

15  
2e

---

---

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



"FACULTAD DE CIENCIAS"

---

---

## Soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

# FÍSICO

PRESENTA:

## Nicolás Gómez Castillo

México, D.F.

1994.

TESIS CON  
FALTA DE ORIGEN





Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A esos dos soldados que me cubrierón la retaguardia  
desde la trinchera: María Concepción Castillo  
Vega y Nicolás Gómez Domínguez, mis padres.*

*Porque no entiendo de donde sacaron tanta fuerza  
y determinación para mantenerse firmes en su  
empresa de tener un hijo profesionista. Gracias.*

15  
2ej

*A toda mi familia por su apoyo incondicional  
en la terminación de mis estudios, y de  
manera muy especial a mis tias, Ma. Castillo  
Vega y Amparo Gómez, por todos los momentos  
compartidos. No puede faltar mi abuelo,  
José Castillo, quien ve la vida con los pies  
en la tierra pero nunca perdiendo el sentido  
del humor, sus sueños y su alegría.*

## **A mis cuates:**

Juan Antonio Cornejo, Oscar Valdiviezo y Pedro Posada. Por todos los momentos de estudio, diversión e intercambio abierto de ideas.

Sergio Espinosa, por su constante apoyo y comprensión, por todos esos instantes que no se pueden cambiar por nada.

Juan Carlos Faller, porque tus puntos de vista me hicieron cambiar la manera de ver las cosas; porque, aunque estes lejos, GrandFaller, parece que estas todos los días, callado, sentado en el mismo lugar.

Raymundo Peralta, porque no hace falta mucho tiempo para conocer a una persona que habla con sinceridad, gracias por tu apoyo y comprensión.

Guadalupe Cordero, Graciela Ramírez, José Antonio Zapata, Jesús Flores y Ricardo Claps, compañeros y amigos de la carrera con los que aprendí y compartí conocimientos.

Ana Flores y Alejandro Cervantes, por todas esas satisfacciones en lo que a esparcimiento y diversión se refiere.

# Agradecimientos:

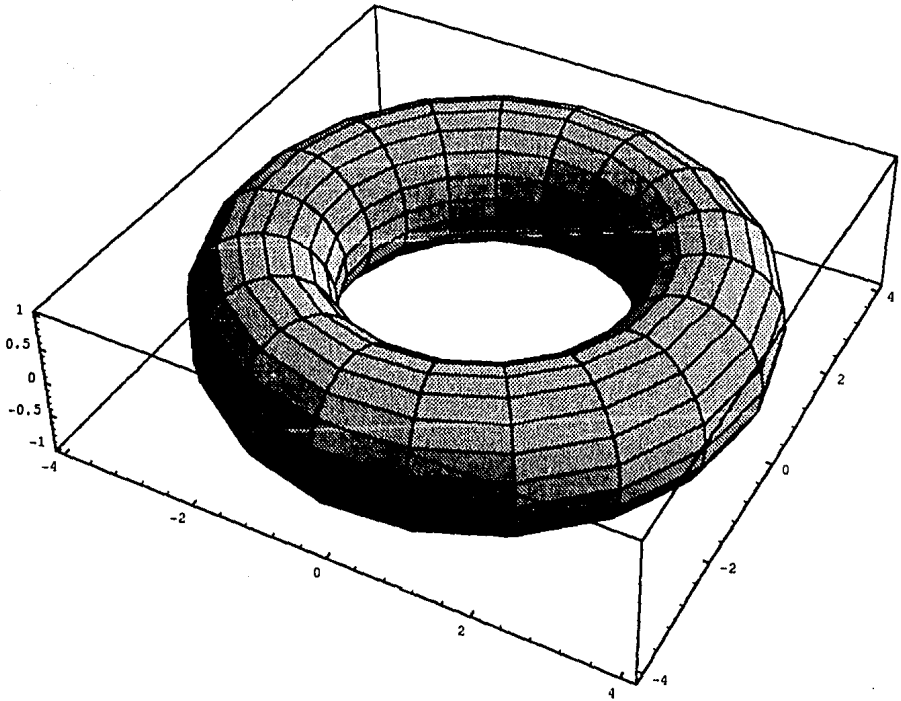
Aunque de manera oficial se diga que sólo tuve un director de tesis, debo comenzar por dar crédito a las dos personas que me ayudaron en todo lo que corresponde a este trabajo: Los Drs. Arturo Olvera Ch. y Jorge Ize L., mis directores de tesis.

Debo mostrar mi agradecimiento a estos por toda su paciencia y apoyo en lo que se refiere a: levantamiento de ánimo, material de lectura, lugar de estudio, becas, acceso a cómputo, comentarios, correcciones, discusiones, etc.

Por otra parte, es necesario no terminar esta tesis ocultando mi más profunda admiración por el Dr. Jorge Ize en su entrega y convencimiento de su labor en la investigación y la docencia, y por el Dr. Arturo Olvera por su capacidad de analizar los problemas físicos y sus conocimientos en cómputo. Un especial agradecimiento a los Drs. Rafael Pérez Pascual y Juan Manuel Lozano y al M. en C. José Luis Jiménez Ramírez, mis sinodales, por su trabajo en la lectura y corrección de esta tesis.

Agradezco también todo el apoyo brindado por el *Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS* y de manera especial a DGAPA por su beca en el proyecto de "Ecuaciones Diferenciales a Gran Escala" (Proyecto PAPIID-DGAPA No. clave IN103691).





**<<La Universidad es un lugar  
donde se pulen las piedras y  
se empañan los diamantes>>.**

Robert G. Ingersoll (1833-1899)  
político y orador estadounidense.

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	4
<b>0 ANTECEDENTES FISICOS HISTÓRICOS</b>	
0.1 El círculo: la trayectoria divina .....	11
0.1.a Teoría geocéntrica .....	11
0.1.b Teoría heliocéntrica .....	17
0.2 Movimiento elíptico .....	20
0.3 La ley de gravitación universal .....	24
0.4 El problema de los dos cuerpos .....	32
0.5 El problema de los tres cuerpos .....	34
0.6 Teoría lunar de Hill y el problema restringido de los tres cuerpos .....	35
0.7 El péndulo con longitud variable .....	42
<b>1 ANTECEDENTES</b>	
1.1 Teorema fundamental de existencia y unicidad .....	45
1.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales .....	49
1.3 Ecuaciones lineales con coeficientes constantes .....	55
1.4 Sistemas lineales con coeficientes periódicos .....	58
<b>2 ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE MATHIEU</b>	
2.1 Curvas de transición para la ecuación de Mathieu .....	64
2.1.a Regiones de estabilidad e inestabilidad .....	64



2.1.b Curvas de transición .....	68
2.2 Análisis de convergencia para las curvas de transición y soluciones .....	84
2.3 Desarrollo de potencias para las curvas de transición .....	98
2.3.a Método de las fracciones continuas .....	98
2.3.b Método perturbativo .....	105
2.4 Soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu .....	109
2.4.a Método de las fracciones continuas .....	118
2.4.b Método perturbativo .....	122
2.5 Foliación de las curvas periódicas .....	124
2.6 El método de Poincaré-Linstedt para la ecuación de Mathieu .....	128
2.7 Cruces de las curvas de transición con el eje beta .....	132
2.8 Comportamiento asintótico .....	150

### **3 EXPANSIÓN NUMÉRICA DE LAS CURVAS DE TRANSICIÓN**

3.1 Herramientas numéricas para calcular las curvas de transición .....	159
3.2 Herramientas numéricas para calcular las curvas de periodo fijo.....	164
3.3 Integradores numéricos .....	171
3.4 Resultados numéricos: curvas de transición .....	173
3.5 Resultados numéricos: curvas de periodo fijo .....	176
3.6 Desarrollo asintótico de las curvas de periodo fijo .....	181
3.7 Pincaré-Linstedt .....	184

### **4 APLICACIONES Y CONCLUSIONES**

4.1 Aplicaciones .....	187
4.1.a Estabilidad de soluciones periódicas .....	187
4.1.b Estabilidad de órbitas geoestacionarias y órbitas de estacionamiento .....	188
4.2 Conclusiones .....	193

## APÉNDICES

I Ecuación de Kepler .....	198
II Forma canónica de Jordan .....	200
III Teorema de la función implícita .....	208
IV Alfa en potencias de beta alrededor de $\alpha_0$ .....	211
<b>BILIOGRAFÍA .....</b>	<b>212</b>

## INTRODUCCIÓN

En el estudio de los fenómenos físicos nos encontramos con frecuencia sistemas oscilatorios, los cuales al ser excitados por una fuerza periódica externa pueden ganar energía. Por ejemplo, en el efecto fotoeléctrico, un electrón es desprendido de una placa de metal por la excitación de un fotón. Tales fenómenos se explican fácilmente con ayuda de un oscilador armónico con una fuerza de excitación externa. Cuando se tiene que la fuerza de excitación tiene la misma frecuencia que la frecuencia natural del oscilador, se presenta el fenómeno conocido de *resonancia*, que es cuando el oscilador armónico comienza a crecer sin medida debido a la ganancia de energía que le suministra la fuerza de excitación.

Sin embargo, las oscilaciones no amortiguadas no sólo aparecen mediante una fuerza periódica externa, sino también por una variación periódica de los parámetros del sistema oscilatorio. A esta excitación de las oscilaciones se denomina *resonancia paramétrica*. Como ejemplo podemos citar el balance de una persona en un columpio que regularmente se acucilla y se levanta, variando periódicamente con ello la posición de su centro de gravedad. A manera de recordatorio de nuestra niñez, y a reserva de justificarlo más adelante, la manera en que ganabamos altura en un columpio era cuando nos acucillabamos dos veces por cada oscilación del columpio, como se muestra en la Fig 1.

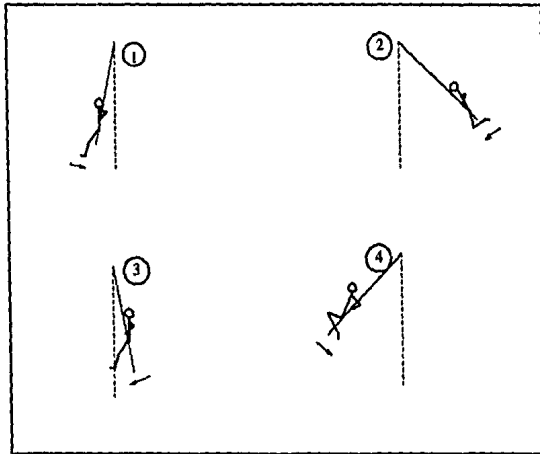


Fig 1

Sin embargo, el origen de la investigación acerca de la resonancia paramétrica no co-

mienza con el estudio del columpio, éste empezó cuando George William Hill (Nueva York, 1838-West Nyack,1914), un astrónomo y matemático estadounidense que trabajaba como contador para la National Bureau of Standards, decidió construir un esquema del movimiento de la Luna que involucrara las pequeñas anomalías presentadas por efectos de la fuerza de atracción del Sol. Sus estudios sobre el movimiento lunar, que llevaron a la introducción de la órbita periódica (curva variacional de Hill), representaron una contribución fundamental al desarrollo de la Mecánica Celeste. Estudió también los movimientos de Júpiter y Saturno, calculando sus efectos sobre el movimiento de la Luna.<sup>[EC]</sup>

Es fácil notar la variación periódica de los parámetros de la que hablabamos al principio, ya que la *distancia* del Sol a la Tierra no es constante, pero varía de manera periódica (por la periodicidad de la órbita de la Tierra). Como se verá en el capítulo 0, Hill obtuvo una ecuación diferencial que gobierna la coordenada normal al plano de la eclíptica para la Luna:

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} q_n e^{2ins} \right] Z = 0.$$

De aquí que las ecuaciones genéricas de la forma

$$\ddot{x} + Q(t)x = 0, \quad Q(t+T) = Q(t), \tag{1}$$

se conozcan como ecuaciones de Hill. En particular la ecuación de Hill que vamos a trabajar en esta tesis se conoce como la ecuación de Mathieu †

$$\ddot{x} + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x = 0, \tag{2}$$

como se verá en la sección 0.7.

Es interesante hacer notar que la ecuación de Hill la podemos encontrar en diversos campos de la física, que va desde la Mecánica Clásica con el columpio, hasta la física de altas energías, para determinar órbitas en aceleradores de partículas,<sup>[CH]</sup> y <sup>[L-L]</sup> por esto es importante estudiar este tipo de ecuación y determinar sus propiedades.

---

† Claudio Luis Mathieu (Macon, 1783 - París, 1875), fue un astrónomo y político francés quien se dedicó a la astronomía y a observaciones para el estudio del péndulo.

Como se puede apreciar de la ecuación (2), la ecuación de Mathieu involucra dos parámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ . Estos parámetros determinan la estabilidad de la solución sin importar la condición inicial (excepto  $x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = 0$ ). Por esto, gran parte de nuestro estudio está encaminado a determinar qué puntos del espacio  $(\alpha, \beta)$  nos dan soluciones acotadas o no acotadas, y dentro de las acotadas qué puntos nos dan soluciones periódicas y cuales no.

Como se verá en el capítulo 2, estos puntos determinan curvas, es decir, no están puestos de manera aleatoria en el plano. En otras palabras, los puntos que nos determinan soluciones periódicas de la ecuación (2), están puestos en curvas como puede apreciarse en la Fig 2. Ya que estas curvas no aparecen en la literatura las denominamos como *curvas de periodo fijo*.

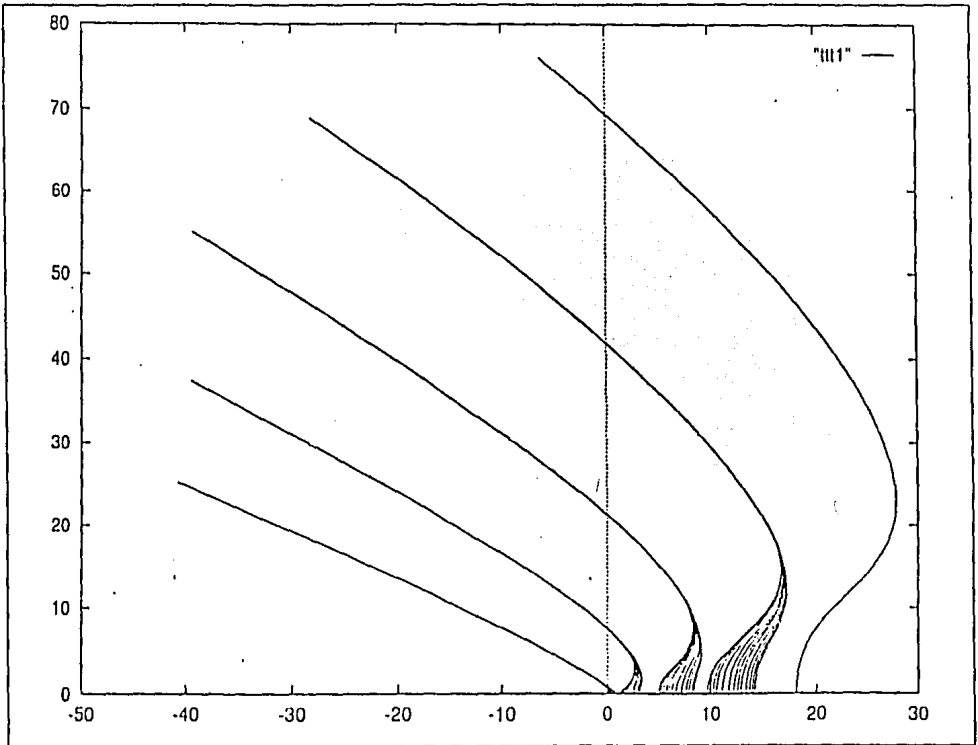


Fig 2

Se puede decir todavía más sobre estas curvas: las que nos dan soluciones  $\pi$  y  $2\pi$  periódicas de la ecuación de Mathieu, dividen el plano  $(\alpha, \beta)$  en dos regiones, una que nos

da soluciones acotadas (estables) y otra que nos da soluciones no acotadas (inestables), como se muestra en la Fig 3. Estas curvas son conocidas como las *curvas de transición*.

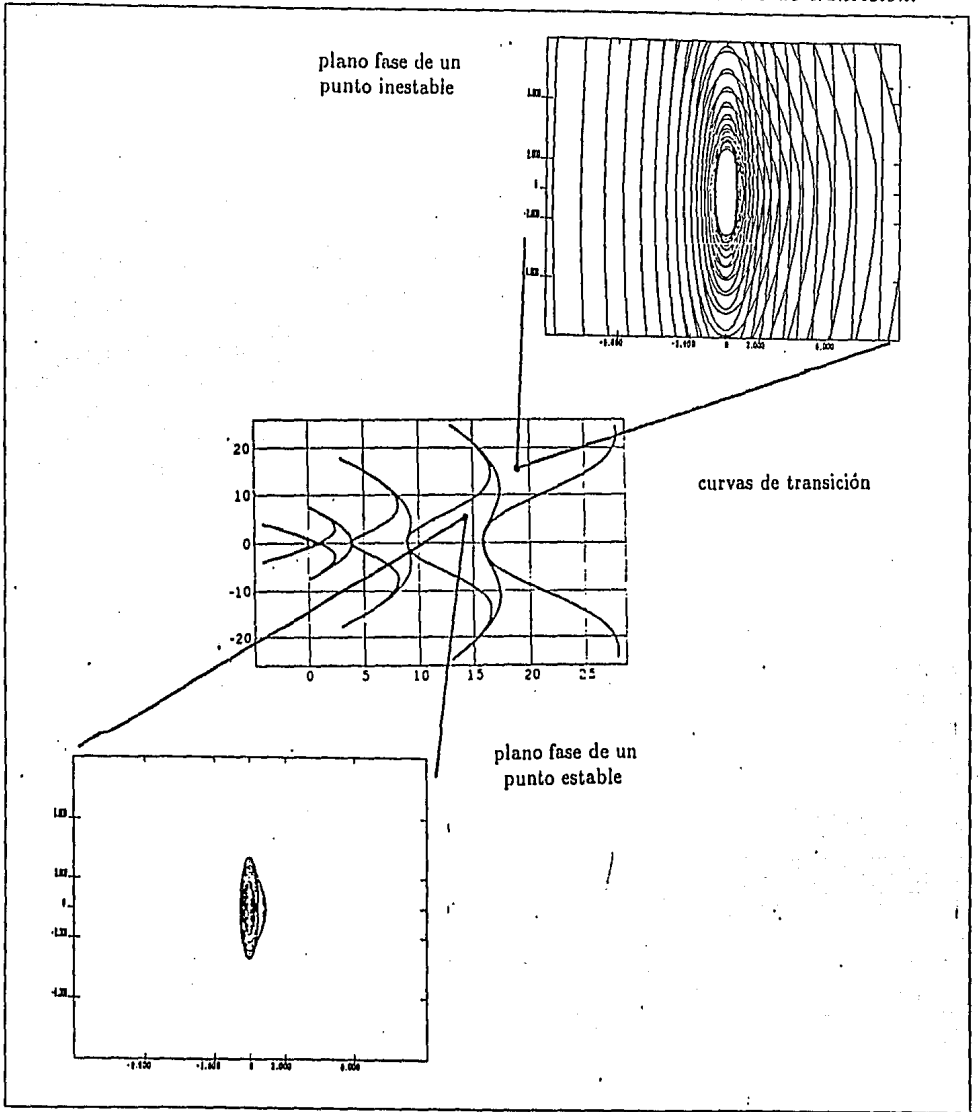


Fig 3

Es conveniente hacer énfasis, que la llave para el estudio de la ecuación de Mathieu se encuentra en el teorema de Floquet, el cual nos dice que si tenemos un sistema de

ecuaciones

$$\dot{X} = A(t)X; \quad \text{con} \quad A(t+T) = A(t),$$

entonces la matriz fundamental tiene la forma

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR} \quad (3)$$

donde  $P(t)$  es una matriz no singular de periodo  $T$  y  $R$  es una matriz constante.

Esto nos permite caracterizar la estabilidad que nos entrega un punto  $(\alpha, \beta)$ , así como obtener propiedades sobre los multiplicadores y exponentes de Floquet, ver sección 2.1. Expresando la solución de la ecuación de Mathieu en series de Fourier

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m e^{imt}, \quad (4)$$

se obtienen relaciones de recurrencia para los coeficientes, que nos dan expresiones para las curvas de transición y para las curvas de periodo fijo. De esta manera se obtienen propiedades sobre estas curvas tales como analiticidad, paridad, forma, cruces con los ejes, etc.

El material expuesto aquí tiene la particularidad de ser autoconsistente, de estar en un lenguaje más sencillo que el de la literatura usual, contando además con demostraciones de propiedades sobre las curvas en el espacio  $(\alpha, \beta)$  que normalmente no aparecen en ésta y algunos resultados que parecen novedosos en su planteamiento.

El capítulo 0, tiene como propósito hacer una reseña histórica del problema de los tres cuerpos, presentando las ideas cambiantes sobre el sistema solar en el transcurso de la historia, hasta llegar a Newton y plantear el problema de los tres cuerpos restringido de la manera más cercana a como lo hizo Hill, concluyendo con la ecuación que lleva su nombre. Se obtiene también la ecuación de Mathieu a partir de un péndulo con longitud variable.

El capítulo 1 se propone dar las herramientas matemáticas mínimas necesarias para seguir adelante, se introduce a la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, haciendo especial énfasis en la reducción a la forma canónica de Jordan, a la cual se le dedica un apéndice. Más importante todavía, y siendo la parte medular de este trabajo, es

la teoría de Floquet, que consiste en obtener propiedades de las soluciones de los sistemas lineales con coeficientes periódicos.

El capítulo 2 estudia la ecuación de Mathieu, estableciéndose una división del plano  $(\alpha, \beta)$  en regiones de estabilidad e inestabilidad y se obtienen propiedades sobre las curvas de transición de estas dos regiones, como analiticidad, paridad, forma, origen, etc. Tales propiedades se obtuvieron a través de poner estas curvas en fracciones continuas y en expresiones con operadores. Se estudian también las curvas en la zona estable que nos dan periodo fijo y, al igual que las curvas de transición, se establecen propiedades de analiticidad, forma, origen, etc., así también se ven otras propiedades importantes como la foliación de la zona estable por curvas de periodo fijo. Se estudia el método de Poincaré-Linstedt y se obtiene una expresión para la frecuencia de las soluciones periódicas en términos de  $\beta$ . Por último, siendo importante para saber el comportamiento para  $\beta$ 's grandes, se analizan los cruces de las curvas de transición con el eje  $\beta$  y el comportamiento asintótico para  $\beta \rightarrow \infty$ .

El capítulo 3 consta de resultados numéricos, donde se ponen los métodos para construir tanto las curvas de transición como las curvas de periodo fijo. Se tiene además las gráficas de las primeras curvas de transición y de algunas curvas de periodo fijo para periodos chicos. Se pone una breve descripción de los algoritmos numéricos que se utilizan. Se hace además un desarrollo con el método de perturbaciones hasta orden 8 con ayuda de un manipulador algebraico, y se comparan los resultados con los obtenidos numéricamente. Por último se obtienen algunas curvas con el método de Poincaré-Linstedt y se comparan con los resultados numéricos.

El propósito del capítulo 4, es dar un par de aplicaciones, una consiste en determinar la estabilidad para un sistema periódico con  $N$  grados de libertad y la otra aplicación consiste en analizar la estabilidad de un satélite puesto en órbita, el capítulo termina con las conclusiones de la tesis.



---

0

**ANTECEDENTES**  
**FÍSICOS HISTÓRICOS**

---

**<< Todos vivimos bajo el  
mismo cielo, pero ninguno  
tiene el mismo horizonte >>.**

**Konrad Adenauer (1876-1967)**  
canciller alemán.

La humanidad ha tenido que seguir un difícil camino en la comprensión del Universo y de manera particular del sistema solar. El estudio de éste ha tenido lugar desde tiempos remotos, y de alguna manera siempre marcado por las corrientes filosóficas y religiosas de la época. Los griegos creían que los *planetas* se tenían que mover en la trayectoria de mayor perfección, el círculo, y ésta idea no se abandonó sino hasta el siglo XVI con la llegada de Kepler y Newton. Kepler estableció en su primera ley que las trayectorias de los planetas son elipses y Newton con su teoría de la Gravitación Universal dió una explicación del fenómeno (dos cuerpos). Sin embargo, el mismo Newton se dió cuenta de lo complicado e imposible que puede ser el estudiar el problema de los tres cuerpos.

En la observación del movimiento de la Luna, se encuentra, haciendo delicadas observaciones, que ésta no se mueve realmente sobre una elipse. La causa principal de esto es la fuerza gravitacional del Sol, y no fue sino hasta fines del siglo XIX que Hill estableció un método para poder tratar el problema de los tres cuerpos restringido.

El propósito de este capítulo es hacer una breve descripción de la evolución en las ideas de concepción del Universo, así como un reconocimiento a los protagonistas mas importantes en ésta. La primera parte del capítulo (sección 0.1 a 0.3), la cual fue tomada de las partes A y B (caps 1-11) del libro de Gerald Holton ([Ho]), trata la parte historica del problema, siguiendo las teorías y maneras de pensar de la época. La segunda parte consite del tratamiento matemático al problema restringido de los tres cuerpos, y la deducción de la ecuación de Mathieu para el péndulo con longitud periódica variable.

## 0.1 EL CÍRCULO: TRAYECTORIA DIVINA

### 0.1.a Teoría geocéntrica

Para fijar un punto de partida, situémonos en la posición de la comunidad científica de vanguardia del mundo antiguo unos 400 años a. de C., en Atenas. Aunque los instrumentos ópticos tardaron todavía 2000 años en aparecer, la simple observación del cielo nocturno había proporcionado los datos e interpretaciones suficientes respecto a los movimientos de los cuerpos celestes. Por las observaciones realizadas desde distintos puntos de la superficie terrestre podía deducirse que la bóveda celeste era como una gran esfera rodeando a la Tierra.

Se cuenta que Platón (siglo IV a. de C.) planteaba a sus alumnos un problema en estos términos: Las estrellas –consideradas como eternas, divinas e inmutables– se mueven alrededor de la Tierra dando una vuelta por día como puede verse, y según la trayectoria de mayor perfección: el círculo. Pero hay algunos cuerpos celestes que, si los observamos durante un año, aparecen como errando, casi en desorden, por el cielo, recorriendo trayectorias anuales de una irregularidad desconcertante. Éstos son los planetas. Tomando este movimiento circular como axioma, ¿cómo podemos interpretar las observaciones del movimiento planetario?

Platón y su escuela entendía que una teoría física es inteligible solamente en razón de

concepciones metafísicas. †

Estos intentaron construir un sistema del Universo de acuerdo con el axioma del "movimiento uniforme ordenado", es decir, de un sistema que permitiera a los objetos celestes moverse sólo en movimientos circulares uniformes (constantes) o en combinaciones de varios de estos movimientos (ver Fig 0.1), lo cual trajo muchas complicaciones.

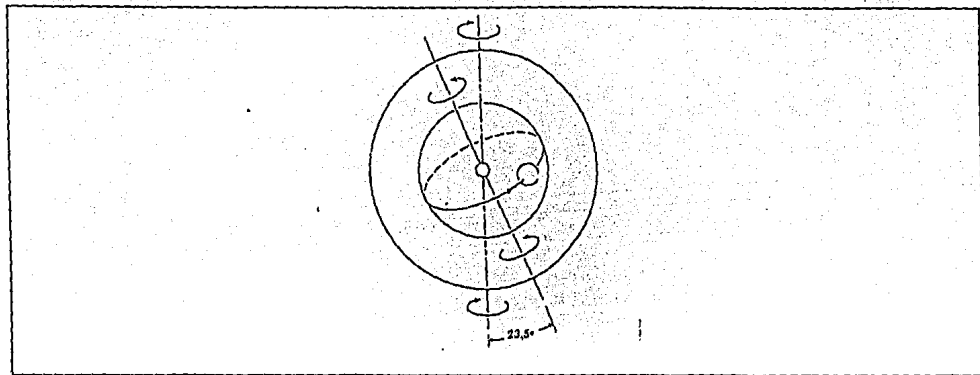


Fig 0.1

Eudoxio –alumno de Platón– estableció que serían necesarios veintiseis movimientos uniformes simultáneos para el conjunto de los siete cuerpos celestes. Otros propusieron abandonar la hipótesis de que el Sol y los planetas se mantenían fijos sobre esferas celestes –lo cual significaba que deberían permanecer siempre a la misma distancia de la Tierra– y desarrollaron las combinaciones más complicadas de círculos.

¿Es tarea única del astrónomo (o de cualquier científico) limitarse a la construcción de sistemas matemáticos que concuerden con las observaciones realizadas, independientemente de su artificiosidad? ¿Está su trabajo terminado cuando puede "ajustar los datos", o debe él buscar una explicación físicamente posible de la forma en que trabaja la Naturaleza?

Una respuesta clara a esta cuestión fue dada por Aristóteles (384-322 a. de C.). Los escritos de Aristóteles sobre cosmología estaban íntimamente integrados en su filosofía. Aristóteles unificó en un esquema conceptual elementos que están ahora separados en distintos componentes: científicos, poéticos, teológicos, éticos. Precisamente, por concentrar su teoría del Universo en la comprensión física más que en el cálculo matemático, aquélla fue ampliamente adoptada, especialmente en el periodo medieval, poco antes del nacimiento de la ciencia moderna.

¿En qué consiste el Universo? Siguiendo una creencia entonces corriente, Aristóteles postuló que la materia, dentro de nuestro alcance físico (cognitivo), es una mezcla de cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego.

---

† El término metafísica se usa aquí en un sentido determinado: se refiere a la disciplina en la cual se investigan los principios del conocimiento o del ser en términos de conceptos intuitivos y "autoevidentes", de la "experiencia diaria" y de analogías.

Un segundo postulado prescribía que cada uno de estos cuatro elementos tenía tendencia acusada de alcanzar su “estado natural” de reposo: la Tierra al fondo (o centro del Universo), a continuación el agua y el aire, y, finalmente el fuego en su parte superior.

Un tercer postulado afirmaba que el movimiento real de un objeto viene determinado por la tendencia del elemento presente en mayor abundancia. Así, la conducta del vapor que se eleva de un vaso en ebullición, se explica por el movimiento ascendente debido al la introducción del elemento fuego en el agua que se calienta; al enfriarse, el vapor abandona su fuego y, entonces, el elemento predominante, agua, se asegura así mismo y la humedad condensada se precipita ocupando su lugar natural abajo.

Una consecuencia de este punto de vista es que el movimiento de un objeto hacia arriba o hacia abajo de su lugar natural, viene gobernado por el equilibrio de sus elementos constituyentes, de tal manera que la velocidad de movimiento debe ser proporcional a la cantidad del elemento predominante.

Aristóteles también postuló que estos cuatro elementos se encontraban sólo en dominio terrestre o “sublunar” (debajo de la Luna). Más allá, existe una clase de elemento completamente distinto: el éter \*, del cual estaban constituidos los cielos. Mientras los cuatro elementos terrestres estaban siempre sometidos a procesos de cambio –“generación y corrupción” en la frase de Aristóteles–, el éter es por definición puro e inmutable. Tiene su propio movimiento natural apropiado a su naturaleza, movimiento sin principio ni fin y que se mantiene siempre en su lugar natural: “movimiento circular”. Así, el uso de círculos para explicar los movimientos de los cuerpos celestes, como fue sugerido por Platón, no es simplemente una consecuencia matemática: era una necesidad filosófica en el sistema de Aristóteles.

Más allá de la mayor esfera (donde estaban enbebidas las estrellas) está el divino “móvil primario”. El móvil primario gira la esfera estrellada con ritmo regular; este movimiento se transfiere por fricción, con alguna pérdida, a las esferas de los planetas más externos y, por tanto, a las esferas del Sol y de los planetas más internos.

Sin embargo, algunas de las características de fácil observación en el firmamento, quedaban sin explicación en el sistema de Aristóteles. Notable era el hecho de que el Sol, la Luna, Venus, Marte y Júpiter aparecieran a veces más brillantes o más próximos, y otras veces más alejados de la Tierra. Aunque Aristóteles se dió cuenta, quitó importancia a este simple pero fatal argumento.

---

\* También conocido como “quinta esencia” del término latino “quinto elemento”. El éter procede de una palabra griega que significa quemar o inflamar.

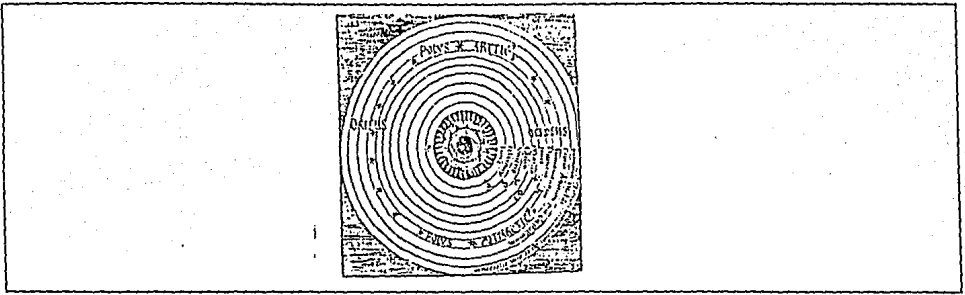


Fig 0.2

Las modificaciones introducidas después de Aristóteles fueron a menudo ingeniosas, y sirvieron para explicar algunas de las dificultades del primitivo sistema geocéntrico de esferas concéntricas. Con estas modificaciones fue posible explicar el que los planetas tuviesen distancias variables a la Tierra considerada aún como inmóvil. Entre los Astrónomos que hicieron éstas contribuciones se encuentra Apolonio, Hiparco y, finalmente Claudio Ptolomeo (siglo II a. de C.), él cual hizo las siguientes suposiciones:

a) *Movimiento excéntrico.* Si la Tierra no estuviese exactamente en el centro de rotación de un cuerpo celeste, éste se movería según una trayectoria excéntrica respecto a la Tierra y su distancia a la misma variaría en el transcurso del tiempo. Este sistema explica el movimiento aparente anual del Sol.

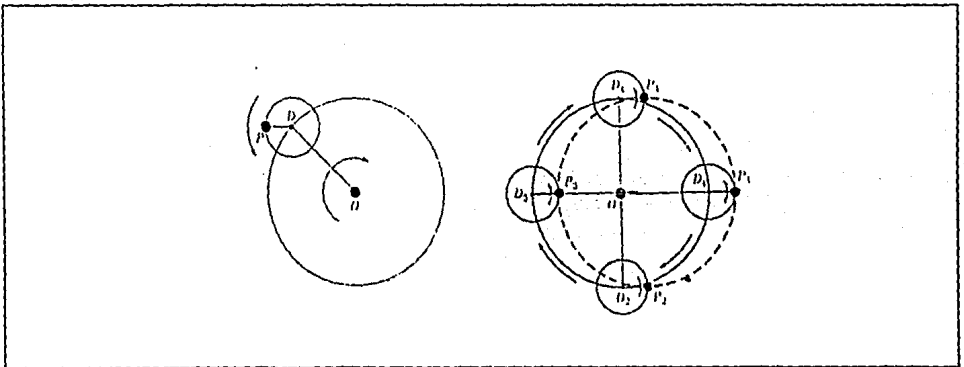


Fig 0.3

b) *Movimiento en epiciclos.* La Fig 0.3 representa un objeto P (tal como el Sol o un planeta) dotado de dos movimientos simultáneos uniformes de rotación. Un movimiento circular de P alrededor de D, y un movimiento circular de D alrededor de O. El círculo pequeño es un epiciclo y el círculo grande se llama deferente. Los dos movimientos pueden tener velocidades, direcciones y radios independientes (ver Fig 0.4).

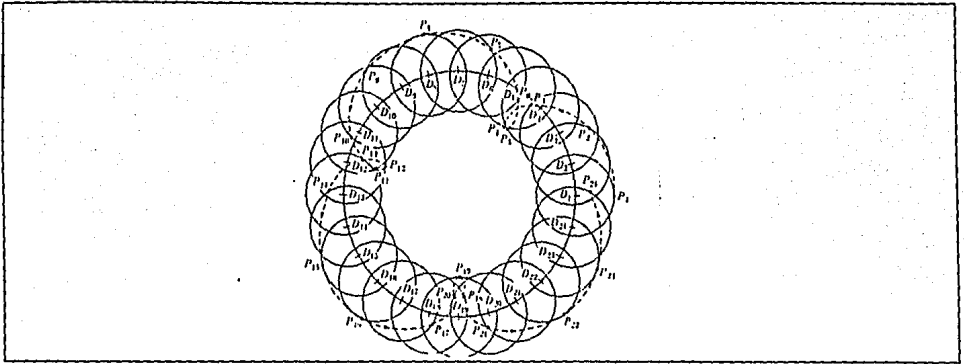


Fig 0.4

Notemos lo que se ha retenido y desechado de Aristóteles y Platón en la concepción de Ptolomeo de epiciclos y movimiento excéntrico. Todavía se hace uso del movimiento circular uniforme y de la Tierra en reposo. No se hace hincapié en el esquema de las esferas rotatorias -todas concéntricas en la Tierra - sobre las cuales se hallan fijos el Sol, la Luna y los planetas. Tampoco se requiere que todas las rotaciones tengan como centro la Tierra. Este cambio es todavía más evidente cuando vemos que Ptolomeo tuvo necesidad de añadir aún otro artificio , el *ecuante*, para representar de modo más adecuado ciertas características del movimiento celeste.

c) *El ecuante*. El Sol se mueve la mitad de su trayectoria a través de las estrellas (es decir,  $180^\circ$  en un ciclo completo de  $360^\circ$ ) entre el equinoccio de primavera (21 de marzo) y el equinoccio de otoño (23 de septiembre). La otra mitad de su trayectoria se completa entre el 23 de septiembre y el 21 de marzo. Así, el Sol parece moverse un poco más lentamente durante el verano y un poco más rápido durante el invierno; en verano tarda seis días más en cubrir la misma distancia *angular* (medida respecto a la esfera celeste) que en invierno.

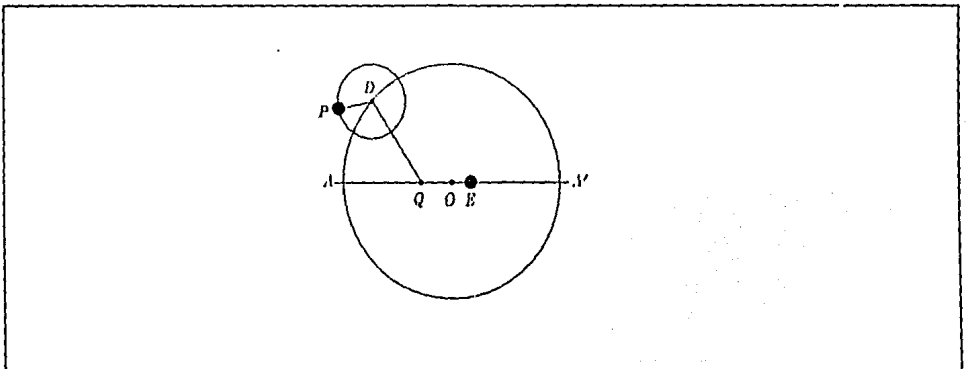


Fig 0.5

El hecho no podía explicarse por cualquier combinación de esferas rotatorias o epiciclos, ya que, en todo caso, se supone que la velocidad de movimiento circular es constante. Dificultades semejantes –pero menos obvias– surgen al intentar explicar los movimientos planetarios.

El artificio del ecuante de Ptolomeo puede verse en la Fig 0.5. Un objeto P se encuentra en movimiento cíclico alrededor de D, el cual, a su vez, se mueve simultáneamente en un círculo centrado en O. Si éste esquema fuera puramente epicíclico, la Tierra estaría en O. Si fuese una mezcla de movimiento epicíclico y excéntrico, la Tierra estaría en cualquier otro lugar de la línea AA', por ejemplo en E. Hasta ahora, el movimiento de D ha sido especificado como un movimiento uniforme con respecto a O. Pero para que el sistema de Ptolomeo se ajustase a ciertos movimientos planetarios fue necesario, en algunos casos, hacer que D girase uniformemente con respecto a un punto Q llamado ecuante; esto es, había que considerar que el ángulo DQA variaba con razón constante mientras D daba una vuelta completa.

Con la adopción de este nuevo artificio, no existía ningún punto respecto al cual el movimiento de D fuera, a la vez, uniforme y circular. Su movimiento es uniforme visto desde Q, y circular visto desde O.

Para aquellos astrónomos que sólo estaban interesados en salvar las apariencias, es decir, en establecer un sistema que proporcionase predicciones exactas de todos los fenómenos celestes, era un brillante éxito. Pero cuantos deseaban un sistema compatible con los principios filosóficos generales, tales como la necesidad de un movimiento circular uniforme, se sentían defraudados con el carácter artificial del ecuante. ¿Cuál es el criterio más importante para una teoría científica: exactitud o intelegibilidad?

El mismo Ptolomeo consideraba que su sistema estaba basado en una serie de hipótesis razonables que cualquier lector podía aceptar, incluso aunque no pudiera seguir todos los detalles de los cálculos. En su gran trabajo, que a través de las traducciones árabes llegó a conocerse con el nombre de *Almagesto*, estableció las siguientes hipótesis:

1. Que el cielo es de forma esférica y tiene un movimiento de giro.
2. Que la Tierra, considerada como un todo, es también de forma esférica.
3. Que está situada en medio del cielo como su centro.
4. Que por razón de sus dimensiones y distancia a las estrellas fijas, la Tierra se comporta frente a esta esfera como si fuera un punto.
5. Que la Tierra no participa en ningún movimiento.

Implícita en su trabajo está también la vieja –pero ahora algo distorsionada doctrina– del movimiento circular uniforme como la única conductora imaginable de los objetos celestes.

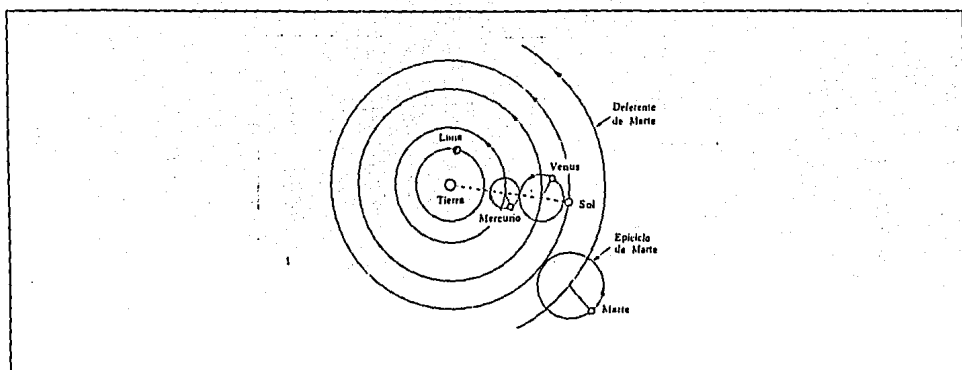


Fig 0.6

Ajustando los respectivos ejes, direcciones del movimiento, velocidades y radios de rotación, el número de epiciclos, excéntricos y ecuantes a las trayectorias observadas a manera de patrón, Ptolomeo estableció un esquema que fue útil para astrónomos y navegantes durante más de catorce siglos. Fue la respuesta original de Platón, y representa una magnífica obra maestra llevada a cabo por un hombre de habilidad extraordinaria.

Pero la complejidad de este esquema también era extraordinaria, y observaciones posteriores requerían la modificación del modelo de tiempo en tiempo y requería de más de sesenta movimientos simultáneos para los siete cuerpos celestes. Sin embargo, este sistema tuvo gran aceptación cuando llegó a conocerse, ya que daba una descripción precisa de lo que podía observarse con los instrumentos de la época; servía entonces para predecir futuras posiciones de los cuerpos celestes -aunque fuesen necesarios cálculos laboriosos-, y estaba de acuerdo con la doctrina filosófica y física de los griegos y tenía "una apariencia de sentido común". No es difícil sentir la sensación de que realmente "vemos" al Sol y las estrellas moviéndose alrededor nuestro, y es razonable pensar que nos encontramos en una Tierra inmóvil y fija.

### 0.1.b Teoría heliocéntrica

Nuestro estudio nos lleva ahora a la Europa del Renacimiento, alrededor del año 1500 d. de C. La teoría astronómica no había progresado de un modo considerable desde Ptolomeo. Santo Tomás de Aquino (1225-1274) había unido las ideas aristotélicas de los movimientos celestes con la teología cristiana. Así, la teoría geocéntrica había alcanzado cierto significado en función de la doctrina filosófica de la época; poner la primera en tela de juicio, significaba atacar la segunda, y hasta entonces no había aparecido nadie que pensara que ello era necesario, o que tuviera la osadía de batallar seriamente contra tan formidables aliados.

Pero el espíritu estaba cambiando; los movimientos renacentistas se extendían desde Italia barriendo el mundo occidental y, dentro de pocas generaciones, surgiría un nuevo ideal



de hombre, lleno de curiosidad y entusiasmo por explorar el mundo natural. La invención de la imprenta permitió el flujo de ideas y esto aumentó la audiencia rápidamente.

El año que se descubrió el Nuevo Mundo, Nicolás Copérnico (1473-1543) era un joven estudiante en Polonia. Durante su vida observó en el viejo mundo grandes cambios culturales. Y se dice que el mismo día que murió vió impresa la primera copia de su libro *Revoluciones*.

Copérnico se ocupó del viejo problema de Platón: la construcción de un sistema planetario por combinación del menor número de movimientos circulares uniformes. Lejos de ser un revolucionario que buscaba reemplazar teorías tradicionales por una nueva radical, él deseaba eliminar algunas de las innovaciones que Ptolomeo había introducido, en particular el ecuante descrito anteriormente, y volver a los principios establecidos por los primeros astrónomos griegos.

Copérnico tuvo mucho cuidado al afirmar que su propuesta de un modelo heliocéntrico —dejando que la Tierra y los planetas girasen alrededor del Sol fijo— no era una idea nueva, sino sancionada por algunas autoridades de la Antigüedad.

Las primeras ideas de Copérnico comenzaban atacando el ecuante de Ptolomeo:

<<...Las teorías planetarias de Ptolomeo y otros muchos astrónomos, aunque consistentes con los datos numéricos, parecen... presentar no pocas dificultades. Pues estas teorías no son adecuadas, a no ser que se introduzcan los ecuantes, y entonces aparece que un planeta no se mueve con velocidad uniforme ni sobre su círculo ni alrededor del centro de su epiciclo. Un sistema tal no parece ser ni suficientemente absoluto ni suficientemente aceptable >>.

<<Conciente de tales efectos, empecé a considerar si podía encontrar una disposición de círculos más razonable y de la cual pudieran deducirse las aparentes desigualdades y que todo se moviese alrededor de un centro propio>>.

Para Copérnico, cualquier tipo de movimiento distinto del circular era obviamente imposible. Éstos argumentos eran del mismo tipo que los aportados por Aristóteles, excepto que para éste, la inmovilidad de la Tierra era igualmente *obvia*.

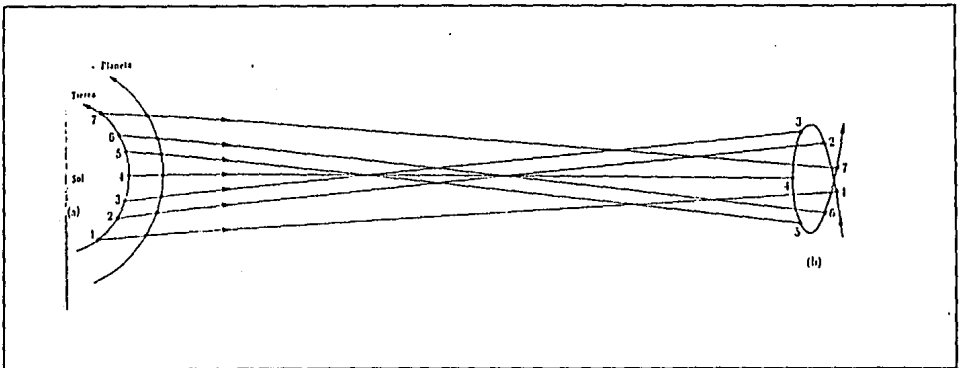


Fig 0.7

Copérnico arguyó entonces que, situando el Sol y no la Tierra en el centro, podía construir un sistema más razonable de círculos. Más tarde escribía en las *Revoluciones* que esta idea la había encontrado leyendo los clásicos:

<<... de acuerdo con Cicerón, Nicetas mantenía que la Tierra se movía ,... de acuerdo con Plutarco, muchos otros (incluyendo a Aristarco) también habían mantenido la misma opinión... Cuando concebí por ellos la posibilidad de que ésto fuera así, comencé a meditar sobre el movimiento de la Tierra. Y aunque me parece una opinión absurda, como sabía que otros antes que yo se habían tomado la libertad de suponer círculos que ellos elegían para demostrar las observaciones relativas de los cuerpos celestes, consideré que se me podía permitir suponer algún movimiento de la Tierra y tratar de descubrir mejores demostraciones de las revoluciones de los cuerpos celestes... Encontré, después de muchas largas observaciones que, si al movimiento de los otros planetas se le sumase los de la Tierra (rotación sobre su eje y rotación alrededor del Sol)... no solamente se explica el comportamiento aparente de otros planetas, sino que el sistema conectaría de tal modo los órdenes y dimensiones de los planetas en sus órbitas y de todo el cielo>>.

Es digno destacar que el problema tenía aspectos teológicos además de los astronómicos, y que Copérnico fue canónigo de la Iglesia Católica Romana. Cuando dedicó su libro *Acerca de las revoluciones del mundo celeste*, al papa Paulo III, Copérnico sugirió que sus resultados podían servir de alguna ayuda a la *comunidad eclesiástica*. En conexión con el problema del calendario, el sistema de Copérnico fue usado, en efecto, en los cálculos astronómicos que sirvieron de base al calendario Gregoriano. Pero ésto no significaba, necesariamente, que la Iglesia aceptase las hipótesis físicas -en particular el movimiento de la Tierra- a partir de los cuales se había desarrollado el sistema de Copérnico; simplemente se admitía que se trataba de un sistema más eficaz para hacer los cálculos.

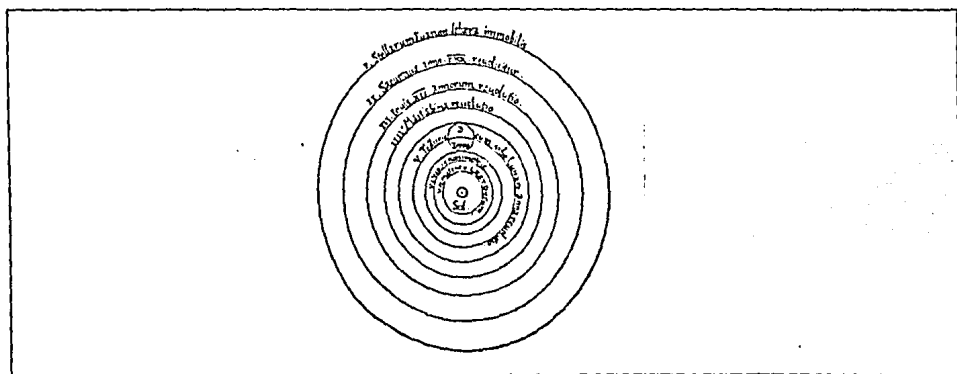


Fig 0.8

Para Copérnico, como para la mayoría, el mundo observable no era sino un símbolo de la actividad de la mente divina. La armonía y el orden de su trabajo frente al de Ptolomeo reflejaba la idea del Divino Arquitecto. Encontrar una simetría y orden en el caos aparente era para él un acto de reverencia , una prueba indudable de la actividad de una deidad. Se hubiera sentido aterrizado si hubiera sabido que su teoría había de

ser, en último término, la responsable de la separación entre la Ciencia y la Iglesia en tiempos de Galileo.

## 0.2 MOVIMIENTO ELÍPTICO

La teoría del movimiento planetario se desarrolla ahora con inusitado impulso. Nos encontramos alrededor del año 1600 d. de C. El Renacimiento y la Reforma están pasando. El sistema de Copérnico era seguido por unos pocos astrónomos que comprendían las ventajas del cálculo que ofrecía pero no tomaban en serio sus implicaciones físicas y filosóficas. A través de este silencio se levantó una voz, el panteísta † antiortodoxo Giordano Bruno, evangelizando a Copérnico, viajó por toda Europa anunciando que los límites del Universo estaban infinitamente alejados y que nuestro sistema solar es simplemente uno entre los infinitos que existen. A causa de las distintas herejías pronunciadas, fue juzgado por la Inquisición y quemado en el patíbulo en 1600.

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), fue el primer hombre desde los griegos que aportó mejoras en las observaciones astronómicas, pasó casi toda su vida en la paciente observación de los movimientos planetarios con una precisión superior a medio minuto de arco, más de veinte veces superior a los de Copérnico, cuando el telescopio no se había inventado.

Después de la muerte de Tycho, su colega alemán Johannes Kepler continuó sus observaciones y, especialmente, el análisis de la gran cantidad de datos recopilados. Para Kepler, aún más que para Copérnico, la directriz de la mente divina era lo geométrico y las relaciones matemáticas que venían expresadas en las características del modelo heliocéntrico.

Al intentar ajustar los nuevos datos a la órbita de Marte, en el sistema de Copérnico con movimiento circular uniforme (aunque se usasen ecuantes), Kepler halló, después de cuatro años de labor, que esto no podía hacerse. Los nuevos datos colocaban la órbita justamente ocho minutos fuera del esquema de Copérnico. Copérnico no podía haber dado importancia a esto, porque sabía que sus observaciones tenían errores dentro de este margen. Pero Kepler sabía que el ojo infalible de Tycho y sus soberbios instrumentos, daban medidas con un margen de error menor que estos ocho minutos. Con la integridad que ha de considerarse como actitud característica del científico, frente a los hechos cuantitativos, Kepler no quiso ocultar, con hipótesis convenientes, esta fatal diferencia. Para él, estos ocho minutos significaban, simplemente, que el esquema de Copérnico, fallaba para explicar el movimiento real de Marte cuando las observaciones de aquel movimiento se hacían con suficiente precisión.

Kepler debió quedarse anonadado con este descubrimiento, pues, después de todo era un copernicano convencido. Después de algunos años por intentar rescatar la teoría de Copérnico, terminó finalmente por desechar la premisa que ligaba el sistema de Copérnico más explícitamente a las doctrinas de la antigua Grecia. Cuando Kepler estaba estudiando las trayectorias de los planetas según la imagen heliocéntrica, se le ocurrió que podía

---

† Sistema de los que identifican a Dios con el mundo.

corresponder a una figura, la elipse, cuyas propiedades ya eran conocidas de los matemáticos del siglo II a. de C. Por lo tanto, si se admitía que la elipse era la trayectoria *natural* de un planeta, se obtenía un esquema geométrico del mundo, de gran simplicidad, en el cual todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos. Esta <<ley de las órbitas elípticas>> es una de las tres grandes leyes de Kepler del movimiento planetario, generalmente conocida como su primera ley.

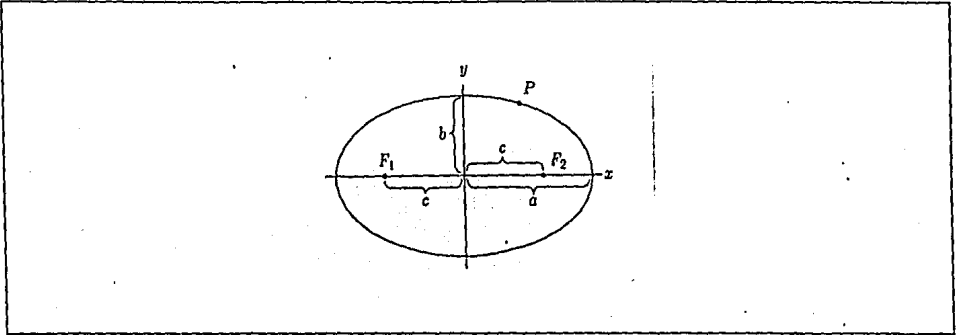


Fig 0.9

Kepler sabía que necesitaba una relación matemática entre la velocidad de un planeta en una posición de su órbita y la velocidad en cualquier otra posición, el resultado final de estudiar esto le dio su segunda ley

$$t \propto \text{área barrida por la línea planeta-Sol.}$$

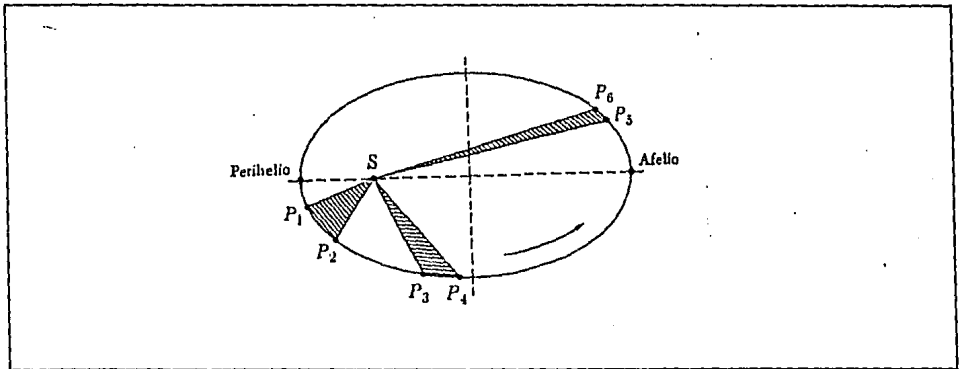


Fig 0.10

la primera y la segunda ley de Kepler fueron publicadas juntas en 1609 en su *Astronomía Nova* (Nueva Astronomía). Pero Kepler aún estaba insatisfecho con un aspecto de sus descubrimientos: no se había hallado ninguna relación entre los movimientos de los distintos planetas. Ni había alguna razón por la que pudiese esperarse que existiese

tal relación. El largo y cansado esfuerzo que hizo tuvo su recompensa al encontrar su tercera ley, que establece que si  $T$  es el periodo de un planeta dado, y  $\bar{R}$  el *radio medio* de su órbita, entonces †

$$T^2 = K(\bar{R})^3,$$

donde  $K$  es una constante que tiene el mismo valor para todos los planetas. Por ejemplo, si  $T^2/(\bar{R})^3$  es el mismo para todos los planetas, podemos calcular su valor numérico para uno de ellos (para la Tierra  $T_E = 1$  año,  $\bar{R}_E = 15 \times 10^7$  Km) y, por lo tanto, siempre podemos calcular el valor de  $T$  para cualquier otro planeta si se conoce  $\bar{R}$ , y viceversa.

La manera de abordar los problemas físicos por parte de Kepler fue tomando una nueva actitud ante los *hechos*. Hay que destacar su intento fructífero en formular las leyes físicas en forma matemática, en el lenguaje de la geometría y el álgebra. Desde entonces, después del periodo de Kepler, la *ecuación* se desarrolla, naturalmente, como el prototipo de las leyes en las ciencias físicas.

En este sentido, la ciencia de Kepler fue totalmente moderna; él, más que ningún otro antes, se inclinaba ante el árbitro implacable y supremo de toda teoría física, a saber: la evidencia de la observación realizada de un modo *preciso y cuantitativo*.

Uno de los pocos amigos y compañeros científicos con que Kepler tuvo correspondencia e intercambio de noticias de los últimos descubrimientos, fue Galileo Galilei (1564-1642). Aunque la contribución científica del italiano a la teoría del movimiento planetario no fuese, desde el punto de vista cuantitativo, tan buena como la de Kepler, Galileo es una figura clave en el campo de la astronomía. En cierto sentido, Kepler y Galileo se complementaron uno al otro al preparar al mundo para una aceptación completa desde el punto de vista heliocéntrico: el uno, estableciendo los fundamentos científicos con su trabajo astronómico; el otro, combatiendo las objeciones dogmáticas y ayudando, con sus trabajos sobre Mecánica, a derrotar toda la estructura de la física escolástica en la que se apoyaba la antigua cosmología.

Fue Galileo, más que ningún otro hombre, quien desafió la fertilidad de la antigua interpretación de la experiencia y enfocó la atención de las ciencias físicas en los conceptos productivos (tiempo y distancia, velocidad y aceleración, fuerza y materia) y no en las cualidades o esencias, últimas causas o armonías que fueron todavía la motivación de Copérnico y, a veces, el éxtasis de un Kepler.

En 1610 Galileo publicó un pequeño libro titulado *Sidereus Nuncius*, que podría traducirse como Mensajero Celestial. En él anuncia los descubrimientos que había hecho con su telescopio:

1) El planeta Júpiter tiene cuatro planetas más pequeños que giran a su alrededor. Más tarde fueron llamados *satélites* por Kepler y otros astrónomos. Esto era un gran golpe a las ideas tradicionales por dos razones: Primero, muchos filósofos estaban plenamente convencidos de que existían siete cuerpos celestes (no contando las estrellas), segundo,

---

† El valor de  $R$  es la mitad del eje mayor. La mayoría de las órbitas son casi circulares, de modo que  $R$  es el radio de las circunferencias.

mientras todos los restantes objetos *aparecían* girando alrededor de la Tierra, los satélites de Júpiter, lenta pero claramente, giraban alrededor de Júpiter; por lo tanto la Tierra no era el centro de rotación de todos los cuerpos del Universo.

2) Según las observaciones telescópicas, la superficie de la Luna no era suave, uniforme y precisamente esférica como creían un gran número de filósofos, sino desigual, rugosa y llena de cavidades y prominencias, lo mismo que la superficie de la Tierra, recorrida por cadenas de montañas y valles profundos. Galileo alude aquí al hecho de que la misma serie de doctrinas que defendieron el sistema geocéntrico como el único posible, también requerían que los objetos celestes fuesen “perfectos” –esféricos y sin manchas–, sin embargo él podía ver no sólo montañas en la Luna, sino también manchas en el Sol.

3) Las estrellas fijas no aparecen mayores cuando se observan a través del telescopio, a lo que Galileo le atribuyó la propiedad de estar infinitamente alejadas.

4) La Vía Láctea, que aparece como una región continua de luz al ojo desnudo, se resuelve mediante el telescopio en muchas estrellas individuales.

Los escolásticos en lucha con los nuevos partidarios de Copérnico, estaban convencidos, de que la teoría heliocéntrica, además de sus errores teológicos, era falsa y en contradicción con el sentido común y las observaciones. Al ser condenado por la Inquisición, al mismo tiempo que se le prohibió enseñar la nueva astronomía, Galileo se dedicó a la Mecánica. Su libro *Dos nuevas ciencias*, fue escrito estando prácticamente prisionero por la Inquisición. Éste establece las siguientes leyes de movimiento que no son suficientes por sí mismas para construir una ciencia completa del movimiento, pero que ciertamente son un buen punto de partida:

1) Cualquier cuerpo puesto en movimiento sobre un plano horizontal sin rozamiento continuará moviéndose indefinidamente con la misma velocidad (ley de la inercia).

2) En caída libre a través del vacío todos los objetos –de cualquier peso, tamaño o constitución– caen una distancia determinada en el mismo tiempo.

3) El movimiento de un objeto en caída libre o rodando hacia abajo sobre un plano inclinado, es uniformemente acelerado, es decir, se tienen incrementos iguales de velocidad en tiempos iguales.

Sin embargo, a pesar de la lucha del autoritarismo contra la ciencia, como lucha de la ignorancia contra el conocimiento, la ciencia no ha disminuido desde los tiempos de Galileo. Es el veredicto de la historia el que resuelve la postura de los científicos. La actitud de lucha de Galileo ha llegado a ser completamente aceptable a las autoridades religiosas. Aunque el Vaticano no anunció hasta 1968 la conveniencia de anular la condenación, en 1633, de las teorías de Galileo, la utilidad científica de su trabajo no se retrasó tanto. Antes de transcurridos cincuenta años de la muerte de Galileo, había aparecido el libro de Newton, *Principia*, integrando tan brillantemente el trabajo de Copérnico, Kepler y Galileo con los principios de la mecánica.

Existían abundantes ejemplos en los escritos de Galileo de como llegar a una correcta formulación de los problemas. Su trabajo representa el nuevo modo de observar el mundo de los hechos y experimentos. Mientras el énfasis sobre la observación y la inducción era aclamado por muchos, especialmente en la Royal Society, Galileo había ya demostrado

la fertilidad de hipótesis atrevidas combinadas con la deducción matemática. La vieja pregunta de Platón: <<¿qué hipótesis de movimientos uniformes y ordenados puede explicar los movimientos aparentes de los planetas?>>, había perdido su significado original en la nueva ciencia; la nueva preocupación se manifiesta por lo que puede llamarse los dos problemas críticos de la física del siglo XVII: <<¿qué fuerzas actúan sobre los planetas para explicar las trayectorias observadas?>> y <<¿cómo han de explicarse los efectos observados de la gravitación terrestre ahora que la doctrina aristotélica ha fallado?>>.

Se habían creado también buenos instrumentos de trabajo, tanto matemáticos como experimentales. Las matemáticas encontraban ahora amplia aplicación en la física, fertilizándose mutuamente los dos campos y dando ricas cosechas; los mismos hombres (Descartes, Newton y Leibniz) hacían descubrimientos importantes en ambos campos. La geometría analítica y el cálculo son parte del rico legado del siglo XVII, todavía útiles a la ciencia, aunque muchas de las teorías científicas de aquel siglo han sido superadas.

### 0.3 LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Cuando analizamos la historia, nos encontramos con que a veces, el progreso en un campo del conocimiento depende de una formulación incisiva del hombre sobre un problema concreto en el momento oportuno. Así ocurrió con la parte de la mecánica llamada *dinámica*, que estudia los efectos de las fuerzas sobre los cuerpos móviles. El hombre fue Isaac Newton, quien formuló los conceptos de la *fuerza* y *masa* en tres enunciados asociados entre sí, que con el tiempo se llaman las “*tres leyes de movimiento de Newton*”. Estas junto con una introducción al movimiento de rotación extienden su estudio a la cinemática pura. Con ello, no sólo entendemos un gran número de fenómenos mecánicos simples, sino también, con ayuda de la ley de gravitación universal de Newton, podemos resolver algunos de los problemas sobresalientes de astronomía.

Isaac Newton nació el día de Navidad de 1642 en la pequeña aldea de Woolsthorpe, en Lincolnshire. Fue un joven tranquilo, que como el joven Galileo, gustaba de construir y arreglar aparatos mecánicos y parecía tener una inclinación secreta por las matemáticas. Por la afortunada mediación de un tío suyo, Newton fue al Trinity College, en la universidad de Cambridge; en 1666, a los 24 años, había hecho importantes descubrimientos. Referente a este periodo Newton escribió más tarde: <<Y el mismo año comencé a pensar en la gravedad que se extendía a la órbita de la Luna y... a partir de la regla de Kepler (tercera ley) deduje que las fuerzas que mantienen los planetas en sus órbitas deben estar en razón inversa a los cuadrados de las distancias al centro alrededor del cual giran: y de este modo comparé la fuerza necesaria para mantener la Luna en su órbita con la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra y encontré para ella un resultado suficientemente preciso. Todo esto fue en los dos años de la peste de 1665 y 1666, pues en aquellos días estaba en la edad ideal para la invención y discurría acerca de las matemáticas y filosofía (ciencia física) mejor que en cualquier tiempo después>>.

En 1672 Newton se vió envuelto en amargas controversias con sus rivales de la Royal Society al publicar su *Teoría acerca de la luz y los colores*. Tímido e introvertido, resolvió no publicar ninguna otra cosa. Como Bertrand Russell decía: <<Si Newton hubiese encontrado el tipo de oposición que tuvo Galileo, es probable que nunca hubiera publicado una línea>>. Newton se concretó entonces, principalmente, en sus primeros trabajos sobre mecánica celeste y el estudio de los movimientos planetarios. En 1684, su amigo Edmond Halley pidió su consejo en la disputa que tenía con Christopher Wren y Robert Hook relativa a la fuerza que debe actuar sobre un cuerpo para que este se mueva en una órbita elíptica, de acuerdo con las leyes de Kepler. Newton le dijo que había encontrado hacía tiempo la solución rigurosa para este problema y para otros muchos. Halley persuadió a su indispuerto amigo a completar y publicar este trabajo relativo a uno de los problemas científicos más debatidos e interesantes de aquel tiempo. En menos de dos años de increíble trabajo, los *Principios* estuvieron preparados para el impresor; su aparición en 1687 dieron a Newton reputación como uno de los mayores científicos de todos los tiempos. El tratado propiamente dicho comienza con un conjunto de definiciones: *masa, cantidad de movimiento, inercia, fuerza, fuerza centrípeta*. Sigue después una parte sobre el espacio absoluto y relativo, tiempo y movimiento. Un tratamiento didáctico desde el punto de vista moderno nos daría que la primera ley, llamada a menudo *Principio de inercia* se puede enunciar así: “*Todo cuerpo material persiste en su estado de reposo o movimiento uniforme (no acelerado) en línea recta, solamente si no actúa sobre él una fuerza resultante (no equilibrada)*”; desde el mismo punto de vista moderno la segunda ley de movimiento se puede enunciar en la siguiente forma: “*La fuerza exterior resultante (no equilibrada) que actúa sobre un cuerpo material, es directamente proporcional y en la misma dirección que la aceleración del cuerpo*”.

Lo que la segunda ley establece es lo siguiente: si la presencia de una fuerza resultante se manifiesta cualitativamente por la variaciones que produce en la velocidad (según la primera ley), definimos esta fuerza precisamente como proporcional a la rapidez con que varía la velocidad del cuerpo. Si representamos por  $F_{net}$  la fuerza neta resultante que actúa sobre un cuerpo dado y por  $a$  su aceleración, podemos escribir

$$F_{net} \propto a \quad (\text{para un cuerpo determinado}),$$

o sea

$$\frac{F_{net}}{a} = \text{constante} \quad (\text{para un cuerpo determinado}).$$

La constante así definida es una medida de la inercia del cuerpo pues, evidentemente, si la razón  $F_{net}$  a  $a$  es grande, quiere decir que para producir una gran aceleración se requiere una fuerza grande, justamente lo que esperamos que ocurra con cuerpos de gran masa, a los que asignamos, intuitivamente, una gran inercia, mucho mayor que a los cuerpos pequeños y poco voluminosos.

La primera ley de Newton definió, cualitativamente, el concepto de fuerza, y la segunda ley nos proporciona una definición cuantitativa de la fuerza e introduce el concepto de masa. A ésto, Newton añadió la *tercera ley del movimiento*, que completa la caracterización general del concepto de fuerza, explicando en esencia, que toda fuerza que pueda existir



tiene su imagen gemela. En palabras de Newton: <<A cada acción, se le opone siempre una reacción igual: o bien, las acciones mutuas de dos cuerpos, unos sobre otros, son siempre iguales y dirigidas hacia las partes contrarias>>.

En la mitad del siglo XVII, cuando la ciencia estaba tomando una forma moderna reconocible, continuaba sin resolverse un antiguo problema: la estructura y la dinámica del sistema solar. Las tres secciones principales de los *Principios* contienen una riqueza abrumadora de descubrimientos físicos y matemáticos; entre ellas se incluyen las pruebas que condujeron a la ley de gravitación universal, pruebas tan rígidamente modeladas\* que se presenta aquí una deducción de esta histórica ley en una secuencia plausible.

a) Los planetas y los satélites no están en equilibrio. Una fuerza neta (no equilibrada) actúa sobre ellos. Si estuvieran en equilibrio, es decir, si ninguna fuerza neta actuara sobre ellos, su movimiento sería en línea recta y no en órbitas elípticas, de acuerdo con la primera ley del movimiento de Newton.

b) Cualquiera que sea la naturaleza o la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre un planeta o sobre un satélite, su dirección en cada instante, es hacia el centro del movimiento. Newton dedujo esta conclusión de la segunda ley de Kepler (*Principios*, libro I, proposiciones I y II), y podemos expresar su propio argumento del modo siguiente:

Un cuerpo que se mueve en línea recta a velocidad constante; en intervalos iguales de tiempo  $\Delta t$  recorrerá espacios iguales en tiempos iguales, es decir, en la figura 0.11,  $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS}$ , etc. Respecto a cualquier punto fijo O,

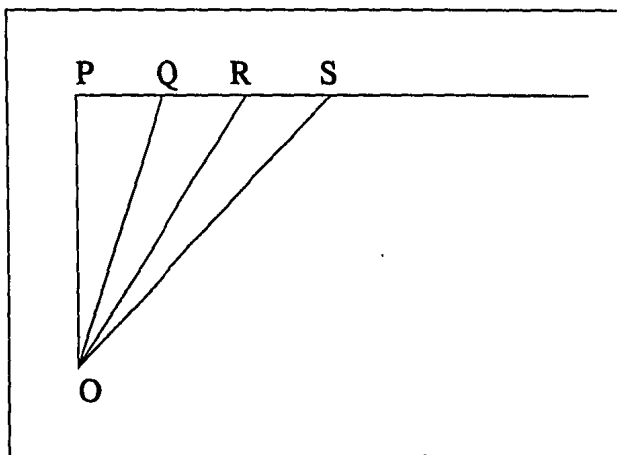


Fig 0.11

la línea que une O con el cuerpo móvil barrerá áreas iguales en tiempos iguales, ya que los triángulos  $PQO$ ,  $QRO$ ,  $RSO$ , etc., son todos de igual área por tener igual base y la misma altura. Imaginemos ahora que este cuerpo experimenta un impulso súbito y breve

\* Es interesante notar que los argumentos de Newton presentan la forma deductiva tradicional de Euclides.

en  $Q$  por la acción de la fuerza dirigida exactamente a lo largo de  $QO$ . Naturalmente, la dirección del movimiento se modifica. Se ha añadido una componente de la velocidad que durante el tiempo  $\Delta t$  por sí misma movería el cuerpo de  $Q$  a  $Q'$  (Fig 0.12),

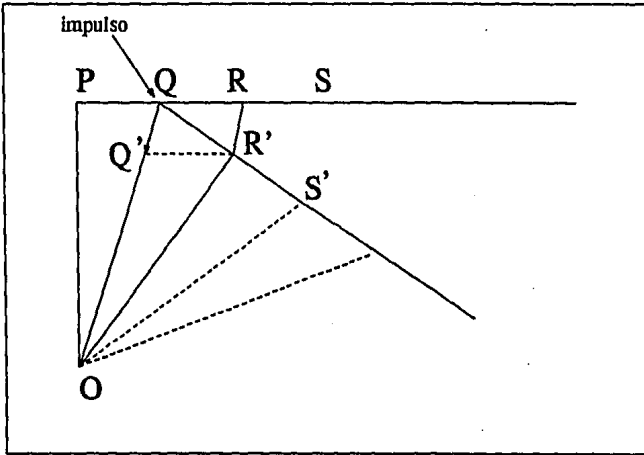


Fig 0.12

pero que junto con la velocidad original hacia  $R$ , da lugar a un desplazamiento total de  $Q$  a  $R'$ . Sin embargo, el área barrida durante el tiempo  $\Delta t$  no viene afectada por esta reorientación; ya que  $RR'$  es paralela a  $QQ'$ , por tanto, los triángulos  $OQR$  y  $OQR'$  tienen las mismas bases e iguales alturas. Por consiguiente, el área  $OQR'$  es también igual al área  $OPQ$ .

Si no actuara otra fuerza, el movimiento durante intervalos iguales de tiempo  $\Delta t$  seguiría de  $Q$  a  $R'$ , de  $R'$  a  $S'$ , etc. Pero un segundo impulso en  $R'$  de nuevo en dirección de  $O$ , modifica el movimiento una vez más (Fig 0.13).

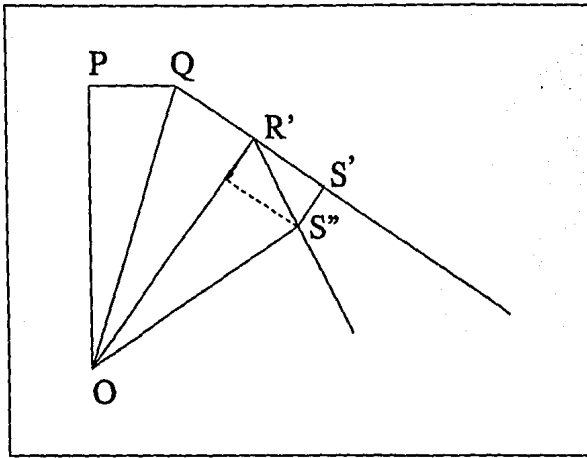


Fig 0.13

Por el mismo argumento que antes, conocemos que  $\text{área } OR'S'' = \text{área } OR'S'$ . En general, llegamos a la conclusión de que las fuerzas de *dirección central* aplicadas en intervalos iguales de tiempo no afectan las áreas barridas por unidad de tiempo. Como no hay ninguna razón restrictiva sobre el tamaño de los intervalos de tiempo, podemos elegirlos tan pequeños como queramos, de modo que en el límite cuando  $\Delta t$  tienda a cero, la fuerza dirigida al centro se convierte en una fuerza continua de dirección centrípeta y la línea quebrada se convierte en una curva uniforme. Finalmente, invirtiendo el argumento, y de acuerdo con Newton, diremos que, puesto que los planetas –según la segunda ley de Kepler–, barren áreas iguales en tiempos iguales, la fuerza que actúa sobre ellos debe ser una fuerza continua en dirección central. En el caso de la elipse, este centro de fuerza es uno de los focos; para el círculo es el centro.

c) Ahora hemos aceptado que la fuerza está dirigida al centro, *fuerza centrípeta*, surge el siguiente problema crucial: << Si un cuerpo describe una elipse, es necesario determinar la ley de la fuerza centrípeta dirigida al foco de la elipse >>. Newton demostró que si la trayectoria de un cuerpo es cónica, y si la fuerza que actúa sobre él en cualquier instante está dirigida hacia uno de los focos, entonces dicha fuerza es *inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del cuerpo al foco de la cónica*.

Con el propósito de facilitar la explicación no seguiremos la prueba general de Newton, pero demostraremos que, si para un planeta en una trayectoria *circular* la fuerza centrípeta se acepta igual a  $F = C/R^2$ , la ley es cierta.

La fuerza centrípeta  $F$  sobre el planeta –que como se ha supuesto– viene dada por  $C/R^2$ , es también la segunda ley de Newton, igual a  $m_p a_c$ , donde  $m_p$  es la masa del planeta y  $a_c$  la aceleración centrípeta. Para las trayectorias circulares alrededor del Sol, como ocurre aproximadamente, con casi todos los planetas,

$$a_c = \frac{v^2}{R},$$

siendo  $v$  la velocidad del planeta en su órbita. Pero

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

en donde  $T$  es el periodo de revolución del planeta en su órbita. Así resulta que

$$F = m_p a_c = m_p \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \quad (0.1)$$

Combinado el último resultado con nuestro valor supuesto para  $F$ , tenemos

$$\frac{C}{R^2} = m_p \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \quad \text{o} \quad T^2 = \left[ m_p \frac{4\pi^2}{C} \right] R^3. \quad (0.2)$$

Aquí,  $T^2$  es proporcional a  $R^3$ , pero a menos que podamos probar que  $m_p/C$  es una constante para todos los planetas, no se habrá justificado la tercera ley de Kepler.

d) El origen de la fuerza centrípeta necesaria para mantener los planetas en sus órbitas no ha sido analizado hasta ahora. Recordemos que ya Kepler especulaba acerca de alguna fuerza magnética que emanaba del Sol para mover los planetas. Aunque no implicaba en sí mismo una hipótesis útil, esto ayudó a llamar la atención hacia el Sol como un factor importante en la explicación del movimiento planetario.

En este momento Newton propuso una solución drástica: *Todos los cuerpos del Universo se atraen unos a otros con una fuerza gravitatoria, como la que existe entre una piedra que cae y la Tierra; por consiguiente, las fuerzas centrales sobre los planetas no son otra cosa que la atracción gravitatoria por parte del Sol*, y de modo semejante, la fuerza central del satélite que gira alrededor de un planeta viene dada por la atracción gravitatoria ejercida sobre él por el planeta. Un siglo antes hubiera sido vista como una locura considerar que las fuerzas responsables de los movimientos de los cuerpos celestes estuviesen regidas por leyes análogas a las terrestres, pero ahora, después de Kepler y Galileo, se había unificado la física del cielo y la Tierra.

Veamos si la fuerza centrípeta  $F$  necesaria para mantener la Luna en su (aproximadamente) órbita circular alrededor de la Tierra puede identificarse con la gravedad terrestre. La dirección de  $F$ , es por definición hacia el centro de la Tierra, y esto coincide con la dirección de la fuerza de gravedad. Aplicando la ecuación de la fuerza centrípeta en este caso

$$F = m_L \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

en donde  $m_L$  es la masa de la Luna,  $R$  su distancia medida desde el centro de la Tierra, y  $T$  su periodo de revolución.

¿Coincide este valor de  $F$  con la atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre nuestro satélite, como propónia Newton? Esto depende de la fuerza gravitatoria. Si la gravedad se

propaga sin disminuir en todo el espacio, el peso de la Luna será simplemente,  $m_L g$ , el mismo que tendría una piedra de la masa de la Luna situada en la superficie de la Tierra. Pero es poco probable que la aceleración gravitatoria sea la misma a cualquier distancia de la Tierra, ya que debemos recordar que en la parte c) anterior se evidenció que la fuerza centrípeta, debe seguir también una ley inversa con el cuadrado de la distancia.

Supongamos entonces que el peso de un objeto disminuye de acuerdo con tal ley y veamos si la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la Luna iguala justamente la fuerza centrípeta (0.1). Un objeto de la misma masa que la Luna,  $m_L$ , tiene un peso de  $m_L g$  cuando se pesa en la superficie de la Tierra, es decir, a una distancia  $r_T$  (el radio de la Tierra) del centro de la Tierra. Aquel mismo objeto cuando se lleva a una distancia  $R$  del centro de la Tierra tendrá un peso menor,  $W_R$ , que deberá cumplir la siguiente proporción si se obedece la ley inversa del cuadrado

$$\frac{m_L g}{W_R} = \frac{1/r_T^2}{1/R^2}$$

o sea,

$$W_R = m_L g \frac{r_T^2}{R^2} \quad (0.4)$$

Si la fuerza centrípeta  $F$  que actúa sobre la masa  $m_L$  que gira alrededor de la Tierra a la distancia  $R$  con un periodo  $T$  es realmente equivalente a la fuerza gravitatoria  $W_R$  a dicha distancia, los términos del segundo miembro de (0.1) y (0.2) serán iguales

$$m_L \frac{4\pi^2 R}{T^2} = m_L g \frac{r_T^2}{R^2},$$

o simplificando,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g r_T^2} R^3. \quad (0.5)$$

Si sustituímos los datos observados para  $T, g, r_T, R$  en (0.3) y encontramos que se cumple la igualdad, está justificado que tomemos como válida nuestra hipótesis.

Este fue el cálculo que Newton hizo con los datos de la época y encontró una "respuesta muy próxima" dentro de un porcentaje reducido. La hipótesis de una trayectoria estrictamente circular y valores algo inexactos de  $r_T$  y  $g$  aclararon desde un principio que no podía esperarse un acuerdo perfecto.

No se han considerado hasta ahora las fuerzas entre el Sol y los planetas, pero debemos sospechar, de nuevo, que estas ideas pueden extenderse a todo el sistema solar, Newton decía:

*La fuerza que retiene los cuerpos celestes en sus órbitas ha sido llamada hasta ahora, fuerza centrípeta; pero está claro que ésta no puede ser otra más que la fuerza gravitatoria que llamaremos en adelante gravedad. Por esta causa la fuerza que retiene la Luna en su órbita se extenderá a los planetas.*

Sin embargo, esto no es una prescripción y debe ser probado.

Recordemos que la fuerza centrípeta que actúa sobre los planetas en sus órbitas circulares alrededor del Sol viene dada por la ecuación (0.1). ¿Corresponde esta ecuación, en cada caso a la atracción gravitatoria del Sol sobre un planeta en particular? Si conociéramos el valor de  $g$  sobre la superficie del Sol, podríamos modelar los argumentos como en el caso anterior, pero lo desconocemos y debemos de recurrir a otro argumento.

De la discusión de la Tierra y la Luna, podemos decir atrevidamente que, la fuerza gravitatoria  $F_{grav}$  entre dos cuerpos simétricos esféricos es proporcional a la inversa del cuadrado de la distancia entre sus centros †

$$F_{grav} \propto \frac{1}{R^2}.$$

Si por otra parte consideramos dos cuerpos sólidos específicos totalmente aislados del resto del Universo; por ejemplo, una piedra ( $m_1$ ) y la Tierra ( $m_2$ ) a una distancia  $R$  entre sus centros. La atracción de la gravedad o peso de  $m_1$  a la distancia  $R$  es  $F_{grav}$ . Pero según la segunda ley de Newton de acción y reacción, la atracción de la Tierra ( $m_2$ ) ejercida por  $m_1$  es igual a la atracción de  $m_1$  por  $m_2$ , por lo tanto cualquiera de las dos atracciones puede llamarse  $F_{grav}$ .

Sin embargo, sabemos por experiencia que en una determinada localidad el peso de la piedra crece proporcional a su masa, o sea,  $F_{grav} \propto m_1$ . Por otra parte, si la masa del planeta cambiara, el peso de la piedra determinada variaría también.

Combinando estas tres proporcionalidades,

$$F_{grav} \propto \frac{1}{R^2}, \quad F_{grav} \propto m_1, \quad F_{grav} \propto m_2,$$

tenemos

$$F_{grav} \propto \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad \text{o} \quad F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad (0.6)$$

en donde  $R$  es la distancia central entre los dos cuerpos y  $G$  es una constante de proporcionalidad. Parece ser entonces que tenemos una "*ley de gravitación universal*", y para confirmar ésta debemos mostrar que es compatible con las tres leyes de Kepler. No hay problema con las dos primeras: órbitas elípticas y relaciones de áreas iguales, ya que es una fuerza central y proporcional a la inversa de los cuadrados de las distancias. ¿Pero que ocurre con la tercera ley de Kepler? Recordemos que nuestro argumento previo en la ecuación (0.2) no bastaba. No habíamos probado allí que  $T^2/R^3$  era una constante universal.

Apliquemos la ley de gravitación universal al movimiento de nuestro propio planeta. La fuerza centrípeta que debe existir en nuestra masa  $m_p$  a la distancia  $R_p$  del Sol, viene dada por

---

† Esto puede demostrarse matemáticamente integrando las fuerzas de punto a punto sobre los dos cuerpos. Ésta fue una de las razones por las que Newton no publicó antes su Principia.

$$m_{ps} \frac{4\pi^2 R_{ps}}{T^2}.$$

La fuerza gravitatoria supuesta es

$$G \frac{m_p m_s}{R_{ps}^2}.$$

Si las dos coinciden, es decir, si la fuerza gravitatoria *suministra* y así *explica* la fuerza centrípeta, entonces

$$m_p \frac{4\pi^2 R_{ps}}{T^2} = G \frac{m_p m_s}{R_{ps}^2} \quad \text{o} \quad T^2 = \left[ \frac{4\pi^2}{G m_s} \right] R_{ps}^3 \quad (0.7)$$

Ahora podemos ver que  $T^2/R_{ps}^3$  es realmente una constante para todos los planetas, como requiere la tercera ley de Kepler, ya que el paréntesis de (0.7) contiene sólo la constante  $G$ , la masa del Sol y un factor numérico; ninguna de estas magnitudes es variable de un planeta a otro.

Pero todavía queda otra duda. ¿Es correcto haber supuesto, con tan poco rigor, que  $G$  tiene el mismo valor para todos los planetas? Esta respuesta fue contestada afirmativamente por Cavendish, al utilizar una balanza de torsión y medir la fuerza de atracción entre diferentes materiales.

#### 0.4 EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

La contención de las leyes de Kepler en las leyes de Newton se puede probar sin las aproximaciones del capítulo anterior, suponiendo que la atracción entre dos cuerpos esféricos homogéneos es equivalente a la atracción entre dos puntos (esto es sencillo de hacer).

Tenemos que el Lagrangiano para dos partículas,  $m_1$  y  $m_2$ , que interactúan libremente está dado por

$$L = \frac{1}{2} \mu |\dot{y}|^2 - U(r)$$

donde  $\mu$  es la masa reducida,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , y  $U(r)$  es la energía potencial. Hemos reducido el problema de movimiento de dos cuerpos al problema equivalente de un cuerpo, en el cual debemos determinar sólo el movimiento de una partícula de masa  $\mu$  en el campo central descrito por la función de potencial  $U(r)$ . Ya que la energía potencial depende sólo de la distancia de la partícula al centro de fuerza, y no de la orientación, el sistema posee simetría esférica, y por lo tanto el momento angular del sistema se conserva

$$L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.}$$

De esta relación es claro que ambos, el radio vector y el momento angular de la partícula permanecen en un plano normal al momento angular  $L$ . Por lo tanto tendremos que el movimiento será en un plano.

Sean las masas del Sol y la Tierra,  $m$  y  $m_1$ , con coordenadas  $\vec{r}$  y  $\vec{r}_1$  respectivamente. Eligiendo al Sol como origen de coordenadas, es decir, poniendo  $\vec{x}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}$ , se tiene que la ecuación de movimiento de la Tierra es

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -\gamma \frac{(m_1 + m)}{|\vec{x}_1|^3} \vec{x}_1$$

Poniendo las coordenadas del vector  $\vec{x}_1$  en coordenadas polares,  $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$  y  $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$ , se tiene

$$\dot{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{\dot{r}}{r} \vec{x}_1 + r \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{x}}_1 = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{2}{r} \frac{d^2 S}{dt^2} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

con  $\frac{dS}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}$  la velocidad azelar. Ahora como  $\ddot{\vec{x}}_1$  depende sólo de la distancia entre Sol y Tierra, en otras palabras, el potencial no depende del ángulo, se tendrá que  $\frac{d^2 S}{dt^2} = \text{const} = k$ , y recuperamos la segunda ley de Kepler.

De la expresión para  $\ddot{\vec{x}}_1$  y usando el hecho que  $\dot{\theta} = 2k/r^2$  se tiene

$$\ddot{r} - \frac{4k^2}{r^3} + \gamma \frac{(m_1 + m)}{r^2} = 0.$$

Pero  $\dot{r} = \frac{dr(\theta(t))}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{2k}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -2k \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right)$ . Del mismo modo  $\frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( -2k \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = -2k \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \dot{\theta} = -\frac{4k^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right)$ .

La ecuación de movimiento se escribe

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} - \gamma \frac{(m_1 + m)}{4k^2} = 0$$

y poniendo  $y(\theta) = \frac{1}{r} - \gamma \frac{(m_1 + m)}{4k^2}$ ,  $\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = 0$ , con solución

$$y(\theta) = A \cos(\theta - \phi).$$

Por lo tanto, tomando  $\phi = \pi$ , lo cual se logra con una simple rotación de ejes,

$$r = \frac{\rho e}{1 - e \cos \theta},$$

con  $\rho = -A$ , y  $e = A \frac{4k^2}{\gamma(m_1 + m)}$ , por lo tanto, tenemos una elipse, es decir, la primera ley de Kepler.



Finalmente, el área de una elipse es  $\pi ab$ , barrida con velocidad constante  $\frac{ds}{dt} = k$  en un tiempo  $T$ , es decir:  $\pi ab = kT$ . Como  $r = \frac{\rho e}{1 - e \cos \theta}$ , tenemos  $2a = \frac{\rho e}{1 - e} + \frac{\rho e}{1 + e} = \frac{2\rho e}{1 - e^2}$ . Además  $b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2)$ , por lo tanto

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{k^2} = \frac{\pi^2 a^4}{k^2} (1 - e^2) = \frac{\pi^2}{k^2} a^3 \rho e = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m)} a^3$$

recuperando la tercera ley de Kepler, ya que  $m_1 \ll m$ .

### 0.5 EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

Consideremos las ecuaciones de movimiento de dos planetas (con masas  $m_1, m_2$ ) y el Sol (con masa  $M$ ), moviéndose bajo las leyes de Newton e ignorando todos los otros efectos, Fig 0.14,

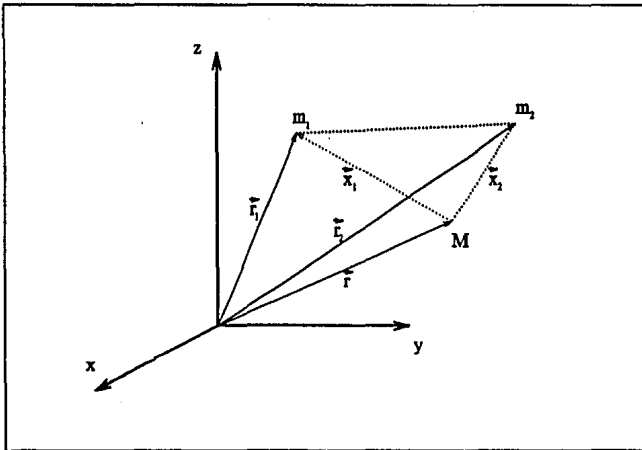


Fig 0.14

donde  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son los vectores de posición de los planetas y  $\vec{r}$  el del Sol. Tenemos por lo tanto que la fuerza sobre el Sol, tomando la constante de gravitación igual a la unidad, es:

$$\vec{F}_S = \frac{Mm_1(\vec{r}_1 - \vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} + \frac{Mm_2(\vec{r}_2 - \vec{r})}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^3}, \quad (0.8)$$

de aquí que la aceleración del Sol sea

$$\vec{a}_S = \frac{m_1(\vec{r}_1 - \vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} + \frac{m_2(\vec{r}_2 - \vec{r})}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^3}. \quad (0.9)$$

Eligiendo al Sol como el origen de coordenadas, es decir, poniendo  $\vec{x}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}$  y  $\vec{x}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}$  vemos que la ecuación de movimiento para el primer planeta está dada por

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}}_1 &= -\vec{a}_S - \frac{M\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|^3} - \frac{m_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \\ &= -\frac{(m_1 + M)\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|^3} - \frac{m_2\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|^3} - \frac{m_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}.\end{aligned}\quad (0.10)$$

donde  $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ .

De la misma forma, se obtiene la ecuación de movimiento para el segundo planeta que está dada por

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -\frac{(m_2 + M)\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|^3} - \frac{m_1\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|^3} - \frac{m_1(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}.\quad (0.11)$$

El problema de los tres cuerpos consiste entonces en resolver estas dos últimas ecuaciones, pero a menos que imponamos condiciones sobre masas y distancias el problema se vuelve prácticamente imposible de resolver.

A continuación definimos la siguiente función que nos será de utilidad en los cálculos de la siguiente sección

$$V = \frac{m_1(m_1 + M)}{|\vec{x}_1|} + \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} - \frac{m_1 m_2 (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)}{|\vec{x}_2|^3}\quad (0.12)$$

la cual tiene la propiedad de que

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \nabla_1 V; \quad \text{donde } \nabla_1 = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1} \right).\quad (0.13)$$

## 0.6 LA TEORÍA LUNAR DE HILL

### Y EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS

El propósito de esta sección es mostrar la manera en la que influye el Sol en el movimiento de la Luna para desviar a ésta de una órbita eclíptica con centro en la Tierra. Primeramente se plantea el problema como un problema de tres cuerpos y enseguida se manejan las diferencias significativas que existen entre distancias y masas de los cuerpos involucrados; haciendo de este problema, un problema restringido. Esto nos arrojará un factor pequeño debido al Sol en las ecuaciones de movimiento para la Luna, una perturbación.

La manera de resolver estas ecuaciones de movimiento, que involucran esta perturbación debida al Sol, es considerando que la inclinación de la Luna a la eclíptica de la Tierra es pequeña, lo cual simplifica las ecuaciones, y a su vez influye en que el movimiento

ortogonal de la Luna a la eclíptica de la Tierra sea despreciable sobre sus otras dos coordenadas. Sin embargo, el movimiento periódico de la Luna sobre la eclíptica de la Tierra jugará un papel decisivo sobre el movimiento ortogonal, que estará gobernado por lo que se conoce como la ecuación de Hill.

Reconsideremos la situación similar al sistema Tierra-Luna-Sol. En este caso, la Tierra ejerce una fuerza mayor sobre la Luna que la del Sol (Fig 0.15), por esto el Sol le cede el lugar a la Tierra en el esquema de la sección anterior, y tendremos que la ecuación (0.10), la ecuación de movimiento de la Luna respecto a la Tierra, se transforma en

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{(M_{Tierra} + m_{Luna})\vec{x}}{r^3} - \frac{m_{1Sol}\vec{x}_1}{r_1^3} - \frac{m_{1Sol}(\vec{x} - \vec{x}_1)}{\Delta^3} \quad (0.14)$$

donde por simplicidad consideramos sólo la primera coordenada, es decir

$$\ddot{x} = -\frac{(M_{Tierra} + m_{Luna})x}{r^3} - \frac{m_{1Sol}x_1}{r_1^3} - \frac{m_{1Sol}(x - x_1)}{\Delta^3} \quad (0.15)$$

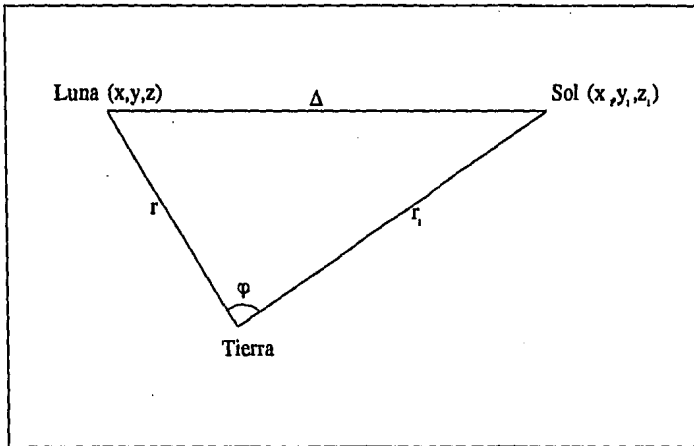


Fig 0.15

Ya que  $r \ll r_1$ , y los hechos físicos de que el baricentro del sistema Tierra-Luna permanece dentro de la Tierra y el de Tierra-Sol permanece dentro del Sol, se sigue que la perturbación de la órbita del Sol es muy pequeña -. Sin embargo, el efecto del Sol en la órbita de la Luna no es despreciable, y ésta es la causa principal de la dificultad en la teoría lunar.

Sea  $\varphi$  el ángulo entre  $r$  y  $r_1$ , entonces

$$rr_1 \cos \varphi = xx_1 + yy_1 + zz_1, \quad (0.16)$$

de donde se obtiene

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi. \quad (0.17)$$

Escribamos  $r = \alpha r_1$ , y como  $\alpha$  es una función del tiempo y es pequeña ( $\sim 1/400$ ), podemos hacer el siguiente desarrollo en potencias de  $\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r_1} (1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r_1} + \frac{\alpha \cos \varphi}{r_1} + \frac{\alpha^2}{r_1} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right] + \dots \end{aligned} \quad (0.18)$$

Por otra parte tenemos que (0.12) se puede escribir como

$$\frac{1}{m} V = \frac{M+m}{r} + \frac{m_1}{\Delta} - \frac{m_1}{r_1^3} r r_1 \cos \varphi \quad (0.19)$$

De (0.18) y escribiendo  $\frac{m_1 r}{r_1^3} \cos \varphi$  como  $\frac{m_1 \alpha}{r_1} \cos \varphi$  vemos que la última ecuación se transforma en

$$\frac{1}{m} V = \frac{M+m}{r} + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_1}{r_1} \alpha^2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right] + \dots \quad (0.20)$$

Ahora  $\frac{m_1}{r_1}$  no depende de  $(x, y, z)$  y para nuestros fines puede ser omitida de  $V$ , por esto, el término de mayor perturbación es

$$\frac{m_1}{r_1} \alpha^2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right]. \quad (0.21)$$

Comparando éste con el término principal  $\frac{M+m}{r}$  y usando la relación (3) del apéndice I, se tiene que el cociente es proporcional a

$$\frac{m_1}{M+m} \alpha^3 = \frac{m_1}{M+m} \frac{r^3}{r_1^3} \approx \frac{\mu_1^2}{\mu^2} \quad (0.22)$$

donde  $\mu_1$  es el movimiento medio (aproximadamente) del Sol (=1 por año) mientras que  $\mu$  es el de la Luna (= entre 12 y 13 por año). Entonces el término de mayor perturbación es del orden de magnitud de  $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13}$ .

Hill en su trabajo fundamental razonó como sigue: Supongamos, a primera aproximación, que podemos ignorar la excentricidad solar ( $e_1 = 0.017$ ) y la razón  $\alpha$  ( $\approx 0.0025$ ). (Estos efectos pueden ser introducidos después como perturbaciones). Entonces la función de perturbación (0.21) es

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{r_1} \alpha^2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right] &\approx \frac{m_1 r^2}{a_1^3} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right], \\ &= \mu_1^2 r^2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (0.23)$$

donde  $a_1$  es el semieje mayor de la trayectoria del Sol.

Introduzcamos las coordenadas  $X, Y, Z$  donde  $Z = z$  y  $X, Y$  rotan en el plano  $xy$  (la eclíptica) con la velocidad angular  $\mu_1$ , así el eje positivo  $X$  está siempre dirigido hacia el Sol (en promedio), como se muestra en la figura 0.16.

Reescribiendo las ecuaciones de movimiento en estas nuevas coordenadas tenemos

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

donde  $A(t) = \begin{bmatrix} \cos \mu_1 t & \text{sen } \mu_1 t \\ -\text{sen } \mu_1 t & \cos \mu_1 t \end{bmatrix}$ .

Ahora,

$$\dot{A}(t) = \mu_1 \begin{bmatrix} -\text{sen } \mu_1 t & \cos \mu_1 t \\ -\cos \mu_1 t & -\text{sen } \mu_1 t \end{bmatrix}, \quad y \quad \ddot{A}(t) = -\mu_1^2 A(t).$$

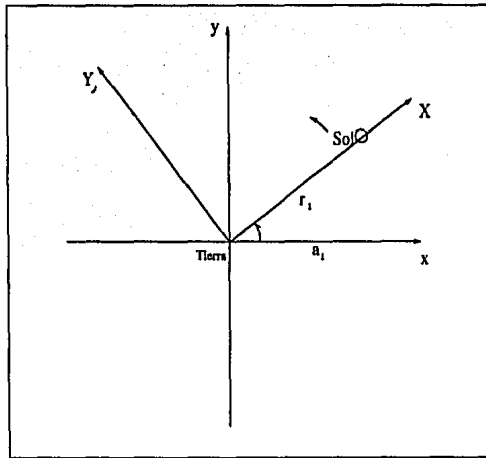


Fig 0.16

Ya que

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \dot{A}(t) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A(t) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} Y \\ -X \end{bmatrix} + A(t) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

de donde se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A^{-1}(t) \begin{pmatrix} \dot{X} - \mu_1 Y \\ \dot{Y} + \mu_1 X \end{pmatrix}$$

tenemos

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = -\mu_1^2 \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 2\dot{A}(t)A^{-1}(t) \begin{bmatrix} \dot{X} - \mu_1 Y \\ \dot{Y} + \mu_1 X \end{bmatrix} + \frac{A(t)}{m} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \end{bmatrix}.$$

Ahora, es fácil ver que

$$\dot{A}(t)A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mu_1,$$

y que el último término es igual a

$$\frac{1}{m} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \end{bmatrix}.$$

De esta manera finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} - 2\mu_1 \frac{dY}{dt} - \mu_1^2 X &= -\frac{(M+m)X}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial X}; \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\mu_1 \frac{dX}{dt} - \mu_1^2 Y &= -\frac{(M+m)Y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Y}; \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= -\frac{(M+m)Z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (0.24)$$

donde  $R \approx \mu_1^2 r^2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right]$  es el término de mayor perturbación.

Haciendo la suposición adicional de que la inclinación de la Luna es pequeña, se puede poner, a primera aproximación que  $r \cos \varphi = X$ , es decir  $R \approx \mu_1^2 \left( -\frac{r^2}{2} + \frac{3}{2} X^2 \right)$ , con  $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ , y las primeras dos ecuaciones de (0.24) se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} - 2\mu_1 \frac{dY}{dt} - 3\mu_1^2 X + \frac{(M+m)X}{r^3} &= 0; \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\mu_1 \frac{dX}{dt} + \frac{(M+m)Y}{r^3} &= 0, \end{aligned} \quad (0.25)$$

ya que  $\frac{\partial R}{\partial X} = 2\mu_1^2 X$ ,  $\frac{\partial R}{\partial Y} = -\mu_1^2 Y$ ,  $\frac{\partial R}{\partial Z} = -\mu_1^2 Z$ .

Es usual para comparar las magnitudes de varios términos hacer el cambio de variable  $\tau = (\mu - \mu_1)t$ , entonces (0.25) se transforma en

$$\begin{aligned} X'' - 2\nu Y' - 3\nu^2 X + \frac{kX}{r^3} &= 0; \\ Y'' + 2\nu X' + \frac{kY}{r^3} &= 0, \end{aligned} \quad (0.26)$$

donde  $\nu = \frac{\mu_1}{\mu - \mu_1}$  ( $\approx \frac{1}{12}$  en el caso de la Luna) y  $k = \frac{(M+m)}{(\mu - \mu_1)^2}$ .

Ya que  $\nu$  es pequeña podemos ignorar  $\nu^2$  y suponiendo a primera aproximación que la trayectoria de la Luna es circular,  $r = a$  (con  $a$  el semieje mayor de la elipse), tenemos que una solución aproximada explícita de (0.26) es

$$X = a \cos \lambda \tau; \quad Y = a \sin \lambda \tau, \quad (0.27)$$

si se cumple que  $\frac{k}{a^2} = \lambda^2 + 2\lambda\nu$ , la cual es un círculo.

Es de esperar entonces que el término  $-3\nu^2 X$  tenga el efecto de distorsionar el círculo en una figura ovalada. En efecto, observamos que si  $(X(\tau), Y(\tau))$  es solución de (0.26), entonces también lo será  $(X(-\tau), -Y(-\tau))$  y  $(-X(-\tau), Y(-\tau))$ . El primero de estos hechos implica, por el teorema de existencia y unicidad, que si  $(X(\tau), Y(\tau))$  es una solución con la condición inicial  $Y(0) = 0$ ,  $\dot{X}(0) = 0$  (cruza perpendicular al eje  $X$ ), entonces  $X(-\tau) = X(\tau)$  y  $Y(-\tau) = -Y(\tau)$ . Entonces la curva es simétrica con respecto al eje  $X$ . De igual manera, una curva que cruza perpendicular al eje  $Y$ , será simétrica con respecto al eje  $Y$ .

Guiado por el hecho de que la curva es un ovalo, Hill procedió a determinar la solución periódica poniendo

$$\begin{aligned} X(\tau) &= \sum A_n \cos(2n+1)\omega\tau; \\ Y(\tau) &= \sum B_n \sin(2n+1)\omega\tau, \end{aligned} \quad (0.28)$$

determinando los coeficientes  $A_n, B_n$ . Notese que en  $X(\tau)$  no se presentan términos senos y en  $Y(\tau)$  no se presentan términos cosenos, ya que  $X(-\tau) = X(\tau)$  y  $Y(-\tau) = -Y(\tau)$ . De manera análoga sólo tenemos enteros impares por simetría con respecto al eje  $Y$ . Aquí  $\omega$  es el promedio sinódico de la Luna (el mes promedio).

En resumen, las aproximaciones de:  $R$  por  $\mu_1^2 r^2 [-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi]$ , de  $X$  por  $r \cos \varphi$  y de  $r^2$  por  $X^2 + Y^2$ , se reflejan en una aproximación de las ecuaciones (0.24) por las ecuaciones

$$\begin{aligned} X'' - 2\nu Y' - 3\nu^2 X + \frac{kX}{r^3} &= 0; \\ Y'' + 2\nu X' + \frac{kY}{r^3} &= 0; \\ Z'' + \nu^2 Z + \frac{kZ}{r^3} &= 0, \end{aligned}$$

La función  $Z \equiv 0$  es solución de la tercera ecuación. Sin embargo, se quiere considerar el caso  $Z \approx 0$  y ver como se comporta  $Z$  en ese caso, entonces las primeras dos ecuaciones de (0.24) permanecen independientes de la tercera, y por lo tanto asumimos que  $X, Y$  son soluciones de (0.26). De esto,  $X, Y$  son funciones periódicas de  $\tau$ , y por ende de  $t$ . Por esto la tercera ecuación de (0.24) puede ser escrita como

$$\ddot{Z} + \Theta Z = 0, \quad (0.29)$$

donde  $\Theta = \nu^2 + \frac{k}{r^3}$  es una función periódica por la periodicidad de  $X$  y  $Y$ . Esta ecuación es conocida como la ecuación de Hill.<sup>[51c]</sup>

Ahora si multiplicamos la primera ecuación de (0.26) por  $X'$  y la segunda por  $Y'$  y sumamos

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{3}{2} \nu^2 X^2 - \frac{k(X^2 + Y^2)}{r^3} \right\} = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{3}{2}\nu^2 X^2 - \frac{k(X^2 + Y^2)}{r^3} = C. \quad (0.30)$$

De esta última tenemos

$$\frac{k}{r^3} = \frac{\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{3}{2}\nu^2 X^2 - C}{(X^2 + Y^2)}. \quad (0.31)$$

Ya que  $X$  y  $Y$  son series trigonométricas en  $\cos(2n+1)\omega\tau$  y  $\sin(2n+1)\omega\tau$  respectivamente, se sigue de (0.31) que  $\Theta$  es una serie trigonométrica con coeficientes pares solamente. Entonces podemos escribir a  $\Theta$  como

$$\Theta = \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2\omega\tau + 2\theta_2 \cos 4\omega\tau + \dots$$

El procedimiento de Hill para resolver (0.29) fue escribir a ésta en series de Fourier

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} q_n e^{2ins} \right] Z = 0,$$

(con otro cambio de variable); agrupar los términos correspondientes en potencias de la exponencial, lo cual le condujo a tratar un sistema infinito de ecuaciones lineales. Él introdujo los llamados "*determinantes infinitos*" para resolver la ecuación, lo que fue más tarde justificado por Poincaré.

El trabajo de Hill introdujo tres ideas básicas las cuales fueron tomadas por Poincaré y desarrolladas por otras áreas de las matemáticas modernas: la idea de la geometría cualitativa para el estudio de las ecuaciones diferenciales, métodos de funciones implícitas en espacios de dimensión infinita, y análisis lineal en espacios de dimensión infinita.

Es interesante hacer notar que Hill no tenía ninguna posición académica en su país, era un contador en *the National Bureau of Standards*. Hill trabajaba varias horas haciendo su propia investigación en las noches y, a pesar de esto, su trabajo no fue apreciado por sus colegas durante muchos años. Cuando Poincaré fue a los Estados Unidos después de terminado el siglo, a la única persona que fue a visitar fue a Hill. Después se le ofreció a Hill una promoción, pero éste se negó argumentando que las nuevas responsabilidades le dejarían menos tiempo libre para su propio trabajo.



## 0.7 EL PÉNDULO CON LONGITUD VARIABLE

El estudio de la ecuación de Hill, como se vió en la sección anterior, comienza al tratar de describir el movimiento de la Luna, considerando que ésta tiene una masa mucho menor que la de la Tierra y el Sol. Al tratar de modelar un péndulo con longitud variable aparece la misma ecuación.

Consideremos ahora el problema de un péndulo de longitud  $a$  con una masa  $m$  que está suspendido de un soporte el cual se mueve verticalmente con un desplazamiento  $\xi(t)$  (este ejemplo ha sido tomado de [J-S] pg 237)

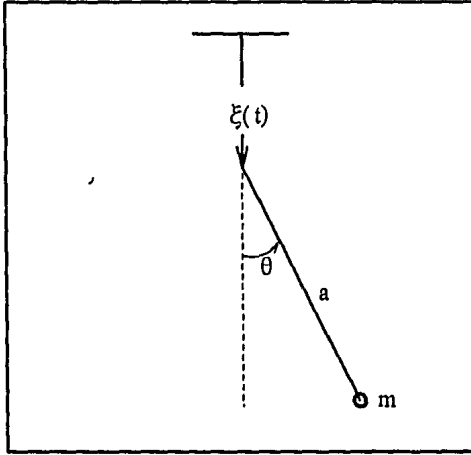


Fig 0.17

las coordenadas cartesianas de  $m$  son

$$x = a \operatorname{sen}(\theta),$$

$$y = \xi(t) + a \operatorname{cos}(\theta),$$

con el objeto de deducir la ecuación de movimiento, debemos obtener la energía cinética y potencial, entonces derivemos las ecuaciones anteriores

$$\dot{x} = a \operatorname{cos}(\theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{\xi} - a \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta}$$

y calculando la energía cinética ( $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ )

$$T = \frac{m}{2} \left[ (\dot{\xi} - a \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta})^2 + a^2 \operatorname{cos}^2(\theta) \dot{\theta}^2 \right] = \frac{m}{2} \left[ \dot{\xi}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 - 2a \dot{\xi} \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \right],$$

y la energía potencial

$$V = -mg(\xi + a\cos\theta).$$

obtenemos al sustituir estas en la ecuación de Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} [Lan]$ ,

$$a\ddot{\theta} + (g - \ddot{\xi})\sin\theta = 0.$$

Para amplitudes pequeñas, ésta última se transforma en

$$a\ddot{\theta} + (g - \ddot{\xi})\theta = 0.$$

A esta ecuación la podemos escribir en la forma estandar siguiente

$$\ddot{x} + (\alpha + p(t))x = 0 \tag{0.32}$$

Cuando  $p(t)$  es periódica, la ecuación (0.22) no es más que la ecuación de Hill (0.29). Para el caso especial en que  $p(t) = -2\beta\cos 2t$  †

$$\ddot{x} + (\alpha - 2\beta\cos 2t)x = 0 \tag{0.33}$$

es conocida como la ecuación de Mathieu. Este tipo de movimiento forzado en el cual  $p(t)$  actúa como una fuente de energía, es conocido como resonancia paramétrica.<sup>[Lan]</sup>

---

† La elección de esta rara expresión es simplemente para facilitar los cálculos, sin embargo, basta con que  $p(t)$  sea cosenoidal para tener la ecuación de Mathieu.

---

1

ANTECEDENTES  
MATEMÁTICOS

---

<<Te diré lo que es conocimiento verdadero: cuando sabes, saber que sabes; cuando no sabes, saber que no sabes >>.

Confucio (551 a.C.-479 a.C.)  
filósofo chino.

Este capítulo consta del material necesario para los desarrollos que se presentan en los capítulos siguientes.

La primera sección consta del teorema de existencia y unicidad, que aunque es de dominio público, se incluye porque se demuestra de una manera simple y elegante. En la segunda sección se dan las nociones de distancia, polinomio característico, valores propios, vectores propios, forma canónica de Jordan, etc. La tercera parte tiene que ver con ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes, por lo que se hace especial énfasis la obtención de la exponencial de una matriz. Por último, siendo la parte más importante del capítulo y también el principio de la parte medular de la tesis, la teoría de Floquet.

## 1.1 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

En Matemáticas existen varios teoremas importantes de punto fijo. El que veremos aquí se refiere a contracciones en un espacio métrico completo, y se llama teorema de punto fijo de Banach, en honor del matemático polaco Stefan Banach (1892-1945).

**Definición 1.1:** Sean  $(X, d_1), (Y, d_2)$  espacios métricos. Una transformación  $T$  de  $X$  en  $Y$  se llama contracción si existe un número  $\lambda \in (0, 1)$  tal que

$$d_2(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \lambda d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Una contracción  $T$  transforma cada par de puntos  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en un par  $(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y}))$ , cuyos miembros están más cerca uno de otro. La definición implica claramente la continuidad de una contracción.

Si  $f$  es una función de valores reales y de variable real que es diferenciable en el intervalo  $[a, b]$  y si

$$|f'(x)| \leq \lambda < 1 \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

entonces  $f$  es una contracción en  $[a, b]$ . Esto es consecuencia del teorema del valor medio: para cada  $x, y \in [a, b]$ , existe un  $z \in [a, b]$  tal que

$$|f(y) - f(x)| = |f'(z)(y - x)| \leq \lambda |y - x|.$$

**Teorema 1.1:** (Teorema del punto fijo de Banach)

Sea  $T$  una contracción de un espacio métrico completo en sí mismo

$$d(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \lambda d(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \quad \lambda \in (0, 1).$$

Entonces,  $T$  tiene un punto fijo único  $x$ . Es más, si  $x_0$  es cualquier punto en  $X$  y se define recursivamente la sucesión  $\{x_n\}$  por la fórmula  $x_n = T(x_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , entonces  $\lim x_n = \bar{x}$ , y

$$d(\bar{x}, x_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

Dem: Como  $T$  es una contracción, no puede tener más de un punto fijo, pues si  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  son puntos fijos de  $T$ ,

$$d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(T(\bar{x}_1), T(\bar{x}_2)) \leq \lambda d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad \text{donde } \lambda \in (0, 1).$$

Por lo tanto  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ . A continuación verificaremos que  $T$  tiene un punto fijo.

Tomemos cualquier punto  $x_0 \in X$  y sea  $x_n = T(x_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Entonces, para  $k > 0$ ,

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(T(x_{k-1}), T(x_k)) \leq \lambda d(x_{k-1}, x_k).$$

Al utilizar repetidamente esta fórmula, obtenemos

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \lambda^i d(x_{k-i}, x_{k-i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

En general, si  $m > n \geq 1$ , entonces

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \lambda^{j+1} d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Como  $\lambda \in (0, 1)$ , para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $n_0$  tal que

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \epsilon \quad \text{siempre que } n \geq n_0.$$

Por lo tanto,  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en el espacio completo  $X$ , de modo que converge a un punto  $\bar{x} \in X$ . Como  $T$  es continua,

$$\bar{x} = \lim x_n = \lim T(x_{n-1}) = T(\bar{x}).$$

Por consiguiente,  $\bar{x}$  es un punto fijo de  $T$  en  $X$ .

Al aplicar (1.1) y el resultado de que, para  $x_n$  fija en  $X$ , la función  $g$  definida por  $g(x) = d(x, x_n)$  es continua, tenemos

$$d(\bar{x}, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \quad \blacksquare$$

Consideremos ahora una sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden con  $n$  incógnitas, con valores iniciales dados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (1.2)$$

donde  $f$  es una función continua dada de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en  $\mathbb{R}^n$ , y  $\mathbf{x}$  es una función desconocida de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$ . A fin de obtener un teorema sobre la unicidad de la solución de este problema, suponemos que  $f$  satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable.

**Definición 1.2:** Se dice que  $f$  satisface una condición de Lipschitz en la segunda variable si existe un número  $L$  tal que, para todo  $\mathbf{x}$ ,

$$|f(\mathbf{x}, y_1) - f(\mathbf{x}, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

Resulta fácil ver que la ecuación (1.2), con la condición inicial, equivale a la ecuación integral

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t f(s, \mathbf{x}(s)) ds + \mathbf{v}; \quad (1.3)$$

es decir,  $\mathbf{x}$  es solución de la ecuación diferencial (1.2) que satisface la condición inicial si y sólo si, es solución de la ecuación integral (1.3).

La ecuación integral (1.3) es del tipo Volterra, y su nombre proviene del matemático italiano Vito Volterra (1860-1940), quien instituyó un estudio sistemático de estas ecuaciones. A continuación estudiaremos un caso especial de la ecuación integral no lineal de Volterra de segunda especie que incluye a (1.3).

**Teorema 1.2:** Supóngamos que la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface una condición de Lipschitz

$$|g(t_1) - g(t_2)| < L_1|t_1 - t_2|$$

en una vecindad  $N_1$  de  $t_0$ , y sea  $f : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua que satisface una condición de Lipschitz

$$|f(t, s, \mathbf{v}_1) - f(t, s, \mathbf{v}_2)| \leq L_2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$$

en una vecindad  $N_2$  de  $(t_0, t_0, g(t_0))$ . Entonces para cada  $a > 0$  tal que

$$I = [t_0 - a, t_0 + a] \subset N_1$$

y

$$S = I \times I \times B[g(t_0); b] \subset N_2 \text{ para algùn } b > 0,$$

entonces la ecuación integral no lineal de Volterra de segunda especie

$$\mathbf{x}(t) = \lambda \int_{t_0}^t f(t, s, \mathbf{x}(s)) ds + g(t), \quad (1.4)$$

tiene solución única en  $I$  para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Dem: Sea  $X$  el espacio de todas las funciones continuas del intervalo  $I$  en la bola cerrada  $B[g(t_0); b]$ , con la distancia definida por <sup>[14a]</sup>

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{t \in I} (|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| e^{-\alpha|t-t_0|})$$

donde  $\alpha > 0$  †. Se demuestra fácilmente que  $X$  es un espacio métrico completo. Si tomamos  $T$  como la transformación definida en  $X$  por la regla

$$T(\mathbf{x})(t) = \lambda \int_{t_0}^t f(t, s, \mathbf{x}(s)) ds + g(t),$$

entonces las soluciones a la ecuación integral (1.4) son puntos fijos de  $T$ .

A continuación veremos que  $T$  mapea  $X$  en sí mismo, siempre que se tome el parámetro  $\alpha$  suficientemente grande. Si  $M = \max\{|f(t, s, \mathbf{v})| : (t, s, \mathbf{v}) \in S\}$ , entonces, para cada  $\mathbf{x} \in X$ ,  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  satisface

$$\begin{aligned} |y(t) - g(t_0)| &= \left| \lambda \int_{t_0}^t f(t, s, \mathbf{x}(s)) ds + g(t) - g(t_0) \right| \\ &\leq (|\lambda|M + L_1)|t - t_0| \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{y}, g(t_0)) &= \max_{t \in I} (|y(t) - g(t_0)| e^{-\alpha|t-t_0|}) \\ &= \max_{t \in I} [(|\lambda|M + L_1)|t - t_0| e^{-\alpha|t-t_0|}] \\ &\leq \frac{1}{\alpha e} (|\lambda|M + L_1) \leq b \end{aligned}$$

para  $\alpha \geq (|\lambda|M + L_1)/(eb)$  (Esto último se tiene ya que  $xe^{-\alpha x}$  tiene un mínimo en  $x = 1/\alpha$  con valor  $1/\alpha e$ ). Por ende, para ésta  $\alpha$ ,  $T(\mathbf{x}) \in X$ .

Falta verificar que  $T$  es una contracción de  $X$  para valores suficientemente grandes de  $\alpha$ . Tomemos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ , y sean  $\mathbf{y}_1 = T(\mathbf{x}_1)$ ,  $\mathbf{y}_2 = T(\mathbf{x}_2)$ . Entonces, para todo  $t \in I$ ,

† Se elige esta distancia porque simplifica mucho los calculos que se presentan en la demostración usando sucesiones de Picard.

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &= \left| \lambda \int_{t_0}^t [f(t, s, x_1(s)) - f(t, s, x_2(s))] ds \right| \\
&\leq |\lambda| \left| \int_{t_0}^t [f(t, s, x_1(s)) - f(t, s, x_2(s))] ds \right| \\
&\leq |\lambda| L_2 \left| \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds \right| \\
&\leq |\lambda| L_2 d(x_1, x_2) \left| \int_{t_0}^t e^{\alpha|s-t_0|} ds \right| \\
&= \frac{1}{\alpha} |\lambda| L_2 d(x_1, x_2) (e^{\alpha|t-t_0|} - 1) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} |\lambda| L_2 d(x_1, x_2) e^{\alpha|t-t_0|}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$d(y_1, y_2) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq \frac{1}{\alpha} |\lambda| L_2 d(x_1, x_2).$$

Luego,  $T$  es una contracción en  $X$  si  $\alpha > |\lambda| L_2$ . Por esto, si escogemos  $\alpha$  de modo que

$$\alpha > \max \left\{ |\lambda| L_2, \frac{|\lambda| M + L_1}{eb} \right\},$$

entonces  $T$  satisface las condiciones del teorema del punto fijo de Banach y, en consecuencia,  $T$  posee un punto fijo único, que es la solución única en  $I$  de la ecuación integral. ■

## 1.2 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Si  $A$  es una matriz de números complejos  $(a_{ij})$  con  $n$  renglones y  $n$  columnas, definimos la norma de  $A$  por

$$|A| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|. \quad (1.5)$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned}
|A + B| &\leq |A| + |B| \\
|AB| &\leq |A||B| \\
|Ax| &\leq |A||x|
\end{aligned}$$



donde  $A$  y  $B$  son matrices y  $x$  es un vector  $n$ -dimensional. La distancia entre dos matrices está definida por  $|A - B|$ , y esta distancia satisface las propiedades usuales de la métrica. El polinomio en  $\lambda$  de grado  $n$ ,  $\det(A - \lambda I)$ , es llamado el polinomio característico de  $A$ , y las raíces son llamadas indistintamente raíces características, valores característicos o eigen-valores.

Si  $A$  y  $B$  son semejantes, entonces podemos comprobar que tienen el mismo polinomio característico

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) \\ &= \det(P) \det(A - \lambda I) \det(P^{-1}) \\ &= \det(A - \lambda I), \quad (\det(P) \neq 0). \end{aligned}$$

En particular los coeficientes de las potencias de  $\lambda$  en  $\det(A - \lambda I)$  son invariantes bajo transformaciones de semejanza. Dos de los invariantes más importantes son  $\det A$  y  $\text{Tr} A$ .

**Teorema 1.3:** (Forma Canónica de Jordan) †

Toda matriz  $A \in M_{n \times n}$  es semejante a una matriz de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

donde  $J_0$  es una matriz diagonal con los valores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  en la diagonal, y

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & & & 0 \\ & \lambda_{q+i} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_{q+i} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Las  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, q + s$  son raíces características de  $A$ , no necesariamente distintas. Si  $\lambda_j$  es una raíz simple, entonces ésta aparece con  $J_0$ , y por lo tanto, si todas las raíces son distintas,  $A$  es semejante a una matriz diagonal

---

† Ver apéndice II

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Si  $\{A_m\}$  es una sucesión de matrices, esta sucesión se dice que es convergente si, dado cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un número entero  $N_\epsilon$  tal que

$$|A_q - A_p| < \epsilon \quad \text{para todo } p, q > N_\epsilon.$$

La sucesión  $\{A_m\}$  se dice que tiene como límite la matriz  $A$  si, dado cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un entero positivo  $N_\epsilon$  tal que

$$|A_m - A| < \epsilon \quad \text{para todo } m > N_\epsilon.$$

La serie infinita

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m$$

se dice que es convergente si la sucesión de sumas parciales es convergente.

Una serie particular que es de gran importancia para el estudio de ecuaciones lineales es la que se define como la exponencial de una matriz  $A$ , dada por

$$e^A = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \quad (1.8)$$

donde  $A^m$  representa la  $m$ -ésima potencia de  $A$ . La serie que define  $e^A$  es convergente para toda  $A$ , ya que cualquiera dos enteros positivos  $p, q$

$$\left| \sum_{m=p+1}^{p+q} \frac{A^m}{m!} \right| \leq \sum_{m=p+1}^{p+q} \frac{|A^m|}{m!} \quad (1.9)$$

y la última parte representa la diferencia de Cauchy para la serie  $e^{|A|}$  la cual converge para todo  $|A|$  finito.

Si  $B$  es una matriz no singular, entonces existe  $A$  (llamada el logaritmo de  $B$ ) tal que  $e^A = B$ . Veamos, si  $B$  está en la forma canónica  $J$ , por el teorema anterior, es evidente que  $A$  puede ser tomada como

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & & 0 \\ & A_1 & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$$

con tal que  $e^{A_j} = J_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, s$ . Es fácil verificar que

$$A_0 = \begin{pmatrix} \log \lambda_1 & & 0 \\ & \log \lambda_2 & \\ 0 & & \log \lambda_q \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Claramente

$$J_j = \lambda_{q+j} \left( E_{r_j} + \frac{1}{\lambda_{q+j}} Z_j \right) \quad (1.11)$$

donde  $Z_j$  es la matriz nilpotente definida en el teorema. Ya que las potencias grandes de  $Z_j$  todas son cero, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\lambda_{q+j})^{-k} Z_j^k$$

tiene solamente un número finito de términos, y por lo tanto es convergente. Definamos

$$\log \left( E_{r_j} + \frac{1}{\lambda_{q+j}} Z_j \right) \quad (1.12)$$

como la serie del logaritmo, la cual es, un polinomio en  $\lambda_{q+j}^{-1} Z_j$ . Entonces

$$F(\lambda_{q+j}^{-1} Z_j) = \exp \left[ \log \left( E_{r_j} + \frac{1}{\lambda_{q+j}} Z_j \right) \right] \quad (1.13)$$

es un polinomio en  $\lambda_{q+j}^{-1} Z_j$ . Por otra parte, de

$$\begin{aligned} 1 + x &= e^{\log(1+x)} \\ &= 1 + (x - 1/2x^2 + \dots) + \frac{1}{2!}(x - 1/2x^2 + \dots)^2 + \dots, \quad |x| < 1, \end{aligned}$$

se sigue que, cuando el lado derecho es reareglado, los coeficientes de  $x^k$ ,  $k \geq 2$ , son todos cero, mientras que el coeficiente de  $x$  es 1. Esto implica el mismo resultado para  $F$  y prueba que

$$\exp \left[ \log \left( E_{r_j} + \lambda_{q+j}^{-1} Z_j \right) \right] = E_{r_j} + \lambda_{q+j}^{-1} Z_j$$

multiplicando por  $\lambda_{q+j} E_{r_j} = \exp[\log(\lambda_{q+j} E_{r_j})] = \exp[\log(\lambda_{q+j})] E_{r_j}$ , tenemos que

$$\exp[\log(\lambda_{q+j}) E_{r_j} + \log(E_{r_j} + \lambda_{q+j}^{-1} Z_j)] = \lambda_{q+j} (E_{r_j} + \lambda_{q+j}^{-1} Z_j)$$

esto implica que

$$A_j = \log(\lambda_{q+j}) E_{r_j} + \log(E_{r_j} + \lambda_{q+j}^{-1} Z_j).$$

Usando que

$$(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$$

se comprueba fácilmente que:

$$Pe^M P^{-1} = e^{PM P^{-1}} \quad (1.14)$$

Esto no sólo es válido para una matriz canónica  $B$ , es válido para cualquier matriz  $B$ . Ciertamente, si  $J = e^A$  y  $B = PJP^{-1}$ , entonces  $B = e^{\tilde{A}}$ , donde  $\tilde{A} = PAP^{-1}$ . Naturalmente  $A$  no es única, por ejemplo,

$$e^A = e^A e^{2\pi i k I} = e^{A+2\pi i k I}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Si  $\Phi$  es una matriz de funciones de  $n \times n$  en un intervalo  $I$  (las funciones pueden ser reales o complejas), se dice que  $\Phi$  es continua, diferenciable o analítica en  $I$  si cada elemento de  $\Phi$  es diferenciable en  $I$ , entonces  $\Phi'$  denota la matriz de derivadas, además tenemos la siguiente propiedad,  $(\Phi^{-1})' = -\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}$ .

**Teorema 1.4:** Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  con elementos continuos en el intervalo  $I: a \leq t \leq b$ , y supongamos que  $\Phi$  es una matriz de funciones en  $I$  la cual satisface

$$\Phi' = A(t)\Phi(t), \quad (t \in I).$$

Entonces  $\det \Phi$  satisface en  $I$  la ecuación

$$(\det \Phi)' = (\text{Tr} A)(\det \Phi)$$

y entonces para  $\tau, t \in I$

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(\tau) \exp \int_{\tau}^t \text{Tr} A(s) ds$$

**Dem:** Sean  $\phi_{ij}$  y  $a_{ij}$  los elementos en el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de  $\Phi$  y  $A$  respectivamente. Entonces,

$$\phi'_{ij}(t) = \sum_k a_{ik}(t)\phi_{kj}(t), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Como  $\det \Phi = \sum \epsilon(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))\phi_{1\sigma(1)}\phi_{2\sigma(2)} \cdots \phi_{n\sigma(n)}$

$$(\det \Phi)' = \sum \epsilon(*)\phi'_{1\sigma(1)}(\phi_{2\sigma(2)} \cdots \phi_{n\sigma(n)}) + \sum \epsilon(*)\phi_{1\sigma(1)}(\phi_{2\sigma(2)} \cdots \phi_{n\sigma(n)})'$$

o lo que es lo mismo

$$(\det \Phi)' = \begin{vmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} & \dots & \phi'_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi'_{21} & \phi'_{22} & \dots & \phi'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\
 \dots + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi'_{n1} & \phi'_{n2} & \dots & \phi'_{nn} \end{vmatrix}$$

Analícemos ahora el primer determinante de ésta expresión. Como  $\phi'_{ij}(t) = \sum_k a_{ik} \phi_{kj}$  tenemos que

$$\begin{vmatrix} \sum_k a_{1k} \phi_{k1} & \sum_k a_{1k} \phi_{k2} & \dots & \sum_k a_{1k} \phi_{kn} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{vmatrix}$$

Este determinante no cambia si substraemos  $a_{12}$  veces el segundo renglón,  $a_{13}$  veces el tercero y así sucesivamente, por lo tanto esto dará

$$\begin{vmatrix} a_{11} \phi_{11} & a_{11} \phi_{12} & \dots & a_{11} \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{vmatrix}$$

lo cual es justamente  $a_{11} \det \Phi$ . Llevando a cabo un procedimiento similar obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
 (\det \Phi)' &= a_{11} \det \Phi + a_{22} \det \Phi + \dots + a_{nn} \det \Phi \\
 &= (\text{Tr} A)(\det \Phi)
 \end{aligned}$$

o

$$(\det \Phi(t))' = (\text{Tr} A(t))(\det \Phi(t)) \tag{1.15}$$

Integrando esta última ecuación

$$\ln(\det \Phi(t)) - \ln(\det \Phi(\tau)) = \int_{\tau}^t \text{Tr} A(s) ds$$

de donde

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(\tau) \exp \int_{\tau}^t \text{Tr} A(s) ds. \quad \blacksquare \quad (1.16)$$

Estas ecuaciones jugarán un papel muy importante en el estudio de la ecuación de Mathieu.

### 1.3 ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con coeficientes constantes, y considere el correspondiente sistema homogéneo

$$x' = Ax \quad (1.17)$$

Si  $n=1$ , es trivial que la solución es  $e^{tA}$ .

**Definición 1.3:**  $\Phi$  es una matriz fundamental de (1.17) si sus columnas son soluciones linealmente independientes de (1.17).

**Teorema 1.5:** Una matriz fundamental  $\Phi$  de (1.17) está dada por

$$\Phi(t) = e^{tA}, \quad (|t| < \infty).$$

y la solución  $\phi$  de (1.17) que satisface

$$\phi(\tau) = \xi, \quad (|\tau| < \infty, |\xi| < \infty).$$

está dada por

$$\phi(t) = e^{(t-\tau)A} \xi, \quad (|t| < \infty). \quad (1.18)$$

**Dem:** Ya que  $e^{(t+\Delta t)A} = e^{tA} e^{\Delta t A}$ , se sigue fácilmente de la definición de la derivada que

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}$$

Entonces la matriz definida por  $\Phi(t) = e^{tA}$  es una solución. Ya que  $\Phi(0) = I$ , se sigue de lo anterior que  $\det \Phi(t) = e^{t \text{Tr} A}$ . Entonces  $\Phi$  es una matriz fundamental.  $\blacksquare$

Es de interés investigar la forma de la matriz fundamental  $\Phi(t) = e^{tA}$ . Sea  $J$  la forma canónica de  $A$ , dada por el teorema 1.3, y supongamos que  $P$  es una matriz constante no singular tal que

$$AP = PJ.$$

Entonces

$$e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

y  $J$  tiene la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & 0 \\ & J_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix}$$

donde  $J_0$  es una matriz diagonal con la diagonal  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  y

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & & 0 \\ & \lambda_{q+i} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \lambda_{q+i} \end{pmatrix}; \quad (i = 1, \dots, s),$$

se sigue que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_0} & & 0 \\ & e^{tJ_1} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{tJ_s} \end{pmatrix},$$

y es fácil de calcular que

$$e^{tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & e^{t\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{t\lambda_q} \end{pmatrix}.$$

Ya que  $J_i = \lambda_{q+i}E_{r_i} + Z_i$ ,  $e^{tJ_i} = e^{\lambda_{q+i}t}e^{tZ_i}$  tenemos

$$e^{tJ_i} = e^{t\lambda_{q+i}} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r_i+1}}{(r_i-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ & & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & \dots & \cdot \\ & & & & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Con  $J_i$  una matriz de  $r_i \times r_i$ .

Ya que  $Z_i$  es nilpotente, tenemos que

$$e^{tZ_i} = I + Z_i t + \frac{Z_i^2 t^2}{2!} + \dots$$

será un polinómio.

Supongámos que  $P$  tiene como columnas los vectores  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Las columnas de  $\Phi$ , las cuales son  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , hacen un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes de  $x' = \lambda x$ . Ahora otra matriz fundamental del sistema está dada por

$$\Phi(t) = e^{tA} P = P e^{tJ},$$

de lo anterior obtenemos

$$\phi_1(t) = e^{t\lambda_1} p_1, \quad \phi_2(t) = e^{t\lambda_2} p_2, \dots, \phi_q(t) = e^{t\lambda_q} p_q,$$

$$\phi_{q+1}(t) = e^{t\lambda_{q+1}} p_{q+1}$$

$$\phi_{q+2}(t) = e^{t\lambda_{q+1}} (t p_{q+1} + p_{q+2})$$

⋮

⋮

$$\phi_{q+r_1}(t) = e^{t\lambda_{q+1}} \left( \frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!} p_{q+1} + \dots + t p_{q+r_1-1} + p_{q+r_1} \right)$$

.....

$$\phi_{n-r_s+1}(t) = e^{t\lambda_{q+s}} p_{n-r_s+1}$$

⋮

⋮

$$\phi_n(t) = e^{t\lambda_{q+s}} \left( \frac{t^{r_s-1}}{(r_s-1)!} p_{n-r_s+1} + \dots + t p_{n-1} + p_n \right)$$



Ya que  $AP = PJ$ ,  $p_1, \dots, p_n$  satisfacen la relación

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, \dots, Ap_q = \lambda_q p_q$$

$$Ap_{q+1} = \lambda_{q+1} p_{q+1}$$

$$Ap_{q+2} = p_{q+1} + \lambda_{q+1} p_{q+2}$$

⋮

⋮

$$Ap_{q+r_1} = p_{q+r_1} + \lambda_{q+r_1} p_{q+r_1}$$

⋮

⋮

$$Ap_{n-r_s+1} = \lambda_{q+s} p_{n-r_s+1}$$

$$Ap_{n-r_s+2} = p_{n-r_s+1} + \lambda_{q+s} p_{n-r_s+2}$$

⋮

⋮

$$Ap_n = p_{n-1} + \lambda_{q+s} p_n$$

que se muestran solamente a manera de facilitar la lectura (ver apéndice II).

## 1.4 SISTEMAS LINEALES CON COEFICIENTES PERIÓDICOS

Considere el sistema lineal homogéneo

$$x' = A(t)x, \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (1.19)$$

donde  $A$  es una matriz de funciones continuas complejas, y

$$A(t + T) = A(t)$$

para alguna constante  $T \neq 0$ . En este caso (1.19) es llamado un sistema periódico y  $T$  un periodo de  $A$ . El resultado fundamental para tales sistemas consisten en la representación de una matriz fundamental como el producto de una matriz periódica con el mismo periodo  $T$  y una matriz solución para un sistema con coeficientes constantes.

**Teorema 1.6:** (Teoría de Floquet)

Si  $\Phi$  es una matriz fundamental para (1.19), así también es  $\Psi$ , donde

$$\Psi(t) = \Phi(t + T), \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Correspondiendo a cada  $\Phi$ , existe una matriz no singular  $P$  con periodo  $T$ , y una matriz constante  $R$  tal que

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR}. \quad (1.20)$$

**Dem:** Ya que

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t); \quad (-\infty < t < +\infty),$$

uno tiene

$$\Psi'(t) = \Phi'(t + T) = A(t + T)\Phi(t + T) = A(t)\Psi(t),$$

lo que quiere decir que  $\Psi$  también es una matriz fundamental.

Ya que  $\Psi$  es una solución de (1.19) y  $\det \Psi(t) = \det \Phi(t + T) \neq 0$ , completa la demostración de que  $\Psi$  es una matriz fundamental. Por lo tanto existe una matriz constante  $C$  (llamada comúnmente como la matriz de monodromía) tal que

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C,$$

(ya que ambas son matrices fundamentales) y además por la sección anterior, de la definición de logaritmo, existe una matriz constante  $R$  tal que

$$C = e^{TR}.$$

Lo cual nos da

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)e^{tR}.$$

Sea  $P$  definida por

$$P(t) = \Phi(t)e^{-tR}.$$

Entonces

$$P(t + T) = \Phi(t + T)e^{-(t+T)R} = \Phi(t)e^{tR}e^{-(t+T)R} = \Phi(t)e^{-tR} = P(t). \quad (1.21)$$

Lo que demuestra que  $P$  es periódica en  $T$ . Ya que  $\Phi(t)$  y  $e^{-tR}$  son no singulares para  $-\infty < t < \infty$ , así  $P(t)$  es no singular. ■

La importancia de este teorema es que la determinación de una matriz fundamental  $\Phi$  sobre un intervalo de longitud  $T$ , por ejemplo  $0 \leq t \leq T$ , nos conduce a la determinación de  $\Phi$  sobre  $(-\infty, \infty)$ .

Por otra parte  $C$  está dada por  $\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$  y  $R$  está dada por  $(\log)/T$ ,  $P(t)$  está determinada sobre  $(0, T)$ . Sin embargo, ya que  $P(t)$  está determinada sobre  $(-\infty, \infty)$ , entonces  $\Phi$  está determinada sobre  $(-\infty, \infty)$ .

Si  $\Phi_1$  es otra matriz fundamental, ésta se puede escribir como

$$\Phi = \Phi_1 \chi,$$

donde  $\chi$  es una matriz constante. Ya que  $\Phi(t+T) = \Phi(t)e^{TR}$

$$\Phi_1(t+T)\chi = \Phi_1(t)\chi e^{TR},$$

o

$$\Phi_1(t+T) = \Phi_1(t)\chi e^{TR}\chi^{-1}.$$

Por lo tanto, toda matriz fundamental  $\Phi_1$  determina una matriz  $\chi e^{TR}\chi^{-1}$ , la cual es semejante a  $e^{TR}$ . Por otra parte, si  $\chi$  es una matriz constante no singular, existe una matriz fundamental  $\Phi_1$ . En particular, el conjunto de todas las matrices fundamentales de (1.19) determina un único conjunto de valores característicos, a saber, los de  $C = e^{TR}$ . Denotemos estos valores característicos por  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , y llamemoslos los multiplicadores asociados a  $A$ . Ninguno de los multiplicadores puede ser cero ya que  $\prod_i \lambda_i = \det(e^{TR}) \neq 0$  (matriz no singular). Los valores característicos de  $R$  son llamados los exponentes característicos de  $A$ .

Es de interés ver la forma explícita que tiene el conjunto de vectores solución. Sea  $\chi$  una matriz no singular tal que  $\chi^{-1}R\chi = J$  tiene la forma canónica y pongamos  $\Phi_1 = \Phi\chi$ ,  $P_1 = P\chi$ . Entonces de (1.20) uno tiene

$$\Phi_1(t) = P_1 e^{tJ}; \quad P_1(t+T) = P_1(t). \quad (1.22)$$

Por lo tanto, si los valores característicos de  $R$  son  $\rho_j$ ,  $e^{tJ}$  tendrá la forma

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_0} & & 0 \\ & e^{tJ_1} & \\ 0 & & e^{tJ_n} \end{pmatrix},$$

donde

$$e^{tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{t\rho_1} & & 0 \\ & e^{t\rho_2} & \\ 0 & & e^{t\rho_n} \end{pmatrix},$$

y

$$e^{tJ_i} = e^{t\rho_{q+i}} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_i+1}}{(r_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}; \quad (i = 1, 2, \dots, s, q + \sum r_i = n).$$

Claramente  $\lambda_i = e^{T\rho_i}$ , y por lo tanto mientras  $\rho_i$  no está determinada de manera única, su parte real si lo está. De (1.22) se sigue que las columnas de  $\Phi_1$ ,  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , las cuales forman un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes de (1.19), son de la forma:

$$\phi_1(t) = e^{t\rho_1} \mathbf{p}_1,$$

$$\phi_2(t) = e^{t\rho_2} \mathbf{p}_2,$$

i

$$\phi_q(t) = e^{t\rho_q} \mathbf{p}_n.$$

.....

$$\phi_{q+1}(t) = e^{t\rho_{q+1}} \mathbf{p}_{q+1}$$

$$\phi_{q+2}(t) = e^{t\rho_{q+1}} (t\mathbf{p}_{q+1} + \mathbf{p}_{q+2})$$

·

·

$$\phi_{q+r_1}(t) = e^{t\rho_{q+1}} \left( \frac{t^{r_1-1}}{(r_1-1)!} \mathbf{p}_{q+1} + \cdots + t\mathbf{p}_{q+r_1-1} + \mathbf{p}_{q+r_1} \right)$$

(1.23)

.....

$$\phi_{n-r_s+1}(t) = e^{t\rho_{q+s}} \mathbf{p}_{n-r_s+1}$$

·

·

$$\phi_n(t) = e^{t\rho_{q+s}} \left( \frac{t^{r_s-1}}{(r_s-1)!} \mathbf{p}_{n-r_s+1} + \cdots + t\mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_n \right),$$

done  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  son las columnas periódicas de  $P_1$ . De (1.22) es claro que si  $Re(\rho_i) < 0$

o equivalentemente  $|\lambda_i| < 1$ , entonces

$$\phi_i(t) \rightarrow 0; \quad (t \rightarrow \infty),$$

de manera exponencial.

Si  $\Phi(0) = I$ , tenemos por (1.20) que  $\Phi(T) = e^{TR}$ . Por otra parte los  $\lambda_i$  pueden ser pensados como los valores característicos de  $\Phi(T) = \Phi(0)^{-1}\Phi(T)$ . De esto y de (1.16) tenemos

$$\det \Phi(T) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \exp \int_0^T \text{Tr} A(s) ds \quad (1.24)$$

De (1.24) se sigue que, si  $n-1$  de los  $\lambda_i$  son conocidos el otro está determinado. Finalmente damos una expresión para la suma de los exponentes característicos que se deducen de la expresión anterior

$$\sum_{i=1}^n \rho_i = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} A(t) dt, \quad \left( \text{mod} \frac{2\pi}{T} \right). \quad (1.25)$$

---

2

ESTUDIO DE LA  
ECUACIÓN DE MATHIEU

---

<<La vida es breve, el Arte  
largo, la ocasión fugaz, el  
experimento peligroso, el  
juicio difícil >>.

Hipócrates de Quíos (470 a.C.-400 a.C.)  
matemático griego.

En la sección 2.1 se muestra la división del plano  $(\alpha, \beta)$ , para la ecuación de Mathieu, en regiones de estabilidad e inestabilidad y, se establecen algunas propiedades de las curvas de transición, se expresan las relaciones de los coeficientes de Fourier mediante relaciones de recurrencia. Estas relaciones de recurrencia entre los coeficientes se juntan para generar fracciones continuas.

En la sección 2.2 se demuestra la analiticidad de estas fracciones continuas para las curvas de transición. El desarrollo de potencias de dichas curvas de transición se hace en la sección 2.3 por dos métodos, uno es con el uso de las fracciones continuas y el otro es con perturbaciones, en ambos se obtienen las mismas expresiones y se mencionan los pros y los contras de cada método.

En la sección 2.4 se obtienen las curvas en el plano  $\alpha, \beta$  que nos representan soluciones periódicas y en la sección 2.5 se muestra que la región de estabilidad se llena con estas curvas. †

Por último, en la sección 2.6 se usa el método de Poincaré-Linstedt para  $\beta$  pequeña, y se obtiene una expresión aproximada para las frecuencias.

## 2.1 CURVAS DE TRANSICIÓN PARA LA ECUACIÓN DE MATHIEU

### 2.1.a Regiones de estabilidad e inestabilidad

La ecuación de Mathieu (0.23) la podemos escribir en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha + 2\beta \cos 2t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha + 2\beta \cos 2t & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz con entradas  $\pi$  periódicas. Por esto, tenemos un sistema lineal con coeficientes periódicos y podemos utilizar los resultados de la teoría de Floquet obtenidos en la sección 1.4.

Será muy importante para el estudio de la estabilidad, ser capaz de decir para que  $\alpha, \beta$  habrá soluciones acotadas o no acotadas así como cuando habrá soluciones periódicas. Como se verá mas adelante, las soluciones periódicas nos ayudarán a estudiar las regiones de estabilidad.

Primeramente de (1.24) tenemos que el producto de los multiplicadores asociados a  $A(t)$  cumplen con

$$\mu_1 \mu_2 = \exp\left\{\text{Tr} \int_0^\pi A(s) ds\right\} = \exp\{0\} = 1, \quad (2.2)$$

de lo cual, el polinomio característico de la matriz de monodromía  $C$  es

$$\mu^2 - \phi(\alpha, \beta)\mu + 1 = 0,$$

resolviendo, tenemos que las soluciones a ésta ecuación están dadas por

$$\mu_1, \mu_2 = 1/2 \left[ \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 4} \right]. \quad (2.3)$$

Ahora,  $\phi(\alpha, \beta)$  no es conocida explícitamente, pero podemos hacer las siguientes deducciones usando la teoría de Floquet (sección 1.4). Por la dependencia respecto a los parámetros, la matriz fundamental es analítica en  $(\alpha, \beta)$  y por lo tanto también su traza, es decir  $\phi(\alpha, \beta)$  es analítica en  $(\alpha, \beta)$ .

(i)  $\phi > 2$ . Los multiplicadores son reales, diferentes y positivos. Por (2.2), uno de ellos, digamos  $\mu_1 = e^{\pi\rho_1}$  es real mayor que uno,  $\rho_1 = \sigma > 0$ , y  $\mu_2 = e^{\pi\rho_2}$  es real menor que uno y por lo tanto  $\rho_2 = -\sigma < 0$ . Por consiguiente, de (1.23)

$$x(t) = c_1 e^{\sigma t} \mathbf{p}_1(t) + c_2 e^{-\sigma t} \mathbf{p}_2(t),$$

donde  $c_1, c_2$  son constantes y  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  tienen periodo mínimo igual a  $\pi$ . La región  $(\alpha, \beta)$  tal que  $\phi(\alpha, \beta) > 2$ , contiene por lo tanto soluciones no acotadas y la llamaremos la región inestable. De hecho, de la expresión anterior la única solución acotada es  $x(t) \equiv 0$ .

(ii)  $\phi = 2$ . Entonces de (2.3)  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\rho_1, \rho_2 = 0$ . En consecuencia de (1.23) existe una solución de periodo  $\pi$  sobre las curvas  $\phi(\alpha, \beta) = 2$ , la otra puede ser no acotada, pero se probará más adelante que la otra solución es no acotada para  $\beta \neq 0$ .



(iii)  $-2 < \phi < 2$ . Los multiplicadores son complejos, entonces de (2.3)  $\mu_2 = \bar{\mu}_1$ . De esto y de (2.2) tenemos que  $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ . Por lo tanto, tenemos que  $\rho_1 = i\nu$ ,  $\rho_2 = -i\nu$  con  $\nu$  real, y  $\mu_1 = e^{i\nu\pi}$ . La solución general será de la forma

$$x(t) = c_1 e^{i\nu t} p_1(t) + c_2 e^{-i\nu t} p_2(t).$$

Entonces todas las soluciones en la región  $-2 < \phi(\alpha, \beta) < 2$  son acotadas. Esta es llamada la región estable. Las soluciones son oscilantes, pero en general no periódicas, ya que dos frecuencias  $\nu$  y  $2$  están presentes.

(iv)  $\phi = -2$ . En este caso tenemos que  $\mu_1 = \mu_2 = -1$ , es decir  $\rho_1, \rho_2 = i$ . Por (1.23) hay una solución de periodo  $2\pi$  en cada punto de  $\phi(\alpha, \beta) = -2$ , la otra solución puede ser no acotada, aunque se probará que la otra solución es no acotada para  $\beta \neq 0$ .

(v)  $\phi < -2$ . En este caso  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son reales y negativos. Ya que también  $\mu_1 \mu_2 = 1$ , la solución general es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{(\sigma+i)t} p_1(t) + c_2 e^{(-\sigma+i)t} p_2(t)$$

donde  $\sigma > 0$  y  $p_1, p_2$  tienen periodo  $\pi$ . Es importante notar que las soluciones tienen la forma alternativa, con  $\mu_1 = -e^{\sigma\pi} = e^{(\sigma+i)\pi}$ ,

$$x(t) = c_1 e^{\sigma t} q_1(t) + c_2 e^{-\sigma t} q_2(t).$$

donde  $q_1, q_2$  tienen periodo  $2\pi$ . Como es de esperarse ésta es llamada la región inestable.

De (i) y (v) puede verse que las curvas de la forma

$$\phi(\alpha, \beta) = \pm 2,$$

separan las regiones inestables ( $|\phi(\alpha, \beta)| > 2$ ) de las regiones estables ( $|\phi(\alpha, \beta)| < 2$ ).

No conocemos  $\phi(\alpha, \beta)$  explícitamente, pero sabemos que las curvas con periodo  $\pi, 2\pi$  dividen el plano  $\alpha, \beta$ . Por lo tanto, si podemos encontrar por algún método los valores  $\alpha, \beta$  para los cuales tales soluciones periódicas pueden ocurrir, habremos también encontrado las fronteras entre la región estable y la inestable. Estas fronteras son llamadas las curvas de transición, en la Fig 2.1 se ejemplifica como podrían verse las regiones y la curva de transición.

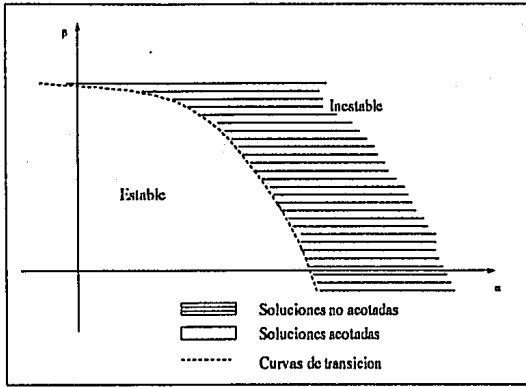


Fig 2.1

Para  $\beta = 0$ , de las soluciones a la ecuación  $x'' + \alpha x = 0$ , es inmediato ver que  $\alpha < 0$  pertenece a la región inestable y  $\alpha \geq 0$  a la región estable. También si  $\alpha = n^2$ , para algún entero  $n$ , entonces las soluciones son  $2\pi$ -periódicas, de hecho  $\pi$ -periódicas en el caso que  $n$  sea par y  $2\pi$ -periódicas si  $n$  es impar. Por lo tanto  $\phi(2p, 0) = -2$ ,  $\phi(2p + 1, 0) = 2$ .

Por lo tanto si uno toma el eje de las  $\alpha$ 's y sigue el movimiento de los multiplicadores de Floquet, uno ve lo siguiente en el plano complejo

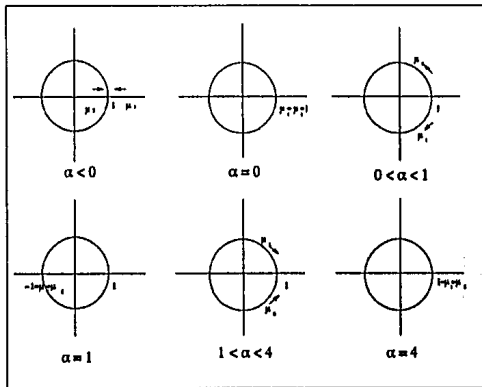


Fig 2.2

y para  $\alpha > 4$ , los multiplicadores siguen dando vueltas sobre el círculo unitario, generando soluciones  $2\pi$ -periódicas cada vez que  $\alpha$  está en  $(2p + 1)^2$  y  $\pi$ -periódicas cada vez que  $\alpha$

está en  $4p^2$ .

Para  $\beta$  pequeño,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  deben comportarse de manera continua con respecto a  $\beta$  y uno espera, por lo menos para  $\alpha \neq n^2$ , un comportamiento similar.

### 2.1.b Curvas de transición

A manera de facilitar la lectura, la ecuación de Mathieu que se está considerando tiene la forma

$$\ddot{x} + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x = 0,$$

que es una ecuación diferencial lineal ordinaria, de orden dos y no autónoma.

Sabemos de la sección anterior que las *curvas de transición* tienen como característica que dan soluciones a la ecuación de Mathieu con periodos  $\pi$  y  $2\pi$ , y no existen otras curvas fuera de estas con estos periodos.

Entonces nuestro objetivo es determinar alguna relación que nos permita construir estas curvas. Para esto, pongamos a la función  $2\pi$ -periódica  $x(t)$  como una serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m e^{imt} \quad (2.4)$$

y sustituyámosla en la ecuación de Mathieu

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} -m^2 \delta_m e^{imt} + \left( \alpha - 2\beta \frac{[e^{i2t} + e^{-i2t}]}{2} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m e^{imt} = 0, \quad (2.5)$$

agrupando en potencias de  $e^{it}$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \{(\alpha - m^2)\delta_m - \beta(\delta_{m-2} + \delta_{m+2})\} e^{imt} = 0 \quad (2.6)$$

Como el conjunto de funciones  $\{e^{imt}\}$  forman una base para el conjunto de las funciones  $2\pi$ -periódicas y continuas por partes<sup>[10]</sup>, la expresión anterior se cumple solamente si

$$(\alpha - m^2)\delta_m - \beta(\delta_{m-2} + \delta_{m+2}) = 0, \quad (2.7)$$

es decir, el coeficiente de cada  $e^{imt}$  es cero.

Como  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $x(t) = \bar{x}(t)$ , tenemos de (2.7)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m e^{imt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\delta}_m e^{-imt}.$$

Para que se cumpla ésta, debemos de tener que los coeficientes de cada  $e^{imt}$  en ambos miembros de la igualdad sean iguales, es decir

$$\bar{\delta}_m = \delta_{-m}, \quad (2.8)$$

en particular tendremos que  $\delta_0 \in \mathbb{R}$ .

Poniendo  $\delta_0 = 2A_0$  y  $\delta_m = A_m + iB_m$ ,  $m > 0$ ; (2.8) nos dará que  $A_{-m} = A_m$  y  $B_{-m} = -B_m$  para  $m > 0$ . Por lo cual, de (2.7) para  $m > 0$ :

$$(\alpha - m^2)A_m - \beta(A_{m-2} + A_{m+2}) = 0; \quad (2.9)$$

$$(\alpha - m^2)B_m - \beta(B_{m-2} + B_{m+2}) = 0. \quad (2.10)$$

Que son los coeficientes de  $\cos mt$  y  $\sin mt$  que aparecen directamente de la ecuación diferencial de Mathieu.

Veamos que nos da la ecuación (2.7) con  $m=0$ :

Sustituyendo  $m$  directamente en la ecuación

$$(\alpha - 0)\delta_0 - \beta(\delta_{-2} + \delta_2) = 0$$

la cual se transforma en

$$\alpha A_0 - \beta A_2 = 0, \quad (2.11)$$

ya que ésta corresponde al término constante en la serie de la ecuación de Mathieu.

$m=1$ :

Ahora tenemos que (2.7) se desdobra en las siguientes dos ecuaciones

$$(\alpha - 1)A_1 - \beta(A_1 + A_3) = 0; \quad (2.12)$$

$$(\alpha - 1)B_1 - \beta(-B_1 + B_3) = 0, \quad (2.13)$$

los coeficientes para  $\cos t$  y  $\sin t$  en la ecuación diferencial de Mathieu respectivamente.

$m=2$ :

Haciendo lo mismo que en el caso anterior, tenemos

$$(\alpha - 4)A_2 - \beta(2A_0 + A_4) = 0; \quad (2.14)$$

$$(\alpha - 4)B_2 - \beta B_4 = 0, \quad (2.15)$$

coeficientes para la ecuación de Mathieu correspondientes a  $\cos 2t$  y  $\sin 2t$ .

Por otra parte

$$\delta_m e^{imt} + \delta_{-m} e^{-imt} = 2\text{Re}(\delta_m e^{imt}) = 2(A_m \cos mt - B_m \sin mt), \quad (2.16)$$

lo cual implica que (2.4) se puede escribir como

$$x(t) = 2A_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mt - 2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mt. \quad (2.17)$$

Las ecuaciones (2.9)-(2.15) muestran una relación entre los coeficientes de los términos de la serie de Fourier de  $x(t)$ . Esta relación aparece como una *relación de recurrencia*, la cual se obtiene directamente de (2.9) y (2.10).

$$\frac{A_m}{A_{m\pm 2}} = \frac{\beta}{(\alpha - m^2) - \beta \frac{A_{m\mp 2}}{A_m}}, \quad m \geq 3. \quad (2.18)$$

$$\frac{B_m}{B_{m\pm 2}} = \frac{\beta}{(\alpha - m^2) - \beta \frac{B_{m\mp 2}}{B_m}}$$

el signo  $\pm$  aparece porque, dependiendo de la  $\alpha$  con que empecemos, se necesitará “avanzar” y “retroceder” para expresar a ésta como una fracción continua, como se verá mas adelante. Para poder hacer esto es necesario estar seguro de que  $A_m \neq 0$ ,  $B_m \neq 0 \quad \forall m$ .

Queda claro que hay cuatro relaciones generando las sucesiones  $\{A_{2n}\}$ ,  $\{A_{2n+1}\}$ ,  $\{B_{2n}\}$  y  $\{B_{2n+1}\}$  y que si en una de estas dos términos consecutivos, por ejemplo  $A_{2n}$  y  $A_{2n+2}$  son cero entonces toda la sucesión es 0, si  $\beta \neq 0$ : en efecto  $A_{2n+4} = 0$ , etc.. ,  $A_{2n-2} = 0, \dots$ . Pero se puede decir más, como veremos enseguida.

**Lema 2.1:** Dado  $\alpha$  existe una vecindad,  $|\beta| \leq \epsilon(\alpha)$ , tal que si  $\beta \neq 0$ , entonces todos los elementos de una sucesión son diferentes de 0 o todos son 0. Si  $\alpha$  no está en una vecindad de  $m^2$ , entonces las 4 sucesiones son 0.

Dem: Dado que la prueba es la misma en las cuatro sucesiones, sólo trataremos el caso  $\{A_{2n}\}$ . Podemos escribir (2.9), (2.11) y (2.14) en la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha - 4n^2 & -\beta & 0 & & & \\ -\beta & \alpha - 4(n+1)^2 & -\beta & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & -\beta & \\ 0 & & & -\beta & \alpha - 4(n+p)^2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{2n} \\ A_{2n+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{2n+2p} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} A_{2n-2} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ A_{2n+2p+2} \end{pmatrix}$$

donde, si  $n = 0$ , se reemplaza el elemento de la primera columna y segundo renglón por  $-2\beta$  y  $A_{2n-2}$ , del lado derecho por 0, es decir, definiendo  $A_{-2} = 0$ .

Sea  $\mathcal{A}_{n,p}$  la matriz diagonal  $(\alpha - 4n^2, \dots, \alpha - 4(n+p)^2)$ , y  $J_{n,p}$  la matriz con 1's al lado de la diagonal y 0 en lo demás, entonces tenemos

$$(\mathcal{A}_{n,p} - \beta J_{n,p}) \begin{pmatrix} A_{2n} \\ A_{2n+2} \\ \vdots \\ A_{2n+2p-2} \\ A_{2n+2p} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} A_{2n-2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_{2n+2p} \end{pmatrix}$$

Si  $\alpha \neq 4n^2, \dots, 4(n+p)^2$ , entonces  $\mathcal{A}_{n,p}$  es invertible, y, para  $\beta$  pequeño también lo será  $\mathcal{A}_{n,p} - \beta J_{n,p} = \mathcal{A}_{n,p}(I - \beta \mathcal{A}_{n,p}^{-1} J_{n,p})$ , con inversa  $(I + \beta \mathcal{A}_{n,p}^{-1} J_{n,p} + \beta^2 (\mathcal{A}_{n,p}^{-1} J_{n,p})^2 + \dots) \mathcal{A}_{n,p}^{-1}$

donde la serie geométrica es convergente si  $\|\beta \mathcal{A}_{n,p}^{-1} J_{n,p}\| < 1$ , lo cual será cierto si  $|\beta| < \frac{1}{\|\mathcal{A}_{n,p}^{-1}\| \|J_{n,p}\|}$ . Es fácil ver que  $\|J_{n,p}\| \leq 2$  y que  $\|\mathcal{A}_{n,p}^{-1}\| = \frac{1}{\min|\alpha - 4(n+k)^2|}$ ,  $k = 0, \dots, p$ .  
Entonces

$$\begin{pmatrix} A_{2n} \\ A_{2n+2} \\ \vdots \\ A_{2n+2p} \end{pmatrix} = \beta (\mathcal{A}_{n,p} - \beta J_{n,p})^{-1} \begin{pmatrix} A_{2n-2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_{2n+2p+2} \end{pmatrix}, \quad \text{si } |\beta| \leq \frac{\min}{2} |\alpha - 4(n+k)^2|.$$

Utilizando esto, comencemos la prueba propiamente dicha del lema. Supongamos que  $A_{2n_0} = 0$ ,  $n_0 \geq 0$ . Si  $\alpha$  no es vecino a  $0, 4, 16, \dots, 4(n_0 - 1)^2$ , entonces

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & & & \\ -2\beta & \alpha - 4 & -\beta & & \\ 0 & -\beta & \alpha - 16 & -\beta & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha - 4(n_0 - 2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ \vdots \\ A_{2n_0-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{-2} = 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ A_{2n_0} = 0 \end{pmatrix}$$

como la matriz  $(\mathcal{A}_{0,n_0} - \beta J_{0,n_0})$  es invertible,  $A_0, \dots, A_{2n_0-2} = 0$  y toda la sucesión es cero, ya que  $A_{2n_0-2} = A_{2n_0} = 0$ .

Si  $\alpha$  está en una vecindad de  $4m_0^2$  con  $0 \leq m_0 \leq n_0 - 1$ , tendremos que  $\mathcal{A}_{0,n_0}$  ya no es invertible, y por lo tanto habrá que dar un argumento diferente al anterior. Sabemos que  $(\mathcal{A}_{n_0+1,p} - \beta J_{n_0+1,p})$  es invertible, entonces

$$\begin{pmatrix} A_{2n_0+2} \\ A_{2n_0+4} \\ \vdots \\ A_{2n_0+2p} \end{pmatrix} = \beta (\mathcal{A}_{n_0+1,p} - \beta J_{n_0+1,p})^{-1} \begin{pmatrix} A_{2n_0} = 0 \\ 0 \\ \vdots \\ A_{2n_0+2p+2} \end{pmatrix}, \quad \text{para } |\beta| \leq \frac{1}{2} |\alpha - 4(n_0 + 1)^2|.$$

esto implica que

$$|A_{2n_0+2}|, \dots, |A_{2n_0+2p}| \leq \frac{|\beta|}{4((n_0 + 1)^2 - (n_0 - 1)^2)} \frac{1}{1 - \frac{2|\beta|}{4((n_0 + 1)^2 - (n_0 - 1)^2)}} |A_{2n_0+2p+2}|,$$

usando el hecho que

$$\| (\mathcal{A}_{n_0+1,p} - \beta J_{n_0+1,p})^{-1} \| \leq \| \mathcal{A}_{n_0+1,p}^{-1} \| \frac{1}{1 - |\beta| \| \mathcal{A}_{n_0+1,p}^{-1} J_{n_0+1,p} \|}$$

Como esto debe ser cierto para todo  $p$  y que la convergencia de la serie requiere de  $A_{2n_0+2p+2} \rightarrow 0$  si  $p \rightarrow \infty$ , esto implica que  $A_{2n_0+2}$  es arbitrariamente chico, por lo tanto  $A_{2n_0+2} = 0$  y la sucesión es cero.

Si  $\alpha$  es vecino a 0, entonces si la serie para  $\{A_{2n+1}\}$  es convergente, el mismo argumento, con  $A_{2n+1} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , implica que  $\{A_{2n+1}\} = 0$ , y de modo similar  $\{B_{2n+1}\} = 0 = \{B_{2n}\}$ .

Volviendo al primer caso, si  $\alpha$  no está en una vecindad de  $4m^2$ , se puede recuperar el resultado,  $\{A_{2n}\} = 0$ , con el argumento anterior. Tomando  $A_{0,2p}$ , con  $p$  arbitrariamente grande se tiene que, usando el mismo argumento,  $\{A_{2n}\} = 0$ .

Más generalmente, si  $\alpha$  es vecino a  $4m^2$  entonces  $\{A_{2n+1}\} = 0$  y  $\{B_{2n+1}\} = 0$ . Si  $\alpha$  es vecino a  $(2m+1)^2$  entonces  $\{A_{2n}\} = \{B_{2n}\} = 0$ . En el primer caso la solución es  $\pi$ -periódica y se escribe como  $x(t) = 2A_0 + 2 \sum A_{2n} \cos 2nt - 2 \sum B_{2n} \sin 2nt$ , con  $A_{2n} \neq 0$  o  $A_{2n} = 0 \forall n, B_{2n} \neq 0$  o  $B_{2n} = 0 \forall n$ , en el segundo caso, la solución es  $2\pi$ -periódica y se escribe como  $x(t) = 2 \sum A_{2n+1} \cos(2n+1)t - 2 \sum A_{2n+1} \sin(2n+1)t$ . ■

Supongamos que  $\alpha$  esté vecino a  $4m^2$  y  $\beta$  vecino a 0. Entonces podemos escribir (2.9) en la forma siguiente

$$(\mathcal{A}_{0,m-1} - \beta J_{0,m-1}) \begin{pmatrix} A_0 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{2m-4} \\ A_{2m-2} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_{2m} \end{pmatrix}$$

$$(\alpha - 4m^2)A_{2m} - \beta(A_{2m-2} + A_{2m+2}) = 0$$

$$(\mathcal{A}_{m+1,m+1+p} - \beta J_{m+1,m+1+p}) \begin{pmatrix} A_{2m+2} \\ A_{2m+4} \\ \vdots \\ A_{2m+2p-2} \\ A_{2m+2p} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} A_{2m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_{2m+2p+2} \end{pmatrix}$$



En este caso las matrices son invertibles, como se acabó de ver, si por ejemplo  $|\alpha - 4m^2| \leq 4m - 1$ ,  $|\beta| \leq 1$ , entonces  $A_0, \dots, A_{2m-2}$ , son funciones lineales de  $\beta A_{2m}$ , es decir  $A_{2m-2k} = a_{-k}(\alpha, \beta)\beta A_{2m}$ , y  $A_{2m+2}, \dots$  son funciones lineales de  $\beta A_{2m}$  y  $\beta A_{2m+2p+2}$ . Como las cotas son independientes de  $p$  y  $A_{2m+2p+2} \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ , uno tiene que  $A_{2m+2k} = a_k(\alpha, \beta)\beta A_{2m}$ . Este paso se puede justificar con un poco de análisis funcional, (como se verá más adelante). Por lo tanto el problema se reduce a una sólo ecuación:

$$(\alpha - 4m^2)A_{2m} - \beta(a_{-1}(\alpha, \beta)\beta + a_1(\alpha, \beta)\beta)A_{2m} = 0.$$

Si  $A_{2m} = 0$ , ya vimos que  $A_{2n} = 0$  para todo  $n$ , entonces se tiene la "ecuación de bifurcación":

$$\alpha - 4m^2 - \beta^2(a_{-1}(\alpha, \beta) + a_1(\alpha, \beta)) \equiv G(\alpha, \beta).$$

Como  $G(m^2, 0) = 0$ ,  $G_\alpha(m^2, 0) = 1$ ,  $G_\beta(m^2, 0) = 0$ , uno puede usar el teorema de la función implícita y probar que existe una única curva, cerca de  $(m^2, 0)$ , de la forma  $\alpha = \alpha(\beta)$ , tal que  $G(\alpha(\beta), \beta) = 0$ .

Veremos más adelante una manera eficiente, con fracciones continuas, de calcular los coeficientes  $a_{\pm 1}(\alpha, \beta)$ . Por ahora demos un poco de análisis funcional.

El método que acabamos de desarrollar es un caso particular del método de Liapunov-Schmidt. Este se puede plantear en la siguiente forma: Sea  $L^2_{per}[0, 2\pi]$  el espacio de las funciones periódicas de cuadrado integrable, el cual se puede identificar con el espacio de sucesiones  $\delta_n \in \mathbb{C}$ , con  $\delta_{-n} = \bar{\delta}_n$  y  $\sum_{-\infty}^{\infty} |\delta_n|^2 < \infty$  y el producto escalar usual. Sea también  $H^2_{per}[0, 2\pi] = \{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n e^{int}, \delta_{-n} = \bar{\delta}_n, \sum_{-\infty}^{\infty} n^4 |\delta_n|^2 < \infty\}$ . Sea  $L_{\alpha, \beta x}$  el operador lineal  $L_{\alpha, \beta x} = x'' + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x$ , considerado como operador de  $H^2_{per}[0, 2\pi]$  en  $L^2_{per}[0, 2\pi]$  y dado, al nivel de los coeficientes de Fourier, por las relaciones de (2.9). Dado que  $\cos 2t$  es una función par en  $t$ , es fácil ver que si  $x(t)$  es par (impar respectivamente), entonces  $L_{\alpha, \beta x}$  es par (respectivamente impar). Por lo tanto uno puede descomponer  $L^2$  con  $L^2_{\oplus} \oplus L^2_{\ominus}$ , correspondiente a las funciones pares (las  $A_n$ ) y las funciones impares (las  $B_n$ ) y  $H^2$  como  $H^2_{\oplus} \oplus H^2_{\ominus}$ . Entonces  $L_{\alpha, \beta}$  manda  $H^2_{\oplus}$  en  $L^2_{\oplus}$  y  $H^2_{\ominus}$  en  $L^2_{\ominus}$ . Finalmente  $L^2_{\oplus}$  puede también descomponerse en  $L^2_{p,0} \oplus L^2_{p,1}$  donde  $L^2_{p,0}$  corresponde a las funciones  $\pi$ -periódicas (generadas por  $A_{2n}$ ) y su complemento ortogonal  $L^2_{p,1}$  (generado por  $A_{2n+1}$ ) y las descomposiciones correspondientes para  $L^2_{\ominus}$  y  $H^2_{\ominus}$ . Es inmediato comprobar que

$L_{\alpha,\beta}$  manda  $H_{p,0}^2$  en  $L_{p,0}^2$ ,  $H_{p,1}^2$  en  $L_{p,1}^2$ ,  $H_{i,0}^2$  en  $L_{i,0}^2$  y  $H_{i,1}^2$  en  $L_{i,1}^2$  (también se puede ver esto usando los coeficientes de Fourier y las cuatro sucesiones). Los siguientes hechos son inmediatos:

- 1)  $L_{\alpha,\beta}$  es continuo (es decir acotado) como operador de  $H^2$  en  $L^2$ ,
- 2)  $L_{\alpha,\beta}$  es autoadjunto con respecto al producto escalar de  $L^2$ ,
- 3) La dimensión de  $\ker L_{\alpha,\beta}$  es a lo más 2 (a lo más dos soluciones linealmente independientes y  $2\pi$ -periódicas de la ecuación de Mathieu),
- 4) *Alternativa de Fredholm*: la ecuación  $L_{\alpha,\beta}x = f$ , con  $f \in L_{\text{per}}^2[0, 2\pi]$ , tiene solución sí y solo sí  $f$  es ortogonal a  $\ker L_{\alpha,\beta}$ , (en efecto  $(Lx, v) = (x, Lv) = (f, v) = 0$  si  $Lx = f$  y  $Lv = 0$ , por lo tanto  $f$  es ortogonal a  $L_{\alpha,\beta}$ . Al revés, la fórmula de variación de parámetros da una solución particular en  $H^2$  si  $f$  está en  $L^2$ ).
- 5)  $L_{\alpha,\beta}$  es un *operador de Fredholm* de  $H^2$  a  $L^2$ , es decir  $\dim(\ker L_{\alpha,\beta}) < \infty$ ,  $\text{Rango}(L_{\alpha,\beta})$  es cerrado y de codimensión finita. La diferencia de esas dimensiones, el índice de  $L_{\alpha,\beta}$ , es 0.
- 6) Se puede complementar  $\ker L_{\alpha,\beta}$  por  $\text{Rango}L_{\alpha,\beta} \cap H^2$  en  $H^2$  y por  $\text{Rango}L_{\alpha,\beta}$  en  $L^2$  y  $L_{\alpha,\beta}$  restringido a  $\text{Rango}L_{\alpha,\beta} \cap H^2$  es un operador invertible sobre  $\text{Rango}L_{\alpha,\beta}$ . Sea  $K_{\alpha,\beta}$  el inverso y sea  $\mathcal{P}$  la proyección, ortogonal en  $L^2$ , de  $L^2$  sobre  $\ker L_{\alpha,\beta}$ . Entonces la ecuación  $L_{\alpha,\beta}x = f$ , se descompone en dos ecuaciones, escribiendo  $x = x_0 + x_1$  con  $x_0 = \mathcal{P}x$ ,  $x_1 = (I - \mathcal{P})x$ :  $L_{\alpha,\beta}(x_0 + x_1) = \mathcal{P}f + (I - \mathcal{P})f = L_{\alpha,\beta}x_1$ , es decir

$$\mathcal{P}f = 0$$

$$x_1 = K_{\alpha,\beta}(I - \mathcal{P})f$$

Recuperamos así la alternativa de Fredholm, con este método de proyección, el método de Liapunov-Schmidt.

- 7) Supongamos que  $\ker L_{\alpha_0,\beta_0}$  es conocido, entonces podemos escribir

$$L_{\alpha,\beta}x = L_{\alpha_0,\beta_0}x + (\alpha - \alpha_0 - 2(\beta - \beta_0) \cos 2t)x.$$

Usando la proyección sobre  $\ker L_{\alpha_0,\beta_0}$  y  $\text{Rango}L_{\alpha_0,\beta_0}$ , se tiene

$$(\alpha - \alpha_0)x_0 - 2(\beta - \beta_0)\mathcal{P}(\cos 2t(x_0 + x_1)) = 0,$$

$$x_1 + (\alpha - \alpha_0)K_{\alpha_0, \beta_0}x_1 - 2(\beta - \beta_0)(I - \mathcal{P})[\cos 2t(x_0 + x_1)] = 0.$$

Podemos aplicar el teorema de la función implícita a la segunda ecuación y obtener  $x_1 = x_1(x_0, \alpha, \beta)$  como única solución, con  $x_1(x_0, \alpha_0, \beta_0) = 0$ . De hecho, dada la unicidad y la linealidad,  $x_1(tx_0, \alpha, \beta) = tx_1(x_0, \alpha, \beta)$ . El problema es entonces equivalente, en una vecindad de  $(0, \alpha_0, \beta_0)$  a la *ecuación de bifurcación*

$$(\alpha - \alpha_0)x_0 - 2(\beta - \beta_0)\mathcal{P}[\cos 2t(x_0 + x_1(x_0, \alpha, \beta))] = 0$$

Queda claro que esta manera de hacer las cosas funciona también para cada uno de los operadores definidos sobre los cuatro espacios que configuran  $L^2$ , es decir  $L_{p,0}^2$ ,  $L_{p,1}^2$ ,  $L_{i,0}^2$ ,  $L_{i,1}^2$ .

Por ejemplo si tomamos  $\alpha_0 = 4m^2$ ,  $\beta_0 = 0$ , entonces  $x_0 = 2A_{2m} \cos 2mt$ ,  $\mathcal{P}(\cos 2tx_0) = 0$  y  $\mathcal{P}(\cos 2tx_1) = (A_{2m-2} + A_{2m+2}) \cos 2mt$ , con  $A_{2m-2}(\alpha, \beta) + A_{2m+2}(\alpha, \beta) = a_{-1}(\alpha, \beta)\beta + a_1(\alpha, \beta)\beta$  y la ecuación de bifurcación es la que ya encontramos. Si  $\beta \neq 0$ , entonces  $x_0$  se puede expresar como una serie (en  $\cos 2nt$  en el ejemplo anterior) y la ecuación de bifurcación será más complicada. Sin embargo se puede probar lo siguiente:

**Lema 2.2:** Si  $\beta_0 \neq 0$ , sea  $\tilde{L}_{\alpha_0, \beta_0}$  el operador  $L_{\alpha_0, \beta_0}$  restringido a uno de los 4 espacios, entonces  $\dim(\ker \tilde{L}_{\alpha_0, \beta_0}) \leq 1$  y existe  $p(\alpha_0, \beta_0)$  tal que los coeficientes de Fourier de  $x_0$  son todos diferentes de 0, a partir de  $p$ , o  $x_0 \equiv 0$ , para  $x_0$  en  $\ker \tilde{L}_{\alpha_0, \beta_0}$ .

**Dem:** Tomemos esta vez el ejemplo de  $L_{p,0}$ , generado por  $\{\cos 2nt\}$ . Si  $A_{2n} = 0$ , para una sucesión de  $n$ 's tendiendo a  $\infty$ , entonces tenemos

$$(\mathcal{A}_{n+1, \infty} - \beta J_{n+1, \infty}) \begin{pmatrix} A_{2n+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} A_{2n} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

donde usamos el mismo argumento que antes, al tomar una matriz "infinita", es decir, tomando matrices cada vez más grandes como aproximación a los operadores respectivos. Ahora si  $n$  es tan grande que en  $\mathcal{A}_{n+1, \infty} - \beta J_{n+1, \infty}$  dominan los términos diagonales  $-4(n+1+k)^2$ , entonces este operador es invertible, y tenemos  $A_{2n+2} = \dots = 0$ , y por lo menos dos términos consecutivos son 0, por lo tanto  $x_0 = 0$  si  $\beta_0 \neq 0$ .

Si hay dos elementos  $x_0$  y  $\tilde{x}_0$  en  $\ker \tilde{L}_{\alpha_0, \beta_0}$ , con coeficientes  $A_{2n}$  y  $\tilde{A}_{2n}$ , entonces, tomando  $n_0 \geq p(\alpha_0, \beta_0)$ , se tiene  $A_{2n_0} + k\tilde{A}_{2n_0} = 0$ , para  $k = -\frac{A_{2n_0}}{\tilde{A}_{2n_0}}$ . Por lo anterior  $x_0 + k\tilde{x}_0 = 0$ , y hay sólo una solución linealmente independiente. ■

Notamos además que

$$(\mathcal{A}_{n_0+1, \infty} - \beta J_{n_0+1, \infty}) \begin{pmatrix} A_{2n_0+2} \\ A_{2n_0+4} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} A_{2n_0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

implica que  $A_{2n_0+2} = \beta a(\alpha_0, \beta_0) A_{2n_0}$  y, por lo tanto las otras relaciones se escriben

$$(\tilde{\mathcal{A}}_{0, n_0} - \beta J_{0, n_0}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{2n_0} \end{pmatrix} = 0,$$

donde  $\tilde{\mathcal{A}}_{0, n_0}$  difiere de  $\mathcal{A}_{0, n_0}$  sólo en el último renglón y en la última columna donde  $\alpha_0 - 4n_0^2$  es reemplazado por  $\alpha_0 - 4n_0^2 - \beta^2 a(\alpha_0, \beta_0)$ . Se tiene entonces que  $\tilde{\mathcal{A}}_{0, n_0} - \beta J_{0, n_0}$  tiene un núcleo de dimensión 1. Cambiando  $A_0$  por  $\tilde{A}_0 = 2A_0$ , tenemos

$$\det \begin{pmatrix} \alpha/2 & -\beta & 0 & \dots \\ -\beta & \alpha - 4 & -\beta & \dots \\ 0 & -\beta & \alpha - 16 & -\beta & \dots \\ & & & & \alpha - 4n_0^2 - \beta^2 a(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = 0.$$

Como esta matriz es simétrica y 0 es un cero simple, tenemos, para  $(\alpha, \beta)$  vecinos a  $(\alpha_0, \beta_0)$ .

$$\det(\lambda, \alpha, \beta) \equiv \det(\lambda I - \tilde{\mathcal{A}}_{0, n_0}(\alpha, \beta) - \beta J_{0, n_0}(\alpha, \beta)) = (\lambda - \lambda_0(\alpha, \beta)) \prod (\lambda - \lambda_i(\alpha, \beta))$$

con  $\lambda_i(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$ , para  $i \geq 1$ ,  $\lambda_0(\alpha_0, \beta_0) = 0$  y  $\lambda_0(\alpha, \beta)$  es una función suave de  $(\alpha, \beta)$ , de hecho analítica: con el método de la función implícita, para variable compleja y series, que se verá más adelante, es fácil probar que  $a_{\alpha, \beta}$  es analítica. Por lo tanto el determinante, como función de  $(\lambda, \alpha, \beta)$  es analítico. Como  $\lambda_0(\alpha_0, \beta_0)$  es un cero simple se tiene que la derivada parcial del determinante con respecto a  $\lambda$  y evaluada en  $(\lambda_0(\alpha_0, \beta_0), \alpha_0, \beta_0)$  es diferente de cero. Por lo tanto, por el teorema de la función implícita, la ecuación

$\det(\lambda, \alpha, \beta) = 0$ , se resuelve de manera única para  $\lambda = \lambda_0(\alpha, \beta)$  con  $\lambda_0(\alpha_0, \beta_0) = 0$ , la curva de transición se encuentra, cerca de  $(\alpha_0, \beta_0)$ , al resolver  $\lambda_0(\alpha, \beta) = 0$ .

Notese que para  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+1}$  y  $B_{2n}$ , las matrices correspondientes son simétricas y que  $A_{n_0+1, \infty}$  es la misma para  $\{A_{2n}\}$  y  $\{B_{2n}\}$ , así como para  $\{A_{2n+1}\}$  y  $\{B_{2n+1}\}$ . Por lo tanto  $a_{2n_0}$  es el mismo para  $\{A_{2n}\}$  y  $\{B_{2n}\}$ , mientras que  $a_{2n_0+1}$  es para  $\{A_{2n+1}\}$  y  $\{B_{2n+1}\}$ .

Usando el lema anterior, el núcleo es de dimensión 1, y  $x_0 = t\tilde{x}_0$  para cualquier  $x_0$  en  $\ker \tilde{L}_{\alpha, \beta}$ . Como  $x_1(x_0, \alpha, \beta)$  es lineal en  $t$ , la ecuación de bifurcación se reduce a la ecuación siguiente, para  $t \neq 0$ , para  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\alpha - \alpha_0 - 2(\beta - \beta_0) \int_0^{2\pi} \cos 2t(\tilde{x}_0^2 + \tilde{x}_0 x_1(\tilde{x}_0, \alpha, \beta)) dt = H(\alpha, \beta) = 0.$$

Con  $x_1(\tilde{x}_0, \alpha_0, \beta_0) = 0$  y la proyección  $\mathcal{P}$  sobre  $\tilde{x}_0 : \mathcal{P}y = \tilde{x}_0 \int_0^{2\pi} y(t)\tilde{x}_0(t) dt$ , normalizando  $\tilde{x}_0$  de tal forma que  $\int_0^{2\pi} \tilde{x}_0^2 dt = 1$ .

Como  $H_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = 1$ ,  $H_\beta(\alpha_0, \beta_0) = -2 \int_0^{2\pi} \cos 2t\tilde{x}_0^2 dt$ , podemos resolver localmente esta ecuación para  $\alpha = \alpha(\beta)$  analítica en  $\beta$ , aplicando otra vez el teorema de la función implícita compleja, con  $\alpha'(\beta_0) = 2 \int_0^{2\pi} \cos 2t\tilde{x}_0^2 dt$ .

Si  $\tilde{x}_0 = 2 \sum A_{2n} \cos 2nt$  (por ejemplo), con todos los  $A_n \neq 0$  y  $\beta_0 \neq 0$ , y  $4\pi \sum_0^\infty A_{2n}^2 = 1$ , entonces es fácil ver que  $\alpha'(\beta_0) = \sum A_{2n}(A_{2n-1} + A_{2n+2})$ . Si  $\tilde{x}_0 = 2 \sum A_{2n+1} \cos(2n+1)t$ , entonces  $\alpha'(\beta_0) = \sum A_{2n+1}(A_{2n-1} + A_{2n+3})$  y lo mismo para  $B_{2n}$  y  $B_{2n+1}$ .

Este argumento funciona también para  $\beta_0 = 0$ , con  $\tilde{x}_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos 2n_0 t$  y  $\alpha_0 = 4n_0^2$ , ó  $\tilde{x}_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos(2n_0 + 1)t$  y  $\alpha_0 = (2n_0 + 1)^2$ , o  $\tilde{x}_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin 2n_0 t$  y  $\alpha_0 = 4n_0$ , o  $\tilde{x}_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin(2n_0 + 1)t$  y  $\alpha_0 = (2n_0 + 1)$ .

En ese caso  $\alpha'(0)$  excepto para  $\tilde{x}_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos t$ , con  $\alpha'(0) = 1 (A_{-1} = A_1)$  y  $\tilde{x}_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin t$  con  $\alpha'(0) = -1 (B_{-1} = -B_1)$ .

Finalmente queda claro que, debido al Teorema de la Función Implícita, cada curva de transición queda definida para todo  $\beta$  (un argumento por contradicción implica que no pueden terminar) y que toca al eje  $\alpha$  en  $4n_0^2$  o  $(2n_0 + 1)^2$ . Además, dentro de cada espacio, dos curvas de transición no se cortan. Hemos probado la primera parte del siguiente resultado.

**Teorema 2.1:** Si  $x_0$  es una solución periódica de la ecuación de Mathieu de período  $\pi$

(respectivamente  $2\pi$ ) par (impar), entonces existe una única curva analítica  $\alpha_{p,0}(\beta)$ , respectivamente  $\alpha_{p,1}(\beta)$ , o  $\alpha_{i,0}(\beta)$  respectivamente  $\alpha_{i,1}(\beta)$ , definida para todo  $\beta$  y pasando por  $\alpha = 4n_0^2$ ,  $\beta = 0$  para las soluciones  $\pi$ -periódicas y por  $(2n_0 + 1)^2$  para las soluciones  $2\pi$ -periódicas. Además  $\alpha_{p,0}(-\beta) = \alpha_{p,0}(\beta)$ ,  $\alpha_{i,0}(-\beta) = \alpha_{i,0}(\beta)$ ,  $\alpha_{p,1}(-\beta) = \alpha_{i,1}(\beta)$  y, dentro de una de las cuatro categorías, dos de estas curvas no se cruzan. Finalmente el número de ceros de  $x_0(t)$  entre 0 y  $2\pi$  es constante sobre la curva de transición, igual a  $2n_0$  para las funciones pares y la curva que pasa por  $(n_0^2, 0)$ , y a  $2n_0 - 1$  para las funciones impares.

**Dem:** Falta probar las simetrías y los ceros. Sea  $x(t)$  solución de la ecuación de Mathieu  $x''(t) + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x(t) = 0$ . Tomamos  $y(t) \equiv x(t + \pi/2)$ , entonces  $y''(t) + (\alpha + \beta \cos 2t)y(t) = 0$ , es decir  $y(t)$  es solución para  $(\alpha, -\beta)$ . Además  $y(t)$  tiene la misma periodicidad que  $x(t)$ . Si  $x(t) = 2 \sum_0^\infty A_{2n} \cos 2nt$ , entonces  $y(t) = 2 \sum_0^\infty (-1)^n A_{2n} \cos 2nt$  y pertenece también a  $H_{p,0}$  y por lo tanto  $\alpha_{p,0}(-\beta) = \alpha_{p,0}(\beta)$  ya que estos dos pedazos de la curva deben reunirse en  $\alpha_{p,0}(0) = 4n_0^2$ . Del mismo modo si  $x(t) = 2 \sum_1^\infty B_{2n} \sin 2nt$  entonces  $y(t) = 2 \sum_1^\infty (-1)^n B_{2n} \sin 2nt$ . También si  $x(t) = 2 \sum_0^\infty A_{2n+1} \cos(2n+1)t$  se tendrá que  $y(t) = 2 \sum_1^\infty \sin(2n+1)t$  pertenece a  $H_{i,1}$  y  $\alpha_{i,1}(-\beta) = \alpha_{p,1}(\beta)$ .

Para los ceros basta ver que la ecuación de bifurcación es independiente de  $t$  y que  $x_1(t\tilde{x}_0, \alpha, \beta) = tx_1(\tilde{x}_0, \alpha, \beta)$  es analítico en  $\alpha$  y  $\beta$ . Por lo tanto  $x(t)$ , sobre la curva de transición  $\alpha = \alpha(\beta)$ , es una función analítica de  $(\alpha, \beta)$  y por lo tanto de  $\beta$ . Ahora bien  $x(t)$  tiene todos sus ceros simples (un cero doble implica que el problema de valores iniciales en ese cero, es con  $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ , y por la unicidad de la solución a la ecuación diferencial, tendríamos  $x(t) \equiv 0$ ). Esto implica que el número de ceros se conserva sobre cada curva de transición y basta calcularlos para  $\cos n_0 t$  o  $\sin n_0 t$ , en  $\beta = 0$ . Probaremos más adelante que las curvas de transición no se cortan. ■

Parte del teorema 2.1 es conocida: el comportamiento de los ceros es clásico para el problema de Sturm-Liouville (Abramowitz, [Ab], pg 724), el hecho que las curvas no se cortan para  $\beta$  pequeño (se usará este argumento más adelante: [Ab] 20.2.21-20.2.23) y que el núcleo es de dimensión 1 ([Ab] pg 724). Las propiedades de simetría están mencionadas en [Ab] pg 728 y en Meixner-Shäffke, [M-S], pgs 99 y 133. Que uno obtenga curvas continuas se puede probar usando las propiedades espectrales como en el Coddington y Levinson, pg 219. Sin embargo, el uso del método de Liapunov-Schmidt parece novedoso

en este contexto. La analiticidad global está probada en [M-S], pg 133, con métodos más sofisticados de análisis funcional.

Encontremos ahora las expresiones en fracciones continuas para las curvas de transición. La ecuación (2.11) nos da una relación entre los coeficientes de Fourier, si  $A_0 \neq 0$ ,

$$\alpha = \beta \frac{A_2}{A_0},$$

a su vez de (2.14),  $\frac{A_2}{A_0}$  es

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{2\beta}{(\alpha - 4) - \beta \frac{A_4}{A_2}},$$

que sustituyendo en la ecuación anterior nos da

$$\alpha = \frac{2\beta^2}{(\alpha - 4) - \beta \frac{A_4}{A_2}},$$

aplicando (2.18) de manera repetida tenemos

$$\alpha = \frac{2\beta^2}{(\alpha - 4) - \frac{\beta^2}{(\alpha - 16) - \frac{\beta^2}{\ddots}}}, \quad (2.19)$$

donde tenemos una relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ , la cual nos determina la curva de transición que parte de  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0$ .

Como se vió, (2.19) determinará una solución  $\pi$ -periódica par, poniendo en la serie (2.17)  $B_i = 0$  y  $A_{2i+1} = 0$ , ya que éste es el único con su serie convergente.

Hagamos lo mismo para las curvas que parten de  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 1$ . De (2.12), si  $A_1 \neq 0$ ,

$$\alpha = 1 + \beta + \beta \frac{A_3}{A_1}$$

nuevamente aplicando (2.18) de manera repetida tenemos

$$\alpha = 1 + \beta + \frac{\beta^2}{(\alpha - 9) - \frac{\beta^2}{(\alpha - 25) - \frac{\beta^2}{\ddots}}} \quad (2.20)$$

que es la curva de transición para soluciones pares y  $2\pi$ -periódicas, al tomar  $B_i = 0$  y  $A_{2i} = 0$  en (2.17). Repitiendo el mismo procedimiento, con (2.13) se tiene, si  $B_1 \neq 0$ ,

$$\alpha = 1 - \beta + \beta \frac{B_3}{B_1}$$

la cual, por (2.18)

$$\alpha = 1 - \beta + \frac{\beta^2}{(\alpha - 9) - \frac{\beta^2}{(\alpha - 25) - \frac{\beta^2}{\dots}}} \quad (2.21)$$

que es una curva de transición para soluciones impares y  $2\pi$ -periódicas, poniendo  $A_i = 0$  y  $B_{2i} = 0$  en (2.17).

De manera análoga tenemos que las dos curvas de transición que salen de  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 4$ , si  $A_2 \neq 0$ , son:

$$\alpha = 4 + \frac{2\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^2}{(\alpha - 16) - \frac{\beta^2}{(\alpha - 36) - \frac{\beta^2}{\dots}}} \quad (2.22)$$

que corresponde a las soluciones pares y  $\pi$ -periódicas ( $A_{2i+1} = 0$ ,  $B_i = 0$ ) y

$$\alpha = 4 + \frac{\beta^2}{(\alpha - 16) - \frac{\beta^2}{(\alpha - 36) - \frac{\beta^2}{\dots}}} \quad (2.23)$$

correspondiente a las soluciones impares y  $\pi$ -periódicas ( $A_i = 0$ ,  $B_{2i+1} = 0$ ).

Finalmente, de (2.9) y (2.10) tenemos que las curvas que se originan en  $\beta = 0$ ,  $\alpha = m^2$  para  $m \geq 3$  están dadas por, si  $A_m \neq 0$ ,

$$\alpha = m^2 + \beta \left( \frac{A_{m-2}}{A_m} + \frac{A_{m+2}}{A_m} \right),$$

pero por (2.18) esta última se transforma en

$$\alpha = m^2 + \beta \left( \frac{\beta}{(\alpha - (m-2)^2) - \beta \frac{A_{m-4}}{A_{m-2}}} + \frac{\beta}{(\alpha - (m+2)^2) - \beta \frac{A_{m+4}}{A_{m+2}}} \right),$$

la cual está bien definida ya que  $\alpha$  es cercana a  $m^2$  cuando  $\beta \approx 0$ . Haciendo esto de manera repetida y suponiendo que  $m$  es impar tenemos que



$$\alpha = m^2 + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-4)^2) - \frac{\beta^2}{\alpha - 1 - \beta}}} + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots}}}$$

Esta ecuación surge de los coeficientes  $A_m$  con  $m$  impar, por esto, los  $\alpha, \beta$  que la cumplan darán soluciones de la ecuación de Mathieu  $2\pi$ -periódicas pares, al tomar  $A_{2i} = 0$  y  $B_i = 0$  en (2.17).

Cabe señalar que esta ecuación relaciona a todos los coeficientes de la expansión, y se reduce a pedir que  $\alpha$  y  $\beta$  cumplan tal expresión; es decir, para tener soluciones con periodos  $\pi$  y  $2\pi$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  no pueden ser cualquier punto en el plano. Los  $\alpha, \beta$  que satisfacen ésta, determinan una curva, la *curva de transición* que se definió en la sección anterior.

Las cuatro expresiones que se obtienen considerando los coeficientes  $A, B$  y la paridad de  $m$  se muestran enseguida:

**Curvas de transición para soluciones  $2\pi$ -periódicas:** ( $m = 2n + 1, 1 \leq n \in N$ )

$$\alpha = m^2 + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-4)^2) - \frac{\beta^2}{\alpha - 1 - \beta}}} + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots}}} \quad (2.24)$$

que nos dará soluciones pares de (2.17) tomando  $A_{2i} = 0, B_i = 0$ .

$$\alpha = m^2 + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots - \frac{\beta^2}{(\alpha-0) - \frac{\beta^2}{\alpha-1+\beta}}}} + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots}}}$$
(2.25)

que nos dará una soluciones impares de (2.17) tomando  $A_i = 0$ ,  $B_{2i} = 0$ .

**Curvas de transición para soluciones  $\pi$ -periódicas: ( $m = 2n$ ,  $2 \leq n \in N$ )**

$$\alpha = m^2 + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots - \frac{\beta^2}{(\alpha-4) - \frac{2\beta^2}{\alpha}}}} + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots}}}$$
(2.26)

que nos entregará soluciones pares de (2.17) poniendo  $A_{2i+1} = 0$ ,  $B_i = 0$ .

$$\alpha = m^2 + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots - \frac{\beta^2}{(\alpha-10) - \frac{\beta^2}{\alpha-4}}}} + \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots}}}$$
(2.27)

que nos entregará soluciones impares de (2.17) poniendo  $A_i = 0$ ,  $B_{2i+1} = 0$ .

Si  $\alpha$  es vecino a  $m^2 = (2n + 1)^2$ , vimos que  $A_{2i} = B_{2i} = 0$  y que si  $A_{2i+1} \neq 0$  para algún  $i$ , entonces  $A_{2p+1} \neq 0 \forall p$ , y  $\alpha$  queda determinado por (2.24), mientras que si  $B_{2i+1} \neq 0$  para algún  $i$ , entonces  $B_{2p+1} \neq 0 \forall p$ , y  $\alpha$  queda determinado por (2.25).

Por lo tanto si para algún  $(\alpha, \beta) \approx ((2n + 1)^2, 0)$  hay una solución con  $A_{2i+1} \neq 0$  y  $B_{2j+1} \neq 0$  para algún  $i$  y  $j$ , entonces  $(\alpha, \beta)$  pertenece a la intersección de las dos curvas de transición que salen de  $((2n + 1)^2, 0)$  y dadas por (2.24) y (2.25). Por lo tanto

$$\frac{\beta^2}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{\beta^2}{\dots - \frac{\beta^2}{\alpha-1-\beta}}} = \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{\beta^2}{\dots - \frac{\beta^2}{\alpha-1+\beta}}}$$

de lo cual se deduce que  $\alpha - 1 - \beta = \alpha - 1 + \beta$ , es decir  $\beta = 0$  y la única intersección de las curvas para  $\beta \approx 0$  es  $\beta = 0, \alpha = m^2$ . Por lo tanto para (2.24) uno tiene que  $B_{2i+1} = 0$  y para (2.25) que  $A_{2i+1} = 0$ . Esto implica que la otra solución sobre la curva de transición es no acotada y crece como  $t$  (si fuera acotada por el teorema de Floquet sería periódica).

Para (2.26) y (2.27), la intersección de las dos curvas de transición daría  $\alpha - 4 - 2\beta^2/\alpha = \alpha - 4$ , es decir  $\beta = 0$ , con los mismos resultados. El hecho que las curvas no se interseccionen para todo  $\beta \neq 0$ , será probado más adelante.

## 2.2 ANÁLISIS DE CONVERGENCIA PARA LAS CURVAS DE TRANSICIÓN Y SOLUCIONES

En estas ecuaciones ((2.19)-(2.27)), aparecen  $\alpha, \beta$  implícitamente, nos gustaría despejar  $\alpha$  en términos de  $\beta$  para poder tener un dibujo de las curvas; y si esto no es posible, por lo menos poder dar una aproximación de  $\alpha$  dada una  $\beta$ .

Para hacer esto definamos la siguiente función "cortada" de (2.24) (ésta fue elegida de manera arbitraria) que pudo haber sido cualquier otra de estas ecuaciones.

$$F_k(\alpha, \beta) = \alpha - m^2 - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m-4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots - \frac{\beta^2}{\alpha-1-\beta}}}} \quad (2.28)$$

$$\frac{\beta^2}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots - \frac{\beta^2}{\alpha - (m+2k)^2}}}}$$

donde suponemos que  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :  $F_k$  es el cociente de dos polinomios en  $\alpha$  y  $\beta$ .

Enunciamos enseguida el teorema de la función implícita sólo con fines explicativos:

**Teorema 2.2:** (Teorema de la función implícita)<sup>[Ma]</sup>

Si  $F(z, w)$  es una función de dos variables complejas analítica en el recinto  $|z - z_0| < r$ ,  $|w - w_0| < \rho$  y satisface las condiciones

$$F(z_0, w_0) = 0; \quad \frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w} \neq 0, \quad (2.29)$$

entonces, en cierto entorno  $|z - z_0| < r' < r$ ,  $|w - w_0| < \rho' < \rho$  del punto  $(z_0, w_0)$ , la ecuación  $F(z, w) = 0$  tiene para cada  $z$  una raíz  $w(z)$  y sólo una. Esta raíz es una función uniforme y analítica en el círculo  $|z - z_0| < r'$  y representa una función implícita, determinada por la ecuación  $F(z, w) = 0$ , y por la condición suplementaria  $w(z_0) = w_0$ . Además  $r' \geq r \left( \frac{\rho}{\rho + 2c} \right)^2$ , donde  $c = \max |F(z, w)| / \left| \frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \right|$  con  $|z - z_0| \leq r$ ,  $|w - w_0| \leq \rho$ . La demostración de la estimación sobre  $r'$ , la cual no es usual, se dará en el apéndice III.

Procedamos a demostrar que (2.28) cumple con este teorema. Antes de pasar a mostrar que  $F_k(\alpha, \beta)$  es analítica primero exhibamos que cumple (2.29).

Primeramente  $F_k(m^2, 0) = 0$ , simplemente de evaluar. Procedamos a calcular las derivadas parciales en  $(m^2, 0)$

$$\frac{\partial F_k(m^2, 0)}{\partial \beta} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{h}{(\alpha - (m-2)^2) - \frac{h^2}{(\alpha - (m-4)^2) - \frac{h^2}{\alpha - 1 - h}}}}{\frac{h}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{h^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{h^2}{\alpha - (m+2k)^2}}}} \right) = 0, \quad (2.30)$$

y de la misma manera se tiene

$$\frac{\partial F_k(m^2, 0)}{\partial \alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m^2 + h - m^2}{h} = 1.$$

Por lo tanto, si demostramos que  $F_k(\alpha, \beta)$  es analítica en un entorno de  $(m^2, 0)$ , podremos aplicar el teorema de la función implícita. Una manera de hacer esto, es exhibir que el tercer y cuarto término de (2.28) son composiciones de funciones analíticas.

$$f_k(z) = \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m - 2k)^2) - z}; \quad z \neq \alpha - (m - 2k)^2, \quad (2.31)$$

esta función es analítica. De esto tenemos que el tercer término de (2.28) se puede expresar como

$$f_1(f_2(\dots(f_{\frac{m-3}{2}}(f_{\frac{m-1}{2}}(z_0))))\dots) = \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m - 2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m - 4)^2) - \frac{\beta^2}{\dots - \frac{\beta^2}{(\alpha - 1) - z_0}}} \quad (2.32)$$

con  $z_0 = \beta$ , y  $\alpha \in ((m - 2)^2, (m + 2)^2)$ .

Ahora  $f_{\frac{m-1}{2}}(z) = \frac{-\beta^2}{(\alpha - 1) - z}$  es analítica en  $z_0$  ya que  $(\alpha, \beta) \in V_r(m^2, 0)$  (Una vecindad de radio  $r$  alrededor de  $(m^2, 0)$ ). Además  $f_{\frac{m-1}{2}}(z_0) = \frac{-\beta^2}{(\alpha - 1) - \beta}$  tiene norma menor que 1 ya que la norma del numerador es menor que 1 si  $|\beta| < 1$  y la del denominador mayor que 1 (en este caso  $\alpha \geq 9$ ). De la misma manera  $f_{\frac{m-3}{2}}(z)$  evaluado en  $f_{\frac{m-1}{2}}(z_0)$  tendrá norma menor que 1 ( $\alpha \geq 25$ ) y estará de nuevo bien definido, y será analítico. En término general es fácil ver que si  $|\beta| \leq 1$ ,  $|z| \leq 1$ ,  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ , entonces  $|f_k(z)| \leq 1$  y por lo tanto las iteraciones están bien definidas. En efecto,  $|f_k(z)| \leq \frac{|\beta^2|}{|\alpha - (m - 2k)^2| - |z|}$ , y  $|\alpha - (m - 2k)^2| \geq (m - 1)^2 - (m - 2k)^2 \geq 2$  si  $|\alpha - m^2| \leq 2mk$  y  $m \geq 2$ . Por lo tanto para  $|z| \leq 1$ ,  $|\beta| \leq 1$ ,  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ , entonces  $|f_k(z)| \leq 1$ .

Para  $g_k(z)$ , tenemos que si  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ , entonces  $|\alpha - (m + 2k)^2| \geq (m + 2)^2 - (m + 1)^2 \geq 3$  si  $m \geq 0$ .

Por lo tanto  $|g_k(z)| \leq 1$  si  $|\beta| \leq 1$ ,  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ ,  $|z| \leq 1$  y  $F_k(z)$  es un coeficiente de dos polinomios, sin polos en  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ ,  $|\beta| \leq 1$ .

Análogamente, se tiene que (2.32) está bien definido, y como es la composición de funciones analíticas, será también analítico.

En término general es fácil ver que si  $|\beta| \leq 1$ ,  $|z| \leq 1$ ,  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ , entonces  $|f_k(z)| \leq 1$  y por lo tanto las iteraciones están bien definidas. En efecto,  $|f_k(z)| \leq \frac{|\beta^2|}{|\alpha - (m + k)^2| - |z|}$ , y  $|\alpha - (m - 2k)^2| \geq (m - 1)^2 - (m - 2k)^2 \geq 2$  si  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$  y  $m \geq 2$ . Por lo tanto para  $|z| \leq 1$ ,  $|\beta| \leq 1$ ,  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ , entonces  $|f_k(z)| \leq 1$ .

Para  $g_k(z)$ , tenemos que si  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ , entonces  $|\alpha + (m + 2k)^2| \geq (m + 2)^2 - (m + 1)^2 \geq 3$  si  $m \geq 0$ . Por lo tanto  $|g_k(z)| \leq 1$  si  $|\beta| \leq 1$ ,  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ ,  $|z| \leq 1$  y  $F_k(z)$  es un cociente de dos polinómios sin polos en  $|\alpha - m^2| \leq 2m - 1$ ,  $|\beta| \leq 1$ .

Ahora, de manera análoga se prueba que el cuarto término de (2.28) también es analítico.

Para esto se define

$$g_k(z) = \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m + 2k)^2) - z}; \quad z \neq \alpha - (m + 2k)^2. \quad (2.33)$$

lo cual nos da

$$g_1(g_2(\dots(g_k(0))\dots)) = \frac{h}{(\alpha - (m + 2)^2) - \frac{h^2}{(\alpha - (m + 4)^2) - \frac{h^2}{\dots \frac{-h^2}{\alpha - (m + 2k)^2}}} \quad (2.34)$$

Finalmente  $F_k(\alpha, \beta)$  es la suma de funciones analíticas en  $V_r(\alpha, \beta)$ , por lo tanto  $F_k(\alpha, \beta)$  también es una función analítica y cumple el teorema de la función implícita en una vecindad de este punto. Entonces se puede despejar  $\alpha$  como función de  $\beta$  y  $\alpha$  será analítica. Denotemos por  $\alpha_k$  a la  $\alpha$  que cumpla con  $F_k(\alpha, \beta) = 0$  para una determinada  $\beta$ .

Hasta aquí hemos probado que podemos aplicar el teorema de la función implícita a  $F_k(\alpha, \beta)$ ; sin embargo lo que realmente nos interesa es poder despejar la  $\alpha$  en cada una de las ecuaciones (2.19)-(2.27). Para esto tenemos que echar mano del siguiente teorema, el cual solamente enunciamos

**Teorema 2.3:** (Weierstrass sobre convergencia uniforme de funciones analíticas)<sup>[Ma]</sup>

Si la sucesión  $\{f_n(z)\}$  es uniformemente convergente en cada subconjunto compacto de  $G$ , y si cada término  $f_n(z)$  es analítico sobre  $G$ , entonces la función límite

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad (2.35)$$

es también analítica sobre  $G$ . Además, cuando  $n \rightarrow \infty$  la sucesión de las derivadas  $\{f_n^{(k)}(z)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  converge uniformemente a  $\{f^{(k)}(z)\}$  en cada subconjunto compacto.

Si logramos probar que cada una de la  $F_k(\alpha, \beta)$  es uniformemente convergente en cada vecindad compacta de  $(m^2, 0)$ , y usando que  $F_k(\alpha, \beta)$  es analítica sobre tal vecindad, tendremos que  $F(\alpha, \beta)$  es también analítica, y esto implica que se puede usar el teorema de la función implícita para  $F$ . Además

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(\alpha_k, \beta) = F(\alpha, \beta) = 0.$$

Ahora veamos ciertas propiedades que nos serán de utilidad en el análisis de la convergencia de las  $F_k(\alpha_k, \beta)$ .

Sea

$$\delta(r) = -\frac{\omega^2}{r - \frac{\omega^2}{r - \omega^2}}; \quad \omega, r \in \mathbf{R}, \quad (2.36)$$

a ésta la podemos escribir como

$$\delta = \frac{-\omega^2}{r + \delta},$$

resolviendo tenemos que  $\delta$  es

$$\delta = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4\omega^2}}{2}. \quad (2.37)$$

Lo que a nosotros nos interesa es estimar el  $\lim_{r \rightarrow -\infty} \delta(r)$ , lo cual nos lleva a eliminar el signo positivo para tener

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \delta(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4\omega^2}}{2} = 0, \quad (2.38)$$

donde  $r \in (-\infty, -2\omega)$ .

Además

$$\delta'(r) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - 4\omega^2}},$$

como  $r \in (-\infty, -2\omega)$ , implica que  $\delta'(r) > 0$ . Por lo tanto tenemos una función monótona creciente como se muestra en la siguiente figura

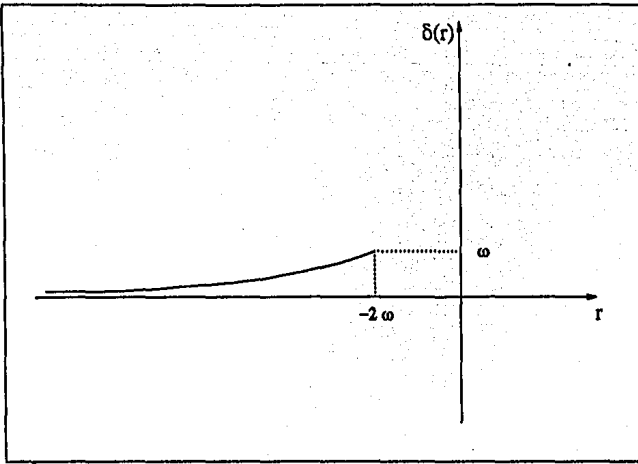


Fig 2.3

Si ahora consideramos la siguiente expresión

$$\gamma_{2n} = \delta(\theta - (m + 2n)^2) = \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2n)^2) - \omega^2}; \quad \theta, \omega \in \mathbf{R} \quad (2.39)$$

podemos ver facilmente usando lo anterior sobre  $\delta$  que, si  $\theta - (m + 2n)^2 < -2\omega$ , para  $n \geq 1$ ,

$$\gamma_2 > \gamma_4 > \dots > \gamma_{2n} > \dots > 0.$$

Entonces, dado que  $\epsilon > 0 \exists k(\epsilon)$  tal que  $0 < \gamma_{2k} < \epsilon$ . Aprovechando esto y considerando que  $|\theta - m^2| \leq 2m - 1$  y  $-1 < \omega < 1$  tenemos



$$\begin{aligned}
\epsilon > \gamma_{2k} &= \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2k)^2) + \gamma_{2k}} \\
&> \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2k)^2) + \gamma_{2(k+1)}} \\
&= \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2k)^2) - \frac{\omega^2}{(\theta - (m + 2(k+1))^2) + \gamma_{2(k+1)}}} \\
&> \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2k)^2) - \frac{\omega^2}{(\theta - (m + 2(k+1))^2) + \gamma_{2(k+2)}}} \\
&\vdots \\
&= \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2k)^2) - \frac{\omega^2}{(\theta - (m + 2(k+1))^2) + \gamma_{2(k+1)}}} \\
&> \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2k)^2) - \frac{\omega^2}{(\theta - (m + 2(k+1))^2) + \gamma_{2(k+1+1)}}} \\
&= \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2k)^2) - \frac{\omega^2}{(\theta - (m + 2(k+1))^2) - \frac{\omega^2}{(\theta - (m + 2(k+1))^2) + \gamma_{2(k+1+1)}}}} \\
&> \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.40}$$

De donde  $\exists k \in N$  tal que

$$\left| \frac{-\omega^2}{(\theta - (m + 2k)^2) - \frac{\omega^2}{(\theta - (m + 2(k+1))^2) - \frac{\omega^2}{\dots}}} \right| < \epsilon, \tag{2.41}$$

(en particular la  $k$  tal que  $\gamma_{2k} < \epsilon$  sirve) lo cual significa que las colas de las fracciones continuas de las ecuaciones (2.19)-(2.27) son pequeñas a partir de una cierta  $k$  y, por lo tanto, esperamos que sean despreciables.

Ahora establezcamos el resultado de (2.41) pero con  $\omega, \theta \in \mathbb{C}$ ; ya que, a pesar de que en las ecuaciones importantes, (2.19)-(2.27),  $\omega, \theta$  son reales (los equivalentes a  $\alpha, \beta$ ), los resultados que queremos obtener son justificados con teoremas de variable compleja.

Si probamos que

$$0 < \left| \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m + 2k)^2) - \frac{\beta^2}{\left(\alpha - (m + 2(k+L))^2\right) - \frac{\beta^2}{\left(\alpha - (m + 2(k+L))^2\right)}}} \right|$$

$$\leq \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2k)^2) - \frac{|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k+L))^2) - \frac{|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k+L))^2)}}}, \quad (2.42)$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$  es válido para toda  $L$ , por (2.41) tendremos que el lado derecho de (2.42) lo podemos hacer tan pequeño como queramos, dependiendo de la  $k$  que elijamos, y por lo tanto, también el lado izquierdo. Aquí se supone  $\operatorname{Re}(\alpha) < (m + 2k)^2$ .

Procediendo por inducción, de (2.42) para  $L = 0$  tenemos

$$\left| \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m + 2k)^2)} \right| < \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2k)^2)} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) < (m + 2k)^2,$$

directamente de maximizar el lado derecho.

Supongamos (2.42) válido para  $L = l$ , es decir, para  $\operatorname{Re}(\alpha) < (m + 2k)^2$ ,

$$0 < \left| \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m + 2k)^2) - \frac{\beta^2}{\left(\alpha - (m + 2(k+l))^2\right) - \frac{\beta^2}{\left(\alpha - (m + 2(k+l))^2\right)}}} \right|$$

$$\leq \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2k)^2) - \frac{|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k+l))^2) - \frac{|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k+l))^2)}}},$$

de donde se tiene fácilmente que

$$0 < \left| \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m + 2(k+1))^2) - \frac{\beta^2}{\left(\alpha - (m + 2(k+1))^2\right) - \frac{\beta^2}{\left(\alpha - (m + 2(k+1))^2\right)}}} \right|$$

$$\leq \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k+1))^2) - \frac{|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k+1))^2) - \frac{|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k+1))^2)}}}. \quad (2.43)$$

Procedamos entonces a probar que (2.42) es válido para  $L = l + 1$ ,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m + 2k)^2) - \frac{\beta^2}{\dots \frac{-\beta^2}{(\alpha - (m + 2(k + l + 1))^2)}}} \right| \leq \\
 & \leq \left| \frac{-\beta^2}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2k)^2) - \frac{|\beta^2|}{\dots \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k + l + 1))^2)}}} \right| \\
 & \leq \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2k)^2) - \frac{|\beta^2|}{\dots \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k + l + 1))^2)}}} \\
 & \leq \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2k)^2) - \frac{|\beta^2|}{\dots \frac{-|\beta^2|}{\operatorname{Re}(\alpha - (m + 2(k + l + 1))^2)}}}, \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

en este último paso se usó (2.43). Por lo tanto (2.42) se cumple, y como es para todo  $L$ , tendremos que (2.41) es válido con  $\omega, \theta \in \mathbb{C}$ . †

Por otra parte,  $F_k(\alpha, \beta)$  es continua en un compacto (vecindad compacta de  $(m^2, 0)$ ), entonces dado  $\epsilon > 0$  existe  $k$  tal que

$$|F(\alpha, \beta) - F_k(\alpha, \beta)| = \left| \frac{\frac{\beta^2}{(\alpha - (m + 2)^2) - \frac{\beta^2}{\dots \frac{\beta^2}{(\alpha - (m + 2k)^2) + \xi(k)}}}}{\frac{\beta^2}{(\alpha - (m + 2)^2) - \frac{\beta^2}{\dots \frac{\beta^2}{(\alpha - (m + 2k)^2)}}}} \right| < \epsilon, \quad (2.45)$$

ya que  $\xi(k) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  (por (2.41)). Por lo tanto, existe una vecindad compacta de  $(m^2, 0)$ ,  $V(m^2, 0) = \{(\alpha, \beta) / |\alpha - m^2| < 2m - 1, |\beta| < 1\}$ , tal que

$$F_k(\alpha, \beta) \Rightarrow F(\alpha, \beta), \quad \forall (\alpha, \beta) \in V(m^2, 0).$$

† En esta parte estamos suponiendo que  $\alpha \approx m^2$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y que  $\alpha, \beta$  toman el lugar de  $\theta, \omega$  en (2.41)

Por el teorema 2.2 tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(m^2, 0) = F(m^2, 0) = 0$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial F_k}{\partial \alpha}(m^2, 0) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}(m^2, 0) = 1.$$

y  $F(\alpha, \beta)$  será analítica en una vecindad de  $(m^2, 0)$  definida por  $\{|\alpha - m^2| < 2m - 1, |\beta| < 1\}$  y, por lo tanto puede aplicarse el teorema de la función implícita para variable compleja; el cual nos dice que podemos despejar  $\alpha$  de  $F(\alpha, \beta) = 0$  en una vecindad de  $(m^2, 0)$ , y además  $\alpha$  es analítica, es decir, podemos hacer desarrollos de potencias de  $\beta$ .

Usando el teorema 2.2, podemos dar una estimación del radio de convergencia: Aquí  $r = 1$ ,  $\rho = 2m - 1$ ,  $F_\omega|_{(m^2, 0)} = 1$ , y por las estimaciones que se han dado  $|F| \leq |\alpha - m^2| + 1 + 1 \leq 2m + 1$ . Por lo tanto  $c = 2m + 1$  y el radio de convergencia es al menos

$$\left( \frac{2m - 1}{2m - 1 + 2(2m + 1)} \right)^2 = \left( \frac{1}{3 + 4/(2m - 1)} \right)^2 \geq \left( \frac{5}{19} \right)^2 \geq \frac{1}{16} \text{ para } m \geq 3.$$

El mismo tipo de estimación es válido para las ecuaciones (2.25), (2.26) y (2.27) es decir, para  $m \geq 3$ .

Para el caso  $m = 0$  el mismo tipo de razonamiento funciona en la vecindad de  $|\alpha| \leq 1$ ,  $|\beta| \leq 1$ , con  $|F| \leq 1$ , como se puede ver de (2.19). Aquí  $c = 1$  y hay convergencia para  $|\beta| < 1/9$ .

Para el caso  $m = 1$ ,  $|\alpha - 1| \leq 1$ ,  $|\beta| \leq 1$ , entonces, de (2.20) y (2.21), se tiene  $|F| \leq 3$  y convergencia para  $|\beta| < \frac{1}{49}$ .

Para  $m = 2$ ,  $|\alpha - 4| \leq 3$ ,  $|\beta| \leq 1$  entonces en (2.22),  $|F| \leq 6$  y en (2.23),  $|F| \leq 4$ , con convergencia para  $|\beta| \leq 1/25$  y  $|\beta| \leq 1/16$  respectivamente.

Sea  $F_{m,p}(\alpha, \beta)$  la ecuación para  $m$  y soluciones pares, y  $F_{m,i}(\alpha, \beta)$  la ecuación para  $m$  y soluciones impares. Es fácil deducir que  $F_{2n+1,i}(\alpha, \beta) = F_{2n+1,p}(\alpha, -\beta)$  viendo (2.19)-(2.27), y tanto  $F_{2n,i}(\alpha, \beta)$  como  $F_{2n,p}(\alpha, \beta)$  son funciones de  $\beta^2$ . De la primera observación y de la unicidad dada por el teorema de la función implícita se tiene que  $\alpha_i(\beta) = \alpha_p(-\beta)$  para  $2n + 1$  y, para  $2n$  que, poniendo  $\beta^2 = \gamma$ , entonces  $F(\alpha, \gamma) = 0$

implica que  $\alpha$  es una serie en  $\gamma$ , es decir  $\alpha = \alpha(\beta^2)$  en ese caso y, en particular las curvas son verticales y simétricas con respecto al eje de las  $\alpha$ 's. Obtenemos así otra prueba, válida sólo para  $\beta$  pequeño, de las simétrías de las curvas de transición. Por lo tanto las curvas de transición deben tener las siguientes formas.

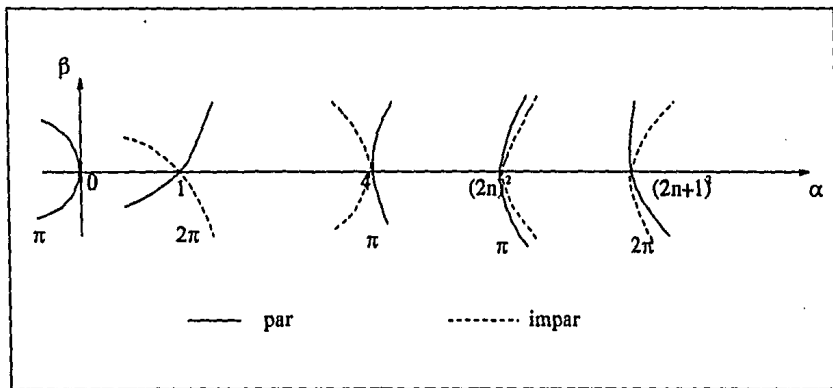


Fig 2.4

La forma local de estas curvas se dará en la siguiente sección.

Ahora hagamos el análisis de convergencia correspondiente para las soluciones de la ecuación de Mathieu sobre estas curvas de transición. Sin pérdida de generalidad consideremos una solución  $2\pi$ -periódica par, que se origine en  $\alpha = m^2$ ,  $m$  es impar,  $\beta = 0$ . Por (2.17) ésta tiene la forma

$$\begin{aligned}
 x(t) = & 2A_1 \cos t + \dots + 2A_{m-4} \cos(m-4)t + 2A_{m-2} \cos(m-2)t + 2A_m \cos mt \\
 & + 2A_{m+2} \cos(m+2)t + 2A_{m+4} \cos(m+4)t + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

donde suponemos  $A_m = A = \text{cte}$ .

De la relación de recurrencia (2.18) tenemos que el siguiente coeficiente en la serie está dado por

$$\begin{aligned}
 A_{m+2} &= \frac{A\beta}{(\alpha - (m+2)^2) - \beta \frac{A_{m+4}}{A_{m+2}}} \\
 &= \frac{A\beta}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \beta^2}} \\
 &= \frac{-A\beta}{4m+4 + O(\beta^2)}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Ahora calculemos  $A_{m+4}$ , nuevamente de la relación de recurrencia (2.18)

$$\frac{A_{m+4}}{A_{m+2}} = \frac{\beta}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+6)^2) - \beta^2}}$$

despejando  $A_{m+2}$  tenemos

$$A_{m+4} = \left[ \frac{A\beta}{(\alpha - (m+2)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+4)^2) - \beta^2}} \right] \left[ \frac{\beta}{(\alpha - (m+4)^2) - \frac{\beta^2}{(\alpha - (m+6)^2) - \beta^2}} \right]$$

de lo cual

$$|A_{m+2}| = \frac{|A||\beta|}{|4m+4 + O(\beta^2)|} \frac{|\beta|}{|8m+16 + O(\beta^2)|}$$

De (2.24) se tiene que  $|\alpha - m^2| < 2\beta^2$  si  $|\beta| \leq 1$  y los términos en los denominadores son acotados. En este caso, se tiene

$$|A_{m+2}| \leq \frac{|A||\beta|^2}{|(4m+1)(8m+13)|} \tag{2.48}$$

Procediendo de manera inductiva y considerando también el signo menos, se obtiene

$$|A_{m \pm 2k}| \leq \frac{|A||\beta|^k}{|(4(m-1) \pm 4)(8(m-1) \pm 16)(12(m-1) \pm 36) \cdots (2k(m-1) \pm 4k^2)|} \tag{2.49}$$

Por lo tanto, de (2.46) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{|x(t)|}{2} &\leq \dots + \frac{|\mathcal{A}||\beta|^2}{|(4(m-1)-4)(8(m-1)-16)|} + \frac{|\mathcal{A}||\beta|}{|(4(m-1)-4)|} + |\mathcal{A}| \\
&\quad + \frac{|\mathcal{A}||\beta|}{|(4(m-1)+4)|} + \frac{|\mathcal{A}||\beta|^2}{|(4(m-1)+4)(8(m-1)+16)|} + \dots \\
&\leq \dots + |\mathcal{A}||\beta|^2 + |\mathcal{A}||\beta| + |\mathcal{A}| + |\mathcal{A}||\beta| + |\mathcal{A}||\beta|^2 + \dots \\
&= |\mathcal{A}| + 2|\mathcal{A}| \{|\beta| + |\beta|^2 + \dots\} \\
&= |\mathcal{A}| + 2|\mathcal{A}| \left\{ \frac{|\beta|}{1-|\beta|} \right\}; \quad |\beta| < 1.
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce que

$$|x(t)| \leq 2|\mathcal{A}| \left\{ \frac{1+|\beta|}{1-|\beta|} \right\}, \quad (2.50)$$

lo cual demuestra que la solución (2.46) está bien definida en la curva de transición, para  $|\beta| < 1$ . De hecho  $|x(t)| \leq 2|\mathcal{A}|e^{|\beta|}$ .

El último resultado de esta sección es el siguiente:

**Teorema 2.4:** *Las curvas de transición se intersectan sólo en el eje de las  $\alpha$ 's y por lo tanto la otra solución sobre ellas crece como  $t$ .*

**Dem:** Ya vimos que, dentro de cada una de las cuatro categorías, las curvas de transición no se intersectan. Por otra parte sabemos que  $\phi(\alpha, \beta)$  es analítica, por lo tanto es constante sobre cada curva de transición y vale 2 para las  $\pi$ -periódicas y -2 para las  $2\pi$ -periódicas. Por lo tanto  $\alpha_0(\beta)$  no puede intersectar  $\alpha_{1,1}(\beta)$ . Notemos que ya que estas curvas se alternan sobre el eje de las  $\alpha$ 's, esto dá otra prueba de que dos curvas en la misma categoría no se pueden intersectar.

Queda por probar que dos curvas saliendo del mismo punto  $(m^2, 0)$  no se pueden volver a intersectar. Supongamos que no sea el caso y que se intersecten en  $(\alpha, \beta)$ , con  $\beta \neq 0$ : en ese caso  $\ker L_{\alpha, \beta}$  tiene dimensión 2 ya que toda solución  $y(t)$  se puede escribir como  $y(t) = \frac{y(t)+y(-t)}{2} + \frac{y(t)-y(-t)}{2}$  donde la primera función es par (y periódica si  $y(t)$  lo es) y la segunda es impar.

De lo que ya hemos visto, tenemos que, si  $m$  es par:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & -\beta & & & \\ -\beta & \alpha - 4 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \alpha - 4n_0^2 - \beta^2 a_{n_0}(\alpha, \beta) & \\ & & & & \dots \end{pmatrix} \\ = \det \begin{pmatrix} \alpha - 4 & -\beta & & & \\ -\beta & \dots & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \alpha - 4n_0^2 - \beta^2 a_{n_0}(\alpha, \beta) & \\ & & & & \dots \end{pmatrix} = 0,$$

donde  $a(\alpha, \beta)$  se determina a partir de  $A_{2n_0+2} = \beta a_{n_0}(\alpha, \beta) A_{2n_0}$ . A partir de la relación de recurrencia tenemos que:

$$a_{n_0}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha - 4(n_0 + 1)^2 - \frac{\beta^2}{\alpha - 4(n_0 + 2)^2 - \frac{\beta^2}{\dots}}},$$

como en (2.47). Si escogemos  $n_0$  muy grande (dependiendo de  $\alpha$  y  $\beta$ ) tal que esta fracción continua tiene sentido (el análisis de convergencia es el mismo que antes) se puede suponer que  $|a_{n_0}(\alpha, \beta)|$  es decreciente como función de  $n_0$  y tiende a 0 cuando  $n_0 \rightarrow \infty$ .

Ahora bien la primera matriz se puede ver como

$$A = \begin{pmatrix} \alpha/2 & -\beta \\ -\beta & B \end{pmatrix},$$

donde  $B$  es la segunda matriz. Por lo tanto  $\det A = \frac{\alpha}{2} \det B + \beta \det \begin{pmatrix} -\beta \\ B_{1,0} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2} \det B - \beta^2 \det B_{1,1}$ , donde  $B_{1,1}$  es la matriz  $B$  sin la primera columna y sin el primer renglón. Por lo tanto si  $\det A = \det B = 0$  y  $\beta \neq 0$ , entonces  $\det B_{1,1} = 0$ . Pero  $\det B = (\alpha - 4) \det B_{1,1} - \beta^2 \det B_{2,2} = 0$ , con la misma definición para  $B_{2,2}$  a partir de  $B_{1,1}$ . Por lo tanto,  $\det B_{2,2} = 0$ . Siguiendo este proceso se llega a  $\det B_{n_0, n_0} = 0 = \alpha - 4n_0^2 - a_{n_0}(\alpha, \beta)$ . Pero como  $n_0$  puede ser tomado tan grande que esto no es cierto, llegamos a una contradicción: Hay una sola solución periódica sobre la curva de transición y por lo tanto la otra es no acotada.

Para el caso  $m$  impar, entonces tenemos  $\det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} \alpha - 1 - \beta & -\beta \\ -\beta & C \end{pmatrix} = 0$  y  $\det \tilde{B} = \det \begin{pmatrix} \alpha - 1 + \beta & -\beta \\ -\beta & C \end{pmatrix} = 0$ , con la misma matriz  $C$ . Pero entonces  $\det \tilde{A} = (\alpha - 1 - \beta) \det C - \beta^2 \det C_{1,1} = 0$  y  $\det \tilde{B} = (\alpha - 1 + \beta) \det C - \beta^2 \det C_{1,1} = 0$ . Esto lleva a, si  $\beta \neq 0$ ,  $\det C = 0 = \det C_{1,1}$ , y con la misma secuencia que antes, a la contradicción



$\alpha - (2n_0 + 1)^2 - a_{n_0}(\alpha, \beta) = 0$ . Nótese que estos resultados deberán ser tomados en cuenta al momento de interpretar los resultados numéricos.

## 2.3 DESARROLLO DE POTENCIAS PARA LAS CURVAS DE TRANSICIÓN

### 2.3.a Método de las fracciones continuas

En la sección anterior se demostró que podemos expresar las curvas de transición y soluciones de la ecuación de Mathieu en series de potencias del parámetro  $\beta$ . Comencemos por hacer esto para la curva que se origina en  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ . De (2.19) es fácil ver que  $\alpha$  hasta orden uno en  $\beta$  es cero. A segundo orden se obtiene (ya se probó que  $\alpha$  es una serie en  $\beta^2$  en este caso)

$$\alpha = \frac{2\beta^2}{(0 - 4) + O(\beta^2)} = -\frac{\beta^2}{2},$$

y el siguiente término de la expansión aparece en  $\beta^4$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\beta^2}{\left(-\frac{\beta^2}{2} - 4\right) - \frac{\beta^2}{(0-16)+O(\beta^2)}} \\ &\approx \frac{2\beta^2}{-4 + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right)\beta^2} \\ &= 2\beta^2 \left(-\frac{7}{16}\beta^2 - 4\right)^{-1} \\ &\approx -\frac{\beta^2}{2} + \frac{7}{128}\beta^4 \end{aligned}$$

entonces,  $\alpha$  a orden 4 en  $\beta$  es:

$$\alpha = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{7}{128}\beta^4.$$

Haciendo el mismo procedimiento se obtiene que  $\alpha$  a orden 6 en  $\beta$  es:

$$\alpha = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{7}{128}\beta^4 - \frac{487}{73728}\beta^6, \quad (2.51)$$

$$a_0 = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{7}{128}\beta^4 - \frac{487}{73728}\beta^6 + O(\beta^8).$$

obteniendo una curva simétrica con respecto al eje  $\alpha$  y con un máximo local en  $(0,0)$ .

Ahora procedamos a obtener el desarrollo en series de potencias para la ecuación (2.20), en este caso  $\alpha$  a orden 0 en  $\beta$ :

$$\alpha = 1,$$

a orden  $O(\beta^1)$

$$\alpha = 1 + \beta,$$

a orden  $O(\beta^2)$

$$\alpha = 1 + \beta - \frac{\beta^2}{8},$$

a orden  $O(\beta^3)$

$$\alpha = 1 + \beta - \frac{\beta^2}{8} - \frac{\beta^3}{64},$$

a orden  $O(\beta^4)$

$$\alpha = 1 + \beta - \frac{\beta^2}{8} - \frac{\beta^3}{64} + \frac{\beta^4}{768}, \quad (2.52)$$

$$a_1 = 1 + \beta - \frac{\beta^2}{8} - \frac{\beta^3}{64} + \frac{\beta^4}{768} + O(\beta^5)$$

etc.

Procediendo de la misma manera tendremos las expansiones para las relaciones que nos faltan. Para la ecuación (2.21) tenemos

$$b_1 = \alpha = 1 - \beta - \frac{\beta^2}{8} + \frac{\beta^3}{64} + \frac{\beta^4}{768} + O(\beta^5). \quad (2.53)$$

El ancho de la lengua de Arnold será entonces  $|a_1 - b_1| = 2|\beta| + O(|\beta^3|)$ . La expansión para (2.22) es

$$a_2 = \alpha = 4 + \frac{5}{12}\beta^2 - \frac{763}{13824}\beta^4 + O(\beta^6), \quad (2.54)$$

y para (2.23)

$$b_2 = \alpha = 4 - \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{5}{13824}\beta^4 + O(\beta^6). \quad (2.55)$$

Aquí el ancho de la Lengua de Arnold es  $|a_2 - b_2| = \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^4)$ .

Por último ponemos a (2.24), (2.25), (2.26) y (2.27) a segundo orden en  $\beta$

$$\alpha_m = b_m = \alpha = m^2 + \frac{1}{2(m^2 - 1)}\beta^2 + O(\beta^4). \quad (2.56)$$

En la Fig 2.5 se bosquejan las gráficas de estas últimas ecuaciones.

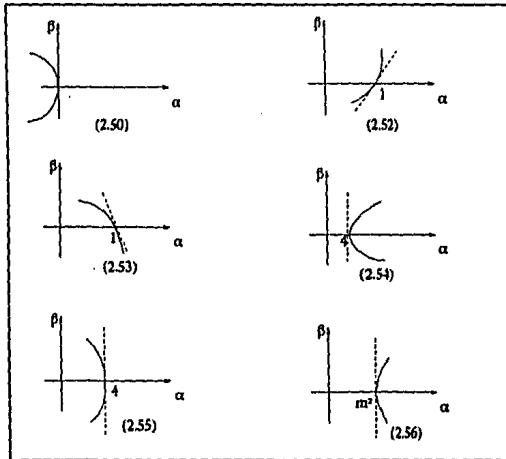


Fig 2.5

Podemos probar que la curva para las soluciones pares está, para  $\beta > 0$ , a la derecha de la curva para las soluciones impares. Además la apertura de las lenguas de Arnold es del orden de  $|\beta|^m$  para las curvas que salen de  $m^2$ .

En efecto, escribamos (2.24) como  $\alpha = f_0(\alpha, \beta)$  con solución  $\alpha_0(\beta)$  y (2.25) como  $\alpha = f_1(\alpha, \beta)$  con solución  $\alpha_1(\beta)$  para  $m = 2n + 1$  y  $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = m^2$ . Es facil ver que los denominadores en  $f_0$  y en  $f_1$  son crecientes como función de  $\alpha$ , por lo tanto  $f_0$  y  $f_1$

son decrecientes en  $\alpha$ . Además para  $\beta > 0$ ,  $\alpha$  cerca de  $m^2$  se prueba sin problema que  $f_1(\alpha, \beta) < f_0(\alpha, \beta)$ .

Tendremos que  $\alpha_0 - \alpha_1 = f_0(\alpha_0, \beta) - f_1(\alpha_1, \beta) > f_1(\alpha_0, \beta) - f_1(\alpha_1, \beta)$ , para  $\beta > 0$ . Por lo tanto si  $\alpha_0 < \alpha_1$  se tendría  $0 > \alpha_0 - \alpha_1 > 0$ , y por lo tanto  $\alpha_1 < \alpha_0$ . Entonces

$$0 < \alpha_0 - \alpha_1 < f_0(\alpha_0, \beta) - f_0(\alpha_1, \beta) = \frac{\beta^2}{\alpha_0 - (m-2)^2 - \frac{\beta^2}{\alpha_0 - 1 - \beta}} - \frac{\beta^2}{\alpha_1 - (m-2)^2 - \frac{\beta^2}{\alpha_1 - 1 - \beta}}$$

$$= \frac{\beta^2}{(\alpha_0 - \alpha_1) \left( \alpha_1 - \alpha_0 + \beta^2 \left( \frac{1}{\alpha_0 - (m-4)^2 - \frac{\beta^2}{\alpha_0 - 1 - \beta}} - \frac{1}{\alpha_1 - (m-4)^2 - \frac{\beta^2}{\alpha_1 - 1 - \beta}} \right) \right)}$$

Por lo tanto  $(\alpha_0 - \alpha_1) \left( 1 + \frac{\beta^2}{(\alpha_0 - \alpha_1)} + \frac{\beta^4}{\dots} + \dots + \frac{\beta^{2n+1}}{\dots} \right) < \frac{|\beta|^{2n+1}}{\dots}$ , y para  $|\beta|$  pequeño, se tiene  $0 < |\alpha_0 - \alpha_1| < C|\beta|^{2n+1}$ .

Para las ecuaciones (2.26), con  $\alpha_0 = f_0(\alpha_0, \beta)$ , y (2.27) con  $\alpha_1 = f_1(\alpha_1, \beta)$  y  $m = 2n$ , se tiene que  $f_0$  y  $f_1$  son decrecientes en  $\alpha$  y  $f_1(\alpha, \beta) < f_0(\alpha, \beta)$ . El mismo argumento que antes implica que  $0 < \alpha_0 - \alpha_1$  y es claro que se tendrá una estimación del orden de  $|\beta|^{2n}$ .

Una vez dadas las expansiones de las curvas de transición, calculemos las soluciones aproximadas de la ecuación de Mathieu sobre estas curvas. Comencemos por encontrar la solución  $\pi$ -periódica que parte de  $\alpha = 0, \beta = 0$ , de (2.11) y (2.51) tenemos

$$\beta \frac{A_2}{A_0} = \alpha = -\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{7}{128}\beta^4 - \frac{487}{73728}\beta^6,$$

por lo tanto, donde  $\alpha(\beta)$  es par, tendremos que  $A_2$  es impar en  $\beta$ .

$$A_2 = A_0 \left[ -\frac{1}{2}\beta + \frac{7}{128}\beta^3 - \frac{487}{73728}\beta^5 + O(\beta^7) \right], \quad (2.57)$$

ahora, por (2.14) el siguiente coeficiente de la serie es

$$A_4 = \frac{A_2}{\beta}(\alpha - 4) - 2A_0$$

$$\begin{aligned}
&\approx A_0 \left( -\frac{1}{2} + \frac{7}{128}\beta^2 - \frac{487}{73728}\beta^4 \right) \left( -\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{7}{128}\beta^4 - 4 \right) - 2A_0 \\
&\approx A_0 \left( \frac{1}{32}\beta^2 - \frac{521}{18432}\beta^4 + O(\beta^6) \right)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

De nuevo con  $A_2/\beta$  par y  $A_4$  par en  $\beta$ , de donde la solución a la ecuación de Mathieu que se origina en  $\alpha = 0, \beta = 0$ , poniendo  $A_0 = \mathcal{A}$  es

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2A_0 + 2A_2 \cos 2t + 2A_4 \cos 4t + \dots \\
&= 2\mathcal{A} + 2\mathcal{A} \left( -\frac{1}{2}\beta + \frac{7}{128}\beta^3 - \frac{487}{73728}\beta^5 + O(\beta^7) \right) \cos 2t \\
&\quad + 2\mathcal{A} \left( \frac{1}{32}\beta^2 - \frac{521}{18432}\beta^4 + O(\beta^6) \right) \cos 4t + \dots
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Es facil ver, de (2.9) y por inducción, que  $A_{4n}$  es par en  $\beta$  y  $A_{2n+1}$  es impar en  $\beta$ .

De igual manera, calculemos la curva que se origina en  $\alpha = 1, \beta = 0$ , que nos represente soluciones pares, por (2.12) y (2.52)

$$\begin{aligned}
\beta \frac{A_3}{A_1} &= -1 - \beta + \alpha \\
&= -\frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{64}\beta^3 + \frac{1}{768}\beta^4 + O(\beta^5)
\end{aligned}$$

que nos da

$$A_3 = A_1 \left[ -\frac{1}{8}\beta - \frac{1}{64}\beta^2 + \frac{1}{768}\beta^3 + O(\beta^4) \right] \tag{2.60}$$

ahora por (2.10) el siguiente coeficiente de la serie es

$$\begin{aligned}
A_5 &= \frac{1}{\beta}(\alpha - 9)A_3 - A_1 \\
&= \frac{A_1}{\beta} \left( 1 + \beta - \frac{\beta^2}{8} - \frac{\beta^3}{64} + \frac{\beta^4}{768} - 9 \right) \\
&\quad \left( -\frac{1}{8}\beta - \frac{1}{64}\beta^2 + \frac{1}{768}\beta^3 + O(\beta^4) \right) - A_1 \\
&\approx A_1 \left( -\frac{\beta^2}{96} + O(\beta^3) \right)
\end{aligned} \tag{2.61}$$

de donde, la solución  $2\pi$ -periódica par de la ecuación de Mathieu para  $\alpha \approx 1$ , poniendo  $A_1 = \mathcal{A}$  es

$$\begin{aligned} x(t) &= 2[A_1 \cos t + A_3 \cos 3t + A_5 \cos 5t + \dots] \\ &= 2\mathcal{A} \cos t + 2\mathcal{A} \left( -\frac{1}{8}\beta - \frac{1}{64}\beta^2 + \frac{1}{768}\beta^3 + O(\beta^4) \right) \cos 3t \quad (2.62) \\ &\quad + 2\mathcal{A} \left( -\frac{1}{96}\beta^2 + O(\beta^3) \right) \cos 5t + \dots \end{aligned}$$

De nueva cuenta, de (2.13) y (2.53),  $\beta B_3/B_1 = \alpha - 1 + \beta$ . Como  $\alpha_i(\beta) = \alpha_p(-\beta)$ , se tiene  $-\beta B_3(-\beta)/B_1 = \beta A_3(\beta)/A_1$  y, por lo tanto  $B_3(\beta)/B_1 = -A_3(-\beta)/A_1$ .

$$B_3 = B_1 \left[ -\frac{1}{8}\beta + \frac{1}{64}\beta^2 + \frac{1}{768}\beta^3 + O(\beta^4) \right] \quad (2.63)$$

y por (2.10)

$$\begin{aligned} B_5(\beta) &= \frac{1}{\beta}(\alpha - 9)B_3 - B_1 \\ &= \left( (\alpha_p(-\beta) - 9) \frac{A_3(-\beta)}{-\beta A_1} - 1 \right) B_1 \\ &= \frac{B_1}{A_1} A_5(-\beta) \\ &\approx B_1 \left( -\frac{1}{96}\beta^2 + O(\beta^3) \right) \quad (2.64) \end{aligned}$$

Otra vez, por inducción, uno obtiene que  $\frac{B_{4n+1}(\beta)}{B_1} = \frac{A_{4n+1}(-\beta)}{A_1}$  y  $\frac{B_{4n+3}(\beta)}{B_1} = -\frac{A_{4n+3}(-\beta)}{A_1}$ , de donde, la solución impar de la ecuación de Mathieu para  $\alpha \approx 1$ ,  $\beta \approx 0$ , poniendo  $B_1 = \mathcal{B}$  es

$$\begin{aligned} x(t) &= -2[B_1 \sen t + B_3 \sen 3t + B_5 \sen 5t + \dots] \\ &= -2\mathcal{B} \sen t - 2\mathcal{B} \left( -\frac{1}{8}\beta + \frac{1}{64}\beta^2 + \frac{1}{768}\beta^3 + O(\beta^4) \right) \sen 3t \quad (2.65) \\ &\quad - 2\mathcal{B} \left( -\frac{1}{96}\beta^2 + O(\beta^3) \right) \sen 5t + \dots \end{aligned}$$

Repetiendo el procedimiento tenemos tomando  $\alpha$  igual a (2.54) y poniendo  $A_2 = \mathcal{A}$ , que  $A_0$  y  $A_4$  son,  $A_0 = \frac{\beta}{\alpha} A_2$  es impar en  $\beta$ , y  $A_4 = ((\alpha - 4)A_2 - 2\beta A_0)/\beta$  es impar

$$A_0 = \mathcal{A} \left( \frac{1}{4}\beta - \frac{5}{192}\beta^3 + O(\beta^5) \right) \quad (2.66)$$

y

$$A_4 = \mathcal{A} \left( -\frac{11}{12}\beta + \frac{1483}{13824}\beta^3 + O(\beta^5) \right) \quad (2.67)$$

Por inducción, a partir de (2.9),  $A_{4n}$  es impar y  $A_{4n+2}$  es par. Por lo tanto, la solución par para  $\alpha \approx 4$ ,  $\beta \approx 0$  es

$$\begin{aligned} x(t) = & \mathcal{A} \left( \frac{1}{4}\beta - \frac{5}{192}\beta^3 + O(\beta^5) \right) + 2\mathcal{A} \cos 2t \\ & + 2\mathcal{A} \left( -\frac{11}{12}\beta + \frac{1483}{13824}\beta^3 + O(\beta^5) \right) \cos 4t + \dots \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ahora, tomando  $\alpha$  de (2.55), y poniendo  $B_2 = \mathcal{B}$  se tiene que  $B_4 = (\alpha - 4)\frac{B_2}{\beta}$  es impar

$$B_4 = \left( -\frac{1}{12}\beta + \frac{5}{13824}\beta^3 + O(\beta^5) \right) \mathcal{B}; \quad (2.69)$$

$B_6 = \frac{1}{\beta}(\alpha - 4^2)B_4 - B_2$  es par y

$$B_6 = \left( \frac{36}{13824}\beta^2 + O(\beta^4) \right) \mathcal{B}, \quad (2.70)$$

de donde, la solución impar para  $\alpha \approx 4$ ,  $\beta \approx 0$  es

$$\begin{aligned} x(t) = & -2\mathcal{B} \sin 2t - 2\mathcal{B} \left( -\frac{1}{12}\beta + \frac{5}{13824}\beta^3 + O(\beta^5) \right) \sin 4t \\ & - 2\mathcal{B} \left( \frac{36}{13824}\beta^2 + O(\beta^4) \right) \sin 6t - \dots \end{aligned} \quad (2.71)$$

De nuevo por inducción  $B_{4n}$  es impar y  $B_{4n+2}$  es par.

Para  $m \geq 3$  tendremos las soluciones

$$\begin{aligned}
x(t) = & \dots + 2A \left[ \frac{1}{m^2 - (m-2)^2} \frac{1}{m^2 - (m-4)^2} \right] \beta^2 \cos(m-4)t \\
& + 2A \left[ \frac{1}{m^2 - (m-2)^2} \right] \beta \cos(m-2)t \\
& + 2A \cos mt + 2A \left[ \frac{1}{m^2 - (m+2)^2} \right] \beta \cos(m+2)t \\
& + 2A \left[ \frac{1}{m^2 - (m+2)^2} \frac{1}{m^2 - (m+4)^2} \right] \beta^2 \cos(m+4)t + \dots
\end{aligned} \tag{2.72}$$

que es la solución par y,

$$\begin{aligned}
x(t) = & \dots - 2B \left[ \frac{1}{m^2 - (m-2)^2} \frac{1}{m^2 - (m-4)^2} \right] \beta^2 \sen(m-4)t \\
& - 2B \left[ \frac{1}{m^2 - (m-2)^2} \right] \beta \sen(m-2)t \\
& - 2A \sen mt + 2A \left[ \frac{1}{m^2 - (m+2)^2} \right] \beta \sen(m+2)t \\
& - 2A \left[ \frac{1}{m^2 - (m+2)^2} \frac{1}{m^2 - (m+4)^2} \right] \beta^2 \sen(m+4)t + \dots
\end{aligned} \tag{2.73}$$

que es la solución impar. Además si  $m = 2n$ , entonces  $A_{2n \pm 4p}$  es par en  $\beta$  y  $A_{2n \pm 4p \pm 2}$  es impar en  $\beta$ . Mientras que si  $m = 2n + 1$  se tiene que  $\frac{B_{2n \pm 4p \pm 1}(\beta)}{B_{2n}} = \frac{A_{2n \pm 4p \pm 1}(-\beta)}{A_{2n}}$  y  $\frac{B_{2n \pm 4p \pm 3}(\beta)}{B_{2n}} = -\frac{A_{2n \pm 4p \pm 3}(-\beta)}{A_{2n}}$ . En la sección 2.4 se hace un análisis para las curvas periódicas en general.

### 2.3.b Método perturbativo

En esta sección haremos el desarrollo de potencias para las curvas de transición por el método de perturbaciones, el cual consiste en suponer que la solución y la  $\alpha$  de la ecuación de Mathieu (0.33) son series de potencias de  $\beta$ , lo cual sabemos que es cierto. Escribamos dicha ecuación simplemente para aclarar el proceso

$$\ddot{x} + (\alpha - 2\beta \cos(2t))x = 0$$

poniendo a  $x(t)$  y a  $\alpha$  en series de potencias de  $\beta$



$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0(t) + \beta x_1(t) + \dots \\
 \alpha &= \alpha_0 + \beta \alpha_1 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.74}$$

se tiene

$$\beta^0 : \quad \ddot{x}_0 + \alpha_0 x_0 = 0 \tag{2.75}$$

$$\beta^1 : \quad \ddot{x}_1 + \alpha_0 x_1 = 2x_0 \cos 2t - \alpha_1 x_0 \tag{2.76}$$

$$\beta^2 : \quad \ddot{x}_2 + \alpha_0 x_2 = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_0 + 2x_1 \cos 2t \tag{2.77}$$

$$\beta^n : \quad \ddot{x}_n + \alpha_0 x_n = -\sum_{i=1}^n \alpha_i x_{n-i} + 2x_{n-1} \cos 2t \tag{2.78}$$

resolviendo (2.75), tenemos que la solución es:

$$x_0 = A_0 \cos \sqrt{\alpha_0} t + B_0 \operatorname{sen} \sqrt{\alpha_0} t,$$

de donde se ve claramente que el periodo de la solución depende de  $\sqrt{\alpha_0}$ . Dado que se busca una solución  $\pi$  o  $2\pi$  periódica, se debe tener  $\sqrt{\alpha_0} \in \mathbb{N}$ . Empecemos con  $\sqrt{\alpha_0} = 0$  (periodo  $\pi$ ), se tiene entonces que  $x_0$  está dado por

$$x_0 = A_0,$$

sustituyendo esta ecuación en (2.76), tenemos que se transforma en

$$\ddot{x}_1 = 2A_0 \cos 2t - \alpha_1 A_0.$$

Por lo tanto, de esta última ecuación se ve que si queremos una solución periódica, debemos pedir que  $\alpha_1 = 0$ , y ésta se transforma ahora en

$$\ddot{x}_1 = 2A_0 \cos 2t,$$

integrando y recordando que queremos soluciones periódicas tenemos

$$x_1 = -\frac{1}{2} A_0 \cos 2t + A_1.$$

Además requiriendo que  $x_i, i \geq 1$  sea ortogonal al núcleo del operador  $x'' + \alpha_0 x$ , es decir en este caso a las constantes y a  $t$ . Por lo tanto se tomará  $A_1 = 0$ . Repitiendo el procedimiento, sustituyendo esta última en (2.77) se tiene

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= -\alpha_2 A_0 + 2 \left( -\frac{1}{2} A_0 \cos 2t \right) \cos 2t \\ &= -\alpha_2 A_0 - \frac{A_0}{2} - \frac{A_0}{2} \cos 4t,\end{aligned}$$

donde nuevamente, si queremos soluciones periódicas debemos eliminar las constantes del lado derecho, es decir

$$\alpha_2 A_0 + \frac{A_0}{2} = 0,$$

lo que equivale a pedir que

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, de (2.74) tenemos la siguiente aproximación de la curva de transición para  $\beta$  pequeña

$$a_0 = \alpha = -\frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3), \quad (2.79)$$

y la aproximación  $\pi$ -periódica a la solución de la ecuación de Mathieu para  $\alpha \approx 0$ ,  $\beta \approx 0$  es:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + O(\beta^3) \\ &= A_0 + \beta \left( -\frac{1}{2} A_0 \cos 2t \right) + \beta^2 \left( \frac{A_0}{32} \cos 4t \right) + O(\beta^3).\end{aligned} \quad (2.80)$$

A orden  $n$  se tiene  $x_n'' = -\alpha_n A_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_{n-i} + 2x_{n-1} \cos 2t$  la cual tendrá soluciones acotadas con tal que no haya constantes del lado derecho (los otros términos van a ser múltiplos de  $\cos 2jt$ , como se puede ver por inducción). Por lo tanto  $\alpha_n A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2x_{n-1} \cos 2t dt$  determinará  $\alpha_n$  de manera única. El hecho que la serie obtenida converja ya se demostró con el método de las fracciones continuas.

Haciendo lo mismo para  $\sqrt{\alpha_0} = 1$ , tenemos que la solución a (2.75) es

$$x_0 = A_0 \cos t + B_0 \sin t,$$

pero por el momento, y por razones de comparación con los resultados de la sección 2.3.a, pediremos que  $B_0 = 0$ , o de otra forma que  $x_0$  sea par

$$x_0 = A_0 \cos t.$$

sustituyendo en (2.76) esta última ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= (A_0 \cos t)(2 \cos 2t - \alpha_1) \\ &= A_0(1 - \alpha_1) \cos t + A_0 \cos 3t \end{aligned}$$

entonces, para evitar resonancias debemos imponer que  $\alpha_1 = 1$ , la solución a la ecuación anterior es entonces

$$x_1 = -\frac{A_0}{8} \cos 3t,$$

y por (2.74)

$$a_0 = \alpha = 1 + \beta, \tag{2.81}$$

que es la curva de transición que sale de  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ .

Ahora si en lugar de considerar la solución par, consideramos la solución impar, tenemos que

$$x_0 = B_0 \sin t,$$

la cual al sustituirla en (2.76) nos da

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= (B_0 \sin t)(2 \cos 2t - \alpha_1) \\ &= -B_0(1 + \alpha_1) \sin t + B_0 \sin 3t, \end{aligned}$$

y nuevamente, para evitar resonancias debemos pedir que  $\alpha_1 = -1$ . La solución a la ecuación anterior es entonces

$$x_1 = -\frac{B_0}{8} \sin 3t,$$

y por (2.53)

$$b_1 = \alpha = 1 - \beta. \tag{2.82}$$

Que es la parte complementaria de la lengua de Arnold que sale de 1.

Entonces, las aproximaciones  $2\pi$ -periódicas a la solución de la ecuación de Mathieu para  $\alpha \approx 1$  son:

$$x(t) = A_0 \cos t - \beta \frac{A_0}{8} \cos 3t + O(\beta^2), \quad (2.83)$$

y

$$x(t) = B_0 \sin t - \beta \frac{B_0}{8} \sin 3t + O(\beta^2). \quad (2.84)$$

Notese que aquí ya no tenemos que preocuparnos por la convergencia ya que ésta y la unicidad de la solución ya fueron probadas. Queda claro que para  $\alpha \approx m^2$ , este desarrollo se puede hacer de la misma forma y se obtendrá la serie para  $x(t)$ . La ventaja de este método con respecto al de fracciones continuas es que quizás sea más rápido para calcular los coeficientes y es conceptualmente más directo. Sin embargo, la prueba de convergencia con este método es mucho más difícil. En nuestro caso podemos usar los dos métodos, ya que se probó la unicidad de la solución y la convergencia de cualquier serie analítica.

## 2.4 SOLUCIONES PERIÓDICAS DE LA ECUACION DE MATHIEU

Hemos visto en la sección 2.1 que dependiendo de que  $\alpha$ ,  $\beta$  tengamos, habrá soluciones acotadas o no acotadas, y dentro de las primeras se hallan las soluciones periódicas. En esta sección se pretende dar expresiones para estas últimas, lo cual también será una generalización de lo visto en la sección anterior.

Sabemos entonces que las soluciones acotadas tienen la forma de (iii) de la sección 2.1. Ésta puede ser periódica, y si esto sucede su período será  $p\pi$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , debido a que  $\cos 2t$  es  $\pi$ -periódica,  $\dagger$  y  $\nu$  es de la forma  $2k/p$ . Por lo tanto, poniendo a  $x(t)$  en series de Fourier, en particular de período  $p\pi$

† Si  $P(t)$  y  $G(t)$  son periódicas con períodos  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente, entonces se tendrá que

$$P(t + nT_1)G(t + nT_1) = P(t)G(t + nT_1)$$

es igual a  $P(t)G(t)$  si y sólo si existe  $m$  tal que  $nT_1 = mT_2$ .

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m e^{i\left(\frac{2}{p}\right)mt} \quad (2.85)$$

y al sustituirla en la ecuación de Mathieu, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum -m^2 \left(\frac{4}{p^2}\right) \delta_m e^{i\frac{2}{p}mt} + \alpha \sum \delta_m e^{i\frac{2}{p}mt} \\ - \beta \left\{ \sum \delta_m e^{i\frac{2}{p}(m+2)t} + \sum \delta_m e^{i\frac{2}{p}(m-2)t} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Esta igualdad se cumple sólo si los coeficientes de las exponenciales son cero, es decir

$$-4\frac{m^2}{p^2} \delta_m + \alpha \delta_m - \beta \delta_{m-p} - \beta \delta_{m+p} = 0 \quad (2.87)$$

la cual, al igual que en la sección 2.1.b, para el caso  $p = 2$ , al considerar  $x(t)$  real, nos da las relaciones de recurrencia entre los coeficientes para soluciones pares e impares.

Notemos primero que la relación (2.87) se puede escribir como  $(\tilde{\alpha} - m^2)\delta_m - \tilde{\beta}(\delta_{m-p} + \delta_{m+p}) = 0$  con  $\tilde{\alpha} = \alpha p^2/4$ ,  $\tilde{\beta} = \beta p^2/4$ , lo cual corresponde a hacer el cambio de escala en el tiempo de  $t = \tau p/2$ , que cambia  $\cos 2t$  por  $\cos p\tau$ .

Ahora poniendo  $\delta_0 = 2A_0$ ,  $\delta_k = A_k + iB_k$  y recordando que  $\delta_{-k} = \bar{\delta}_k$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha A_0 - \beta A_p &= 0 \\ (\alpha - 4)A_p - \beta(2A_0 + A_{2p}) &= 0 \\ \dots & \dots \\ (\alpha - 4m^2)A_{mp} - \beta(A_{(m-1)p} + A_{(m+1)p}) &= 0, \quad m \geq 2. \\ (\alpha - 4m^2)B_{mp} - \beta(B_{(m-1)p} + B_{(m+1)p}) &= 0, \quad m \geq 1. \\ \left(\alpha - 4\frac{k^2}{p^2}\right)A_k - \beta(A_{-p+k} + A_{p+k}) &= 0 \\ \left(\alpha - 4\left(m + \frac{k}{p}\right)^2\right)A_{mp+k} - \beta(A_{(m-1)p+k} + A_{(m+1)p+k}) &= 0, \quad m > 0. \\ \left(\alpha - 4\left(1 - \frac{k}{p}\right)^2\right)A_{p-k} - \beta(A_{-k} + A_{2p-k}) &= 0 \\ \left(\alpha - 4\left(m - \frac{k}{p}\right)^2\right)A_{mp-k} - \beta(A_{(m-1)p-k} + A_{(m+1)p+k}) &= 0, \quad m > 1 \end{aligned}$$

para  $k = 1, \dots, [p/2]$ , la parte entera de  $p/2$ , y las mismas relaciones con las  $B$ 's en lugar de las  $A$ 's.

Notemos primero que las relaciones con  $k = 0$  son las que ya obtuvimos para las soluciones  $\pi$ -periódicas: en efecto, cualquier solución  $\pi$ -periódica puede considerarse también como  $p\pi$ -periódica, pasando de  $A_0, A_1, A_2, \dots$  a  $A_0, A_p, A_{2p}, \dots$ . Del mismo modo si  $p$  es par, entonces las soluciones con  $k = p/2$ , corresponden a las soluciones  $2\pi$ -periódicas ya estudiadas. Finalmente si  $k/p = k'/p'$  obtendremos una solución  $p\pi$ -periódica que será la reproducción  $p/p'$  veces de una solución  $p'\pi$ -periódica.

Notemos también que las relaciones de recurrencia conciernen sólo  $A_k, A_{m p+k}, A_{-p+k} = A_{-k+p}, A_{-k+m p}$  para  $m \geq 0$ , si  $k = 1, \dots, [p/2]$  (para  $k = 0$  o  $[p/2]$  con  $p$  par solo  $A_{m p}$  o  $A_{m p+p/2}$ ). Esto implica que el operador  $L_{\alpha, \beta}$  de  $H_{per}^2[0, p\pi]$  a  $L_{per}^2[0, p\pi]$  preserva la descomposición de  $L^2$  en  $L_{p,k}^2 = \{\text{series con } A_{\pm k+m p}\}$  y  $L_{i,k}^2 = \{\text{series con } B_{\pm k+m p}\}$ , generando operadores  $L_{\alpha, \beta}^{p,k}$  y  $L_{\alpha, \beta}^{i,k}$  los cuales son operadores de Fredholm de índice 0, con núcleo a la más de dimensión 2, y autoadjuntos en  $L^2$ .

Si  $(\alpha_0, \beta_0)$  es tal que  $L_{\alpha_0, \beta_0}^k$  no es invertible, entonces se obtiene la ecuación de bifurcación

$$(\alpha - \alpha_0)x_0 - 2(\beta - \beta_0)\mathcal{P}(\cos 2t(x_0 + x_1(x_0, \alpha, \beta))) = 0$$

con

$$\mathcal{P}y = \left( \int_0^{p\pi} y(t) \tilde{x}_0 \right) \tilde{x}_0$$

con  $\tilde{x}_0$  en una base de  $\ker L_{\alpha, \beta}^k$ . Ahora podemos escribir  $L_{\alpha, \beta}^k$  para soluciones pares en la forma



$$\alpha - \alpha_0 - 2(\beta - \beta_0) \int_0^{p\pi} \cos 2t(\tilde{x}_0^2 + \tilde{x}_0 x_1(\tilde{x}_0, \alpha, \beta)) dt$$

con una solución analítica  $\alpha = \alpha_{p,k}(\beta)$ , y  $\alpha'_{p,k}(\beta_0) = 2 \int_0^{p\pi} \cos 2t \tilde{x}_0^2 dt$ .

Obtenemos así una curva  $\alpha = \alpha_{p,k}(\beta)$  analítica para todo  $\beta$  y dos curvas correspondientes al mismo  $k$  y a la misma paridad no pueden intersectarse.

Para  $\beta = 0$  entonces,  $\tilde{A}_{n_0}^k = A_{n_0}^k$  es diagonal y no invertible sólo si  $\alpha = 4(n \pm k/p)^2$ , correspondiente a un núcleo generado por  $x_0 = \cos 2(n \pm k/p)t$ . Como  $\int_0^{p\pi} \cos 2t \tilde{x}_0^2 dt = 0$  si  $k \neq 0$  o  $2k \neq p$ , la ecuación de bifurcación se escribe

$$\alpha - 4(n \pm k/p)^2 - 2\beta^2 \tilde{\alpha}(\alpha, \beta) = 0,$$

ya que en este caso  $x_1 = \beta \tilde{x}_1(\alpha, \beta, x_0)$ : en ese caso  $A_{mp \pm k}$  sólo depende linealmente de  $A_{np \pm k}$  y es diferente de 0, justificando así el uso de fracciones continuas, como se verá más adelante.

Para las funciones impares obtenemos,  $B_{n_0}^k, B_{n_0, \infty}^\pm = A_{n_0, \infty}^\pm$  y por lo tanto tenemos el mismo  $a_{n_0, \pm}(\alpha, \beta)$ . Por lo tanto, si escribimos

$$\tilde{A}_{n_0}^k = \begin{pmatrix} \alpha - 4k^2/p^2 - \epsilon\beta & -\beta & 0 & \dots \\ -\epsilon\beta & & & \\ -\beta & & \mathbf{C} & \end{pmatrix}, \quad \text{con } \epsilon = 1,$$

entonces  $\tilde{B}_{n_0}^k$  será la misma matriz con  $\epsilon = -1$ . Desarrollando con respecto a la primera columna, se tiene

$$\det \mathcal{A} = (\alpha - 4k^2/p^2) \det \mathbf{C} + \epsilon\beta \det \begin{pmatrix} -2\beta - \beta & 0 \\ \mathbf{C}_{1,0} \end{pmatrix} - \beta \det \begin{pmatrix} -2\beta - \beta \\ \mathbf{C}_{2,0} \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{C}_{i,0}$  es la matriz  $\mathbf{C}$  sin el  $i$ -ésimo renglón,  $i = 1$  o  $2$ .

$$\det \mathcal{A} = (\alpha - 4k^2/p^2) \det \mathbf{C} - \epsilon^2 \beta^2 \det \mathbf{C}_{1,1} + \epsilon^2 \beta^2 \det \mathbf{C}_{1,2} + \epsilon^2 \beta^2 \det \mathbf{C}_{2,1} - \beta^2 \det \mathbf{C}_{2,2}$$

donde  $\mathbf{C}_{i,j}$  es la matriz  $\mathbf{C}$ , sin el  $i$ -ésimo renglón y sin la  $j$ -ésima columna.  $\mathbf{C}, \mathbf{C}_{1,1}, \mathbf{C}_{2,2}$  son simétricas y  $\mathbf{C}_{1,2} = \mathbf{C}_{2,1}^T$ .  $\mathbf{C}_{1,2}$  tiene la forma



$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta & & & & \\ 0 & \alpha_1 & 0 & -\beta & & \\ -\beta & 0 & \alpha_2 & 0 & -\beta & \\ 0 & -\beta & 0 & \alpha_3 & 0 & -\beta \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Desarrollando el determinante con respecto al primer renglón y después con respecto a la primera columna se obtiene

$$\det C_{1,2} = \beta^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -\beta & & & & \\ 0 & \alpha_3 & 0 & -\beta & & \\ -\beta & 0 & \alpha_4 & 0 & -\beta & \\ 0 & -\beta & 0 & \alpha_5 & 0 & -\beta \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

es decir una matriz de la misma forma, terminando con 0. Por lo tanto  $\det C_{1,2} = 0$  y  $\det A = (\alpha - 4k^2/p^2) \det C - \beta^2 \det C_{1,1} - \beta^2 \det C_{2,2}$ . Por lo tanto, si  $\dim \ker L_{\alpha,\beta}^{p,k} = 1$ , entonces  $\dim \ker L_{\alpha,\beta}^{i,k} = 1$ , y las curvas  $\alpha_{p,k}(\beta) = \alpha_{i,k}(\beta)$ . Podemos de esto probar el siguiente resultado:

### Teorema 2.5:

- a) Sea  $x_0(t)$  una solución  $p\pi$ -periódica de la ecuación de Mathieu para  $(\alpha_0, \beta_0)$ , entonces existe una única curva  $\alpha = \alpha_{\pm k, m}(\beta)$  que está definida para todo  $\beta$ , es analítica en  $\beta$ , pasa por  $(\alpha_0, \beta_0)$  y corta al eje de las  $\alpha$ 's en  $\alpha = 4(m \pm k/p)^2$  para algún entero  $k \in (0, [p/2])$ .
- b) Si  $k \neq 0, p/2$ , entonces existe una solución  $x_1(t)$ , para  $(\alpha_0, \beta_0)$  linealmente independiente de  $x_0(t)$ , es decir las curvas para las soluciones pares e impares son las mismas. También  $\alpha_{\pm k, m}(-\beta) = \alpha_{\pm k, m}(\beta)$  y no se intersectan. Las soluciones pares sobre estas curvas tienen el mismo número de ceros sobre  $(0, p\pi)$  que  $\cos 2(m \pm k/p)t$  y las soluciones impares el mismo que  $\sin 2(m \pm k/p)t$ .
- c) Si  $p_1 < p_2$ , entonces las curvas son siempre separadas, excepto si pasan por el mismo punto  $4(m_1 \pm k_1/p_1)^2 = 4(m_2 \pm k_2/p_2)^2$ , con  $m_1 = m_2, k_1/p_1 = k_2/p_2 = \tilde{k}/\tilde{p}$  con  $\tilde{k}$  y  $\tilde{p}$  primos relativos,  $\tilde{k} \leq \tilde{p}/2$ , en cuyo caso las dos curvas son la curva correspondiente de las soluciones  $\tilde{p}\pi$ -periódica.

**Dem:** Considerando  $\frac{1}{2}(x_0(t) + x_0(-t))$  o  $\frac{1}{2}(x_0(t) - x_0(-t))$  podemos suponer que una de estas dos funciones es diferente de 0 y que  $x_0(t)$  es par (o impar). La parte a) es entonces

inmediata. La parte de b) ya fue probada o podemos usar el siguiente argumento: si  $x_0(t)$  es solución para  $(\alpha_0, \beta_0)$  entonces  $x_0(t + \pi/2) = y(t)$  es solución, para  $(\alpha_0, -\beta_0)$ . Suponiendo que  $x_0(t) = 2 \sum_0^\infty A_{k+mp} \cos(2m + 2k/p)t + 2 \sum_1^\infty A_{-k+mp} \cos(2m - 2k/p)t$ , entonces  $y(t) = 2 \sum_0^\infty A_{k+mp} (-1)^m (\cos(k\pi/p) \cos(2m + 2k/p)t - \text{sen}(k\pi/p) \text{sen}(2m + 2k/p)t) + 2 \sum_1^\infty A_{-k+mp} (-1)^m (\cos(k\pi/p) \cos(2m - 2k/p)t + \text{sen}(k\pi/p) \text{sen}(2m - 2k/p)t)$ . Notando que  $m + k/p \neq m + 1 - k/p$  al menos que  $2k = p$ , y  $m + k/p \neq m - k/p$  al menos que  $k = 0$ , entonces estas series son en espacios diferentes ya que  $\cos(k\pi/p)$  y  $\text{sen}(k\pi/p)$  son diferentes de 0 en los otros casos y  $A_{\pm k+mp} \neq 0$  para  $m$  grande. Por lo tanto la parte par (y la parte impar de  $y(t)$ ) son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Mathieu para  $(\alpha_0, -\beta_0)$ . Repitiendo este razonamiento para todo  $\beta \geq 0$ , vemos que las curvas para  $\beta \leq 0$  son dobles y simétricas con respecto al eje de las  $\alpha$ 's. Otra vez con el mismo argumento tendremos para  $\beta > 0$ , dos soluciones linealmente independientes provenientes de  $(\alpha, -\beta)$ .

También se puede usar el mismo argumento con  $z(t) = x_0(t + \pi)$ : si  $2k/p$  no es un entero, tendremos una segunda solución para el mismo  $(\alpha, \beta)$ . Ver [M-S] pg 102.

La conservación del número de ceros se prueba con el mismo argumento que en el caso  $p = 2$ . Finalmente el hecho que no se intersectan (también en el caso (c)) viene de que  $m \pm k/p$  varía de  $m - 1/2$  a  $m + 1/2$  (estrictamente al menos que  $p$  sea par), por lo tanto si  $m_1 \pm k_1/p_1 = m_2 \pm k_2/p_2$ , entonces  $m_1 = m_2$ ,  $k_1/p_1 = k_2/p_2 = \tilde{k}/\tilde{p}$ , al menos que  $k_1 = p_1/2$ ,  $k_2 = p_2/2$  y  $m_1 = m_2 - 1$  caso ya estudiado. Ahora si dos curvas se intersectan tendríamos, en  $(\alpha_0, \beta_0)$ , recordando la descomposición de  $L^2$  en espacios ortogonales, 4 soluciones linealmente independientes, lo cual es ridículo para la ecuación de segundo orden. Otra prueba de este hecho es considerar  $\phi(\alpha, \beta) = 2 \cos \nu \pi = 2 \cos(2k_1/p)\pi$ , para algún  $k_1$ , para una solución  $p\pi$ -periódica. Sabemos que  $\phi(\alpha, \beta)$  es una función analítica en  $\alpha$  y  $\beta$ , y como para las soluciones periódicas sólo toman estos valores discretos, tenemos que  $\phi(\alpha, \beta)$  es constante sobre una curva. Si la curva pasa por  $(4(m \pm k/p)^2, 0)$ , entonces la matriz fundamental es

$$\begin{pmatrix} \cos(2m \pm 2k/p)t & \text{sen}(2m \pm 2k/p)t \\ -\text{sen}(2m \pm 2k/p)t & \cos(2m \pm 2k/p)t \end{pmatrix},$$

con traza en  $t = \pi$  igual a  $2 \cos 2k\pi/p$ . Por lo tanto  $k_1 = k$  y las únicas curvas con la misma  $\phi$ , corresponden a  $\pm k$ , pero estas están separadas por las curvas con  $k'/p$ ,  $0 \leq k' < k$

y por lo tanto tampoco se pueden cortar. Notamos finalmente que (c) también se puede probar con este argumento.

Notemos finalmente que la relación

$$\alpha'(\beta_0) = 2 \int_0^{p\pi} \cos 2t \tilde{x}_0 dt,$$

para  $\tilde{x}_0$  tal que sea solución de la ecuación de Mathieu

$$x'' + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x = 0,$$

con  $\int_0^{p\pi} \tilde{x}_0^2 dt = 1$  puede ser transformada en

$$\begin{aligned} \alpha'(\beta_0) &= \frac{1}{\beta} \int_0^{p\pi} (\tilde{x}_0'' \tilde{x}_0 + \alpha \tilde{x}_0^2) dt, \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{p\pi} (\alpha \tilde{x}_0^2 - \tilde{x}_0'^2) dt, \\ &= -\frac{1}{\beta} \left( \int_0^{p\pi} \tilde{x}_0'^2 - \alpha \right). \end{aligned}$$

De la primera ecuación para  $\alpha'(\beta)$ , se ve que  $|\alpha'(\beta)| \leq 2$ . En particular si  $\alpha < 0$ , entonces la curva es decreciente para  $\beta > 0$ . Por otra parte, dado que

$$\tilde{x}_0 = 2 \sum_0^{\infty} B_{m+p+k} \operatorname{sen} 2 \left( m + \frac{k}{p} \right) t + 2 \sum_1^{\infty} B_{m-p-k} \operatorname{sen} 2 \left( m - \frac{k}{p} \right) t$$

para las soluciones impares, con  $\int_0^{p\pi} \tilde{x}_0^2 dt = 2p\pi \left( \sum_0^{\infty} B_{m+p+k}^2 + \sum_1^{\infty} B_{m-p-k}^2 \right) = 1$ , tenemos

$$\tilde{x}_0' = 4 \left( \sum_0^{\infty} B_{m+p+k} \left( m + \frac{k}{p} \right) \cos 2 \left( m + \frac{k}{p} \right) t + \sum_1^{\infty} B_{m-p-k} \left( m - \frac{k}{p} \right) \cos 2 \left( m - \frac{k}{p} \right) t \right)$$

con

$$\begin{aligned} \int_0^{p\pi} \tilde{x}_0'^2 dt &= 8p\pi \left( \sum_1^{\infty} \left( m + \frac{k}{p} \right)^2 B_{m+p+k}^2 + \sum_1^{\infty} \left( m - \frac{k}{p} \right)^2 B_{m-p-k}^2 \right) \\ &\geq 8p\pi \min \left( \left( \frac{k}{p} \right)^2, \left( 1 - \frac{k}{p} \right)^2 \right) \left( \sum_0^{\infty} B_{m+p+k}^2 + \sum_1^{\infty} B_{m-p-k}^2 \right) \end{aligned}$$

Es decir  $\int_0^{p\pi} \tilde{x}'_0{}^2 dt \geq 4 \min \left( \left( \frac{k}{p} \right)^2, \left( 1 - \frac{k}{p} \right)^2 \right)$ , un caso particular de la desigualdad de Poincaré. Por lo tanto para  $\beta > 0$ , se tiene  $\alpha'(\beta) \leq \frac{\alpha(\beta)}{\beta} - \frac{K}{\beta}$ , donde  $K$  es la constante de Poincaré, o sea  $\frac{d}{d\beta} \left( \frac{\alpha(\beta)}{\beta} \right) \leq -\frac{K}{\beta^2}$ , y para  $\beta > \beta_0 > 0$ ,  $\alpha(\beta) \leq \left( \frac{\alpha(\beta_0)}{\beta_0} - \frac{K}{\beta_0} \right) \beta + K$ .

En particular si  $\alpha(\beta_0) < K$ , entonces la curva  $\alpha(\beta)$ , para  $\beta > \beta_0$ , está abajo de la recta  $\alpha = \left( \frac{\alpha(\beta_0)}{\beta_0} - \frac{K}{\beta_0} \right) \beta + K$ , que pasa por  $(\alpha(\beta_0), \beta_0)$ . Notemos que  $K = 4$  si  $p = 1$  y  $K = 1$  para  $p = 2$ . Para el caso de las soluciones pares podremos tomar  $K = 0$ . De la ecuación se ve que si  $\alpha < -2\beta$ , entonces  $x'' = -(\alpha - 2\beta \cos 2t)x > 0$  si  $x(t) > 0$  (caso de la rama que sale de  $(0,0)$ : tiene el mismo número de ceros que  $x(t) = \text{constante}$  en  $(0, \pi)$ ). Por lo tanto en ese caso  $x(t)$  no puede ser periódica. Esta información se puede resumir en el siguiente resultado.

**Teorema 2.6:** Las ramas que lleguen a 0, soluciones  $\pi$ -periódicas pares, a 1 con soluciones  $2\pi$ -periódicas impares y a 4 con soluciones  $\pi$ -periódicas impares crecen de  $\alpha = -\infty$  para  $\beta = \infty$  y son monótonas. Para  $\beta > 0$ , la rama que llegue a 0 está arriba de la recta  $\alpha = -2\beta$ , la rama que llega a 1 está abajo de la recta  $\alpha + \beta = 1$  y la rama que llega a 4 está abajo de la recta  $\alpha = \left( \frac{\alpha_0 - 4}{\beta_0} \right) \beta + 4$ , para todo  $\alpha_0(\beta_0)$  dado en la expansión local de la rama.

Además la rama que sale de 1, con soluciones pares, debe seguir, para todo  $\beta$ , entre las ramas que salen de 1 y 4 con soluciones impares, y es monótona para  $\alpha < 0$ .

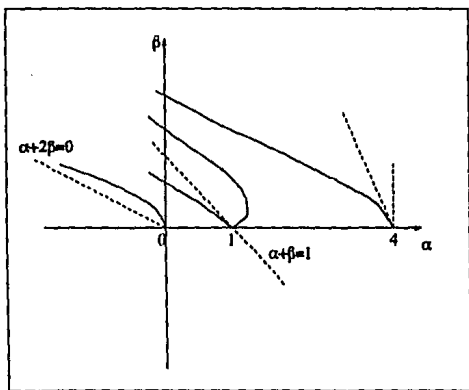


Fig 2.6

La parte (b) del teorema 2.5 está reportada en el [Ab] pg 724. El resto del teorema 2.5

y el teorema 2.5 y el teorema 2.6 parecen ser resultados nuevos. Veremos más adelante que todas las ramas cruzan el eje de las  $\beta$ 's.

### 2.4.a Método de las fracciones continuas

Como probamos que para  $\beta$  pequeño, todos los coeficientes de una sucesión son diferentes de 0, entonces

$$\begin{aligned} \frac{A_m}{A_{m \pm p}} &= \frac{\beta}{\left(\alpha - 4\frac{m^2}{p^2}\right) - \beta \frac{A_{m \mp p}}{A_m}}; \\ \frac{B_m}{B_{m \pm p}} &= \frac{\beta}{\left(\alpha - 4\frac{m^2}{p^2}\right) - \beta \frac{B_{m \mp p}}{B_m}}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

es decir, las curvas que darán soluciones periódicas salen de un racional al cuadrado.

Supongamos que  $\alpha \approx 4\frac{m^2}{p^2} = 4(m_0 + k/p)^2$ , con  $k$  entre  $-[p/2]$  y  $[p/2]$ , entonces de (2.88) y para  $m > p$ ,

$$\alpha = 4\frac{m^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{\left(\alpha - 4\left(\frac{m-p}{p}\right)^2\right) - \frac{\beta^2}{\dots}} + \frac{\beta^2}{\left(\alpha - 4\left(\frac{m+p}{p}\right)^2\right) - \frac{\beta^2}{\dots}} \quad (2.89)$$

que para  $\beta$  pequeña nos da

$$\alpha = 4\frac{m^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{2\left(4\left(\frac{m^2}{p^2}\right) - 1\right) + O(\beta^2)}; \text{ para } m > p, \quad (2.90)$$

que es la curva en el espacio  $\alpha, \beta$  que nos da soluciones  $p\pi$  periódicas de la ecuación de Mathieu.

Si buscamos la expansión a mayor orden, deberíamos pasar el segundo término en (2.89) a  $m - 2p$ , etc.. hasta llegar a  $k, k - p$ , es decir  $p - k$  y volver a subir con  $2p - k$ , etc.,, obteniendo, para  $k \neq 0, \pm p/2$ , dos fracciones continuas.

Si  $\frac{m}{p} = m_0 + \frac{k}{p}$ , con  $m_0 = 0$  y  $0 < k \neq p/2$ , o con  $m_0 = 1$  y  $-p/2 < k < 0$ , entonces las sucesiones de recurrencia deben tomar en cuenta las dos sucesiones. En lugar de hacer este desarrollo, usaremos el hecho de que  $\det \tilde{A}_1^k = 0$ , con

$$\tilde{A}_1^k = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\beta & -\beta & 0 \\ -\beta & \alpha_1 & 0 & -\beta \\ -\beta & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

con  $\alpha_0 = \alpha - 4k^2/p^2$ ,  $\alpha_1 = \alpha - 4(1 - k/p)^2$ ,  $\alpha_2 = \alpha - 4(1 + k/p)^2 - a\beta^2$ ,  $\alpha_3 = \alpha - 4(2 - k/p)^2 - b\beta^2$ .

Es fácil ver, desarrollando respecto al último renglón, que

$$\begin{aligned} \det \tilde{A}_1^k &= -\beta \det \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\beta & 0 \\ -\beta & 0 & -\beta \\ -\beta & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \det \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\beta & -\beta \\ -\beta & \alpha_1 & 0 \\ -\beta & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \beta^4 - \beta^2 \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_3 (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 - \beta^2 (\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

Recordando que  $\alpha(\beta)$  es una función analítica par, entonces, en el primer caso, tendremos  $\alpha = \frac{4k^2}{p^2} + \gamma\beta^2$ , por lo tanto  $\alpha_0 = \gamma\beta^2$ ,  $\alpha_1 = 4\left(1 - \frac{2k}{p}\right) + \gamma\beta^2$ ,  $\alpha_2 = -4\left(1 + \frac{2k}{p}\right) + (\gamma - a)\beta^2$ ,  $\alpha_3 = 8\frac{(2k/p-1)}{p^2} + (\gamma - b)\beta^2$ . Quedandonos con los términos en  $\beta^2$  en la relación anterior, se tiene  $\gamma = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = -\frac{1}{2(1-4k^2/p^2)} + O(\beta^2)$ . Notemos que esta fórmula es la misma que (2.90).

Para el caso  $\alpha = 4(1 - k/p)^2 + \gamma\beta^2$ , entonces  $\alpha_0 = 4(1 - 2k/p) + \gamma\beta^2$ ,  $\alpha_1 = \gamma\beta^2$ ,  $\alpha_2 = -16k/p + (\gamma - a)\beta^2$ ,  $\alpha_3 = -4(3 - 2k/p) + (\gamma - \beta)\beta^2$ .

Tomando la relación a segundo orden se tiene  $\beta^2(-\alpha_0\alpha_2 + \gamma\alpha_0\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3) = 0$ , es decir  $\gamma = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{2(1-2k/p)(3-4k/p)}$ , la fórmula de (2.90).

También de (2.88) tenemos que los coeficientes de las soluciones pares cumplen

$$\frac{A_{m+p}}{A_m} = \frac{\beta}{\left(\alpha - 4\left(\frac{m+p}{p}\right)^2\right) - \frac{\beta^2}{\left(\alpha - 4\left(\frac{m+2p}{p}\right)^2\right) - \frac{\beta^2}{\dots}}}$$

y

$$\frac{A_{m-p}}{A_m} = \frac{\beta}{\left(\alpha - 4\left(\frac{m-p}{p}\right)^2\right) - \frac{\beta^2}{\left(\alpha - 4\left(\frac{m-2p}{p}\right)^2\right) - \frac{\beta^2}{\dots}}}$$

con las mismas precauciones para  $m < p$ .

Haciendo  $A_m = \mathcal{A}$  (una constante), denotando a  $2m/p$  por  $\sqrt{\alpha_0} = 2m_0 + 2k/p$ , tenemos que estas dos ecuaciones se transforman en

$$A_{m+p} = \frac{A\beta}{\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 2)^2 + O(\beta^2)};$$

$$A_{m-p} = \frac{A\beta}{\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} - 2)^2 + O(\beta^2)},$$

las cuales se pueden resumir en la siguiente ecuación

$$A_{m\pm p} = \frac{A\beta}{\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} \pm 2)^2} + O(\beta^3). \quad (2.91)$$

Estas fórmulas son también válidas para  $m < p$ . Por (2.88) tenemos que el siguiente coeficiente de la serie se obtiene de

$$\frac{A_{m+2p}}{A_{m+p}} = \frac{\beta}{\left(\alpha - 4\left(\frac{m+2p}{p}\right)^2\right) - \beta \frac{A_{m+3p}}{A_{m+2p}}}$$

entonces

$$\begin{aligned} A_{m+2p} &= \left[ \frac{\beta}{\alpha - (\sqrt{\alpha_0} - 4)^2 - \frac{\beta^2}{\dots}} \right] A_{m+p} \\ &= \mathcal{A} \frac{1}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 4)^2]} \frac{1}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 2)^2]} \beta^2 + O(\beta^4), \end{aligned}$$

haciendo lo mismo para  $A_{m-p}$  y de esta última se tiene

$$A_{m\pm 2p} = \frac{\mathcal{A}}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} \pm 4)^2]} \frac{1}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} \pm 2)^2]} \beta^2 + O(\beta^4). \quad (2.92)$$

De lo cual se obtiene la solución par de la ecuación de Mathieu de período  $p\pi$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cdots + 2A_{m-2p} \cos(\sqrt{\alpha_0} - 4)t + 2A_{m-p} \cos(\sqrt{\alpha_0} - 2)t + 2A_m \cos \sqrt{\alpha_0}t \\
&\quad + 2A_{m+p} \cos(\sqrt{\alpha_0} + 2)t + 2A_{m+2p} \cos(\sqrt{\alpha_0} + 4)t + \cdots \\
&= 2A \cos \sqrt{\alpha_0}t \\
&\quad + 2A \left[ \frac{1}{\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} - 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha_0} - 2)t + \frac{1}{\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha_0} + 2)t \right] \beta \\
&\quad + 2A \left[ \frac{1}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 4)^2] [\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 2)^2]} \cos(\sqrt{\alpha_0} + 4)t \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} - 4)^2] [\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} - 2)^2]} \cos(\sqrt{\alpha_0} - 4)t \right] \beta^2 + O(\beta^3).
\end{aligned} \tag{2.93}$$

donde  $\sqrt{\alpha_0} \notin \mathbb{Z}$ . Dado que las expresiones en (2.88) son idénticas para las  $A$ 's que para las  $B$ 's, tendremos que las ecuaciones (2.91) y (2.92) son iguales en forma, y que vimos que  $\alpha$  es el mismo en este caso si  $2k \neq 0, p$ , estarán representando la relación entre los coeficientes de las soluciones impares:

$$B_{m \pm p} = \frac{B\beta}{\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} \pm 2)^2} + O(\beta^3); \tag{2.94}$$

$$B_{m \pm 2p} = \frac{B}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} \pm 4)^2] [\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} \pm 2)^2]} \beta^2 + O(\beta^4), \tag{2.95}$$

con  $B$  una constante.

Por lo tanto, la solución impar de la ecuación de Mathieu de período  $p\pi$  es:

$$\begin{aligned}
-\frac{x(t)}{2} &= \cdots + B_{m-2p} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} - 4)t + B_{m-p} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} - 2)t + B_m \operatorname{sen} \sqrt{\alpha_0}t \\
&\quad + B_{m+p} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} + 2)t + B_{m+2p} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} + 4)t + \cdots \\
&= B \operatorname{sen} \sqrt{\alpha_0}t \\
&\quad + B \left[ \frac{1}{\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} - 2)^2} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} - 2)t + \frac{1}{\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 2)^2} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} + 2)t \right] \beta \\
&\quad + B \left[ \frac{1}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 4)^2] [\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} + 2)^2]} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} + 4)t \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{[\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} - 4)^2] [\alpha_0 - (\sqrt{\alpha_0} - 2)^2]} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_0} - 4)t \right] \beta^2 + O(\beta^3).
\end{aligned} \tag{2.96}$$



donde  $\sqrt{\alpha_0} \notin \mathbb{Z}$ .

#### 2.4.b Método perturbativo

Aquí se pretende usar el mismo método perturbativo de la sección 2.3.b, sólo que consideraremos soluciones  $p\pi$ -periódicas, lo que se traduce en exigir que  $\alpha_0$  sea un racional al cuadrado. La solución  $p\pi$ -periódica par de (2.75) es

$$x_0 = A_0 \cos \sqrt{\alpha_0} t$$

con  $\alpha_0 = 4 \frac{m^2}{p^2}$ , sustituyendo ésta en la ecuación (2.76) tenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \alpha_0 x_1 &= 2A_0 \cos \sqrt{\alpha_0} t \cos 2t - A_0 \alpha_1 \cos \sqrt{\alpha_0} t \\ &= A_0 \cos(2 + \sqrt{\alpha_0})t + A_0 \cos(2 - \sqrt{\alpha_0})t \\ &\quad - A_0 \alpha_1 \cos \sqrt{\alpha_0} t. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Para evitar resonancias es directo que debemos de pedir que  $\alpha_1 = 0$ , lo cual nos da como solución de (2.97)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{A_0}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(2 + \sqrt{\alpha_0})t \\ &\quad + \frac{A_0}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(2 - \sqrt{\alpha_0})t. \end{aligned} \tag{2.98}$$

La otra posibilidad sería  $2 - \sqrt{\alpha_0} = \sqrt{\alpha_0}$ , es decir  $\alpha_0 = 1$ , caso ya estudiado y que evitamos suponiendo que  $\sqrt{\alpha_0} \notin \mathbb{N}$ . De igual manera, de (2.77) tenemos que

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \alpha_0 x_2 &= -\alpha_2 x_0 + 2x_1 \cos 2t \\ &= -\alpha_2 A_0 \cos \sqrt{\alpha_0} t \\ &\quad + 2A_0 \left[ \frac{1}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(2 + \sqrt{\alpha_0})t + \frac{1}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(2 - \sqrt{\alpha_0})t \right] \cos 2t \\ &= A_0 \left[ \frac{1}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} + \frac{1}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} - \alpha_2 \right] \cos \sqrt{\alpha_0} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_0}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(4 + \sqrt{\alpha_0})t \\
& + \frac{A_0}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(4 - \sqrt{\alpha_0})t.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Para evitar resonancias debemos pedir, ya que  $4 - \sqrt{\alpha_0} \neq \sqrt{\alpha_0}$  y  $\alpha_0 \neq 1$ , que

$$\alpha_2 = \frac{1}{2(\alpha_0 - 1)} \tag{2.100}$$

lo que nos da como solución de (2.99) a

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & \frac{A_0}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} \frac{1}{\alpha_0 - (4 + \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(4 + \sqrt{\alpha_0})t \\
& + \frac{A_0}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} \frac{1}{\alpha_0 - (4 - \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(4 - \sqrt{\alpha_0})t
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Resumiendo, de estos resultados tenemos que la solución  $p\pi$ -periódica de la ecuación de Mathieu es:

$$\begin{aligned}
x(t) = & A_0 \cos \sqrt{\alpha_0}t \\
& + A_0 \left[ \frac{1}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(2 + \sqrt{\alpha_0})t + \frac{1}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(2 - \sqrt{\alpha_0})t \right] \beta \\
& + A_0 \left[ \frac{1}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} \frac{1}{\alpha_0 - (4 + \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(4 + \sqrt{\alpha_0})t \right. \\
& \left. + \frac{1}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} \frac{1}{\alpha_0 - (4 - \sqrt{\alpha_0})^2} \cos(4 - \sqrt{\alpha_0})t \right] \beta^2 + O(\beta^3)
\end{aligned} \tag{2.102}$$

y

$$\alpha(\beta) = \alpha_0 + \frac{1}{2(\alpha_0 - 1)} \beta^2 + O(\beta^3) \tag{2.103}$$

ambas con  $\alpha_0 = 4 \frac{m^2}{p^2}$ . De igual manera tendremos que la solución de la ecuación de Mathieu impar con período  $p\pi$  es:

$$\begin{aligned}
x(t) &= B_0 \operatorname{sen} \sqrt{\alpha_0} t \\
&+ B_0 \left[ \frac{1}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} \operatorname{sen} (2 + \sqrt{\alpha_0}) t + \frac{1}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} \operatorname{sen} (2 - \sqrt{\alpha_0}) t \right] \beta \\
&+ B_0 \left[ \frac{1}{\alpha_0 - (2 + \sqrt{\alpha_0})^2} \frac{1}{\alpha_0 - (4 + \sqrt{\alpha_0})^2} \operatorname{sen} (4 + \sqrt{\alpha_0}) t \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\alpha_0 - (2 - \sqrt{\alpha_0})^2} \frac{1}{\alpha_0 - (4 - \sqrt{\alpha_0})^2} \operatorname{sen} (4 - \sqrt{\alpha_0}) t \right] \beta^2 + O(\beta^3)
\end{aligned} \tag{2.104}$$

con  $B_0$  una constante.

## 2.5 FOLIACIÓN DE LAS CURVAS PERIÓDICAS

En la sección anterior se mostró que en la región de estabilidad del plano  $\alpha, \beta$  existen curvas que nos dan soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu, sin embargo, no se exhibió la forma de éstas, y en particular nos gustaría probar que dado un punto  $(\alpha', \beta')$  existe una curva que nos da soluciones periódicas que pase tan cerca como queramos de este punto. En lo subsecuente se piensa que  $\beta$  es pequeña.

Notemos que para  $\beta = 0$ , los puntos  $4 \frac{m^2}{p^2}$ , con  $m$  y  $p$  enteros, son densos en la semirecta  $\alpha > 0$ . Sabemos además que si  $m$  y  $p$  son primos relativos, entonces existe una única curva analítica, correspondiente a soluciones  $p\pi$ -periódicas y una  $k$  tal que  $\frac{m}{p} = m_0 + \frac{k}{p}$ , con  $m_0$  entero y  $k$  entre  $-[p/2]$  y  $[p/2]$ . Sabemos que estas curvas están definidas para toda  $\beta$  y son analíticas. Además estas curvas no se intersectan.

Probaremos primero que la situación, para  $\beta = 0$ , se conserva para  $\beta$  pequeño. Daremos después un argumento general.

Tomemos pues la aproximación (2.103) a estas curvas

$$\alpha(\beta) \approx \alpha_0 + \frac{1}{2(\alpha_0 - 1)} \beta^2; \quad \alpha_0 \neq 1, \tag{2.105}$$

la cual por razones prácticas es conveniente escribirla como

$$\begin{aligned}\beta^2 &\approx 2(\alpha_0 - 1)(\alpha - \alpha_0); \\ &= 4 \left[ \frac{1}{2}(\alpha_0 - 1) \right] (\alpha - \alpha_0),\end{aligned}\tag{2.106}$$

que tiene por gráfica una parábola con vértice en  $(\alpha_0, 0)$  y distancia focal  $p = \frac{1}{2}(\alpha_0 - 1)$ . Entonces, las curvas que estamos considerando a primeras aproximaciones en  $\beta$  son parábolas con el eje focal sobre el eje  $\alpha$  y su distancia focal crece con  $\alpha$ , como se muestra en la figura

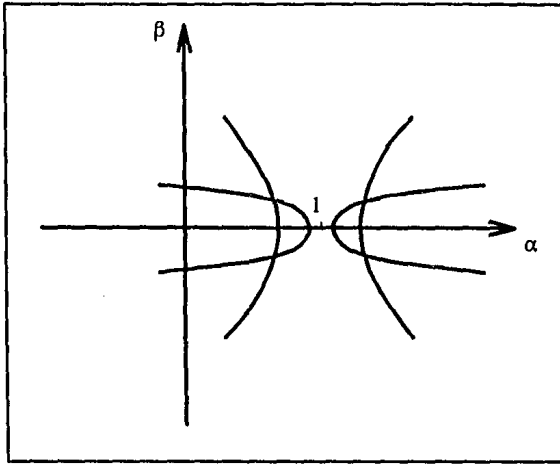


Fig 2.8

En este paso sabemos la forma que tienen dichas curvas, lo siguiente es mostrar que dado un punto  $(\alpha', \beta')$  con  $\beta'$  pequeño, existe una de estas curvas que pasa cerca de él, lo que es equivalente, existe una parábola con vértice,  $(\alpha_0, 0)$ , donde  $\alpha_0$  es un racional al cuadrado.

Para resolver esto, basta considerar que  $(\alpha', \beta')$  cumple con (2.106)

$$\beta'^2 \approx 2(\alpha_0 - 1)(\alpha' - \alpha_0),$$

lo que nos da

$$\alpha_0 \approx \frac{\alpha' + 1 \pm \sqrt{(\alpha' + 1)^2 - 4(\alpha' + \frac{\beta'^2}{2})}}{2},\tag{2.107}$$

como  $\beta'$  es vecino a cero, tenemos que el discriminante de la expresión anterior es

$$\Delta \approx (\alpha' - 1)^2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &\approx \alpha', \\ \alpha_{02} &\approx 1. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Dado que buscamos una raíz cerca de  $\alpha'$ , descartamos la segunda raíz, si  $\alpha' \neq 1$ . En efecto,  $\alpha' - \alpha_{01} \approx \frac{\beta'^2}{\alpha'^2 - 1}$ , mientras que  $\alpha' - \alpha_{02} \approx -\frac{\beta'^2}{\alpha'^2 - 1}$ , por lo tanto, si  $\alpha' \neq 1$ , para  $\beta'$  suficientemente pequeño  $\alpha'$  estará más cerca de  $\alpha_{01}$ . Es necesario notar que los racionales al cuadrado son densos, siendo  $\alpha'$  un número real, existe un racional al cuadrado tan cerca como queramos de éste, en otras palabras, cerca de  $(\alpha', \beta')$  pasa una curva en el espacio  $\alpha, \beta$  que nos estará representando soluciones periódicas.

Hasta aquí hemos visto que para  $\beta$  pequeño las primeras aproximaciones de las curvas periódicas (ecuación (2.106)), son *densas*. Esto quiere decir que existen curvas que representan soluciones periódicas que pasan tan cerca como queramos del punto  $(\alpha', \beta')$  para  $\beta$  pequeño.

Quicieramos verificar directamente, que dichas curvas están *foliando* el espacio, es decir que no se intersectan.

Para mostrar esto simplemente encontremos la intersección de dos de estas parábolas (ecuación (2.105)), que tengan una separación entre vértices de  $\eta$ , en  $\alpha_0$  y  $\alpha_0 + \eta$ , las ecuaciones que resultan son:

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \alpha_0 + \frac{\beta^2}{2(\alpha_0 - 1)} \\ \alpha &\approx \alpha_0 + \eta + \frac{\beta^2}{2(\alpha_0 + \eta - 1)} \end{aligned}$$

de lo cual

$$\frac{\beta^2}{2} \approx (\alpha_0 - 1)(\alpha_0 + \eta - 1); \quad \alpha_0 \neq 1, \quad 1 - \eta,$$

o

$$\beta \approx \pm \sqrt{2(\alpha_0 - 1)(\alpha_0 + \eta - 1)}; \quad \alpha_0 \neq 1 \quad (2.109)$$

y  $|\beta| \geq \sqrt{2}(\alpha_0 - 1)$  si  $\alpha_0 > 1$ , mientras que  $|\beta| \geq \sqrt{2}(1 - \alpha_0 - \eta)$  si  $\alpha_0 + \eta < 1$ . Lo que muestra que las curvas no se cruzan cerca del eje  $\alpha$  para  $\alpha_0 \neq 1$ , para ser más precisos para  $\alpha_0 \in \mathbb{R} - (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ .

De hecho usando un poco de topología, podemos probar que las curvas *folean* toda la región estable.

**Teorema 2.7:** Si  $(\alpha', \beta')$  están en la región estable, entonces existe arbitrariamente cerca un punto  $(\alpha, \beta)$  que corresponde a una solución periódica.

**Dem:** Supongamos que en  $(\alpha', \beta')$  las soluciones no sean periódicas. Entonces  $\phi(\alpha', \beta') = 2 \cos \nu \pi$  es tal que  $\nu$  no es de la forma  $\frac{2k}{p}$ ,  $k \leq \frac{p}{2}$ , donde  $p, k$  son primos relativos. Pero existen  $k_i, p_i$  tales que  $\frac{2k_i}{p_i}$  aproximan a  $\nu$ . Supongamos que cerca de  $(\alpha', \beta')$  no haya ningún  $(\alpha, \beta)$  como en el teorema, es decir existe una vecindad de  $(\alpha', \beta')$  donde  $\phi(\alpha, \beta)$ , una función analítica en  $(\alpha, \beta)$  no pueden ser de la forma  $2 \cos(2k/p)\pi$ . Pero entonces la única posibilidad es que  $\phi(\alpha, \beta) = \phi(\alpha', \beta')$  en esa vecindad.

Consideremos las curvas  $\alpha_{\pm k_i + m p_i}(\beta)$  que salen de  $4(m \pm k_i/p_i)^2$ . Como estas curvas son ordenadas existe  $m_i$  tal que  $\alpha_{-k_i + m_i p_i}(\beta') < \alpha' < \alpha_{k_i + m_i p_i}(\beta')$ , o se puede tomar  $\alpha_0(\beta') < \alpha' < \alpha_{k_i}(\beta')$  o que  $\alpha' > \alpha_{k_i + m_i p_i}(\beta')$  para todo  $m$ .

En el primer caso, dado que las curvas son ordenadas, tendremos  $\alpha_{-k + m_i p}(\beta') < \alpha' < \alpha_{k + m_i p}(\beta')$  para todo  $k$  y  $p$ .

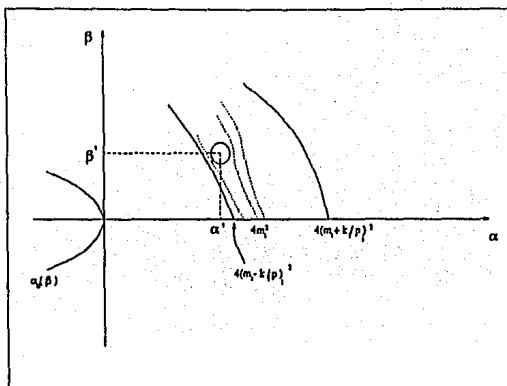


Fig 2.9

Tomando las curvas  $\alpha_{\pm k+m/p}$ , con  $k/p \rightarrow 0$ , entonces la bola alrededor de  $(\alpha', \beta')$  quedaría entre las dos curvas de transición que salen de  $(4m^2, 0)$ , es decir en la región inestable.

En el segundo caso, la bola quedaría entre  $\alpha_0(\beta)$  y la curva límite  $\alpha_k(\beta)$ , con  $k/p \rightarrow 0$ , pero entonces tendríamos un punto  $(\alpha_0, \beta')$  con  $\phi(\alpha_0, \beta') = 2$  y  $\alpha_0(\beta') < \alpha_0 < \alpha_1(\beta')$ , lo cual es imposible, ya que hemos clasificado totalmente estos puntos.

En el tercer caso,  $\alpha' > \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{k+mp}(\beta')$  para todo  $k$  y  $p$ . Sea  $\alpha_0$  este límite, entonces  $\phi(\alpha_0, \beta') = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \phi(\alpha, \beta')$ . Pero  $\phi(\alpha_{k+mp}(\beta')) = 2 \cos 2k\pi/p$  y, como  $k$  y  $p$  son arbitrarios, no podemos tomar su límite.

Hemos probado la foliación global del conjunto estable: este resultado parece nuevo.

## 2.6 EL MÉTODO DE POINCARÉ-LINSTEDT PARA LA ECUACION DE MATHIEU

Supongamos a primera instancia que es posible resolver la ecuación de Mathieu (0.33) poniendo solamente a  $x$  en una serie de potencias de  $\beta$ . Se obtienen las siguientes ecuaciones para cada potencia de  $\beta$

$$\beta^0 : \quad \ddot{x}_0 + \alpha x_0 = 0, \quad (2.110)$$

$$\beta^1 : \quad \ddot{x}_1 + \alpha x_1 = 2 \cos 2t \cdot x_0, \quad (2.111)$$

$$\beta^2 : \quad \ddot{x}_2 + \alpha x_2 = 2 \cos 2t \cdot x_1, \quad (2.112)$$

$$\beta^i : \quad \ddot{x}_i + \alpha x_i = 2 \cos 2t \cdot x_{i-1}. \quad (2.113)$$

Considerando soluciones pares, de (2.110) tenemos que  $x_0 = A_0 \cos \sqrt{\alpha}t$ , sustituyendo en (2.111)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \alpha x_1 &= 2 \cos 2t \cdot A_0 \cos \sqrt{\alpha}t; \\ &= A_0 (\cos(\sqrt{\alpha} + 2)t + \cos(\sqrt{\alpha} - 2)t), \end{aligned}$$

resolviendo ésta se tiene

$$x_1 = A_0 \left\{ \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} + 2)t + \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} - 2)t \right\}.$$

Siguiendo con el procedimiento, de (2.112) se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \alpha x_2 &= 2A_0 \cos 2t \left\{ \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} + 2)t + \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} - 2)t \right\}; \\ &= A_0 \left\{ \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} + 4)t + \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} - 4)t \right\} \\ &\quad + A_0 \left\{ \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} + \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \right\} \cos \sqrt{\alpha}t, \end{aligned}$$

donde tenemos un problema: una de las frecuencias del término forzante coincide con la frecuencia natural, lo cual nos lleva a tener resonancia, y no hay manera de evitar ésta.

Es aquí donde surge la necesidad de un grado de libertad más, que nos permita tratar estas resonancias, y la manera natural es permitiendo que la frecuencia de la solución para la ecuación de grado cero varíe. Esto lo haremos proponiendo a dicha frecuencia como una serie de potencias en  $\beta$ .

Es necesario notar que tenemos una ecuación de segundo orden, y los cambios en la frecuencia se manifiestan en la aceleración, la segunda derivada en la ecuación. Lo que haremos enseguida, a diferencia del método que falló, es no pedir soluciones exactas para cada orden en  $\beta$ , sino unas que nos resuelvan estas al orden correspondiente. En particular la primera ecuación (grado cero) se resolverá hasta grado cero en  $\beta$  y los grados mayores



en  $\beta$  los heredará a las ecuaciones correspondientes, este procedimiento se conoce como el método de Poincaré-Linstedt.

Para hacer esto es conveniente escribir la ecuación (2.110) en términos de la diferencia relativa de las frecuencias, pidiendo que ésta sea de orden mayor que cero en  $\beta$ , es decir

$$\frac{\alpha}{\omega^2} \ddot{x}_0 + \alpha x_0 = -\ddot{x}_0 \left( \frac{\omega^2 - \alpha}{\omega^2} \right), \quad (2.114)$$

donde  $\omega^2$  es la nueva frecuencia y  $\left( \frac{\omega^2 - \alpha}{\omega^2} \right)$  es la diferencia de las frecuencias relativa a  $\omega^2$ . Ahora, ya que estamos exigiendo que esta nueva frecuencia sea tal que la diferencia relativa sea de orden mayor que cero en  $\beta$ , debemos pedir que  $\omega = \sqrt{\alpha} + \omega_1 \beta + \omega_2 \beta^2 + \dots$ . †

Por lo que podemos escribir a (2.114) como

$$\frac{\alpha}{\omega^2} \ddot{x}_0 + \alpha x_0 = O_1 \left( -\ddot{x}_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) \right) \beta + O_2 \left( -\ddot{x}_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) \right) \beta^2 \dots, \quad (2.115)$$

donde  $O_k$  es una función tal que  $O_k \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta^i \right) = a_k$ .

Siguiendo con el método, las ecuaciones (2.110) a (2.113) se transforman en

$$\frac{\alpha}{\omega^2} \ddot{x}_0 + \alpha x_0 = 0; \quad (2.116)$$

$$\ddot{x}_1 + \alpha x_1 = 2 \cos 2t \quad x_0 + O_1 \left( -\ddot{x}_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) \right); \quad (2.117)$$

$$\ddot{x}_2 + \alpha x_2 = 2 \cos 2t \quad x_1 + O_2 \left( -\ddot{x}_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) \right); \quad (2.118)$$

$$\ddot{x}_i + \alpha x_i = 2 \cos 2t \quad x_{i-1} + O_i \left( -\ddot{x}_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) \right). \quad (2.119)$$

Donde la solución de (2.116) (considerando soluciones pares) es

---


$$\begin{aligned} \omega^2 &= \alpha + 2\sqrt{\alpha}\omega_1\beta + (2\sqrt{\alpha}\omega_2 + \omega_1^2)\beta^2 + (2\sqrt{\alpha}\omega_3 + 2\omega_1\omega_2)\beta^3 + \dots \\ \left( 1 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) &= a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{con } a_1 = \frac{2\omega_1}{\sqrt{\alpha}}, \quad a_2 = \frac{2\omega_2}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3\omega_1^2}{\alpha}, \quad a_3 = \frac{4\omega_1^3}{\sqrt{\alpha}^3} - \frac{6\omega_1\omega_2}{\alpha} + \frac{2\omega_3}{\sqrt{\alpha}}.$$

$$x_0 = A_0 \cos \omega t, \quad (2.120)$$

independientemente de lo que sea  $\omega$ , aunque ésta irá cambiando conforme avancemos en la resolución de las ecuaciones a diferentes ordenes.

Sustituyendo (2.120) en (2.117) y tomando el orden correcto en  $\beta$  sobre el lado derecho de la ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \alpha x_1 &= 2 \cos 2t \cdot x_0 + A_0 \cos \omega t \cdot a_1 \\ &= 2 \cos 2t \cdot A_0 \cos \sqrt{\alpha} t + 2A_0 \sqrt{\alpha} \omega_1 \cos \sqrt{\alpha} t \\ &= A_0 [\cos(\sqrt{\alpha} + 2)t + \cos(\sqrt{\alpha} - 2)t + 2\sqrt{\alpha} \omega_1 \cos \sqrt{\alpha} t]. \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación y pidiendo soluciones acotadas (eliminando resonancias), debemos pedir que  $\omega_1 = 0$ , lo que nos da por solución

$$x_1 = \frac{A_0}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} + 2)t + \frac{A_0}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} - 2)t, \quad (2.121)$$

A diferencia del método anterior, nuestro grado de libertad extra, nos ha permitido tratar el problema de las resonancias.

Para el segundo grado en  $\beta$  se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{x}_2 + \alpha x_2 = 2 \cos 2t \cdot x_1 + A_0 \cos \omega t \left(1 - \frac{\alpha}{\omega^2}\right)$$

ya que  $\omega = \sqrt{\alpha} + \omega_2 \beta^2 + \dots$ , tenemos

$$\ddot{x}_2 + \alpha x_2 = 2 \cos 2t \cdot x_1 + A_0 \cos \omega t \cdot a_2$$

de lo cual

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \alpha x_2 &= \frac{A_0}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} + 4)t + \frac{A_0}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} - 4)t \\ &+ A_0 \left\{ \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} + \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} + \alpha a_2 \right\} \cos \sqrt{\alpha} t \end{aligned}$$

donde  $a_2$  es el coeficiente correspondiente a  $\beta^2$  en la serie de  $(1 - \frac{\alpha}{\omega^2}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta^i$ . De nueva cuenta, para resolver esta ecuación impidiendo resonancias, será necesario que

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} + \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\alpha - 1}
 \end{aligned}$$

ya que  $a_2 = \frac{2\omega_2}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3\omega_1^2}{\alpha}$ , y que  $\omega_1 = 0$ . Esta última ecuación se transforma en

$$\omega_2 = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\alpha - 1} \quad (2.122)$$

lo que nos permite calcular una solución acotada para (2.118)

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{A_0}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 4)^2} \cos(\sqrt{\alpha} + 4)t \\
 &\quad + \frac{A_0}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 4)^2} \cos(\sqrt{\alpha} - 4)t.
 \end{aligned} \quad (2.123)$$

El procedimiento se sigue de esta manera indefinidamente.

En este punto tenemos que la solución a la ecuación de Mathieu es

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_0 \cos \omega t \\
 &\quad + A_0 \left( \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} + 2)t + \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \cos(\sqrt{\alpha} - 2)t \right) \beta \\
 &\quad + A_0 \left( \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 2)^2} \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} + 4)^2} \cos(\sqrt{\alpha} + 4)t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 2)^2} \frac{1}{\alpha - (\sqrt{\alpha} - 4)^2} \cos(\sqrt{\alpha} - 4)t \right) \beta^2 + \dots
 \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\alpha - 1} \beta^2 + \dots$$

## 2.7 CRUCES DE LAS CURVAS DE TRANSICIÓN CON EL EJE BETA

**Teorema 2.8:** Las curvas de transición cortan al eje  $\beta$  en puntos  $\beta_n$  que tienden a  $\infty$  y por lo tanto se extienden a  $\alpha < 0$  con  $\alpha(\beta) \rightarrow -\infty$ .

**Dem:** Tomemos las soluciones impares  $\pi$ -periódicas, de la forma

$$x(t) = 2 \sum_1^{\infty} B_{2n} \sin 2nt, \text{ con } \alpha = 0,$$

La ecuación  $x'' - (2\beta \cos 2t)x = 0$ , se escribe  $-4n^2 B_{2n} - \beta(B_{2n-2} + B_{2n+2}) = 0$ , con  $B_0 = 0$ . Sea  $\gamma = \beta/4$ , entonces

$$\begin{pmatrix} 1^2 & \gamma & & \\ \gamma & 2^2 & & \\ & & \ddots & \gamma \\ & & \gamma & n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{2n} \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{2n+2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (n+1)^2 & \gamma & & \\ \gamma & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{2n+2} \\ B_{2n+4} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} B_{2n} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Sea  $A_{n+1} = \begin{pmatrix} n+1 & & \\ & n+2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{J}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$ , entonces la segunda ecuación se escribe

$$\begin{aligned} (A_{n+1}^2 + \gamma \tilde{J}_{n+1}) \begin{pmatrix} B_{2n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} &= -\gamma \begin{pmatrix} B_{2n} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= A_{n+1} (I + \gamma A_{n+1}^{-1} \tilde{J}_{n+1} A_{n+1}^{-1}) A_{n+1} \begin{pmatrix} B_{2n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{pmatrix} B_{2n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\gamma A_{n+1}^{-1} (I + \gamma B_{n+1})^{-1} A_{n+1}^{-1} \begin{pmatrix} B_{2n} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\text{con } B_{n+1} = A_{n+1}^{-1} \tilde{J}_{n+1} A_{n+1}^{-1}.$$

Es fácil ver que  $\|A_{n+1}^{-1}\| \leq \frac{1}{n+1}$ ,  $\|\tilde{J}_{n+1}\| \leq \sqrt{3}$ , por lo tanto  $\|B_{n+1}\| \leq \frac{\sqrt{3}}{(n+1)^2}$  y  $I + \gamma B_{n+1}$  es invertible si  $|\gamma| < \frac{(n+1)^2}{\sqrt{3}}$ , con  $(I + \gamma B_{n+1})^{-1} = \sum_0^{\infty} (-1)^k \gamma^k B_{n+1}^k$ . Ahora sólo nos interesa

$$B_{2n+2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B_{2n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\gamma B_{2n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T A_{n+1}^{-1} (I + \gamma B_{n+1})^{-1} A_{n+1}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como  $A_{n+1}^{-1}(I + \gamma B_{n+1})^{-1} A_{n+1}^{-1}$  es simétrico, sólo tenemos que calcular

$e_1^T A_{n+1}^{-1} (\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \gamma^k B_{n+1}^k) A_{n+1}^{-1} e_1 = a_n(\gamma)$ , con  $e_1^T = (1, 0, \dots)$ .

$$\begin{aligned} a_n(\gamma) &= (A_{n+1}^{-1} e_1)^T \sum_0^{\infty} (-1)^k \gamma^k (A_{n+1}^{-1} \tilde{J}_{n+1} A_{n+1}^{-1})^k (A_{n+1}^{-1} e_1) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} e_1^T \left( \sum_0^{\infty} (-1)^k \gamma^k A_{n+1}^{-1} \tilde{J}_{n+1} A_{n+1}^{-2} \tilde{J}_{n+1} A_{n+1}^{-2} \cdots \tilde{J}_{n+1} A_{n+1}^{-1} \right) e_1 \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \left( 1 + \sum_2^{\infty} \frac{\gamma^k}{(n+1)^2} (\tilde{J}_{n+1} e_1)^T A_{n+1}^{-2} \tilde{J}_{n+1} A_{n+1}^{-2} \cdots (\tilde{J}_{n+1} e_1) \right) \end{aligned}$$

Pero  $\tilde{J}_{n+1} e_1 = e_2$ . Aquí se usó que para  $k = 1$ ,  $e_1^T \tilde{J}_{n+1} e_1 = 0 = (\tilde{J}_{n+1})_{(1,1)}$ .

$$a_n(\gamma) = \frac{1}{(n+1)^2} \left( 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \frac{1}{(n+2)^2} + \sum_4^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{1}{(n+2)^2} (\tilde{J}_{n+1} e_2)^T A_{n+1}^{-2} \cdots (\tilde{J}_{n+1} e_2) \right)$$

donde se usó, para  $k = 3$ ,  $e_2^T \tilde{J}_{n+1} e_2 = 0$ . Como  $\tilde{J}_{n+1} e_2 = e_1 + e_3$  entonces

$$a_n(\gamma) = \frac{1}{(n+1)^2} \left( 1 + \frac{\gamma^2}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{\gamma^4}{(n+1)^2(n+2)^2} \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} \right) + \cdots \right)$$

Por inducción se puede probar que  $a_n$  depende sólo de  $\gamma^2$  y que todos los coeficientes son positivos.

Otra manera de ver esto es lo siguiente:

$$(A_{n+1}^2 + \gamma \tilde{J}_{n+1}) \begin{pmatrix} B_{2n+2} \\ B_{2n+4} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} B_{2n} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

tiene como primera línea:  $(n+1)^2 B_{2n+2} + \gamma B_{2n+4} = -\gamma B_{2n}$ . Pero  $B_{2n+2} = -\gamma a_n(\gamma) B_{2n}$ .

Si hubieramos tomado  $(A_{n+2}^2 + \gamma \tilde{J}_{n+2}) \begin{pmatrix} B_{2n+4} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} B_{2n+2} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$  entonces  $B_{2n+4} =$

$-\gamma a_{n+1}(\gamma) B_{2n+2} = \gamma^2 a_n(\gamma) a_{n+1}(\gamma) B_{2n}$ . Por lo tanto,

$$-\gamma(n+1)^2 a_n(\gamma) B_{2n} + \gamma^3 a_n(\gamma) a_{n+1}(\gamma) B_{2n} = -\gamma B_{2n}$$

y

$$(\gamma^2 a_{n+1}(\gamma) - (n+1)^2) a_n(\gamma) = -1$$

es decir  $a_n(\gamma) = \frac{1}{(n+1)^2 - \gamma^2 a_{n+1}(\gamma)}$  para todo  $n$  con  $\frac{(n+1)^2}{\sqrt{3}} > |\gamma|$ . Por lo tanto

$$a_n(\gamma) = \frac{1}{(n+1)^2 - \frac{\gamma^2}{(n+2)^2 - \frac{\gamma^2}{(n+3)^2 - \frac{\gamma^2}{\ddots}}}$$

expresando  $a_n(\gamma)$  como fracción continua. De esta expresión se ve que si  $|\gamma|^2 \leq (n+1)^4$ , entonces  $a_n(\gamma)$  es analítica en  $\gamma^2$  y positiva.

Como ya se vió anteriormente el problema se reduce a, usando  $B_{2n+2} = -\gamma a_n(\gamma) B_{2n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma & & & \\ \gamma & 2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \gamma & n^2 - \gamma^2 a_n(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ \vdots \\ B_{2n} \end{pmatrix} = 0$$

y por lo tanto se necesitará estudiar los ceros del determinante de esta matriz. Desarrollando el determinante con respecto al último renglón

$$\begin{aligned} (n^2 - \gamma^2 a_n(\gamma)) \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma & & \\ \gamma & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & (n-1)^2 \end{pmatrix} - \gamma \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma & & \\ \gamma & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & (n-2)^2 & 0 \\ & & & \gamma & \gamma \end{pmatrix} \\ = (n^2 - \gamma^2 a_n(\gamma)) J_{n-1} - \gamma^2 J_{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{donde } J_n = \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma & & \\ \gamma & \ddots & & \gamma \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma & n^2 \end{pmatrix}.$$

Haciendo lo mismo con  $J_n$  tenemos  $J_n = n^2 J_{n-1} - \gamma^2 J_{n-2}$ ,  $J_1 = 1$  y  $J_2 = 4 - \gamma^2$ .

Es fácil ver por inducción que  $J_n(0) = (n!)^2$  y que  $J_{4n}(\gamma)$ ,  $J_{4n+1}(\gamma)$  (polinomios en  $\gamma^2$ ) tienen un término dominante  $c_n \gamma^{4n}$  con  $c_n > 0$  y,  $J_{4n+2}(\gamma)$  y  $J_{4n+3}(\gamma)$  tienen un término dominante  $-c_n \gamma^{4n+2}$  con  $c_n > 0$ .

Estudiamos los ceros de  $J_n(\gamma) - \gamma^2 a_n(\gamma) J_{n-1}(\gamma) = f_n(\gamma^2)$ , o si hacemos  $\hat{J}_n(\gamma^2) = \frac{J_n(\gamma)}{(\gamma^2)^{n/2}}$ , los ceros de  $\hat{J}_n(\gamma^2) - \gamma^2 \frac{a_n(\gamma^2)}{n^2} \hat{J}_{n-1}(\gamma^2) = \hat{f}_n(\gamma^2)$ , donde

$$\hat{J}_n(\gamma^2) = \hat{J}_{n-1}(\gamma^2) - \frac{\gamma^2}{n^2(n-1)^2} \hat{J}_{n-2}(\gamma^2),$$

$\hat{J}_n(0) = 1$ ,  $\hat{J}_1(\gamma^2) = 1$ ,  $\hat{J}_2(\gamma^2) = 1 - \frac{\gamma^2}{4}$ . Sea  $a'_n$  el primer cero de  $\hat{J}_n(\gamma^2)$

**Lema 2.3:**  $0 < a'_n < a'_{n-1} < \dots < a'_2 = 4$ .

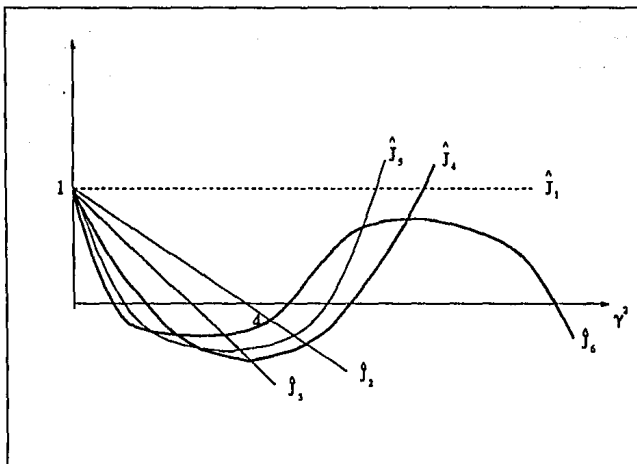


Fig 2.10

**Dem:** Por inducción

$$\hat{J}_3(a'_2) = -\frac{\gamma^2}{(2 \times 3)^2} \hat{J}_1(a'_2) = -\frac{a'_2}{(2 \times 3)^2} < 0$$

esto implica que  $a'_3 < a'_2$ . Si  $a'_{n-1} < a'_{n-2} < \dots$ , entonces  $\hat{J}_n(a'_{n-1}) =$

$-\frac{a'_{n-1}}{n^2(n-1)^2} \hat{J}_{n-2}(a'_{n-1}) < 0$ , ya que el primer cero de  $\hat{J}_{n-1}$  es  $a'_{n-2} > a'_{n-1}$ , lo que implica que  $a'_n < a'_{n-1}$ . Como  $\hat{f}_n(0) = 1$  y  $\hat{f}_n(a'_n) = -\frac{a'_n a_n(a'_n)}{n^2} \hat{J}_{n-1}(a'_n) < 0$  entonces  $\hat{f}_n(\gamma^2)$  tiene un primer cero en  $\alpha_1$ ,  $0 < \alpha_1 < a'_n$ , de lo cual  $\alpha_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$  (serie decreciente).

De hecho  $\alpha_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$ . En efecto, veremos que  $\hat{J}_{4n}(x)$  y  $\hat{J}_{4n+1}(x)$  tienen  $2n$  ceros para  $x > 0$  y que  $\hat{J}_{4n+2}(x)$  y  $\hat{J}_{4n+3}(x)$  tienen  $2n+1$  ceros para  $x > 0$  y todos son positivos para  $x < 0$ . Por lo tanto  $\hat{J}_n(x) \leq 1$  para  $0 \leq x \leq a'_n$ . Ya que los ceros de la derivada de

$\hat{J}_n(x)$  están entre los ceros de  $\hat{J}_n(x)$ , es fácil ver que  $y < a_n(\gamma^2) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto

$$\hat{f}_n(a'_n) = -\frac{a'_n}{n^2} J_{n-1}(a'_n) a_n(a'_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

$|\hat{f}_n(a'_n)| \leq \frac{a'_n}{n^2}$ , para  $n$  grande  $a'_n \approx \alpha_1$ . † ■

Sea entonces  $a_n^2$  el segundo cero de  $\hat{J}_n(\gamma^2)$ , para  $n \geq 4$ .

**Lema 2.4:**  $a_n^2 < a_{n-1}^2 < \dots < a_4^2$

**Dem:** Hagamos la prueba por inducción. Se tiene primeramente que  $\hat{J}_5(a_4^2) = -\frac{a_4^2}{(5 \times 4)^2} \hat{J}_3(a_4^2) > 0$  ya que  $\hat{J}_4(a_4^2) = 0 = \hat{J}_3(a_4^2) - \frac{a_4^2}{(3 \times 1)^2} \hat{J}_2(a_4^2)$ , lo cual implica que  $\hat{J}_3(a_4^2)$  y  $\hat{J}_2(a_4^2)$  tienen el mismo signo. Si  $\hat{J}_2(a_4^2)$  fuera positivo se tendría que  $a_4^2 < a_2^2$ , pero  $\hat{J}_4(a_2^2) = \hat{J}_3(a_2^2) < 0$  lo que nos lleva a una contradicción.

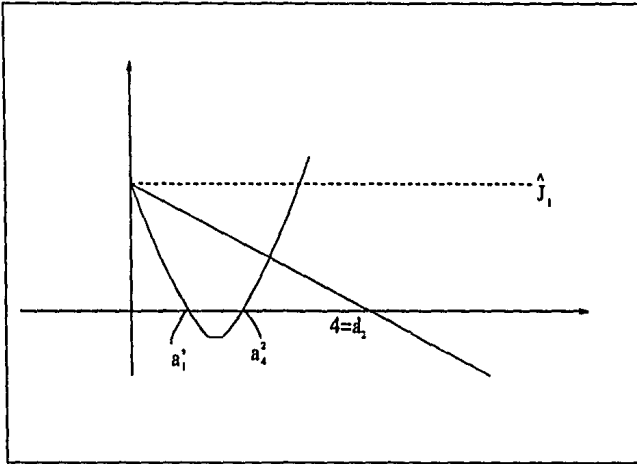


Fig 2.11

Suponiendo que se probó  $a_{n-1}^2 < \dots < a_4^2$ , entonces  $\hat{J}_n(a_{n-1}^2) = -\frac{a_{n-1}^2 \hat{J}_{n-2}(a_{n-1}^2)}{(n(n-1))^2} > 0$  ya que  $\hat{J}_{n-2}$  es positiva entre  $a'_{n-2}$  y  $a_{n-2}^2$ . Por lo tanto  $a_{n-2}^2 < a_{n-1}^2$ . ■

Como antes, hay un segundo cero  $\alpha_2$  de  $\hat{f}_n$  con  $a'_{n-1} < \alpha_2 < a_n^2$  para todo  $n > 4$ , ya que  $\hat{f}_n(a_n^2) = -\frac{a_n^2 \hat{J}_{n-1}(a_n^2)}{(n(n-1))^2} > 0$  y  $\hat{f}_n(a'_{n-1}) = \hat{J}_n(a'_{n-1}) < 0$ . También es fácil ver que  $a_n^2$  converge a  $\alpha_2$ .

† El hecho que para  $x < 0$   $\hat{J}_n(x) \geq \hat{J}_{n-1}(x)$  se prueba por inducción.



**Lema 2.5:**  $\hat{J}_{4n}$  y  $\hat{J}_{4n+1}$  tienen  $2n$  ceros simples,  $\hat{J}_{4n+2}$  y  $\hat{J}_{4n+3}$  tienen  $2n + 1$  ceros simples.

**Dem:** Ésta será por inducción, probando que los ceros de  $\hat{J}_{n-1}$  separan los ceros de  $\hat{J}_n$ , es decir, si  $a_n^k$  es el  $k$ -ésimo cero de  $\hat{J}_n$ , se tiene

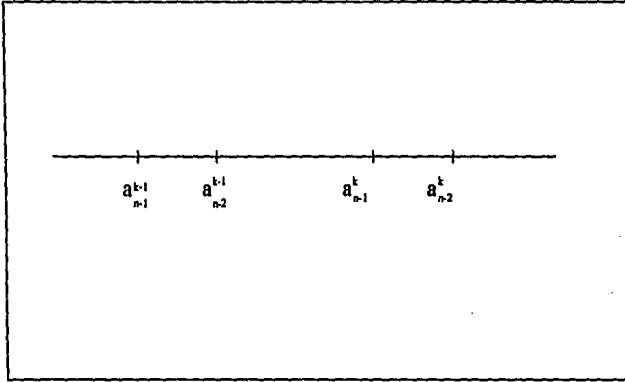


Fig 2.12

$a_n^{k-1} < a_{n-1}^{k-1} < a_{n-2}^{k-1} < a_n^k < a_{n-1}^k < a_{n-2}^k$  con  $\hat{J}_n|_{[a_{n-1}^{k-1}, a_n^k]}$  del signo de  $\hat{J}_{n-1}|_{[a_{n-1}^{k-1}, a_{n-1}^k]}$

Si esto es válido para  $n - 1$ , entonces, suponiendo que el signo común de  $\hat{J}_{n-1}$  y  $\hat{J}_{n-2}$  es negativo (hipótesis de inducción)

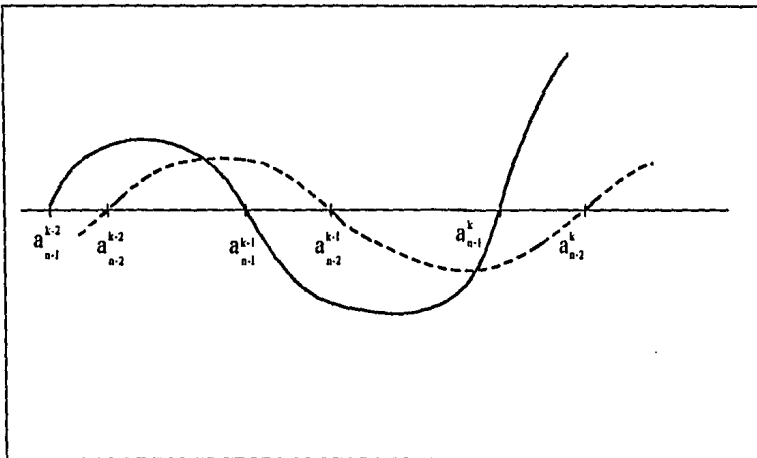


Fig 2.13

De  $\hat{J}_n = \hat{J}_{n-1} - \frac{\gamma^2}{(n(n-1))^2} \hat{J}_{n-2}$ , evaluando en los puntos de arriba se deduce que  $\hat{J}_n(a_{n-1}^{k-2}) > 0$ ,  $\hat{J}_n|_{[a_{n-1}^{k-2}, a_{n-2}^{k-2}]} > 0$ ,  $\hat{J}_n(a_{n-1}^{k-1}) < 0$ ,  $\hat{J}_n|_{[a_{n-1}^{k-1}, a_{n-2}^{k-1}]} < 0$ ,  $\hat{J}_n(a_{n-1}^k) > 0$ ,  $\hat{J}_n|_{[a_{n-1}^k, a_{n-2}^k]} > 0$ . Por lo tanto existen ceros de  $\hat{J}_n$  entre  $a_{n-2}^{k-2}$  y  $a_{n-1}^{k-1}$ . El hecho de que sólo hay un cero en cada intervalo viene del número total de ceros de esos polinómios: Tomemos  $k$  dando el último cero de  $\hat{J}_{n-1}$  (otra inducción). Según la paridad de  $n-1$  tendremos:

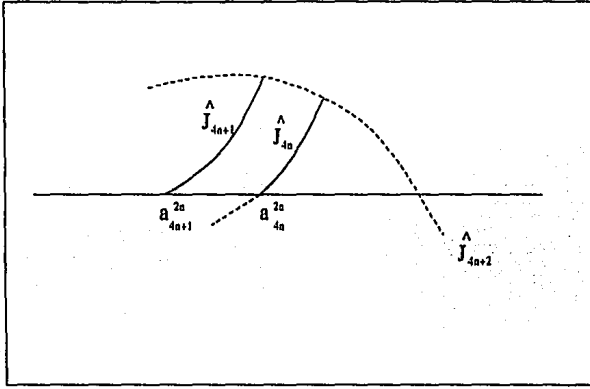


Fig 2.14

Como  $\hat{J}_{4n+2}$  decrece como  $-\gamma^{4n+2}$  y es positivo en  $[a_{4n+1}^{2n}, a_{4n}^{2n}]$ , entonces hay otro cero a la derecha de  $a_{4n}^{2n}$ .

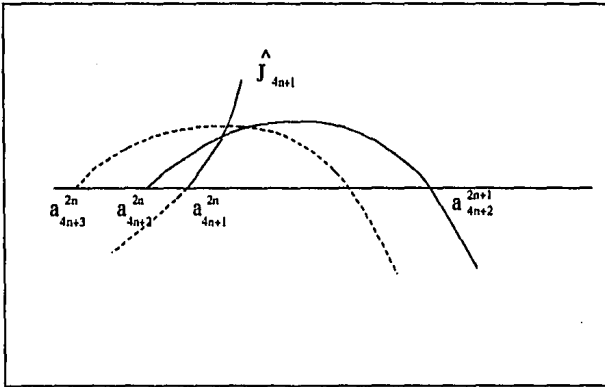


Fig 2.15

Como  $\hat{J}_{4n+3} > 0$  en  $[a_{4n+2}^{2n}, a_{4n+1}^{2n}]$  y  $\hat{J}_{4n+3}(a_{4n+2}^{2n+1}) < 0$ , entonces hay otro cero,  $a_{4n+3}^{2n+1}$ ,

entre  $a_{4n+1}^{2n}$  y  $a_{4n+2}^{2n+1}$ .

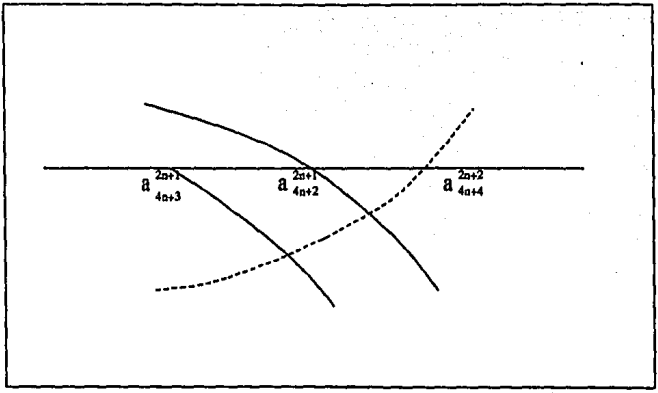


Fig 2.16

$\hat{J}_{4n+4} < 0$  en  $\{a_{4n+3}^{2n+1}, a_{4n+2}^{2n+1}\}$  y crece como  $\gamma^{4n+4}$ , por lo tanto hay otro cero,  $a_{4n+4}^{2n+2}$ , a la derecha de  $a_{4n+2}^{2n+1}$ .

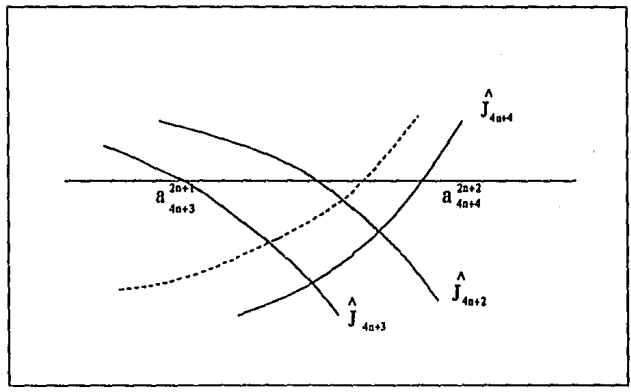


Fig 2.17

$\hat{J}_{4n+5} > 0$  en  $a_{4n+4}^{2n+2}$  y negativo en  $a_{4n}^{2n+1}$ , por lo tanto hay un cero entre esos dos números.

Por lo tanto  $a_n^k$  es monótonamente decreciente a  $\alpha_k$  y  $\hat{f}_n(\alpha_k) = 0$  para  $\alpha_k$  entre  $a_{n-1}^{k-1}$  y  $a_n^k$  (mismo argumento).

Falta probar que  $\alpha_k \rightarrow \infty$ :  $\alpha_k$  es una sucesión creciente, si  $\{\alpha_k\}$  se acumulan en  $\beta_0$ . Por

la separación de las curvas de transición para soluciones  $2\pi$ -periódicas, con  $\phi(0, \beta) = 2$ . Pero  $\phi(0, 4\sqrt{\alpha_k}) = -2$  (soluciones  $\pi$ -periódicas) y  $\phi$  es continua: contradicción. ■

Para la ecuación  $x'' + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x = 0$ , con  $x = 2 \sum_1^\infty \sin 2nt$  se puede hacer lo mismo con  $\gamma = \beta/4$ ,  $\delta = -\alpha/4$ , entonces se tiene

$$\begin{pmatrix} \delta + 1^2 & \gamma & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & \gamma & \delta + n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{2n} \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{2n+2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \delta + (n+1)^2 & \gamma & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & \gamma & \delta + n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{2n+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{2n} \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} B_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto  $B_{2n+2} = -\gamma a_n(\delta, \gamma) B_{2n}$ . Pero  $B_{2n+4} = -\gamma a_{n+1}(\delta, \gamma) B_{2n+2} = \gamma^2 a_n a_{n+1} B_{2n}$  y  $B_{2n+2}(\delta + (n+1)^2) + \gamma(B_{2n+4} + B_{2n}) = 0$  implica que

$$a_n(\delta, \gamma) = \frac{1}{\delta + (n+1)^2 - \gamma^2 a_{n+1}(\delta, \gamma)} = \frac{1}{\delta + (n+1)^2 - \frac{\gamma^2}{\delta + (n+2)^2 - \frac{\gamma^2}{\ddots}}}$$

En particular  $a_n$  es una función de  $\gamma^2$ , analítica y positiva con  $a_n \geq \frac{1}{\delta + (n+1)^2}$  y  $\delta + (n+1)^2 - \frac{\gamma^2}{\delta + (n+2)^2 - \frac{\gamma^2}{\ddots}} \geq \delta + (n+1)^2 - \frac{\gamma^2}{\delta + (n+1)^2 - \frac{\gamma^2}{\ddots}} = b$ , con  $b = \delta + (n+1)^2 - \frac{\gamma^2}{b}$ , es decir

$b^2 - (\delta + (n+1)^2)b + \gamma^2 = 0$  con dos raíces positivas. Entonces lo de arriba es cierto si  $|\gamma| \leq \delta + (n+1)^2$ .

El problema es entonces equivalente a

$$\det \begin{pmatrix} \delta + 1^2 & \gamma & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & \gamma & \delta + n^2 - \gamma^2 a_n(\alpha, \gamma) \end{pmatrix} = 0$$

$$= (\delta + n^2 - \gamma^2 a_n) J_{n-1}(\delta, \gamma) - \gamma^2 J_{n-2}(\delta, \gamma)$$

$$\text{con } J_n(\delta, \gamma) = \det \begin{pmatrix} \delta + 1^2 & \gamma & & \\ \gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & \gamma & \delta + m^2 \end{pmatrix}$$

con  $J_n = (\delta + n^2)J_{n-1} - \gamma^2 J_{n-2}$ ,  $J_1 = \delta + 1$ ,  $J_2 = (\delta + 1)(\delta + 4) - \gamma^2$ , y se trata de resolver la ecuación

$$J_n(\delta, \gamma) - \gamma^2 a_n(\delta, \gamma) J_{n-1}(\delta, \gamma) = 0 = f_n(\delta, \gamma).$$

Como antes  $J_n$  es par en  $\gamma$ , y para  $\delta > -1$ , es decir  $\alpha < 4$ , tendremos el mismo comportamiento de los ceros.

Notamos que  $J_n$  es función de  $\gamma^2$  y que  $f_n(\delta, \gamma)$  es una función analítica en  $\delta$  y  $\gamma$  (que se pueden tomar complejas). Por lo tanto si  $(\delta, \gamma)$  están sobre la curva de transición, también lo está  $(\delta, -\gamma)$  y si  $\nabla f_n(\delta, \gamma) \neq 0$  en un punto donde  $f_n(\delta, \gamma) = 0$ , entonces por el teorema de la función implícita podemos resolver localmente para  $\delta$  como función analítica de  $\gamma$  (o  $\gamma$  como función de  $\delta$ ).

Para otro argumento para probar que las curvas de transición son curvas parametrizadas por  $\gamma$ , se puede ver el Coddington y Levinson, pg 219.

Para  $-4 < \delta < -1$ , con  $J_n(x) = (n^2 + \delta)J_{n-1}(x) - xJ_{n-2}(x)$  uno tiene el primer cero para  $x < 0$  (no relevante para nuestro problema). Es fácil ver que uno tiene:

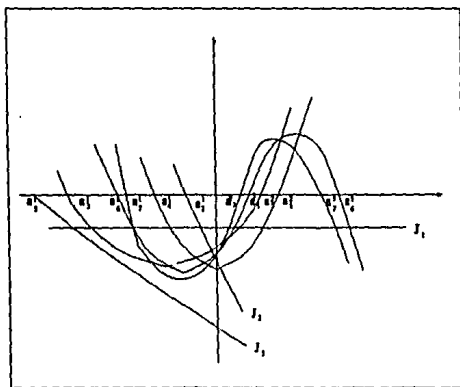


Fig 2.18

es decir  $a'_{2n-1} < a'_{2n+1} < a'_{2n} < 0$ ,  $J_n(x) > 0$  para  $x < a'_n$ ,  $J_n(x) < 0$  para  $0 < x < a'_n$ ,

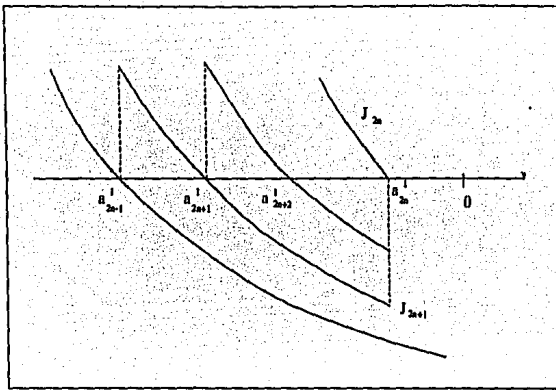


Fig 2.19

obteniendo dos sucesiones  $a'_{2n+1}$  que es creciente, y  $a'_{2n}$  que es decreciente y un cero de  $f_n(x)$ .

Para  $x > 0$ , tendremos de nuevo los ceros ordenados en forma decreciente, generando los ceros de  $f_n(x)$  como antes.

Para  $\delta < -4$ , es decir  $\alpha > 16$ , hay una sucesión de ceros cerca de  $\delta = -4$  que desaparecen cuando  $\delta$  crece. El análisis se vuelve entonces más complicado ya que el polinomio  $J_n$  no tiene todos sus ceros simples y reales. Sin embargo, se puede calcular numéricamente los ceros de  $J_n$  para localizar los ceros de  $f_n$ .

Sea  $n_0$  tal que  $a_n(\delta, \gamma)$  está bien definido para  $n \geq n_0$ . Definamos  $\hat{J}_n(\delta, \gamma) = \frac{J_n(\delta, \gamma)}{\prod_{j=0}^n (\delta + j^2)}$ ,

$$\hat{f}_n(\delta, \gamma) = \frac{f_n(\delta, \gamma)}{\prod_{j=0}^n (\delta + j^2)}.$$

Entonces, para  $n \geq n_0 + 1$  se tiene:

$$\hat{J}_{n+1} = \hat{J}_n - \frac{\gamma^2 \hat{J}_{n-1}}{(\delta + n^2)(\delta + (n+1)^2)}$$

$$\hat{f}_n = \hat{J}_n - \gamma^2 \frac{a_n(\delta + \gamma)}{\delta + n^2} \hat{J}_{n-1}$$

Por lo tanto  $\hat{f}_{n+1} = \hat{J}_{n+1} - \frac{\gamma^2 a_{n+1}}{\delta + (n+1)^2} \hat{J}_n = \hat{J}_n \left( 1 - \frac{\gamma^2 a_{n+1}}{\delta + (n+1)^2} \right) - \frac{\gamma^2 \hat{J}_{n-1}}{(\delta + n^2)(\delta + (n+1)^2)}$ .

Como  $1 - \frac{\gamma^2 a_{n+1}}{\delta + (n+1)^2} = \frac{1}{a_n(\delta + (n+1)^2)}$ , entonces

$$\hat{f}_{n+1} = \frac{\hat{f}_n + \gamma^2 a_n \hat{J}_{n-1} / (\delta + n^2)}{a_n (\delta + (n+1)^2)} + \frac{\gamma^2 \hat{J}_{n-1}}{(\delta + (n+1)^2)(\delta + n^2)}$$

$$\hat{f}_{n+1} = \frac{\hat{f}_n}{a_n (\delta + (n+1)^2)}$$

y por lo tanto  $\hat{f}_{n_0+p} = \frac{\hat{f}_{n_0}}{\prod_{k=0}^{p-1} a_{n_0+k} (\delta + (k+1)^2)}$ .

Ahora sabemos que  $1 \leq a_n (\delta + (n+1)^2) \leq 2$ , por lo tanto  $\{\{\hat{f}_n\}\}$  es una sucesión decreciente. Pero además

$$\begin{aligned} a_n (\delta + (n+1)^2) &= \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2 a_{n+1}}{\delta + (n+1)^2}} = 1 + \frac{\gamma^2 a_{n+1}}{\delta + (n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2 a_{n+1}}{\delta + (n+1)^2}} \\ &= 1 + \gamma^2 a_n a_{n+1} \end{aligned}$$

Ahora, es bien conocido que el producto infinito, con  $0 \leq |\epsilon_n| < 1$ ,  $\prod_1^\infty (1 + \epsilon_n)$  es convergente si y sólo si  $\sum |\epsilon_n| < \infty$  (ver Ahlfors pg 191). Por lo tanto el producto  $\prod_0^\infty a_{n_0+k} (\delta + (k+1)^2)$  es convergente ya que  $\gamma^2 \sum_{n_0}^\infty |a_n a_{n+1}| \leq \gamma^2 \sum_{n_0}^\infty \frac{2}{(\delta + (n+1)^2)^2} < \infty$ . Sea

$$\hat{f}_{n_0+\infty} = \frac{\hat{f}_{n_0}}{\prod_0^\infty a_{n_0+k} (\delta + (k+1)^2)},$$

entonces  $|\hat{f}_{n_0+\infty}| \leq |\hat{f}_{n_0+p}| \leq |\hat{f}_{n_0}|$ .

En particular, de  $\left| \hat{J}_n - \frac{\gamma^2 a_n}{(\delta + n^2)} \hat{J}_{n-1} \right| \leq K = \sup |\hat{f}_{n_0}|$ , sobre un intervalo  $I$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |\hat{J}_{n_0+p}| &\leq \left| \hat{J}_{n_0+p} - \gamma^2 \frac{a_{n_0+p}}{\delta + (n_0+p)^2} \hat{J}_{n_0+p-1} \right| + \gamma^2 \frac{a_{n_0+p}}{\delta + (n_0+p)^2} \left| \hat{J}_{n_0+p-1} - \gamma^2 \frac{a_{n_0+p-1}}{\delta + (n_0+p-1)^2} \hat{J}_{n_0+p-2} \right| \\ &\quad + \dots + \gamma^{2p} \frac{a_{n_0+p} \dots a_{n_0+1}}{(\delta + (n_0+p)^2) \dots (\delta + (n_0+1)^2)} \left| \hat{J}_{n_0} - \gamma^2 \frac{a_{n_0}}{\delta + n_0^2} \hat{J}_{n_0-1} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\hat{J}_{n_0+p}| &\leq K \left( 1 + \gamma^2 \frac{a_{n_0+p}}{\delta + (n_0+p)^2} + \gamma^4 \frac{a_{n_0+p} a_{n_0+p-1}}{(\delta + (n_0+p)^2)(\delta + (n_0+p-1)^2)} + \dots \right) \\ &\leq K \left( 1 + \frac{2\gamma^2}{(\delta + n_0^2)^2} + \frac{(2\gamma^2)^2}{(\delta + n_0^2)^4} + \dots \right) \leq \tilde{K} \end{aligned}$$

por la convergencia de la función de Riemann.

Esto implica que para  $n$  muy grande  $\hat{f}_n(\gamma, \delta) \approx \hat{J}_n(\gamma, \delta) \approx \hat{J}_{n+1}(\gamma, \delta)$  en el intervalo  $I$ . Por lo tanto si en  $I$ , se tiene  $\hat{f}_{n_0}(\gamma) \neq 0$ , entonces  $|\hat{f}_{n_0+\infty}(\gamma)| \geq A > 0$  en ese intervalo y  $\hat{J}_n(\gamma) \neq 0$  en  $I$ , para  $n$  grande. Esto implica que si existen  $\gamma_n$  con  $\hat{J}_n(\gamma_n) = 0$  y  $\gamma_n$  converge a  $\gamma_0$ , entonces  $\hat{f}_{n_0}(\gamma_0) = 0$ .

Igualmente, si  $\hat{f}_{n_0}(\gamma_0) = 0$  y  $\hat{f}_{n_0}$  cambia de signo en  $\gamma_0$ , entonces para cualquier intervalo  $I$ , vecindad de  $\gamma_0$ , en la frontera de  $I$ ,  $\hat{f}_{n_0}$  tiene signos diferentes. Lo mismo pasará para  $\hat{J}_n$  para  $n$  grande y por lo tanto,  $\hat{J}_n$  tiene un cero en  $I$ , y  $\gamma_0$  es el límite de los ceros de  $\hat{J}_n$ .

Finalmente, si  $\hat{f}_{n_0}(\gamma_0) = 0$ , entonces  $\hat{J}_n(\gamma_0)$  tiene el mismo signo, para todo  $n \geq n_0$ , y puede ser 0 (si no  $\hat{f}_{n_0}(\gamma_0) = \hat{J}_{n_0}(\gamma_0)$  implica que  $\hat{J}_{n-1}(\gamma_0) = 0$  si  $\gamma \neq 0$  y sucesivamente  $J_p(\gamma_0) = 0$  para todo  $p \geq 0$ , lo cual no puede ser cierto). Entonces si  $\hat{f}_{n_0}(\gamma_0) = 0$  y  $\hat{f}_{n_0}(\gamma)$  es positivo, por ejemplo, en una vecindad de  $\gamma_0$ , y  $\hat{J}_n(\gamma_0) < 0$ , tendremos dos ceros de  $\hat{J}_n(\gamma)$  cerca de  $\gamma_0$ .

Hemos probado el siguiente resultado, aparentemente novedoso,

**Teorema 2.9:**  $\hat{f}_{n_0}(\gamma_0) = 0$  si y sólo si existen  $\gamma_n$  con  $\hat{J}_n(\gamma_n) \rightarrow 0$  y  $\gamma_n \rightarrow \gamma_0$ .

En el caso de las funciones pares y  $2\pi$ -periódicas de la forma

$$x(t) = 2 \sum A_{2n+1} \cos(2n+1)t,$$

se tiene, de las relaciones

$$(-(2n+1)^2 + \alpha)A_{2n+1} - \beta(A_{2n+3} + A_{2n-1}) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha + \beta & \beta & 0 \\ \beta & 3^2 - \alpha & \\ 0 & \ddots & \beta \\ & \beta & (2n+1)^2 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{2n+1} \end{pmatrix} = -\beta \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{2n+3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2n+3)^2 - \alpha & \beta \\ \beta & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{2n+3} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\beta \begin{pmatrix} A_{2n+1} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Por lo tanto



$$A_{2n+3} = -\beta a_{2n+1} A_{2n+1}$$

$$A_{2n+5} = -\beta a_{2n+3} A_{2n+3} = \beta^2 a_{2n+1} a_{2n+3} A_{2n+1}.$$

De la relación

$$((2n+3)^2 - \alpha) A_{2n+3} + \beta A_{2n+5} = -\beta A_{2n+1}$$

se obtiene

$$a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2 - \alpha - \beta^2 a_{2n+3}} = \frac{1}{(2n+1)^2 - \alpha - \frac{\beta^2}{(2n+3)^2 - \alpha - \frac{\beta^2}{\dots}}}$$

y el problema se reduce a

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \alpha + \beta & \beta & & & \\ \beta & 3^2 - \alpha & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta & \\ \beta & & & (2n+1)^2 - \alpha - \beta^2 a_{2n+1} & \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir

$$F_n(\beta, \alpha) = ((2n+1)^2 - \alpha - \beta^2 a_{2n+1}) G_n(\beta, \alpha) - \beta^2 G_{n-1}(\beta, \alpha) = 0,$$

con  $G_n(\beta, \alpha)$  el determinante de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 - \alpha + \beta & \beta & & & \\ \beta & & \ddots & & \\ & & & \beta & \\ & & & & (2n-1)^2 - \alpha \end{pmatrix}$ .

Tenemos

$$G_{n+1}(\beta, \alpha) = ((2n+1)^2 - \alpha) G_n(\beta, \alpha) - \beta^2 G_{n-1}(\beta, \alpha)$$

y

$$F_n(\beta, \alpha) = G_{n+1}(\beta, \alpha) - \beta^2 a_{2n+1}(\beta, \alpha) G_{n-1}(\beta, \alpha)$$

con  $G_0(\beta, \alpha) = 1 - \alpha + \beta$ ,  $G_1(\beta, \alpha) = (1 - \alpha + \beta)(3^2 - \alpha) - \beta^2$ . Es fácil ver que  $G_n$  es un polinomio en  $\beta$  de grado  $n+1$  y término dominante  $(-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \beta^{n+1}$ . Los ceros de  $F_n$ , para  $\beta < 0$ , darán las curvas de transición, en  $\beta > 0$ , para las soluciones  $2\pi$ -periódicas e impares, por las propiedades de simetría.

Para  $\alpha = 0$ , se tiene

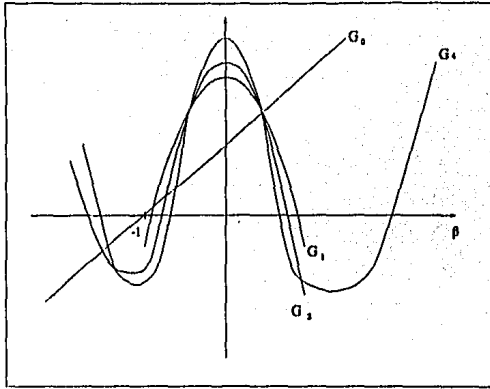


Fig 2.20

Se puede probar, como antes, que  $G_n$  tiene  $n + 1$  ceros y que los ceros correspondientes se acumulan en un cero de  $F_n$ . Dejamos los detalles al lector.

Finalmente en el caso de las soluciones pares y  $\pi$ -periódicas de la forma

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_1^{\infty} A_{2n} \cos 2nt,$$

entonces, con  $\gamma = \frac{\beta}{4}$  y  $\delta = -\frac{\alpha}{4}$

$$\begin{pmatrix} \delta/2 & \gamma & & & \\ \gamma & 1+\delta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \gamma & \\ & & & \gamma & n^2+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{2n} \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{2n+2} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} (n+1)^2+\delta & \gamma \\ \gamma & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{2n+2} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{2n} \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el mismo  $a_n(\delta, \gamma)$  que antes y el problema se reduce a

$$\det \begin{pmatrix} \delta/2 & \gamma & & & \\ \gamma & 1+\delta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & n^2 + \delta - \gamma^2 a_n & \end{pmatrix} = 0,$$

es decir

$$K_n(\delta, \gamma) = H_n(\delta, \gamma) - \gamma^2 a_n(\delta, \gamma) H_{n-1}(\delta, \gamma) = 0$$

con  $H_n(\delta, \gamma)$ , el determinante sin  $\gamma^2 a_n$ , que satisface

$$H_n(\delta, \gamma) = (n^2 + \delta)H_{n-1}(\delta, \gamma) - \gamma^2 H_{n-2}(\delta, \gamma), \quad H_0 = \delta/2, \quad H_1 = \delta/2(1 + \delta) - \gamma^2.$$

Los polinómios  $H_n$ , son funciones de  $\gamma^2$ , reflejando la simetría de las curvas de transición, con término dominante  $(-\gamma^2)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ , y propiedades similares a los polinómios anteriores.

Si  $\alpha = 0$ , tendremos  $H_n(0) = 0$  y la misma estructura de ceros ( el primer cero para  $K_n$  será un poco menor que  $36 = \gamma^2$ , es decir, para  $\beta \leq 24$ ).

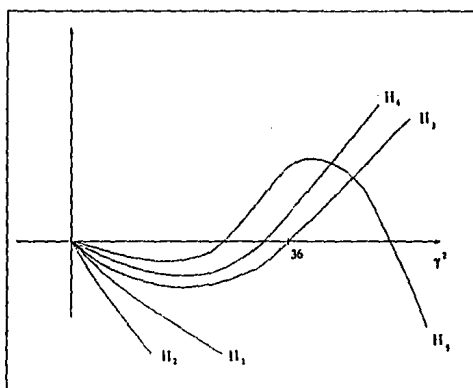


Fig 2.21

Dejamos al lector hacer el análisis de estos polinómios.

Otra manera de probar que las curvas de transición deben cortar el eje de las  $\beta$ 's es la siguiente:

Consideremos el operador  $Lx = x'' + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x$  en el espacio de funciones impares y  $\pi$ -periódicas (por ejemplo) con

$$x(t) = 2 \sum_1^{\infty} B_{2n} \operatorname{sen} 2nt.$$

Por lo tanto la ecuación es equivalente a  $4n^2 B_{2n} = \alpha B_{2n} - \beta(B_{2n+2} + B_{2n-2})$ ,  $n \geq 1$ , y  $\sum n^4 B_{2n}^2 < \infty$ . Definamos  $\tilde{B}_{2n} = 2n B_{2n}$ , entonces estas ecuaciones son equivalentes a

$$\tilde{B}_{2n} = \frac{\alpha}{4n^2} \tilde{B}_{2n} - \beta \left( \frac{\tilde{B}_{2n+2}}{2n(2n+2)} + \frac{\tilde{B}_{2n-2}}{2n(2n-2)} \right), \quad n \geq 1,$$

con  $B_0 = 0$ . Sea  $\alpha = \beta\alpha_0$  y  $\beta = \frac{1}{\lambda}$ , tenemos

$$\lambda \tilde{B}_{2n} = K_{2n}(B_1, \dots)$$

donde  $K_{2n}(B_1, \dots) = \frac{\alpha_0}{4n^2} \tilde{B}_{2n} - \left( \frac{\tilde{B}_{2n+2}}{2n(2n+2)} + \frac{\tilde{B}_{2n-2}}{2n(2n-2)} \right)$ .

Sobre el espacio de las series  $\tilde{B} \equiv (\tilde{B}_2, \tilde{B}_4, \dots)$  pongamos el producto escalar

$$\sum \tilde{B}_{2n} \tilde{D}_{2n} = \langle \tilde{B}, \tilde{D} \rangle,$$

el cual corresponde, para  $B$  y  $D$ , al producto escalar de energía en  $H_{per}^1[0, \pi]$ .

Es fácil ver que  $\langle K\tilde{B}, \tilde{D} \rangle = \langle \tilde{B}, K\tilde{D} \rangle$ , es decir  $K$  es autoadjunto con respecto a este producto escalar y que  $K$  es compacto (de hecho  $K$  corresponde a la función de Green asociada a la ecuación de Mathieu y manda  $H^1$  en  $H^3$ ). Además,  $\lambda\tilde{B} = K\tilde{B}$  corresponde a la ecuación de Mathieu.

Por lo tanto el espectro de  $K$  consiste sólo de valores propios y las funciones propias son una base del Rango de  $K$  ([A-G] pg 127). Por lo tanto los espacios propios son de dimensión uno.

Para ver que tan grande es el rango de  $K$ , sea  $f(t) = 2 \sum_1^{\infty} 2n \tilde{D}_{2n} \operatorname{sen} 2nt$  con  $\sum n^2 \tilde{D}_{2n}^2 < \infty$  (es decir  $f$  está en  $H^1$ ) y sea  $x(t) = 2 \sum_1^{\infty} \frac{\tilde{B}_{2n}}{2n} \operatorname{sen} 2nt$ . Entonces la ecuación  $(\alpha_0 - 2 \cos 2t)x(t) = f(t)$  corresponde a  $K\tilde{B} = \tilde{D}$ . Queda claro que  $x(t) = \frac{f(t)}{\alpha_0 - 2 \cos 2t}$  estará en  $H_{per}^1[0, \pi]$ , y será impar, con tal que no tenga singularidad en  $t_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Arcos} \frac{\alpha_0}{2}$ , por ejemplo si  $f$  tiene un cero doble en  $t_0$ . Tomando  $f(t) = \operatorname{sen} 2nt \operatorname{sen}^2(t-t_0) \operatorname{sen}^2(t+t_0)$ , la cual es una función impar,  $\pi$ -periódica y con un cero doble en  $t_0$  y variando  $n$  de 1 a

$\infty$  tendremos que el rango de  $K$  es denso. Por lo tanto hay un número infinito de valores propios.

## 2.8 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO

En esta sección daremos el comportamiento asintótico de las curvas de transición cuando  $\beta \rightarrow \infty$ . Para esto seguiremos, en parte, [M-S] pg 134-139.

Sea  $x(t)$  una solución  $2\pi$ -periódica de

$$x'' + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x = 0.$$

Entonces  $\alpha = \alpha(\beta) = \alpha_n(\beta)$  si  $x(t)$  es par y la curva de transición sale de  $n^2$  y  $\alpha = b_n(\beta)$  si  $x(t)$  es impar. En el primer caso sabemos que  $x(t)$  tiene  $n$  ceros en  $(0, \pi)$ , mientras que en el segundo caso  $x(t)$  tiene  $n - 1$  ceros en ese intervalo abierto.

Sea  $\tau = 2\beta^{1/4}(t - \pi/2)$  y  $y(\tau) = x(t)$ , entonces

$$\begin{aligned} x'' + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x &= x'' + (\alpha + 2\beta - 4\beta \cos^2 t)x \\ &= 4\beta^{1/2} \left( \frac{d^2 y}{d\tau^2} + (\alpha + 2\beta - 4\beta \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2\beta^{1/4}}) y \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $y$  es una solución periódica, con periodo  $4\pi\beta^{1/4}$ , de la ecuación

$$y'' + (A - \beta^{1/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2\beta^{1/4}})y = 0,$$

$$\text{con } A = \frac{\alpha + 2\beta}{4\beta^{1/2}}.$$

Recordemos que  $A \geq 0$ , ya que  $\int_0^T y'' y d\tau = - \int_0^T y'^2 d\tau$ , con  $T = 4\pi\beta^{1/4}$ , sería positiva si  $A < 0$ , y por lo tanto  $y \equiv 0$ .

Además de  $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$  y  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta^{1/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\tau^2}{2\beta^{1/4}} = \frac{\tau^2}{4}$ , vamos a comparar  $y$  con las soluciones de la ecuación

$$D'' + \left( B - \frac{\tau^2}{4} \right) D = 0.$$

**Lema de comparación 2.6:** Si  $y_i$  es la solución de  $y_i'' + p_i(t)y_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , entonces si  $p_2 \geq p_1$ , entre dos ceros de  $y_1(t)$  hay por lo menos un cero de  $y_2(t)$ .

**Dem:** (Coddington y Levinson pg 208)

Sean  $t_1$  y  $t_2$  dos ceros consecutivos de  $y_1(t)$ . Supongamos que  $y_2(t) \neq 0$  en  $(t_1, t_2)$ . Multiplicando por  $-1$ , en caso de necesidad, podemos suponer que  $y_1$  y  $y_2$  son positivos en  $(t_1, t_2)$ . Además  $y_1'(t_1) > 0$  y  $y_1'(t_2) < 0$  (no pueden ser cero por la unicidad del problema de valores iniciales en  $t_1$  o en  $t_2$ ).

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (y_1'' y_1 - y_2'' y_1) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (p_2 - p_1) y_1 y_2 dt > 0 \\ &= (y_1' y_2 - y_2' y_1) \Big|_{t_1}^{t_2} < 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. ■

Necesitamos ahora algunas propiedades de las soluciones de la ecuación  $D'' + \left(B - \frac{t^2}{4}\right) D = 0$ , funciones cilíndricas parabólicas.

**Propiedades:**<sup>[Ab]</sup>

- 1) Si  $D(t)$  es solución también lo es  $D(-t)$ .
- 2) Si  $D(t)$  tiene un cero para  $t \geq 2\sqrt{\beta}$  entonces  $D(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y sólo hay un cero en ese intervalo.
- 3)  $D(t)$  es acotado sólo si  $B = m + \frac{1}{2}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  y  $D(t) = D_n(t) = (-1)^n e^{t^2/4} \left(e^{-t^2/2}\right)^{(n)}$ , es una función de Hermite.
- 4)  $D_n(t) = e^{-t^2/4} H_n(t)$ , donde  $H_n$  es un polinomio de Hermite de grado  $n$ , con  $n$  ceros.  $H_n$  es par si  $n$  es par e impar si  $n$  es impar.
- 5)  $H_{n+1} = tH_n - H_n'$ ,  $D_{n+1} = tD_n - nD_{n-1}$ .
- 6)  $\{D_n\}$  es una base ortogonal de  $L^2(\mathbf{R})$ , y  $\int_{-\infty}^{\infty} D_n^2 dt = n! \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

**Dem:** (1) es evidente. Si  $D(t_0) = 0$ , con  $t_0 \geq 2\sqrt{B}$ , entonces  $D'(t_0) \neq 0$  (unicidad del problema de valores iniciales),  $D''(t)$  tiene el signo de  $D(t)$  para  $t > t_0$ , positivo si  $D'(t_0) > 0$ , negativo si  $D'(t_0) < 0$ . Por lo tanto, en el primer caso  $D'(t)$  es creciente y positivo, en el segundo caso  $D'(t)$  es decreciente y negativo. En ambos casos  $|D(t)|$  es decreciente y convexo para  $t > t_0$ .

Como

$$D_{n+1} = (-1)^{n+1} e^{t^2/4} \left( -te^{-t^2/2} \right)^{(n)} = (-1)^n e^{t^2/4} \left( t \left( e^{-t^2/2} \right)^{(n)} + n \left( e^{-t^2/2} \right)^{(n-1)} \right) \\ = tD_n - nD_{n-1},$$

se tiene

$H_{n+1} = tH_n - nH_{n-1}$ , con  $H_0 = 1$ . Por lo tanto, por inducción se puede probar que  $H_n$  tiene grado  $n$ , con el coeficiente de  $t^n$  igual a 1, y tiene la paridad de  $n$ .

De la relación inmediata  $H_{n+1} = tH_n - H'_n$ , se ve que entre dos ceros de  $H_n$ , hay por lo menos un cero de  $H_{n+1}$ . Además si  $a_n^n$  es el último cero de  $H_n$  (con  $H'_n(a_n^n) > 0$  ya que el término dominante de  $H_n$  es  $t^n$ ), entonces de  $H_{n+1}(a_n^n) < 0$  y  $H_{n+1}$ , con término dominante  $t^{n+1}$ , se tiene un cero de  $H_{n+1}$  a la derecha de  $a_n^n$ . Dado que  $H_{n+1}$  es par o impar, esto genera otro cero para  $t < 0$  y una cuenta final de  $n+1$  ceros (otro argumento por inducción).

Sea  $H(t) = e^{t^2/4} D(t)$ , entonces  $H' = \frac{t}{2}H + e^{t^2/4} D'$ ,  $H'' = \frac{H}{2} + \frac{t^2}{4}H + t(H' - \frac{t}{2}H) + e^{t^2/4} D''$ , por lo tanto

$$H'' - tH' + \left( B - \frac{1}{2} \right) H = 0.$$

Si buscamos soluciones en series  $H(t) = \sum a_n t^n$ , se tiene

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = \left( n - B + \frac{1}{2} \right) a_n$$

con  $a_0$  y  $a_1$  arbitrarios. La solución con  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$  genera una solución par, la cual será un polinomio si  $B = n + \frac{1}{2}$  con  $n$  par, mientras que la solución con  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  genera una solución impar, la cual será un polinomio si  $B = n + \frac{1}{2}$  con  $n$  impar. Notemos que como  $\frac{a_{n+2}}{a_n} \rightarrow 0$ , si  $n \rightarrow \infty$ , la serie tiene radio de convergencia infinito.

Si  $B$  no es de la forma  $n + \frac{1}{2}$ , sea  $n_0$  el primer entero con  $n_0 - B + \frac{1}{2} > 0$ . Entonces  $a_n$  tiene el signo de  $a_{n_0}$  para  $n \geq n_0$ . Entonces

$$a_{2n} = a_0 \frac{2^n}{(2n)!} \left( n - \frac{B}{2} - \frac{3}{4} \right) \left( n - 1 - \frac{B}{2} - \frac{5}{4} \right) \cdots \left( n_0 - \frac{B}{2} + \frac{1}{4} \right) A_0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{a_{2n}}{a_0 A_0} \geq \frac{2^n n!}{(2n)!} \frac{1}{(n_0 - 1)!} = \frac{1}{(n_0 - 1)! \cdot 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n - 1)} \geq \frac{1}{(n_0 - 1)! 2^n n!},$$

es decir

$$\left( H(t) - \sum_0^{n_0-1} a_n t^n \right) \frac{(n_0 - 1)!}{a_0 A_0} \geq e^{t^2/2} - \sum_0^{n_0-1} \frac{t^{2n}}{2^n n!},$$

y  $H(t)$  crece como  $e^{t^2/2}$ . Lo mismo sucede con la serie de los impares. Esto prueba (3).

Finalmente  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( D_n'' + \left( \frac{1}{2} - \frac{r^2}{4} \right) D_n \right) D_m - \int_{-\infty}^{\infty} \left( D_m'' + \left( \frac{1}{2} - \frac{r^2}{4} \right) D_m \right) D_n = 0$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} (m - n) D_n D_m dt$ , por lo tanto  $D_n$  es ortogonal a  $D_m$ .

Además,  $\int_{-\infty}^{\infty} D_n^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4} H_n(t) D_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n H_n(t) \left( e^{-t^2/2} \right)^{(n)} dt =$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)} e^{-t^2/2} dt = n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$ , integrando por partes y usando el hecho que  $H_n^{(n)} = n!$ .

Que  $D_n$  sea una base de  $L^2(\mathbf{R})$  se puede ver en Akhiezer-Glazman pg 25. ■

Regresando al problema original, tenemos que  $y(\tau)$  tiene  $n_0$  ceros en  $|\tau| < \pi\beta^{1/4}$  (correspondiente a  $0 < t < \pi$ ) si  $x(t)$  es solución para  $\alpha = a_{n_0}(\beta)$  o  $\alpha = b_{n_0+1}(\beta)$ .

Si  $A \geq n + \frac{1}{2}$ , entonces  $A - \beta^{1/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2\beta^{1/4}} > A - \frac{r^2}{4} \geq n + \frac{1}{2} - \frac{r^2}{4}$ , y por el lema de comparación  $y(\tau)$  tiene, en el intervalo  $|\tau| \leq 2\sqrt{n + \frac{1}{2}}$ , al menos  $n - 1$  ceros. Por lo tanto, tomando  $n \geq n_0 + 2$  y  $\pi\beta^{1/4} \geq 2\sqrt{n + \frac{1}{2}}$ , tenemos una contradicción, al menos que en ese caso  $A < n_0 + \frac{5}{2}$ . Por lo tanto si  $\pi\beta^{1/4} \geq 2\sqrt{n_0 + \frac{5}{2}}$ , entonces  $0 \leq \frac{\alpha + 2\beta}{4\beta^{1/2}} \leq n_0 + \frac{5}{2}$ .

Tomemos ahora  $\beta_n \rightarrow \infty$ , con  $A(\beta_n) \rightarrow A_0$ . Sea  $m_0$  tal que  $m_0 - \frac{1}{2} < A_0 \leq m_0 + \frac{1}{2}$ , y  $D_0(\tau)$  la solución de la ecuación  $D'' + \left( A_0 - \frac{r^2}{4} \right) D = 0$ , con  $D_0(0) = y(0)$ ,  $D_0'(0) = y'(0)$ .

Sea  $M = \max |D_0(\tau)|$  sobre el intervalo  $|\tau| \leq 4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}$ . Ahora, si  $A_0 < m_0 + \frac{1}{2}$  entonces vimos que  $D_0(\tau) \rightarrow \infty$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$ . Sea entonces  $R$  con  $4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}} < R$  y con  $M_0 = \max |D_0(\tau)|$ , sobre el intervalo  $-R \leq \tau \leq 0$ , tal que  $M_0 \geq 2M$ , (recordemos que  $|D(\tau)|$  y  $|D(-\tau)|$  tienden a  $\infty$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$ ).

Ahora, para  $\beta_n$  grande,  $A - \beta^{1/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2\beta^{1/4}} < 0$  en los dos intervalos definidos por  $4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}} < |\tau| < \pi\beta^{1/4}$ , ya que  $A$  está cerca de  $A_0$  y esa cantidad es positiva si y sólo si  $|\tau| \leq 2\beta^{1/4} \arcsen \frac{\sqrt{A}}{\beta^{1/4}} = 2\sqrt{A} + O(\beta^{-1/2})$ . Por lo tanto en esos intervalos  $y''$  tiene el signo de  $y$ .



Si tomamos el caso de  $x(t)$  par, entonces  $x'(0) = 0$  y  $y'(-\pi\beta^{1/4}) = 0$ . multiplicando por  $-1$  si es necesario, podemos suponer que  $y(-\pi\beta^{1/4}) > 0$ . Por lo tanto,  $y'' > 0$  inmediatamente a la derecha de  $-\pi\beta^{1/4}$  y  $y'$  es creciente y positivo ahí, es decir,  $y$  será creciente (y positivo) en el intervalo  $(-\pi\beta^{1/4}, -4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}})$ . Como  $x'(t)$  es  $2\pi$ -periódica e impar, se tiene  $y'(\pi\beta^{1/4}) = 0$ , y por lo tanto,  $|y(\tau)|$  es decreciente en  $(4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}, \pi\beta^{1/4})$ .

En el caso de  $x(t)$  impar, entonces  $x(0) = 0$  y podemos suponer  $x'(0) > 0$ . Por lo tanto  $y(-\pi\beta^{1/4}) = 0$ ,  $y'(-\pi\beta^{1/4}) > 0$ ,  $y''$  es positivo inmediatamente a la derecha de  $-\pi\beta^{1/4}$  y, por el mismo argumento,  $y(\tau)$  es creciente en el intervalo  $-\pi\beta^{1/4} < \tau < -4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}$ . Como  $x(t)$  es  $2\pi$ -periódica impar, tendremos  $y(\pi\beta^{1/4}) = 0$  y  $|y(\tau)|$  es decreciente en  $(4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}, \pi\beta^{1/4})$ .

Ahora bien, para  $\beta_n$  grande, por la continuidad con respecto a los coeficientes, se debe tener que  $y(\tau) \approx D_0(\tau)$  en cualquier intervalo compacto, en particular en  $|\tau| \leq R$ . En particular  $\max |y(\tau)| \approx M$  en  $|\tau| \leq 4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}$  y  $\max |y(\tau)| \approx M_0$  en  $-R \leq \tau \leq 0$ . Pero esto no es cierto ya que  $|y(\tau)|$  es creciente en  $-R \leq \tau \leq -4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}$ . Por lo tanto,  $A_0 = m_0 + \frac{1}{2}$  y  $D_0 = D_{m_0}$ .

Otra vez, por la continuidad con respecto a los coeficientes,  $y(\tau)$  debe tener  $m_0$  ceros en  $|\tau| \leq 4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}$ .

Ya vimos que  $|y(\tau)|$  es monótona creciente y sin ceros en  $(-\pi\beta^{1/4}, -4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}})$  y monótona decreciente y sin ceros en  $(4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}, \pi\beta^{1/4})$ . Dado que  $y(\tau)$  tiene  $n_0$  ceros en  $|\tau| < \pi\beta^{1/4}$ , se tiene  $n_0 = m_0$ . (Nótese que en lugar de  $4\sqrt{m_0 + \frac{1}{2}}$  se hubiera podido tomar  $2\sqrt{n_0 + \frac{1}{2} + \epsilon}$ ).

**Teorema 2.10:** Las curvas de transición  $\alpha = a_{n_0}(\beta)$  y  $\alpha = b_{n_0+1}(\beta)$  tienen las expresiones  $\alpha = -2\beta + (2n_0 + 1)\sqrt{\beta} + O(1)$ . La solución  $x(t)$  correspondiente tiene  $n_0$  ceros en el intervalo  $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{n_0 + \frac{1}{2}}}{\beta^{1/4}} < t < \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{n_0 + \frac{1}{2}}}{\beta^{1/4}}$ , otros  $n_0$  ceros en el intervalo simétrico y centrado en  $-\frac{\pi}{2}$ . En el caso de  $x(t)$  impar, hay además un cero en el origen y otros en  $\pm\pi$ . En el complemento de esos intervalos  $|x(t)|$  es monótona, sin ceros.

Sea ahora  $\phi(\tau)$  una función  $C_0^\infty$  con  $\phi(\tau) = 1$  si  $|\tau| \leq \pi\beta^{1/4}$ ,  $\phi(\tau) = 0$  si  $|\tau| \geq \pi\beta^{1/4} + 1$ . Sea  $z(\tau) = \phi(\tau)y(\tau)$ . Entonces  $z$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R})$  y por lo tanto  $z = \sum_0^\infty a_m D_m$ .

Por otra parte,

$$z'' + \left( n_0 + \frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{4} \right) z = \phi'' y + 2\phi' y' + \left[ n_0 + \frac{1}{2} - A - \left( \frac{\tau^2}{4} - \beta^{1/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2\beta^{1/4}} \right) \right] z.$$

Por lo tanto,

$$(n_0 - m) a_m \| D_m \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi'' y + 2\phi' y') D_m + \left( n_0 + \frac{1}{2} - A - \left( \frac{\tau^2}{4} - \beta^{1/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2\beta^{1/4}} \right) \right) z D_m dt$$

$$\text{donde } \| D_m \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} D_m^2(\tau) dt.$$

Ahora  $\phi'$  y  $\phi''$  son diferentes de 0 sólo en dos intervalos de longitud 1, donde  $y$  es acotada (y es periódica por el resultado anterior) y  $D_m$  decrece como  $e^{-\tau/4}$ . Por lo tanto

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\phi'' y + 2\phi' y') D_m d\tau \right| \leq C_m e^{-\frac{\pi\beta^{1/2}}{4}}.$$

$$\text{Además, } 0 \leq \frac{\tau^2}{4} - \beta^{1/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2\beta^{1/4}} = \frac{\tau^2}{4} - \frac{\beta^{1/2}}{2} \left( 1 - \cos \frac{\tau}{2\beta^{1/4}} \right) = \frac{\tau^4}{2 \times 4! \beta^{1/2}} - \frac{\tau^6}{2 \times 6! \beta} + \dots \leq \frac{\tau^4}{8 \times 3! \beta^{1/2}}, \text{ (por ser una serie alterna).}$$

Como  $z \equiv 0$  fuera del intervalo  $|\tau| \leq \pi\beta^{1/4} + 1$  y  $n_0 + \frac{1}{2} - A = O(\beta^{-1/2})$ , tenemos

$$(n_0 - m) a_m \| D_m \|^2 = a_m \| D_m \|^2 \left( n_0 + \frac{1}{2} - A \right) + C_m e^{-\pi\beta^{1/2}/4} + O(\beta^{-1/4}),$$

por lo tanto, para  $m \neq 0$ ,  $a_m = O(\beta^{-1/4})$ .

Ahora, usando  $\tau D_m = D_{m+1} + m D_{m-1}$  y  $\tau^2 D_m = \tau(\tau D_m) = D_{m+2} + (2m+1)D_m + m(m-1)D_{m-2}$ , se ve que

$$\begin{aligned} \tau^4 D_m &= D_{m+4} + 2(2m+3)D_{m+2} + 3(2m^2+2m+1)D_m + 2m(2m^2-3m+1)D_{m-2} \\ &\quad + m(m-1)(m-2)(m-3)D_{m-4} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\tau^2}{4} - \beta^{1/2} \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2\beta^{1/4}} \right) z D_m d\tau = \frac{1}{2 \times 4! \beta^{1/2}} (a_{m+4} \| D_{m+4} \|^2 + a_{m+2} 2(2m+3) \| D_{m+2} \|^2 + a_m 3(2m^2+2m+1) \| D_m \|^2 + a_{m-2} 2m(2m^2-3m+1) \| D_{m-2} \|^2 + a_{m-4} m(m-1)(m-2)(m-3) \| D_{m-4} \|^2) + O(\beta^{-3/4})$$

esto implica que  $a_m = O(\beta^{-3/4})$ , para  $m \neq n_0, n_0 \pm 2, n_0 \pm 4$  y  $a_{n_0 \pm 2}, a_{n_0 \pm 4}$  son del orden de  $\beta^{-1/2}$ .

En efecto de las relaciones,

$$\left( n_0 - m - \left( n_0 + \frac{1}{2} - A \right) \right) a_m \| D_m \|^2 = - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_2^N \frac{(-1)^n}{2(2n)! \beta^{(n-1)/2}} \tau^{2n} z D_m d\tau + O(\beta^{-\frac{N}{2}+1})$$

tomando  $N = 2$ , se tiene

$$4a_{n_0-4} \| D_{n_0-4} \|^2 = - \frac{1}{2 \times 4! \beta^{1/2}} a_{n_0} \| D_{n_0} \|^2 + O(\beta^{-1})$$

$$2a_{n_0-2} \| D_{n_0-2} \|^2 = - \frac{1}{2 \times 4! \beta^{1/2}} 2(2n_0-1) a_{n_0} \| D_{n_0} \|^2 + O(\beta^{-1})$$

$$A - \left( n_0 + \frac{1}{2} \right) = - \frac{3((2n_0+1)^2+1)}{4 \times 4! \beta^{1/2}} + O(\beta^{-1}) = - \frac{(q^2+1)}{4 \times 8 \beta^{1/2}} + O(\beta^{-1})$$

$$-2a_{n_0+2} \| D_{n_0+2} \|^2 = - \frac{2(n_0+1)(n_0+2)(2n_0+3)}{2 \times 4! \beta^{1/2}} a_{n_0} \| D_{n_0} \|^2 + O(\beta^{-1})$$

$$-4a_{n_0+4} \| D_{n_0+4} \|^2 = - \frac{(n_0+1)(n_0+2)(n_0+3)(n_0+4)}{2 \times 4! \beta^{1/2}} a_{n_0} \| D_{n_0} \|^2 + O(\beta^{-1})$$

Para  $N = 3$  y usando la información sobre  $a_{n_0 \pm 2}, a_{n_0 \pm 4}$ , se obtiene

$$A - (n_0 + \frac{1}{2}) = -\frac{(q^2 + 1)}{4 \times 8\beta^{1/2}} - \frac{q}{4 \times 2^7\beta}(q^2 + 3) + O(\beta^{-1}).$$

Hemos probado la primera parte del siguiente resultado

**Teorema 2.11:**

a) Las soluciones correspondientes a  $a_{n_0}$  y  $b_{n_0+1}$  son múltiplos de

$$D_{n_0}(\tau) - \frac{1}{8 \times 4!\beta^{1/2}} \left( \frac{n_0!}{(n_0 - 4)!} D_{n_0-4}(\tau) + 4(n_0 - 1)n_0(2n_0 - 1)D_{n_0-2}(\tau) \right. \\ \left. - 4(2n_0 + 3)D_{n_0+2}(\tau) - D_{n_0+4}(\tau) \right) + O(\beta^{-1})$$

b)  $a_{n_0}(\beta)$  y  $b_{n_0+1}(\beta)$  tienen la misma expresión, con  $q = 2n_0 + 1$

$$-2\beta + 2q\beta^{1/2} - \frac{1}{8}(q^2 + 1) - \frac{q(q^2 + 3)}{2^7\beta^{1/2}} + O(\beta^{-1})$$

c)  $a_{n_0}(\beta) - b_{n_0+1}(\beta) = O(\beta^{-N}), \forall N$ .

Falta sólo probar (c): sea  $z(\tau)$  asociada a  $a_{n_0}$  y  $\tilde{z}(\tau)$  asociada a  $b_{n_0+1}$ , con  $z(\tau) = a(D_{n_0}(\tau) \dots)$ ,  $\tilde{z}(\tau) = \tilde{a}(D_{n_0}(\tau) \dots)$  con la expansión de (a) en el paréntesis. Nótese que en la expansión que se hace para obtener  $a_m$ , se tendrá siempre  $a_m = a_{n_0}b_m$ , donde  $b_m$  es el mismo para las dos funciones. Por lo tanto, para  $u = \tilde{a}z - a\tilde{z} = \phi v$ , se tiene  $u = O(\beta^{-N})$  y

$$u'' + (n_0 + \frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{4})u = \phi''v + 2\phi'v' + (n_0 + \frac{1}{2} - A - (\frac{\tau^2}{4} - \beta^{1/2}2\text{sen}^2\frac{\tau}{2\beta^{1/4}}))u + (A - \tilde{A})a\tilde{z}.$$

Como todos los términos en esta expresión, excepto el último con  $a\tilde{a}D_{n_0}$ , son de orden  $\beta^{-N}$ , esto implica que  $A - \tilde{A} = \frac{a_{n_0} - b_{n_0+1}}{4\beta^{1/2}} = O(\beta^{-N})$ .

Nota: En [M-S], se da la expresión  $b$  sin prueba, la cual se reproduce en el [Ab] pg 726, la expansión  $a$  dada, sin prueba, en el [Ab] pg 742, no corresponde en todos sus términos a la presente. Finalmente en [M-S] se da sin prueba la expresión

$$b_{n+1} - a_n = \frac{2^{4n+5}}{n!} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \beta^{\frac{2n+3}{4}} e^{-4\beta^{1/2}} \left(1 - \frac{6n^2 + 4n + 7}{32\beta^{1/2}}\right).$$

---

# 3

## EXPANSIÓN NUMÉRICA DE LAS CURVAS DE TRANSICIÓN

---

<< La Historia ha probado la capacidad modeladora de las matemáticas y éstas me acogieron sin más ni más >>.

En este capítulo se muestra la forma de calcular las curvas de transición y las soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu, se hace además una comparación entre los métodos asintóticos y los métodos numéricos siguiendo la siguiente metodología: 1) Interpolación numérica de la ecuación diferencial. 2) Determinación de las soluciones acotadas y no acotadas mediante el teorema de Floquet. 3) Expansión de las curvas de transición como la frontera de las soluciones acotadas y no acotadas. 4) Soluciones acotadas: cálculo de las soluciones periódicas de la ecuación diferencial. 5) Comparación de las curvas de período fijo calculadas numéricamente contra las expansiones asintóticas. 6) Método de Poincaré-Linstedt para calcular las curvas de periodo fijo. Comparación con las curvas calculadas numéricamente.

### 3.1 HERRAMIENTAS NUMÉRICAS PARA CALCULAR LAS CURVAS DE TRANSICIÓN

En esta sección damos una metodología para diferenciar numéricamente soluciones acotadas y no acotadas apoyados en la teoría de Floquet. El propósito es determinar si una solución a la ecuación diferencial, dados los valores de los parámetros,  $(\alpha, \beta)$ , va a ser acotada o no acotada en el plano fase. En la base de este criterio de diferenciación podemos desarrollar un procedimiento para la construcción de las curvas de transición. Sabemos de la teoría de Floquet, ecuación (1.20), que la solución a la ecuación de Mathieu tiene la forma

$$\Phi(t) = P(t)e^{Rt}$$

donde  $P(t)$  es una matriz  $\pi$ -periódica  $2 \times 2$  y  $R$  una matriz constante  $2 \times 2$ . Si suponemos que dicha solución es inestable tendremos que un exponente característico tiene parte real positiva (secc 2.1), y por tanto, para *tiempos grandes* la solución de la ecuación de Mathieu se puede escribir de manera aproximada como:

$$\Phi(t) = Q(t)e^{\sigma t} + O(e^{-\sigma t}) \tag{3.1}$$

donde  $Q(t)$  es una matriz de periodo  $\pi$  o  $2\pi$  y  $\sigma$  es un número real mayor que cero ( ver

la sección 2.1). De ésta última ecuación se tiene que al transcurrir un periodo de tiempo igual a  $2\pi$ :

$$\begin{aligned}\Phi(t + 2\pi) &= Q(t + 2\pi)e^{\sigma(t+2\pi)} \\ &= Q(t)e^{\sigma t}e^{2\pi\sigma} \\ &= \Phi(t)e^{2\pi\sigma}\end{aligned}$$

de donde es directo ver que

$$|\Phi(t + 2\pi)| = C|\Phi(t)| > |\Phi(t)|, \quad (3.2)$$

ya que  $C = e^{2\pi\sigma} > 1$ , la cual es una propiedad importante de las soluciones inestables para tiempos grandes. En general si tenemos que la matriz  $A(t)$  es  $T$ -periódica en la ecuación diferencial, la desigualdad (3.2) se escribe como  $|\Phi(t + 2T)| > |\Phi(t)|$ .

Diremos pues, que el punto  $(\alpha, \beta)$  es *inestable* en el intervalo  $[a, b]$ , si la solución de la ecuación de Mathieu cumple para todo  $t$  con

$$|\Phi(t + 2\pi)| - |\Phi(t)| > 0 \quad (3.3)$$

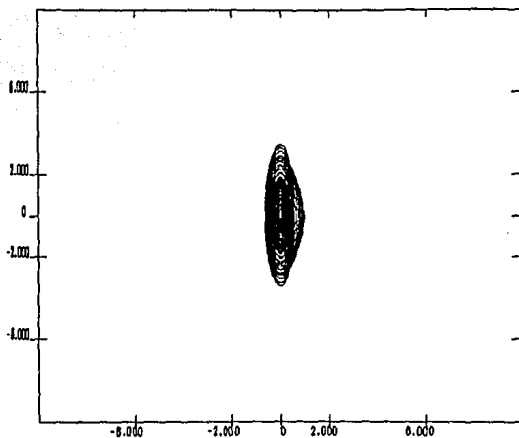
y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\Phi(t + 2\pi)|}{|\Phi(t)|} \rightarrow C. \quad (3.4)$$

La primera de estas condiciones no es más que (3.2) y la segunda asegura que después de transcurrido un periodo, el cociente tienda a una constante. Diremos también que el punto  $(\alpha, \beta)$  es *estable* en el intervalo  $[a, b]$ , si no es inestable en  $[a, b]$ . Ver Fig 3.1 y 3.2. Es evidente que debemos tomar en cuenta las limitaciones de cómputo, por lo tanto, la condición (3.3) se puede reducir a pedir que la sucesión

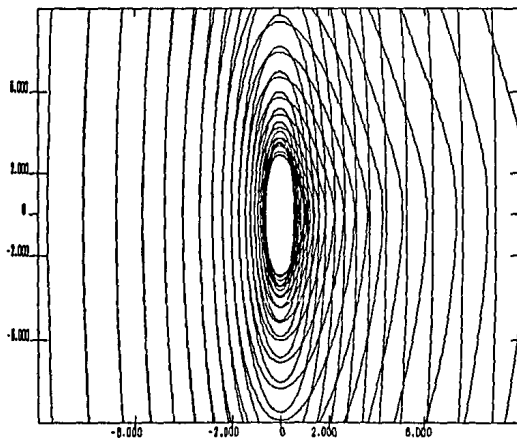
$$a_n = \left| \frac{|\Phi(t_n + 2\pi)|}{|\Phi(t_n)|} - \frac{|\Phi(t_{n-1} + 2\pi)|}{|\Phi(t_{n-1})|} \right|; \quad t_n = t_{n-1} + 2\pi, \quad (3.5)$$

sea decreciente y pequeña a partir de cierta  $N$ . Esto es así debido a que el efecto del otro exponente característico,  $-\sigma$ , de la ecuación 1.20, va desapareciendo a medida que  $t$  crece, ya que  $a_n \approx O(e^{-\sigma t_n})$ , y la aproximación (3.1) será cada vez mejor.



$$\alpha=20.0, \beta=8.8, t \in [0, 30\pi].$$

Fig 3.1



$$\alpha=20.0, \beta=8.9, t \in [0, 30\pi].$$

Fig 3.2

Otra propiedad importante de la ecuación de Mathieu es la "linealidad". Ésta es importante para que el comportamiento acotado o no acotado de la trayectoria en plano fase no dependa de la condición inicial que tomemos. Es decir, si para un punto  $(\alpha, \beta)$  y



una cierta condición inicial, la solución no es acotada, ésta seguirá siendo inestable para cualquier otra condición inicial (excepto si la condición inicial corresponde solamente a la parte de la solución que tiene el valor propio negativo, el cual es un conjunto de medida cero en el espacio fase).

Una vez que hemos establecido el criterio para determinar la estabilidad, describiremos como podemos utilizar dicho criterio para calcular la posición de las curvas de transición en el espacio de parámetros  $(\alpha, \beta)$ .

Supongamos que tenemos el plano dividido en dos regiones: una región tiene la propiedad de ser blanca y la otra región negra, y se nos presenta el problema de dibujar de manera aproximada la curva que divide estas dos regiones preguntando sólo si el punto es blanco o negro. Para resolver el problema supongamos que tenemos dos puntos cercanos, † colocados en regiones diferentes, un punto negro y un punto blanco, el *proceso de bipartición* que daremos consiste en ir tomando el punto medio contenido en la recta que une el punto blanco con el negro y luego, verificar de que color es el punto medio y se desecha el punto que tenga el mismo color que éste. Supongamos que el punto medio es blanco, entonces desechamos el primer punto blanco y repetimos el proceso con el nuevo punto blanco y el punto negro viejo. Hacemos este proceso hasta que la distancia entre los puntos sea menor que algún número positivo previamente determinado, el error. Haciendo lo mismo con varios puntos, podemos obtener un esquema de la curva separatriz. Además si suponemos que tal curva es diferenciable podemos continuarla en la dirección tangente de ésta, lo que nos dará una manera de ir avanzando y ahorrar tiempo en encontrar puntos cercanos de regiones diferentes. En la Fig 3.3 se muestra esto.

---

† Haremos la suposición adicional que la recta que une estos dos puntos corta sólo una vez la curva de separatriz de las dos regiones.

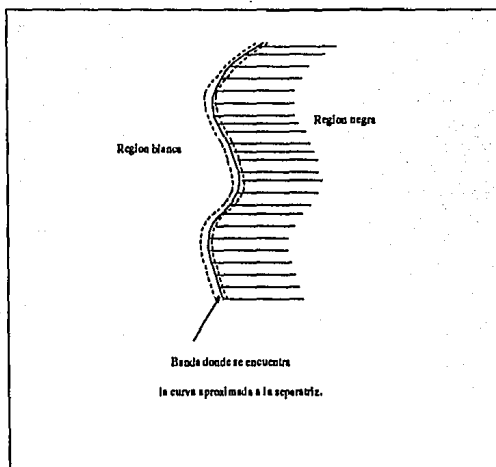


Fig 3.3

Por consiguiente lo que tendremos en el plano  $(\alpha, \beta)$  de la ecuación de Mathieu es simplemente dos colores, el estable y el inestable, por lo tanto, podemos dar el siguiente algoritmo de construcción:

*Algoritmo de construcción para las curvas de transición de la ecuación de Mathieu:*

1. Dados dos puntos  $P_0, P_1$  previamente determinados sobre la curva de transición, se traza la recta que pasa por estos, sea ésta  $L$ .
2. Nos movemos sobre la recta  $L$  una distancia  $d$  a partir de  $P_1$ . Sea este nuevo punto  $Q_1$ .
3. Determinamos la estabilidad de  $Q_1$ , supongamos para nuestro propósito que  $Q_1$  es inestable, ver Fig 3.4.
4. Trazamos la recta que pase por  $Q_1$  y que sea ortogonal a  $L$ , llamemos a ésta  $L'$ .
5. Nos movemos sobre  $L'$  a ambos lados de  $Q_1$  en pasos de  $\eta$  hasta encontrar un punto que sea estable, denotemos a éste por  $Q_2$ .
6. Hacemos un proceso de bipartición hasta que la distancia entre la región estable e inestable sea menor que algún número determinado (el error) y denotamos al punto medio por  $P_2$ .

7. Hacemos la asignación  $P_2 \rightarrow P_1$ ,  $P_1 \rightarrow P_0$  y volvemos a comenzar el algoritmo. Ver Fig 3.4.

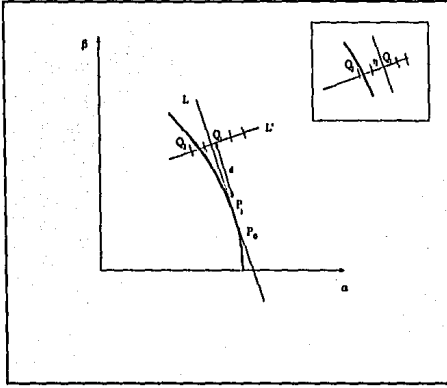


Fig 3.4

### 3.2 HERRAMIENTAS NUMÉRICAS PARA CALCULAR LAS CURVAS CON PERIODO FIJO

Esta sección, al igual que en la anterior, tiene como propósito el dar una metodología para la construcción de curvas con periodo fijo apoyada en la teoría de Floquet, sólo que aquí no podemos usar el método de los colores porque estaremos siempre en la región estable, por lo que tendremos que echar mano de otra propiedad de la ecuación de Mathieu, la *continuidad de la solución sobre la variación en los parámetros.*<sup>[Pe]</sup>

Es facil ver que la ecuación de Mathieu para  $\beta = 0$  se transforma en el oscilador armónico

$$\ddot{x} + \alpha x = 0, \tag{3.6}$$

y que con las condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  tiene por solución †

---

† Al igual que en la sección anterior, la linealidad de la ecuación y la continuidad de las funciones hacen que las propiedades del plano fase no dependan de las condiciones iniciales.

$$x(t) = \cos \sqrt{\alpha} t. \quad (3.7)$$

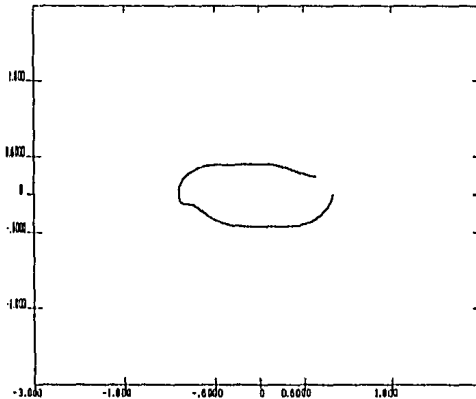
Esta función tiene periodo  $T = p\pi$  si se cumple que

$$p\pi\sqrt{\alpha} = 2\pi N, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

o lo que es lo mismo

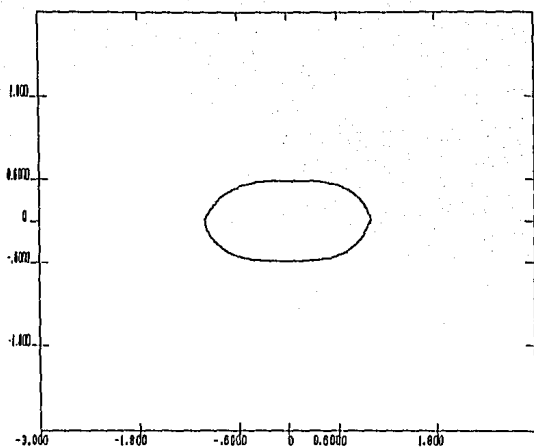
$$\alpha = 4 \frac{N^2}{p^2}. \quad (3.8)$$

Dado que el período es una función de los parámetros,  $T = T(\alpha, \beta)$ , y que las soluciones de la ecuación de Mathieu son continuas ante la variación en los parámetros, esperamos que al cambiar un poco éstos, la forma y propiedades de la solución cambien también poco, en particular el período. De esta forma, si la solución se cierra al tiempo  $T$ , al variar el valor de  $\alpha$  y  $\beta$  un poco veremos que, en general, la solución ya no se cierra al tiempo  $T$ , pues el punto final ahora se encuentra alejado cierta distancia del punto de partida. Veamos en forma gráfica lo que queremos decir con esto, si tomamos el punto  $(\alpha, \beta) = (1/4, 0)$ , tenemos el oscilador armónico descrito arriba, el cual tiene periodo  $T = 4\pi$ . Por lo tanto esperamos encontrar en una vecindad de este punto una curva que nos de soluciones con este periodo. En las siguientes figuras mostramos los planos fases de tres puntos vecinos a  $(\alpha, \beta) = (1/4, 0)$ .



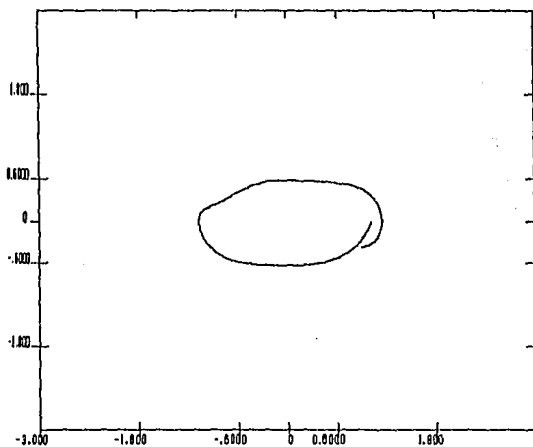
$$\alpha=0.20, \beta=0.1, t \in [0, 4\pi].$$

Fig 3.5



$$\alpha=0.25, \beta=0.1, t \in [0, 4\pi].$$

Fig 3.6



$$\alpha=0.30, \beta=0.1, t \in [0, 4\pi].$$

Fig 3.7

Como esperabamos, estas figuras muestran una forma similar, y lo mas importante, encontramos una curva que parece cerrar en  $T = 4\pi$ . Esto lo podemos aplicar para decidir si algùn punto pertenece o no a la curva del periodo que estamos buscando.

De las Fig 3.5-3.7 podemos establecer un método para determinar que tan alejada está la solución de ser periódica, de periodo  $T$ , en función del parámetro. Se puede ver que el punto final de las órbitas en el espacio fase describe una curva a medida que el parámetro  $\alpha$  varía cierta cantidad.

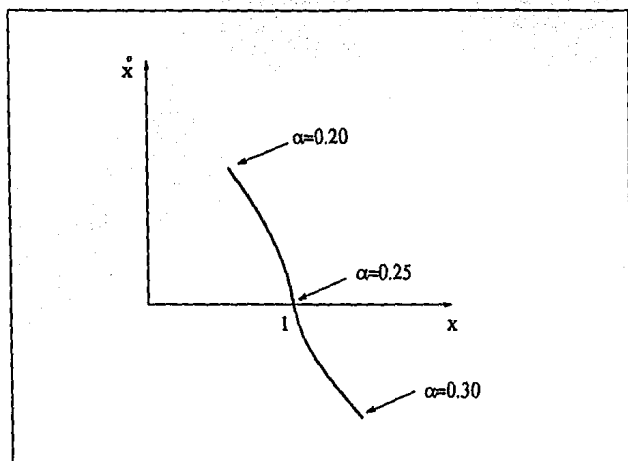


Fig 3.8

Esto nos permitirá tener una manera de localizar un punto en el espacio  $(\alpha, \beta)$  que nos represente una curva de periodo  $T$  en el espacio fase. Esto es porque las curvas que nos dan órbitas periódicas de periodo  $T$  existen para todo  $\beta$  y por lo tanto existe una  $\alpha_0$  para la cual la solución es de periodo  $T$  (ver teorema 2.5 de la sección 2.4).

Definamos una función  $d_\beta(\alpha)$ , *distancia con signo*, como la distancia del punto inicial  $(1,0)$  al punto final (transcurrido el tiempo  $T$ ), que además sea positiva si el punto final está arriba del eje  $x$  y negativa si está abajo. Esta función es continua y tiene siempre un cero. Podemos ahora dar un algoritmo para contruir la curva. Debemos notar que  $\beta$  la hemos fijado para tener dependencia sólo de  $\alpha$ .

*Algoritmo de construcción para las curvas de periodo fijo: (Método de la secante)*

Supongamos que  $(\alpha_i, \beta_i)$  nos da una curva  $T$ -periódica en el espacio fase.

1. Se incrementa la ordenada en una constante,  $\beta_{i+1} = \beta_i + h$ , con  $h$  constante.
2. Se evalua  $d_{\beta_{i+1}}(\alpha)$  en los puntos  $\alpha_i + n\delta$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$  (para propósitos prácticos  $\delta$  se toma aproximadamente  $h/2$ ) para determinar los puntos donde  $d_{\beta_{i+1}}(\alpha)$

cambia de signo, sean estos  $\alpha'_1$  y  $\alpha'_2$ .

3. Dado que los dos puntos  $(\alpha'_1, d_{\beta_{i+1}}(\alpha'_1))$  y  $(\alpha'_2, d_{\beta_{i+1}}(\alpha'_2))$  determinan una recta, entonces el cruce de ésta con el eje  $\alpha$  determina a su vez  $\alpha'_3$ , ver Fig 3.9.

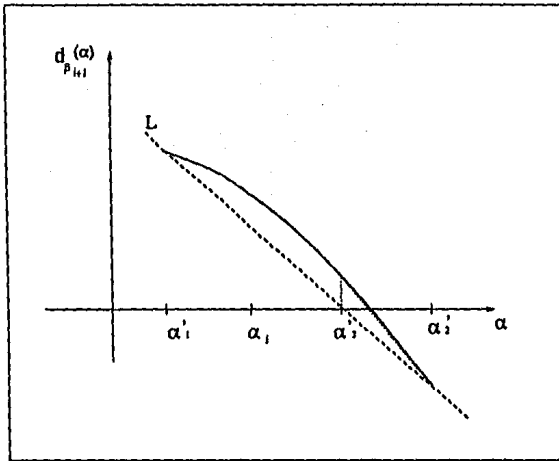


Fig 3.9

4. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $d_{\beta_{i+1}}(\alpha'_3) > 0$ , hacemos entonces la asignación  $\alpha'_3 \rightarrow \alpha_1$  y aplicamos nuevamente (3) tantas veces como se necesite para que  $|\alpha'_2 - \alpha'_1| < \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es el error.

5. Hacemos  $\alpha_{i+1} = \frac{\alpha'_2 + \alpha'_1}{2}$  y de esta manera hemos encontrado el punto  $(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$ . Ver Fig 3.10.

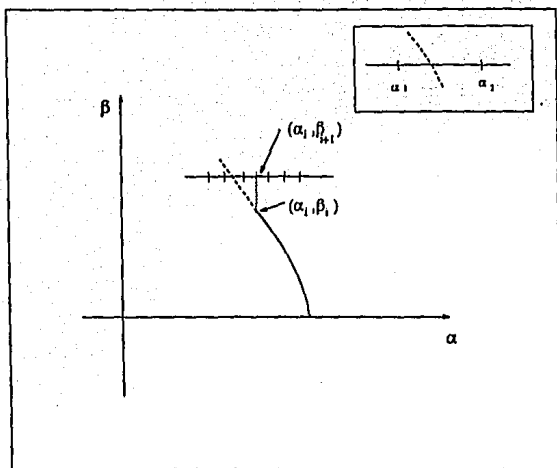


Fig 3.10

Es conveniente mencionar que si la pendiente de la curva es pequeña, este método tendrá evidentemente problemas. Esto se soluciona fácilmente tomando la recta ortogonal a la curva y parametrizando ésta con respecto a la longitud de arco,  $s$ . Así la curva está descrita en la forma paramétrica  $(\alpha(s), \beta(s))$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Dado que  $\alpha$  y  $\beta$  ahora dependen de la longitud de arco  $s$ , entonces la función  $d_\beta(\alpha)$  depende ahora de  $s$  y de  $\gamma$ ,  $d_s(\gamma)$ , donde  $\gamma$  es el parámetro que genera la recta ortogonal a la curva en el punto  $(\alpha(s), \beta(s))$ . Mostraremos ahora otro procedimiento para calcular la curva de las soluciones  $T$ -periódicas continuando ahora la longitud de arco  $s$ . Además aprovecharemos que dicha curva es diferenciable (ver teorema 2.5), para aplicar un método tipo Newton para acelerar la búsqueda del cero de la función  $d_s(\gamma)$ .

1) Dado  $(\alpha_i, \beta_i)$ , se determina  $(\alpha'_{i+1}, \beta'_{i+1})$  extendiendo linealmente una distancia  $h$  en la dirección tangente a la curva, de la siguiente forma:  $\alpha'_{i+1} = \alpha_i + h(\alpha_i - \alpha_{i-1})$  y  $\beta'_{i+1} = \beta_i + h(\beta_i - \beta_{i-1})$  donde  $h$  es el incremento sobre la longitud de arco  $s$ , tal que  $s_{i+1} = s_i + h$ .

2) La función  $d_\beta(\alpha)$  es compuesta con la función  $(\alpha(s, \gamma), \beta(s, \gamma))$  definidas de la siguiente forma:

$$\alpha = \alpha'_{i+1} - \gamma h(\beta_i - \beta_{i+1}), \quad \beta = \beta'_{i+1} + \gamma h(\alpha_i - \alpha_{i+1}),$$



donde  $\gamma$  es el desplazamiento en la dirección ortogonal de la curva.

3) La búsqueda del cero de la función  $d_s(\gamma)$  se realiza por el método de Newton:

$$\gamma'_{j+1} = \gamma'_j - \frac{d_{s_{j+1}}(\gamma'_j)}{\frac{\partial}{\partial \gamma} (d_{s_{j+1}}(\gamma'_j))}$$

comenzando con  $\gamma'_0 = 0$ .

4) Cuando  $|\gamma'_{j+1} - \gamma'_j| < \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es el error prefijado en el método de Newton, se hace la asignación  $\gamma'_{j+1} \rightarrow \gamma_{i+1}$ , y con este valor de  $\gamma$  se asignan los nuevos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\alpha_{i+1} = \alpha'_{j+1} - \gamma_{j+1} h(\beta_i - \beta_{i+1}), \beta_{i+1} = \beta'_{j+1} - \gamma_{j+1} h(\alpha_i - \alpha_{i+1}).$$

5) Se repite el proceso comenzando con (1) y asignando  $i + 1 \rightarrow i$ .

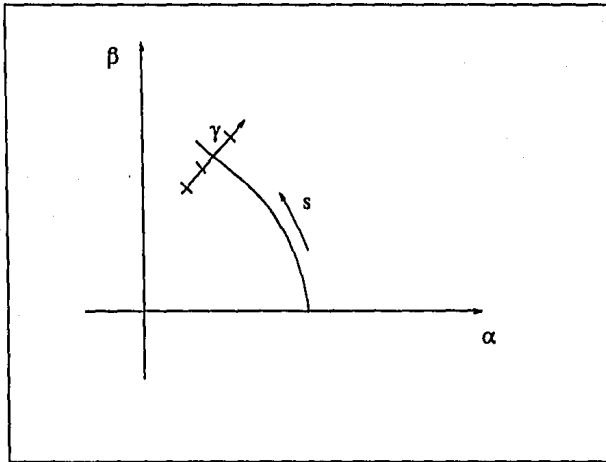


Fig 3.11

Debemos mencionar que cuando la función  $d_s(\gamma)$  no se conoce explícitamente, su derivada se puede calcular mediante un proceso de diferencias centradas, tomando  $\delta$  suficientemente pequeño:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (d_{s_i}(\gamma_i)) = \frac{d_{s_i}(\gamma_i + \delta) - d_{s_i}(\gamma_i - \delta)}{2\delta} + O(\delta^2)$$

Para determinar con una mayor precisión los siguientes valores iniciales de  $\alpha_{i+1}$  y  $\beta_{i+1}$  se puede utilizar la información de los puntos anteriores mediante una interpolación polinomial.

Sean  $(\alpha_i, \beta_i, s_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , un conjunto de  $n+1$  puntos  $(\alpha(s), \beta(s))$  que están sobre la curva de soluciones periódicas. Sobre estos puntos podemos pasar una curva polinomial de orden  $n$  utilizando la interpolación de Lagrange, en función de longitud de arco  $s$ :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{(s - s_j)}{(s_i - s_j)}, \quad \beta = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{(s - s_j)}{(s_i - s_j)}$$

así  $\alpha_{n+2}$  y  $\beta_{n+2}$  se pueden estimar asignando a los polinomios anteriores el valor de  $s_{n+2} = s_{n+1} + h$ .

### 3.3 INTEGRADORES NUMÉRICOS

Muchas de las ecuaciones diferenciales, aunque en apariencia sencillas son imposibles de resolver en términos de funciones conocidas. Un procedimiento común cuando nos encontramos con una de estas ecuaciones, es proponer alguna solución en serie, pero a veces ésta tampoco resuelve el problema, pues a tiempos largos el error de la serie crece. Así que tenemos que echar mano de algún integrador numérico. La ecuación de Mathieu no es la excepción: hemos podido calcular sólo algunos términos de la serie de Fourier. Y no hemos podido conocer mucho de la forma global de las curvas de transición y de las curvas de periodo fijo en el espacio  $(\alpha, \beta)$ . Surge por lo tanto la necesidad de usar algún integrador numérico.

Un integrador numérico que se usó en esta tesis es el Runge-Kutta de orden 4, éste es un método interpolador que reproduce la expansión de Taylor a orden 4 de la solución: dado un punto  $(x_i, y_i)$  al tiempo  $t_i$  y el campo vectorial generado por la ecuación diferencial, se calcula el punto  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  al tiempo  $t_{i+1}$  usando la serie de potencias de Taylor de la solución alrededor del punto  $(x_i, y_i, t_i)$ . Las derivadas involucradas en dicha serie son interpoladas por evaluaciones del campo en diferentes puntos alrededor de  $(x_i, y_i)$  (usando esencialmente el teorema del valor medio para sustituir las derivadas).<sup>[B<sup>u</sup>]</sup>

Recordemos que la ecuación de Mathieu que estamos trabajando con condiciones iniciales está dada por

$$\ddot{x} + (\alpha - 2\beta \cos 2t)x = 0; \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = y_0. \quad (3.9)$$

Para los problemas de determinar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para los cuales obtenemos soluciones periódicas de periodo  $T$ , o bien soluciones no acotadas sabemos que la condición inicial en el plano fase no será relevante, gracias a la linealidad de la ecuación de Mathieu. Tomaremos  $x(0) = 1$  y  $\dot{x}(0) = 0$  simplemente por comodidad.

Para implementar el Runge-Kutta será necesario transformar esta ecuación en el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha + 2\beta \cos 2t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad (3.10)$$

cuyo Runge-Kutta de orden cuatro en el intervalo de tiempo  $[a, b]$  tiene los siguientes coeficientes:

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 0$$

$$K_{1x} = hy_j$$

$$K_{1y} = h(-\alpha + 2\beta \cos(2t_j))x_j$$

$$K_{2x} = h(y_j + \frac{1}{2}K_{1y})$$

$$K_{2y} = h(-\alpha + 2\beta \cos[2(t_j + \frac{h}{2})])(x_j + \frac{1}{2}K_{1x})$$

$$K_{3x} = h(y_j + \frac{1}{2}K_{2y})$$

$$K_{3y} = h(-\alpha + 2\beta \cos[2(t_j + \frac{h}{2})])(x_j + \frac{1}{2}K_{2x})$$

$$K_{4x} = h(y_j + K_{3y})$$

$$K_{4y} = h(-\alpha + 2\beta \cos[2(t_j + h)])(x_j + K_{3x})$$

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{6}(K_{1x} + 2K_{2x} + 2K_{3x} + K_{4x})$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(K_{1y} + 2K_{2y} + 2K_{3y} + K_{4y})$$

donde el intervalo  $I = [a, b]$  es dividido en  $N$  partes iguales, dando lugar a la partición  $t_j$

de este intervalo. Como hemos dicho, el Runge-Kutta de orden 4 nos entrega la serie de Taylor a orden 4, y este tiene como residuo a

$$R_4(h) = \frac{1}{4!} \int_c^{c+h} f^{(5)}(x(t))(c+h-t)^4 dt \quad (3.11)$$

con  $h = \frac{b-a}{N}$  y  $c$  algún punto de la partición de  $I$ , y donde  $f^{(5)}(x(t))$  es la quinta derivada direccional del campo vectorial en la dirección tangente a la solución  $x(t)$ .

Para las curvas de periodo fijo fue necesario un integrador numérico más fino que el Runge-Kutta de orden 4, en este caso se usó un Runge-Kutta 7-8. El Runge-Kutta 7-8 nos da la serie de Taylor de la solución de la ecuación a orden 7 y a orden 8, pero además se diferencia del Runge-Kutta de orden 4 porque nos permite controlar el paso de integración mediante un proceso de corrección. Mostremos como se hace esto: consideremos que  $S_7 = \sum_{n=0}^7 a_n h^n$  y  $S_8 = \sum_{n=0}^8 a_n h^n$  son las series de Taylor a orden 7 y 8 respectivamente alrededor del punto  $x_0$  al tiempo  $t_0$ , de la ecuación diferencial de primer orden,  $x(t)$ . Tomando la diferencia de las aproximaciones evaluadas en  $t_0 + h$  se tiene

$$\delta_h = |S_8 - S_7| \leq |x(t_0 + h) - S_8| + |x(t_0 + h) - S_7| \leq O(\beta^7).$$

Esta misma diferencia, evaluada en  $t_0 + h/2$  es

$$\delta_{h/2} = |S_8 - S_7| \leq \frac{O(\beta^7)}{2^7}.$$

De lo cual,  $\frac{\delta_{h/2}}{\delta_h} \leq 2^7$ . Entonces, si realmente estamos haciendo una buena aproximación, esto último se debe de cumplir, si no, tendremos que disminuir el paso hasta que los desarrollos de Taylor sean una buena aproximación. El residuo del Runge-Kutta 7-8 será el correspondiente al de orden 4, sólo que esta vez  $h$  no será constante.

### 3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS: CURVAS DE TRANSICIÓN

En esta sección mostramos las curvas de transición calculadas con la metodología descrita en la sección 3.1, usando el Runge-Kutta de orden 4 para integrar la ecuación de Mathieu donde se toma el intervalo de tiempo  $I = [0, 30\pi]$  y una división de éste de  $N=50000$ . Entonces, de la fórmula del residuo de la sección anterior se tiene

$$R_4(h) \leq \frac{1}{4!} \int_c^{c+h} |f^{(5)}(x(t))| h^4 dt$$

donde  $h = \frac{30\pi}{50000}$  y  $c \in [0, 30\pi]$ . Usando el hecho de que las soluciones de la ecuación de Mathieu son analíticas, tendremos que en este intervalo sus derivadas existen y son acotadas. Así podemos acotar  $|f^{(5)}(x(t))|$  por  $M$ , por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} R_4(h) &\leq \frac{1}{4} \int_c^{c+h} h^4 M dt; \\ &\leq \frac{h^5}{4!} M, \end{aligned} \tag{3.12}$$

lo que a su vez nos da que el error total acumulado, es decir, el error del punto final de la solución está dado por

$$\text{error} = \epsilon \leq \frac{h^4}{4!} M 30\pi \tag{3.13}$$

de donde tendremos que el error es menor que  $\epsilon$  si  $M$  es menor que  $\frac{4!}{h^4} \frac{\epsilon}{30\pi}$ , en particular si  $M < 2.6 \times 10^8$  el error será menor que 0.1.

La Fig 3.12 muestran las curvas de transición y en cada gráfica el número de éstas (las curvas de transición) van aumentando a medida que nos movemos de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Las curvas que se muestran en las figuras corresponden a valores de  $\alpha^2 = 0, 1, 4, 9, 16$  y 25 para  $\beta = 0$ .

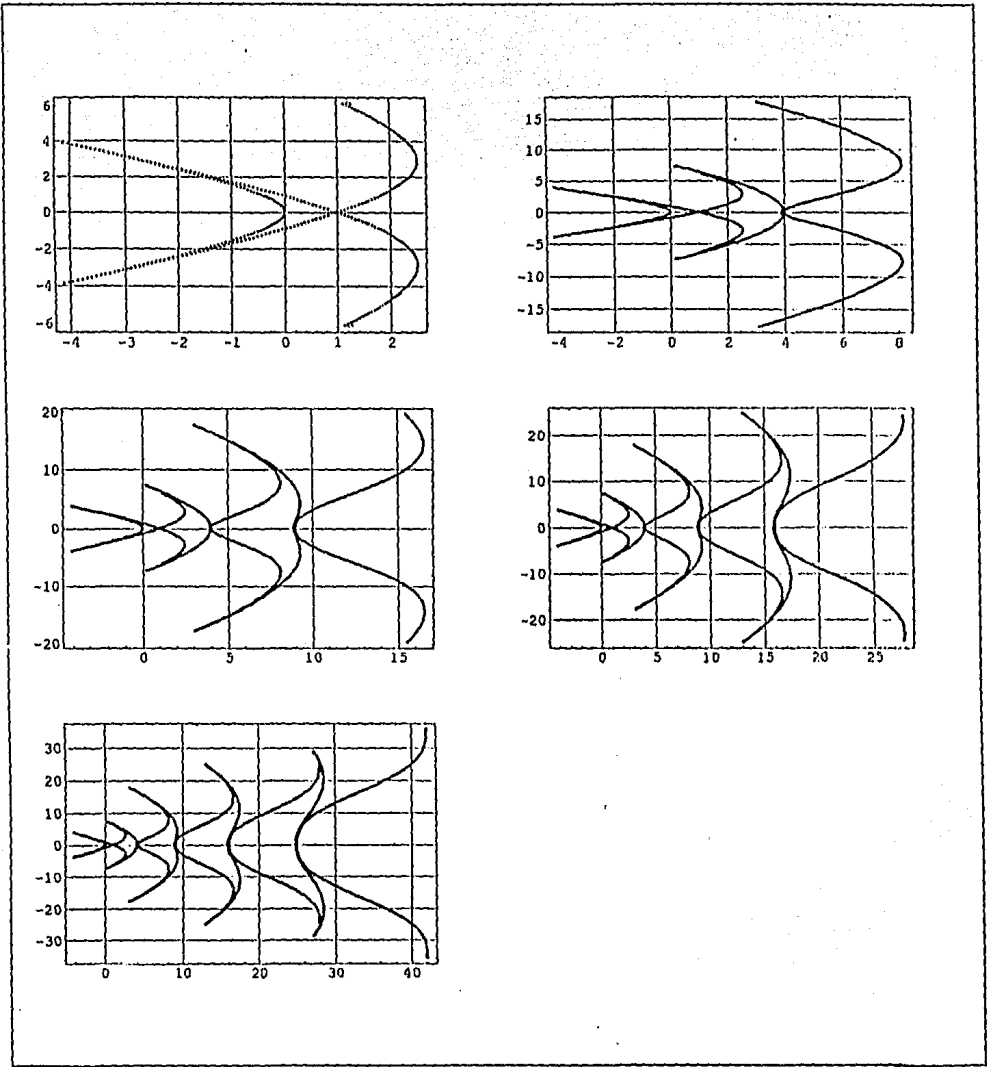


Fig 3.12

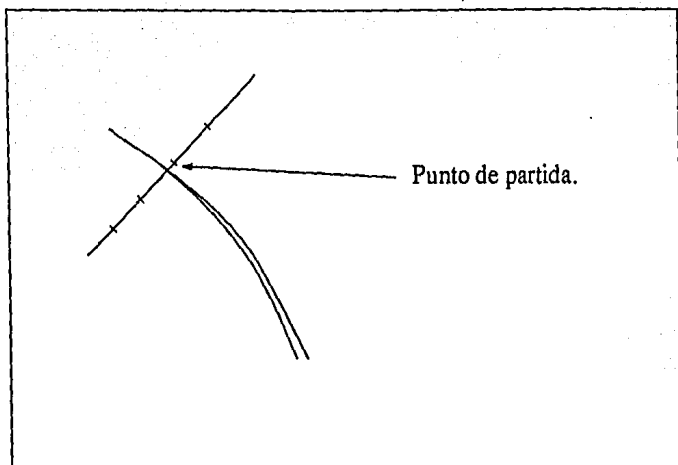


Fig 3.13

Se tiene pues una división del plano  $\alpha, \beta$  en regiones estables e inestables, las primeras aparecen en las figuras 3.12 en forma de "cápsulas". A pesar de la apariencia acotada que se muestra, cada curva de transición tiende a infinito conforme  $\beta$  tiende a infinito (ver sección 2.7, teorema 2.8).

Por la forma que tienen el par de curvas que se originan en un mismo punto del eje  $\alpha$ , se le llama a la región de inestabilidad que delimitan, la lengua de Arnold, en honor del precursor de este tipo de problemas, V.I. Arnold.

Debido al error fijado en el procedimiento de bipartición, no es posible detectar la curva de transición cuando la distancia entre las curvas es menor que el error definido, ver Fig 3.13. Una forma alternativa para continuar las curvas de transición es identificar tales curvas con alguna curva de soluciones periódicas que esté contenida entre ambas curvas de transición. En la siguiente sección se puede apreciar como estas curvas son extendidas para valores mayores en  $\beta$ .

### 3.5 RESULTADOS NUMÉRICOS: CURVAS DE PERIODO FIJO

En esta sección mostramos algunas curvas de periodo fijo por dos métodos. El primero es por un proceso de bipartición, el cual muestra ciertas limitaciones de continuación, y

el segundo es usando la metodología descrita en la sección 3.2.

De las propiedades descritas en la sección 3.2, en particular la continuidad del periodo,  $T$ , ante los parámetros,  $(\alpha, \beta)$ , se puede obtener un algoritmo de bipartición parecido al de la sección 3.1, sólo que esta vez, el criterio para decidir si estamos o no en la curva de periodo fijo  $T$ , estará basado en el periodo:

*Algoritmo de construcción para las curvas de transición de la ecuación de Mathieu:*

Sea  $Q$  un punto en el espacio  $(\alpha, \beta)$ , y consideremos que estamos integrando la ecuación de Mathieu en un intervalo de longitud  $T$ , entonces  $d(Q)$  es la distancia entre el punto inicial y el punto final en el plano fase.

1. Dados dos puntos  $P_0, P_1$  previamente determinados sobre la curva de periodo fijo  $T$ , se traza la recta que pasa por estos, sea ésta  $L$ .
2. Nos movemos sobre la recta  $L$  una distancia  $h$  a partir de  $P_1$  (por lo regular  $h = 0.1$  funciona). Sea este nuevo punto  $Q_1$ , ver Fig 3.14.

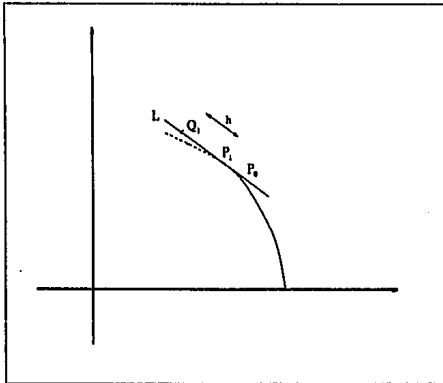


Fig 3.14

3. Trazamos la recta que pase por  $Q_1$  y que sea ortogonal a  $L$ , llamemos a ésta  $L'$ .
4. Nos movemos sobre la recta  $L'$ , a partir de  $Q_1$ ,  $n$  puntos a la derecha, ( $Q_i$ 's), y  $n$  puntos a la izquierda, ( $Q_i'$ 's), en pasos de  $\eta$ , normalmente  $n = 5$ ,  $\eta = 0.01$ , ver Fig 3.15.
5. Determinamos  $d(Q_i)$  y  $d(Q_i')$ ,  $i = 2, \dots, n$ .
6. Hallamos por un proceso de burbuja la distancia más chica, digamos  $d(Q_k)$ .



7. Hacemos un proceso de bipartición entre los puntos  $Q_{k-1}$  y  $Q_{k+1}$  hasta que  $d(Q)$  sea menor que algún error prefijado. Sea este último punto  $P_2$ .
8. Hacemos la asignación  $P_2 \rightarrow P_1$ ,  $P_1 \rightarrow P_0$  y volvemos a comenzar el algoritmo.

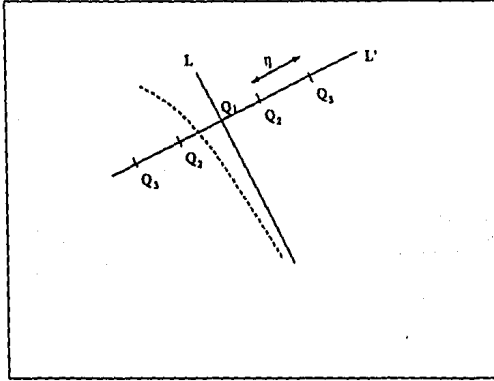


Fig 3.15

A continuación se muestran algunas curvas de periodo fijo calculadas como se dice arriba. El integrador numérico que se usó para integrar la ecuación de Mathieu fue un Runge-Kutta de orden 4, donde se toma un intervalo de tiempo  $I = [0, T]$ , para periodos  $T \leq 17\pi$ , y una división de este intervalo de  $N = 20000$ . Entonces como en la sección 3.4 se puede estimar fácilmente el error y éste está dado por la ecuación (3.13),  $\epsilon < 1.13 \times 10^{-10} M$ , donde  $M$  es el máximo de la quinta derivada del campo en el intervalo  $I$ .

En la Fig 3.16 se muestran soluciones  $5\pi$ -periódicas. Para  $\beta = 0$  (el oscilador armónico) se tiene que cumplir que

$$\sqrt{\alpha} = \frac{2}{5}N; \quad N \in \mathbb{Z},$$

donde se ha tomado  $N = 3$ . Por lo tanto

$$\alpha = 1.44, \quad \beta = 0,$$

que es el punto cercano de donde empieza la Fig 3.16. De la misma manera se obtuvieron las otras curvas. La curva de la Fig 3.17 nos dará soluciones  $10\pi$ -periódicas con  $N = 11$ , y

parte cerca de  $\alpha = (1/5)^2 11^2 = 4.84$ ,  $\beta = 0$ . La curva de la Fig 3.18 nos da soluciones  $7\pi$ -periódicas con  $N = 9$ , y parte cerca de  $\alpha = (2/7)^2 9^2 \approx 6.61$ ,  $\beta = 0$ . La curva de la Fig 3.19 nos da soluciones  $17\pi$ -periódicas con  $N = 42$ , y parte cerca de  $\alpha = (2/17)^2 42^2 \approx 24.41$ ,  $\beta = 0$ .

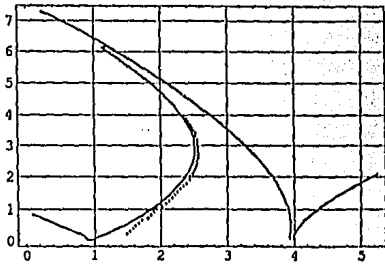


Fig 3.16

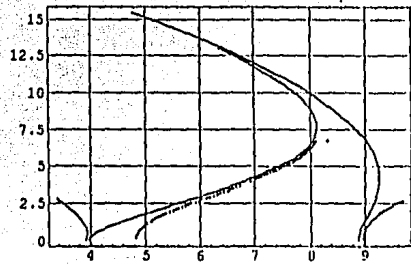


Fig 3.17

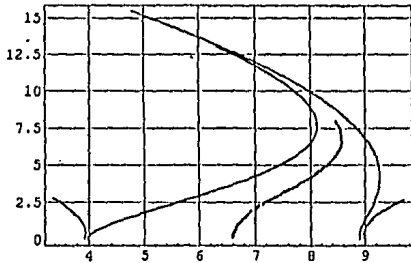


Fig 3.18

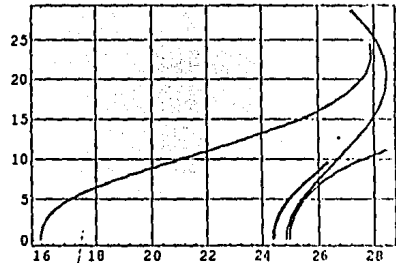


Fig 3.19

Sin embargo, como se puede apreciar en las figuras, este método no prolonga mucho las curvas de periodo fijo. La razón por la cual no se pudieron continuar las curvas con el algoritmo de bipartición, es debido a que el conjunto de las curvas de periodo fijo se acercan exponencialmente (ver [M-S] y sección 2.8) dando como consecuencia que la función distancia sea muy inestable, y un proceso de bipartición resulta poco adecuado para localizar el cero de la función. Por lo tanto, se tiene la necesidad de utilizar procedimientos numéricos más precisos. Es aquí donde usamos el algoritmo descrito en la sección 3.2.

En la figura 3.20 se usó el método de integración Runge-Kutta 7-8 con un error asignado

de  $10^{-13}$ , y al método de Newton se le asignó un error de  $10^{-6}$ . Se calculan todas las ramas correspondientes a las soluciones periódicas de periodo más bajo cuyo valor de  $\alpha$ , usando  $\beta = 0$ , es:

$$\alpha = 4 \left( \frac{p}{n} \right)^2$$

con  $p, n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < p < n < 10$  y  $(p, n)$  primos relativos.

Como se puede apreciar en la Fig 3.20, las ramas correspondientes a las soluciones periódicas se aproximan exponencialmente entre ellas. Para valores de  $\beta$  mayores que 20, las curvas de transición corresponden prácticamente a las ramas de soluciones periódicas. Así podemos verificar que el comportamiento de las curvas de transición para valores de  $\beta$  grandes, es similar al comportamiento asintótico de estas curvas predicho en la sección 2.8 del capítulo 2.

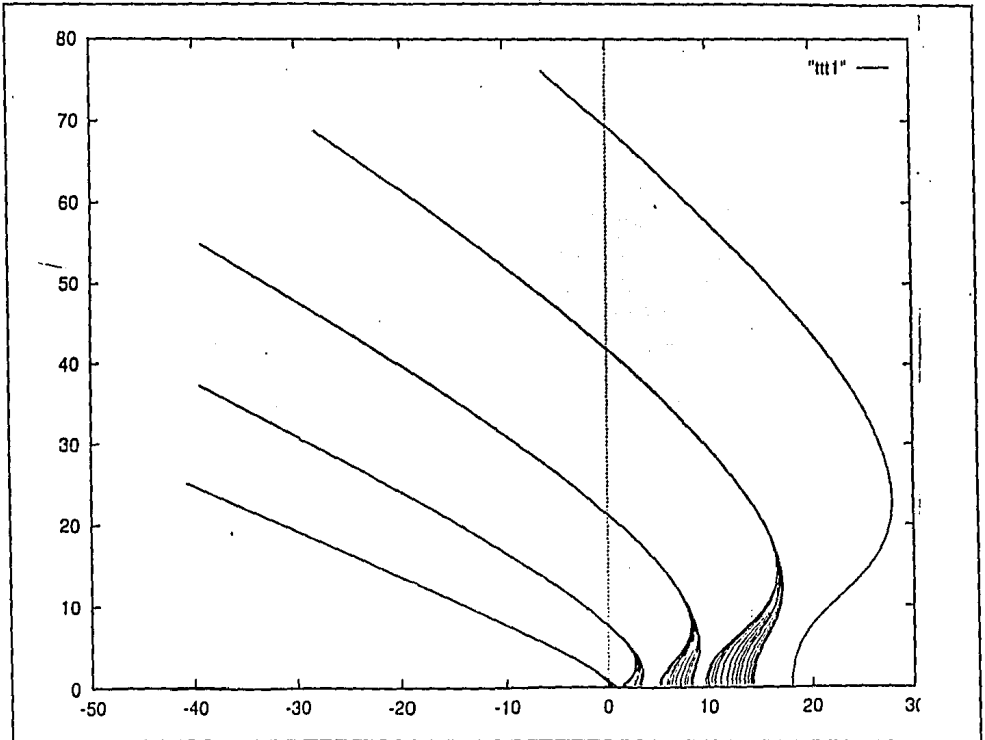


Fig 3.20

### 3.6 DESARROLLO ASINTÓTICO DE LAS CURVAS DE PERIODO FIJO

En esta sección obtendremos el desarrollo en series de potencias de  $\alpha(\beta)$  para soluciones periódicas. Con este desarrollo podemos calcular las curvas que corresponden a las soluciones de cierto periodo. Se comparan las gráficas obtenidas de esta manera con los resultados numéricos de la sección anterior.

Como ya se vió, en el capítulo anterior se demostró que tanto las curvas de transición como las curvas de periodo fijo son analíticas en  $\beta$ , ver secciones 2.2 y 2.4. Se vieron además en las secciones 2.3 y 2.4 algunos métodos para calcular los desarrollos de potencias y se estableció que podemos usar cualquiera de estos puesto que las expresiones son las mismas, gracias a la unicidad de la solución y convergencia de la serie.

También se vió, que el método más sencillo para trabajar en este caso, es el método perturbativo. Pero a pesar de esto, sigue siendo difícil manejar las expresiones que se presentan para ordenes mayores que 2, porque son muy grandes (cc. (2.102) y (2.103)), y se corre el riesgo de equivocarse en el álgebra. Surge pues la necesidad de usar algún manipulador simbólico. En nuestro caso se usó el manipulador algebraico de *Mathematica*.<sup>[Math]</sup> Las expresiones obtenidas fueron hasta orden 8 en  $\beta$ , las cuales se muestran en el apéndice IV. En las figuras 3.21a-3.21d se muestran dos curvas: una es la gráfica de los desarrollos a orden 8 (línea continua), y la otra es la curva obtenida numéricamente con el proceso de bipartición de la sección 3.5 (línea punteada). Llamaremos  $\alpha_E(\beta)$  a la curva obtenida por la serie de potencias hasta orden 8 y  $\alpha_N(\beta)$  a la obtenida por un método numérico.

Podemos decir que las curvas se ajustan bien si la diferencia entre las dos curvas,  $|\alpha_E - \alpha_N|$ , es del orden  $O(\beta^9)$ , ya que una es el desarrollo a orden 8 en  $\beta$ , y la otra tiene sólo el error debido al método numérico. En cuyo caso esperamos tener una recta de pendiente 9 en la gráfica  $\log_{10}(\beta)$  vs  $\log_{10}(|\alpha_2 - \alpha_1|)$  cuando comiencen a separarse las curvas, ver figuras 3.22a-3.22d.

Se aprecia pues, en la parte superior de estas gráficas (que corresponde a la separación entre las curvas), una recta, cuya pendiente es aproximadamente 8. Esta recta se aprecia para valores de  $\beta$  mayores que  $10^{-3}$ , que corresponde al error asignado al método numérico.

Para  $\beta > 10^{-3}$  vemos que se cumple la relación

$$\log_{10}(|\alpha_E - \alpha_N|) = 9 \cdot \log_{10}(\beta) + \text{cte},$$

concluimos que el error de nuestra serie de potencias es del orden de  $O(\beta^9)$ , el cual es el error esperado.

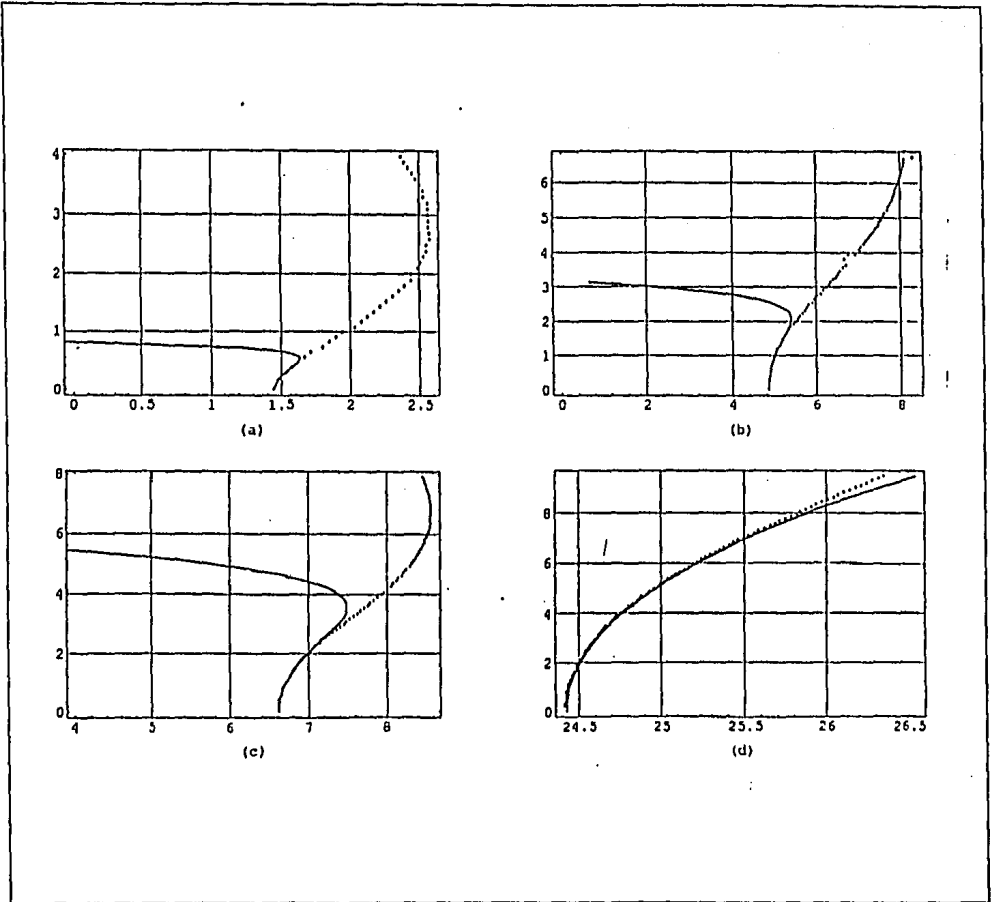
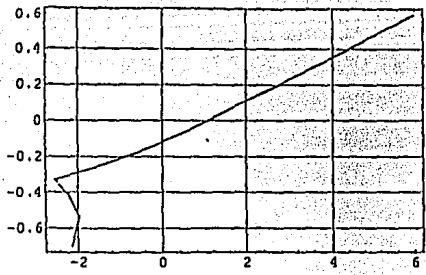
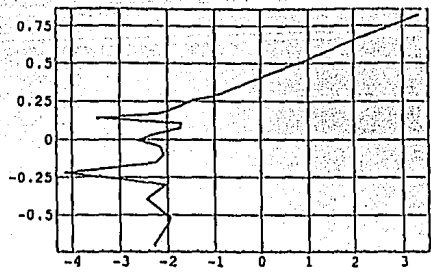


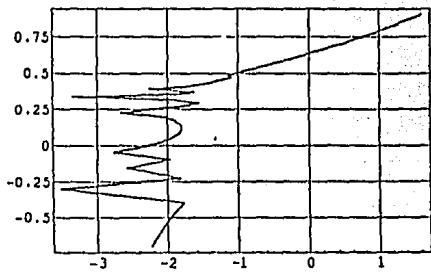
Fig 3.21



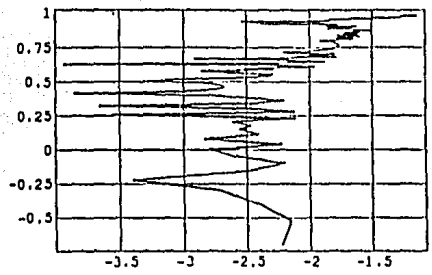
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig 3.22

### 3.7 POINCARÉ-LINSTEDT

En esta sección compararemos las curvas de periodo fijo obtenidas con el método de Poincaré-Linstedt con las obtenidas por el método de bipartición descrito en la sección 3.5.

En la sección 2.6 se obtuvo una expresión para la frecuencia,  $\omega$ , en términos de  $\alpha$  y  $\beta$ . En este caso no fue posible usar el manipulador algebraico de Mathematica, debido a que la frecuencia aparece directamente en los cosenos, dando lugar a que la frecuencia  $\omega$  dependa de  $t$  para ordenes mayores que 2 en  $\beta$ . Por lo tanto, nos tenemos que conformar en este caso con analizar la expresión de la frecuencia a orden 2 en  $\beta$  de la sección 2.6

$$\omega = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\alpha - 1} \beta^2. \quad (3.14)$$

Es directo que el problema de construir una curva de periodo fijo se traduce en este caso a construir una curva de frecuencia fija. Entonces de (3.14) se tiene

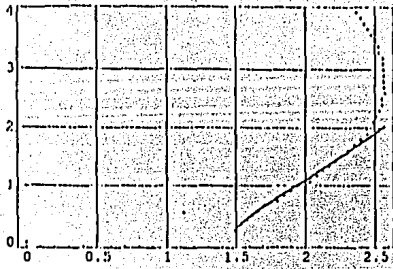
$$F(\alpha, \beta) = \omega - \sqrt{\alpha} - \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\alpha - 1} \beta^2 = 0, \quad (3.15)$$

una función de dos variables donde podemos despejar cualquiera de las dos variables en términos de la otra, por ejemplo es facil despejar  $\beta$

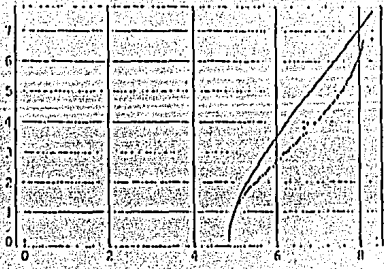
$$\beta = \sqrt{(\omega - \sqrt{\alpha})4\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)}, \quad (3.16)$$

la cual, si fijamos la frecuencia  $\omega$ , nos determina una curva en el espacio  $(\alpha, \beta)$  para dicha frecuencia fija.

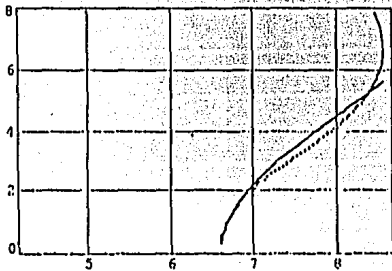
En la Fig 3.23 se muestran las gráficas obtenidas con (3.16) para las mismas frecuencias que tomamos en la sección 3.5 (Figs 3.16-3.19), contra las curvas obtenidas numéricamente para las mismas frecuencias.



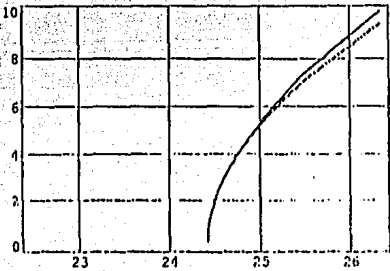
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig 3.23



---

4  
APLICACIONES  
Y  
CONCLUSIONES

---

**<< Todos vivimos bajo el  
mismo cielo, pero ninguno  
tiene el mismo horizonte >>.**

Konrad Adenauer (1876-1967)  
canciller alemán.

### 4.1.a Estabilidad de soluciones periódicas

La teoría de Floquet ha sido aplicada intensamente en el estudio de la estabilidad de las soluciones periódicas de sistemas mecánicos. Consideremos un sistema mecánico con  $N$  grados de libertad  $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{F}(\bar{x})$ , y supongamos que conocemos una solución periódica con periodo  $T$ ,  $\bar{\phi}(t) = \bar{\phi}(t + T)$ . Para determinar la estabilidad en el entorno de la solución periódica, consideremos un cambio de coordenadas en el espacio fase de  $2N$  dimensiones. Las nuevas coordenadas  $\bar{y} \in \mathbb{R}^{2N}$  están relacionadas con las antiguas coordenadas  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ , de la siguiente forma:  $\bar{x} = \bar{\phi}(t) + \bar{y}$ . Debemos notar que el nuevo sistema coordenado depende del tiempo y viaja en la dirección tangente de la solución periódica  $\bar{\phi}(t)$ . El sistema escrito en las nuevas coordenadas es entonces

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{dt}\phi(t) = \bar{F}(\bar{y} + \phi(t)).$$

Como nuestro interés es estudiar la estabilidad de la solución periódica  $\bar{\phi}(t)$  en su entorno, podemos considerar que los valores que alcanzan las coordenadas  $\bar{y}$  son pequeños. De esta manera podemos expandir el campo vectorial  $F$  alrededor de la solución  $\bar{\phi}(t)$ :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{dt}\phi(t) = \bar{F}(\phi(t)) + \mathbf{DF}(\phi(t))\bar{y} + O(\|\bar{y}\|^2).$$

Despreciando los términos de orden igual o mayor dos, y recordando que  $\bar{\phi}(t)$  es solución de la ecuación original, obtenemos el sistema lineal:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \mathbf{DF}(\bar{\phi}(t))\bar{y} \tag{4.1}$$

donde  $\mathbf{DF}$  corresponde a la matriz jacobiana de  $F$ . Esta matriz es  $T$  periódica puesto que está evaluada en  $\bar{x} = \phi(t)$ .

La estabilidad de la solución periódica queda entonces descrita por la estabilidad de la ecuación (4.1). Siguiendo la teoría de Floquet descrita en la sección 1.4, sabemos que la suma de los exponentes característicos son igual a la integral de la traza de la matriz periódica

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{2N} = \int_0^T \text{Tr}(\mathbf{DF}(\bar{\phi}(t))) dt$$

El primer exponente de Floquet vale siempre cero y está asociado a la dirección tangente de la órbita periódica  $\bar{\phi}(t)$ , la cual parametrizamos con la longitud de arco. Si nuestro sistema posee integrales de movimiento tales como la energía total, movimiento angular, etc., habrá igual número de exponentes  $\sigma_i$  con valor cero como integrales de movimiento. A la matriz  $\mathbf{DF}(\phi(t))$  se le denomina matriz de monodromía. Dado que la traza de la matriz Jacobiana es equivalente a la divergencia del campo, un sistema mecánico de  $N$  grados de libertad y con  $M$  integrales de movimiento suaves, los exponentes característicos que no se anulan cumplen con la relación

$$\sum_{i=N-M+1}^N \sigma_i = \int_0^T \text{div} \bar{F}(\bar{\phi}(t)) dt.$$

En particular, cuando nuestro sistema es de dos grados de libertad, solamente tenemos dos exponentes característicos. El primero siempre es cero, así que el segundo se puede calcular directamente como

$$\sigma_2 = \int_0^T \text{div} \bar{F}(\bar{\phi}(t)) dt.$$

Este exponente característico es real y determina la estabilidad de la solución  $\bar{\phi}(t)$  en la dirección ortogonal. Podemos concluir que la estabilidad de la órbita periódica depende del valor promedio de la divergencia del campo vectorial en el entorno de dicha órbita.

#### 4.1.b Estabilidad de órbitas geoestacionarias y órbitas de estacionamiento

Uno de los cambios tecnológicos de mayor impacto en este siglo es la posibilidad de comunicarse via satélite con cualquier punto de la Tierra. Este tipo de comunicaciones es posible gracias a poder mantener satélites en órbitas sincronizadas con el giro de la Tierra. Tales órbitas deben tener el período de un día y son esencialmente circulares. Al estar en el plano ecuatorial dichos satélites se ven desde la Tierra como un punto fijo en el espacio, de tal forma que las antenas de comunicación no tienen que modificar su posición.

Un problema que se puede presentar en estas órbitas geoestacionarias es la pérdida de estabilidad. Una perturbación importante a estas órbitas es el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. Es posible que el movimiento de la Luna produzca una resonancia paramétrica en la órbita geoestacionaria, lo cual implicaría la imposibilidad de mantener dichos satélites en tales órbitas en un periodo largo de tiempo.

El mismo tipo de fenómeno ocurre con las órbitas de estacionamiento, las cuales son utilizadas como puntos de transferencia a órbitas más lejanas. Estas órbitas están a 300 km de altura de la Tierra, lo cual corresponde al alcance de los cohetes propulsores que transportan los satélites desde la Tierra.

Dichas órbitas son circulares y están también en el plano de la eclíptica. Es de esperar que la perturbación debida al movimiento de la Luna pueda alterar la estabilidad de dicha órbita.

Para estudiar el comportamiento de las órbitas circulares, utilizaremos la teoría desarrollada por Hill para el estudio del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, descrita en la sección 0.6.

Consideremos que el satélite se mueve en una órbita cercana a la Tierra en forma circular, y el movimiento de la Luna es también circular pero los planos de las órbitas no coinciden exactamente, los vectores normales hacen un pequeño ángulo. Reemplacemos en las ecuaciones (0.14) y (0.15) y en la Fig 0.15 la nomenclatura de la Luna y el Sol por la de satélite y Luna respectivamente. De esta forma  $|r|$  representa la distancia del satélite a la Tierra.

Consideremos un nuevo sistema de referencia, de tipo sinódico, el cual gira sincronizadamente con el movimiento de la Luna. En este caso  $\mu_1$  es la velocidad angular de la Luna y el nuevo sistema de ecuaciones queda descrito por (0.24).

Dado que la inclinación del plano donde se desplaza el satélite es pequeña, se puede reducir el sistema a las ecuaciones (0.26) y (0.29). Supongamos que el movimiento del satélite es en forma circular alrededor de la Tierra, entonces la solución al sistema (0.26), a primer orden, corresponde a funciones de tipo trigonométrico de la forma

$$X = r_0 \cos \omega \tau \text{ y } Y = r_0 \sin \omega \tau$$

donde  $r_0$  representa el radio de la órbita y  $\omega$  es la frecuencia de la órbita respecto al

giro del satélite alrededor de la Tierra. Las coordenadas  $X$  y  $Y$  están en el plano de la eclíptica y ahora estudiaremos el comportamiento de la coordenada normal al plano,  $Z$ . La ecuación que describe la dinámica de esta coordenada es

$$Z'' + \nu^2 Z + \frac{kZ}{r_0^3} = 0.$$

El término  $\nu$  es la razón entre la frecuencia del movimiento de la Luna,  $\mu_1$ , y la del satélite,  $\mu$ , donde  $\nu = \frac{\mu_1}{\mu - \mu_1}$ . El radio de giro de la órbita es  $r_0$  y  $k$  relaciona la masa de la Tierra y el satélite con sus frecuencias (ver ec. 0.26). La razón  $k/r_0^3$  la podemos reemplazar por la relación (0.31), donde  $C$  representa la constante de Jacobi. Debemos notar  $X^2 + Y^2 = r_0^2$  por ser órbita circular y  $(X')^2 + (Y')^2 = \omega^2 r_0^2$ . De esta forma obtenemos la siguiente ecuación

$$Z'' + \left( \nu^2 + \frac{\frac{1}{2}(\omega^2 r_0^2) - \frac{3}{2}\nu^2 r_0^2 \cos^2(\omega\tau) - C}{r_0^2} \right) Z = 0.$$

Reemplazando el cuadrado del coseno por el coseno del ángulo doble y haciendo el cambio en el tiempo  $t = \omega\tau$ , reescribimos la ecuación anterior en esta nueva forma:

$$\frac{d^2}{dt^2} Z + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{\nu^2}{\omega^2} - \frac{C}{r_0^2 \omega^2} - \frac{3}{4} \frac{\nu^2}{\omega^2} \cos(2t) \right) Z = 0. \quad (4.2)$$

¿Cuál es la estabilidad de la coordenada  $Z$ ? Debemos investigar entonces si el valor de  $\beta$  escogido da un punto en el plano  $(\alpha, \beta)$  que corresponde a una solución acotada o no acotada.

Esta ecuación la podemos interpretar como una ecuación del tipo Mathieu. En este caso interpretamos los parámetros de la ecuación de Mathieu de la siguiente forma:

$$\beta = \frac{3}{8} \frac{\nu^2}{\omega^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \frac{C}{r_0^2 \nu^2} \right) \beta$$

Dado que la constante de Jacobi es pequeña por considerar órbitas circulares, entonces el término  $-\frac{4}{3} \frac{C}{r_0^2 \nu^2}$  lo podemos despreciar. De esta forma

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \beta.$$

En la Fig 4.1 representamos la región acotada de la ecuación de Mathieu y pintamos la curva  $\alpha = 1/2 + 2\beta/3$ .

Observemos que para  $|\beta| > 0.3$ , la solución resulta ser inestable y por lo tanto, las oscilaciones en la dirección normal al plano de la eclíptica aumentarán exponencialmente. En cambio, para valores  $|\beta| < 0.3$ , las soluciones serán acotadas.

Por lo tanto, la condición de estabilidad de órbitas circulares alrededor de la Tierra está dada por las siguientes condiciones:

$$C \ll r_0^2 \omega^2 \quad \text{y} \quad |\beta| < 0.4$$

En particular, consideremos las órbitas geoestacionarias donde los periodos de las órbitas son:  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu = 28$  y  $\omega = 1$ , obtenemos un valor de  $\beta = \frac{1}{1944}$ . Lo cual indica que el sistema lineal es estable.

Finalmente debemos indicar que las situaciones que representan un riesgo para mantener satélites en órbitas alrededor de la Tierra, es cuando la constantes de Jacobi no es pequeña y además  $\frac{1}{2} - \frac{C}{r_0 \omega^2} \approx n^2$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Es claro que esta situación conduce a tener comportamiento inestable puesto que el punto  $(\alpha, \beta)$  puede caer en una lengua de Arnold.

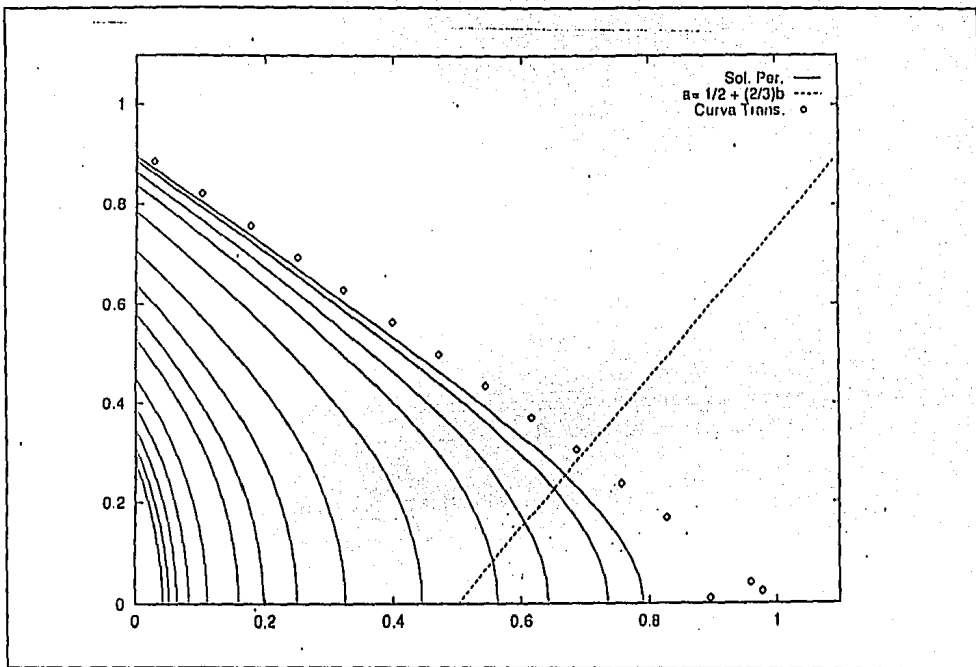


Fig 4.1

## 4.2 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado la ecuación de Mathieu, que podemos considerarla como genérica en el tipo de ecuaciones de los problemas de resonancia paramétrica. Sin embargo, no hemos dicho cual es la diferencia con el tipo de resonancia debida a una fuerza de excitación externa.

Consideremos al oscilador armónico con fuerza de excitación externa  $F = A \text{sen } \Omega t$ , el cual tiene por ecuación

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A \text{sen } \Omega t, \quad (4.3)$$

sabemos que si  $\Omega \neq \omega$  la solución está dada por

$$x(t) = \frac{A}{\omega^2 - \Omega^2} \text{sen } \Omega t + C \text{sen}(\omega t - \phi), \quad (4.4)$$

y la solución está acotada a pesar de que la amplitud sea grande cuando  $\Omega \approx \omega$ . Si ahora tomamos  $\Omega = \omega$ , una de las soluciones será de la forma

$$x(t) = -\frac{A}{2\omega} t \cos \omega t, \quad (4.5)$$

de donde es fácil ver que la solución es no acotada en posición y velocidad, y crece como  $t$ , es decir linealmente.

Por otra parte, sabemos que las soluciones inestables de la ecuación de Mathieu, para  $(\alpha, \beta)$  en la lengua de Arnold, tienen la forma

$$x(t) = c_1 e^{\sigma t} P_1(t) + c_2 e^{-\sigma t} P_2(t)$$

(ver sección 2.1.a) de donde es directo que la solución crece como  $e^{\sigma t}$ , es decir exponencialmente.

Entonces, en la resonancia paramétrica tenemos una transferencia de energía mucho más eficiente que en las resonancias debidas a una fuerza de excitación externa, ya que contamos con un crecimiento exponencial para la resonancia paramétrica. Esta ganancia de energía se puede apreciar en la Mecánica Hamiltoniana, donde el fenómeno de resonancia paramétrica es el que determina los cambios más notables en la dinámica del sistema, y



en particular estos son observables en la Mecánica Celeste al determinar las condiciones que dan origen a la distribución de los cuerpos celestes en el sistema solar.

Sin embargo, ninguno de estos fenómenos de resonancia se presentan en la naturaleza en su forma global. Si estos en realidad ocurrieran, entonces el ruido blanco, que presenta todas las frecuencias, nos hubiera hecho estallar desde hace mucho.

Tenemos que caracterizar entonces a estos tipos de resonancia, que en el sentido estricto no existen en la naturaleza. Los vamos a caracterizar por el tipo de ecuación diferencial que los modela, y por lo tanto, los conoceremos como *resonancia lineal*. Si ahora nos ponemos más estrictos con los fenómenos que observamos, y consideramos los efectos de *no lineales*, por ejemplo en el péndulo físico, tenemos que un hecho significativo de la *resonancia no lineal* es el acotamiento de la solución, a diferencia de la resonancia lineal, para la cual como se ha visto no hay cota. Las oscilaciones son acotadas debido a la dependencia de la frecuencia con respecto a la energía. Tal dependencia es entonces una propiedad importante y la primera señal de una propiedad no lineal. El acotamiento de las oscilaciones debido a la no linealidad es una clase de estabilización en la naturaleza, que evita que una perturbación resonante haga explotar el sistema. La dependencia de la frecuencia de resonancia con la energía permite que el sistema escape de la resonancia al aumentar la amplitud de la oscilación. Al modificarse la frecuencia de oscilación el sistema sale de fase respecto a la perturbación y al cabo de cierto tiempo, la misma oscilación frena al sistema cambiando la frecuencia de oscilación otra vez. Este fenómeno de ganancia y pérdida de energía da origen a un nuevo fenómeno oscilatorio conocido como *oscilación en fase*, el cual lo podemos identificar como una condición de estabilidad en el sistema.

Sim embargo, comunmente las perturbaciones se presentan como un paquete de frecuencias que perturban al sistema. Es entonces posible que el escape de una resonancia conduzca a caer en una nueva resonancia. Si este fenómeno se repite varias veces, la perturbación generará una gran inestabilidad en el sistema.<sup>[Ch]</sup>

Sin embargo, el conjunto de problemas oscilatorios tratados por la mayoría de los matemáticos hoy día es pequeño, más pequeño aún es el conjunto de modelos con que se cuenta (el oscilador armónico). El papel de los sistemas Hamiltonianos, o cerca de Hamiltonianos, van más lejos en sus aplicaciones, por ejemplo el movimiento de partículas

cargadas (especialmente pesadas) en aceleradores de partículas o el movimiento de planetas en el sistema solar así como las naves espaciales: sputniks, viajes espaciales, etc.

Es necesario remarcar que el estudio hecho en esta tesis fue para una ecuación lineal, que por lo anterior es sólo una primera aproximación de los fenómenos de la naturaleza, y en consecuencia nos restringe su rango de aplicación. Llegamos por lo tanto a la conclusión inevitable de que los factores de no linealidad son importantes en el estudio de la naturaleza, y nos conducen a un campo más amplio de investigación. Es por esto que los fenómenos de estabilización no lineal, así como de resonancia no lineal son bastante bien conocidos y han atraído la atención de muchos investigadores, ver [Ch] y [L-L].

Como se ha visto en el estudio de la ecuación de Mathieu, en el espacio de los parámetros se encuentran zonas de estabilidad e inestabilidad. Así también se encuentran curvas de transición a partir de analizar la solución de la ecuación. Expresando las curvas de transición en fracciones continuas y en operadores se han establecido propiedades tales como que se originan en los cuadrados de los enteros (lema 2.1), que se cortan sólo en el eje de las  $\alpha$ 's (teorema 2.4), que son analíticas (sección 2.2), los cruces con el eje de las  $\beta$ 's (sección 2.7), comportamiento asintótico para  $\beta \rightarrow \infty$ , etc. También se dan desarrollos de potencias ( $\alpha = \alpha(\beta)$ ) por el método de las fracciones continuas, por el método de perturbaciones (sección 2.3), y por el método de Poncaré-Linstedt ( $\omega = \omega(\beta)$ ) que se mostró más restringido que los dos primeros métodos (sección 2.6).

Para las curvas de periodo fijo se encuentran de nueva cuenta propiedades de analiticidad, que se originan en los cuadrados de los racionales, etc. (sección 2.4). Se trabaja más en este caso sobre la clasificación de estas curvas de acuerdo en la solución que entreguen: paridad (par o impar) y periodo ( $\pi$  o  $2\pi$ ). Se establece una propiedad interesante e importante de estas curvas de periodo fijo, y es que folean las regiones estables (sección 2.5).

En la integración de las curvas de transición fue básica la teoría de Floquet, para establecer una definición útil (numericamente) sobre la estabilidad e inestabilidad, lo que a su vez nos determina la curva de transición (sección 3.1). En lo que respecta a las curvas de periodo fijo, no fue suficiente el material desarrollado analíticamente en el capítulo 2 y se tuvo que echar mano de la continuidad de la solución ante la variación de los parámetros, reduciendo con esto el problema de encontrar soluciones de un cierto periodo al problema

de encontrar el cero de una función por un método de Newton (sección 3.2). Se comparan las curvas obtenidas numericamente contra los desarrollos de potencias obtenidos por el método perturbativo, encontrándose un buen ajuste para  $\beta$  pequeña (sección 3.6).† Por último se comparó el método numérico contra el de Poincaré-Linstedt, encontrándose nuevamente aproximaciones buenas para  $\beta$  pequeña, pero con el inconveniente adicional de que, la expansión de la frecuencia involucra una dependencia del tiempo haciendo con esto casi imposible su tratamiento (sección 3.7).

En la sección 4.1 se da una aplicación de la teoría de Floquet para analizar la estabilidad de un sistema mecánico que tiene una órbita periódica, concluyéndose que la estabilidad depende del valor promedio de la divergencia del campo vectorial que rodea la órbita periódica. Se da también otra aplicación sobre la estabilidad de un satélite terrestre en órbita circular, reduciendo este al problema, de los tres cuerpos, Tierra, Luna, satélite, y determinando que los parámetros  $(\alpha, \beta)$ , en este caso, se encuentran en la región estable.

Es necesario hacer notar, que todavía existen muchas cosas por hacer: como analizar el comportamiento de la ecuación de Mathieu cuando entra un término de fricción, o cuando se le agrega un término de fuerza externa. Tampoco sabemos mucho de lo que ocurre cuando entra en consideración algún término no lineal, ni lo que ocurre cuando acoplamos dos de estos sistemas en resonancia paramétrica.

Sin embargo, al presentar con mucho detalle una serie de técnicas, a veces en forma redundante, se puede detectar cuales de estas técnicas tienen una posibilidad de arrojar cierta información en los casos más complicados. Por lo tanto hay que considerar este trabajo como un ensayo preliminar para el estudio de modelos más complicados.

---

† En realidad el ajuste se mejora a medida que tomamos  $\alpha$  más grande, ver Fig 3.21.

---

# APÉNDICES

---

ECUACIÓN DE KEPLER

Al describir el movimiento de un planeta en función del ángulo de anomalía excentrica, el ángulo que hace el eje mayor de la elipse con el segmento que une al planeta con el centro de la elipse (ver Fig 1), se obtiene la ecuación de Kepler

$$u - e \operatorname{sen} u = \mu t; \quad \mu = \frac{2k}{ab}. \quad (1)$$

donde  $a$ ,  $b$  son los semiejes mayor y menor respectivamente, y  $\mu$  se denomina el movimiento medio del planeta.

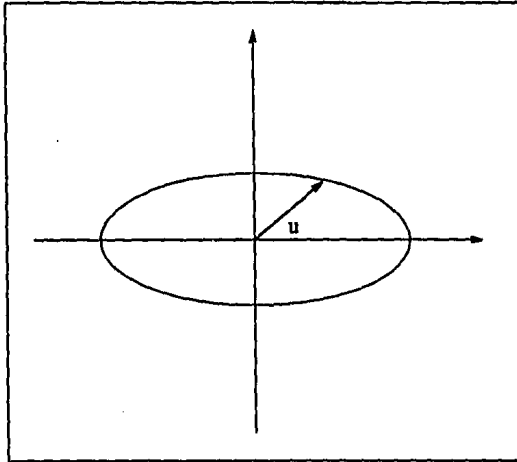


Fig 1

De la segunda ley de Kepler sabemos que  $T = k_1 A$ , donde  $T$  es el periodo del planeta,  $A$  es el área de la elipse, y  $k_1$  una constante de proporcionalidad; además, como  $A = \pi ab$ , se tiene que  $\frac{1}{ab} = \frac{\pi}{A} = \frac{\pi k_1}{T}$ , de lo cual el movimiento medio se escribe como

$$\mu = \frac{2k\pi k_1}{T}, \quad (2)$$

y por la ecuación (0.5) obtenemos

$$\mu^2 = \frac{(2k\pi k_1)^2}{T^2} = \frac{(2k\pi k_1)^2}{\left[\frac{4\pi^2}{G}\right] \frac{R_{ps}^3}{m_s}}$$

o lo que es lo mismo

$$\mu^2 = \text{const.} \frac{m_s}{R_{ps}^3} \quad (3)$$

esta relación es de utilidad en el desarrollo de la ecuación de Hill.

FORMA CANÓNICA DE JORDAN

La idea fundamental para obtener la forma canónica de Jordan de  $A \in M_{n \times n}$  vuelve a ser la del cambio de base y consiste en encontrar una base formada por vectores propios y otros vectores asociados a ellos que completen la dimensión del espacio. Esta base es llamada base de Jordan, y la matriz asociada a esta nueva base la llamaremos Forma canónica de Jordan de  $A$ .

Esta nueva forma de la matriz  $A$  estará compuesta por bloques con los valores propios en la diagonal principal, en la diagonal inmediatamente superior 1 y el resto ceros.

Para llegar a la forma canónica de Jordan necesitamos dos resultados previos

Sea  $A$  una matriz con elementos en  $\mathbb{C}$  con valores propios distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  y vectores propios asociados

$$\underbrace{v_{11}, v_{12}, \dots}_{\lambda_1} \quad \underbrace{v_{21}, v_{22}, \dots}_{\lambda_2} \quad \dots$$

Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$ . Entonces tenemos que

$$\ker(A - \lambda I) = \{v / Av = \lambda v\},$$

el núcleo de  $A$ .

**PROPOSICIÓN:**  $\exists \alpha$  tal que  $\ker(A - \lambda I)^{\alpha+p} = \ker(A - \lambda I)^\alpha, \forall p > 0$ .

**Dem:** Es fácil de ver que

$$\ker(A - \lambda I) \subset \ker(A - \lambda I)^2 \subset \ker(A - \lambda I)^3 \subset \dots \subset \mathbb{C}^n.$$

es una sucesión de subespacios de  $\mathbb{C}^n$ , esto implica que en algún momento la dimensión dejará de crecer.

**Definición 1:** El rango de  $A - \lambda I$  se define como

$$\text{Rango}(A - \lambda I) = \{w/\text{existe } u \text{ con } (A - \lambda I)u = w\}$$

Es fácil ver que

$$\text{Rango}(A - \lambda I) \supset \text{Rango}(A - \lambda I)^2 \supset \text{Rango}(A - \lambda I)^3 \supset \dots \supset \{0\},$$

Entonces  $\exists \beta$  tal que  $\text{Rango}(A - \lambda I)^\beta = \text{Rango}(A - \lambda I)^{\beta+p}, \forall p > 0$ .

c)  $\alpha = \beta$

Viene de que  $\dim \text{Rango}(A - \lambda I)^k = n - \dim \ker(A - \lambda I)^k$  ya que cuando uno se estabiliza el otro también.

d)  $\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda I)^\alpha \oplus \text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha$

**Dem:** Si  $v$  pertenece a la intersección

$$(A - \lambda I)^\alpha v = 0 \quad y \quad v = (A - \lambda I)^\alpha w$$

y por lo tanto

$$(A - \lambda I)^{2\alpha} w = 0$$

Esto implica que

$$w \in \ker(A - \lambda I)^{2\alpha} = \ker(A - \lambda I)^\alpha$$

de donde

$$(A - \lambda I)^\alpha w = 0 \rightarrow v = 0$$

e)

$$A - \lambda I : \ker(A - \lambda I)^\alpha \mapsto \ker(A - \lambda I)^\alpha$$

$$\text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha \mapsto \text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha$$



Porque si

$$\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^\alpha \rightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^{\alpha-1}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha &\rightarrow \mathbf{v} = (A - \lambda I)^\alpha \mathbf{w} \\ &\rightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = (A - \lambda I)^{\alpha+1} \mathbf{w} = (A - \lambda I)^\alpha (A - \lambda I)\mathbf{w}. \end{aligned}$$

También  $I$  manda  $\ker(A - \lambda I)^\alpha$  y  $\text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha$  sobre si mismos. De esto tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n &= & \ker(A - \lambda I)^\alpha \oplus \text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha \\ & & \downarrow A \qquad \qquad \downarrow A \\ & & \ker(A - \lambda I)^\alpha \oplus \text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha \end{array}$$

Tomando bases de  $\mathbb{C}^n$  respetando esa descomposición, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_1 \end{pmatrix}$$

donde  $A_1$  está sobre  $\ker(A - \lambda I)^\alpha$  y  $\tilde{A}_1$  está sobre  $\text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha$ .

f)  $(A_1 - \lambda I)^\alpha = 0$  y  $\lambda$  es el único valor propio de  $A_1$ .

g) Sea  $\mu$  valor propio de  $A$  diferente de  $\lambda$  y  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ , entonces

$$(A - \mu I)\mathbf{v} = 0 \rightarrow \begin{cases} (A_1 - \mu I)\mathbf{v}_1 = 0 \rightarrow (A_1 - \lambda I)\mathbf{v}_1 = (\mu - \lambda)\mathbf{v}_1 \\ (\tilde{A}_1 - \mu I)\mathbf{v}_2 = 0 \end{cases}$$

De aquí  $\mathbf{v}_2 \in \text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha$  y  $\mathbf{v}_1 = 0$  ya que

$$0 = (A_1 - \lambda I)^\alpha \mathbf{v}_1 = (\mu - \lambda)(A_1 - \lambda I)^{\alpha-1} \mathbf{v}_1 = \dots = (\mu - \lambda)^\alpha \mathbf{v}_1 = 0,$$

como  $\mu$  es diferente de  $\lambda$  esto implica que  $\mathbf{v}_1 = 0$ . De lo anterior

$$\ker(A - \mu I) \subset \text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha$$

⋮

$$\ker(A_1 - \mu I)^k \subset \text{Rango}(A - \lambda I)^\alpha, \quad \forall k,$$

y, como antes,  $Rango(A - \lambda I)^\alpha = \ker(A_1 - \mu I)^\beta \oplus Rango(A_1 - \mu I)^\beta$ . De donde hay una base para  $A$  tal que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

y así sucesivamente. De esto tenemos entonces

$$\mathbb{C}^n = Ker(A - \lambda_1 I)^{\alpha_1} \oplus Ker(A - \lambda_2 I)^{\alpha_2} \oplus \dots \oplus Ker(A - \lambda_q I)^{\alpha_q}.$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  son valores propios distintos.

Con  $A$  en esa base

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_q \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ahora tenemos que  $(A_i - \lambda_i)^{\alpha_i} = 0$  y una propiedad importante es

$$\det(A - \lambda I) = \prod \det(A_i - \lambda I),$$

como  $A_i$  tiene a  $\lambda_i$  como valor propio único, tenemos

$$\det(A_i - \lambda I) = P_i(\lambda - \lambda_i)^{\dim A_i}.$$

De esto

$$\dim A_i = \text{exponente de } (\lambda - \lambda_i) \text{ en } \det(A - \lambda I).$$

Además como  $(A - \lambda_i I)^{\dim A_i} = 0$  (Teorema Fundamental para matrices), tenemos

$$(A_i - \lambda_i I)^{\alpha_i} = 0 \text{ con } \alpha_i \text{ el más chico, esto implica } \alpha_i = \dim A_i.$$

Dado lo anterior, es suficiente probar el teorema de Jordan para cada  $A_i$ .

Tenemos primeramente que

$$Ker(A - \lambda I)^{\alpha-1} \subset Ker(A - \lambda I)^\alpha$$

con una inclusión estricta, por la minimicidad de  $\alpha$ .

Por lo tanto, sean  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r_1} \in \text{Ker}(A - \lambda I)^\alpha$  generando un complemento de  $\text{Ker}(A - \lambda I)^{\alpha-1}$ .

Sea

$$\mathbf{w}_j = (A - \lambda I)^{\alpha-1} \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{w}_j \in \text{Ker}(A - \lambda I).$$

Primeramente tenemos que  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{r_1}$  son linealmente independientes: para probarlo, supongamos que no lo sean, entonces

$$\sum \mu_j \mathbf{w}_j = 0$$

con no todos los  $\mu_j = 0$ , pero

$$\begin{aligned} \sum \mu_j \mathbf{w}_j &= \sum \mu_j (A - \lambda I)^{\alpha-1} \mathbf{v}_j, \\ &= (A - \lambda I)^{\alpha-1} \sum \mu_j \mathbf{v}_j. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\sum \mu_j \mathbf{v}_j \in \text{Ker}(A - \lambda I)^{\alpha-1}$$

pero esto es una contradicción con la definición de  $\mathbf{v}_j$ .

Sea

$$\mathbf{w}_{j,k} = (A - \lambda I)^{\alpha-k} \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{w}_{j,\alpha} = \mathbf{v}_j.$$

Demostremos que estos son linealmente independientes. Para hacer esto tomemos una combinación lineal igual a cero manteniendo  $j$  fija

$$\sum_{k=1}^{\alpha-1} \mu_k \mathbf{w}_{j,k} + \mu_\alpha \mathbf{v}_j = \sum_{k=1}^{\alpha-1} \mu_k (A - \lambda I)^{\alpha-k} \mathbf{v}_j + \mu_\alpha \mathbf{v}_j = 0,$$

multiplicando esta última expresión por  $(A - \lambda I)^{\alpha-1}$  tenemos

$$(A - \lambda I)^{\alpha-1} \left( \sum_{k=1}^{\alpha-1} \mu_k \mathbf{w}_{j,k} + \mu_\alpha \mathbf{v}_j \right) = \mu_\alpha (A - \lambda I)^{\alpha-1} \mathbf{v}_j = 0$$

pero por la definición de  $\mathbf{v}_\alpha$ , la única manera de que esto se cumpla es que  $\mu_\alpha = 0$ . De manera análoga, multiplicando a esto último por  $(A - \lambda I)^{\alpha-2}$  tenemos que

$$(A - \lambda I)^{\alpha-2} \sum_{k=1}^{\alpha-1} \mu_k \mathbf{w}_{j,k} = \mu_{\alpha-1} (A - \lambda I)^{\alpha-2} \mathbf{v}_j = 0$$

y nuevamente esto se cumplirá sólo si  $\mu_{\alpha-1} = 0$ . De esta manera inductiva se concluye que los  $\mathbf{w}_{j,k}$  para  $j$  fija son linealmente independientes.

Por otra parte tenemos que

$$(A - \lambda I)\mathbf{w}_{j,k} = \mathbf{w}_{j,k+1} \rightarrow A\mathbf{w}_{j,k} = \lambda\mathbf{w}_{j,k} + \mathbf{w}_{j,k+1}.$$

De lo cual

$$A|_{\mathbf{w}_{j,k}, k=1, \dots, \alpha} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix} \quad (3)$$

con un bloque para cada  $j$  de dimensión  $\alpha$ . Después se completará el  $\ker(A - \lambda I)^{\alpha-2}$  en  $\ker(A - \lambda I)^{\alpha-1}$  y se repite la construcción, obteniendo bloques de dimensión  $\alpha - 1$  etc...

Finalmente, volviendo a considerar a  $A$  en su forma general (1), es decir en subespacios independientes, tendremos por lo anterior que

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_q \end{pmatrix}_{n \times n}$$

donde  $J_1$  representa a  $A_1$  en la base de los  $\mathbf{w}_{j,k}$ .

*Ejemplo* : Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que el polinomio característico de ésta es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 2)^3 = 0$$

luego los valores propios son

$$\lambda_1 = 2, \quad m(\lambda_1) = 3,$$

$$\lambda_2 = 0, \quad m(\lambda_2) = 1.$$

Si estudiamos sus valores propios tenemos que

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow v_1 = (1, 0, 1, 0),$$

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow u_1 = (0, 1, 0, -1).$$

De esto se tiene que la matriz no es diagonalizable, pero según el último resultado su forma canónica de Jordan será:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál será la matriz  $P$ , regular tal que  $P^{-1}AP = J$ ?

Si

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & u_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix},$$

verificando  $AP = PJ$ , entonces:

$$AP = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ Av_1 & Av_2 & Av_3 & Au_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = PJ = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & v_1 + \lambda_1 v_2 & v_2 + \lambda_1 v_3 & \lambda_2 u_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix},$$

Entonces, igualando

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \rightarrow (A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \quad (1)$$

$$Av_2 = v_1 + \lambda_1 v_2 \rightarrow (A - \lambda_1 I)v_2 = v_1 \quad (2)$$

$$Av_3 = v_2 + \lambda_1 v_3 \rightarrow (A - \lambda_1 I)v_3 = v_2 \quad (3)$$

$$Au_1 = \lambda_2 u_1 \rightarrow (A - \lambda_2 I)u_1 = 0 \quad (4)$$

(1) y (4) ya estan hechos, resolvamos entonces (2) y (3)

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

como  $v_1 = (0, 1, 0, 1)$  y  $(A - \lambda_1 I)v_2 = v_1$ , haciendo un poco de álgebra tenemos que  $v_2 = (0, 3/2, 0, -1/2)$ .

De la misma manera  $v_3 = (0, -1/2, -1/2, 1/2)$ , de lo cual obtenemos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix},$$

y entonces

$$P^{-1}AP = J.$$

A  $v_1, v_2$  se les llama vectores asociados a  $v_1$ . Al sistema  $\{v_1, v_2, v_3, u_1\}$  se le llama base de Jordan.

Para conseguir esta base, buscaremos siempre vectores asociados a vectores propios hasta alcanzar la multiplicidad del valor propio correspondiente.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

En este apéndice se demostrará la estimación sobre el radio de convergencia de la serie para  $\omega(z)$ . La demostración es adoptada de Berger, *Nonlinear Analysis*, pg 134.

Ya que  $F$  es analítica, tenemos

$$F(z, \omega) = F_z(z_0, \omega_0)(z - z_0) + F_\omega(z_0, \omega_0)(\omega - \omega_0) + \sum_{i+j=2}^{\infty} F_{ij} \frac{(z - z_0)^i}{i!} \frac{(\omega - \omega_0)^j}{j!}$$

donde

$$F_{ij} = \frac{\partial^{i+j} F}{\partial z^i \partial \omega^j}(z_0, \omega_0) = \frac{i! j!}{(2\pi i)^2} \int_{|\xi - z_0|=r} \int_{|\eta - \omega_0|=\rho} \frac{F(\xi, \eta)}{(\xi - z_0)^i (\eta - \omega_0)^j} d\xi d\eta$$

donde se usó la fórmula de Cauchy.

Si  $M = \sup_{|\xi - z_0| \leq r, |\eta - \omega_0| \leq \rho} |F(\xi, \eta)|$ , se tiene que  $\frac{|F_{ij}|}{i! j!} \leq \frac{M}{r^i \rho^j}$ . Entonces, la ecuación  $F(z, \omega) = 0$  es equivalente a la relación

$$\omega - \omega_0 = -F_\omega^{-1} F_z(z - z_0) - \sum_{i+j=2}^{\infty} \frac{F_\omega^{-1} F_{ij}}{i! j!} (z - z_0)^i (\omega - \omega_0)^j \tag{1}$$

donde la serie del lado derecho es acotada por la serie

$$\begin{aligned} & |F_{ij}^{-1}| \frac{M |z - z_0|^i}{r^i} + \sum_{i+j=2}^{\infty} |F_\omega^{-1}| M \frac{|z - z_0|^i |\omega - \omega_0|^j}{r^i \rho^j} \\ &= C \left( \sum_{i+j=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^i |\omega - \omega_0|^j}{r^i \rho^j} - 1 - \frac{|\omega - \omega_0|}{\rho} \right) \\ &= C \left( \left( \frac{1}{1 - |z - z_0|/r} \right) \left( \frac{1}{1 - |\omega - \omega_0|/\rho} \right) - 1 - \frac{|\omega - \omega_0|}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Ahora sabemos, de la primera parte del teorema de la función implícita, que  $\omega - \omega_0 = \sum a_n (z - z_0)^n$ .

Si escribimos la relación (1) como

$$\omega - \omega_0 = a_{10}(z - z_0) + \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij}(z - z_0)^i(\omega - \omega_0)^j$$

y se sustituye la serie por  $\omega - \omega_0$ , se obtiene

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = a_{10} = -F_{\omega}^{-1} F_z$$

$$a_2 = a_{20} + a_{11}a_1 + a_{02}a_1^2$$

$$\vdots$$

$$a_n = q_n(a_1, \dots, a_{n-1}, a_{ij}, i + j \leq n)$$

donde  $q_n$  es un polinomio con coeficientes positivos. Ahora bien, supongamos que  $|a_{ij}| \leq \alpha_{ij}$  y consideremos la ecuación  $y = \sum_{i+j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x^i y^j$  (con  $\alpha_{01} = \alpha_{00} = 0$ ).

Si buscamos una solución  $y = \sum_1^{\infty} \alpha_n x^n$  a este problema, se tendrá

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_{10}$$

$$\alpha_2 = \alpha_{20} + \alpha_{11}\alpha_1 + \alpha_{02}\alpha_1^2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = q_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{ij}, i + j \leq n)$$

ya que se trata de los mismos polinómios.

Además  $|a_n| = |q_n(a_1, \dots, a_{n-1}, a_{ij})| = q_n(|a_1|, \dots, |a_{n-1}|, |a_{ij}|)$  (porque los coeficientes de  $q_n$  son positivos) y, ya que  $|a_{ij}| \leq \alpha_{ij}$  se tiene

$$|a_n| \leq q_n(|a_1|, \dots, |a_{n-1}|, \alpha_{ij}) \leq q_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{ij}) = \alpha_n$$

donde se usa un argumento de inducción. Por lo tanto,  $|a_n| \leq \alpha_n$ .

Esto implica que si la serie para  $y$  converge, entonces también convergerá la serie para  $\omega - \omega_0$ .

Aquí, consideremos  $y$  tal que

$$y = C \left( \frac{1}{(1-x/r)} \frac{1}{1-y/\rho} - 1 - \frac{y}{\rho} \right) \quad (2)$$



es decir  $y = \sum_{i+j} \alpha_{ij} x^i y^j$ , con los  $\alpha_{ij}$  dados en la serie del principio.

Ahora si  $y$  es solución de (2) con  $y(0) = 0$ ,  $y$  es solución de la ecuación  $y^2(1 + C/\rho)(1 - x/r)/\rho - y(1 - x/r) + Cx/r = 0$  es decir

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho + C)} \left( 1 - \left( 1 - \frac{x(\rho + 2C)^2}{r\rho^2} \right)^2 (1 - x/r)^{-1/2} \right)$$

Es obvio que  $y$  tiene una serie de potencias convergente si

$$|x| < \min \left( r, r \left( \frac{\rho}{\rho + 2C} \right)^2 \right) = r \left( \frac{\rho}{\rho + 2C} \right)^2.$$

Por lo tanto el radio de convergencia para la serie de  $\omega - \omega_0$  es por lo menos  $r \left( \frac{\rho}{\rho + 2C} \right)^2$ .

Notese que este razonamiento prueba también el teorema de la función implícita.

ALFA EN POTENCIAS DE BETA ALREDEDOR DE  $\alpha_0$ :

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\alpha_0 - 2}$$

$$\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_4 = \frac{7 + 5\alpha_0}{32(\alpha_0 - 4)(\alpha_0 - 1)^3}$$

$$\alpha_5 = 0$$

$$\alpha_6 = \frac{29 + 58\alpha_0 + 9\alpha_0^2}{64(\sqrt{\alpha_0 - 3})(\sqrt{\alpha_0 - 2})(\sqrt{\alpha_0 - 1})^5(\sqrt{\alpha_0 + 1})^4(\sqrt{\alpha_0 + 2})(\sqrt{\alpha_0 + 3})}$$

$$\alpha_7 = 0$$

$$\alpha_8 = \frac{467892 + 1118983\alpha_0 + 620300\alpha_0^2 - 355302\alpha_0^3 + 13222\alpha_0^4 + 347\alpha_0^5 + 864\alpha_0^6 - 68\alpha_0^7 + 2\alpha_0^8}{24576(\sqrt{\alpha_0 - 4})(\sqrt{\alpha_0 - 3})(\sqrt{\alpha_0 - 2})^3(\sqrt{\alpha_0 - 1})^7(\sqrt{\alpha_0 + 1})^7(\sqrt{\alpha_0 + 2})^3(\sqrt{\alpha_0 + 3})(\sqrt{\alpha_0 + 4})}$$

donde

$$\alpha(\beta) = \alpha_0 + \alpha_1\beta + \alpha_2\beta^2 + \alpha_3\beta^3 + \alpha_4\beta^4 + \alpha_5\beta^5 + \alpha_6\beta^6 + \alpha_7\beta^7 + \alpha_8\beta^8 + \dots$$

---

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [Ab] Milton Abramowitz, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards, applied mathematics.
- [Ah] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Mac Graw Hill, international student edition.
- [A-G] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of linear operator in Hilbert space*, Vol I, Ungar Publishing co. 1966.
- [Ar] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Nueva York 1974.
- [Ba] Robert G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático*, Limusa, México, 1987.
- [Be] Melvyn Berger, *Nonlinearity and funtional analysis*, Academic Press, 1977.
- [B-F] Richard L. Burden & J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*, Ed. Iberoamérica, México, 1985.
- [C-L] Earl A. Coddington and Norman Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw Hill, New York, 1955.
- [Ch] V. Chirikov, *Physic Reports*, 1979.
- [EC] Enciclopedia Universal Ilustrada, tomo XXXIII, ESPARSA-CALPE, S.A., Madrid, España, 1975.
- [Ha] Norman Haaser, *Análisis Real*, Trillas, México, 1978.
- [Hof] Kenneth Hoffman, *Álgebra Lineal*, Prentice Hall, México, 1973.
- [Hol] Gerald Holton, *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*, Edi-

torial Reverté. Barcelona, España, 1981.

[J-S] D.W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1977.

[La] Serge Lang, *Real Analysis*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1969.

[Lan] Landau y Lifshitz, *Mecánica*, Reverté, s.a. España, 1978.

[L-L] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, 1983.

[Ma] A. Markushévich, *Teoría de las Funciones Analíticas*, Ed. Mir, Moscú, 1987.

[Math] Mathematica 2.2 for SPARC, Copyright 1988-93 Wolfram Research, Inc.

[M-S] J. Meixner, F. W. Shäfke, *Mathieusche Funktionen und Sphäroid Funktionen*, Springer Verlag, Berlín, 1954.

[M-W] Wilhelm Magnus and Stanley Winkler, *Hill's Equation*, Dover publication, New York, 1979.

[Mo] Donald Monro M. *A crash course in Fortran 77*, Britain, 1989.

[Pe] Lawrence Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1991.

[Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1962.

[SA] Diccionario Enciclopédico SALVAT UNIVERSAL, Barcelona, España, 1981.

[Ste] Shlomo Sternberg, *Celestial Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.