

01170

8
20j

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA



**SIMULACION DIGITAL DE TRANSITORIOS
ELECTROMAGNETICOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA,
INCLUYENDO CONDICIONES NO LINEALES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
**MAESTRO EN INGENIERIA
(ELECTRICA)**
P R E S E N T A
I. E. ELIZABETH GODOY ALCANTAR

ASESOR: DR. JOSE LUIS NAREDO VILLAGRAN

MEXICO, D. F.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1994



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Esta tesis se realizó en el Instituto
de Investigaciones Eléctricas en el
Depto. de Transmisión y Distribución
(Cuernavaca, Morelos) bajo la dirección del
Dr. José Luis Naredo Villagrán.**

Jurado asignado:

Ing. Rafael Guerrero Cepeda

Dr. José Luis Naredo Villagrán

Dr. Víctor F. Hermosillo Worley

M.C. Pablo Moreno Villalobos

Dr. Francisco García Ugalde

**A mi madre,
Carolina Alcántar M.
y
A la grata memoria de mi padre,
José Godoy G.**

Agradecimientos

A mi madre Carolina Alcántar y a mi padre José Godoy por su amor, comprensión, apoyo y paciencia de siempre.

A mis hermanos Carolina y J. Martín por todo su cariño y apoyo.

Al Ing. Rafael Guerrero C. por todas sus consideraciones, apoyo y guía brindados.

Al Dr. José Luis Naredo V., asesor de esta tesis, por su valiosa ayuda.

Al M.C. Pablo Moreno V. por sus sugerencias e ideas que enriquecieron este trabajo y por toda su ayuda, sin la cual no hubiera sido posible la realización de esta tesis.

A:

Dr. Víctor F. Hermosillo Worley
Dr. Francisco García Ugalde

miembros del jurado, por la revisión de la tesis.

Al M.C. Isaías Guillén Moya por toda la ayuda brindada.

También deseo agradecer a las siguientes Instituciones:

A la UNAM por la beca otorgada (Convenio CFE/IEE-UNAM) para la realización de mis estudios de Maestría en Ingeniería.

Al Instituto de Investigaciones Eléctricas, Depto. de Transmisión y Distribución (Cuernavaca, Morelos) por la beca otorgada y por el uso de sus instalaciones durante la realización de esta tesis.

Al CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) por la beca otorgada para la realización de esta tesis.

INDICE

INTRODUCCION

1 ANALISIS NUMERICO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	1
1.1 Transformada inversa de Fourier	3
1.1.1 Proceso de discretización	4
1.1.2 Errores numéricos	8
1.1.3 Evaluación numérica de la transformada inversa modificada de Fourier	13
1.2 Transformada modificada de Fourier	14
1.3 Transformada de funciones discontinuas	19
1.4 Transformada rápida de Fourier	21
1.5 Ejemplo de aplicación	21
2 TRANSITORIOS EN LINEAS DE TRANSMISION	25
2.1 Modelo de línea de transmisión	26
2.1.1 Solución de las ecuaciones de propagación	28
2.2 Simulación digital de maniobras con interruptores	32
2.2.1 Cierre de interruptores	32
2.2.2 Apertura de interruptores	35
2.3 Ejemplo de aplicación	37
3 MODELADO DE ELEMENTOS NO LINEALES	45
3.1 Métodos utilizados en la simulación de elementos no lineales	46
3.2 Aproximación piezolineal en el dominio de la frecuencia	50
3.2.1 Resistencias no lineales	51
3.3 Ejemplo de aplicación	61

4 SIMULACION DE CASOS PRACTICOS DE TRANSITORIOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA Y SU COMPARACION CON EL EMTP	66
4.1 Sobretensiones por descargas atmosféricas	67
4.2 Recierre en líneas de transmisión	76
4.3 Tensión transitoria de recuperación	86
4.4 Apartarrayos	92
4.4.1 Sistema independiente de la frecuencia	93
4.4.2 Sistema dependiente de la frecuencia	97
CONCLUSIONES	101
RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS	103
APENDICE A PARAMETROS DE LINEAS DE TRANSMISION AEREAS	105
A.1 Matriz de impedancia serie	105
A.2 Matriz de admitancia en derivación	109
APENDICE B CALCULO DE VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS	110
B.1 Método QR	110
B.2 Iteración inversa	111
B.3 Cálculo de componentes modales	112
BIBLIOGRAFIA	115

INTRODUCCION

Algunos de los parámetros más importantes para el diseño de sistemas eléctricos de potencia se determinan a través del estudio de los fenómenos transitorios que se presentan en ellos. Dentro de estos parámetros se pueden citar, por ejemplo, los niveles de aislamiento, la capacidad de interruptores y apartarrayos, entre otros. Tradicionalmente, estos análisis se efectúan empleando circuitos analizadores de redes (Transient Network Analyzers, TNAs), donde los elementos de la red son modelados en forma analógica. En fechas más recientes, estos estudios se han venido complementando con simulaciones hechas sobre modelos matemáticos en computadoras digitales. El esfuerzo que se hace con el objeto de mejorar las técnicas de modelado está completamente justificado, ya que éstos tienen impacto en la confiabilidad y en los costos de los diseños.

Dentro de las técnicas digitales que se emplean actualmente para el análisis de transitorios se tienen las del dominio del tiempo y las del dominio de la frecuencia; siendo las del dominio del tiempo las más utilizadas. La principal razón para esto es, indudablemente, la disponibilidad del "Electromagnetic Transients Program" o EMTP. Este programa es un sistema muy poderoso que permite simular eficientemente condiciones transitorias en los sistemas de potencia e incluir en las simulaciones los dispositivos de control de los sistemas.

Debido a las consideraciones que deben hacerse a los programas en el dominio del tiempo con respecto a líneas y cables de transmisión [13], resulta complicado incluir directamente los efectos de dispersión lineal en las simulaciones. Dichos efectos se deben a que los valores de los elementos de parámetros distribuidos dependen de la frecuencia. Se han propuesto diferentes técnicas para incluir los efectos de dispersión en las simulaciones; por ejemplo, funciones de peso [28] y convoluciones recursivas [25]. En estas dos técnicas se asume que el producto ZY , para una línea polifásica, puede ser diagonalizado utilizando matrices de transformación reales y constantes para todas las frecuencias. Esta consideración es correcta para el caso de líneas perfectamente transpuestas y es una buena aproximación para ciertas líneas de transmisión aéreas no transpuestas. Sin embargo, para casos más generales de sistemas polifásicos, esta suposición es cuestionable. Recientemente se ha propuesto un método que permite incluir en las simulaciones la dependencia de la frecuencia,

tanto de los parámetros eléctricos como de la matriz de transformación de cables [27]. Para estos elementos la matriz de transformación presenta una considerable variación con la frecuencia. Sin embargo, dicho método para cables no ha podido ser extendido satisfactoriamente para el caso de líneas aéreas.

La principal ventaja de las técnicas del dominio de la frecuencia, con respecto a las del dominio del tiempo, es la facilidad con que se pueden incluir los efectos de dispersión lineal en los modelos de líneas y de cables. En contraste con esta ventaja, las técnicas del dominio del tiempo resultan más convenientes cuando se requiere analizar condiciones no lineales. Este tipo de condiciones se presentan cuando la red incluye elementos cuyos parámetros dependen fuertemente ya sea de la tensión o de la corriente. Dentro de estos elementos se encuentran ciertos interruptores, apartarrayos, reactores y transformadores saturables.

Dado que el dominio de la frecuencia es un método para analizar sistemas lineales, la simulación de condiciones no lineales es complicada y deben emplearse aproximaciones piezolineales. Sin embargo, como en este método se hacen muy pocas suposiciones en cuanto al modelado de elementos lineales, resulta muy útil para evaluar y complementar las técnicas del dominio del tiempo.

A falta de un programa de propósito general para simular transitorios en redes eléctricas en el dominio de la frecuencia [32], los objetivos principales de esta tesis fueron:

1. El desarrollo de un programa que permita simular transitorios en redes eléctricas pequeñas empleando las técnicas del dominio de la frecuencia.
2. El desarrollo de un modelo general de elementos resistivos no lineales empleando aproximaciones piezolineales.

De esta forma se dispondría de un programa de análisis de transitorios en el dominio de la frecuencia (PTDF), en el cual sería posible realizar simulaciones en redes eléctricas constituidas por:

- resistencias, capacitancias e inductancias concentradas
- líneas de transmisión aéreas polifásicas

- interruptores
- resistencias no lineales

El programa desarrollado se basa en las técnicas que se describen a continuación en forma breve. La red se modela a través de circuitos equivalentes para cada uno de sus elementos [21]. La respuesta de la red se obtiene resolviendo las ecuaciones nodales [9] en el dominio de la frecuencia. Las líneas de transmisión se representan a través de su matriz de admitancia de dos puertos [38]. Esta matriz se obtiene resolviendo las ecuaciones de propagación a través del uso de la teoría modal [40]. Los valores y vectores característicos del producto ZY de una línea polifásica se determinan a través del algoritmo QR simétrico e iteración inversa, respectivamente. Las operaciones con interruptores se simulan como problemas de condiciones iniciales aplicando el principio de superposición [30,39]. Para el modelado de resistencias no lineales se utilizan aproximaciones piezolineales de sus características $v-i$. El "recorrido" de la característica de las resistencias no lineales se simula a través de interruptores que conectan o desconectan de la red una rama que permite representar adecuadamente el segmento lineal donde opera el elemento [31]. En la obtención de la transformada directa e inversa de Fourier se hace uso del algoritmo de Cooley-Tukey o de transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT) [2,5].

La tesis consta de cuatro capítulos, una sección de conclusiones y recomendaciones y dos apéndices. En el primer capítulo se presentan las expresiones matemáticas que permiten evaluar numéricamente las transformadas directa e inversa modificada de Fourier; además, se introduce el procedimiento aquí utilizado para el análisis de redes eléctricas. En el segundo capítulo se presenta un procedimiento general para la simulación de transitorios originados en líneas de transmisión por maniobras con interruptores. En el tercer capítulo, primeramente se proporciona una descripción breve de las técnicas empleadas para la simulación digital de elementos no lineales; posteriormente se describe el procedimiento de simulación de resistencias no lineales en el dominio de la frecuencia. En el cuarto capítulo se presentan comparaciones entre los resultados obtenidos con el programa desarrollado y los del EMTP. Finalmente en la sección de conclusiones y recomendaciones se resumen los resultados obtenidos en la tesis y se hacen sugerencias para futuros desarrollos.

CAPITULO 1

ANALISIS NUMERICO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

La respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo sometido a una entrada senoidal en estado de régimen permanente es también una señal senoidal de la misma frecuencia que la de la entrada. La amplitud de la señal de salida está dada por el producto de la amplitud de la señal de entrada por $|G(j\omega)|$, siendo $G(j\omega)$ la función de transferencia del sistema. El ángulo de fase de la señal de salida difiere del de la entrada en un valor $\phi = \angle G(j\omega)$ [21,33].

Aunque esta técnica es para análisis en estado estable, puede ser extendida al análisis transitorio mediante la transformada de Fourier. Dicha transformada permite expresar una función de entrada $V_e(t)$ como una sumatoria infinita de términos senoidales, la cual define un espectro continuo de frecuencias [23]. De este modo la respuesta total será igual a la suma de las respuestas parciales correspondientes a cada uno de los términos.

El procedimiento anterior puede representarse analíticamente de la siguiente forma:

$$V_s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega).V_e(j\omega)\} \quad (1.1)$$

Donde $V_e(j\omega)$ es la transformada de Fourier de $V_e(t)$ y $V_s(t)$ es la respuesta del sistema. La solución analítica de expresiones del tipo (1.1), presenta varias limitaciones; las principales son:

- La función de transferencia $G(j\omega)$ debe conocerse analíticamente.
- $V_e(t)$ sólo puede ser una función cuya transformada de Fourier $V_e(j\omega)$ se conozca.
- La inversión analítica puede volverse muy complicada.

Mediante la evaluación numérica, tanto de la transformada directa como de la inversa de Fourier, se evitan todos estos inconvenientes. Si se deseara obtener la transformada inversa de una función conocida $H(\omega)$, aplicando procedimientos numéricos, se requeriría como primer paso muestrear la función. Los fasores antes representados en forma continua deben representarse ahora en un espectro discreto (serie de Fourier). Como sólo se puede considerar un número finito de muestras, la aproximación de la transformada de Fourier corresponde a una serie de Fourier truncada. Por otro lado, para que una función pueda expresarse mediante una serie de Fourier, ésta debe ser periódica. Como las funciones de excitación involucradas en el análisis de transitorios generalmente no lo son, se hace necesario especificar de antemano un tiempo finito de observación, T_{obs} . De este modo, la frecuencia fundamental de la serie de Fourier será $\omega_0 = 2\pi/T_{obs}$ [26].

Uno de los efectos que ocasiona la periodización de la respuesta del sistema es el traslape con las respuestas vecinas; es decir, la respuesta en el intervalo de interés (0- T_{obs}) se encuentra alterada por las funciones de periodos adyacentes. Para minimizar este efecto se introduce un factor de amortiguamiento, con lo cual la transformada discreta de Fourier se asemeja a la transformada de Laplace [11].

Una vez que se dispone de las funciones $G(j\omega_k)$ y $V_E(j\omega_k)$ ($k=1,2,\dots,K$) el procedimiento numérico que se aplica para la obtención de $V_S(t)$ es el siguiente:

1. Para cada uno de los armónicos considerados se obtiene $V_S(j\omega_k)$ a través de la expresión:

$$V_S(j\omega_k) = G(j\omega_k) \cdot V_E(j\omega_k) \quad (1.2)$$

2. Se aplica la transformada inversa a $V_S(j\omega_k)$ ($k=1,2,3,\dots,K$)

Cuando el sistema tiene más de una entrada y/o más de una salida la función de transferencia se convierte en una matriz de transferencia, lo cual puede expresarse simbólicamente de la siguiente forma:

$$V_S(j\omega_k) = G(j\omega_k) V_E(j\omega_k) \quad (1.3)$$

Para determinar las salidas del sistema, el sistema de ecuaciones representado por (1.3) se resuelve tantas veces como número de componentes armónicos se estén

considerando en la simulación. Posteriormente, las respuestas de cada armónico se superponen y, de este modo, se obtiene la transformada inversa de las señales de salida.

El objetivo principal de este capítulo es, en términos generales, determinar las expresiones que permitirán evaluar numéricamente las transformadas directa e inversa de Fourier. Otros objetivos son ilustrar el procedimiento numérico a seguir en la obtención de la transformada inversa de una función e introducir el método utilizado en la tesis para el análisis de una red eléctrica.

1.1 Transformada inversa de Fourier

La transformada inversa de Fourier una función continua $H(\omega)$ está definida por la siguiente expresión:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.4)$$

Si se desea evaluar numéricamente esta transformada, será necesario muestrear la función $H(\omega)$ y, además, las frecuencias máximas consideradas en la integral de la expresión 1.4 no podrán ser infinitas. La señal en el tiempo que se obtenga mediante la transformada inversa de su espectro muestreado y truncado no corresponderá exactamente a $h(t)$. Se puede pensar que se aplicará la definición de transformada inversa a una función $\tilde{H}(\omega)$ y su transformada exacta $\tilde{h}(t)$ estará dada por la expresión:

$$\tilde{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.5)$$

A fin de evaluar si la función $\tilde{H}(\omega)$ es una buena aproximación de $H(\omega)$, deberán analizarse todas las modificaciones que la primera sufre durante el proceso de discretización y estimar la magnitud de los errores en que se incurre. Esto se hace a continuación.

1.1.1 Proceso de discretización

Con la finalidad de ilustrar gráficamente las modificaciones que experimentan las señales continuas (tanto en la frecuencia como en el tiempo) durante la discretización, considérese el par transformado que se muestra en la figura 1.1a. El primer paso a seguir es el muestreo de la señal $H(\omega)$; la forma de onda muestreada puede expresarse como $H(\omega)\delta_{\Delta\omega}(\omega)$, donde $\delta_{\Delta\omega}(\omega)$ es un tren de impulsos en el dominio de frecuencia (figura 1.1b). Si el intervalo de muestreo es $\Delta\omega$, la función muestreada puede expresarse de la siguiente forma:

$$H(\omega)\delta_{\Delta\omega}(\omega) = H(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Delta\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\Delta\omega)\delta(\omega - k\Delta\omega) \quad (1.6)$$

La transformada inversa de la señal muestreada en el dominio de la frecuencia (1.6) puede obtenerse realizando la convolución de las funciones $h(t)$ y $\delta_{T_{obs}}(t)$. Se puede observar en la figura 1.1c que el resultado de esta operación es una función periódica con periodo igual a $2\pi/\Delta\omega$. De aquí se sigue que el tiempo máximo de observación T_{obs} , para la señal muestreada en el dominio de la frecuencia, es igual a:

$$T_{obs} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (1.7)$$

Debido a que digitalmente no se puede manejar un número infinito de muestras, la función muestreada debe ser truncada. Este truncamiento puede representarse como el producto de la función muestreada por la ventana rectangular mostrada en la figura 1.1d; ésta es de la forma:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & -\Omega < \omega < \Omega \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (1.8)$$

El producto de (1.6) y (1.8) es:

$$H(\omega)\delta_{\Delta\omega}(\omega)X(\omega) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\Delta\omega)\delta(\omega - k\Delta\omega) \right] X(\omega)$$

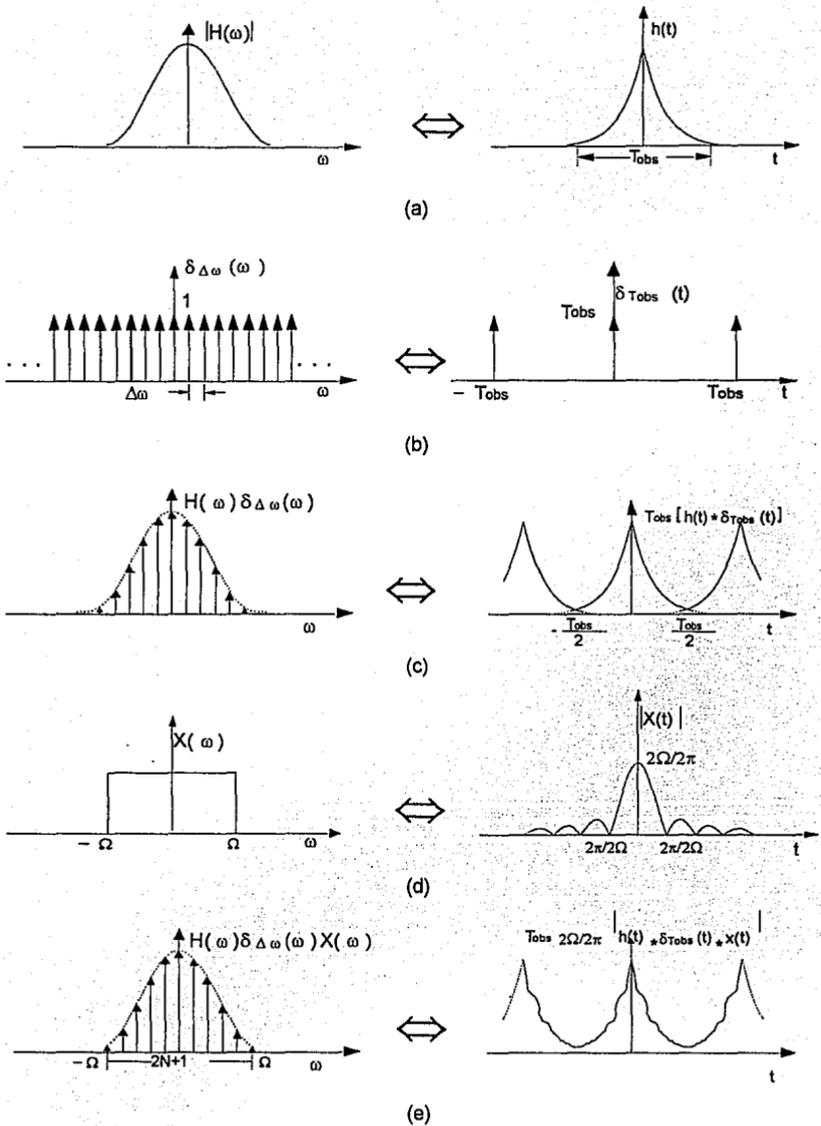


Fig. 1.1 Desarrollo gráfico de la transformada inversa discreta de Fourier

cont. Fig. 1.1

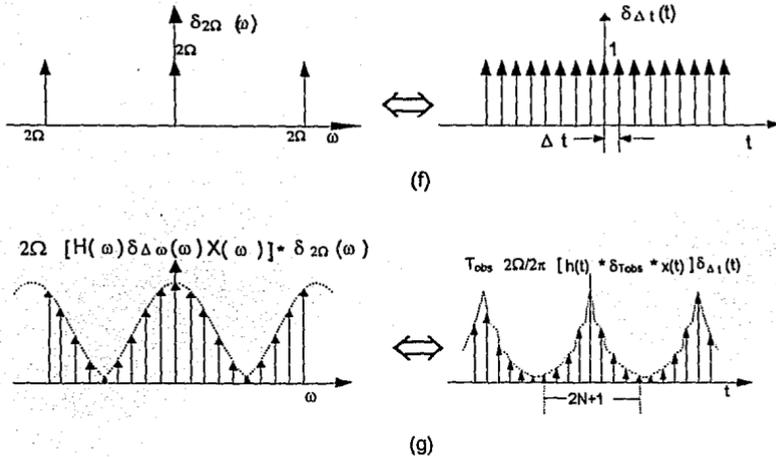


Fig. 1.1 Desarrollo gráfico de la transformada inversa discreta de Fourier

$$H(\omega)\delta_{\Delta\omega}(\omega)X(\omega) = \sum_{k=-N}^N H(k\Delta\omega)\delta(\omega - k\Delta\omega) \quad (1.9)$$

Donde $N = \Omega/\Delta\omega$; es decir, se ha considerado que hay $2N+1$ funciones impulso dentro del intervalo de truncamiento. El equivalente en el tiempo de la ecuación 1.9 puede obtenerse realizando la convolución de la función $x(t)$ con $h(t) \cdot \delta_{T_{obs}}(t)$. Esto, como puede observarse de las figuras 1.1d y 1.1e, introduce oscilaciones en la función en el dominio del tiempo.

El paso final en el proceso de discretización consiste en muestrear la transformada inversa de Fourier de la función 1.9. Esto puede representarse como el producto de la función en el tiempo por un tren de impulsos. En el dominio de la frecuencia, este producto es equivalente a la convolución de la función 1.9 y la transformada de la función $\delta_{\Delta t}(t)$ mostrada en la figura 1.1f. Esta última función puede ser expresada en el dominio de la frecuencia de la siguiente forma:

$$\delta_{2\Omega}(\omega) = 2\Omega \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\Omega r) \quad (1.10)$$

Dado que la discretización en el dominio del tiempo periodiza la función imagen en el dominio de la frecuencia, para la expresión 1.10 se ha escogido Δt de forma que el periodo sea de 2Ω . De este modo al realizar la convolución, los espectros repetidos no se traslapan. La siguiente expresión reúne las modificaciones sufridas por $H(\omega)$ para su evaluación numérica:

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\omega) &= [H(\omega)\delta_{\Delta\omega}(\omega)X(\omega)] * \delta_{2\Omega}(\omega) \\ &= \left[\sum_{k=-N}^N H(k\Delta\omega)\delta(t - k\Delta\omega) \right] * \left[2\Omega \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\Omega r) \right] \\ \tilde{H}(\omega) &= 2\Omega \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-N}^N H(k\Delta\omega)\delta(\omega - k\Delta\omega - 2\Omega r) \right] \quad (1.11)\end{aligned}$$

Lo único que resta ahora es evaluar la transformada inversa de (1.11). De esta forma se obtendrá una función en el dominio del tiempo; que como puede observarse en la figura 1.1g se encuentra alterada por el factor " $(T_{\text{obs}}) \cdot (2\Omega/2\pi)$ "; esto es debido al proceso mismo de discretización. Con la finalidad de obtener $\tilde{h}(n\Delta t)$ se aplicará la definición 1.5 de la transformada inversa a (1.11) y el resultado de ésta será modificado por el factor $(1/T_{\text{obs}}) \cdot (2\pi/2\Omega)$:

$$\tilde{h}(n\Delta t) = \frac{1}{T_{\text{obs}}} \cdot \frac{2\pi}{2\Omega} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-N}^N H(k\Delta\omega)\delta(\omega - k\Delta\omega - 2\Omega r) e^{j\omega\Delta t} d\omega \right] \quad (1.12)$$

La expresión (1.12) puede reducirse a:

$$\tilde{h}(n\Delta t) = \frac{1}{T_{\text{obs}}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-N}^N H(k\Delta\omega) e^{j(k\Delta\omega + 2\Omega r)n\Delta t} \quad (1.13)$$

Debido a que la función $\tilde{h}(n\Delta t)$ es periódica y a que sólo se requiere conocer la respuesta durante un periodo, se puede tomar únicamente el valor de la función 1.13 correspondiente a $r=0$; de esta forma, la ecuación 1.13 se reduce a:

$$\tilde{h}(n\Delta t) = \frac{1}{T_{obs}} \sum_{k=-N}^N H(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega n\Delta t} \quad (1.14)$$

Las señales del dominio del tiempo involucradas en el análisis de transitorios son reales; puede entonces aplicarse la siguiente propiedad de la transformada de Fourier [5]:

$$H(-k\Delta\omega) = H^*(k\Delta\omega) \quad (1.15)$$

Utilizando (1.15) en (1.14) se obtiene:

$$\tilde{h}(n\Delta t) = \frac{1}{T_{obs}} \sum_{k=1}^N \left(H(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega n\Delta t} + H^*(k\Delta\omega) e^{(jk\Delta\omega)^* n\Delta t} \right) + H(0) \quad (1.16)$$

$$\tilde{h}(n\Delta t) = \frac{2}{T_{obs}} \text{Real} \left\{ \sum_{k=1}^N H(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega n\Delta t} \right\} + H(0) \quad (1.17)$$

De la ecuación anterior es evidente que pueden determinarse las $2N+1$ muestras de $\tilde{h}(n\Delta t)$ considerando sólo N muestras de $H(\omega)$. Si la función $h(t)$ es una función que empieza en cero sólo es necesario considerar N muestras. De esta forma se define Δt como:

$$\Delta t = \frac{T_{obs}}{N} \quad (1.18)$$

1.1.2 Errores numéricos

El análisis presentado en la sección 1.1.1 muestra el origen de los errores en que se incurre cuando se evalúa digitalmente la transformada inversa de Fourier [10,11,41]. Estos son de dos tipos: los originados por el muestreo y los originados por el truncamiento de los intervalos de integración. A continuación se analizan las técnicas para combatir a ambos tipos de errores.

(a) Errores originados por muestreo

La transformada inversa del espectro de una señal física será una función en el tiempo definida en el intervalo de tiempo $t_0 < t < \infty$. Es decir, que estas señales tienen que tener un tiempo de inicio. Es posible asignar a este tiempo el valor cero. En las figuras 1.1a, 1.1b y 1.1c se observó que el muestreo del espectro de la señal es equivalente a realizar la convolución de la forma de onda equivalente en el tiempo con un tren de impulsos. También se observó ahí que dicha convolución produce un número infinito de encimamientos de la función original consigo misma, retardada a intervalos de tiempo que son múltiplos enteros del tiempo de observación T_{obs} . Por otro lado, si la función $H(\omega)$ está definida, ésta tendrá que corresponder a una función en el tiempo que satisfaga la condición de tender a cero a medida que $|t|$ tiende a infinito. En términos prácticos, se puede considerar un intervalo de tiempo " T_{obs} " fuera del cual la magnitud de la señal sea despreciable. De esta forma, si la frecuencia de muestreo de la función $H(\omega)$ se determina en función de este intervalo el traslape de señales en el tiempo puede reducirse considerablemente.

En la práctica es muy difícil conocer el intervalo fuera del cual la magnitud de una señal $h(t)$, que se desea conocer sea despreciable. Se puede, sin embargo pensar en amortiguar artificialmente esta señal en el tiempo para reducir el error originado por el encimamiento o traslape [11,42]. Es decir, la función $H(\omega)$ no será la transformada de la función $h(t)$ sino de $h(t)e^{-at}$, donde "a" es un número real positivo. La transformada de Fourier modificada de una función $h(t)$ está definida por:

$$H(a + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-at}e^{-j\omega t} dt \quad (1.19)$$

Reacomodando términos en los exponentes y considerando que $h(t)$ empieza en cero, la ecuación 1.19 puede escribirse como:

$$H(a + j\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-(a+j\omega)t} dt \quad (1.20)$$

La expresión anterior se asemeja a la definición de transformada de Laplace de una función $h(t)$ por lo que en términos prácticos se puede afirmar que la transformada

modificada de Fourier de una función que empieza en cero es numéricamente igual a la transformada de Laplace.

La transformada inversa modificada de Fourier de $H(a+j\omega)$ está dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(a + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.21)$$

Nótese que (1.21) también se asemeja a la transformada inversa de Laplace:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} H(s) e^{st} ds \quad (1.22)$$

A diferencia de la transformada de Laplace, para la transformada modificada de Fourier se escoge un valor grande para "a" procurando, que la trayectoria de integración englobe todos los puntos singulares de $H(a+j\omega)$. Por una parte, entre más grande sea el valor de "a" en (1.20), los errores de encimamiento serán menores. Sin embargo, debe notarse en (1.21) que la transformada inversa se obtiene aplicando el factor e^{at} el cual amplifica los errores numéricos, sobre todo al final del intervalo cuando "t" se acerca a "T_{obs}".

En la figura 1.2 se muestra la respuesta obtenida en la simulación de un transitorio en una red eléctrica. Esta tensión corresponde a un nodo que es energizado a los 2.5 ms. Obviamente, la tensión del nodo debe presentar un valor nulo en el intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 2.5 ms. Las oscilaciones en este intervalo de tiempo para las señales de la figura 1.2a y 1.2b hacen suponer que el valor "a" no es lo suficientemente grande; es decir que el camino de integración se recorre cerca de los puntos singulares de la función $H(a+j\omega)$. En la figura 1.2c, el comportamiento de la tensión durante este intervalo de tiempo puede considerarse aceptable. En el caso de la figura 1.2d se observa un buen comportamiento durante la primera parte del tiempo de observación, pero en la última parte se aprecian errores numéricos. Este último caso muestra el efecto de elegir un factor "a" demasiado grande.

De la figura 1.2 es evidente que la respuesta obtenida es dependiente del factor de amortiguamiento "a", sin embargo, una vez que se determina el valor óptimo,

pequeñas variaciones alrededor de éste no producen diferencias significativas en las respuestas. La determinación del valor óptimo de "a" se basa en pruebas empíricas. A menos que se especifique lo contrario, las simulaciones que se realizan en esta tesis utilizan un factor $a=2.0\Delta\omega$. Independientemente del valor de "a" debido al proceso numérico de la transformada inversa, la respuesta tiende a diverger en la última parte del tiempo de observación. Por tanto, es recomendable descartar el último 10% del tiempo de observación [28].

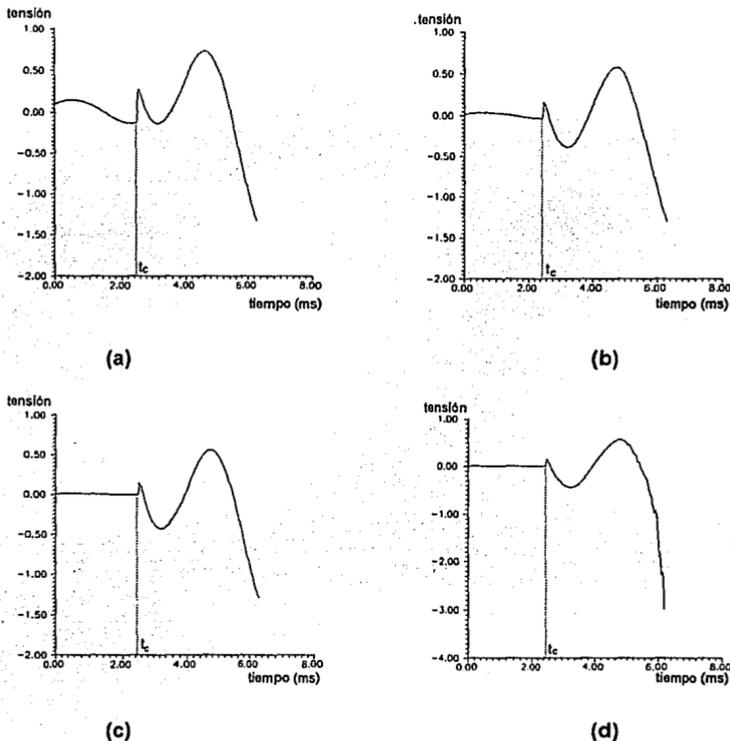
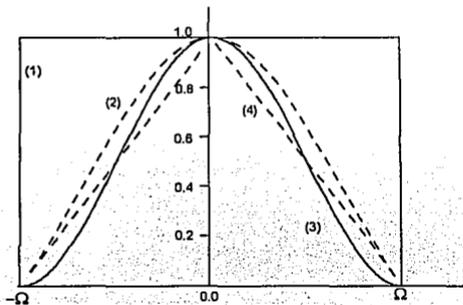


Fig. 1.2 Tensión en un nodo que es energizado
 en $t_c=2.5\text{ms}$ (a) $a=0.5 d\omega$ (b) $a=1.0 d\omega$
 (c) $a=2.0 d\omega$ (d) $a=5.0 d\omega$

(b) Errores originados por truncamiento del intervalo de integración.

Se ha visto que el truncamiento del intervalo de integración de ω , al invertir digitalmente la función $H(j\omega)$, provoca oscilaciones numéricas en la función imagen $h(t)$ en el dominio del tiempo. Estas oscilaciones, que se ilustraron en las figuras 1.1d y 1.1e, se conocen como fenómeno de Gibbs.

Está claro, tanto en el análisis anterior como en esas figuras 1.1d y 1.1e, que las oscilaciones de Gibbs se deben al truncamiento abrupto efectuado mediante la ventana rectangular $X(\omega)$ de la figura 1.1d. Una manera de reducir tales oscilaciones consiste en aplicar ventanas que efectúan un truncamiento más suave. Algunas de las ventanas más comunes se ilustran en la figura 1.3. Nótese que estas funciones truncan $H(\omega)$ asignándole un menor peso a las muestras de alta frecuencia.



$$\begin{aligned} &|\omega| \leq \Omega \\ (1) \quad &\sigma(\omega) = 1.0 \\ (2) \quad &\sigma(\omega) = \frac{\text{sen}(\pi\omega/\Omega)}{(\pi\omega/\Omega)} \\ (3) \quad &\sigma(\omega) = 0.54 + 0.46 \cos(\pi\omega/\Omega) \\ (4) \quad &\sigma(\omega) = \left[1 - \frac{|\omega|}{\Omega} \right]^2 \end{aligned}$$

Fig. 1.3 Funciones "ventana"

- (1) Rectangular, (2) Lanczos
(3) Hamming, (4) Bartlett

Con el propósito de ilustrar el efecto de las funciones ventana, considérese la figura 1.4. En ella se ha aproximado la función ilustrada en la figura 1.4a por una serie de Fourier de 7 términos, la cual se grafica con línea continua en la figura 1.4b. Sobre esta figura 1.4b, también se incluye en línea punteada la misma aproximación con 7 términos de la función escalón; en este caso, sin embargo se ha aplicado la ventana de Hamming.

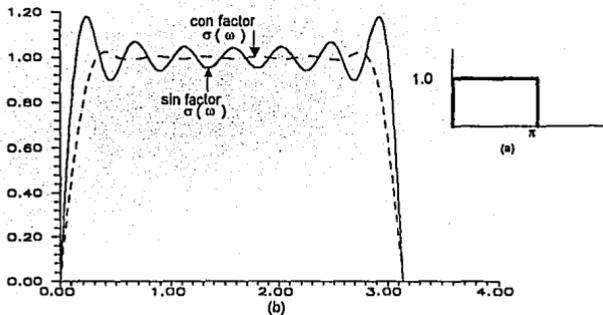


Fig. 1.4 Aproximación de una función escalón mediante 7 términos de la serie de Fourier.

1.1.3 Evaluación numérica de la transformada inversa modificada de Fourier

Como resumen de la sección anterior, las modificaciones que debe sufrir la expresión 1.17 a fin de reducir la magnitud de los errores incurridos en las aproximaciones numéricas son los siguientes:

- Ponderar las muestras de $H(k\Delta\omega)$ mediante una función "ventana" $\sigma(\omega)$
- Considerar que la función $h(t)$ ha sido amortiguada por un factor e^{-at} ; o sea:

$$f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f(t)e^{-at} \Leftrightarrow F(a + j\omega)$$

con estas modificaciones, la siguiente expresión se deriva de (1.17):

$$\tilde{h}(n\Delta t) = \frac{2}{T_{obs}} \text{Real} \left\{ \sum_{k=1}^N H(a + jk\Delta\omega) \sigma(k\Delta\omega) e^{(a + jk\Delta\omega)n\Delta t} \right\} + H(a) \quad (1.23)$$

$$\tilde{h}(n\Delta t) = \frac{2e^{an\Delta t}}{T_{obs}} \text{Real} \sum_{k=1}^N F(a + jk\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega n\Delta t} + H(a) \quad (1.24)$$

donde $\tilde{h}(n\Delta t)$ es una mejor aproximación de la función $h(t)$ que la proporcionada por la expresión 1.17. Ya que ahora el espectro que se invierte, $F(a + j\Delta\omega) = H(a + j\Delta\omega)\sigma(\omega)$, ha sido modificado con la finalidad de reducir los errores ocasionados por el muestro y por el truncamiento del intervalo de integración.

En la expresión 1.24 la frecuencia fundamental de la serie es $\omega_0 = \Delta\omega$ y la frecuencia de los armónicos considerados es: $\omega = 0, \Delta\omega, 2\Delta\omega$, etc. A fin de evitar posibles problemas al evaluar funciones en $\omega=0$, se propone el uso de armónicos impares, para lo cual la frecuencia fundamental se define como:

$$\omega_0' = \frac{\Delta\omega}{2} \quad (1.25)$$

y las frecuencias de los armónicos, de la siguiente forma: $\omega = (1+2k)\omega_0'$ donde $k=0,1,2,\dots$. Desarrollando la ecuación 1.24 para armónicos impares y substituyendo (1.7), (1.18) y (1.25), se determina la siguiente expresión que permite evaluar numéricamente la transformada inversa modificada de Fourier:

$$\tilde{h}(n\Delta t) = \frac{2e^{(a\Delta t + j\pi/N)n}}{T_{obs}} \text{Real} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi kn/N} \right\} \quad (1.26)$$

donde :

$$F(k) = F(a + j(2k+1)\omega_0') \quad (1.27)$$

1.2 Transformada modificada de Fourier

En el análisis de transitorios, frecuentemente se conoce la función de excitación $h(t)$ en el dominio del tiempo, pero se desea efectuar los cálculos en el dominio de la frecuencia. Los mismos errores incurridos en la evaluación numérica de la transformada inversa de Fourier, se presentan en la evaluación de la transformada directa. Sin embargo, la determinación precisa de los espectros de las señales generalmente no interesa en el análisis transitorio; por lo tanto, en este caso no se aplican medidas correctivas.

A fin de evaluar numéricamente la transformada de Fourier de una función muestreada, se asume que entre muestra y muestra la función varía linealmente. La técnica que a continuación se expone se denomina en esta tesis como la transformada piezolineal de Fourier. La condición que debe satisfacerse para que el resultado alcance una exactitud aceptable es que Δt , el intervalo de muestreo de la señal $h(t)$ sea lo suficientemente pequeño como para que la variación de la función entre dos muestras consecutivas se aproxime a una línea recta. De esta forma la transformada modificada de Fourier de la función $h(t)$, caracterizada con N muestras (figura 1.5) será

aproximada mediante la suma de las transformadas exactas de N-1 funciones lineales donde la n-ésima función vale cero en todo tiempo excepto entre $(n-1)\Delta t$ y $n\Delta t$.

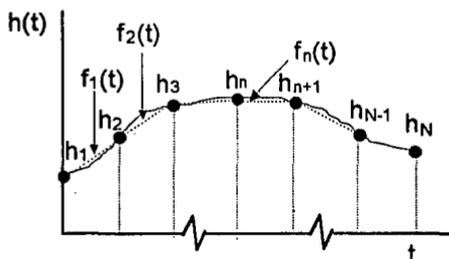


Fig. 1.5 Aproximación lineal entre muestras consecutivas de la función $h(t)$

Con la finalidad de deducir la expresión matemática que permitirá realizar la evaluación numérica de la transformada modificada de Fourier, a continuación se determina la transformada de un segmento lineal. Una recta puede expresarse como la suma de dos funciones escalón y dos funciones rampa. Sea $f_n(t)$, la función que denota al segmento recto que une los puntos n y $n+1$ (figura 1.6), de esta forma se puede escribir:

$$f_n(t) = f_{en}(t) + f_{rn}(t) \tag{1.28}$$

donde, en la función $f_{en}(t)$ se agrupan las funciones escalón asociadas al segmento lineal $f_n(t)$ y en la función $f_{rn}(t)$ se agrupan las funciones rampa. Ambas funciones quedan definidas como:

$$f_{en}(t) = h_n \cdot u(t - (n-1)\Delta t) - h_{n+1} \cdot u(t - n\Delta t) \tag{1.29}$$

y

$$f_{rn}(t) = g_1 + g_2$$

$$f_{rn}(t) = \frac{h_{n+1} - h_n}{\Delta t} [(t - (n-1)\Delta t) \cdot u(t - (n-1)\Delta t) - (t - n\Delta t) \cdot u(t - n\Delta t)] \tag{1.30}$$

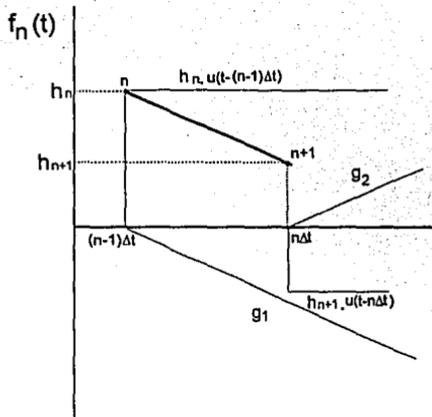


Fig. 1.6 Segmento lineal $f_n(t)$ que une las muestras n y $n+1$ de la función $h(t)$

La transformada modificada de Fourier de la función $f_n(t)$ puede obtenerse como la suma de las transformadas de sus funciones asociadas:

$$F_n(s) = F_{en}(s) + F_m(s) \quad (1.31)$$

Nótese que en (1.31) se ha empleado "s" en lugar de "a+jω". La transformada modificada de Fourier de las funciones $f_{en}(t)$ y $f_m(t)$ están definidas por:

$$F_{en}(s) = \frac{h_n}{s} e^{-(n-1)s\Delta t} - \frac{h_{n+1}}{s} e^{-ns\Delta t} \quad (1.32)$$

y

$$F_m(s) = \frac{\Delta h_n}{s^2 \Delta t} (e^{-(n-1)s\Delta t} - e^{-ns\Delta t}). \quad (1.33)$$

Donde:

$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n \quad (1.34)$$

A partir de las expresiones 1.31, 1.32, 1.33 y 1.34 se puede obtener la transformada de un segmento lineal n cualquiera. Si se suma la transformada de cada una de las pequeñas funciones lineales se obtendrá la transformada piezolineal de la función h(t); es decir:

$$H(s) = \sum_{n=1}^{N-1} F_n(s) = \sum_{n=1}^{N-1} F_{en}(s) + \sum_{n=1}^{N-1} F_m(s) \quad (1.35)$$

Desarrollando la primera sumatoria del segundo miembro de la ecuación anterior utilizando (1.32) se tiene:

$$\sum_{n=1}^{N-1} F_{en}(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{h_n}{s} e^{-(n-1)s\Delta t} - \frac{h_{n+1}}{s} e^{-ns\Delta t} \right) \quad (1.36)$$

Desglozando (1.36):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} F_{en}(s) &= \frac{h_1}{s} - \frac{h_2}{s} e^{-s\Delta t} + \frac{h_2}{s} e^{-s\Delta t} - \frac{h_3}{s} e^{-2s\Delta t} + \dots - \frac{h_{N-1}}{s} e^{-(N-2)s\Delta t} \\ &\quad + \frac{h_{N-1}}{s} e^{-(N-2)s\Delta t} - \frac{h_N}{s} e^{-(N-1)s\Delta t} \end{aligned}$$

Esta última expresión puede reducirse a:

$$\sum_{n=1}^{N-1} F_{en}(s) = \frac{h_1}{s} - \frac{h_N}{s} e^{-(N-1)s\Delta t} \quad (1.37)$$

De la ecuación anterior, es evidente que la contribución de las funciones escalón a la transformada modificada de Fourier está determinada por los valores en la primera y en la última muestra.

Desarrollando ahora la segunda sumatoria de la ecuación 1.35 y utilizando (1.33) se tiene:

$$\sum_{n=1}^{N-1} F_{rn}(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\Delta h_n}{s^2 \Delta t} (e^{-(n-1)s\Delta t} - e^{-ns\Delta t}) \quad (1.38)$$

Desglozando (1.38):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} F_{rn}(s) = & \frac{1}{s^2 \Delta t} (\Delta h_1 - \Delta h_1 e^{-s\Delta t} + \Delta h_2 e^{-s\Delta t} + \dots + \Delta h_{N-2} e^{-(N-2)s\Delta t} \\ & + \Delta h_{N-1} e^{-(N-2)s\Delta t} - \Delta h_{N-1} e^{-(N-1)s\Delta t}) \end{aligned}$$

La ecuación anterior puede escribirse en forma condensada de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{N-1} F_{rn}(s) = \frac{1}{s^2 \Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} g_{n+1} e^{-ns\Delta t} \quad (1.39)$$

donde:

$$\begin{aligned} g_1 &= \Delta h_1 = h_2 - h_1 \\ g_2 &= -\Delta h_1 + \Delta h_2 = h_1 - 2h_2 + h_3 \\ &\vdots \\ g_{N-1} &= -\Delta h_{N-2} + \Delta h_{N-1} = h_{N-2} - 2h_{N-1} + h_N \\ g_N &= -\Delta h_{N-1} = -h_N + h_{N-1} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Utilizando (1.37) y (1.39), la transformada piezolineal de Fourier puede ser expresada como:

$$H(s) = \frac{h_1}{s} - \frac{h_n}{s} e^{-(N-1)s\Delta t} + \frac{1}{s^2 \Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} g_{n+1} e^{-ns\Delta t} \quad (1.41)$$

Una consideración adicional en (1.41) es que la variable "s" también debe estar discretizada:

$$s_k = a + j(2k+1)\omega_0 \quad (1.42)$$

donde ω_0' ya ha sido definida en la expresión 1.25. Desarrollando el término dentro de la sumatoria de (1.41) mediante la aplicación de (1.7), (1.18) y (1.42) se tiene:

$$g_{n+1}e^{-ns\Delta t} \Big|_{s_k} = g_{n+1}e^{-n(a+j(2k+1)\frac{\pi}{T_{obs}})\frac{T_{obs}}{N}} \quad (1.43)$$

$$g_{n+1}e^{-ns_k\Delta t} = b(n)e^{-j2\pi nk/N} \quad (1.44)$$

donde $b(n)$ se ha definido de la siguiente forma:

$$b(n) = g_{n+1}e^{-n(a\Delta t + j\pi/N)} \quad (1.45)$$

Sustituyendo (1.44) en (1.41) se obtiene la expresión que permitirá evaluar numéricamente la transformada piezolineal de la función $h(t)$:

$$H(s_k) = \frac{h_1}{s_k} - \frac{h_N}{s_k} e^{-(N-1)s_k\Delta t} + \frac{1}{s_k^2\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} b(n)e^{-j2\pi nk/N} \quad (1.46)$$

1.3 Transformada de funciones discontinuas

En análisis transitorio, frecuentemente se requiere obtener la transformada modificada de Fourier de una función de la forma:

$$g(t) = f(t) \cdot u(t - t_s) \quad (1.47)$$

El producto de una función cualquiera $f(t)$ con una función escalón unitario produce una onda de la forma del tipo ilustrada en la figura 1.7. Como en un proceso digital sólo se dispone de muestras uniformemente espaciadas de $f(t)$, el producto de esta función con la función escalón unitario es igual a la ilustrada en la figura 1.7 sólo cuando t_s es múltiplo de Δt . Dado que t_s puede especificarse o calcularse independientemente de Δt , esta coincidencia generalmente no ocurrirá. En la figura 1.8 se ilustra el producto $f(t) \cdot u(t - t_s)$ en la vengindad de t_s , cuando este último no es

múltiplo de Δt . Al aplicar el algoritmo de transformada piezolineal a la forma de onda obtenida, se tendrán que hacer las siguientes correcciones:

- Restar a la función obtenida $G(s)$ la transformada de la sección triangular acd de la figura 1.8, debido a que la transformada piezolineal considerará una variación lineal entre la última de las muestras con valor cero y la primera de las muestras con valor igual a $f[(n+1)\Delta t]$.
- Sumar la transformada de la porción de la curva comprendida entre t_s y $(n+1)\Delta t$ (figura 1.8), sección bcde, ésto dado que la expresión 1.47 tiene un valor definido en este intervalo, el cual es considerado como cero por la transformada piezolineal al realizar la corrección anterior.

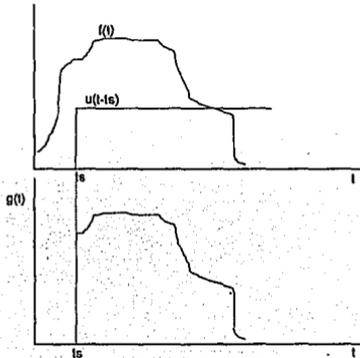


Fig. 1.7 Producto ideal $f(t) \cdot u(t-t_s)$

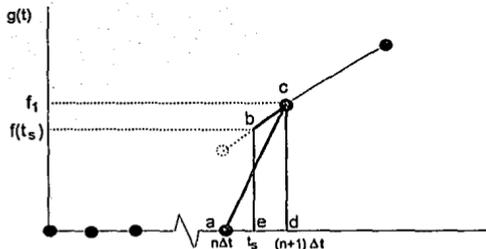


Fig. 1.8 Producto $f(t) \cdot u(t-t_s)$ discreto cuando t_s no es múltiplo de Δt

1.4 Transformada rápida de Fourier

El cálculo de las transformadas directa e inversa de Fourier (ecuaciones 1.26 y 1.46, respectivamente) implican la evaluación de sumatorias del tipo:

$$x_1(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k)w^{\pm nk} \quad (1.48)$$

donde

$$w = e^{j2\pi/N} \quad (1.49)$$

tales sumatorias requieren aproximadamente de un número N^2 de multiplicaciones y $N(N-1)$ sumas complejas. Para un número de muestras tal que $N=2^\gamma$, donde γ es un entero, la forma más eficiente de evaluar las sumatorias es a través del algoritmo de la transformada rápida de Fourier o FFT (Fast Fourier Transform) [5].

El algoritmo FFT es un método mediante el cual una matriz de $N \times N$ es factorizada en γ matrices. Cada una de estas matrices tiene la propiedad de minimizar el número de multiplicaciones y sumas complejas. El número de multiplicaciones requeridas por el algoritmo FFT es de aproximadamente $N\gamma/2$ multiplicaciones y $N\gamma$ sumas complejas. Como un ejemplo considérese el siguiente caso:

$$\begin{aligned} N &= 2048 \\ N &= 2^{11} \end{aligned}$$

La evaluación directa de las sumatorias implica $N^2=4,194,304$ multiplicaciones. En cambio la FFT requiere sólo $N\gamma/2=11,264$; es decir, del orden de 400 veces menos multiplicaciones complejas.

1.5 Ejemplo de aplicación

Con la finalidad de ilustrar el procedimiento que se sigue cuando se desea obtener numéricamente la respuesta de un sistema de una sola entrada y de una sola salida, considérese el circuito de la figura 1.9. La señal de entrada es la fuente de tensión $V_e(t)$ y la señal de salida la corriente $i(t)$.

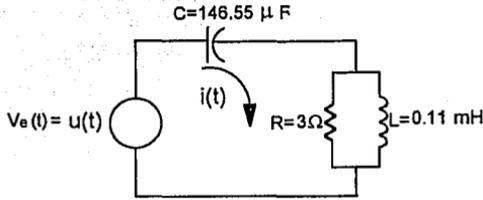


Fig. 1.9 Circuito utilizado para ilustrar la obtención numérica de la transformada inversa

La función de transferencia que relaciona $V_e(s)$ e $I(s)$ está dada por :

$$G(s) = \frac{I(s)}{V_e(s)} = \frac{sC(R+sL)}{RLCs^2 + Ls + R} \quad (1.50)$$

La transformada modificada de Fourier de la función de entrada es :

$$V_e(s) = \mathfrak{F}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad (1.51)$$

De esta forma, si se desea conocer la función $i(t)$, sólo es necesario tomar la transformada inversa del producto $G(s) \cdot V_e(s)$:

$$i(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{ \frac{sC(R+sL)}{RLCs^2 + Ls + R} \cdot \frac{1}{s} \right\} \quad (1.52)$$

De esta última ecuación puede determinarse fácilmente, en forma analítica la función $i(t)$:

$$i(t) = 1.167e^{-1136.88t} \cos(7792.272t - 1.281).u(t) \quad (1.53)$$

Para aplicar el procedimiento numérico al ejemplo anterior es necesario como primer paso especificar un tiempo de observación T_{obs} finito. Asíumase que $T_{obs} = 3\mu s$; además, para facilitar la utilización del algoritmo de la transformada rápida de Fourier es necesario seleccionar un número de muestras, N , para el que se cumple siguiente relación :

$$N = 2^Y$$

donde γ es un número entero. Considérese que N es igual a 512, definidos T_{obs} y N se define automáticamente $\Delta\omega$ u ω_0' si se está trabajando con armónicos impares. Ahora ya nada más resta por calcular el valor de la constante de amortiguamiento "a"; a la cual se le asigna un valor de $a=2\omega_0'$. Una vez que se dispone de estos datos, se evalúa la función 1.52 para cada uno de los valores de s dados por la ecuación 1.42. Definido un vector $I(s_k)$ para $k=1,2,\dots,N$, se aplica (1.26) previa ponderación de las muestras mediante la función ventana de Hamming. En la figura 1.10 se grafica en línea continua la solución analítica (1.53), en el intervalo 0-3 μ s y, en línea punteada, las muestras obtenidas a través del proceso numérico aplicado a (1.52). De la figura 1.11 puede observarse que la exactitud que alcanza la transformada inversa numérica es alta. Las diferencias entre la respuesta analítica y la numérica son aceptables para la mayoría de los casos prácticos.

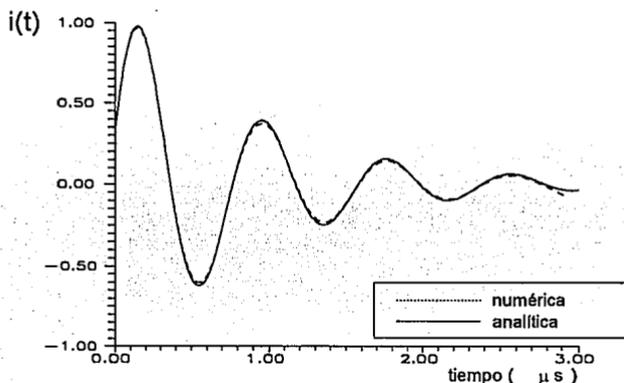


Fig. 1.10 Comparación gráfica de la transformada inversa analítica y numérica de la función 1.52

El procedimiento a seguir cuando se requiere analizar una red muy grande o una red eléctrica polifásica es similar al aplicado a sistemas de una sola entrada y una sola salida. Si se consideran como entradas las corrientes inyectadas en los nodos de la red y como salidas las tensiones en estos nodos, la matriz de transferencia, la matriz que relaciona la transformada del vector de salidas con la transformada del vector de entradas es la inversa de la matriz de admitancia de la red:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{I}(s)$$

(1.54)

donde :

V : tensión en los nodos

I : corrientes inyectadas en los nodos

Y : matriz de admitancia

CAPITULO 2

TRANSITORIOS EN LINEAS DE TRANSMISION

El primer paso a seguir en el análisis del comportamiento transitorio de una red eléctrica consiste en elaborar un modelo matemático general. Este se construye a través de modelos que reproducen el comportamiento de cada uno de los elementos que componen la red. En redes de transmisión de energía eléctrica uno de los modelos más importantes, y a la vez difíciles de construir, es el de una línea de transmisión. La técnica del dominio de la frecuencia permite representar a la línea mediante un modelo que considera automáticamente el efecto de dispersión lineal (también conocido como dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea) [38]. Este efecto consiste en que diferentes componentes espectrales de la energía presentan diferentes características de propagación; tanto de velocidad como de atenuación.

En las técnicas del dominio del tiempo el efecto de dispersión lineal es difícil de incluir directamente en las simulaciones. Recientemente se han logrado importantes desarrollos que permiten incluir algunas de las características de este efecto en los modelos tanto de líneas como de cables de transmisión [25,27]. Cabe mencionar sin embargo, que aún falta mucho por hacer en esta dirección. Si bien, las técnicas del dominio de la frecuencia son más adecuadas que las del dominio del tiempo para modelar dispersión lineal, éstas últimas son más adecuadas para modelar fenómenos en los que los parámetros varían en el tiempo o son no lineales.

En esta tesis se optó por utilizar las técnicas del dominio de la frecuencia [40] y por modelar las no linealidades mediante operaciones con interruptores. Cabe mencionar que en el análisis del dominio de la frecuencia la operación de dos o más interruptores a tiempos desiguales ya representa en sí una no linealidad [39]. Esta sin embargo se analiza considerando que la respuesta de la red consiste de la superposición de dos respuestas; una que se debe a las condiciones iniciales y la otra que se debe únicamente a las condiciones impuestas por la operación del interruptor.

En este capítulo primeramente se describe la construcción del modelo de una línea de transmisión y, posteriormente, la manera en que se simula la operación de interruptores.

2.1 Modelo de líneas de transmisión.

Debido al acoplamiento capacitivo e inductivo que existe entre las diferentes fases de una línea de transmisión polifásica no es posible establecer una relación mediante la cual se pueda calcular la tensión o la corriente en una fase, conociendo sólo una de estas variables como en el caso de elementos pasivos concentrados. En una línea de transmisión, tanto la tensión como la corriente de una fase están influidos por las demás corrientes y tensiones en las otras fases. La admitancia de dos puertos de una línea polifásica debe ser, por tanto, representada en forma matricial como se muestra a continuación [37].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_0 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_L] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{I}_0 y \mathbf{V}_0 son el vector de corrientes y de tensiones en el nodo de envío, respectivamente e \mathbf{I}_1 y \mathbf{V}_1 son el vector de corrientes y de tensiones en el nodo remoto, respectivamente.

La matriz de impedancia serie y de admitancia en derivación caracterizan completamente una línea de transmisión polifásica en el dominio de la frecuencia y son los parámetros básicos en las ecuaciones que describen la propagación de la corriente y de la tensión a través de una línea [40]. Estas ecuaciones pueden expresarse de la siguiente forma para una línea de transmisión con n fases:

$$-\frac{dV}{dx} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (2.2)$$

$$-\frac{d\mathbf{I}}{dx} = \mathbf{Y}\mathbf{V} \quad (2.3)$$

donde, en el dominio de la frecuencia compleja:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}(a + j\omega) + (a + j\omega)\mathbf{L}(a + j\omega) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{Y} = (a + j\omega)\mathbf{C} \quad (2.5)$$

Derivando (2.2) con respecto a x y empleando (2.3):

$$\frac{d^2 \mathbf{V}}{dx^2} = \mathbf{Z} \mathbf{Y} \mathbf{V} \quad (2.6)$$

en forma similar,

$$\frac{d^2 \mathbf{I}}{dx^2} = \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{I} \quad (2.7)$$

La determinación de las tensiones y de corrientes a partir de (2.6) y (2.7) implica la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales en el que las variables dependientes están acopladas. Una manera práctica de resolverlas es mediante la teoría modal [40]. Esta consiste en descomponer la matriz $\mathbf{P} = \mathbf{Z} \mathbf{Y}$ en un producto triple de la forma siguiente:

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}^{-1} \quad (2.8)$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores característicos de \mathbf{P} y \mathbf{M} es la matriz cuyas columnas son los vectores característicos de \mathbf{P} o modos de tensión.

Mediante la factorización (2.8), el problema inicial consistente en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, se puede reducir a la solución de n ecuaciones diferenciales de segundo orden, las cuales están ahora desacopladas.

Esta técnica se ilustra a continuación. Primero se multiplica (2.6) por \mathbf{M}^{-1} , por la izquierda:

$$\mathbf{M}^{-1} \frac{d^2 \mathbf{V}}{dx^2} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V} \quad (2.9)$$

Luego se define un nuevo tipo de variables, \mathbf{V}_m , de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V} \quad (2.10)$$

Finalmente, utilizando (2.10) en (2.9) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 \mathbf{V}_m}{dx^2} = \Lambda \mathbf{V}_m \quad (2.11)$$

Siendo Λ una matriz diagonal, (2.11) representa un sistema de ecuaciones desacopladas. Un procedimiento similar al aplicado a la (2.6) pero ahora aplicado a (2.7) conduce a

$$\frac{d^2 \mathbf{I}_m}{dx^2} = \Lambda \mathbf{I}_m \quad (2.12)$$

2.1.1 Solución de las ecuaciones de propagación.

La expresión 2.11 consiste de n ecuaciones de la forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} V_{m_i} = \lambda_i V_{m_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

donde V_{m_i} es el i -ésimo elemento del vector \mathbf{V}_m y λ_i es el i -ésimo elemento en la diagonal principal de la matriz Λ . La solución general de (2.13) se puede expresar como [4]:

$$V_{m_i}(x) = e^{-\gamma_i x} V'_{m_i} + e^{\gamma_i x} V''_{m_i} \quad (2.14)$$

donde γ_i es la raíz cuadrada positiva de λ_i y V'_{m_i} y V''_{m_i} son constantes de integración que dependen de las condiciones de frontera de la línea; es decir, de las conexiones a ambos extremos de ésta. γ_i se conoce como la constante de propagación del i -ésimo modo y en general, es un número complejo:

$$\gamma_i = \sqrt{\lambda_i} = \alpha_i + j\beta_i \quad (2.15)$$

su parte real α_i representa la atenuación del modo y su parte imaginaria β_i representa el defasamiento del modo al viajar a través de la línea [17]. La velocidad u_i del modo se obtiene a través de la expresión:

$$u_i = \frac{\omega}{\beta_i}.$$

Las n soluciones (2.14) pueden agruparse en una expresión matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}_m = \exp(-\Gamma x) \mathbf{V}'_m + \exp(\Gamma x) \mathbf{V}''_m \quad (2.16)$$

donde $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

La expresión 2.16 está en el dominio modal. Para transformar ésta al dominio fasorial se utiliza la siguiente expresión:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \mathbf{V}_m \quad (2.17)$$

la cual se obtiene despejando \mathbf{V} de (2.10). A continuación se aplica (2.17) en (2.16). Primero se multiplica (2.16) por \mathbf{M} por la izquierda:

$$\mathbf{M} \mathbf{V}_m = \mathbf{M} \exp(-\Gamma x) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V}'_m + \mathbf{M} \exp(\Gamma x) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V}''_m \quad (2.18)$$

luego, de la expresión (2.17):

$$\mathbf{V}(x) = \exp(-\Psi x) \mathbf{V}' + \exp(\Psi x) \mathbf{V}'' \quad (2.19)$$

Donde $\Psi = \mathbf{M} \Gamma \mathbf{M}^{-1}$. Nótese que en la expresión 2.19 se ha empleado la siguiente relación de la teoría de funciones matriciales [34]:

$$\mathbf{M} \cdot f(\Gamma) \cdot \mathbf{M}^{-1} = f(\mathbf{M} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{M}^{-1});$$

donde f es una función analítica.

La expresión 2.19 representa la solución de la ecuación de propagación en términos de las tensiones. La solución en términos de las corrientes puede obtenerse en forma análoga resolviendo la ecuación 2.12.

Es más conveniente, sin embargo, despejar I de la ecuación 2.2 y substituir dV/dx por la derivada de la expresión 2.19. De esto último se obtiene:

$$I(x) = Y_0 \exp(-\Psi x) V' - Y_0 \exp(+\Psi x) V'' \quad (2.20)$$

En esta expresión el término:

$$Y_0 = Z^{-1} \Psi \quad (2.21)$$

se denomina "admitancia característica de la línea".

Las expresiones 2.19 y 2.20 proporcionan los valores de V y de I a cualquier distancia x del extremo inicial de la línea. Estas expresiones se emplean a continuación para relacionar las tensiones y las corrientes V e I , tanto al inicio como al final de la línea. Sean V_0 e I_0 los valores de V y de I al inicio de la línea, cuando $x=0$. De (2.19) y (2.20) se obtiene:

$$V_0 = V' + V'' \quad (2.22)$$

$$I_0 = Y_0 \{ V' - V'' \} \quad (2.23)$$

Sean ahora V_l e I_l los valores de V y de I al final de la línea que se supone de longitud l . Nuevamente de (2.19) y (2.20) se obtiene:

$$V_l = \exp(-\Psi l) V' + \exp(\Psi l) V'' \quad (2.24)$$

$$I_l = -Y_0 \{ \exp(-\Psi l) V' - \exp(\Psi l) V'' \} \quad (2.25)$$

Las ecuaciones 2.22, 2.23, 2.24 y 2.25 se pueden combinar de varias formas a fin de eliminar las constantes de integración V' y V'' . De una de estas formas se obtiene la siguiente expresión que se conoce como la representación nodal de dos puertos de la línea de transmisión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_o \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_o \coth(\Psi l) & -\mathbf{Y}_o \operatorname{cosech}(\Psi l) \\ -\mathbf{Y}_o \operatorname{cosech}(\Psi l) & \mathbf{Y}_o \coth(\Psi l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_o \\ \mathbf{V}_l \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

esta matriz permite representar una línea de transmisión por un equivalente PI de la forma ilustrada en la figura 2.1, en la cual:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_o \coth(\Psi l) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Y}_o \operatorname{cosech}(\Psi l) \quad (2.28)$$

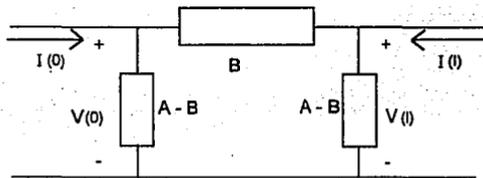


Fig. 2.1 Circuito equivalente PI de una línea de transmisión

Como los parámetros de la línea de transmisión son dependientes de la frecuencia para cada uno de los armónicos utilizados en la simulación debe efectuarse el siguiente procedimiento:

1. Obtención de las matrices Z y Y (apéndice A).
2. Diagonalización de la matriz ZY. Lo que implica la obtención de la matriz de eigenvalores Λ y la matriz de eigenvectores \mathbf{M} (apéndice B).
3. Cálculo de la matriz de propagación modal Γ .
4. Cálculo de la matriz de propagación de tensiones Ψ .
5. Cálculo de la matriz de admitancia característica (ecuación 2.21).
6. Cálculo de la matriz $\coth(\Psi l) = \mathbf{M} \coth(\Gamma l) \mathbf{M}^{-1}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \coth(\Psi l) &= \mathbf{M}(\exp(\Gamma l) - \exp(-\Gamma l))^{-1}(\exp(\Gamma l) + \exp(-\Gamma l))\mathbf{M}^{-1} \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{U} - \exp(-2\Gamma l))^{-1}(\mathbf{U} + \exp(-2\Gamma l))\mathbf{M}^{-1} \end{aligned}$$

7. Cálculo de la matriz $\text{cosech}(\Psi) = M \text{cosech}(\Gamma) M^{-1}$.
8. Cálculo de la matriz A (ecuación 2.27).
9. Cálculo de la matriz B (ecuación 2.28).

2.2 Simulación digital de maniobras con interruptores

En su representación más sencilla un interruptor abierto se considera como una resistencia con un valor muy grande, mientras que cerrado, la resistencia tendrá un valor muy pequeño. El interruptor entonces puede considerarse como una resistencia cuya magnitud depende del tiempo de operación. En un programa en el dominio del tiempo la operación del interruptor puede ser simulada en forma sencilla considerando que su resistencia depende del tiempo. En el dominio de la frecuencia, en cambio, el procedimiento a seguir es mucho más complicado y se describe a continuación.

2.2.1 Cierre de interruptores

La simulación de la operación de interruptores aquí descrita se basa en ciertas condiciones ideales. Cuando, en una red energizada, el interruptor está abierto, existe una caída de tensión entre sus terminales. Cuando el interruptor cierra, la tensión a través de sus nodos se vuelve nula. Una forma de simular este efecto en un programa digital consiste en substituir el interruptor por una fuente de tensión apropiada [30].

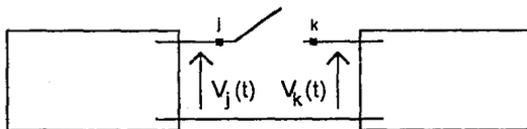


Fig. 2.2 Cierre de interruptor.

Considérese la red mostrada en la figura 2.2. En ella se ha especificado un interruptor entre los nodos j y k , el cual deberá operar en un tiempo t_c . Supóngase que se conocen las tensiones $V_j(t)$ y $V_k(t)$ durante todo el intervalo de la simulación. Tales tensiones se obtienen modelando la red de la figura por su matriz de admitancia inicial Y_0 :

$$2 \text{cosech}(\Psi) = 2M(U - \exp(-2\Gamma))^{-1}M^{-1}$$

$$Y_0(s) = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & \dots & y_{1j}(s) & \dots & y_{1k}(s) & \dots & y_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{j1}(s) & \dots & y_{jj}(s) & \dots & y_{jk}(s) & \dots & y_{jn}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1}(s) & \dots & y_{kj}(s) & \dots & y_{kk}(s) & \dots & y_{kn}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(s) & \dots & y_{nj}(s) & \dots & y_{nk}(s) & \dots & y_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Conociendo el tiempo de operación del interruptor, t_c , y las tensiones en los nodos j y k , obtenidas como condiciones iniciales, se puede especificar una fuente de tensión de la forma:

$$E_2(s) = \begin{cases} 0 & t \leq t_c \\ \mathfrak{I}\{-V_j(t) - V_k(t)\} & t > t_c \end{cases} \quad (2.30)$$

Mediante la aplicación de esta se reproducirá el efecto que origina la operación del interruptor. Esta fuente de tensión artificial debe colocarse entre los nodos j y k y excitar el sistema modelado ahora por una matriz de admitancia ligeramente diferente a la matriz inicial. Las modificaciones pueden resumirse de la siguiente manera:

$$y_{jj} \rightarrow y_{jj} + y_x \quad (2.31a)$$

$$y_{jk} \rightarrow y_{jk} - y_x \quad (2.31b)$$

$$y_{kj} \rightarrow y_{kj} - y_x \quad (2.31c)$$

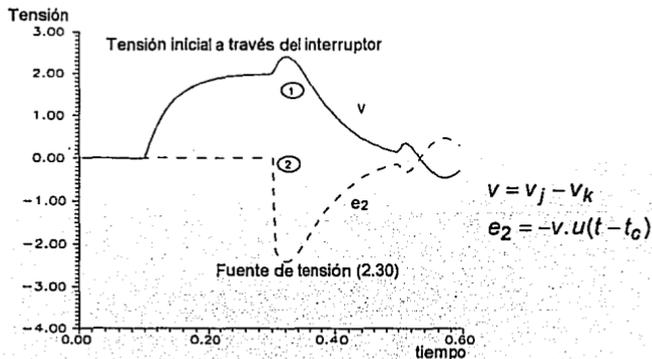
$$y_{kk} \rightarrow y_{kk} + y_x \quad (2.31d)$$

$$y_x = \frac{1}{R_x} \quad (2.32)$$

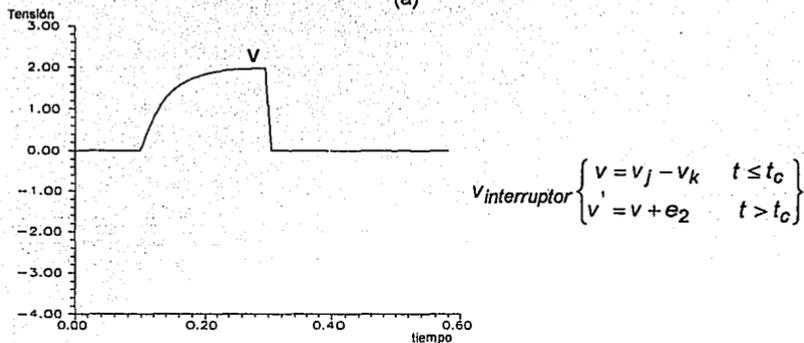
donde el valor de R_x representa la resistencia entre los nodos j y k cuando el interruptor está cerrado. Idealmente R_x debe ser igual a cero, para fines prácticos se considera un valor pequeño.

Con la superposición de ambas respuestas, la respuesta de condiciones iniciales debida a las fuentes propias del sistema y la obtenida de la aplicación de la fuente de tensión especificada en la ecuación 2.30 se logra simular la operación de cierre. Refiriéndose a la ecuación 2.30 se puede observar que el valor cero de la fuente

durante el intervalo de $0 < t < t_c$ cuando éste se superpone a la caída de tensión entre los nodos j y k , no alterará la respuesta inicial. Para $t > t_c$, en cambio, la tensión especificada por (2.30) es igual en magnitud pero de signo contrario a la que habría si el interruptor se mantuviera abierto. Por tanto, al sumar ambas tensiones se obtienen un valor de cero entre los extremos del interruptor. Esto se ilustra en la figura 2.3.



(a)



(b)

Fig. 2.3 Simulación de la operación de cierre de un interruptor a través de la aplicación del principio de superposición

2.2.2 Apertura de interruptores

Al igual que para el cierre de interruptores, la simulación de la apertura se efectúa superponiendo dos respuestas de la red; una con el interruptor cerrado todo el tiempo y la otra, la que se obtiene introduciendo una fuente artificial de corriente entre los nodos del interruptor.

Considérese la red mostrada en la figura 2.4, en la cual se simula la operación de apertura de un interruptor. Este debe abrir en el primer cruce por cero de la corriente $i(t)$ después del tiempo especificado de apertura t_a .

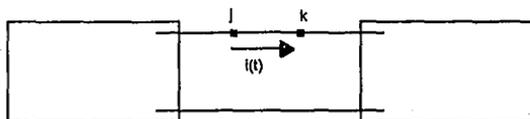


Fig. 2.4 Apertura de un interruptor.

El primer paso a seguir en dicha simulación es la determinación de la corriente $i(t)$, la cual se obtiene en el dominio de la frecuencia mediante la siguiente ecuación:

$$\mathfrak{F}\{i(t)\} = (y_{jj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n y_{ji})V_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^n y_{ji}(V_i - V_j) \quad (2.33)$$

Aplicando la transformada inversa a (2.33), se obtiene $i(t)$ lo cual permite determinar un tiempo de cruce por cero t_{cc} tal que $t_{cc} > t_a$. Asíumase que la corriente $i(t)$, obtenida bajo la consideración de que el interruptor está cerrado, tiene la forma mostrada en la figura 2.5.

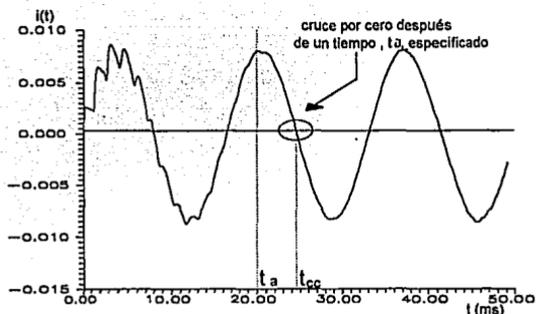


Fig. 2.5 Corriente inicial a través del interruptor.

El cruce por cero puede apreciarse más detalladamente en la figura 2.6 Donde puede

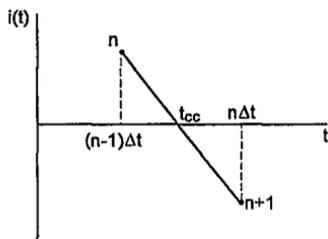


Fig. 2.6 Cruce por cero de la corriente $i(t)$.

notarse que, en general, t_{cc} no será múltiplo de Δt , es decir, t_{cc} se localizará entre dos muestras $(n-1)\Delta t$ y $n\Delta t$. Con la finalidad de determinar este tiempo de cruce se considera una variación lineal entre muestras consecutivas [3]. De esta forma t_{cc} puede obtenerse de la siguiente ecuación:

$$t_{cc} = (n-1) \cdot \Delta t - \frac{i(n) \cdot \Delta t}{i(n+1) - i(n)} \quad (2.34)$$

Una vez determinado el tiempo de cruce por cero, la fuente artificial de corriente se especifica de la siguiente forma:

$$i_2(s) = \begin{cases} 0 & t \leq t_{cc} \\ \mathfrak{I}\{-i(t)\} & t > t_{cc} \end{cases} \quad (2.35)$$

La matriz de admitancia inicial (ecuación 2.29) puede utilizarse para el cálculo de la respuesta de la fuente (2.35) ya que la modificación que sufriría como consecuencia de la apertura del interruptor consistiría en interconectar una resistencia muy grande entre los nodos j y k .

2.3 Ejemplo de aplicación

Las técnicas para simular operaciones de interruptores que se describen en la sección anterior, son aplicadas a la red mostrada en la figura 2.7. Aquí se simula el cierre secuencial de un interruptor de tres polos. Los tiempos de cierre de cada polo son: 2 ms para la fase A, 4 para la B y 6 ms para la fase C. Se supone que las tres líneas de transmisión son iguales, tanto en su longitud como en la disposición geométrica de sus conductores. Esta última se muestra en la figura 2.8. Se asume, adicionalmente, que los conductores de fase son de aluminio (ACSR), que los conductores de guarda son de aluminio y que la resistividad del terreno es de $100 \Omega\text{m}$.

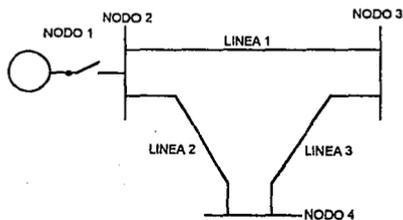


Fig. 2.7 Modelo de red para la simulación de un cierre secuencial de interruptores

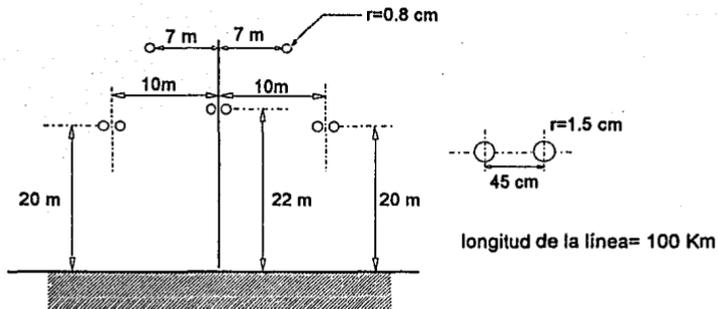


Fig. 2.8 Disposición de los conductores para las líneas trifásicas 1,2 y 3 de la figura 2.7.

El primer paso en la simulación es la obtención de las matrices **A** y **B**, dadas por las expresiones 2.22 y 2.23 para cada una de las líneas. Dichas matrices permiten representar la red de la figura 2.7 mediante el circuito equivalente mostrado en la figura 2.9. De este circuito se puede derivar la matriz de admitancia de la red:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_f & Y_{INT} & 0 & 0 \\ Y_{INT} & A_1 + A_2 & -B_1 & -B_2 \\ 0 & -B_1 & A_1 + A_3 & -B_3 \\ 0 & -B_2 & -B_3 & A_2 + A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Cuando los tres polos del interruptor están abiertos:

$$[Y^{(0)}_{INT}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

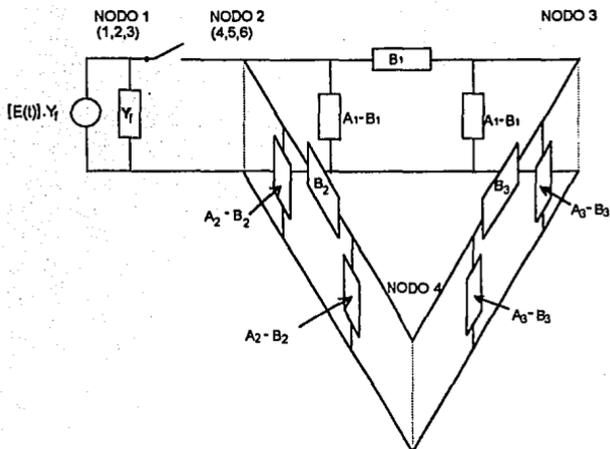


Fig. 2.9 Circuito equivalente

La simulación de maniobras con interruptores con diferentes tiempos de operación debe hacerse necesariamente ordenándolos de acuerdo a estos tiempos. La simulación se realiza empezando con la maniobra de menor tiempo hasta llegar a la maniobra con el mayor tiempo de operación especificado. Esto debido a que la operación de alguno de los interruptores afecta las condiciones iniciales que deben considerarse para los siguientes.

El efecto que produce la operación de cierre de un interruptor se reproduce a través de una fuente de tensión. Esta fuente queda definida por la diferencia de tensiones existente entre los nodos donde se ha especificado el interruptor antes de que éste opere. Las condiciones iniciales para el interruptor de la fase A (primero en operar) quedarán determinadas únicamente por la diferencia de tensiones en los nodos 1 y 4 (figura 2.9) existentes antes de cualquier operación. El vector de fuentes de corrientes de excitación puede expresarse como:

$$\left[\mathbf{I}_1^{(0)} \right] = \begin{bmatrix} \mathfrak{I}\{E_1(t)\} \cdot Y_f \\ \mathfrak{I}\{E_2(t)\} \cdot Y_f \\ \mathfrak{I}\{E_3(t)\} \cdot Y_f \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Substituyendo este vector en la ecuación 2.36 y resolviendo el sistema de ecuaciones para cada uno de los armónicos considerados se tiene la posibilidad especificar la fuente por la que se substituirá el interruptor. Esta tendrá las características representada en la expresión 2.39. La respuesta a esta fuente de corriente se obtendrá resolviendo nuevamente sistema (2.36) sólo que la matriz de admitancia habrá sufrido una modificación en la submatriz Y_{INT} . Esta se presenta en la ecuación 2.40.

$$[I_1^{(1)}] = -[I_2^{(1)}] = \begin{bmatrix} \Im\{-V_1^{(1)}(t) - V^{(1)}_4(t)\}.U(t - 2 \times 10^{-3})\}.Y_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$[Y^{(1)}_{INT}] = \begin{bmatrix} Y_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

La respuesta determinada mediante la aplicación de (2.39) se superpone a la inicial y se obtienen las condiciones iniciales para el segundo interruptor. El procedimiento a seguir para la simulación del segundo y tercer interruptor es el mismo al del primero. Las fuentes de corriente equivalentes por las que se substituyen el segundo y tercer interruptor (desde su tiempo de operación hasta el tiempo de observación total) se encuentran representadas en la ecuaciones 2.41 y 2.43. Y en (2.42) y (2.44) se presentan las modificaciones que sufre la matriz de admitancia original.

$$[I_1^{(2)}] = -[I_2^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ \Im\{-V_2^{(1)}(t) - V^{(1)}_5(t)\}.U(t - 4.0 \times 10^{-3})\}.Y_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$[Y^{(2)}_{INT}] = \begin{bmatrix} Y_x & 0 & 0 \\ 0 & Y_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$[\mathbf{I}_1^{(3)}] = -[\mathbf{I}_2^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Im\{-V_3^{(2)}(t) - V_6^{(2)}(t)\} \cdot U(t - 6 \times 10^{-3}) \cdot Y_x \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$[\mathbf{Y}^{(3)}_{\text{INT}}] = \begin{bmatrix} Y_x & 0 & 0 \\ 0 & Y_x & 0 \\ 0 & 0 & Y_x \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Debido a la simetría del circuito analizado (figura 2.9) las tensiones en los nodos 3 y 4 son iguales. Estas se muestran en las figuras 2.10, 2.11 y 2.12 para las fases A, B y C respectivamente. Las tensiones en el nodo 2 se ilustran en las figuras 2.13, 2.14 y 2.15 para las fases A, B y C, respectivamente.

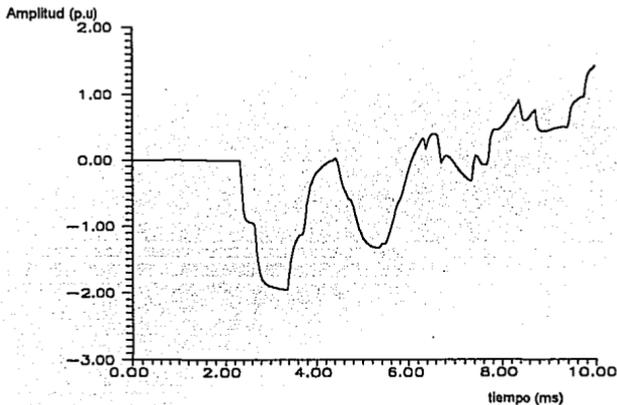


Fig. 2.10 Tensión en la fase A en los nodos 3 y 4

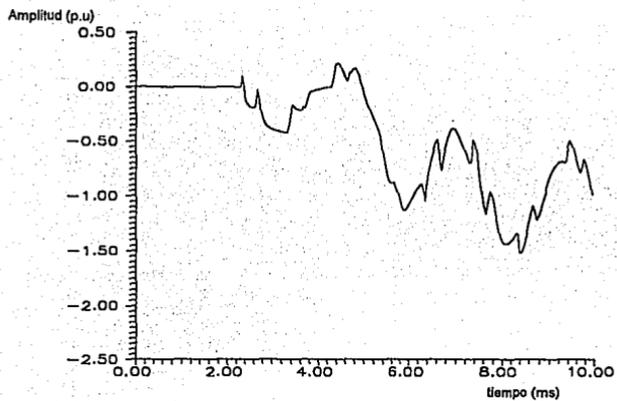


Fig. 2.11 Tensión en la fase B en los nodos 3 y 4

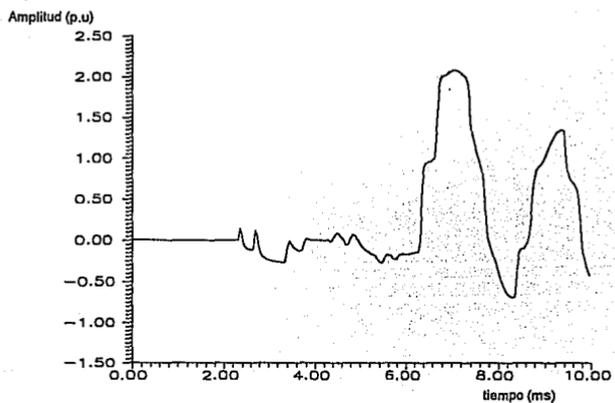


Fig. 2.12 Tensión en la fase C en los nodos 3 y 4

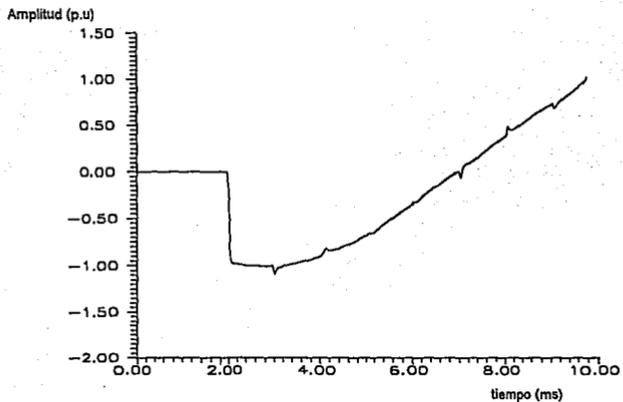


Fig. 2.13 Tensión en la fase A en el nodo 2.

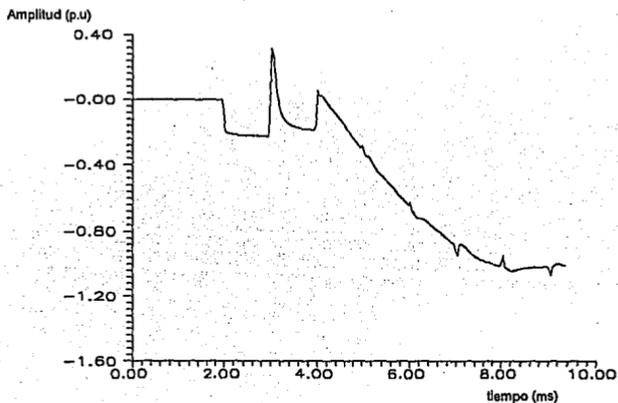


Fig. 2.14 Tensión en la fase B en el nodo 2.

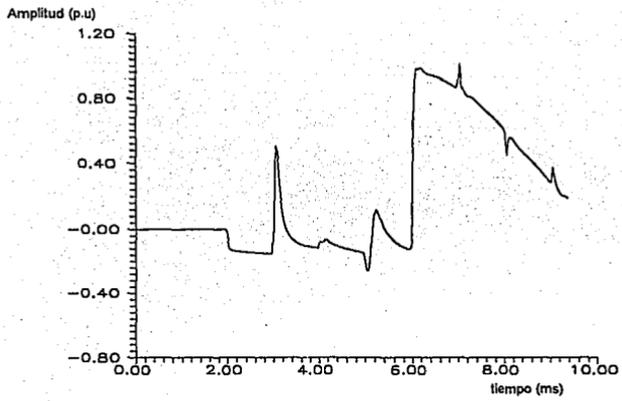


Fig. 2.15 Tensión en la fase C en el nodo 2

CAPITULO 3

MODELADO DE ELEMENTOS NO LINEALES

Aquellos elementos para los que su característica (función de transferencia, impedancia, admitancia, etc.) no cumple con el principio de superposición, son clasificados como no lineales. Los elementos no lineales que más frecuentemente se encuentran en los sistemas de potencia son: apartarrayos de óxido de zinc, de carburo de silicio, reactores y transformadores saturables. Como el número de elementos no lineales en una red eléctrica generalmente es pequeño, comparado con el número de elementos lineales, resulta preferible modificar las técnicas de análisis de sistemas lineales que emplear métodos de solución para redes no lineales. Dentro de este enfoque, se encuentran las técnicas siguientes:

- Representación mediante fuentes de corriente
- Compensación
- Convolución
- Aproximación piezolineal

Las dos primeras se implementan con relativa facilidad en el dominio del tiempo. El método de convolución es una forma de compensación aplicada en el dominio de la frecuencia. La técnica de aproximación piezolineal puede ser aplicada en el dominio de la frecuencia o en el del tiempo.

La primera parte del capítulo proporciona una descripción de las consideraciones que se hacen en la representación de elementos no lineales para las técnicas de representación por fuentes de corriente, de compensación y de convolución. La segunda parte del capítulo se enfoca al desarrollo del método a seguir en la representación de resistencias no lineales en el dominio de la frecuencia a través de la técnica de aproximación piezolineal. Finalmente, en la tercera parte, se proporciona un ejemplo de aplicación de esta última técnica.

3.1 Métodos utilizados en la simulación digital de elementos no lineales

(a) Representación como fuente de corriente con tiempo de retraso Δt

En esta representación se considera que puede reproducirse el comportamiento de un elemento no lineal substituyéndolo por una fuente de corriente. La magnitud de esta fuente estará determinada por el valor de corriente que fluye por este elemento un instante Δt antes del tiempo para el cual se desea obtener la solución [15]. Es decir, por ejemplo, se desea conocer la respuesta en el instante t de una red en la que se encuentra interconectada una resistencia no lineal con cierta característica $v-i$ conocida. Todas las variables son conocidas en el tiempo $t-\Delta t$. Si el intervalo Δt utilizado en la simulación fuera suficientemente pequeño, se podría usar $v_{jk}(t-\Delta t)$, la tensión a través de la resistencia no lineal, para encontrar de la característica no lineal la corriente $i_{jk}(t-\Delta t)$ que le corresponde. El valor de $i_{jk}(t-\Delta t)$ será entonces la magnitud de la fuente de corriente que se colocó entre los nodos donde se ha especificado el elemento no lineal.

(b) Método de compensación

En este método, al igual que el anterior, el elemento no lineal no es considerado al momento de formar la matriz de admitancia de la red y su comportamiento es simulado por una fuente de corriente i_{jk} . La diferencia radica en que las partes lineal y no lineal deben resolverse simultáneamente. De esta forma la corriente i_{jk} , debe satisfacer dos ecuaciones, la de la red y la del elemento no lineal. Para la red se tiene:

$$V_j - V_k = V_j^{(o)} - V_k^{(o)} - z_{TH} \cdot i_{jk} \quad (3.1)$$

donde el super-índice "o" indica que la solución no considera el elemento no lineal. Para el elemento no lineal:

$$V_j - V_k = f(i_{jk}, \frac{di_{jk}}{dt}, t, \dots) \quad (3.2)$$

El valor de la impedancia de Thévenin, z_{TH} , en la ecuación 3.1 es calculado solamente una vez mediante las ecuaciones nodales de la red lineal :

$$I = YV \quad (3.3)$$

El sistema de ecuaciones 3.3 se resuelve para V, siendo I un vector cuyos componentes son cero, excepto en las posiciones "j" y "k", donde éstos valen +1.0 y -1.0, respectivamente:

$$YV = \begin{matrix} & \text{componente} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ +1.0 \\ 0 \\ -1.0 \\ 0 \end{array} \right] & \begin{matrix} \vdots \\ \leftarrow j \\ \vdots \\ \leftarrow k \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.4)$$

La solución de (3.4) es, entonces la diferencia de la j-ésima y k-ésima columna de la matriz Y^{-1} :

$$z_{TH} = V = Z_j - Z_k \quad (3.5)$$

donde $Z = Y^{-1}$.

El proceso de solución para cada Δt es entonces:

1. Calcular las tensiones $V^{(0)}(t)$ en todos los nodos de la red sin considerar la rama no lineal, y encontrar la diferencia de tensiones de circuito abierto $V_j^{(0)} - V_k^{(0)}$.
2. Resolver simultáneamente las ecuaciones 3.1 y 3.2 para una ijk . Si se dispone de la expresión analítica de la ecuación 3.2, puede utilizarse el método de Newton-Raphson para encontrar la solución. Si la característica está expresada punto por punto, se aproxima mediante segmentos lineales y después se determina la intersección de las dos curvas. Esto se ilustra en la figura 3.1.

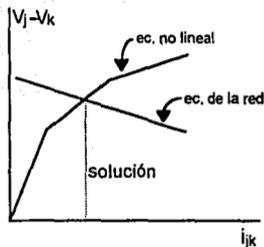


Fig. 3.1 Corriente en la rama no lineal

3. Calcular la respuesta total mediante la superposición de la respuesta lineal y la de la fuente de corriente i_{jk} :

$$V(t) = V^{(o)}(t) - Z i_{jk} \quad (3.6)$$

donde i_{jk} está dada por la expresión:

$$i_{jk} = \begin{matrix} & \text{componente} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ -i_{jk} \\ 0 \\ i_{jk} \\ 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \vdots \\ \leftarrow j \\ \vdots \\ \leftarrow k \\ \vdots \end{array} \end{matrix} \quad (3.7)$$

(c) Convolución

En este método se aplican básicamente los mismos principios que en la técnica de compensación, sólo que aquí la respuesta del sistema en vacío (elemento no lineal desconectado) y la impedancia de Thévenin Z_{TH} (que permite determinar la respuesta a la fuente de corriente) se obtienen a través de la transformada modificada de Fourier [8]. Con la finalidad de explicar más detalladamente este procedimiento considérese el circuito ilustrado en la figura 3.2 en el cual Y_s representa la matriz de admitancia equivalente del sistema referida a la posición del elemento no lineal. Para el análisis, el elemento no

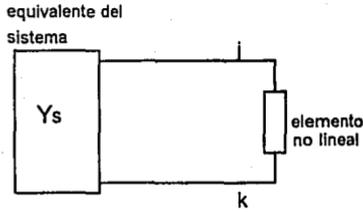


Fig.3.2 Equivalente del sistema referido a la posición del elemento no lineal

lineal se desconecta de la red. Se determina entonces la tensión en vacío $V_j^{(0)}(t) - V_k^{(0)}(t)$ usando la transformada modificada de Fourier (figura 3.3a). Mediante la inyección de un impulso de corriente, entre las terminales j y k, se obtiene una función de transferencia que relaciona la transformada de la corriente que fluye entre las terminales donde se ha especificado el elemento no lineal con la caída de tensión en estas mismas (figura 3.3b). Es decir se obtiene:

$$Z_{TH}(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (3.8)$$

como $I(s) = 1$

$$Z_{TH}(s) = V(s) \quad (3.9)$$

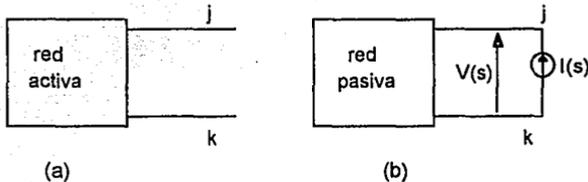


Fig. 3.3 (a) Respuesta en vacío del sistema
(b) Obtención de impedancia de Thévenin

Al igual que en el método de compensación, se resuelven simultáneamente la parte lineal:

$$V_j - V_k = V_j^{(0)} - V_k^{(0)} - Z_{TH} * i_{jk} \quad (3.10)$$

y la no lineal:

$$v_j - v_k = f(i_{jk}, \frac{di_{jk}}{dt}, t, \dots) \quad (3.11)$$

La tensión a través de los nodos donde se ha especificado el elemento no lineal se obtiene superponiendo a las condiciones iniciales la respuesta del sistema a la fuente de corriente i_{jk} . El término de (3.10) que corresponde a la respuesta del sistema a la fuente de corriente " $Z_{TH} * i_{jk}$ " deberá calcularse a través de la aplicación de la integral de Duhamel ya que Z_{TH} (considerado constante en el método de compensación en el dominio del tiempo) es aquí una función de s . La respuesta en todos los demás nodos de la red puede obtenerse superponiendo a las condiciones iniciales la respuesta del sistema a una fuente de corriente $i_{jk}(t)$ que sustituye al elemento no lineal. En el dominio de la frecuencia se tiene:

$$V(s) = V^{(0)}(s) + Y^{-1}(s)I(s) \quad (3.12)$$

donde:

$$I(s) = \begin{matrix} & \text{componente} \\ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ -\mathfrak{I}\{i_{jk}(t)\} \\ \vdots \\ \mathfrak{I}\{i_{jk}(t)\} \\ \vdots \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow j \\ \\ \leftarrow k \end{array} \end{matrix} \quad (3.13)$$

El valor de la función $i_{jk}(t)$ en cada Δt está definido por el valor de i_{jk} que satisface (3.10) y (3.11) simultáneamente para cada una de las muestras consideradas en la simulación.

3.2 Aproximación piezolineal en el dominio de la frecuencia.

En esta representación las características $v-i$ y $\Psi-i$ de los elementos no lineales se aproximan por segmentos lineales. El cambio de un segmento a otro, en la característica, se lleva a cabo mediante el cierre o apertura de un interruptor controlado. En este caso, donde los interruptores son utilizados para representar el cambio de un segmento, idealmente no se debe originar ningún transitorio. El

interruptor sólo tiene la función de conectar o desconectar una rama de la red que permita representar adecuadamente la región de operación correspondiente [31,39].

3.2.1 Resistencias no lineales

Existen ciertos elementos en los sistemas de potencia que pueden ser modelados por resistencias que presentan una característica $v-i$ no lineal. Es decir, la resistencia de estos elementos no es constante, sino que es función de la caída de tensión a través de sus terminales. Un caso típico de estos elementos lo constituye un apartarrayos de ZnO, el cual presenta una resistencia muy grande hasta cierto nivel de tensión y, al sobrepasar este nivel la resistencia adopta valores muy pequeños. Si se desea realizar el análisis de una red que incluye un elemento no lineal, a través de técnicas para el análisis de sistemas lineales, es necesario hacer algunas consideraciones. La primera de ellas consiste en linealizar por zonas el parámetro variable. En este caso la característica $v-i$ de una resistencia no lineal.

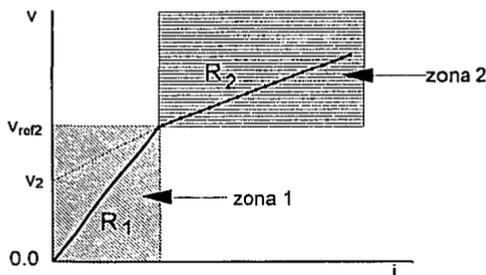


Fig. 3.4 Característica $v-i$.

Con el objetivo de ilustrar el procedimiento que se sigue en la obtención del modelo de una resistencia no lineal, considérese la figura 3.4. En ella se ha aproximado la característica $v-i$ no lineal de un elemento con dos segmentos lineales de pendiente R_1 y R_2 , respectivamente. De esta forma, la relación $v-i$ del elemento puede considerarse constante e igual a R_1 cuando la magnitud de la tensión varía entre 0 y V_{ref2} volts. En este intervalo de operación, el equivalente de Thévenin que ve el sistema al cual se encuentra conectado el elemento no lineal es, simplemente, una resistencia de valor R_1 (figura 3.5). Para el segundo segmento, la relación entre la tensión y la corriente esta dada por:

$$V = V_2 + R_2 i \quad (3.14)$$

donde V_2 es la ordenada al origen de una recta con pendiente R_2 para magnitudes de tensión mayores a V_{ref2} . El equivalente de Thévenin para este segmento será una resistencia de valor R_2 en serie con una fuente de tensión (figura 3.6).

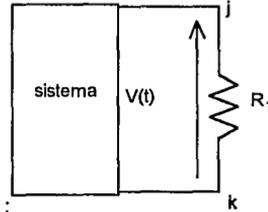


Fig.3.5 Equivalente de Thévenin del primer segmento.

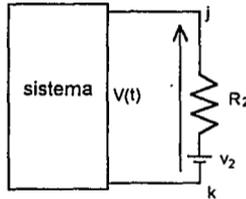


Fig.3.6 Equivalente de Thévenin del segundo segmento.

Como no se conoce de antemano la magnitud y la forma de onda de la tensión a través de las terminales del elemento no lineal durante la simulación de un transitorio, se tendrá que aceptar que la tensión puede adoptar magnitudes que, según la linealización de su característica, lo haga operar tanto en la zona 1 como en la zona 2 (figura 3.4). El circuito ilustrado en la figura 3.7 permitirá llevar a cabo el cambio de una zona a otra cuando éste se requiera. En este circuito, una resistencia de valor R_1 se considera permanentemente conectada entre los nodos j y k; además se incluye una rama en paralelo con un interruptor.

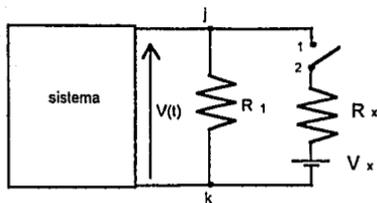


Fig. 3.7 Circuito asociado a la simulación.

Las funciones de este interruptor son:

1. Cerrar cuando la tensión a través del elemento que se encuentra operando en la zona 1 exceda la tensión que delimita las dos zonas (V_{ref2}), colocando en paralelo con la resistencia R_1 una resistencia R_x y una fuente de tensión V_x . Las magnitudes de éstas deben ser las apropiadas, de tal forma que el equivalente de Thévenin del elemento sea el del segundo segmento (figura 3.6).
8. Abrir cuando la tensión a través del elemento que se encuentra operando en la zona 2 alcance valores menores de V_{ref2} , de tal forma que el equivalente de Thévenin que vea el sistema sea el del primer segmento (figura 3.5).

Con la finalidad de deducir la magnitud de de fuente de tensión V_x y de la resistencia R_x ilustradas en la figura 3.7 considérese la figura 3.8. El circuito ilustrado en la figura 3.8a, el cual representa el circuito 3.7 con el interruptor cerrado, debe ser equivalente al de la figura 3.8b; es decir al equivalente de Thévenin del segundo segmento. Para que esto ocurra deben cumplirse las siguientes relaciones:

$$\frac{V_x}{R_x} = \frac{V_2}{R_2} \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_2} \quad (3.16)$$

Estas se obtienen igualando las fuentes de corriente y las resistencias de los circuitos 3.8c y 3.8d, que son los equivalentes de Norton de 3.8a y 3.8b, respectivamente. Despejando V_x de (3.15) y R_x de (3.16) se tiene:

$$V_x = \frac{V_2}{R_2} R_x \quad (3.17)$$

donde:

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad (3.18)$$

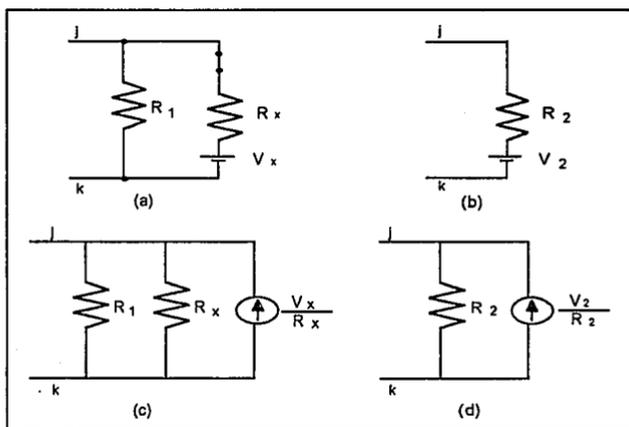


Fig. 3.8 Obtención de V_x y R_x del circuito 3.7 a través de circuitos equivalente

Una vez que se dispone del modelo que permite incluir en las simulaciones una resistencia no lineal, cuya característica se ha aproximado con dos segmentos, se analizarán algunos detalles del comportamiento de éste. Supóngase que se desea analizar una red eléctrica que incluye una resistencia no lineal. Como primer paso se substituye este elemento por un circuito del tipo ilustrado en la figura 3.7. La resistencia no lineal se modelará inicialmente por una resistencia R_1 . El segundo paso consiste en determinar la diferencia de tensión a través de la rama no lineal.

Asúmase que la forma de onda de la tensión V_{jk} presenta las características que se ilustran en la figura 3.9.

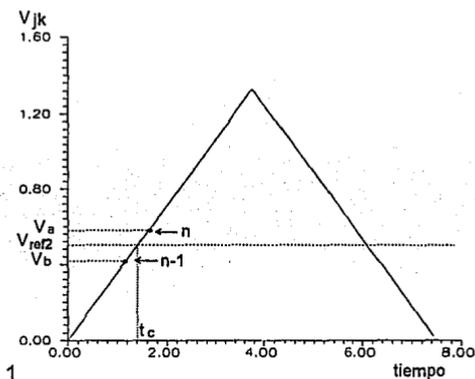


Fig. 3.9 Tensión inicial a través de una resistencia no lineal.

Esta figura ilustra, además, el siguiente aspecto de la simulación de elementos no lineales mediante interruptores. En general, la tensión de referencia sera excedida en un tiempo intermedio entre dos muestras, "n-1" y "n" en la figura. Sin embargo, es hasta el tiempo de la muestra "n" cuando se puede detectar el evento y cerrar el interruptor. Si el intervalo entre las dos muestra Δt es muy grande, habrá un error excesivo. Esto se ilustra en la figura 3.10, donde se observa que si el elemento cambia de zona de operación cuando la tensión de referencia se ha excedido entonces se describe una característica diferente a la original (línea punteada en la figura).

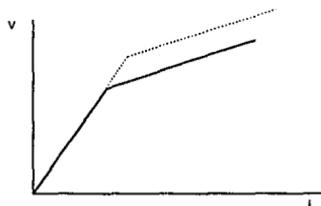


Fig. 3.10 Error que puede ocurrir en representaciones piezolineales

Al igual que el caso de la apertura del interruptor, en el cual fue necesario determinar el tiempo "real" de cruce por cero de la corriente, se supondrá aquí también, una variación lineal entre las muestras $n-1$ y n . Esto permitirá obtener el tiempo de cruce t_c para el cual la tensión a través del elemento es igual a V_{ref2} . De esta forma se puede calcular t_c con la siguiente ecuación:

$$t_c = \frac{V_{ref2} - V_b}{V_a - V_b} + (n-2)\Delta t \quad (3.19)$$

Se simula el cierre de un interruptor cuando se superpone a las condiciones iniciales la respuesta del sistema a una fuente de tensión. En este caso se consideran condiciones iniciales, la tensión a través del elemento cuando el interruptor en la figura 3.7 está abierto. Para el caso del circuito representado en la figura 3.7, la fuente de tensión tendrá la siguiente forma:

$$E_2(s) = \begin{cases} 0 & t \leq t_c \\ \mathfrak{I}\{-V(t) - V_x\} & t > t_c \end{cases} \quad (3.20)$$

donde V_x es una fuente de tensión directa con una magnitud especificada en la ecuación 3.17. La fuente $E_2(s)$ excitará un sistema diferente al original. Las modificaciones que sufre el sistema original pueden resumirse en términos de los cambios que experimenta la matriz de admitancia original (ecuación. 2.29), mediante las expresiones siguientes:

$$y_{jj} \rightarrow y_{jj} + y_x \quad (3.21a)$$

$$y_{jk} \rightarrow y_{jk} - y_x \quad (3.21b)$$

$$y_{kj} \rightarrow y_{kj} - y_x \quad (3.21c)$$

$$y_{kk} \rightarrow y_{kk} + y_x \quad (3.21d)$$

donde:

$$y_x = \frac{1}{R_x} \quad (3.22)$$

Nótese que el valor de R_x ya ha sido definido en (3.18).

En la figura 3.11a se ilustra la tensión a través del elemento no lineal en respuesta a una fuente de excitación del tipo de la ecuación 3.20. En la figura 3.11b se muestra la suma de esta respuesta con la tensión que se obtuvo como condiciones iniciales (figura 3.9). Hasta ahora se tiene la respuesta de la red considerando que el elemento no lineal operó en la zona 1 hasta el tiempo t_c y, desde ese tiempo en adelante, operó en la zona 2. Sin embargo observando la figura 3.11b desde el tiempo en que el elemento a operado en la zona 2, se aprecia que la tensión decrece a valores menores a V_{ref2} , en t_a ; por lo que nuevamente tendrá que producirse un cambio en la zona de operación del elemento. Para que dicho cambio se produzca es necesario que el interruptor abra. La simulación de apertura de un interruptor se logra superponiendo a la curva figura 3.11b la respuesta del sistema a una fuente de corriente determinada por las condiciones iniciales. Las condiciones iniciales serán en este momento, la corriente que fluye por el interruptor cerrado de la figura 3.7. Esta fuente tendrá las siguientes características:

$$I_2(s) = \begin{cases} 0 & t \leq t_a \\ \mathfrak{I}\{-i(t)\} & t > t_a \end{cases} \quad (3.23)$$

donde $i(t)$ esta dada por:

$$i(t) = \frac{V(t) - V_x}{R_x} \quad (3.24)$$

La fuente se colocará entre los nodos j y k . La matriz de admitancia utilizada para obtener la respuesta del sistema a esta fuente, nuevamente tendrá que ser modificada de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$Y_{jj} \rightarrow Y_{jj} - Y_x \quad (3.25a)$$

$$Y_{jk} \rightarrow Y_{jk} + Y_x \quad (3.25b)$$

$$Y_{kj} \rightarrow Y_{kj} + Y_x \quad (3.25c)$$

$$Y_{kk} \rightarrow Y_{kk} - Y_x \quad (3.25d)$$

donde el valor de v_x sigue siendo el que se define en la ecuación 3.22. En la figura 3.11c se muestra la forma de onda de la tensión entre los nodos j y k cuando el sistema, al que se encuentra interconectado el elemento no lineal es excitado por una fuente del tipo de la ecuación 3.23. En la figura 3.11d se muestra la solución final, que es la suma de las curvas de las figuras 3.11b y 3.11c.

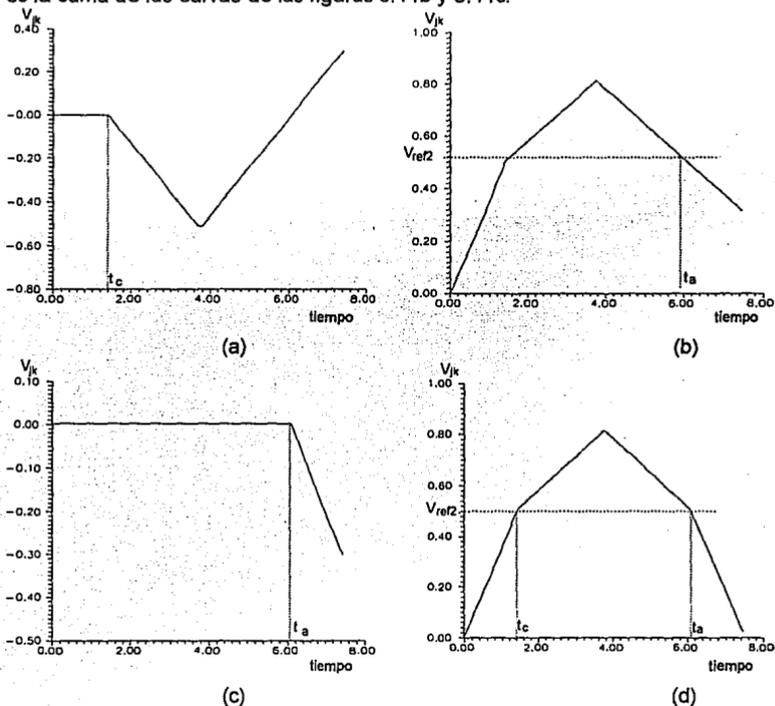


Figura 3.11 Obtención de la respuesta total en un elemento no lineal a través de superposiciones

El procedimiento antes expuesto puede extenderse fácilmente para más de dos segmentos lineales. El circuito asociado a la simulación sería básicamente de la misma forma que el ilustrado en la figura 3.7; sólo que en este caso, si N es el número de segmentos con el que se ha aproximado la característica $v-i$ del elemento no lineal, entonces se requerirán $N-1$ interruptores que colocarán en paralelo o que desconectarán de la red las resistencias y fuentes de tensión necesarias para

aproximar la característica v-i con una exactitud aceptable. Este circuito presentaría las características ilustradas en la figura 3.12 donde, al cerrar el interruptor n, el equivalente de Thévenin que ve el sistema es el del segmento n+1 y, al abrir, el del segmento n.

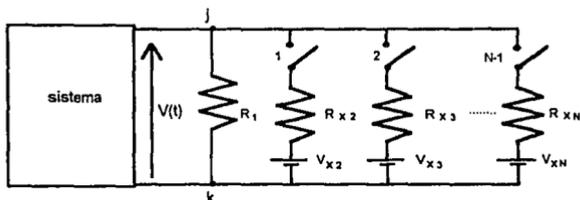


Fig. 3.12 Circuito asociado a la simulación de un elemento no lineal cuya característica se ha aproximado por N segmentos

Las magnitudes de las fuentes de tensión V_{xn} y de las resistencias R_{xn} pueden deducirse a través de la figura 3.13. En ésta se ha supuesto que la operación que desea efectuarse es el cierre del interruptor n-1 de la figura 3.12, esto con la finalidad de representar el segmento n+1 de la característica v-i del elemento en cuestión. El circuito de la figura 3.13a con el interruptor cerrado debe ser equivalente al circuito de la figura 3.13b (equivalente de Thévenin del segmento n+1). Obteniendo los equivalentes de Norton de las figuras 3.13a y 3.13b (los cuales se ilustran en 3.13c y 3.13d, respectivamente) se está en posibilidad de plantear las relaciones que deben satisfacerse para esto ocurra. Dichas relaciones son:

$$\frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_{xn+1}} = \frac{1}{R_{n+1}} \quad (3.26)$$

$$\frac{V_n}{R_n} + \frac{V_{xn+1}}{R_{xn+1}} = \frac{V_{n+1}}{R_{n+1}} \quad (3.27)$$

Despejando V_{xn+1} y R_{xn+1} de (3.26) y (3.27) respectivamente, se tiene:

$$R_{xn+1} = \frac{R_{n+1}R_n}{R_n - R_{n+1}} \quad (3.28)$$

y

$$V_x = \left(\frac{V_{n+1}}{R_{n+1}} - \frac{V_n}{R_n} \right) R_{xn+1} \quad (3.29)$$

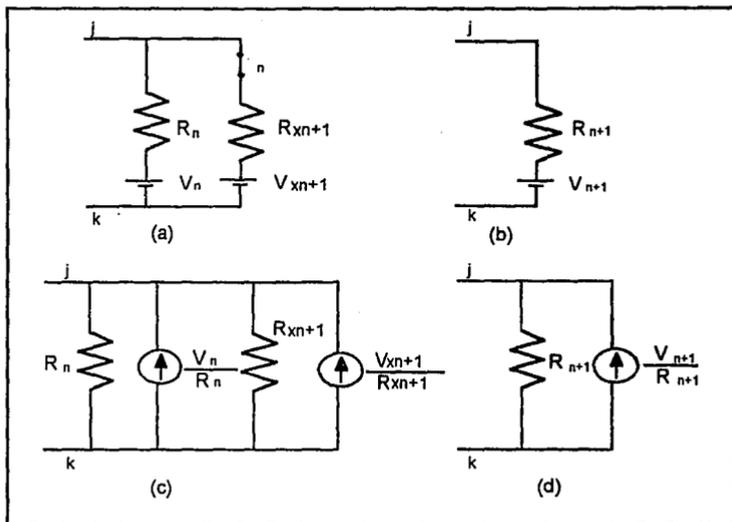


Fig. 3.13 Determinación de V_x y R_x cuando el elemento cambia de zona de operación del segmento n al $n+1$

En la ecuación 3.29 es necesario considerar los signos de V_n y V_{n+1} , ya que estos dependen de la región en la que opera el elemento. En la figura 3.14 puede observarse que si la característica del elemento no lineal es simétrica, los signos de la ordenada al origen de los segmentos lineales que la aproximan en la región positiva se invierten en la región negativa.

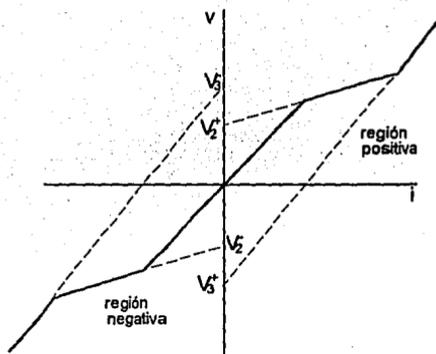


Fig. 3.14 Aproximación característica $v-i$ simétrica

El intervalo de tiempo Δt , empleado en la simulación, debe ser lo suficientemente pequeño para garantizar que la característica sea recorrida uniformemente: es decir, el elemento no podrá pasar del primer al tercer segmento sin pasar por el segundo o, en otras palabras, el un interruptor n del circuito ilustrado en la figura 3.12 no puede cerrar si el interruptor $n-1$ no se encuentra cerrado. Para el caso de apertura: el interruptor n no podrá operar a menos que se encuentre abierto el interruptor $n+1$.

El número de superposiciones que deben hacerse a la respuesta inicial durante una simulación en la que se incluye un elemento no lineal, puede ser considerablemente grande; ya que depende de la naturaleza de la respuesta y ésta es imposible conocerla de antemano.

3.3 Ejemplo de aplicación.

A continuación se analizará un circuito eléctrico, en el que se incluyen tres resistencias no lineales iguales. Estas serán modeladas por circuitos del tipo de la figura 3.12. En la figura 3.15a se muestra el circuito y en la figura 3.15b la aproximación piezolineal de la característica $v-i$ de estas resistencias. Dado que la característica se ha aproximado con 4 segmentos, el circuito asociado a cada una de ellas será de la forma que se muestra en la figura 3.15c.

Cuando en una red se incluye más de un elemento no lineal, el procedimiento a seguir en la simulación es:

1. Se obtiene la caída de tensión en cada uno de los elementos especificados.
2. Se determina un posible tiempo de operación para cada uno de ellos, localizando el cruce del alguna tensión de referencia.
3. El interruptor que opera es el que tenga estimado el menor tiempo.

Este proceso se repite hasta que no haya ninguna tensión de referencia excedida o hasta que el tiempo de observación haya terminado.

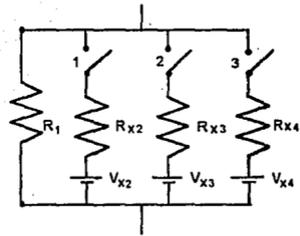
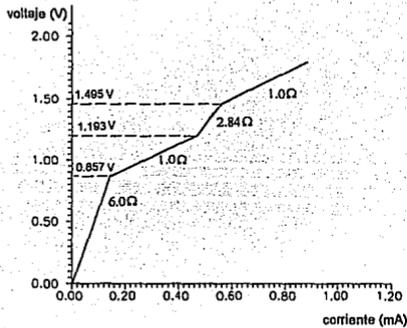
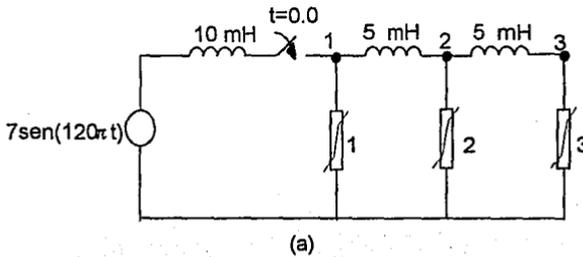


Fig. 3.15 (a) Circuito a analizar (b) Característica no lineal de las resistencias (c) Circuito que modela a cada una de las resistencias no lineales

Como se explicó anteriormente cada uno de los elementos "propondrá" un tipo y tiempo de operación (en caso de que exista). La operación que se realizará será la que corresponda al menor tiempo. La información de las primeras 11 operaciones de las 32 requeridas en la simulación del circuito de la figura 3.15(a) se presenta en la Tabla 3.1 donde se ha sombreado la operación realizada. El número de muestras especificado en la simulación fue de 512 y el tiempo de observación de 25 ms.

Las tensiones obtenidas en los nodos 1,2 y 3 se muestran en las figuras 3.16, 3.17 y 3.18 respectivamente.

Tabla 3.1. Operaciones sugeridas y realizadas por los elementos no lineales

Elemento 1		Elemento 2		Elemento 3	
Operación	Muestra	Operación	Muestra	Operación	Muestra
Cierre 1	30	Cierre 1	50	Cierre 1	65
Cierre 2	55	Cierre 1	66	Cierre 1	82
Cierre 3	61	Cierre 1	63	Cierre 1	77
Apert. 3	216	Cierre 1	63	Cierre 1	79
Apert. 3	203	Cierre 2	110	Cierre 1	89
Apert. 3	200	Cierre 2	112	Cierre 2	192
Apert. 3	203	Cierre 3	132	Cierre 2	172
Apert. 3	202	Apert. 3	218	Cierre 2	177
Apert. 3	202	Apert. 3	223	Apert. 2	288
Apert. 2	207	Apert. 3	216	Apert. 2	265
Apert. 1	221	Apert. 3	219	Apert. 2	283

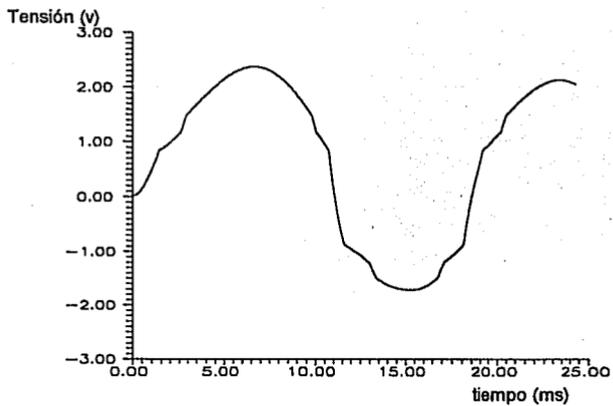


Fig.3.16 Tensión en el nodo 1

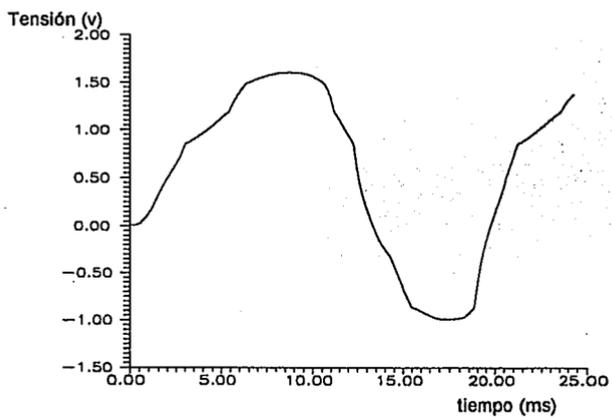


Fig.3.17 Tensión en el nodo 2

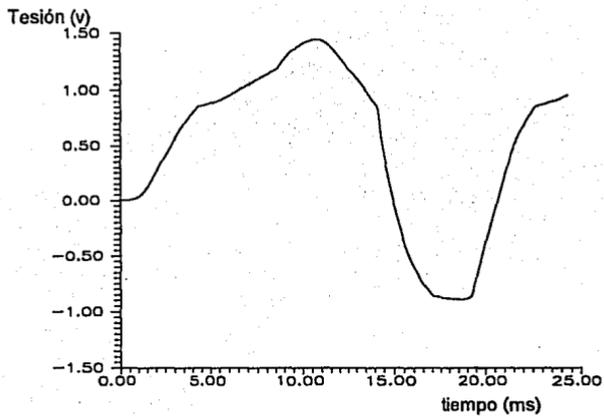


Fig. 3.18 Tensión en el nodo 3

CAPITULO 4

SIMULACION DE CASOS PRACTICOS DE TRANSITORIOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA Y SU COMPARACION CON EL EMTP.

En este capítulo se presenta una serie de simulaciones de casos prácticos de transitorios, las cuales han sido realizadas empleando el programa de transitorios en el dominio de la frecuencia (PTDF) propuesto y desarrollado en esta tesis. Las simulaciones también se efectúan mediante el EMTP y algunas de ellas corresponden a casos ampliamente documentados en la literatura especializada [16]. Los casos que se presentan caen dentro de los siguientes cuatro tipos (1) transitorios producidos por descargas atmosféricas, (2) transitorios producidos por cierre secuencial de interruptores, (3) tensiones de recuperación producidas por la apertura de interruptores y (4) supresión de tensiones transitorias mediante apartarrays.

La comparación de las simulaciones con los resultados del EMTP cubren dos aspectos muy importantes del desarrollo del PTDF. En primer lugar están los casos que pueden ser simulados con muy alta precisión con el EMTP. Estos permiten validar la habilidad del PTDF para analizar transitorios tanto de líneas con parámetros eléctricos constantes como de elementos resistivos no lineales. En segundo lugar están los casos para los que el fenómeno transitorio se ve afectado en forma considerable por la dependencia de la frecuencia de los parámetros de línea. Estos últimos justifican la propuesta de la tesis de que el programa PTDF se constituya en una referencia para el EMTP. Un argumento a favor de esto está en el hecho de que cuando se incorporan ciertos efectos de dependencia de la frecuencia en los modelos de línea del EMTP (es decir, que se emplea el modelo de J.R. Martí [25]), los resultados de éste tienden a aproximarse a los del PTDF. Aquí sin embargo, cabe aclarar que la validación definitiva del PTDF sólo podrá efectuarse mediante la comparación con pruebas de campo apropiadas.

4.1 Sobretensiones por descargas atmosféricas

Cuando una descarga atmosférica incide directamente en una torre o en un hilo de guarda, pueden presentarse tensiones de considerable magnitud en la parte superior de la torre. Si la diferencia de tensiones entre ésta y uno de los conductores de fase supera la rigidez dieléctrica del aislamiento, se produce el efecto conocido como descarga inversa [16].

La magnitud de la tensión que adquiere la torre está en función de varios factores, dentro de los que se pueden mencionar los siguientes:

- resistencia al pie de la torre (tower footing resistance, TFR)
- magnitud de la corriente de la descarga
- tiempo de frente de la onda de corriente

En el ejemplo que se da a continuación se considerarán dos valores de resistencia al pie de la torre, 50 y 20 Ω , y dos tiempos de elevación del frente de onda, 1 y 2 μs . La forma de onda de la descarga se asume que es la doble rampa lineal de la figura 4.1. Nótese que la amplitud máxima de ésta es de 1 kA y que el tiempo de cola (es decir, el tiempo en que la onda disminuye a la mitad de la amplitud máxima) es de 80 μs .

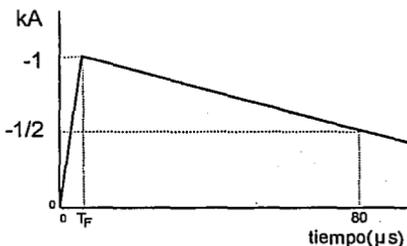


Fig. 4.1 Forma de onda de la corriente de descarga

Se asume en el ejemplo que las líneas de transmisión y las torres están dispuestas simétricamente respecto a la torre sobre la cual incide la descarga. La línea puede entonces ser "doblada" en este punto; es decir, se supone que desde ese punto parten dos líneas en paralelo. La torre sobre la cual incide la descarga es modelada

por una línea monofásica con una impedancia característica de 200Ω y un tiempo de viaje de $0.102\mu\text{s}$. Los conductores y las otras torres se modelan con la mitad de su impedancia, ya que se encuentran en paralelo con una línea o una torre idéntica a ellas. Sólo se consideran en la simulación 5 torres, y al final de este arreglo se coloca la matriz de admitancia característica de la línea equivalente a fin de evitar reflexiones. En la figura 4.2 se muestra una representación del modelo del sistema a simular en el ejemplo.

La disposición de los conductores se muestra en la figura 4.3. En el estudio solamente se considera uno de los conductores de fase externos, ya que es el que experimenta la mayor diferencia de tensión con respecto a la torre. Los dos hilos de guarda se reducen a uno equivalente.

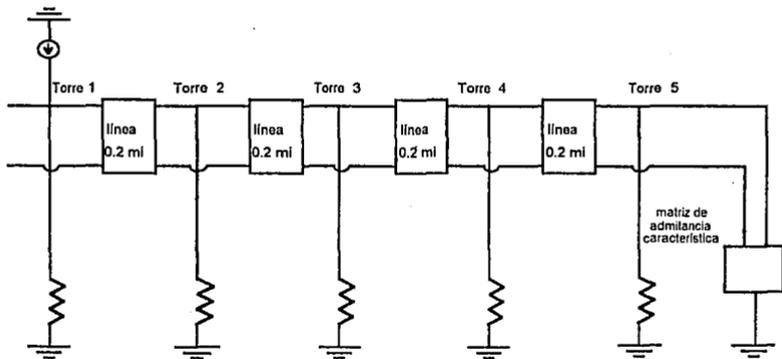


Fig. 4.2 Modelo utilizado en la simulación de una descarga directa a la torre

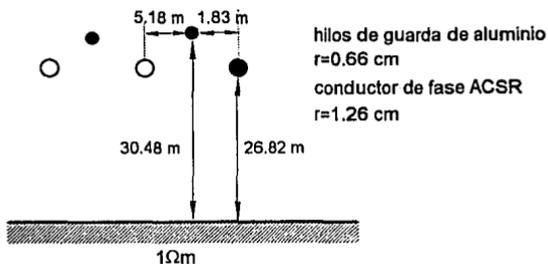


Fig. 4.3 Disposición de los conductores en la línea en la cual se analiza una descarga atmosférica en una torre

En la figura 4.4 se muestran las formas de onda que se obtienen en la torre1, tanto para el conductor de fase como para el hilo de guarda, cuando se aplica la forma de onda representada en la figura 4.1 con un tiempo de frente de onda de $1 \mu\text{s}$. En este ejemplo se ha considerado una resistencia al pie de la torre de 50Ω . Se puede observar en la figura 4.4 que la tensión en ambos conductores tiende a seguir la forma de onda de la excitación hasta que las reflexiones, tanto las causadas por el suelo como por las otras torres, regresan. Nótese que las reflexiones tienden a reducir la magnitud de la sobretensión. A fin de establecer una comparación, la figura 4.5 muestra la misma simulación que la de la figura 4.4. En éste caso, sin embargo, se utilizó el EMTP. Ambas figuras son muy similares. Únicamente difieren en el pico máximo inducido en el conductor de fase que para el PTDF es de -18 kV y para el EMTP es de -14 kV . Mientras que las figuras 4.4 y 4.5 presentan las formas de onda simuladas para la torre1, las figuras 4.6 y 4.7 presentan las correspondientes para la torre 3. En estas últimas figuras las diferencias entre el PTDF y el EMTP son menores que en las dos primeras.

Con el propósito de analizar el efecto de algunos de los parámetros de modelado, la simulación del sistema representado en la figura 4.2 se repite variando éstos. Primeramente, en la figura 4.8 se muestran las formas de onda de las tensiones en la torre 1 considerando ahora que la resistencia al pie de la torre es de 20Ω . De la comparación de esta figura con la 4.4, se observa que la reducción de la resistencia al pie de la torre a tiende a reducir la magnitud de la onda transitoria. Esto se debe a que en la medida que la resistencia se acerca a cero, la magnitud de la onda reflejada

umenta, y ésta tiende a cancelar la onda incidente ya que son de signo opuesto. La figura 4.9 corresponde a la misma simulación que la de la figura 4.8; sólo que ha sido efectuada con el EMTP. Comparando 4.8 y 4.9 puede verse que los resultados son muy parecidos, excepto por el pico máximo de la onda inducida en el conductor de fase que para el PTDF es de -12 kV y para el EMTP es de -10kV:

Para la figura 4.10, la simulación del sistema de la figura 4.2 se repite utilizando la onda de excitación con un tiempo de elevación del frente de $2\mu\text{s}$. La resistencia al pie de torre se asume de 50Ω . Comparando las figuras 4.10 y 4.11, se puede observar que las sobretensiones máximas disminuyen ligeramente para la onda de excitación con el frente de onda más lento. Se puede ver adicionalmente, de ambas figuras, que el cambio en el tiempo de elevación afecta considerablemente la forma de las ondas resultantes.

Una observación general de las simulaciones presentadas en esta sección es que, para el caso de la figura 4.2, los resultados obtenidos con el PTDF y con el EMTP son bastantes similares. Las relativamente pequeñas diferencias encontradas pueden explicarse en función de la manera en que se toman los parámetros de línea en uno y otro programa. Para el modelado en el EMTP, estos parámetros se consideran constantes y se calculan a muy alta frecuencia. En cuanto al PTDF, éste considera la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea. Las figuras 4.12 y 4.13 muestran, mediante un área sombreada, la región ocupada por las frecuencias significativas para los estudios realizados. Puede verse que la frecuencia escogida para el EMTP cae dentro de esa región. Mientras que en la figura 4.12 se incluyen las gráficas de dos componentes de la matriz de transformación modal de la línea, en la figura 4.13 se grafican los elementos diagonales de su matriz de admitancia "característica". Puede verse en ambas figuras que la suposición de parámetros constantes es adecuada para el estudio efectuado en esta sección.

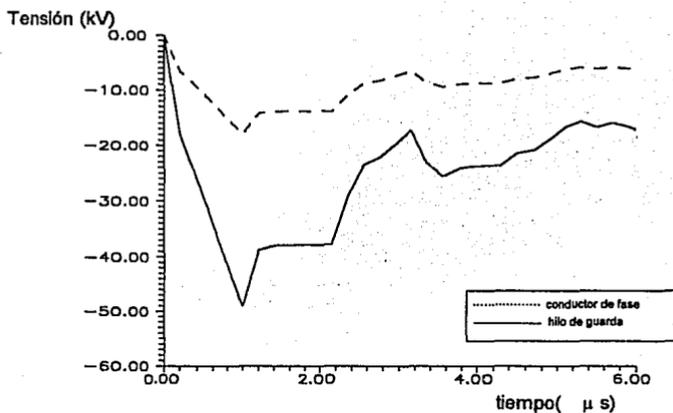


Fig. 4.4 Tensión en el hilo de guarda en la torre 1 y tensión inducida en el conductor de fase para $T_F=1\mu s$ y $T_{FR}= 50\Omega$, (PTDF).

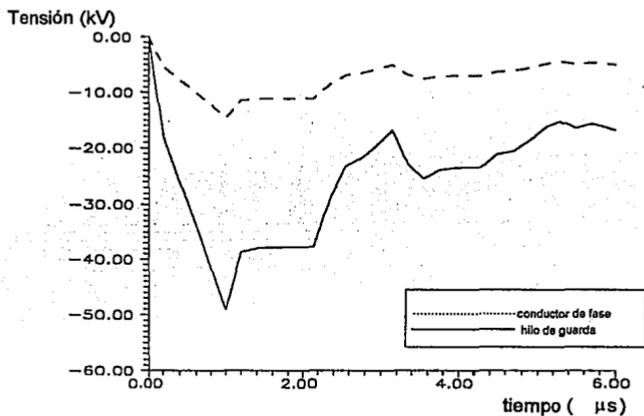


Fig. 4.5 Tensión en el hilo de guarda en la torre 1 y tensión inducida en el conductor de fase para $T_F=1\mu s$ y $T_{FR}= 50\Omega$, (EMTP).

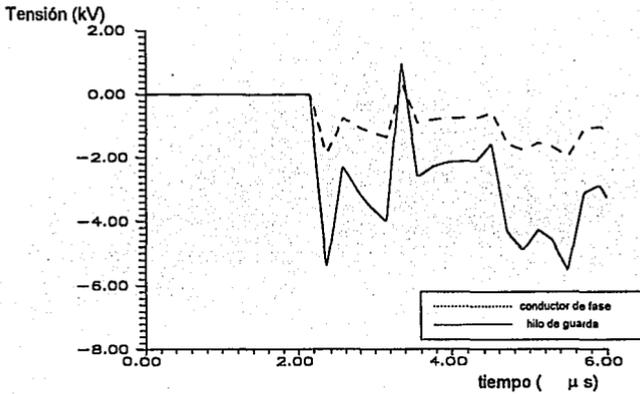


Fig. 4.6 Tensión en el hilo de guarda en la torre 3 y tensión inducida en el conductor de fase para $T_F=1\mu s$ y $T_{FR}=50\Omega$, (PTDF).

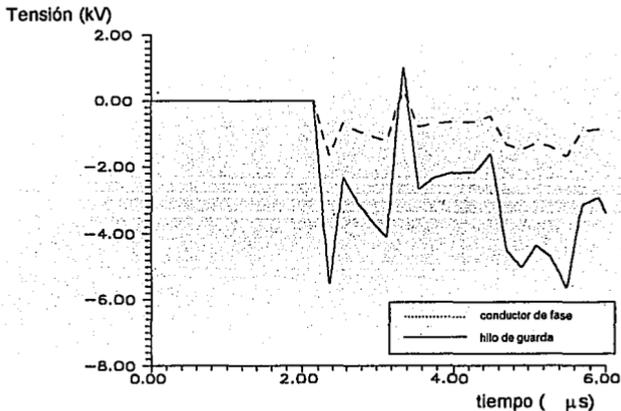


Fig. 4.7 Tensión en el hilo de guarda en la torre 3 y tensión inducida en el conductor de fase para $T_F=1\mu s$ y $T_{FR}=50\Omega$, (EMTF).

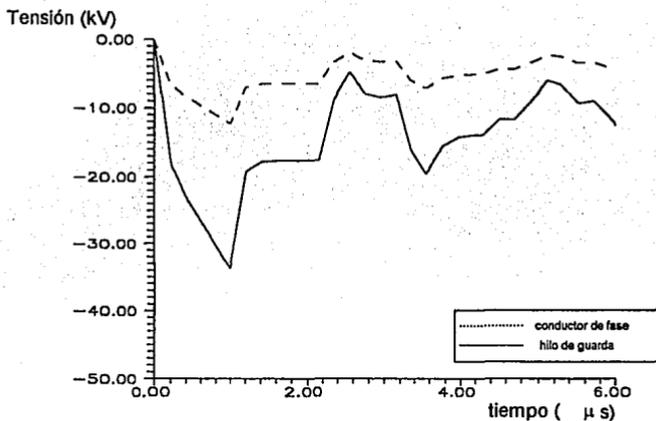


Fig. 4.8 Tensión en el hilo de guarda en la torre 1 y tensión inducida en el conductor de fase para $T_F=1\mu s$ y $TFR= 20\Omega$, (PTDF).

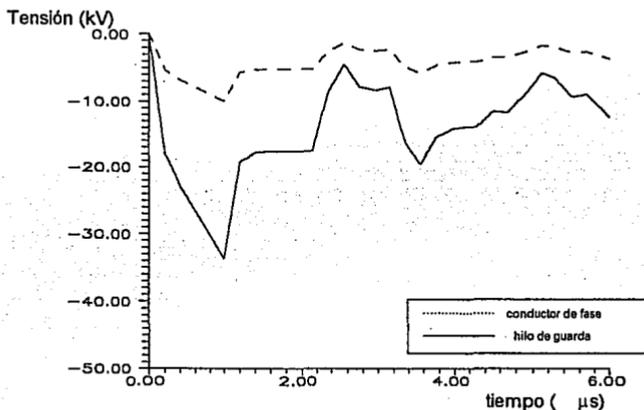


Fig. 4.9 Tensión en el hilo de guarda en la torre 1 y tensión inducida en el conductor de fase para $T_F=1\mu s$ y $TFR= 20\Omega$, (EMTP).

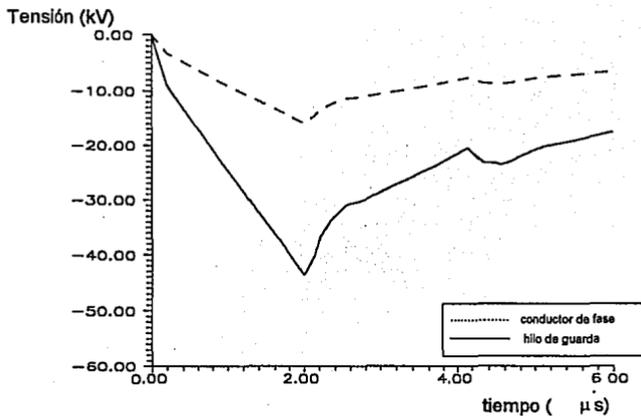


Fig. 4.10 Tensión en el hilo de guarda en la torre 1 y tensión inducida en el conductor de fase para $T_F=2\mu\text{s}$ y $T_{FR}=50\Omega$, (PTDF).

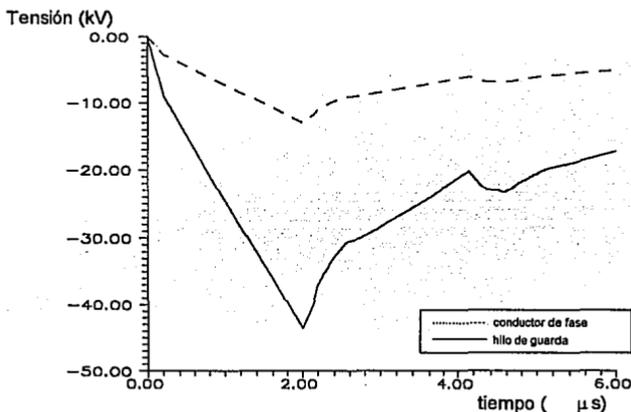


Fig. 4.11 Tensión en el hilo de guarda en la torre 1 y tensión inducida en el conductor de fase para $T_F=2\mu\text{s}$ y $T_{FR}=50\Omega$, (EMTP).

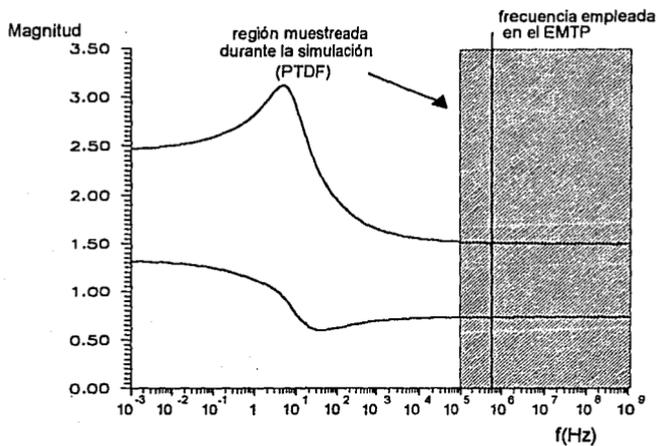


Fig. 4.12 Elementos de la Matriz de Transformación $M(1,1)$, $M(1,2)$ para la configuración dada en la figura 4.3

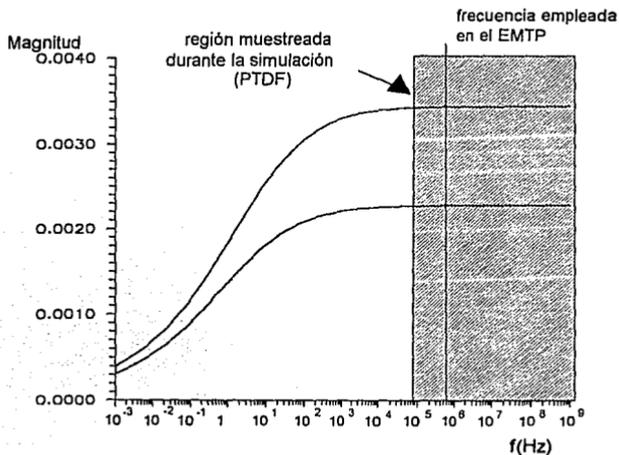


Fig. 4.13 Elementos de la diagonal de la matriz de admitancia para la configuración de línea dada en 4.3.

4.2 Recierre en líneas de transmisión.

(a) Sin medios de reducción de sobretensiones.

Las sobretensiones originadas por maniobras con interruptores definen en muchos casos el nivel de aislamiento considerado en el diseño de los sistemas de transmisión de energía eléctrica [7,29]. Las sobretensiones generadas al energizar una línea en vacío están en función de la tensión entre los contactos del interruptor al momento del cierre. Asumiendo que no existe carga atrapada, la sobretensión máxima de entrada que puede viajar por la línea es de 1 p.u., la cual experimentará una reflexión positiva en el extremo remoto de la línea. En líneas trifásicas la combinación multimodal de ondas puede producir sobretensiones superiores a 2 p.u. Cuando hay carga atrapada en las líneas pueden originarse sobretensiones más severas. Debido esto a que la onda de sobretensión de entrada, puede tener una magnitud de 2 pu si el cierre ocurre cuando la fuente de 60 Hz está 180° fuera de fase con la carga atrapada y ésta tiene un valor de 1 p.u.

El cierre de los diferentes polos de un interruptor por lo general no está sincronizado con la fuente de potencia. Por lo que el tiempo de operación de cada uno de ellos puede considerarse como un evento aleatorio. Por otro lado las diferentes combinaciones de tiempos de cierre de los polos originan sobretensiones de diferente magnitud. Como consecuencia de esto las sobretensiones que se generan con la operación de un interruptor presentan un comportamiento aleatorio, el cual es analizado por métodos estadísticos. En estos métodos es necesario realizar repetidas veces la simulación del transitorio variando los tiempos de cierre de los polos. Una vez que se dispone de la sobretensión máxima alcanzada en las diferentes simulaciones, el conjunto de ellas se procesa estadísticamente. Esto con la finalidad de decidir mediante algún criterio cual será la tensión considerada al diseñar el aislamiento en un sistema.

En el siguiente ejemplo se simulará el cierre secuencial de una línea de transmisión trifásica cuyo diagrama unifilar se muestra en la figura 4.10. La disposición de los conductores corresponde a la representada en la figura 2.8. Los tiempos de cierre de los tres polos del interruptor son: 3,4,5 ms para la fase A, B y C respectivamente. Se considerará una carga atrapada de 1p.u en la fase B y de 0.8 en la fase C.

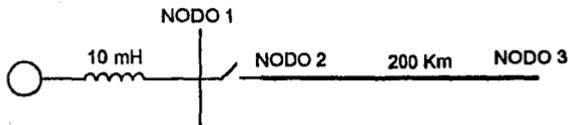


Fig.4.14 Diagrama unifilar del sistema empleado en la simulación de cierre secuencial

En la figura 4.15 se muestra la forma de onda de la tensión en la fase B en nodo remoto de la línea, obtenida de la simulación en el PTDF. Este mismo ejemplo se simuló en el EMTP, obteniéndose la forma de onda que se ilustra en la figura 4.16. El modelo de línea empleado en el EMTP fue de una línea de parámetros constantes, calculados éstos a 60 Hz. La sobretensión máxima estimada por ambos programas es de aproximadamente 2 p.u. Sin embargo, las formas de onda obtenidas en uno y otro programa presentan diferencias significativas. Estas se pueden explicar en función de los modelos de línea empleados en el PTDF y en el EMTP. Mientras que en el modelo empleado en el PTDF se considera la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea, en el EMTP se asumen constantes. Esta consideración en el EMTP como se vio en el ejemplo 4.1 puede ser válida para el análisis de ciertos fenómenos transitorios; para otros sin embargo, no es adecuada.

Las formas de onda que generalmente se presentan durante un fenómeno transitorio están compuestas por armónicos que recorren un intervalo amplio de frecuencias. Los modelos que asumen parámetros constantes no pueden reproducir adecuadamente la respuesta de la línea sobre este intervalo. En muchos casos la representación de parámetros constantes tiende a exagerar la magnitud de los armónicos con mayor frecuencia y como consecuencia la forma de onda se distorsiona y presenta una amplitud máxima mayor. Con la finalidad de ilustrar esto considérese las figuras 4.17 y 4.18 en ellas se presenta una aproximación simple del espectro de frecuencias tanto de la señal obtenida con el programa en el dominio de la frecuencia ilustrada figura 4.15, así como de la señal generada en el EMTP con parámetros constantes representada en la figura 4.16. Como se puede observar de estas figuras, 4.17 y 4.18, los espectros a bajas frecuencias son prácticamente iguales (no se grafica componente de c.d) pero en altas frecuencias se aprecia una magnitud superior en los armónicos del espectro de la figura 4.18.

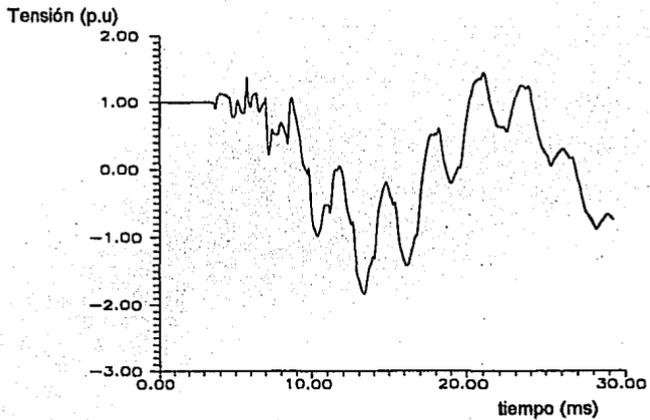


Fig. 4.15 Tensión en la fase-B en el nodo 3 (PTDF).

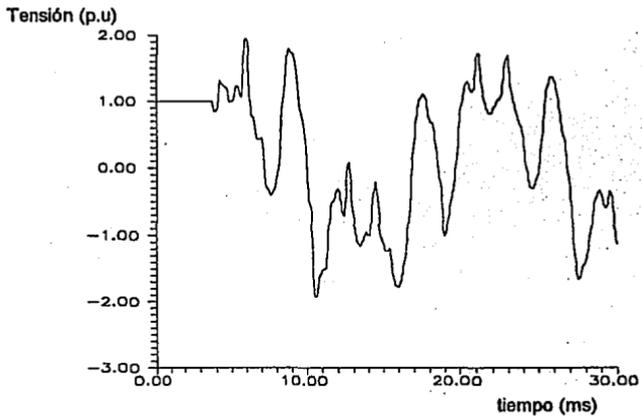


Fig. 4.16 Tensión en la fase B en el nodo 3 utilizando un modelo de parámetros constantes (EMTP).

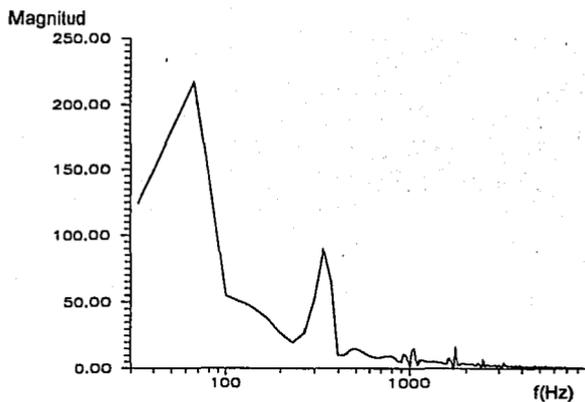


Fig. 4.17 Espectro de frecuencias de la señal de la figura 4.15.

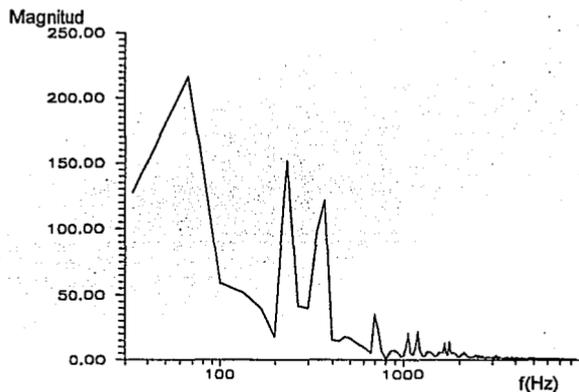


Fig. 4.18 Espectro de frecuencias de la señal de la figura 4.16.

ESTA TESIS NO PUEDE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Los parámetros importantes en el análisis de la propagación de ondas son: la impedancia característica y la constante de propagación. Ambos parámetros, dependen de la frecuencia. En el análisis de ciertos fenómenos transitorios es indispensable considerar esta dependencia si se desea obtener resultados confiables. En las figuras 4.19 y 4.20 se muestra la dependencia de la frecuencia de la atenuación (db/km) y de la velocidad modal para la configuración de línea representada en la figura 2.8. En ellas se ha sombreado la región muestreada por el PTDF durante la simulación. Como puede observarse de las figuras 4.19 y 4.20 el EMTP "atenua" y asigna una velocidad fija a todos los armónicos involucrados en el transitorio. De acuerdo a esta representación las tensiones de fase para armónicos de frecuencias relativamente grandes estarán constituidas por tensiones modales que no están suficientemente "atenuadas" y que se han propagado a una velocidad que no corresponde a la correcta.

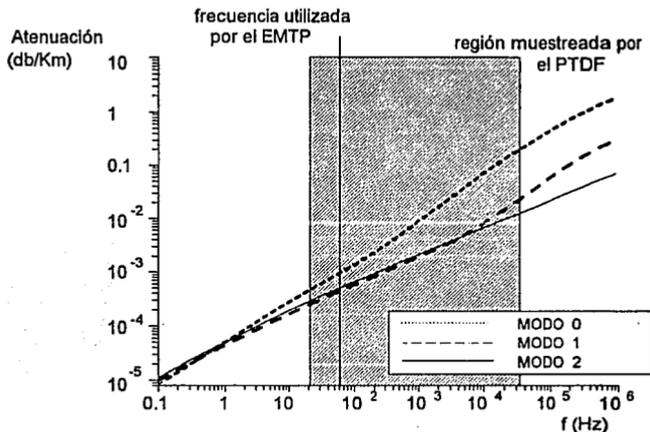


Fig. 4.19 Atenuación modal como función de la frecuencia para la configuración de línea representada en la figura 2.8

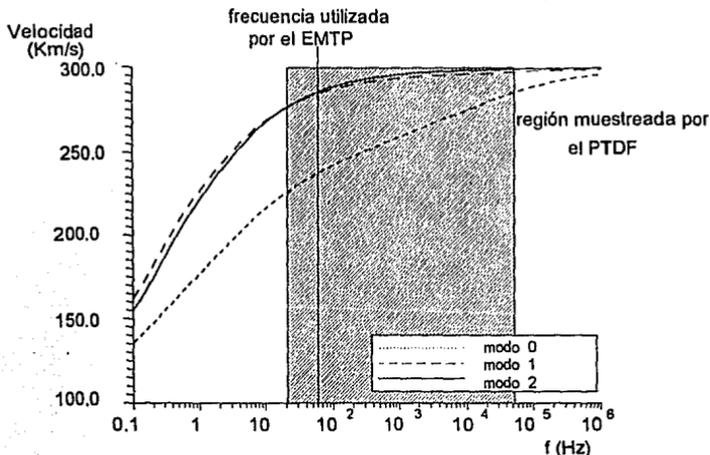
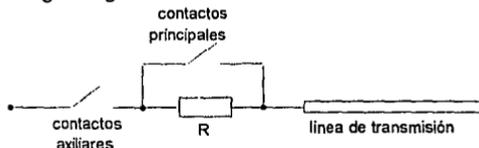


Fig. 4.20 Velocidad modal como función de la frecuencia para la configuración de línea representada en la figura 2.8

(b) Utilizando resistencias de preinserción

Se compararán ahora los resultados de una simulación en el dominio de la frecuencia con una realizada en el EMT, empleando un modelo de línea que considera la dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea. En el modelo de J.Martí [25], a partir de convoluciones recursivas, es posible considerar en las simulaciones en el dominio del tiempo la dependencia de la frecuencia tanto de la impedancia característica de la línea como de la constante de propagación. El ejemplo que se analizará a continuación será el de la energización de una línea a través de resistencias de preinserción. Estas son utilizadas con la finalidad de reducir las sobretensiones generadas al recierre en una línea de transmisión. El esquema de una ellas se muestra en la figura siguiente:



El contacto auxiliar cierra primero, insertando la resistencia de preinserción. Esta resistencia se coloca en serie con la impedancia característica de la línea de transmisión y la sobretensión de entrada es reducida de un valor V a un valor:

$$V \frac{Z}{(R+Z)}$$

Al energizar una línea a través de resistencias de preinserción se presentan dos transitorios separadamente: uno al energizar la línea a través de la resistencia y otro al cortocircuitarla. Existe un valor óptimo de resistencia de preinserción el cual será aproximadamente igual a la impedancia natural de la línea. En el caso que se analizará a continuación el valor de la resistencia de preinserción se ha elegido arbitrariamente.

El diagrama unifilar del sistema a analizar se muestra en la figura 4.21, es el mismo caso que se analizó anteriormente, solo que ahora la energización de la línea se hará a través de resistencias de preinserción de 450Ω . Los tiempos de operación de los contactos auxiliares y principales se resume en la tabla 4.1.

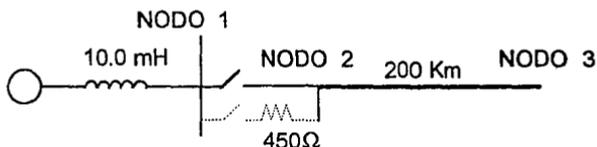


Fig. 4.21 Diagrama unifilar del sistema empleado en la simulación de cierre secuencial empleando resistencias de preinserción.

Tabla 4.1 Tiempo de operación de interruptores en milisegundos

Fase	Contactos auxiliares	Contactos principales
A	3.0	11.0
B	4.0	12.0
C	5.0	13.0

Los resultados obtenidos en la simulación de la tensión en el nodo remoto de la línea, tanto en el PTFD como en el EMTP se muestran en las figuras 4.22 y 4.23 para la fase A; 4.24 y 4.25 para la fase B y 4.26 y 4.27 para la fase C.

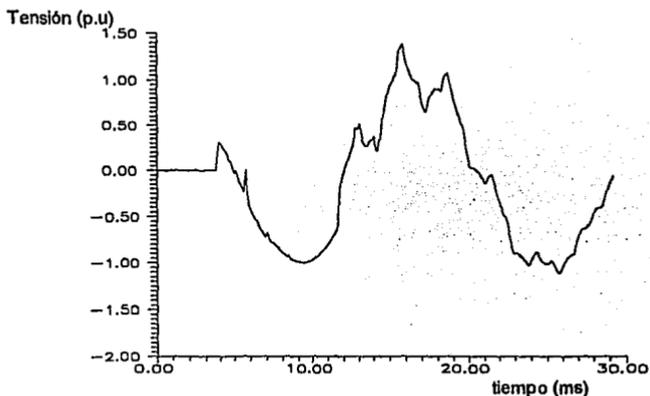


Fig.4.22 Tensión en la fase A en el nodo 3. Cierre secuencial con resistencias de preinserción (PTFD)

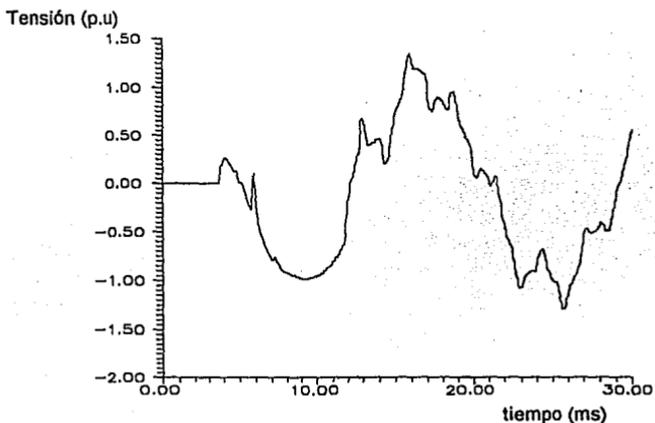


Fig.4.23 Tensión en la fase A en el nodo 3. Cierre secuencial con resistencias de preinserción. EMTP (J. Martí)

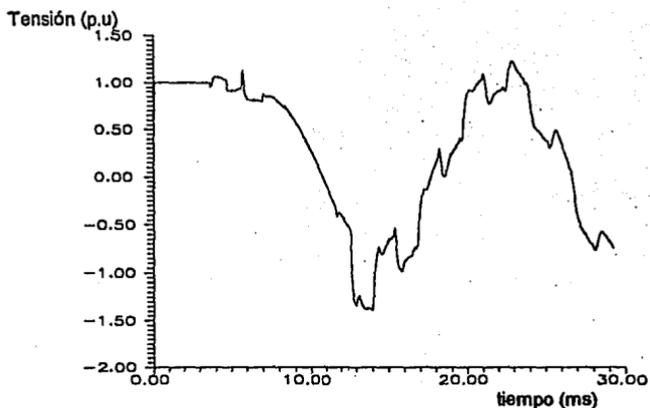


Fig.4.24 Tensión en la fase B en el nodo 3. Cierre secuencial con resistencias de preinserción (PTDF)

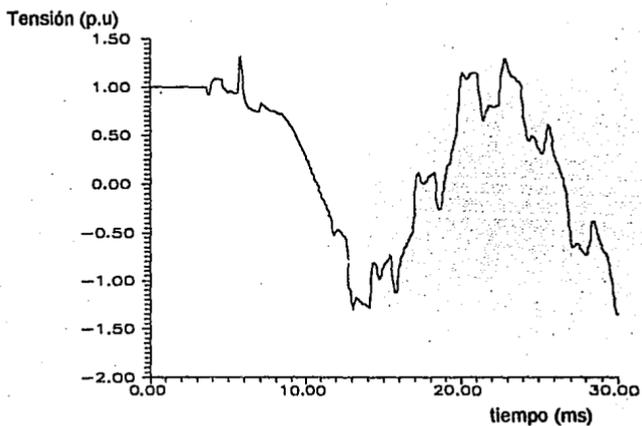


Fig. 4.25 Tensión en la fase B en el nodo 3. Cierre secuencial con resistencias de preinserción. EMTP (J. Martí)

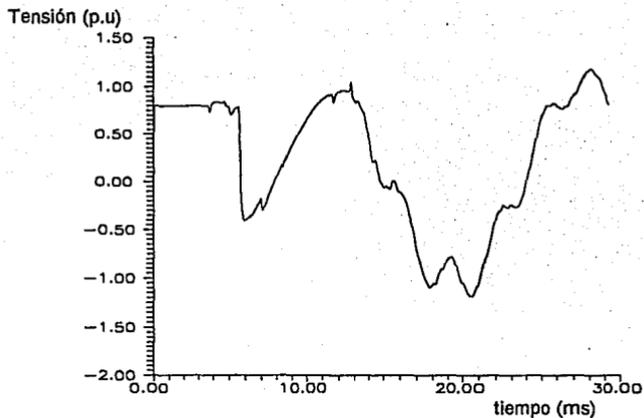


Fig.4.26 Tensión en la fase C en el nodo 3. Cierre secuencial con resistencias de preinserción (PTDF)

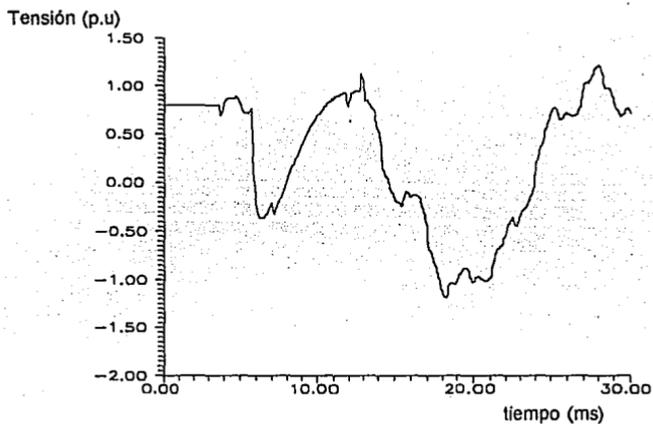


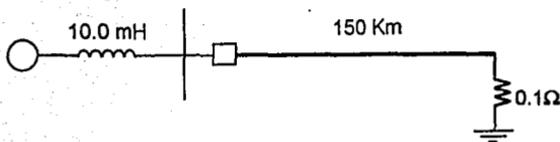
Fig. 4.27 Tensión en la fase C en el nodo 3. Cierre secuencial con resistencias de preinserción. EMTP (J. Martí)

Las magnitudes máximas y las formas de onda de las tensiones obtenidas en el PTFD y en EMTP son bastante similares. Por lo que puede concluirse entonces que el modelo de línea de transmisión utilizado en el EMTP resulta una aproximación adecuada para el análisis de este fenómeno. Cabe aclarar que dependiendo de la configuración de la línea de transmisión la exactitud de los resultados obtenidos en el EMTP puede variar.

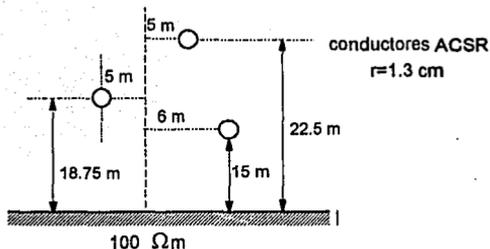
4.3 Tensión transitoria de recuperación

Dentro de los diversos factores que determinan la clase de interruptor que debe utilizarse para cierta aplicación, se encuentra la tensión de recuperación transitoria [22]. Esta se define, como la tensión que aparece a través de los polos de un interruptor abierto después de que éste a liberado una falla y el arco se ha extinguido. Después de que la corriente cruza por cero, ambos extremos del interruptor recobran sus propias fuentes de tensión. Para un buen funcionamiento de éste, la rigidez dieléctrica del medio aislante entre los contactos debe exceder siempre la tensión de recuperación transitoria que aparece entre ellos. Debido a que muchas de las corrientes de corto circuito están principalmente limitadas por reactancias inductivas, la tensión del sistema está cercana a su amplitud máxima en el instante de la interrupción de la corriente. Por lo que la tensión tiende a aumentar instantáneamente. La capacitancia de la red en la que se encuentra interconectado el interruptor, limita la velocidad de crecimiento de la tensión y en combinación con la inductancia de la red constituye un circuito oscilatorio con tensiones pico significativamente mayores a las normales.

En este ejemplo se obtendrá la tensión transitoria que aparece en las terminales de un interruptor de tres polos, el cual libera una falla trifásica a tierra en el nodo remoto de una línea de transmisión. El diagrama unifilar del sistema y la configuración de la línea se muestran en las figuras 4.28a y 4.28b, respectivamente.



(a)



(b)

Fig. 4.28 (a) Diagrama unifilar del sistema en que se analiza la tensión transitoria de recuperación (b) Disposición de los conductores

Se especificó un tiempo de apertura de 2 ms para las tres fases, lo que significa que los polos del interruptor operarán al primer cruce por cero de las corrientes después de este tiempo. La tabla 4.2 proporciona los tiempos de operación, obtenidos de la simulación, tanto en el PTDF como en el EMTP (en la cual se utilizó el modelo de J. Martí). La tensión a través de los contactos del interruptor de la fase B se muestra en la figura 4.29 (PTDF) y 4.30 (EMTP); así como la corriente que circula a través de él en las figuras 4.31 y 4.32.

Tabla 4.2 Tiempos de operación de los polos del interruptor en milisegundos.

fase	PTDF	EMTP
A	9.13	10.0
B	2.05	2.7
C	12.56	13.65

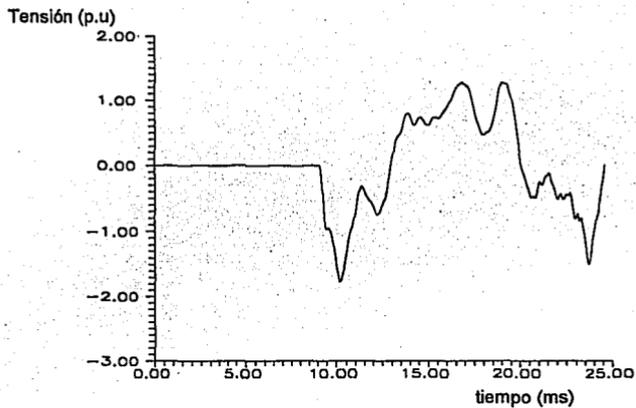


Fig. 4.29 Tensión de recuperación transitoria
fase A (PTDF)

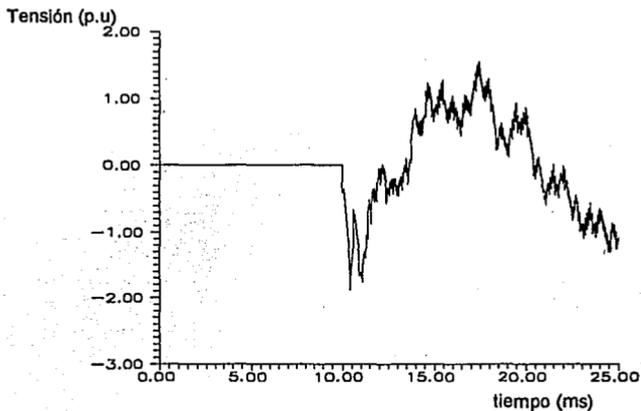


Fig. 4.30 Tensión de recuperación transitoria
fase A, EMTP (J. Marti).

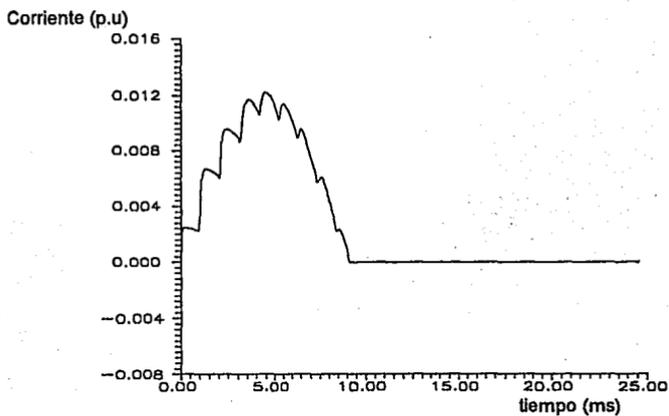


Fig. 4.31 Corriente a través del interruptor de la fase A (PTDF)

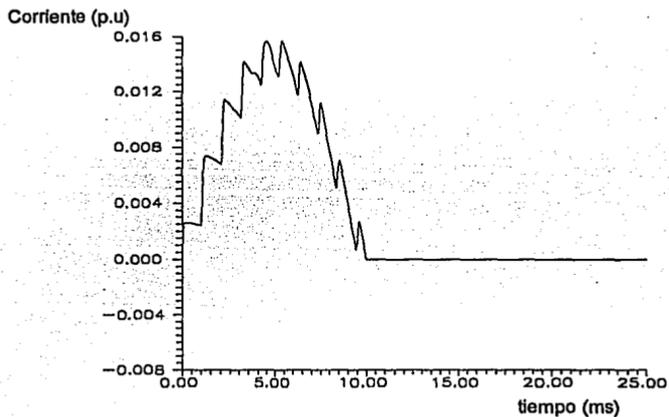


Fig. 4.32 Corriente a través del interruptor de la fase A, EMPT (J. Martí)

Los tiempos de operación de las tres fases del interruptor resultaron similares en el EMTP y en PTDF (Tabla 4.2). A pesar de esto, comparando las formas de onda de la tensión, figuras 4.29 y 4.30 y de la corriente, figuras 4.31 y 4.32, se puede observar que se presentan diferencias importantes. En el ejemplo de energización de una línea en vacío a través de resistencias de preinserción (ejemplo 4.3b), fue suficiente considerar la dependencia de la frecuencia de la impedancia característica y la constante de propagación, es decir utilizar el modelo de J. Martí, para lograr resultados muy similares entre el EMTP y el PTDF. En este ejemplo, a pesar de la corrección las diferencias son evidentes.

La apariencia de la tensión ilustrada en la figura 4.30 sugiere la presencia de errores numéricos en el EMTP, lo cual explicaría en parte las discrepancias entre las formas de onda. Otra posible explicación es la consideración hecha en el modelo de J. Martí respecto a la matriz de transformación. En este modelo se asume constante. Para ciertos arreglos de líneas de transmisión y dentro de cierto intervalo de frecuencia esta suposición es correcta. En las figuras 4.33 y 4.34 puede observarse la variación de la magnitud de algunos elementos de la matriz de transformación para una línea horizontal (figura 2.8) y para la línea de la figura 4.28b que se está considerando. En ambas figuras se ha sombreado el intervalo de frecuencias de interés para este caso. Puede apreciarse de la figura 4.34 que en la línea horizontal puede asumirse una matriz de transformación constante sin mayor error. Esta suposición es más cuestionable en una línea de configuración asimétrica [31], figura 4.28b, ya que presenta mayores variaciones en la magnitud de algunos elementos respecto a la frecuencia.

Recientemente se ha propuesto un método que permite incluir en las simulaciones en cables en el dominio del tiempo, la dependencia de la frecuencia tanto de los parámetros como de la matriz de transformación [27]. Sin embargo, esta técnica no ha sido extendida satisfactoriamente al caso de líneas de transmisión aéreas.

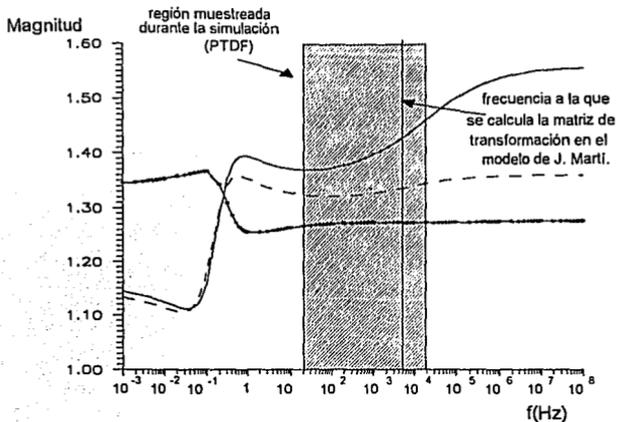


Fig. 4.33 Magnitud de los elementos $M(1,1)$, $M(1,2)$, $M(1,3)$ de la matriz de transformación, línea vertical de la figura 4.28b

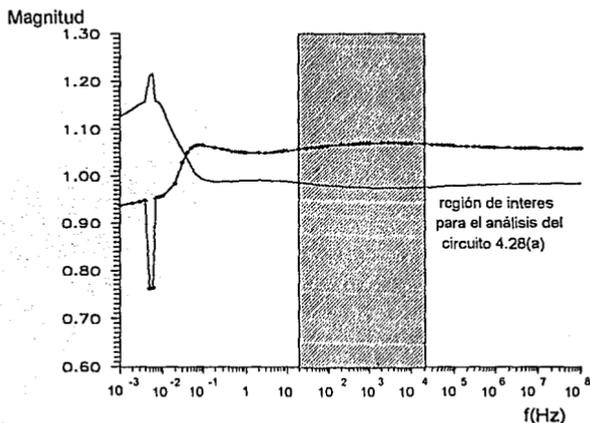


Fig. 4.34 Magnitud de los elementos $M(1,1)$, $M(1,2)$, $M(1,3)$ de la matriz de transformación, línea horizontal de la figura 2.8.

4.4 Apartarrayos

Los apartarrayos al igual que las resistencias de preinserción son un medio de reducir las sobretensiones que se presentan en los sistemas de potencia. Las características ideales que debe tener un apartarrayos son: 1) entrar en conducción a una tensión superior a la tensión nominal del apartarrayos, 2) mantener esta con pequeños cambios en el tiempo que dura la sobretensión, 3) cesar de conducir en una tensión muy cercana a la misma en la cual empezó a conducir. Un apartarrayos de este tipo conducirá solamente la corriente necesaria para reducir la sobretensión al nivel de protección del apartarrayos [20,35].

Desde hace ya algunos años los apartarrayos de óxido de zinc han ido desplazado las resistencias de SiC con gaps de descarga. Esto se ha logrado debido a que la característica v-i de las resistencias de óxido de zinc son extremadamente no lineales; en la región no lineal un pequeño cambio en el voltaje provoca un cambio en la corriente de varios órdenes de magnitud. En la figura 4.35 se presenta una comparación de las características v-i para una resistencia de óxido de zinc y de carburo de silicio. El factor que indica el grado de no linealidad (α) de los apartarrayos es aquel para el cual la característica v-i puede aproximarse en la región no lineal por una función del tipo:

$$i = KV^\alpha$$

el coeficiente(α) tiene un valor de entre 3 y 6 en los apartarrayos de carburo de silicio y de 26 en resistencias de óxido de zinc.

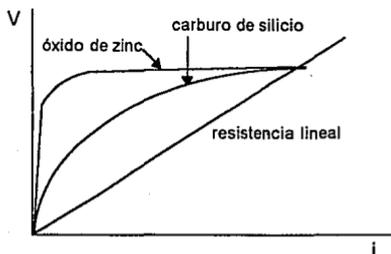


Fig. 4.35 Comparación gráfica de diferentes resistencias limitadoras de la corriente.

En el EMTP existen dos modelos que permiten simular resistencias no lineales: aproximación piezolineal y compensación. El método de aproximación piezolineal se basa en los mismos principios expuestos en la sección 3.2.1. La única diferencia consiste en el procedimiento a seguir en el dominio del tiempo para realizar el cierre o apertura de los interruptores; mediante los cuales se realiza el cambio de un segmento a otro de la característica v-i no lineal del elemento. En el método de compensación (sección 3.1b) la característica no lineal de un apartarrayos se aproxima por una función exponencial en la región no lineal de la forma:

$$\begin{aligned}
 i &= p \left(\frac{V}{V_{ref}} \right)^q & V > V_{min} \cdot V_{ref} \\
 i &= \frac{V}{R} & V < V_{min} \cdot V_{ref}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

donde: p, q, V_{min} y V_{ref} son constantes a especificar.

4.4.1 Sistema independiente de la frecuencia

Con la finalidad de evaluar la exactitud del modelo de resistencia no lineal desarrollado, se analizará la energización de una línea aérea monofásica (figura 4.36a). En los extremos de ésta se han colocado apartarrayos cuya característica v-i se ha aproximado por 6 segmentos lineales tal como se ilustra en la figura 4.36b. La línea se asumirá sin pérdidas y de parámetros constantes en el EMTP y en PTDF. De esta forma las diferencias que se presenten podrán ser interpretadas en función del modelo utilizado para el elemento no lineal y no a cuestiones de dependencia de la frecuencia de los parámetros de la línea. El número de muestras considerado en la simulación fue de 512 y tiempo de observación de 1ms.

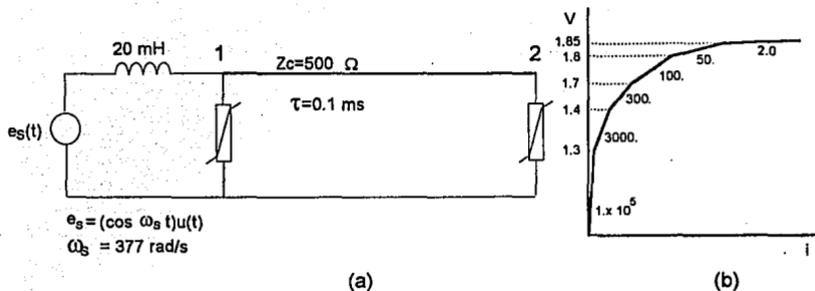


Fig. 4.36 (a) Diagrama del sistema (b) Característica no lineal de los apartarrays

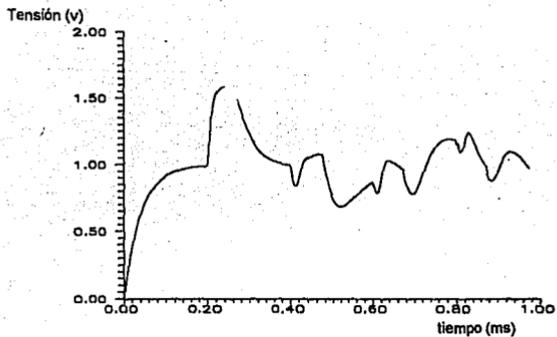
En las figuras 4.37a se muestra la tensión obtenida en el PTDF, en el nodo de envío de la línea. En las figuras 4.37b y 4.37c se muestra esta misma tensión pero calculada ahora por el EMTP. En la obtención de figura 4.37b el modelo utilizado para el apartarrayos fue el de aproximación piezolineal. La aproximación de la característica v-i en este caso al igual que el PTDF, fue la ilustrada en la figura 4.36b. En la figura 4.37c el método empleado fue el de compensación, para el cual la característica v-i se aproximó en la región no lineal por la siguiente función:

$$i(t) = 0.8787 \left(\frac{V}{2.6} \right)^{16.067}$$

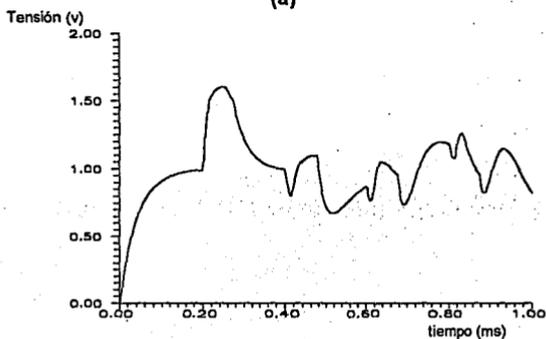
con :

$$V_{\min} = 0.5$$

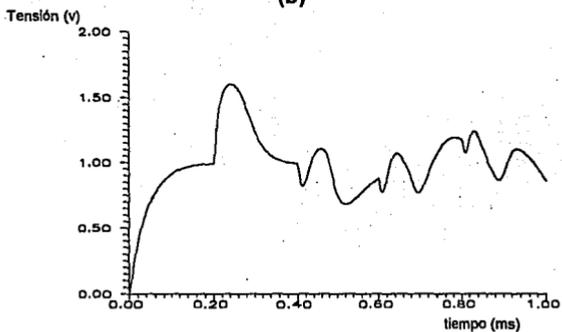
Dicha función se deduce aplicando ajuste de mínimos cuadrados a la curva de la figura 4.36b. En las figuras 4.38a, 4.38b y 4.39c se muestran la tensión obtenida en el nodo remoto de la línea, utilizando aproximación piezolineal en el PTDF, aproximación piezolineal en el EMTP y el método de compensación en el EMTP, respectivamente. A pesar de las repetidas superposiciones y transformaciones directas e inversas que fueron necesarias en la simulación en el PTDF, 14 en total; comparando las formas de onda de la figura 4.37 puede observarse que presentan una gran similitud. Lo mismo ocurre con las de la figura 4.38.



(a)

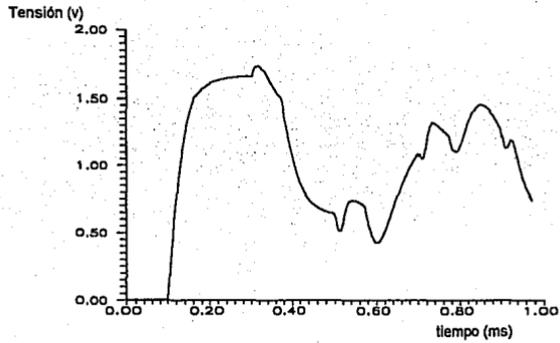


(b)

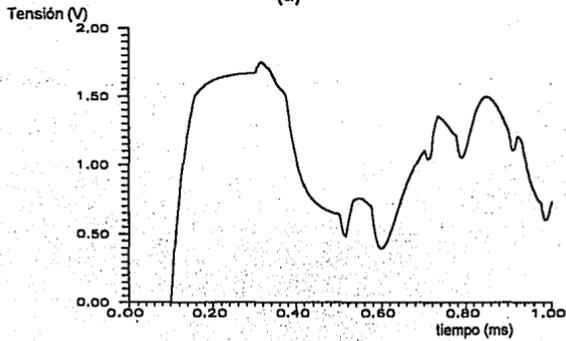


(c)

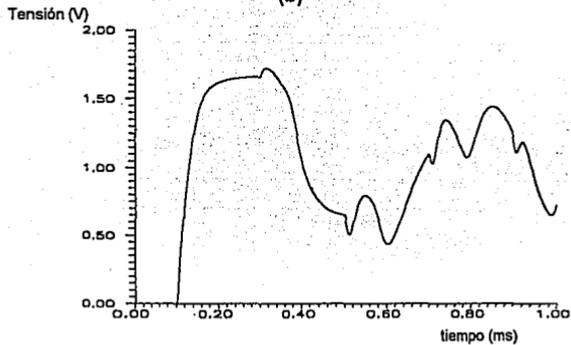
Fig. 4.37 Tensión en el nodo 1 (a) Dominio de la frecuencia (aproximación piezolineal), (b) EMTF (aproximación piezolineal), (c) EMTF (método compensación)



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.38 Tensión en el nodo 2 (a) Dominio de la frecuencia (aproximación piezolineal), (b) EMTP (aproximación piezolineal), (c) EMTP (método compensación)

4.4.2 Sistema dependiente de la frecuencia

Una vez comprobada la exactitud del modelo de resistencia no lineal puede ser aplicado un caso más real. Se analizará la energización simultánea de las tres fases de una línea de transmisión en vacío. La configuración de esta línea corresponde a la representada en la figura 4.28b. En el extremo remoto se han colocado tres apartarrays. El diagrama unifilar del sistema a analizar así como la característica de los apartarrays se ilustra en la figura 4.39a y 4.39b.

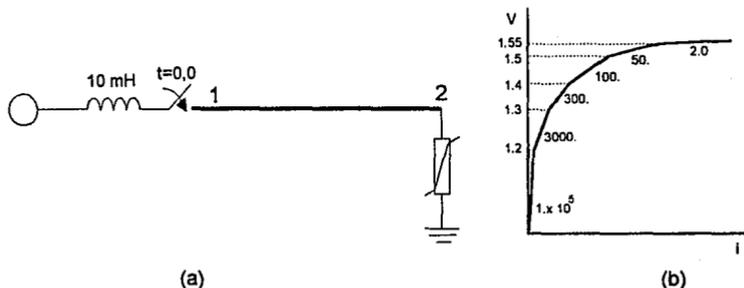


Fig. 4.39 (a) Diagrama Unifilar del sistema empleado en la simulación de la energización simultánea de una línea trifásica con apartarrays (b) Característica de los apartarrays.

Las tensiones en el extremo remoto de la línea se muestran en las figuras 4.40, 4.41 y 4.42 en la fase A, B y C respectivamente. En línea continua se han graficado los resultados obtenidos en el PTFD y en línea punteada los del EMTP empleando el método de compensación. La característica de la figura 4.39b se aproximó en la región no lineal por la siguiente función:

$$i(t) = 182.83 \left(\frac{V}{2.4} \right)^{24.122}$$

con:

$$V_{\min} = 0.5$$

El número de muestras utilizadas fue de 2048 tanto en el EMTP como en el PTFD y el número total de superposiciones realizada en el PTFD fue de 30.

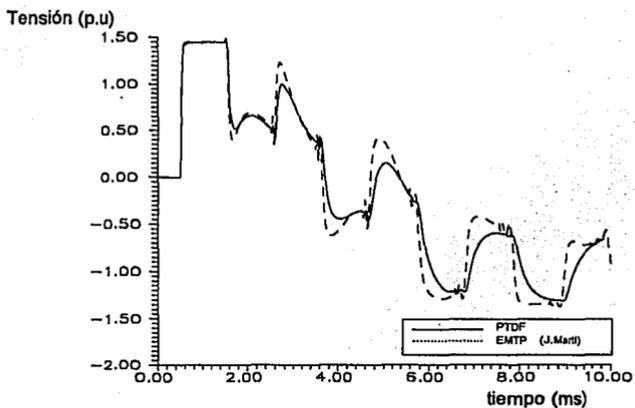


Fig. 4.40 Tensión en la fase A en el nodo remoto con apartarrayos

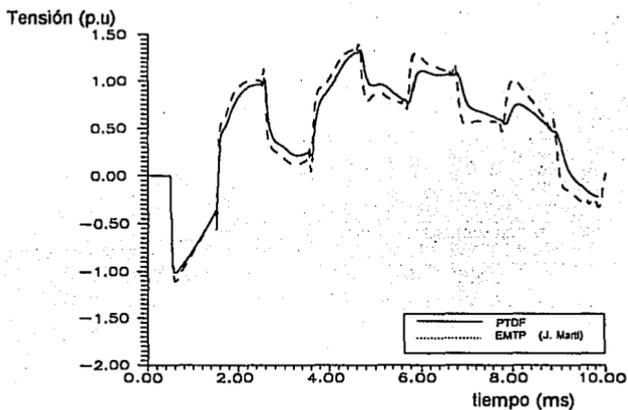


Fig. 4.41 Tensión en la fase B en el nodo remoto con apartarrayos.

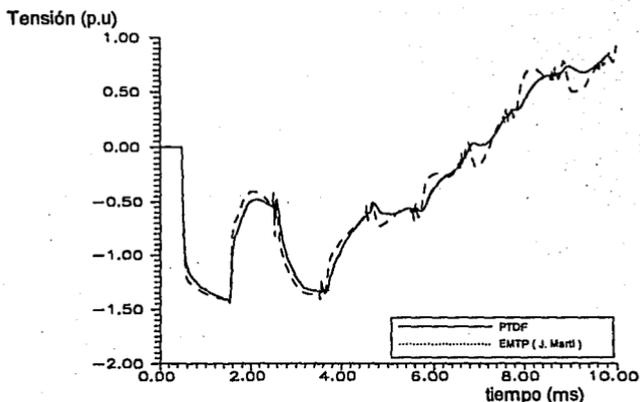


Fig. 4.42 Tensión en la fase C en el nodo remoto con apartarrayos

De los resultados obtenidos puede apreciarse que las formas de onda son semejantes. Las diferencias que se presentan se deben indudablemente a la exactitud con que se considera en el EMTP y en PTDF la dependencia de la frecuencia tanto de los parámetros de la línea como de la matriz de transformación. En base a esto se puede esperar que en sistemas donde es más crítica esta situación, como es el caso de líneas aéreas de doble circuito y cables [27] las diferencias sean significativas.

Analizando la energización en vacío de la línea de la figura 4.39a, es decir sin apartarrayos, se observa de la figura 4.43 que la tensión pico es mayor en el EMTP comparando los resultados con los obtenidos en el PTDF. El valor pico de las sobretensiones es un dato importante para definir ciertos parámetros de diseño; por lo el esfuerzo invertido en lograr un resultado lo más confiable posible está justificado.

Por último en la figura 4.44 se gráfica la tensión en vacío de la línea junto con la tensión obtenida con apartarrayos, esto con la finalidad de ilustrar la acción de un apartarrayos en la reducción de las sobretensiones.

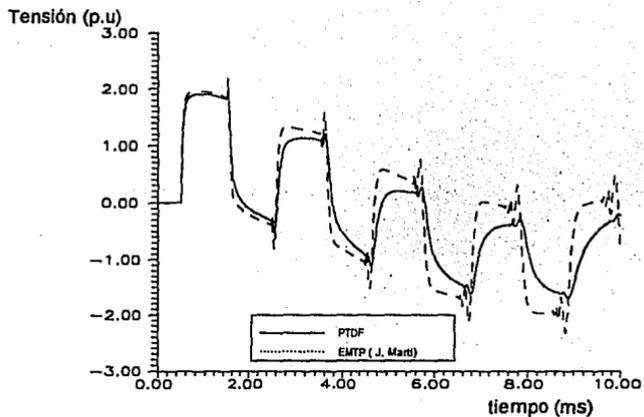


Fig. 4.43 Tensión en la fase A en el nodo remoto sin apartarrayos.

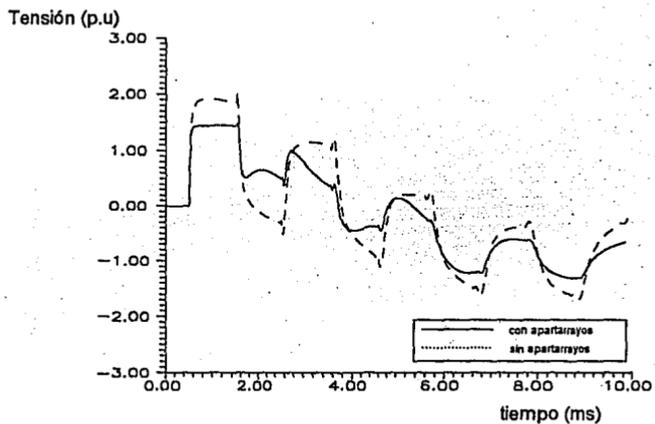


Fig. 4.44 Tensión en la fase A en el nodo remoto sin ningún medio de reducción de las sobretensiones y con apartarrayos (PTDF)

CONCLUSIONES

En esta tesis se desarrolló un programa digital, el PTDF, que permite simular condiciones transitorias en redes eléctricas pequeñas, empleando técnicas del dominio de la frecuencia. Como elementos de la red pueden incluirse resistencias no lineales, las cuales son modeladas piezolinealmente. Este modelo de elemento no lineal se realizó generalizando las ideas expuestas originalmente en la referencia [39].

El PTDF se validó a través de comparaciones con simulaciones realizadas en el EMTP para los siguientes casos:

1. Con el propósito de verificar la exactitud del modelo de línea de transmisión, se realizó la simulación de una descarga atmosférica que incide directamente en una torre. Para un fenómeno como este es válido asumir una línea de transmisión de parámetros constantes, caso para el cual la exactitud del EMTP está comprobada. Aprovechando esta característica se realizó la simulación en el PTDF, el cual a pesar de considerar la dependencia de la frecuencia se situó en una región donde tanto los parámetros como la matriz de transformación son constantes. En este caso se obtuvieron resultados bastante similares.

2. Se comparó la parte lineal considerando parámetros distribuidos dependientes de la frecuencia, con simulaciones en el EMTP, en las cuales se incluyó el modelo de J. Martí. Los casos analizados en este punto fueron:

- La energización de una línea de transmisión con carga atrapada a través de resistencias de preinserción.
- La tensión transitoria de recuperación que aparece en las terminales de un interruptor que libera una falla trifásica en el nodo remoto de una línea.

En el primero de estos casos se obtuvieron fuertes coincidencias mientras que en el segundo se encontraron discrepancias. Estas últimas se han interpretado en función de la exactitud con que cada programa considera algunos efectos tanto de la dependencia de la frecuencia de los parámetros como de la matriz de transformación para ciertas configuraciones de líneas. Siendo el dominio de la frecuencia la técnica

más confiable en estos casos, se propone emplear el PTDF para evaluar la habilidad del EMTP para reproducir los efectos de dispersión lineal.

3. La exactitud del modelo de resistencia no lineal se estimó realizando la simulación de la energización de una línea monofásica, que se supuso sin pérdidas y de parámetros constantes en ambos programas. Se colocaron apartarrayos en los extremos de la línea, descritos estos por resistencias no lineales. La comparación se efectuó en el EMTP con los métodos de aproximación piezolineal y de compensación. La solución obtenida con en el PTDF coincide en forma notable con los resultados del EMTP, independientemente del método empleado en la comparación.

4. Se realizaron simulaciones comparativas en las que se incluyó elementos de parámetros distribuidos y elementos no lineales. El sistema que se analizó fue el de la energización simultánea de una línea trifásica, en la cual se colocaron apartarrayos en el extremo remoto. En este caso se observó que en general el PTDF presenta sobretensiones máximas de menor magnitud que las estimadas por el EMTP. La determinación confiable del valor máximo de la tensión transitoria es fundamental en la optimización del diseño de los sistemas de potencia, por lo que el empleo de un programa que tiene bases teóricas para generar resultados más exactos está completamente justificado.

En cuanto al comportamiento del programa se observó que en general las simulaciones en el PTDF son más lentas. Esta situación se agrava cuando se incluyen en las simulaciones elementos no lineales, dado que el intervalo de muestreo que debe emplearse en estos casos es pequeño. Debido a esto el uso de un programa de este tipo para el análisis de condiciones no lineales debe restringirse a casos donde el sistema sobre el que se realiza la simulación justifique el uso de las técnicas del dominio de la frecuencia, como puede ser el caso de ciertas líneas de transmisión aéreas o sistemas de cables subterráneos. En general puede concluirse que el PTDF es un complemento necesario del EMTP y en algunos casos ofrece la mejor alternativa para la simulación. Otra importante aplicación que puede darse al PTDF es la síntesis y validación de modelos empleados en las simulaciones en el dominio del tiempo.

RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS

Los trabajos de investigación efectuados para esta tesis han permitido detectar algunas áreas en las que las técnicas de análisis de transitorios en el dominio de la frecuencia requieren desarrollos. Para contar con un programa completo de análisis de transitorios en el dominio de la frecuencia aún es necesario desarrollar los modelos de algunos elementos importantes de los sistemas de potencia como lo son: cables, reactores y transformadores saturables. Para la simulación en cables sólo es necesario codificar el programa de parámetros ya que el procedimiento en la obtención de éstos ya ha sido reportado [14]. El modelado de reactores y transformadores saturables puede obtenerse extendiendo las técnicas de aproximación piezolineal empleadas en esta tesis.

A través de los ejemplos de aplicación del PTDF se ha corroborado que las técnicas del dominio de la frecuencia demandan muchos más recursos de cómputo (memoria y tiempo de procesador), que las del dominio del tiempo. Este inconveniente puede ser atenuado mediante la aplicación de las técnicas que se proponen a continuación:

1. Incorporación de técnicas de matrices dispersas. No sólo incidirá favorablemente en el tiempo requerido en algunos cálculos, sino que también aliviará, por lo menos en parte, el problema de almacenamiento de la matriz de admitancia.

2. Reducción de redes. La eliminación de ciertos nodos de las redes eléctricas donde no se requiere conocer la respuesta, disminuye el orden de la matriz de admitancia, lo que se refleja en forma inmediata en la cantidad de memoria utilizada por el programa para almacenar información.

3. Empleo de funciones racionales. Mediante la aproximación de la información espectral a través de funciones racionales pueden obtenerse importantes ahorros de memoria.

4. Agilización del cálculo de valores y vectores característicos. En el proceso de simulación en una red donde se incluye una línea polifásica es necesario calcular repetidas veces los valores y vectores característicos del producto ZY de ésta, lo que

puede requerir un tiempo considerable. Existen algunas técnicas que pueden emplearse en la agilización de estos cálculos como pueden ser: (a) reutilización de vectores característicos [27,31] y (b) uso de métodos directos, en lugar de iterativos [29].

APENDICE A

PARAMETROS DE LINEAS DE TRANSMISION AEREAS¹

A.1 Matriz de impedancia serie

La matriz de impedancia serie puede expresarse como la suma de tres matrices:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{int} + \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_{rt} \quad (\text{A.1})$$

donde:

- \mathbf{Z} : matriz de impedancia serie total
- \mathbf{Z}_{int} : matriz de impedancia interna (diagonal)
- \mathbf{Z}_g : matriz de impedancia geométrica
- \mathbf{Z}_{rt} : matriz de retorno por tierra.

(a) Matriz de Impedancia Interna

La impedancia interna de los conductores es función de la frecuencia, existen diferentes expresiones que aproximan esta dependencia, la empleada en el programa de parámetros de líneas implementado fue la siguiente [18]:

¹En la simulación de transitorios al aplicar la transformada modificada de Fourier se plantean las ecuaciones de propagación en el dominio de la frecuencia compleja por lo que:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}(a + j\omega) + (a + j\omega)\mathbf{L}(a + j\omega)$$

$$\mathbf{Y} = (a + j\omega)\mathbf{C}$$

Estas matrices pueden ser determinada utilizando las mismas ecuaciones descritas aquí sólo es necesario susbtituir $j\omega$ por $a+j\omega$.

$$Z_{int_i} = R_a + jX_a \quad (A.2)$$

con:

$$R_a = X_a = \frac{t}{2\pi \cdot NCH \cdot r} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_c}{2\sigma_c}} \quad (A.3)$$

donde:

- t : coeficiente de trenzado (3 - 3.5).
- NHC : número de conductores en el haz.
- r : radio de uno de los conductores.
- μ_c : permeabilidad relativa de los hilos exteriores.
- σ_c : conductividad de los hilos exteriores.

(b) Matriz de impedancia geométrica.

La matriz de impedancia geométrica está dada por la siguiente expresión:

$$Z_g = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} P \quad (A.4)$$

Donde la matriz de coeficientes de potencial, P, se define como:

$$[P] = \begin{bmatrix} \ln \frac{D_{11}}{r_{eqv_1}} & \dots & \dots & \ln \frac{D_{1n}}{d_{1n}} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \ln \frac{D_{n1}}{d_{n1}} & \dots & \dots & \ln \frac{D_{nn}}{r_{eqv_n}} \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

Las variables involucradas en la expresión anterior se definen en las ecuaciones siguientes y se ilustran gráficamente en la figura A.1.

$$D_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2} \quad (A.6)$$

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (\text{A.7})$$

$$r_{eqv_i} = NCH \sqrt{NCH \cdot r_i \cdot (rh)^{NCH-1}} \quad (\text{A.8})$$

donde:

rh : radio del haz

r_{eqv_i} : radio equivalentes del haz

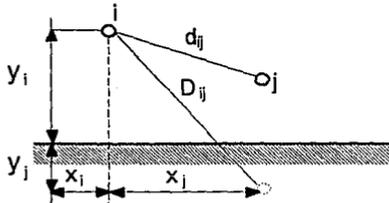


Fig. A.1 Disposición geométrica de conductores.

(c) Impedancia de retorno por tierra

La integral de Carson permite obtener la impedancia adicional debido a que la tierra no es un conductor perfecto. Una aproximación a ésta la proporciona el método de la "profundidad de penetración compleja" [40].

$$2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha \cos \theta} \cos(\alpha \sin \theta) d\alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + jr^2}} \approx \ln \frac{D'_{ij}}{D_{ij}} \quad (\text{A.9})$$

En el cual se estima que la superficie ficticia de retorno por tierra de la corriente que se considera en el método de las imágenes se localiza a una profundidad compleja dada por:

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{j\omega\mu}} \quad (\text{A.10})$$

donde:

ρ : resistividad del terreno

ω : frecuencia angular

μ : permeabilidad del terreno

De esta manera se puede definir la matriz de retorno por tierra, Z_{rt} , de la siguiente forma:

$$Z_{rt} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{D'_{11}}{D_{11}} & \dots & \dots & \ln \frac{D'_{1n}}{D_{1n}} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \ln \frac{D'_{n1}}{D_{n1}} & \dots & \dots & \ln \frac{D'_{nn}}{D_{nn}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

donde:

$$D'_{ij} = \sqrt{(y_i + y_j + 2p)^2 + (x_i - x_j)^2} \quad (\text{A.12})$$

(d) Matriz de impedancia reducida

La matriz de impedancia serie total será una matriz cuadrada de dimensión $c+g$ (c : número de conductores de fase, g : número de hilos de guarda). Debido a que puede considerarse que los hilos de guarda se encuentran a un potencial cero es posible reducir el orden de esta matriz a una dimensión c . Dada una matriz de la forma:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{cc} & Z_{cg} \\ Z_{gc} & Z_{gg} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

donde en la submatriz Z_{cc} se agrupan las impedancias propias y mutuas de los conductores de fase, en la $Z_{cg}=Z_{gc}$ las impedancias mutuas entre los conductores de

fase y los hilos de guarda y en Z_{gg} las impedancias propias y mutuas de los hilos de guarda; se define la matriz reducida mediante la expresión:

$$\mathbf{Z}_{\phi} = \mathbf{Z}_{CC} - \mathbf{Z}_{CG} \mathbf{Z}_{GG}^{-1} \mathbf{Z}_{GC} \quad (\text{A.14})$$

A.2 Matriz de admitancia en derivación

La expresión mediante la cual se obtiene la matriz de admitancia en derivación es:

$$\mathbf{Y} = j2\omega\pi\epsilon \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{A.15})$$

esta matriz al igual que la de impedancia serie total puede escribirse como:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{CC} & \mathbf{Y}_{CG} \\ \mathbf{Y}_{GC} & \mathbf{Y}_{GG} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

en este caso, sin embargo, la matriz de admitancia reducida de dimensión c es simplemente:

$$\mathbf{Y}_{\phi} = \mathbf{Y}_{CC} \quad (\text{A.17})$$

APENDICE B

CALCULO DE VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS

B.1 Método QR [19]

Dada una matriz A , existe una factorización de la forma:

$$A = QR$$

donde R es una matriz triangular superior y Q una matriz ortogonal. Definiendo una secuencia de matrices, con $A_1 = A$ y A_m , Q_m y R_m como:

$$A_m = Q_m R_m \quad A_{m+1} = Q_m R_m \quad m=1,2,\dots \quad (B.1)$$

y puesto que $R_m = Q_m^T A_m$ se tiene:

$$A_{m+1} = Q_m^T A_m Q_m \quad (B.2)$$

Donde la matriz A_{m+1} es ortogonalmente similar a A_m y por inducción a A_1 . La secuencia $\{A_m\}$ converge ya sea a una matriz triangular con los valores característicos de A en la diagonal o a una matriz casi triangular de cual los valores característicos pueden determinarse fácilmente. Con la finalidad de reducir el tiempo consumido por la factorización QR de las matrices A_m , la matriz A se reduce a una forma simple para la cual la factorización QR es más rápida. Si la matriz A es simétrica, se reduce a una matriz tridiagonal simétrica similar. Si la matriz es asimétrica se reduce a una matriz similar de Hessenberg.

El algoritmo QR se aplica generalmente con un desplazamiento del origen de los valores característicos con la finalidad de incrementar la velocidad de convergencia. Para una secuencia de constantes $\{c_m\}$, se define $A_1 = A$ y

$$A_m - c_m I = Q_m R_m$$

$$\mathbf{A}_{m+1} = c_m \mathbf{I} + \mathbf{R}_m \mathbf{Q}_m \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{B.3})$$

Las matrices \mathbf{A}_m son similares a \mathbf{A}_1 dado que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_m &= \mathbf{Q}_m^T (\mathbf{A}_m - c_m \mathbf{I}) \\ \mathbf{A}_{m+1} &= c_m \mathbf{I} + \mathbf{Q}_m^T (\mathbf{A}_m - c_m \mathbf{I}) \mathbf{Q}_m \\ &= c_m \mathbf{I} + \mathbf{Q}_m^T \mathbf{A}_m \mathbf{Q}_m - c_m \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{m+1} &= \mathbf{Q}_m^T \mathbf{A}_m \mathbf{Q}_m \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Los valores característicos de \mathbf{A}_{m+1} son los mismos que los de \mathbf{A}_m y por lo tanto los mismos de \mathbf{A} . Para una matriz simétrica tridiagonal de la forma:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(m)} & \beta_1^{(m)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1^{(m)} & \alpha_2^{(m)} & \beta_2^{(m)} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \beta_2^{(m)} & \alpha_3^{(m)} & \beta_3^{(m)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1}^{(m)} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{n-1}^{(m)} & \alpha_n^{(m)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

el desplazamiento c_m se selecciona como el valor característico más cercano a $\alpha_n^{(m)}$ de la submatriz:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}^{(m)} & \beta_{n-1}^{(m)} \\ \beta_{n-1}^{(m)} & \alpha_n^{(m)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

B.2 Iteración inversa (cálculo de vectores característicos)[1]

Dada una matriz \mathbf{A} cuya forma canónica de Jordan es diagonal, es decir:

$$\mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (\text{B.7})$$

Las columnas de X pueden denotarse por x_1, \dots, x_n . De esta forma puede escribirse:

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.8})$$

Puede asumirse también que $\|x_i\|_\infty = 1$, para toda i . Si es λ_k una aproximación a un valor característico de A . Dado un vector inicial $z^{(0)}$, definiendo $w^{(m)}$ y $z^{(m)}$ por:

$$(A - \lambda I)w^{(m+1)} = z^{(m)}, \quad z^{(m+1)} = \frac{w^{(m+1)}}{\|w^{(m+1)}\|_\infty} \quad m \geq 0. \quad (\text{B.9})$$

$z^{(m)}$ converge a un múltiplo de x_k conforme $m \Rightarrow \infty$

En la implementación de (B.9), se factoriza $A - \lambda I$ usando la descomposición LU . De esta forma puede escribirse:

$$A - \lambda I = LU$$

Resolviendo para $z^{(m+1)}$ en cada iteración como sigue:

$$Ly^{(m+1)} = z^{(m)} \quad U w^{(m+1)} = y^{(m+1)}$$

$$z^{(m+1)} = \frac{w^{(m+1)}}{\|w^{(m+1)}\|_\infty} \quad (\text{B.10})$$

B.3. Cálculo de componentes modales.

El cálculo del equivalente PI de las líneas de transmisión se ha planteado en función de la matriz M (modos de tensión). Dado que el algoritmo implementado para la determinación de los valores característicos fue el algoritmo QR simétrico y el producto $A = ZY$ es una matriz asimétrica fue necesario derivar una matriz simétrica similar. Los valores característicos del producto ZY y YZ son los mismos [18], así que

se partió de este último. Los vectores columna de N (modos de corriente), serán vectores característicos de YZ si se cumple la siguiente relación:

$$YZN = \Lambda N \quad (B.11)$$

donde Λ es una matriz diagonal cuyos elementos son eigenvalores de YZ .

La ecuación (B.11) puede reescribirse como:

$$ZN = \Lambda Y^{-1}N \quad (B.12)$$

Despejando de (A.15) puede obtenerse Y^{-1} , la cual es:

$$Y^{-1} = \frac{1}{j\omega 2\pi\epsilon_0} P \quad (B.13)$$

Substituyendo la ecuación B.13 en (B.12) sin considerar el factor $1/j\omega 2\pi\epsilon_0$ utilizándolo al final para corregir los valores característicos determinados [34], se tiene²:

$$ZN = \Lambda PN \quad (B.14)$$

Factorizando la matriz P mediante el algoritmo de Choleski [6] se puede expresar como:

$$P = LL^T \quad (B.15)$$

donde L es una matriz triangular inferior. Substituyendo (B.15) en (B.14) y reorganizando términos se obtiene:

² Si se utiliza P en lugar de Y^{-1} solamente debe realizarse una vez la factorización (B.15), ya que la matriz P es independiente de la frecuencia, en caso contrario dicha factorización debe ser repida tantas veces como armónicos se esten considerando en la simulación.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z N} &= \Lambda \mathbf{L L}^{-T} \mathbf{N} \\ \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Z N} &= \Lambda \mathbf{L}^T \mathbf{N} \\ \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Z} (\mathbf{L}^{-T} \mathbf{L}^T) \mathbf{N} &= \Lambda \mathbf{L}^T \mathbf{N} \\ \mathbf{H X} &= \Lambda \mathbf{X} \end{aligned}$$

donde \mathbf{H} es una matriz simétrica, \mathbf{X} es la matriz de vectores característicos de \mathbf{H} definidas como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Z L}^{-T} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}^T \mathbf{N} \quad (\text{B.18})$$

Determinando los valores característicos de la matriz \mathbf{H} mediante el algoritmo QR previa tridiagonalización de esta matriz, sólo es necesario modificar éstos por el factor " $1/j\omega 2\pi\epsilon_0$ " para obtener los valores característicos de $\mathbf{Y Z}$ o de $\mathbf{Z Y}$. Una vez que se han obtenido los valores característicos puede aplicarse el algoritmo de iteración inversa a la matriz \mathbf{H} con la finalidad de determinar la matriz de vectores característicos \mathbf{X} .

La matriz \mathbf{N} puede determinarse de (B.18) de la siguiente forma:

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{X} \quad (\text{B.19})$$

Una vez conocida \mathbf{N} puede determinarse la matriz de modos de tensión, \mathbf{M} , de la siguiente relación [40]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-T} \quad (\text{B.18})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Atkinson K. E., *An Introduction to Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [2] Ametani A., "The application of the Fast Fourier Transform to Electrical Transient Phenomena", *Int. J. Elect. Enging. Educ.*, **10**, 277-287, 1973.
- [3] Bickford J. P., Mullineux N. y Reed J. R., *Computation of Power System Transients*, Peregrinus, IEEE Monograph series, England, 1976.
- [4] Boyce W. E. y DiPrima R. C., *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, Limusa, México, 1984.
- [5] Brigham E. O., *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice Hall, USA, 1988.
- [6] Burden R. L. y Faires J. D., *Análisis Numérico*, Iberoamericana, México, 1985.
- [7] CIGRE W.G. 13.02, "Switching Overvoltages in EHV and UHV Systems with Special Reference to Closing and Reclosing Transmission Lines", *Electra*, 30-122, 1973.
- [8] Cornick K. J. y Lucas, J. R., "Inclusion of Surge Diverters in System Overvoltage Calculations", *Proc. IEE*, **126** (12), 1263-1268, 1979.
- [9] Chua L. O. y Lin, P-M., *Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits*, Prentice Hall USA, 1975.
- [10] Day S. J., Mullineux N. y Reed J. R., "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms: Part I", *Int. J. Elect. Engng. Educ.*, **3**, 501-506, 1965.

- [11] Day S. J., Mullineux N. y Reed J. R., "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms: Part II", *Int. J. Elect. Engng. Educ.*, **4**, 31-40, 1966.
- [12] Day S. J., Battisson M. J., Mullineux N. y Reed J. R., "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms: Part III", *Int. J. Elect. Engng. Educ.*, **6**, 259-265, 1968.
- [13] Dommel H. W., "Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks", *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, PAS-88 (4), 388-389, 1983.
- [14] Dommel H. W., "Electromagnetic Transients Program Reference Manual (EMTP Theory Book)", Prepared for Bonneville Power Administration, P.O. Box 3621, Portland Ore., U.S.A., 1986.
- [15] Dommel H. W., "Extensions of the Basic Solution Methods", IEEE Tutorial Course Digital Simulation of Electrical Transient Phenomena, Course Text 81 EH0173-5-PWR, Chapter III, 20-29, U.S.A., 1980.
- [16] EPRI, EL- 4202 Project 2149-1, "Electromagnetic Transients Program (EMTP) Primer", Prepared by Westinghouse Electric Corporation Pittsburgh, Pennsylvania, 1985.
- [17] Galloway R. H., Shorrocks, W. B. y Wedepohl L. M., "Calculation of Electrical Parameters for Short and Long Polyphase Transmission Lines", *Proc. IEE.*, **111** (12), 2051-2059, 1964.
- [18] Gary C., "Approche Complete de la Propagation Multifilaire en Haute Frequence par Utilisation des Matrices Complexes", *E.D.F., Bull. de la Direction des Etudes et Recherches serie B*, 3-(4), 5-20, 1976.
- [19] Golub G. H. y Loan F. V., *Matrix Computations*, The Hopkins University Press, Baltimore and London, 1989.

- [20] Greuter F., Perkins R., Rossinelli M. y Schmückle F., "The Metal-Oxide Resistor at the Heart of Modern Surge Arresters", *Brown Boveri Rev.*, 76 (1), 35-42, 1989.
- [21] Hayt W. H. Jr. y Kemmerly J. E., *Análisis de Circuitos en Ingeniería*, McGraw Hill, México, 1986.
- [22] Heinmiller W. G., Katterhenry R. W., Lambert S. R. y Stringer T.W., "Transient Recovery Voltage Failures of Two 15 KV Indoor Oilless Circuit Breakers" *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, PAS-102 (8), 2578-2584, 1983.
- [23] Hsu H. P., *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley Iberoamericana, EUA, 1987.
- [24] Humpage W. D. y Wong K-P., "Electromagnetic Transient Analysis in EHV Power Networks", *Proc. IEEE.*, 70 (4), 379-402, 1982.
- [25] Martí J. R., "Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulation", *IEEE. Trans. on Power App. and Systems*, PAS-101 (1), 147-155, 1982.
- [26] Martí J. R., Garrett B. W., Dommel H. W. y Wedepohl L. M., "Transients Simulation in Power Systems: Frequency Domain and Time Domain Analysis", *Trans. Engineering and Operating Division, C.E.A.*, 24, 1985.
- [27] Martí L., "Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency-Dependent Modal Transformation Matrices" *IEEE. Trans. on Power Delivery*, 3 (3), 1099-1110, 1988.
- [28] Meyer W.S. y Dommel H. W., "Numerical Modelling of Frequency-Dependent Transmission-Line Parameters in an Electromagnetic Transients Program", *IEEE. Trans. Power App. Systems*, PAS-93 (5), 1401-1409, 1974.
- [29] Moreno P., De la Rosa R. y Naredo J. L., "Frequency Domain Computation of Transmission Line Closing Transients", *IEEE Trans. on Power Delivery*, PWR-6 (1), 57-63, 1991.

- [30] Mullineux N. y Reed J. R., "Developments in Obtaining Transient Response using Fourier Transforms: Part IV", *Int. J. Elect. Engng. Educ.*, **10**, 256-267, 1973.
- [31] Nagaoka N. y Ametani A., "A Development of a Generalized Frequency-Domain Transient Program - FTP", *IEEE Transaction on Power Delivery*, PWR-3 (4), 1996-2004, 1988.
- [32] Naredo J. L., Moreno P., Soudack A. C., Marti J. R., "Frequency Independent Representation of Transmission Lines for Transient Analysis Through the Method of Characteristics", *IEEE/NTUA Athens Power Tech Conference: "Planning, Operation and Control of Today's Electric Power Systems"*, Sept.5-8, 28-32, 1993.
- [33] Ogata K., *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, México, 1970.
- [34] Pipes I. A., *Matrix Methods for Engineering*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1963.
- [35] Sakshaug E. C., Kresge J. S. y Miske S. A. Jr., "A New Concept in Station Arrester Design", *IEEE. Trans. on Power App. and Systems*, PAS-96 (2), 647-656, 1977.
- [36] Stevenson W. D., *Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia*, McGraw-Hill, México, 1988.
- [37] Wedepohl L.M., "Application of Matrix Methods to the Solution of Travelling- Wave Phenomena in Polyphase Systems", *Proc. IEE.*, **110**(12), 2200-2212, 1963.
- [38] Wedepohl L. M. y Mohamed S. E. T., "Multiconductor Transmission Lines. Theory of Natural Modes and Fourier Integral Applied to Transient Analysis", *Proc. IEE.*, **116** (9), 1553-1563, 1969.
- [39] Wedepohl L. M., y Mohamed S. E. T., "Transient Analysis of Multiconductor Transmission Lines with Special Reference to Nonlinear Problems", *Proc. IEE.*, **117** (5), 979-988, 1970.

- [40] Wedepohl L. M., "Theory of Natural Modes in Multiconductor Transmission Lines", Lecture Notes for Course ELEC-552, The University of British Columbia, Canada, 1982.
- [41] Wedepohl L. M., "Power System Transients: Errors Incurred in the Numerical Inversion of the Laplace Transform", *Proceedings of the Twenty-Sixth Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 15-16 August, 174-178, 1983.
- [42] Wilcox D. J., "Numerical Laplace Transformation and Inversion", *Int. J. Elect. Enging. Educ.*, **15**, 247-265, 1978.