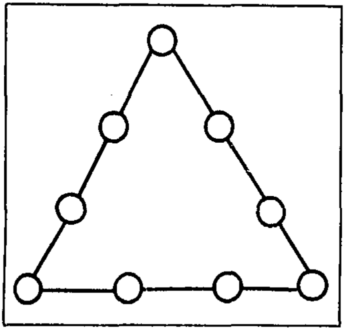
Este juego se puede generalizar a $2n$ monedas para ser aparejadas en n movimientos, debido a la observación siguiente:

Si tenemos 10 monedas, por ejemplo, podemos en un primer movimiento, formar una pareja en cualquiera de los extremos (haciendo saltar la moneda 7 sobre la 8 y la 9 cayendo sobre la 10) quedándonos nuevamente el problema para 8 monedas que ya se ha resuelto en cuatro movimientos, por lo tanto el juego para 10 monedas se resuelve en 5 movimientos.

Para 12 monedas usamos la misma técnica, formamos en dos movimientos dos parejas en los extremos quedándonos nuevamente el problema de 8 monedas. Por lo tanto este problema se resuelve en 6 pasos. Y así sucesivamente.

EL TRIÁNGULO MÁGICO

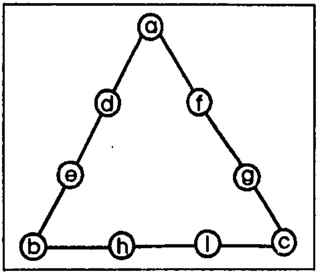
¿Será posible acomodar los números 1,2,3,4,5,6,7,8,9 en los círculos que forman el triángulo mostrado en la figura siguiente, de tal manera que la suma de los cuatro números en cada uno de los lados sea la misma ?



La búsqueda de una solución para este problema es en realidad sencilla debido a que el número de círculos en cada lado es relativamente pequeño. Podríamos hallar fácilmente una solución por el método de ensayo y error, pero muy probablemente esto no sucederá en el primer intento, por lo que analizaremos las condiciones dadas por el enunciado del problema para determinar si existe una o más soluciones y cuales son éstas.

Al enlistar los números en el enunciado del problema entendemos que estos deberán ser utilizados sólo una vez en alguno de los círculos.

Con el fin de poder establecer un modelo que represente las condiciones del problema recurriremos al álgebra haciendo corresponder a cada una de las letras a, b, c, d, e, f, g, h, i, uno de los números que deseamos acomodar. La figura a continuación muestra la forma en que se asociaron las letras a los círculos que forman el triángulo.



Notemos que las letras a, b y c fueron asignadas para representar los valores de las esquinas los cuales aparecen en las sumas de dos lados diferentes.

De esta forma podemos decir que la condición de igualdad en la suma a realizar en cada uno de los tres lados está representada por las ecuaciones 1,2 y 3 si consideramos a S como el resultado de dicha suma.

1) $a + d + e + b = S$

2) $a + f + g + c = S$

3) $b + h + i + c = S$

Sabemos que las letras representan a cada uno de los dígitos por lo cual conocemos el valor de la suma de todas ellas es decir,

4) $a+b+c+d+e+f+g+h = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$

aún cuando el orden de los sumandos puede ser diferente.

Sumando y agrupando adecuadamente las ecuaciones 1, 2 y 3 tenemos que,

5) $(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+a+b+c = 3S$

sustituyendo en la ecuación 5 el valor hallado en 4 tenemos,

6) $45 + a + b + c = 3S$ por lo tanto,

7) $a + b + c = 3S - 45$

Esta última ecuación nos dice que la suma de los números que deben estar colocados en las esquinas del triángulo es igual a tres veces la suma de alguno de los lados menos cuarenta y cinco.

Como a, b y c pueden ser cualesquiera de los dígitos podemos asignarles

A) los valores más pequeños 1, 2 y 3 o bien,
B) los valores más grandes 7, 8 y 9

para conocer el rango en el que se encuentra S.

Si tomamos la primera opción tendremos que,

$$a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6 \leq 3S - 45$$

y si consideramos ahora la segunda encontramos que,

$$3S - 45 \leq 24 = 7 + 8 + 9 = a + b + c$$

al juntar ambas desigualdades tenemos finalmente

$$6 \leq 3S-45 \leq 24$$

por lo que al sumar 45 y dividir entre 3 la desigualdad obtenemos que,

$$17 \leq S \leq 23$$

es decir que podemos tener valores para S desde 17 hasta 23.

Revisaremos, para cada uno de los 7 valores de S, las posibilidades de hallar alguna solución, para lo cual también tomaremos en cuenta la suma de los valores de las esquinas.

Las tablas a continuación muestran las diferentes posibilidades de elegir valores en las esquinas a,b,c, para cada uno de los posibles valores correspondientes de S. El proceso para hallar soluciones es el mostrado con el ejemplo siguiente:

Se calcula con el valor de S el correspondiente valor para la suma a+b+c. Si S = 17 entonces calculamos a+b+c:

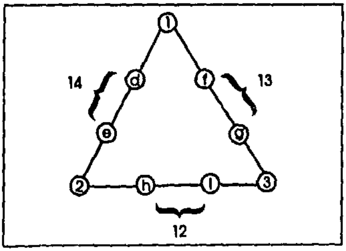
$a + b + c = 3S - 45 = 3(17) - 45 = 51 - 45 = 6$

Se consideran, de entre los dígitos, todas la posibles combinaciones de tres números cuya suma sea a+b+c, 6 en este caso.

La única combinación de tres dígitos cuya suma es 6 es la formada por 1,2 y 3.

Para saber si existe una solución se calcula con los dígitos colocados en las esquinas, como se muestra en la figura, el valor de la suma de los dos números que faltan en cada uno de los lados. Para este caso debemos considerar que d+e = 14, f+g = 13 y h+i = 12.

Analizamos si existen dígitos aún no considerados cuyos valores asociados a cada una de estas letras coincidan con las sumas deseadas y constituyan por lo tanto una solución al problema.



Presentamos todas las posibilidades encontradas a través de las tablas siguientes con el fin de resumir el proceso en cada uno de los 7 casos posibles.

Caso I S = 17 a+b+c = 3(17)-45 = 6									
esquinas				valores en lados					
a	b	c	solución	d	e	f	g	h	i
1	2	3	si	8	6	9	4	7	5
1	2	3	si	9	5	6	7	8	4

Caso II S = 18 a+b+c = 3(18)-45 = 9									
esquinas				valores en lados					
a	b	c	solución	d	e	f	g	h	i
2	3	4	no						
1	3	5	no						
1	2	6	no						

Caso III S = 19 a+b+c = 3(19)-45 = 12									
esquinas			solución	valores en lados					
a	b	c		d	e	f	g	h	i
1	2	9	no						
1	3	8	no						
1	4	7	si	6	8	9	2	5	3
1	4	7	si	9	5	8	3	6	2
1	5	6	no						
2	3	7	si	8	6	9	1	4	5
2	3	7	si	9	5	6	4	8	1
2	4	6	no						
3	4	5	no						

Caso IV S = 20 a+b+c = 3(20)-45 = 15									
esquinas			solución	valores en lados					
a	b	c		d	e	f	g	h	i
4	5	6	sí	9	2	7	3	8	1
4	5	6	sí	8	3	9	1	7	2
2	6	7	no						
3	5	7	sí	8	4	9	1	6	2
1	6	8	no						
2	5	8	sí	9	4	7	3	6	1
2	5	8	sí	6	7	9	1	4	3
3	4	8	no						
1	5	9	sí	8	6	7	3	4	2
2	4	9	no						

Caso V S = 21 a+b+c = 3(21)-45 = 18									
esquinas			solución	valores en lados					
a	b	c		d	e	f	g	h	i
5	6	7	no						
3	7	8	sí	9	2	6	4	5	1
3	7	8	sí	6	5	9	1	4	2
4	6	8	no						
1	8	9	no						
2	7	9	no						
3	6	9	sí	8	4	7	2	5	1
3	6	9	sí	7	5	8	1	4	2
4	5	9	no						

Caso VI S = 22 a+b+c = 3(22)-45 = 21									
esquinas			solución	valores en lados					
a	b	c		d	e	f	g	h	i
6	7	8	no						
4	8	9	no						
5	7	9	no						

Caso VII S = 23 a+b+c = 3(23)-45 = 24									
esquinas			solución	valores en lados					
a	b	c		d	e	f	g	h	i
7	8	9	si	6	2	4	3	5	1
7	8	9	si	5	3	6	1	4	2

Tenemos por lo tanto 18 soluciones diferentes para este problema sin tomar en cuenta las permutaciones posibles en cada caso.

EL JUEGO DEL 15

Un rompecabezas especialmente popular entre los niños que han aprendido a contar es el llamado juego del 15, éste consiste en un tablero cuadriculado (4X4), sobre el cual se encuentran 15 fichas, numeradas con los 15 primeros números naturales,las cuales se pueden deslizar por el tablero con el fin de formar arreglos numéricos de diferentes formas.

El espacio vacío en el tablero hace posible el movimiento de las fichas.

En la figura que a continuación mostramos, las fichas se encuentran ordenadas del 1 al 15 en la llamada posición Horizontal.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Los modelos de este juego que se encuentran a la venta en las tiendas, presentan al reverso seis arreglos numéricos diferentes, cada uno de los cuales es propuesto como una meta. En este apartado pretendemos mostrar que es posible realizar cinco de estos seis arreglos partiendo del Horizontal y que efectivamente no es posible llegar al arreglo al cual se ha llamado adecuadamente el Imposible.

A través de un análisis del juego concluiremos que los arreglos propuestos por los fabricantes de este juguete no tienen en realidad mucho de particular sino que se han considerado estos casos porque los números están dispuestos consecutivamente en alguna dirección especial y propondremos algunos otros arreglos.

En la figura siguiente muestra los ordenamientos a los que nos referimos anteriormente con los nombres que se les han dado.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

HORIZONTAL

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	

VERTICAL

1	3	6	10
2	5	9	13
4	8	12	15
7	11	14	

DIAGONAL

1	2	3	4
12	13	14	5
11		15	6
10	9	8	7

CARACOL

7	8	9	10
6	1	2	11
5	4	3	12
	15	14	13

ESPIRAL

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

IMPOSIBLE

Obtengamos un tablero como el propuesto para este juego. Tratemos de encontrar el número total de arreglos diferentes en los cuales pueden ser ordenados los números que se tienen. Para esto supongamos que las fichas se encuentran fuera del tablero y que pueden ser colocadas arbitrariamente en cualesquiera de los lugares. Para nuestro análisis es conveniente considerar al espacio vacío como la ficha número 16 puesto que siempre ocupa una de las casillas del tablero.

Fijemos nuestra atención en alguna de las 16 casillas del tablero, para esta tenemos exactamente 16 posibles formas de asignarle alguna de las fichas. Una vez que se ha asignado una ficha a tal casilla elijamos otra casilla desocupada y asignémosle otra de las 15 fichas restantes, por lo cual tenemos 16 X 15 formas diferentes de hacer estas dos elecciones. Si realizamos este proceso una vez más tendremos que hay 16 X 15 X 14 formas de elegir tres fichas.

Continuando de este modo hasta agotar todas las fichas vemos que el número de formas diferentes, de ordenar los números en las casillas, corresponde al resultado del producto

16 X 15 X 14 X .... X 3 X 2 X 1

Este producto es llamado 16! (16 factorial) y su valor numérico es 20,922,789,888,000. Notemos que es un número grande de posibilidades, pero ¿ Podríamos llegar a cada una de ellas partiendo de la posición horizontal ?

Para responder a la pregunta anterior tomaremos en cuenta lo siguiente:

Para cambiar de lugar una ficha es necesario que ésta se encuentre al lado de la ficha 16, es decir que pase a ocupar el lugar vacío. Cada uno de los movimientos que se realizan en el juego es en realidad un intercambio de lugar de este tipo, por ejemplo, para lograr la posición c) partiendo de la posición a) fue necesario que las fichas 15 y 16 intercambiaran su lugar (posición b) y después las fichas 11 y 16 intercambiaron sus lugares. Nótese que efectivamente cada movimiento de cualquiera de las fichas es un intercambio de lugar con la ficha 16. Este tipo de intercambio entre dos fichas contiguas es llamado una transposición. Por lo tanto los movimientos realizados para lograr arreglos específicos están formados por sucesiones de transposiciones. Si una sucesión de transposiciones está formada por un número par de éstas decimos que dicha sucesión es par o por el contrario, si está formada por un número impar de transposiciones será denominada impar.

9	10	11	12
13	14	15	16

a

9	10	11	12
13	14	16	15

b

9	10	16	12
13	14	11	15

c

Supongamos que obtuvimos el arreglo que aparece en la figura a continuación a partir del arreglo Horizontal, veamos que la ficha con el número 4 ocupa el lugar que tuviera la ficha 1 en la posición Horizontal. La ficha 5 tiene ahora el lugar de la ficha 2 etc.

4	5	6	7
3	15	16	8
2	13	14	9
1	12	11	10

figura 4

Para expresar todos estos movimientos utilicemos la siguiente representación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Horizontal
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
4	5	6	7	3	15	16	8	2	13	14	9	1	12	11	10	Ejemplo

Decimos que la ficha 1 cambió por la 4, la 2 por la 5, la 3 por la 6, etc..

Una permutación de los elementos de un conjunto es un arreglo de dichos elementos, por lo tanto si consideramos la posición Horizontal de nuestro juego como la posición básica decimos que el ejemplo presentado es una permutación de ésta.

Expresemos esta permutación como el producto de los ciclos que se van formando al seguir un orden secuencial:

(1,4,7,16,10,13,1) X (2,5,3,6,15,11,14,12,9,2) X (8,8)

para este caso tenemos tres ciclos: del 1 llegamos al 4, del 4 al 7, del 7 al 16, etc... hasta llegar nuevamente al 1. El segundo ciclo se inicia en el 2, a partir de éste llegamos al 5, del 5 al 3, etc.. hasta llegar nuevamente al 2. El tercer ciclo lo constituye únicamente el 8, el cual ocupa el mismo lugar en ambos arreglos.

Para llegar al arreglo presentado en el ejemplo anterior fue necesario realizar una sucesión de transposiciones. Las personas que tienen alguna experiencia con el juego notan inmediatamente que un mismo arreglo puede ser logrado de muchas diferentes formas, es decir que la sucesión de transposiciones no es única.

En este momento podemos intuitivamente percibir que una permutación, como el arreglo propuesto, puede ser expresada como el producto de transposiciones. La demostración formal de este hecho y las de otros resultados presentados aquí, pueden ser consultadas en el libro de Daniel I.A. Cohen titulado "Basic Techniques of Combinatorial Theory".

Aunque no podemos saber con exactitud cuantas transposiciones fueron necesarias para lograr el arreglo presentado, si sabemos que todas las representaciones de una permutación como producto de transposiciones tienen la misma paridad, es decir, todas estas representaciones están formadas por un número par de transposiciones o bien por un número impar de ellas.

Una manera fácil de saber si un arreglo ha sido alcanzado en un número par o impar de transposiciones es la siguiente:

Supongamos que en la base del tablero, por debajo de las fichas deslizables, se ha pintado en cada una de las casillas una letra P o bien una I de acuerdo a la paridad del número de transposiciones efectuadas por la ficha 16 para alcanzar cada una de las casillas del tablero. Por lo tanto tendremos la disposición siguiente:

P	I	P	I
I	P	I	P
P	I	P	I
I	P	I	P

figura 5

Veamos que la casilla correspondiente al espacio vacío en la posición Horizontal presenta una P, al realizar un movimiento, es decir la primera transposición, una de las fichas ocupa dicha casilla y el espacio vacío nos permite observar una letra I, si continuamos efectuando transposiciones vamos encontrando alternadamente las letras P e I, no importa cuantas transposiciones realicemos siempre podemos conocer, por la letra en el espacio vacío, si el número de transposiciones efectuadas ha sido Par o Impar para lograr alguna posición.

Ahora bien, para saber si es posible llegar a un arreglo establecido previamente debemos en primer lugar identificar la paridad del número de las transposiciones que fueron realizadas para alcanzar dicho arreglo. Esto lo podemos visualizar fácilmente de la manera descrita en el párrafo anterior.

Sigamos este proceso con el ejemplo mostrado anteriormente:

Determinemos si podemos llegar a partir de la posición Horizontal al arreglo presentado en la figura 4.

Siguiendo el patrón de paridad de la figura 5 vemos que el espacio vacío, ficha 16, permite observar la letra I, por lo cual sabemos que esta ficha logró tal posición sólo después de haber sido efectuadas un número impar de transposiciones.

Analicemos la paridad de los ciclos en que fue descompuesta la permutación:

(1,4,7,16,10,13,1) X (2,5,3,6,15,11,14,12,9,2) X (8,8)

El primer ciclo consta de 7 elementos por lo que se trata de un ciclo Impar. El segundo ciclo está formado por 10 elementos por lo cual se considera Par. El tercer ciclo con dos elementos es Par.

Para calcular la Paridad de la permutación basta con sumar las paridades de cada uno de los ciclos en la forma en la que se suman los números, es decir siguiendo las reglas:

La suma de dos números de igual paridad es Par, La suma de dos números de diferente paridad es Impar.

Por lo tanto en nuestro ejemplo tenemos I + P + P = I
de aquí que al coincidir con la paridad obtenida por la posición del espacio vacío concluimos que si es posible alcanzar tal arreglo partiendo de la posición Horizontal.

Siguiendo este proceso analizaremos el arreglo denominado Imposible.

Partamos de un tablero como el indicado por la figura 5, la letra P mostrada por el espacio nos indica un número par de transposiciones para alcanzar el arreglo Imposible.

La permutación con respecto a la Horizontal es la siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	16

expresándola como el producto de ciclos,

(1,15,1)X(2,14,2)X(3,13,3)X(4,12,4)X(5,11,5)X(6,10,6)X(7,9,7)X(8,8)

su paridad es la siguiente:

I + I + I + I + I + I + I + P = I

la cual no coincide con la paridad mostrada por el espacio vacío. Esta situación nos dice que resulta imposible alcanzar este arreglo.

Con esta metodología podemos analizar los casos propuestos por los fabricantes del juguete y llegaremos a la conclusión de que salvo el imposible sí podemos lograr los demás casos a partir del Horizontal.

Proponemos descubrir si es posible alcanzar desde el Horizontal los siguientes arreglos:

	9	8	1
15	10	7	2
14	11	6	3
13	12	5	4

10	11	15	
4	9	12	14
3	5	8	13
1	2	6	7

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
	15	14	13

UN TRUCO DE ADIVINACIÓN

Presentamos ahora un conocido truco de adivinación que siempre despierta la inquietud de las personas que lo presencian. El objetivo del juego es reunir en uno de los cuartos de una casa a todas las personas que se encuentran en ella, mismas que se encuentran ocupando alguna de las habitaciones a las cuales se les ha asignado un número impar. Después de cada uno de los movimientos que son indicados a los participantes se clausuran algunos cuartos, los cuales sorprendentemente siempre están vacíos. Al final se comprueba que todas las personas han sido reunidas en el último cuarto y ninguna quedó atrapada en un cuarto clausurado.

Una manera para realizar el juego se puede obtener con el material siguiente:

1) Un tablero cuadriculado 3X3.
2) 9 Cartas del tamaño de los cuadros del tablero que puedan ser removidas e identificadas fácilmente.

Tomaremos los nombres correspondientes a las partes de una casa para identificar cada una de las nueve tarjetas, de esta forma tendremos los siguientes cuartos:

1) Comedor	2) Cocina	3) Sala
4) Baño	5) Recámara 1	6) Recámara 2
7) Jardín	8) Cochera	9) Recámara 3

Para iniciar el juego se colocan sobre el tablero cinco de las tarjetas distribuidas de la siguiente forma:

1		3
	5	
7		9

Los números corresponden a cada uno de los lugares a los cuales identifican.

Se pide a cada uno de los participantes que elija secretamente uno de estos lugares.

Una vez que todos han hecho su elección se completa el tablero con las cuatro tarjetas faltantes en sus respectivas posiciones.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

La persona que presenta el truco indica a los participantes deberán realizar, siempre mentalmente, cambios de lugar de diferentes magnitudes, éstos pueden ser efectuados hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo, es decir que sólo podrán ser efectuados en dirección vertical u horizontal.

Podría decirse por ejemplo que todas las personas deberán moverse dos casillas a partir del lugar en el que se encuentran. Por lo cual una persona ubicada en la casilla número 2 podrá pasar a las casillas 6, 4, u 8 efectuando desplazamientos sobre las columnas y los renglones.

Es posible que después de desplazarse de la manera solicitada se haya podido volver a la casilla de la cual se partió, o incluso se puede utilizar la misma casilla más de una vez al efectuar el movimiento pedido.

La condición para poder pasar por un cuarto o establecerse en él es, lógicamente, que éste no haya sido clausurado previamente. Para estar seguros de que esta situación no ocurrirá la persona que presenta el truco debe ir quitando del tablero las tarjetas correspondientes a los cuartos que van siendo clausurados cada vez.

Justificación:

Identificamos en el tablero dos tipos de posiciones, es decir que definimos dos conjuntos de casillas de acuerdo al número que identifica a cada una de ellas. Podemos llamar a las casillas asociadas con los números pares posiciones pares y a las correspondientes a los números impares, posiciones impares.

Identificando la característica mencionada para cada una de las casillas podemos observar en el tablero dicha clasificación. Las casillas marcadas con la letra P corresponden a las posiciones pares y las marcadas con la letra I a las posiciones impares:

I	**P**	**I**
P	**I**	**P**
I	**P**	**I**

Tomando en cuenta esta clasificación notamos que al inicio del juego se pide a los participantes elegir, secretamente, una de entre cinco casillas, las cuales corresponden todas a posiciones impares. Este hecho es fundamental para lograr el éxito del truco, pues a pesar de que no se conoce con certeza la ubicación de cada uno de los participantes se tiene por seguro que todos ellos se encuentran en una posición impar.

Al completar con las cuatro tarjetas faltantes, correspondientes a las posiciones pares, se garantiza la posibilidad de moverse por el tablero.

En este momento todo depende de la concentración de la persona que dirige el juego pues debe indicar el número de cuartos que deben moverse todos los participantes y clausurar al menos alguno de ellos. El número de casillas que se deben desplazar los participantes no se elige de manera azarosa pues debe considerarse lo siguiente para lograr el éxito del truco:

- Como al inicio todos los participantes se encuentran en posiciones impares si se indica moverse un número impar de cuartos en el primer movimiento, aunque no sabremos en donde está ubicada la gente si sabremos que todos los participantes se encuentran ahora en cuartos cuya posición es par.

La observación anterior es cierta puesto que podemos establecer una correspondencia de estos movimientos con la suma de dos números; cuando sumamos a un número impar otro impar la suma es par, y al sumar a un número par un impar la suma resulta impar, es decir que al sumar a un número a, un número impar b, el resultado de la operación, a + b, es de paridad contraria a la paridad de a.

Tomado en cuenta que todos los participantes han sido trasladados a posiciones pares, el que dirige puede clausurar cualquiera de los cuartos cuya posición sea impar. Es recomendable que sólo se clausure un cuarto a la vez debido a que en este caso el tablero es de dimensiones pequeñas y por lo tanto el juego tiene una duración corta.

- Por el contrario si se indica en el primer movimiento un número par de cuartos para moverse, por ejemplo dos, sabremos que ahora todas las personas que participan estarán en algún cuarto con posición nuevamente impar.

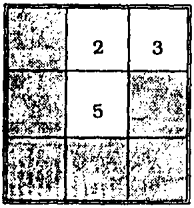
La regla sigue la misma correspondencia que en el caso anterior, si sumamos a un número a un número par b, la suma a + b será par si a es par, y resultará impar si a es impar, es decir que la suma a + b tendrá la misma paridad que a.

Considerando entonces que se indicó un movimiento con un número par de casillas el que dirige puede clausurar un cuarto cuya posición sea par retirando una tarjeta.

Procediendo según estos criterios, indicando movimientos y retirando adecuadamente las tarjetas, se consigue paulatinamente que todos los participantes se concentren en la última tarjeta, la cual puede estar ubicada en cualquiera de las nueve posiciones del tablero dependiendo de las tarjetas que fueron removidas durante el proceso.

Para conseguir buenos resultados en la realización de este truco es necesario que la persona que dirige haya logrado suficiente práctica previamente pues es posible que se presenten situaciones de incertidumbre.

Por ejemplo es posible que teniendo a los participantes ubicados en las posiciones impares del siguiente tablero



Las casillas sombreadas representan a los cuartos clausurados

es decir en alguna de las casillas 3 ó 5, se les pidiera moverse dos casillas, por lo cual quedarían nuevamente en alguna posición impar, si la persona que dirige el juego retira en este momento la tarjeta número 2 ya no podrá pedir ningún movimiento más puesto que ya no hay tarjetas que lo permitan y no podrá tampoco saber con seguridad en cual de las dos tarjetas restantes se encuentran las personas, es posible que ambas tarjetas estén ocupadas.

En casos como este el truco no resulta satisfactorio, pero la práctica permite evadir estas situaciones con artificios como no retirar ninguna tarjeta y pedir otro movimiento o bien retirar más de una tarjeta.

Este juego puede realizarse en un tablero de dimensiones mayores y pueden participar en él cualquier número de personas, basta con que la persona que dirige mantenga en mente la posición en la que se encuentran los demás para poder dictar los movimientos pertinentes.

A P E N D I C E

PROGRAMA I : Este programa calcula las posibles combinaciones de N números tomados en conjuntos de K elementos y compara las sumas de los K elementos de cada conjunto con una constante C específica.

```
program  combi(input, output);

uses crt,printer;

CONST
      N = 12;        (* NUMERO DE ELEMENTOS *)
      K = 6;         (* ELEMENTOS EN UNA COMBINACION *)
      C = 35         (* COSNTANTE DE COMPARACION *)


VAR
     I,J,R,X,M,CONT,SUM,COMB,COMB2 : INTEGER;
    A : ARRAY[1..K] OF INTEGER;


BEGIN

      CLRSCR;
      COMB:=0;
      COMB2:=0;
      FOR M:=K TO N DO
      BEGIN
             FOR I:=1 TO K-1 DO
             A[I] := I;
             J:=K;
             A[J]:=M;
             X:=1;

             WHILE J > 1 DO
                          BEGIN
                               IF X = 1  THEN  BEGIN
                                               SUM:=0;
                                               COMB:=COMB+1;
                                               FOR I:=1 TO K DO
                                               SUM:=SUM+A[I];
                                               IF SUM=39 THEN
                                               BEGIN
                                               FOR I:=1 TO K DO
                                               BEGIN
                                                    WRITE(A[I],',');
                                                     WRITE(C,A[I]);
                                               END;
                                               WRITELN(' ');
                                               COMB2:=COMB2+1;
                                               END;
                                               END;
```

```
                              IF A[J-1] = A[J]-1 THEN
                                    BEGIN
                                         J:=J-1;
                                         X:=0;
                                     END
                                 ELSE
                                   BEGIN
                                   A[J-1] := A[J-1]+1;
                                   CONT:=-1;
                                   X:=1;
                                   FOR I:=J-1 TO K-1 DO
                                      BEGIN
                                         CONT:=CONT+1;
                                         A[I]:=A[J-1]+CONT;
                                      END;
                                   J:=K;
                                   END;


          END;

     END;
     CLOSE(C);
     WRITELN;
     WRITELN('HAY ',COMB,' COMBINACIONES');
     WRITELN('HAY ',COMB2,' COMBINACIONES IGUALES A 39');



END.
```

PROGRAMA II: Este programa muestra las etapas para alcanzar el número 6174 siguiendo las instrucciones del artículo titulado EL NUMERO 6174.

```
PROGRAM P6174(INPUT,OUTPUT);

USES CRT,GRAPH;

TYPE ARREG = ARRAY[1..4] OF INTEGER;

VAR
      A,B: ARREG;
      I,J,M,N,R,T: INTEGER;
      RESP: CHAR;

LABEL 1000;

PROCEDURE LEE(VAR X:ARREG);
VAR S:STRING;

BEGIN
      FOR I:=1 TO 4 DO
      X[I]:=0;
      FOR I:=1 TO 4 DO
      BEGIN
            GOTOXY(5,7+I);
            READLN(X[I]);
            STR(X[I],S);
            IF LENGTH(S)>1 THEN
            BEGIN
                  WRITELN('ERROR COMIENZA DE NUEVO');
                  WRITELN('PRESIONA (ENTER)');
                  READLN;
                  CLRSCR;
                  GOTOXY(5,5);
                  WRITELN('INTRODUCIR UN NUMERO DE 4 DIGITOS');
                  GOTOXY(5,6);
                  WRITELN('PRESIONE (ENTER) DESPUES DE CADA DIGITO');
                  I:=0;
            END;
      END
END;
```

```
PROCEDURE ESCRIBE(VAR X:ARREG);
BEGIN
      FOR I:=1 TO 4 DO
      WRITE(X[I]);
      WRITELN;
      END;


PROCEDURE ORDDEC(VAR X,B:ARREG);
VAR
     AUX,J:INTEGER;

BEGIN
     FOR I:=1 TO 3 DO
     FOR J:=2 TO 4 DO
     IF X[J] > X[J-1] THEN
     BEGIN
           AUX:=X[J];
           X[J]:=X[J-1];
           X[J-1]:=AUX
     END;
     FOR I:=1 TO 4 DO
     B[I]:=X[5-I];
END;

PROCEDURE RESTA(VAR A,B:ARREG);

VAR S:INTEGER;

BEGIN
      R:=0;
      M:=A[1]*1000+A[2]*100+A[3]*10+A[4];
      N:=B[1]*1000+B[2]*100+B[3]*10+B[4];
      R:=M-N;
      GOTOXY(15,11);
      WRITELN('DIFERENCIA ...                ',R);
      A[1]:=R DIV 1000;
      S:=R MOD 1000;
      A[2]:=S DIV 100;
      S:=S MOD 100;
      A[3]:=S DIV 10;
      A[4]:=S MOD 10;
      END;
```

```
(* PROGRAMA PRINCIPAL *)

 BEGIN
1000 : CLRSCR;
      TEXTCOLOR(7);
      TEXTBACKGROUND(3);
      CLRSCR;
      WINDOW(13,6,70,20);
      TEXTBACKGROUND(4);
      CLRSCR;
      GOTOXY(5,5);
      T:=0;
      WRITELN('INTRODUCIR UN NUMERO DE 4 DIGITOS');
      GOTOXY(5,6);
      WRITELN('PRESIONE (ENTER) DESPUES DE CADA DIGITO');
      LEE(A);
      REPEAT
              CLRSCR;
              T:=T+1;
              GOTOXY(15,6);
              WRITE('NUMERO INICIAL...             ');ESCRIBE(A);
              ORDDEC(A,B);
              WRITELN;
              GOTOXY(15,8);
              WRITE('ORDENADO DECRECIENTE...       ');ESCRIBE(A);
              GOTOXY(15,9);
              WRITE('ORDENADO CRECIENTE...       - ');ESCRIBE(B);
              GOTOXY(40,10);
              WRITELN(' ------');
              WRITELN;
              RESTA(A,B);
              WRITELN;
              WRITELN('ITERACION NUM. ',T);
              WRITELN;
              TEXTCOLOR(BLINK);
              WRITELN('PRESIONE (ENTER) PARA CONTINUAR');
              TEXTCOLOR(7);
              READLN;
     UNTIL R=6174;
     WRITELN;
     TEXTCOLOR(BLINK+14);
     WRITELN('FIN:  SE HA ALCANZADO EL VALOR 6174');
     WRITELN;
     TEXTCOLOR(7);
     WRITELN('DESEA PROBAR OTRO NUMERO ? (S/N)');
     READLN(RESP);
     RESP:=UPCASE(RESP);
     IF RESP = 'S' THEN GOTO 1000;

END.
```

BIBLIOGRAFIA

- Alem Jean-Pierre, *Nuevos Juegos de Ingenio y Entretenimiento Matemático*, Gedisa Editorial, Barcelona, España, 4a. ed., 1992.

- Barry Townsend Charles, *Acertijos Clásicos*, Ed. Selector, 1991.

- Frohlichstein Jack, *Mathematical Fun, Games and Puzzles*, Dover Publications Inc., New York, U.S.A., 1962.

- Gardner Martin, *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, Madrid, España, 4a. ed., 1984.

- Honsberger Ross, *Ingenuity in Mathematics*, Mathematical Association of America, 4a. ed., 1970.

- Kraitchik Maurice, *Matehmatical Recreations*, Dover Publications Inc., New York, U.S.A., 1942.

- Maley Alan, Grellet Françoise, *Acertijos de Cambridge*,Ed. Selector, 1991.

- Mott-Smith Geoffrey, *Mathematical Puzzles for Beginers and Enthusiast*, The New Home Library, Philadelphia, U.S.A., 1946.

- "Muy Interesante Juegos", Ed. Cinco, Santafé de Bogotá, Colombia, 1991, No.2.

- "Muy Interesante Juegos", Ed. Cinco, Santafé de Bogotá, Colombia, 1991, No.3.

- "Muy Interesante Juegos", Ed. Cinco, Santafé de Bogotá, Colombia, 1991, No.4.

- "Muy Interesante Juegos", Ed. Cinco, Santafé de Bogotá, Colombia, 1991, No.5.

- National Council of Teachers of Mathematics, *Mathematics Teacher*, Vol 86, No.3, 1994.

- "The Mathematics Teacher", Vol.85, No.9, December 1992.

- "The Mathematics Teacher", Vol.72, No.8, November 1979.

INDICE