00365 1
Zej


# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO


# ALGORITMOS DE APROXIMACION DE CONTROLES OPTIMOS RELAJADOS

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :


APOLINAR CALDERON SEGURA

DIRECTOR DE TESIS : DR. JAVIER ROSENBLUETH LAGUETTE



México, D. F. 1994

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Deseo agradecer al Dr. Javier Rosenblueth Laguette no sólo por invitarme a colaborar con él en la realización de este proyecto, sino también el empeño y tiempo dedicados al mismo.

**Este trabajo está dedicado a:**

**Mis familiares**

**A mis amigos.**

# ALGORITMOS DE APROXIMACION
# DE
# CONTROLES OPTIMOS RELAJADOS

# CONTENIDO

# INTRODUCCION

Un problema de control óptimo es un problema de optimización que difiere de un problema de optimización con restricciones clásico por el tipo de variables involucradas, llamadas *variables de estado y variables de control.* Las variables (o funciones) de estado y de control usualmente son funciones que toman valores de un conjunto $T$ a un espacio vectorial. Al conjunto de las funciones de control y al de las funciones de estado los denotamos por $\mathcal{U}$ y $X$, respectivamente. A la pareja $(x, u) \in X \times \mathcal{U}$ la llamamos un *proceso ordinario.* El problema de control óptimo tiene una solución óptima (minimizador o proceso ordinario admisible óptimo) si existe un proceso ordinario $(x, u)$ que minimiza el costo funcional (función objetivo) sujeto a un cierto número de restricciones sobre las variables de estado y de control. Los problemas de control óptimo que trataremos en este trabajo los clasificamos en *problemas sin retardos* y en *problemas con retardos en los controles.*

En general, condiciones de existencia para un problema de control óptimo no están bien establecidas, excepto para una clase muy restringida. La teoría de relajamiento surgió por la necesidad de probar teoremas de existencia de soluciones óptimas en aquellas situaciones donde es imposible asegurar su existencia, extendiendo el conjunto de las funciones de control $\mathcal{U}$. Para ello es necesario encontrar un conjunto (de controles relajados) que contenga al conjunto de controles ordinarios para el cual un proceso relajado admisible esté bien definido y se pueda asegurar la existencia de un proceso ordinario admisible óptimo. Entonces, el problema de control óptimo original considerado como un problema de optimización sobre los procesos relajados se llama el *problema relajado.* Sin embargo, la existencia de un minimizador del problema relajado no es la única propiedad que se pide de una técnica de relajamiento, sino que la solución óptima del problema relajado se pueda aproximar con una sucesión de controles ordinarios.

La teoría de relajamiento está bien establecida para problemas de control óptimo sin retardos (ver Warga [11]). En este caso, los controles relajados se forman como una compactificación de los controles originales con respecto a la topología débil estrella. La técnica clásica de relajamiento para este tipo de problema se puede resumir de la siguiente manera.

(1) Reemplazar el problema original por un problema extendido, (el *problema relajado*).

(2) Resolver el problema relajado. La solución obtenida se llama un *control relajado óptimo.*

(3) Aproximar el control relajado óptimo con una sucesión de controles originales.

Cuando se logra este objetivo se dice que la técnica de relajamiento es *propia.* Una caracterización para que una técnica de relajamiento sea propia consiste en que *el ínfimo del problema original coincida con el mínimo del problema relajado.* Es importante que una técnica de relajamiento sea propia porque significa que hay una conexión estrecha entre el problema original con el que lo aproxima. Sugiere, además, una metodología para encontrar procesos ordinarios admisibles que aproximan el costo ínfimo en situaciones donde es imposible asegurar la existencia de un proceso ordinario admisible óptimo: resolviendo el problema relajado y aproximando la solución relajada óptima con una sucesión de controles ordinarios.

Para los problemas de control óptimo con retardos en los controles pocos intentos se han hecho para encontrar técnicas de relajamiento propias. Los primeros intentos fueron realizados por Warga (ver [10,11,12]), tratando los siguientes tres casos: cuando los retardos aparecen únicamente en las funciones de estado; cuando las funciones de control retardados son separables (aditivamente acopladas); y cuando los retardos en los controles son constantes y conmensurados (el cociente de dos retardos cualesquiera es un número racional). Para los dos primeros casos, la técnica de relajamiento se obtuvo por una adaptación directa de la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos. Sin embargo, para el último caso la técnica clásica de relajamiento no produce una extensión propia.

Por este motivo, Warga [11,13] y posteriormente Rosenblueth–Vinter [3] desarrollaron tres nuevas técnicas de relajamiento. La primera, llamada **relajamiento vía el problema reducido**, está basada en la técnica de reducir un problema con retardos a uno sin retardos.

Aplicando a continuación la técnica clásica de relajamiento al problema reducido, se puede asegurar la existencia de minimizadores y se pueden aproximar con controles ordinarios. Sin embargo, esta técnica de relajamiento tiene las siguientes limitaciones: a) la dimensión de los espacios involucrados en el problema original puede ser muy grande; b) la dimensión de los espacios crece rápidamente a medida que crece la longitud del intervalo de tiempo; c) esta técnica de relajamiento se aplica únicamente a problemas con retardos conmensurados.

La segunda técnica de relajamiento, llamada **relajamiento débil** remedia algunas de las dificultades de la técnica de relajamiento vía el problema reducido. Esta técnica está basada en la idea de transformar el problema original en uno donde los controles no están presentes en las dinámicas sino en ciertas condiciones de compatibilidad impuestas a los controles. Los *controles débilmente relajados* se definen como los controles relajados clásicos que satisfacen algunas condiciones de compatibilidad. El conjunto de controles débilmente relajados, considerado como un subespacio de controles relajados clásicos, es convexo y compacto, por lo que se pueden probar teoremas de existencia. Esta técnica de relajamiento se puede aplicar a problemas con retardos en los controles que pueden ser separables y no conmensurados. Sin embargo, esta técnica no da una extensión propia en el caso conmensurado, excepto para problemas con un retardo (ver [3,4,5,6]).

La tercera técnica de relajamiento, llamada **relajamiento fuerte** fue introducida en Rosenblueth–Vinter [3]. Demostraron que esta técnica de relajamiento es propia. Además, coincide con la técnica de relajamiento débil cuando el sistema tiene un retardo en los controles. Para problemas con dos o más retardos está definido únicamente para el caso conmensurado. Esta demostración da una respuesta a la pregunta de cómo los controles fuertemente relajados pueden estar asociados a los controles relajados admisibles para el problema reducido. Sin embargo, esta demostración tiene ciertas limitaciones, desde el punto de vista teórico así como desde el punto de vista computacional, que impiden que sea de utilidad práctica y cuya solución es el objetivo de este trabajo. En primer lugar, desde el punto de vista teórico, es necesario utilizar la técnica del problema reducido, por lo que se heredan las desventajas que tiene dicha técnica de relajamiento. En segundo lugar, si bien es cierto que desde el punto de vista teórico no es necesario reducir el problema original ni agrandar la dimensión de los espacios involucrados, desde el punto de vista computacional la aproximación requiere de dicha reducción. En tercer lugar, sólo se puede asegurar la existencia de un control relajado para el problema reducido, asociado a un control fuertemente relajado dado, pero no se pudo construir explícitamente en términos de este último.

La contribución de este trabajo es la solución del siguiente problema:

*Dado un control fuertemente relajado arbitrario $\mu$, sin la ayuda de la técnica de relajamiento vía el problema reducido, construir explícitamente una sucesión de controles retardados ordinarios que convergen a $\mu$.*

En la solución de este problema se dará una metodología explícita para aproximar un control fuertemente relajado arbitrario con una sucesión de controles ordinarios, totalmente independiente de la técnica de relajamiento vía el problema reducido.

Este trabajo consta de cinco capítulos. En los primeros dos se exponen los fundamentos teóricos requeridos para exponer la teoría clásica de relajamiento de problemas de control óptimo sin retardos. En el tercer capítulo se presenta la técnica clásica de relajamiento para aproximar controles relajados óptimos con una sucesión de controles originales. En el capítulo cuarto se exponen técnicas de relajamiento para los problemas de control óptimo con retardos, enumerando sus ventajas y desventajas. En el quinto capítulo se introduce una nueva técnica constructiva para aproximar controles fuertemente relajados óptimos con controles retardados ordinarios, totalmente independiente de la técnica del problema reducido. Finalmente, a través de varios ejemplos se indica porque la nueva técnica constructiva es la más adecuada desde el punto de vista computacional.

# 1. TEORIA CLASICA PARA SISTEMAS SIN RETARDOS

En este capítulo se presentan algunos fundamentos matemáticos que se requieren para entender el problema de relajamiento de sistemas de control óptimo. El material de este capítulo se basa en el libro de Warga [11], en donde se pueden encontrar las demostraciones de los teoremas que se enuncian. Es indispensable que se tengan algunos conocimientos de teoría de conjuntos, topología, espacios métricos, espacios de Banach, teoría de la medida (de conjuntos y funciones) e integración de Lebesgue. Todo este material se puede encontrar en Kreyszig [2] y Royden [9].

## 1.1 Medidas

Sea $S$ un conjunto arbitrario no vacío, $\Sigma$ una familia de subconjuntos de $S$, y $\mu$ una función que mapea $\Sigma$ en $\bar{\mathbf{R}}$, donde $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ denota el conjunto de los números reales extendidos.

**Definición 1.1** $\Sigma$ es una *álgebra* en $S$ si

a) $\emptyset \in \Sigma$.

b) Si $A \in \Sigma$, entonces $A^c = S - A \in \Sigma$.

c) Si $A, B \in \Sigma$, entonces $A \cup B \in \Sigma$.

**Definición 1.2** $\Sigma$ es una *$\sigma$–álgebra* en $S$ si

a) $\Sigma$ es una álgebra en $S$.

b) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

**Definición 1.3** Si $\Sigma$ es una álgebra en $S$, entonces $\mu$ es *aditiva* si

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \Sigma$ tal que $A \cap B = \emptyset$.

$\mu$ es *finita* si es aditiva y sus valores son reales.

**Definición 1.4** $\mu$ es *numerablemente aditiva* en $\Sigma$ si

a) $\mu$ es aditiva.

b) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, donde $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es cualquier colección numerable de elementos disjuntos de $\Sigma$ tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

**Definición 1.5** $\mu$ es una *medida* en $S$ si

a) $\Sigma$ es una $\sigma$–álgebra en $S$.

b) $\mu$ es numerablemente aditiva.

**Definición 1.6** Si $\Sigma$ es una $\sigma$–álgebra en $S$ y $\mu$ es una medida en $S$, entonces

a) $(S, \Sigma)$ se llama un *espacio medible.*

b) $(S, \Sigma, \mu)$ se llama un *espacio de medida.*

**Definición 1.7** Una medida $\mu$ es *positiva* si $\mu(E) \geq 0 \ \forall\, E \in \Sigma$. En este caso es claro que

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B - A) = \mu(A \cup B) \quad \forall\, A, B \in \Sigma.$$

**Definición 1.8** Una medida positiva $\mu$ es una *medida de probabilidad* si $\mu(S) = 1$.

**Definición 1.9** Sea $(S, \tau)$ un espacio topológico. Entonces

a) El *álgebra de conjuntos de Borel*, denotada por $\Sigma_B$, es la mínima $\sigma$–álgebra que contiene a $\tau$. Los elementos de $\Sigma_B$ se llaman los *conjuntos de Borel.*

b) Una medida definida sobre $\Sigma_B$ se llama una *medida de Borel.*

**Definición 1.10** Una medida de Borel $\mu$ es la *medida de Dirac* en $s \in S$ si

a) $\mu$ es una medida de probabilidad.

b) $\mu(\{s\}) = 1$.

**Definición 1.11** Sea $\Sigma$ una álgebra y $\mu : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ aditiva. La *variación* de $\mu$, denotada por $|\mu|_v$, es la función no negativa $|\mu|_v : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ definida, para toda $E \in \Sigma$, por

$$|\mu|_v(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{k} |\mu(E_i)| \mid k \in \mathbb{N}, E_i \cap E_j = \emptyset, \ i \neq j, \ E_i \subset E \text{ y } E_i \in \Sigma \right\}.$$

Si $\mu$ es positiva, claramente se tiene $|\mu|_v = \mu$.

**Definición 1.12** Una medida $\mu$ es *no-atómica* si para cualquier $E \in \Sigma$ con $|\mu|_v(E) > 0$, $\exists\, A \in \Sigma$ con la propiedad

$$0 < |\mu|_v(A) < |\mu|_v(E) \quad \text{y} \quad A \subset E.$$

**Definición 1.13** Sea $(S, \tau)$ un espacio topológico, $\Sigma$ una álgebra en $S$, y $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ aditiva. Entonces $\mu$ es *regular* si para toda $E \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$, existen conjuntos $A, B \in \Sigma$ tal que

a) $\bar{A} \subset E \subset B^\circ$, y

b) $|\mu|_v(B - A) \leq \epsilon$.

En particular, si $\Sigma$ contiene todos los subconjuntos abiertos y cerrados de $S$, entonces $\mu$ es regular si para cualquier $E \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$, existe un abierto $G(= B)$ y un cerrado $C(= A)$ tales que $C \subset E \subset G$ y $|\mu|_v(G - C) \leq \epsilon$.

**Definición 1.14** Una *medida de Radón* en $S$ es una medida de Borel regular finita. Denotamos por

- $\mathrm{frm}(S)$ al espacio vectorial de todas las medidas de Radón en $S$.
- $\mathrm{frm}^+(S)$ al conjunto de todas las medidas de Radón positivas.
- $\mathrm{rpm}(S)$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad de Radón en $S$.

**Definición 1.15** Si $(S, \Sigma, \mu)$ es un espacio de medida, entonces $Z$ es un conjunto $\mu$- nulo si $\exists\, A \in \Sigma$ tal que $Z \subset A$ y $|\mu|_v(A) = 0$. La medida $\mu$ es completa si cualquier conjunto $\mu$-nulo pertenece a $\Sigma$.

**Definición 1.16** Una relación que involucra a $s \in S$ se dice que es válida $\mu$–c.s. ($\mu$–casi siempre) si existe un conjunto $\mu$-nulo $Z$ tal que la relación es válida para toda $s \notin Z$. Si $E \subset S$ y la relación es válida para toda $s \in E - Z$, se dice que es válida $\mu$–c.s. en $E$.

**Definición 1.17** Un espacio de medida $(S, \Sigma, \mu)$ es *positivo, regular*, de *probabilidad*, etc., si la medida $\mu$ tiene la propiedad correspondiente.

**Teorema 1.2** Sea $(S, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida finito, $\Sigma^* = \{E \cup Z \mid E \in \Sigma$ y $Z$ conjunto $\mu$–nulo$\}$, y $\mu^*(E \cup Z) = \mu(E)\ \forall E \in \Sigma$ y todos los conjuntos $\mu$–nulos $Z$. Entonces $(S, \Sigma^*, \mu^*)$ es un espacio de medida finito, $\mu^*$ es completa y $\mu = \mu^*|_\Sigma$.

Al espacio de medida finito $(S, \Sigma^*, \mu^*)$, definido en el Teorema 1.2, se le llama la *extensión de Lebesgue* de $(S, \Sigma, \mu)$ y $\mu^*$ la *extensión de Lebesgue* de $\mu$. Un conjunto $A \in \Sigma^*$ se llama $\mu$–*medible*. Claramente, un conjunto es $\mu$–medible $\iff$ es $\mu^*$–medible, ya que $(S, \Sigma^*, \mu^*)$ es su propia extensión de Lebesgue.

## 1.2 Funciones medibles

**Definición 1.18** Sea $(S, \Sigma)$ un espacio medible, $(X, \tau)$ un espacio topológico, y $f : S \to X$ una función. Entonces

a) $f$ es $\Sigma$–*medible* si $f^{-1}(A) \in \Sigma \quad \forall A \in \tau$.

b) $f$ es $\Sigma$–*medible* en $B$ si $B \in \Sigma$ y $f^{-1}(A) \cap B \in \Sigma \quad \forall A \in \tau$.

**Definición 1.19** Sean $(S, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida finito, $(S, \Sigma^*, \mu^*)$ su extensión de Lebesgue, $(X, \tau)$ un espacio topológico, y $f : S \to X$ una función. $f$ es $\mu$–medible si $f$ es $\Sigma^*$–medible. Por lo tanto, $f$ es $\mu$–medible $\iff$ $f$ es $\mu^*$–medible.

**Definición 1.20** Para cualquier $A \subset S$, la *función característica* de $A$, denotada por $\mathcal{X}_A$, es una función de $S$ a $\{0, 1\}$ definida por

$$\mathcal{X}_A(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in A \\ 0 & \text{si } s \in S - A. \end{cases}$$

## 1.3 Integrales de funciones simples, no-negativas

**Definición 1.21** Sea $(S, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida positivo finito y $X$ un espacio de Banach separable. Entonces,

a) Una función $f : S \to X$ es $\mu$–simple si $\exists\ k \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, y $A_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$, conjuntos $\mu$–medibles disjuntos, tales que

$$f(s) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{X}_{A_i}(s) x_i \quad \forall\, s \in S.$$

b) La integral de $f$ con respecto a $\mu$ se define como

$$\int f(s)\, \mu\,(ds) := \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) x_i$$

c) Si $E$ es un conjunto $\mu$–medible, entonces se define

$$\int_E f(s)\, \mu\,(ds) := \int \mathcal{X}_E(s)\, f(s)\, \mu\,(ds)$$

para cualquier función $\mu$–simple $f$.

La representación de una función $\mu$–simple no altera su integral.

**Teorema 1.3** Sea $f : S \to \mathbf{R}$ una función no negativa y $\mu$–medible. Entonces existe una sucesión $\{f_i\}$ de funciones $\mu$–simples no negativas tal que $\{f_i(s)\}$ es no decreciente y converge a $f(s)$ $\forall s \in S$. Además, existe $\lim_i \int f_i(s)\, \mu\,(ds)$ en $\bar{\mathbf{R}}$ y es el mismo para todas las sucesiones $\{f_i\}$ que satisfacen las propiedades anteriores.

**Definición 1.22**

a) La integral de $f$ con respecto a $\mu$ se define como

$$\int f(s) \mu(ds) := \lim_i \int f_i(s) \mu(ds).$$

b) Si $E$ es un conjunto $\mu$–medible, entonces

$$\int_E f(s) \mu(ds) := \int \mathcal{X}_E(s) f(s) \mu(ds).$$

## 1.4 Los espacios de Banach $C(S,X)$ y $L^p(S,\Sigma,\mu,X)$

### 1.4.1 El espacio de Banach $C(S,X)$

Sea $S$ un espacio topológico y $X$ un espacio métrico completo. Se denota por $BF(S,X)$ a la colección de todas las funciones acotadas $f : S \to X$ y por $C(S,X)$ a la colección de todas las funciones continuas acotadas $f : S \to X$.

La función

$$(f,g) \to d_B(f,g) = \sup_{s\in S} d(f(s),g(s))$$

es una métrica en $BF(S,X)$ y $BF(S,X)$ y su subconjunto $C(S,X)$ son completos.

Si $X$ es un espacio de Banach, entonces $BF(S,X)$ y $C(S,X)$ son espacios vectoriales y $f \to |f|_{sup} = \sup_{s\in S} |f(s)| = d_B(f,0)$, es una norma en $BF(S,X)$. Así, $(BF(S,X), |\cdot|_{sup})$ y $(C(S,X), |\cdot|_{sup})$ son espacios de Banach.

### 1.4.2 El espacio de Banach $L^p(S,\Sigma,\mu,X)$, $1 \leq p \leq \infty$

**Definición 1.23** Sea $X$ un espacio de Banach separable, $1 \leq p < \infty$, y $(S,\Sigma,\mu)$ un espacio de medida positivo finito. Entonces,

a) Dos funciones $\mu$-medibles $f,g : S \to X$ son equivalentes ($f \sim g$), si $f(s) = g(s)$ $\mu$–c.s. en $S$.

b) Si $f$ es $\mu$–medible, entonces la función $s \to |f(s)|^p$ es $\mu$–medible.

c) Si $f \sim g$, entonces

$$\int |f(s)|^p \mu(ds) = \int |g(s)|^p \mu(ds).$$

d) Se denota por

$L^p(S, \Sigma, \mu, X)$ al conjunto de (clases de equivalencia bajo $\sim$ de) funciones $f : S \to X$ $\mu$-medibles tales que

$$\int |f(s)|^p \mu(ds) < \infty.$$

e) Para toda $f \in L^p(S, \Sigma, \mu, X)$ se define

$$|f|_p := \left\{ \int |f(s)|^p \mu(ds) \right\}^{1/p}.$$

f) $\{f_i\}$ converge a $f$ en $L^p(S, \Sigma, \mu, X)$ si

$$\lim_i |f - f_i|_p = 0.$$

**Teorema 1.4** Sea $(S, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida positivo finito, $X$ un espacio de Banach separable, $E$ un conjunto $\mu$-medible, y $f \in L^1(S, \Sigma, \mu, X)$. Entonces

a) $\exists \{f_i : S \to X\}$ de funciones $\mu$-simples tal que

$$\lim_i |f - f_i|_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_i \int_E f_i(s)\mu(ds)$$

existe en $X$ y es el mismo para tales sucesiones.

b) La integral de $f$ sobre $E$ con respecto a $\mu$ se define como

$$\int_E f(s)\mu(ds) := \lim_i \int_E f_i(s)\mu(ds).$$

c) Si $f \in L^1(S, \Sigma, \mu, X)$, decimos que $f : S \to X$ es $\mu$-integrable.

**Definición 1.24**

a) Una función $f : S \to X$ es *$\mu$-esencialmente acotada* si

$$|f(s)| \leq c \quad \mu\text{-c.s. en } S, \text{ para alguna } c \in \mathbb{R}.$$

b) El $\mu$-supremo esencial ($\mu$-sup es) de $f$, se define como, $\forall\, A \subset S$,

$$\mu - \sup_{s \in A} \; es\; |f(s)| := \inf\{c > 0 \mid |f(s)| \leq c \quad \mu\text{-c.s en } A\}$$

c) Se denota por

$L^\infty(S, \Sigma, \mu, X)$ al conjunto de todas las (clases de equivalencia de) funciones $f : S \to X$ $\mu$-medibles y $\mu$-esencialmente acotadas.

d) Para toda $f \in L^\infty(S, \Sigma, \mu, X)$ se define

$$|f|_\infty := \mu - sup\ es\ |f(s)| \quad \forall\, s \in S.$$

e) $(L^p(S, \Sigma, \mu, X), |.|_p)$, $\quad 1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach.

## 1.5 Espacios duales y topologías débiles

**Definición 1.25** Sea $X$ un espacio normado. El *espacio dual* de $X$, denotado por $X^*$, se define como el conjunto de todas las funcionales lineales acotadas $f$ en $X$.

**Definición 1.26** Sea $X$ un espacio normado y $X^*$ su dual. La *topología débil* de $X$ generada por $X^*$ se define como la topología más débil tal que cada $f$ en $X^*$ es continua.

Empezando con un espacio normado $X$, se forma su dual y se define la topología débil en $X$ en términos de $X^*$. La misma técnica puede aplicarse a $X^*$ con la topología débil definida en términos de $X^{**}$. Sin embargo, existe otra topología débil en $X^*$ definida en terminos de $X$ en lugar de $X^{**}$. La topología débil en $X^*$ definida en terminos de $X$ (o, más precisamente, en términos de $\varphi[x]$ donde $\varphi : X \to X^{**}$ es tal que $(\varphi x)(f) = f(x)$ para toda $x \in X$ y $f \in X^*$) se llama la *topología débil estrella*.

# 2. FUNCIONES DE CONTROL ORIGINAL Y RELAJADO

## 2.1 Normas fuertes y débiles en espacios duales

**Definición 2.1** Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado separable y $X^*$ su dual, entonces

a) La *norma fuerte* en $X^*$ la definimos como

$$|l|_s := \sup\{|l(x)| \mid x \in X \text{ y } \|x\| \leq 1\}.$$

b) La *norma débil* en $X^*$ la definimos como

$$|l|_w = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|l(x_i)|}{1 + |x_i|},$$

donde $(x_1, x_2, \ldots)$ es un subconjunto denso numerable de $X$.

**Teorema 2.1** (Bishop) Si $X$ es un espacio vectorial normado separable y

$$U(X^*) = \{l \in X^* \mid |l|_s \leq 1\}$$

entonces,

a) $|\cdot|_w$ es una norma en $X^*$.

b) $\lim_j |l - l_j|_w = 0 \iff \lim l_j(x) = l(x)\ \forall\, x \in X,\ l, l_j \in U(X^*)$.

c) La topología relativa de $U(X^*)$ en $(X^*, |\cdot|_w)$ es la misma para todas las elecciones de $\{x_i, i = 1, 2, \ldots\}$ y coincide con la topología débil estrella relativa.

## 2.2 El espacio $B(T,\Omega)$

Sean $T = [0,1]$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ compacto y $C(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas en $\Omega$. Sea $B(T,\Omega)$ el espacio vectorial de todas las (clases de equivalencia de) funciones $\varphi : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(.,r)$ es medible $\forall\, r \in \Omega$; $\varphi(t,.) \in C(\Omega)\ \forall\, t \in T$; para cada $\varphi \in B$, existe $\psi_\varphi$ integrable con $|\varphi(t,.)|_{sup} \leq \psi_\varphi(t)$, $\forall\, t \in T$, y $\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff \varphi_1(t,.) = \varphi_2(t,.)$ $\mu$-c.s. en $T$. Entonces

•

$$|\varphi|_B = \int |\varphi(\tau,.)|_{sup}\, d\tau$$

es una norma en $B$, y $(B, |\cdot|_B)$ es isométricamente isomorfo a $L^1(T, C(\Omega))$ asignando a cada $\varphi \in B$ la función $t \to \varphi(t,.) : T \to C(\Omega)$. El espacio $(B, |.|_B)$ es de Banach y separable, y su subconjunto

$$B' = C(T) \otimes C(\Omega) = \left\{ (t,r) \to \sum_{i=1}^{k} f_i(t) c_i(r) \mid k \in \mathbf{N}, \quad f_i \in C(T), \quad c_i \in C(\Omega) \right\},$$

es denso en $B$.

**Teorema 2.2** (Riesz). Sea $S$ un espacio métrico compacto. Entonces existe un isomorfismo $I : \mathrm{frm}(S) \to C(S)^*$ definido por

$$I(s)(c) = \int c(r)\, s\,(dr) \quad \forall\, s \in \mathrm{frm}(S) \quad \text{y} \quad c \in C(S),$$

y satisface

$$|I(s)|_* = |s|_v(S).$$

## 2.3 Los espacios isomorfos $C(\Omega)^*$ y $\mathrm{frm}(\Omega)$

Por el teorema 2.2, existe un isomorfismo algebraico entre $\mathrm{frm}(\Omega)$ y $C(\Omega)^*$ y, como $C(\Omega)$ es separable, los podemos considerar como espacios normados con una norma débil.

**Teorema 2.3** El espacio vectorial normado $(\mathrm{frm}(\Omega), |\cdot|_w)$ es separable y sus subconjuntos $\mathrm{rpm}(\Omega)$ y

$$U(\mathrm{frm}(\Omega)) = \{s \in \mathrm{frm}(\Omega) \mid |s|_w(\Omega) \leq 1\}$$

son compactos.

## 2.4 Sumergimiento de $\Omega$ en frm($\Omega$) y la extensión de una función continua de $\Omega$ a frm($\Omega$)

El espacio métrico $\Omega$ se puede sumergir en frm($\Omega$) al identificar cada $r \in \Omega$ con la medida de Dirac $\delta_r$ en r [ o, equivalentemente, identificando $r$ con $l_r$ en $C(\Omega)^*$ tal que $l_r(c) = c(r)\ \forall\, c \in C(\Omega)$].

Se puede extender también en forma única cualquier función real $c : \Omega \to \mathbf{R}$, definiéndola en frm($\Omega$) de la siguiente manera:

$$c(s) = \int c(r)\, s\,(dr) \qquad \forall\, s \in \mathrm{frm}(\Omega).$$

En particular, $c(\delta_r) = c(r) \quad \forall\, r \in \Omega$.

Como $\lim c(s_j) = c(s)$ si $s_j, s \in U(\mathrm{frm}(\Omega))$ y $\lim |s_j - s|_w = 0$, y como $(\mathrm{frm}(\Omega), |\cdot|_w)$ es métrico, entonces c es continua en $(\mathrm{frm}(\Omega), |\cdot|_w)$.

**Teorema 2.4** Sea $\nu : T \to (\mathrm{frm}(\Omega), |\cdot|_w)$ tal que

$$\sup\, \mathrm{es}\, |\nu(t)|_v(\Omega) < \infty$$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\nu$ es medible.

b) $t \to c(\nu(t)) = \int c(r)\, \nu(t)\, (dr)$ es medible $\forall\, c \in C(\Omega)$.

[Más aún, si $\nu$ es medible, entonces la función $t \to \varphi(t, \nu(t))$ es integrable para toda $\varphi \in L^1(T, C(\Omega))$.]

## 2.5 El espacio $\mathcal{N}(T,\Omega)$ y sus subconjuntos $\mathcal{M}(T,\Omega)$ y $\mathcal{U}(T,\Omega)$

Denotamos por $\mathcal{N}(T,\Omega)$ el conjunto de todas las (clases de equivalencia de) funciones medibles $\nu : T \to (\mathrm{frm}(\Omega), |\cdot|_w)$ tales que $c_\nu = sup\ es|\nu(t)|_v(\Omega) < \infty$. Denotamos por

$$\mathcal{M}(T,\Omega) = \{\nu \in \mathcal{N}(T,\Omega) \mid \nu(t) \in \text{rpm}(\Omega) \ \text{ c.s. en } T\}$$
$$\mathcal{U}(T,\Omega) = \{\rho : T \to \Omega \mid \rho \text{ es medible}\}$$
$$\mathcal{M}_{\mathcal{U}}(T,\Omega) = \{\nu \in \mathcal{M}(T,\Omega) \mid \nu(t) = \delta_{\rho(t)} \text{ c.s. en } T, \text{ para alguna } \ \rho : T \to \Omega\}$$

Por el Teorema 2.4, si $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}}(T,\Omega)$ y $\nu(t) = \delta_{\rho(t)}$ c.s en $T$, entonces $t \to c(\nu(t)) = c(\rho(t))$ es medible $\forall$ $c \in C(\Omega)$ y por consiguiente, $t \to \rho(t)$ es medible. Conversamente, si $\rho$ es medible, entonces $t \to c(\rho(t) = c(\delta_{\rho(t)})$ es medible y sup es $|\delta_{\rho(t)}|_v(\Omega) = 1$. Por consiguiente, $t \to \delta_{\rho(t)}$ pertenece a $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}(T,\Omega)$. Esto prueba que existe una correspondencia 1-1 entre $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}(T,\Omega)$ y $\mathcal{U}(T,\Omega)$. Al identificar cada elemento $\rho$ de $\mathcal{U}(T,\Omega)$ con la función $t \to \delta_{\rho(t)}$ en $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}(T,\Omega)$ se sumerge $\mathcal{U}(T,\Omega)$ como un subconjunto de $\mathcal{M}(T,\Omega)$.

El siguiente resultado afirma que $B(T,\Omega)^*(\simeq L^1(T,C(\Omega))^*)$ es algebraicamente isomorfo a $\mathcal{N}(T,\Omega)$.

**Teorema 2.5** (Dunford-Pettis). Existe un isomorfismo $I : \mathcal{N}(T,\Omega) \to B(T,\Omega)^*$, definido por

$$\begin{aligned} I(\nu)(\varphi) &= \int \varphi(t,\nu(t))dt \qquad \forall\, \nu \in \mathcal{N}(T,\Omega) \quad \text{y} \quad \varphi \in B(T,\Omega) \\ &= \int dt \int \varphi(t,r)\nu(t)(dr), \end{aligned} \tag{2.1}$$

y

$$|I(\nu)|_* = \sup_{|\varphi|_B \le 1} |I(\nu)(\varphi)| = \text{sup es } |\nu(t)|_v(\Omega)$$

## 2.6 Los espacios isomorfos $B(T,\Omega)^*$ y $\mathcal{N}(T,\Omega)$ y sus subconjuntos $\mathcal{M}(T,\Omega)$ y $\mathcal{U}(T,\Omega)$ con la topología de la norma débil

Como se hizo con $C(\Omega)^*$ y $\text{frm}(\Omega)$, identificamos ahora los espacios isomorfos $B(T,\Omega)^*$, $L^1(T,C(\Omega))^*$ y $\mathcal{N}(T,\Omega)$, y por $I$ el isomorfismo definido por (2.1). Identificamos cualquier

$\nu \in \mathcal{N}(T,\Omega)$ con la funcional lineal continua $I(\nu)$ en $B(T,\Omega)$. Escribimos $< \nu, \varphi >= I(\nu)(\varphi)$. Por el teorema 2.5, la norma fuerte de un elemento $\nu \in \mathcal{N}(T,\Omega)$ está dada por

$$|\nu|_s = \sup \text{es} |\nu(t)|_v(\Omega).$$

**Teorema 2.6** El espacio $(\mathcal{N}(T,\Omega), |\cdot|_w)$ es separable y su subconjunto

$$U(\mathcal{N}) = \{\nu \in \mathcal{N}(T,\Omega) \mid |\nu|_s \leq 1\},$$

es compacto.

**Teorema 2.7** Si $\nu, \nu_j \in U(N)$, $j \in \mathbf{N}$, entonces

$$\lim_i \nu_j = \nu \iff \lim_j < \nu_j, \varphi >=< \nu, \varphi > \quad \forall\, \varphi \in B(T,\Omega).$$

El siguiente resultado es crucial en el presente trabajo, razón por la cual se da su demostración.

**Teorema 2.8** $\mathcal{M}(T,\Omega)$ coincide con la cerradura débil estrella de $\mathcal{U}(T,\Omega)$.

*Demostración.* Sea $\mu \in \mathcal{M}(T,\Omega)$. Como $\Omega$ es un espacio métrico compacto, para cualquier $i \in \mathbf{N}$ se puede construir una cubierta de $\Omega$ formada por una colección finita de conjuntos abiertos $\widetilde{R}^i_k$, para $k = 1, 2, \ldots, k(i)$, de diámetro a lo más $1/i$. Definiendo

$$R^i_k := \widetilde{R}^i_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} \widetilde{R}^i_j, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, k(i),$$

y eliminando todos los $R^i_k$ vacíos, se obtiene una partición de $\Omega$ de conjuntos disjuntos $R^i_k$, que son diferencias de conjuntos abiertos.

De manera similar, se puede particionar $T$ en subconjuntos de Borel disjuntos no vacíos $T^i_j$, para $j = 1, 2, \ldots j(i)$, de diámetro a lo más $1/i$.

Para $j = 1, 2, \ldots, j(i)$; $k = 1, 2, \ldots, k(i)$; e $i \in N$, sea

$$\alpha^i_{j,k} = \int_{T^i_j} \mu(t)(R^i_k)dt.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{k(i)} \alpha^i_{j,k} = m(T^i_j),$$

donde $m$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}$, podemos particionar cada conjunto $T^i_j$ en subconjuntos $T^i_{j,k}$, tal que $m(T^i_{j,k}) = \alpha^i_{j,k}$, para $j = 1,2,\ldots,j(i)$; $k = 1,2,\ldots,k(i)$; e $i \in \mathbf{N}$.

Para $k = 1,2,\ldots,k(i)$, sea $r^i_k \in R^i_k$. Definimos

$$u_i(t) = r^i_k \quad \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T^i_{j,k}, \quad \text{para } k = 1,2,\ldots,k(i).$$

Se probará ahora que

$$\lim_i u_i = \mu.$$

Para esto será suficiente probar que

$$\lim_i \int f(t)c(u_i(t))dt = \int f(t)c(\mu(t))dt,$$

para $f \in C(T)$ y $c \in C(\Omega)$ arbitrarias. Si $\Omega_f$ y $\Omega_c$ representan un módulo de continuidad de $f$ y $c$ respectivamente, y $t^i_j$ es un punto arbitrario de $T^i_j$, para $j = 1,2,\ldots,j(i)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left| \int f(t)\,dt \int c(r)\,\mu(t)\,(dr) - \int f(t)\,c(u_i(t))\,dt \right| \\
&\leq \left| \int f(t) \sum_{k=1}^{k(i)} c(r^i_k)\,\mu(t)\,(R^i_k)\,dt - \sum_{k=1}^{k(i)} c(r^i_k) \sum_{j=1}^{j(i)} \int_{T^i_{j,k}} f(t)\,dt \right| + \Omega_c(1/i) \int |f(t)|\,dt \\
&= \left| \sum_{k=1}^{k(i)} \sum_{j=1}^{j(i)} c(r^i_k) \left[ \int_{T^i_j} f(t)\,\mu(t)\,(R^i_k)\,dt - \int_{T^i_{j,k}} f(t)\,dt \right] \right| + \Omega_c(1/i) \int |f(t)|dt \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{k(i)} \sum_{j=1}^{j(i)} c(r^i_k) f(t^i_j) \left[ \int_{T^i_j} \mu(t)\,(R^i_k)\,dt - m(T^i_{j,k}) \right] \right| \\
&\quad + 2\Omega_f(1/i) m(T) |c|_{sup} + \Omega_c(1/i) |f|_1 \\
&= 2\Omega_f(1/i) m(T) |c|_{sup} + \Omega_c(1/i) |f|_1 \to 0,\ i \to \infty.
\end{aligned}$$

lo que demuestra que la sucesión $\{u_i\}$ de controles ordinarios converge a $\mu$.

# 3. RELAJAMIENTO CLASICO DE PROBLEMAS DE CONTROL OPTIMO SIN RETARDOS

En este capítulo trataremos el siguiente problema de control óptimo. Dados $T = [0,1]$, un punto $\xi \in \mathbf{R}^n$, un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, y funciones $f : T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ y $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$\text{(3.1.1)} \qquad \text{minimizar } g(x(1))$$

sujeto a

$$\text{(3.1.2)} \qquad x'(t) = f(t, x(t), u(t))$$

$$\text{(3.1.3)} \qquad x(0) = \xi$$

$$u(t) \in \Omega \quad \text{c.s. en} \quad T,$$

donde $u : T \to \mathbf{R}^m$ es cualquier función medible y $x : T \to \mathbf{R}^n$ es una función absolutamente continua.

Denotamos por

$$\mathcal{U}(T, \Omega) = \{u : T \to \mathbf{R}^m \mid u \text{ es medible y } u(t) \in \Omega \text{ c.s. en } T\}$$

el conjunto de controles ordinarios.

En relación al problema (3.1) se tiene la siguiente definición.

**Definición 3.1**

1) Un *control ordinario* (u original) lo definimos como una función $u \in \mathcal{U}(T, \Omega)$.

2) Un *proceso ordinario* lo definimos como una pareja $(x, u)$ que consiste en un control ordinario $u$ y una función absolutamente continua $x : T \to \mathbf{R}^n$ que satisface la ecuación diferencial (3.1.2).

3) Un proceso ordinario $(x, u)$ es *admisible* si $x$ satisface las condiciones iniciales (3.1.3); es decir, si $x(0) = \xi$. (Bajo condiciones usuales sobre los datos del problema, dado un control ordinario $u$ existe un único $x$ tal que $(x, u)$ es un proceso ordinario admisible.)

El problema de optimización (3.1) considerado como un problema de minimización sobre los procesos ordinarios admisibles se llama el ***problema original***, y lo denotamos por $(P)_o$.

En general no se puede asegurar la existencia de una solución óptima (o proceso ordinario admisible óptimo) del problema (3.1), excepto para una clase muy restringida de problemas de control óptimo. Por consiguiente, las siguientes dos preguntas surgen de una manera natural.

¿Cuándo el problema original tiene una solución óptima?,

¿Qué se puede hacer en el caso de que no exista una solución óptima de (3.1)?

Ambas preguntas tienen respuestas satisfactorias. Para la primera pregunta, bajo hipótesis topológicas usuales se prueba que si

$$f(t,x,\Omega) \quad \text{es convexa, } \forall\,(t,x)\in T\times\mathbf{R}^n,$$

se puede asegurar la existencia de un proceso ordinario admisible óptimo. Sin embargo, si $f(t,x,\Omega)$ no es convexa es imposible, en general, asegurar la existencia de un proceso ordinario admisible óptimo. Para obtener una solución óptima del problema (3.1), es necesario extender el espacio de las funciones de control $\mathcal{U}(T,\Omega)$ para que se puedan probar teoremas de existencia. Para esto es necesario encontrar un conjunto (de controles relajados) que contenga a $\mathcal{U}(T,\Omega)$ para el cual un proceso relajado admisible esté bien definido y se pueda asegurar la existencia de un proceso relajado admisible óptimo. Cuando se logra encontrar este conjunto, el problema (3.1) formulado en tales procesos relajados admisibles se dice que es una extensión del problema original, más conocido como el ***problema relajado***.

Si se logra encontrar un proceso ordinario admisible que alcance el costo ínfimo del problema original, el problema estará resuelto. Una metodología para encontrar tales procesos involucra el concepto de procesos relajados. Esto da lugar a la siguiente definición.

**Definición 3.2**

1) Un *control relajado* lo definimos como una función esencialmente acotada medible $\mu \to (\mathrm{rpm}(\Omega), |\cdot|_w)$.

2) Un *proceso relajado* se define como la pareja $(x, \mu)$ que consiste en un control relajado $\mu$ y una función absolutamente continua $x : T \to \mathbb{R}^n$ que satisface la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t), \mu(t)) = \int f(t, x(t), r)\mu(t)(dr) \quad \text{c.s. en } T.$$

3) Un proceso relajado $(x, \mu)$ es *admisible* si $x(0) = \xi$.

El problema de optimización (3.1) considerado como un problema de minimización sobre los procesos relajados admisibles se llama el *problema relajado*, y se denota por $(P)_R$.

Como en el capítulo anterior, el conjunto de controles relajados lo denotamos por

$$\mathcal{M}(T, \Omega) = \{\mu : T \to (\mathrm{frm}(\Omega, |\cdot|_w) \mid \mu \text{ es medible y } \mu(t) \in \mathrm{rpm}(\Omega) \quad \text{c.s. en } T\}.$$

Usando los resultados del capítulo anterior, el espacio $\mathcal{M}(T, \Omega)$ se puede considerar como un subespacio del espacio dual topológico $L^1(T, C(\Omega))^*$, que actúa sobre elementos $\varphi$ en el espacio primal como

$$\varphi \to \int \varphi(t, \mu(t))dt = \int dt \int \varphi(t, r)\mu(t)(dr).$$

Sumergimos el conjunto de controles ordinarios $\mathcal{U}(T, \Omega)$ en $\mathcal{M}(T, \Omega)$ al identificar cada $u \in \mathcal{U}(T, \Omega)$ con la función $t \to \delta_{u(t)}$, donde $\delta_{u(t)}$ es la medida de Dirac en $u(t)$.

Como vimos en el teorema 2.8, si en $\mathcal{M}(T, \Omega)$ definimos la topología débil estrella de $L^1(T, C(\mathbb{R}))^*$ y consideramos a $\mathcal{U}(T, \Omega)$ como un subespacio de $\mathcal{M}(T, \Omega)$, entonces $\mathcal{M}(T, \Omega)$ es un conjunto compacto y coincide con la cerradura de $\mathcal{U}(T, \Omega)$. Este resultado implica la existencia de un minimizador relajado, y que lo podemos aproximar con controles ordinarios. Estas dos propiedades las resumimos con la frase "*el conjunto de controles relajados es una extensión propia del conjunto de controles ordinarios*". Esto es equivalente a decir lo siguiente:

*El problema relajado tiene un minimizador y el costo ínfimo para el problema original coincide con el costo mínimo del problema relajado*; es decir,

$$\inf\{(P)_o\} = \min\{(P)_R\}.$$

Cuando un problema de control óptimo involucra restricciones en el punto final los dos conceptos de relajamiento propio no necesariamente son equivalentes, ya que al relajar el problema original se puede reducir el costo ínfimo. Sin embargo, el minimizador relajado se puede aproximar con controles ordinarios cuyos procesos ordinarios asociados son "casi" admisibles en el sentido de que satisfacen la restricción en el límite. Este fenómeno está ilustrado con un ejemplo dado en Rosenblueth [6]. El concepto de un relajamiento propio toma en cuenta que la restricción en el punto final puede representar restricciones con algún error, por lo que se consideran puntos que ("casi" satisfacen esta restricción) pueden producir valores menores de $g$ que minimizan soluciones ordinarias. Por lo tanto, el objetivo de encontrar procesos ordinarios admisibles que aproximan el costo ínfimo se reemplaza por el de encontrar procesos ordinarios, no necesariamente admisibles, que aproximan el costo mínimo para el problema relajado.

Se pide que la técnica de relajamiento sea propia por las siguientes razones: 1) significa que hay una conexión estrecha entre el problema original y el problema relajado; 2) sugiere una metodología para encontrar un proceso ordinario admisible cuyo costo se aproxime al costo ínfimo en situaciones donde no se puede asegurar la existencia de un proceso ordinario admisible óptimo.

La técnica de relajamiento clásico para resolver problemas de control óptimo sin retardos, se puede resumir de la siguiente manera.

1) Relajar el problema original.

2) Resolver el problema relajado.

3) Aproximar la solución relajada con una sucesión de controles ordinarios.

La técnica de relajamiento para problemas de control óptimo sin retardos tiene por objetivo extender el conjunto de controles ordinarios $\mathcal{U}(T,\Omega)$ para probar teoremas de existencia de minimizadores del problema relajado, y dar una metodología explícita para aproximar este minimizador con una sucesión de controles ordinarios. La metodología para aproximar un control relajado dado con una sucesión de controles ordinarios se describe en la demostración del Teorema 2.8. Esta metodología está resumida en el siguiente algoritmo.

**Algoritmo 3.1** (Relajamiento clásico). Dado un intervalo $T$, un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, y un control relajado $\mu \in \mathcal{M}(T,\Omega)$, el siguiente algoritmo calcula una sucesión de controles ordinarios $u_i$ que converge a $\mu$.

1) Sea $i \in \mathbf{N}$.

2) Particionar $\Omega$ en subconjuntos $R_k^i$, para $k = 1, 2, \ldots, k(i)$, de diámetro a lo más $1/i$.

3) Particionar el intervalo $T$ en subintervalos $T_j^i$, para $j = 1, 2, \ldots, j(i)$, de diámetro a lo más $1/i$.

4) Para $j = 1, 2, \ldots, j(i)$ calcular

$$\alpha_{j,k}^i = \int_{T_j^i} \mu(t)(R_k^i)\, dt \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, k(i).$$

5) Particionar $T_j^i$ en subconjuntos $T_{j,k}^i$ tal que $m(T_{j,k}^i) = \alpha_{j,k}^i$.

6) Para $k = 1, 2, \ldots, k(i)$

6.1) Elegir $r_k^i \in R_k^i$.

6.2) Asignar $u_i(t) = r_k^i$, para $t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T_{j,k}^i$.

# 4. PROBLEMAS CON RETARDOS CONMENSURADOS

## 4.1 Introducción

En las últimas dos décadas se ha trabajado en desarrollar técnicas de relajamiento propias para problemas de control óptimo que involucran retardos en los controles. Los primeros resultados fueron publicados por Warga en [10,11,12], tratando los siguientes tres casos: cuando los retardos aparecen únicamente en las funciones de estado; cuando las funciones de control retardados son aditivamente acopladas; y cuando los retardos en los controles son constantes y conmensurados (el cociente de cualesquiera dos retardos es un número racional).

Para los primeros dos casos, la técnica de relajamiento utilizada es una adaptación directa de la técnica de relajamiento clásico para problemas de control óptimo sin retardos. Para el tercer caso, involucrando retardos constantes conmensurados no necesariamente separables, no es tan sencillo obtener un relajamiento propio: es fácil encontrar un ejemplo donde la técnica de relajamiento clásico no funciona; es decir, el problema relajado reduce el costo ínfimo (ver Warga[13]). Sin embargo, Warga [11] desarrolló una técnica de relajamiento, llamada *relajamiento vía el problema reducido*. Esta técnica consiste en reducir un problema de control óptimo con retardos a uno sin retardos. Sin embargo, esta técnica presenta serias dificultades que impiden que sea de gran utilidad práctica. La más importante es que la dimensión de los espacios involucrados en el problema reducido puede ser muy grande.

En 1986, Warga [13] propuso una nueva técnica de relajamiento, llamada *relajamiento débil*, aplicable a problemas con retardos en los controles acoplados no aditivamente, los cuales pueden o no ser conmensurados. Se prueba que el problema relajado resultante tiene una solución. Sin embargo, Rosenblueth-Vinter [3] en 1991 encontraron un ejemplo con dos retardos conmensurados para el cual el control relajado minimizante, obtenido con la técnica de relajamiento débil, no se puede aproximar con controles ordinarios.

Posteriormente, Rosenblueth-Vinter [3] desarrollaron una nueva técnica de relajamiento, llamada *relajamiento fuerte*. Esta técnica de relajamiento es propia, i.e., "para un problema de control óptimo sin restricciones en el punto final, el mínimo del problema relajado coincide con el ínfimo del problema original". Además esta técnica coincide con el relajamiento débil para sistemas con un retardo en los controles. Para problemas con dos o más retardos está definido únicamente para el caso conmensurado y resuelve algunas dificultades que surgen cuando se utiliza la técnica de relajamiento vía el problema reducido.

## 4.2 Planteamiento del problema

Dados $0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_p \leq 1$ números reales, un punto $\xi \in \mathbf{R}^n$, un conjunto $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, funciones $f : T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m(p+1)} \to \mathbf{R}^n$ y $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $T = [0,1]$, y $\widehat{T} = [-\theta_p, 1]$, consideremos el siguiente problema de control óptimo con retardos

(4.1.1) $\quad$ minimizar $g(x(1))$

sujeto a

(4.1.2) $\quad x'(t) = f(t, x(t), u(t), u(t-\theta_1), \ldots, u(t-\theta_p))$ c.s. en $T$

(4.1.3) $\quad x(0) = \xi$

$u(t) \in \Omega$ c.s. en $\widehat{T}$,

donde $u : \widehat{T} \to \mathbf{R}^m$ es cualquier función medible y $x : T \to \mathbf{R}^n$ es una función absolutamente continua.

En relación a este problema se da la siguiente definición

**Definición 4.1** Un *control retardado ordinario* es una función medible $u : \widehat{T} \to \mathbf{R}^m$ tal que $u(t) \in \Omega$ c.s. en $\widehat{T}$.

Como en el capítulo anterior, denotamos por

$\mathcal{U}(\widehat{T}, \Omega) = \{u : \widehat{T} \to \mathbf{R}^m \mid u$ es medible y $u(t) \in \Omega$ c.s. en $\widehat{T}\}$.

$\mathcal{M}(\widehat{T}, \Omega) = \{\mu : \widehat{T} \to (\mathrm{frm}(\Omega), |\cdot|_w) \mid \mu$ es medible y $\mu(t) \in \mathrm{rpm}(\Omega)$ c.s. en $\widehat{T}\}$.

*Un proceso retardado ordinario*, un *proceso retardado ordinario admisible*, un *proceso relajado*, un *proceso relajado admisible* para el problema (4.1), se definen de manera similar al caso sin retardos. El problema (4.1) considerado como un problema de minimización sobre los procesos retardados ordinarios se llama el *problema original* y se denota por $(P)_o$.

En [13] Warga mostró con un ejemplo que si se aplica la técnica clásica de relajamiento del capítulo anterior al problema (4.1), el conjunto $\mathcal{M}(\widehat{T}, \Omega)$ no proporciona una extensión propia del problema (4.1), de manera que no basta considerar la versión relajada de la función de control. Esto llevó al desarrollo de nuevas técnicas de relajamiento, cuya descripción se da en las siguientes secciones.

## 4.3 Relajamiento vía el problema reducido

Esta técnica reduce el problema de control óptimo con retardos conmensurados a un problema sin retardos. Por "conmensurado" se entiende que $\theta_i/\theta_{i+1}$ es un número racional, para $i = 1, 2, \ldots p-1$. Podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $\theta_i = i\theta$, para $i = 1, 2, \ldots, p$. La idea básica de esta técnica de relajamiento consiste en seccionar los controles ordinarios y las correspondientes trayectorias en segmentos de longitud $\theta$, y apilar estos segmentos para formar funciones vectoriales de dimensión mayor en el intervalo $[0, \theta]$. Las funciones resultantes satisfacen una ecuación diferencial sin retardos, junto con un conjunto de condiciones de frontera mixtas que expresan la igualdad de una componente de las funciones de estado, extendidas en los extremos con el valor inicial de la siguiente componente para asegurar la continuidad de la trayectoria original.

Específicamente, sean $N = \max\{i \in \mathbb{N} \mid i\theta < 1\}$, $k = N+1$, $q = k+p = N+p+1$, y

$$\lambda_i(t) = t + i\theta, \text{ para } i = -p, -p+1, \ldots, 0, 1, \ldots, N, \text{ y } \forall t \in [0, \theta].$$

Si es necesario extendemos $f$ a $[0, k\theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m(p+1)}$ haciendo

$$f(t, x, r) = 0 \quad \forall t \in (1, k\theta] \text{ y } (x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m(p+1)}.$$

Definamos la función $\hat{f} : [0,\theta] \times \mathbf{R}^{nk} \times \mathbf{R}^{mq} \to \mathbf{R}^{nk}$ de la siguiente manera:

$$\hat{f}_i(t,\hat{x},\hat{u}) = f(\lambda_i(t), \hat{x}_i, \hat{u}_i, \hat{u}_{i-1}, \ldots \hat{u}_{i-p}),\ i = 0,1,\ldots,N \text{ y } \forall\, t \in [0,\theta],$$

donde

$$\hat{x} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_N) \in \mathbf{R}^{nk}, \quad \hat{u} = (\hat{u}_{-p}, \hat{u}_{-p+1}, \ldots, \hat{u}_N) \in \mathbf{R}^{mq},$$

$$\hat{f} = (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_N).$$

Sean $\widehat{\Omega} = \Omega^q$, $\hat{g} : \mathbf{R}^{nk} \to \mathbf{R}$ y $c : \mathbf{R}^{nk} \to \mathbf{R}^{nk}$ tales que

$$\hat{g}(\hat{x}) = g(\hat{x}_N) \quad \text{y} \quad c(\hat{x}) = (\xi, \hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{N-1}),\ \forall\, \hat{x} \in \mathbf{R}^{nk}.$$

Utilizando estas definiciones el problema original (4.1) se transforma en el siguiente problema

(4.2.1) $$\text{minimizar } \hat{g}(\hat{x}(\theta)),$$

sujeto a

(4.2.2) $$\hat{x}'(t) = \hat{f}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \quad \text{c.s. en } [0,\theta]$$

(4.2.3) $$\hat{x}(0) = c(\hat{x}(\theta))$$

$$\hat{u}(t) \in \widehat{\Omega} \quad \text{c.s. en } [0,\theta],$$

llamado el *problema reducido.*

Se puede probar que el problema reducido (4.2) y el problema original (4.1), formulados sobre los procesos ordinarios, son equivalentes en el sentido de que existe un mapeo $(\Psi,\Phi)$ 1-1 de los procesos ordinarios admisibles para (4.1) a los procesos ordinarios admisibles para (4.2), que satisfacen las condiciones de frontera mixtas (4.2.3). Además, este mapeo se puede definir de tal manera que se preserve el valor del costo cuando se pasa de un problema a otro. El mapeo $(\Psi,\Phi)$ está dado como sigue. Dado un proceso ordinario admisible $(x,u)$ para (4.1), extendemos $x$ y $u$ de tal manera que

$$x(t) = x(1) \quad \text{y} \quad u(t) = w,\ \forall\, t \in (1, k\theta],\ \text{y } w \in \Omega \text{ fijo.}$$

Para $t \in [0,\theta]$, sean

$$\hat{x}_i(t) = \psi_i(x)(t) = (x \circ \lambda_i)(t) = x(t+i\theta), \text{ para } i = 0,1,\ldots,N$$
$$\hat{u}_j(t) = \phi_j(u)(t) = (u \circ \lambda_j)(t) = u(t+j\theta), \text{ para } j = -p,-p+1,\ldots,0,1,\ldots,N.$$

Si

$$\Psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N) \quad \text{y} \quad \Phi = (\phi_{-p}, \phi_{-p+1}, \ldots, \phi_N)$$

entonces se puede verificar que

$$(\hat{x}, \hat{u}) = (\Psi(x), \Phi(u))$$

es un proceso ordinario admisible para (4.2).

El mapeo inverso está dado por $(\Psi^{-1}(\hat{x}), \Phi^{-1}(\hat{u}))$ donde, si $(\hat{x}, \hat{u})$ es un proceso ordinario admisible para (4.2), entonces

$$\Psi^{-1}(\hat{x}(t)) = \hat{x}_i(t-i\theta), \ \forall\, t \in [\lambda_i(0), \lambda_i(\theta)] \cap T, \text{ e } i = 0,1,...,N$$
$$\Phi^{-1}(\hat{u}(t)) = \hat{u}_j(t-j\theta), \ \forall\, t \in [\lambda_j(0), \lambda_j(\theta)] \cap \widehat{T}, \text{ y } j = -p,-p+1,\ldots,0,1,\ldots,N.$$

Como el problema (4.2) no tiene retardos se puede aplicar la técnica clásica de relajamiento del capítulo 3 para relajar (4.2) en términos de $\mathcal{M}([0,\theta],\widehat{\Omega})$, y no es difícil ver que el problema relajado tiene una solución. Además, esta extensión es propia, ya que el conjunto $\mathcal{M}([0,\theta],\widehat{\Omega})$ de controles relajados para (4.2) coincide con la cerradura débil estrella del conjunto $\mathcal{U}([0,\theta],\widehat{\Omega})$ de controles ordinarios. Es importante hacer notar que los argumentos involucrados para establecer esta propiedad son diferentes a las utilizadas en el capítulo 3, puesto que se debe asegurar que, dado un proceso relajado admisible para (4.2), se puede encontrar un proceso ordinario que lo aproxime y que satisfaga las condiciones de frontera mixtas (4.2.3).

En analogía con las definiciones del capítulo 3, denotamos por $(PR)_o$ al problema (4.2) formulado sobre los procesos ordinarios admisibles, y por $(PR)_R$ al problema (4.2) formulado sobre los procesos relajados admisibles en términos de $\mathcal{M}([0,\theta],\widehat{\Omega})$.

El procedimiento de reemplazar el problema original (4.1) por el problema reducido (4.2) y luego utilizar la técnica clásica de relajamiento para relajar (4.2) se llama la **técnica de relajamiento vía el problema reducido**. Los diferentes pasos de esta técnica de relajamiento se pueden resumir de la siguiente manera:

1) Reducir el problema original (4.1) a un problema de la forma (4.2).

2) Encontrar un minimizador relajado para el problema reducido.

3) Construir una sucesión de controles ordinarios que convergen al minimizador del problema reducido.

4) Asociar a los controles ordinarios una sucesión de procesos ordinarios admisibles para el problema original (4.1) que alcance el costo ínfimo.

¿Cuáles son las conexiones con el problema retardado original? Nuestro objetivo inicial fue encontrar un proceso ordinario admisible para (4.1) que alcance el costo ínfimo. ¿Se puede lograr este objetivo sabiendo la existencia de un minimizador relajado para (4.2), y si existe una sucesión de controles ordinarios para (4.2) que convergen al minimizador?

Para responder estas preguntas, obsérvese primero que el problema reducido tiene restricciones en el punto final, ya que los procesos admisibles deben satisfacer una relación que involucra condiciones de frontera mixtas. Por lo tanto, si se da un minimizador relajado $\hat{\mu}$ para (4.2) y se construye una sucesión de controles ordinarios que convergen a $\hat{\mu}$, no se puede garantizar que el correspondiente proceso sea admisible. Por otra parte, el mapeo 1-1 que existe entre los dos problemas está definido solamente para procesos ordinarios admisibles. Esto significa que no se puede usar el mapeo inverso y el objetivo de relajar el problema original no se podrá llevar a cabo.

Lo que se necesita probar es que, dado un minimizador relajado para (4.2), exista un proceso ordinario adecuado que lo aproxime y que satisfaga las condiciones de frontera mixtas. En otras palabras, es necesario probar que

$$\inf\{(PR)_o\} = \min\{(PR)_R\}. \tag{4.3}$$

Si se logra probar esta relación entonces se puede aplicar el mapeo 1-1 que existe entre los dos procesos para obtener procesos ordinarios para (4.1) que alcansen el costo ínfimo. En Rosenblueth–Vinter [3] se prueba que, en efecto, (4.3) se cumple. Por lo tanto $(PR)_R$ es una extensión propia de $(PR)_o$.

Sin embargo, la técnica de relajamiento vía el problema reducido tiene las siguientes limitaciones que impiden que sea de utilidad práctica.

1) La dimensión del espacio de estado, $[(N+1)n]$, y la del espacio de control, $[(N+p+1)m]$, involucrados en el problema reducido puede ser muy grande, ya que depende del número de retardos involucrados y del número de segmentos de longitud $\theta$.
2) La dimensión de los espacios involucrados crece rápidamente a medida que la longitud del intervalo $T$ crece.
3) La técnica de relajamiento se aplica únicamente para retardos conmensurados.
4) La técnica de relajamiento exhibe un conjunto de controles relajados para el problema reducido pero no para el problema original.

## 4.4 Controles débilmente relajados

Debido a las serias limitaciones de la técnica de relajamiento vía el problema reducido, Warga [13] desarrolló una nueva técnica de relajamiento, llamada **relajamiento débil**. Esta técnica se puede aplicar a problemas con retardos en los controles que pueden ser no separables y no conmensurados. La idea de esta técnica, y de otras que fueron desarrolladas posteriormente, está basada en transformar el problema original en uno en donde los retardos no están presentes en las dinámicas, sino en ciertas condiciones de compatibilidad impuestas en los controles. Los controles débilmente relajados se definen como los controles relajados clásicos que satisfacen algunas condiciones que generalizan las condiciones de los controles ordinarios.

El conjunto de controles débilmente relajados, considerado como un subespacio del espacio de los controles relajados clásicos, es convexo y compacto. Sin embargo, en Rosenblueth–Vinter [3] se dan ejemplos donde las soluciones débilmente relajadas encontradas con la técnica de relajamiento débil no se pueden aproximar con controles ordinarios.

Para describir el proceso de relajamiento débil, supóngase que $(x, u)$ es un proceso ordinario admisible dado y $\theta_0 = 0$. Definimos

$$u_i(t) = u(t - \theta_i), \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots, p \ \text{ y } \ t \in T$$

Si

$$\Delta_i = \theta_i - \theta_{i-1} \quad \text{y} \quad T_i = [\Delta_i, 1], \ \text{para } i = 1, 2, \ldots, p$$

entonces $(x, \bar{u})$, con $\bar{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_p)$, satisface las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t), \bar{u}(t)) \quad \text{c.s. en } T \\ &x(0) = \xi \\ &\bar{u}(t) \in \Omega^{p+1} \quad \text{c.s. en } T \end{aligned}$$

junto con las condiciones de compatibilidad

(4.4) $$u_i(t) = u_{i-1}(t - \Delta_i) \quad \text{c.s. en } T_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, p.$$

De esta manera se separan las $p + 1$ funciones sobre $T$ las cuales están en las últimas $p + 1$ componentes de $f$, y se imponen condiciones que reflejan el hecho de que estas funciones son versiones retardadas unas de otras. Se utiliza ahora la técnica clásica de relajamiento para definir los controles relajados para este sistema, tratando a $u_0, u_1, \ldots, u_p$ como funciones independientes. El punto de arranque es tomar un control relajado como una función medible con valores en $\mathrm{rpm}(\Omega^{p+1})$ e imponer algunas condiciones que generalizan las condiciones de compatibilidad sobre los controles.

Denotamos por

$$\mathcal{U}(\theta_1,\ldots,\theta_p) = \{\text{controles ordinarios}\}$$
$$= \{\tilde{u} = (u_0,\ldots,u_p) \in \mathcal{U}(T,\Omega^{p+1}) \mid u_i(t) = u_{i-1}(t-\Delta_i), \text{ c.s. en } T, \ i = 1,2,\ldots,p\}$$

El objetivo es buscar un subconjunto compacto de $\mathcal{M}(T,\Omega^{p+1})$ que coincida con la cerradura débil estrella de $\mathcal{U}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p)$. En otras palabras, un conjunto de controles relajados que proporcione una extensión propia del conjunto de controles ordinarios.

**Definición 4.2** Un *control débilmente relajado* para (4.1) es una función medible $\mu$ con valores en $\text{rpm}(\Omega^{p+1})$ que satisface las siguientes condiciones de compatibilidad

$$\mathcal{P}_i\,\mu(t) = \mathcal{P}_{i-1}\,\mu(t-\Delta_i) \quad \text{c.s. en } [\Delta_i,1], \text{ para } i = 1,2,\ldots,p \tag{4.5}$$

donde $\mathcal{P}_i : C(\Omega^{p+1})^* \to C(\Omega)^*$ y $\mathcal{P}_i\mu(t)$ denota la proyección sobre la $i$-ésima componente de $\mu(t)$.

Las condiciones de compatibilidad (4.5) son equivalentes a

$$\int_{T_i} dt \int \varphi(t,r_i)\mu(t)(dr) = \int_{T_i} dt \int \varphi(t,r_{i-1})\mu(t-\Delta_i)(dr), \ i = 1,2,\ldots p,$$

donde $\varphi \in L^1(T,C(\Omega))$ y $r = (r_0,r_1,\ldots,r_p)$. Estas condiciones expresan, en términos de funcionales lineales, que la $i$-ésima componente de $\mu(t)$ está asociada con una versión retardada de la componente $(i-1)$.

Denotamos por

$$\mathcal{M}_w(\theta_1,\ldots,\theta_p) = \{\text{controles débilmente relajados}\}$$
$$= \{\mu \in \mathcal{M}(T,\Omega^{p+1}) \mid \mathcal{P}_i\mu(t) = \mathcal{P}_{i-1}\mu(t-\Delta_i) \quad \text{c.s. en } [\Delta_i,1]; \ i = 1,2,\ldots,p\}$$

Un *proceso débilmente relajado* y un *proceso débilmente relajado admisible* se definen de manera similar a la definición 3.2. El problema (4.1) considerado como un problema de minimización sobre los procesos débilmente relajados se llama el *problema débilmente relajado*, y se denota por $(P)_{DR}$.

Si $\mu \in M_w(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ resulta de alguna función $\tilde{u} : T \to \Omega^{p+1}$, entonces las condiciones de compatibilidad (4.4) y (4.5) son equivalentes. En Warga [13] se prueba que el conjunto de controles débilmente relajados, considerado como un subespacio del espacio de controles relajados clásico, es convexo y compacto. Además, se establecieron teoremas de existencia y condiciones de controlabilidad de primer orden.

La técnica de relajamiento débil tiene las siguientes ventajas.

1) El rango del espacio $C(\Omega^{p+1})^*$ no depende de la relación que pueda existir entre los retardos y el intervalo $T$.

2) Se puede aplicar aún cuando los retardos sean no conmensurados.

3) El problema débilmente relajado tiene una solución.

Sin embargo, a pesar de que esta técnica de relajamiento resuelve algunas de las desventajas de la técnica de relajamiento vía el problema reducido, tiene la siguiente desventaja que impide que sea de gran utilidad práctica: para problemas que involucran dos o más retardos la solución del problema débilmente relajado no necesariamente se puede aproximar con controles ordinarios. Esto quiere decir que el problema débilmente relajado no es una extensión propia del problema original. Este fenómeno se ilustra con un ejemplo en [3]. Con este ejemplo se prueba que

$$\inf(P)_o \geq \min(P)_{FR} > \min(P)_{DR}.$$

## 4.5 Controles fuertemente relajados

La técnica de relajamiento débil resulta inapropiada porque para problemas con dos o más retardos, no da una extensión propia del problema original. Por este motivo en Rosenblueth–Vinter [3] se desarrolló una modificación de esta técnica de relajamiento, llamada *relajamiento fuerte*. Esta técnica resuelve algunos de los problemas que presentan la técnica de relajamiento débil y la técnica de relajamiento vía el problema reducido. Otra característica de esta nueva técnica de relajamiento es que coincide con la técnica de relajamiento débil para sistemas que involucran un retardo en los controles. Para problemas con dos o más retardos está definido únicamente para el caso conmensurado.

Para describir el proceso de relajamiento fuerte, supóngase que $\theta \in (0, 1/p]$ tal que $\theta_i = i\theta$, para $i = 1, 2, \ldots, p$. Dado un proceso ordinario admisible $(x, u)$ para (4.1), definimos

$$u_i(t) = u(t - i\theta), \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, p; \; t \in T.$$

Entonces $(x, \tilde{u})$, con $\tilde{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_p)$, satisface

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), \tilde{u}(t)) \quad \text{c.s. en } T \\ x(0) &= \xi \\ \tilde{u}(t) &\in \Omega^{p+1} \quad \text{c.s. en } T, \end{aligned}$$

junto con la condición de compatibilidad

$$(u_1, \ldots, u_p)(t) = (u_0, \ldots, u_{p-1})(t - \theta) \quad \forall\, t \in [\theta, 1]. \tag{4.6}$$

Este sistema es una reformulación del problema original, y un control retardado ordinario es un elemento $\tilde{u}$ de $\mathcal{U}(T, \Omega^{p+1})$ que satisface la condición de compatibilidad (4.6). Esto sugiere una nueva condición de compatibilidad para definir los controles relajados que involucran proyecciones $\mathcal{P}_{0,1,\ldots,p-1}$ y $\mathcal{P}_{1,2,\ldots,p}$ en las $p$ coordenadas de $(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$ y de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, respectivamente.

**Definición 4.3** Un *control fuertemente relajado* para (4.1) es una función medible $\mu$ con valores en rpm$(\Omega^{p+1})$, que satisface la siguiente condición de compatibilidad

$$\mathcal{P}_{1,2,\ldots,p}\,\mu(t) = \mathcal{P}_{0,1,\ldots,p-1}\,\mu(t-\theta) \quad \text{c.s. en } [\theta,1], \tag{4.7}$$

donde $\mathcal{P}_{0,1,\ldots,p-1}$, $\mathcal{P}_{1,2,\ldots,p} : C(\Omega^{p+1})^* \to C(\Omega^p)^*$ y aplicadas a $\mu(t)$ denotan las proyecciones sobre las $(0,1,\ldots,p-1)$ y $(1,2,\ldots,p)$-ésimas componentes de $\mu(t)$, respectivamente.

La condición de compatibilidad (4.7) se puede expresar equivalentemente en términos de restricciones lineales continuas como

$$\int_\theta^1 dt \int \varphi(t,r_1,\ldots,r_p)\mu(t)(dr) = \int_\theta^1 dt \int \varphi(t,r_0,\ldots,r_{p-1})\mu(t-\theta)(dr)$$

para toda $\varphi \in L^1(T, C(\Omega^p))$ y $r = (r_0, r_1, \ldots, r_p)$.

Denotamos por

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s(p;\theta) &= \{\text{controles fuertemente relajados}\}\\ &= \{\mu \in \mathcal{M}(T,\Omega^{p+1}) \mid \mathcal{P}_{1,2,\ldots,p}\mu(t) = \mathcal{P}_{0,1,\ldots,p-1}\mu(t-\theta) \quad \text{c.s. en } [\theta,1]\}\end{aligned}$$

Un *proceso fuertemente relajado* y un *proceso fuertemente relajado admisible* se definen de manera similar a la definición 3.2. El problema (4.1) considerado como un problema de minimización sobre los procesos fuertemente relajados se llama el *problema fuertemente relajado*, y se denota por $(P)_{FR}$.

Si $\mu \in M_s(p;\theta)$ resulta de alguna función medible $\tilde{u} : T \to \Omega^{p+1}$, entonces las condiciones de compatibilidad (4.6) y (4.7) son equivalentes. Es claro entonces que $(P)_{FR}$ es una extensión de $(P)_o$. En Rosenblueth–Vinter [3] se prueba que $(P)_{FR}$ es una extensión propia de $(P)_o$ en el sentido de que el costo ínfimo para el problema original coincide con el costo mínimo para el problema fuertemente relajado. Esta es la única demostración que se ha logrado hasta ahora para probar que la técnica de relajamiento fuerte proporciona una extensión propia del problema original. Además, en la demostración se incluye una respuesta al problema de cómo los controles fuertemente relajados admisibles pueden estar asociados a los controles relajados admisibles para el problema reducido.

La existencia de una solución fuertemente relajada es una consecuencia directa de las hipótesis topológicas usuales sobre los datos del problema. Probar que el minimizador fuertemente relajado se puede aproximar con controles ordinarios, resultó ser muy complicado en esa demostración. La prueba de este último resultado se puede describir brevemente de la siguiente manera. Dado un control fuertemente relajado $\mu$, se recurre a condiciones conocidas acerca de la existencia de distribuciones de probabilidad cuyas distribuciones marginales satisfacen ciertas relaciones, para construir un control relajado $\hat{\mu}$ para el problema reducido. Luego se construye, usando la teoría de relajamiento clásico, un control retardado ordinario $\hat{u}$ para el problema reducido cuyo costo está arbitrariamente cerca del de $\hat{\mu}$. Un control ordinario para (4.1) cuyo costo está arbitrariamente cerca del de $\mu$ se obtiene vía el mapeo inverso 1-1 que existe entre los controles ordinarios para (4.1) y los controles ordinarios para el problema reducido.

Pasar de los procesos fuertemente relajados admisibles para (4.1) a los procesos relajados admisibles para (4.2) no es tan sencillo. Dado un proceso fuertemente relajado admisible $(x,\mu)$ para (4.1), se tiene que construir un control relajado $\hat{\mu}$ en $\mathcal{M}([0,\theta],\widehat{\Omega})$ tal que, si $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_N)$ se define como

$$\hat{x}_i(t) = x(t+i\theta), \quad \text{para } i = 0,1,\ldots,N \text{ y } t \in [0,\theta],$$

entonces $(\hat{x},\hat{\mu})$ es un proceso relajado admisible para (4.2). La construcción del control relajado $\hat{\mu}$ está basado en el siguiente resultado.

**Lema 4.1** Sea $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto y sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y $\mathcal{C}$ espacios métricos compactos. Supóngase que se dan $\mu \in \mathcal{M}(T, \mathcal{A}\times\mathcal{B})$ y $\nu \in \mathcal{M}(T, \mathcal{B}\times\mathcal{C})$ tales que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}\mu(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}\nu(t)$ c.s. en $T$. Entonces existe $\gamma \in \mathcal{M}(T, \mathcal{A}\times\mathcal{B}\times\mathcal{C})$ tal que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}\,\gamma(t) = \mu(t) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}\,\gamma(t) = \nu(t) \quad \text{c.s. en } T.$$

Este resultado es crucial para la construcción del control relajado $\hat{\mu}$ para el problema reducido. Es decir, empezando con $\mu \in \mathcal{M}(T, \Omega^{p+1})$ satisfaciendo las condiciones de compatibilidad (4.7), se aplica el lema 4.1 para construir $\gamma_1 \in \mathcal{M}([0, N\theta], \Omega^{p+2})$ tal que

$$\mathcal{P}_{0,1,\ldots,p}\gamma_1(t) = \mu(t+\theta) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_{1,2,\ldots,p+1}\gamma_1(t) = \mu(t) \quad \text{c.s. en } [0, N\theta].$$

Después de $N$ aplicaciones del lema 4.1 se obtiene $\gamma_N \in \mathcal{M}([0, \theta], \Omega^{N+p+1})$ y, definiendo $\hat{\mu}$ en términos de este control, se muestra que $(\hat{x}, \hat{\mu})$ es un proceso relajado admisible para (4.2).

La prueba del lema 4.1 está basado en un resultado conocido como "desintegración de medidas" (ver Dellacherie–Meyer [1]), cuyo uso tradicional ha sido proporcionar una definición de esperanzas condicionales. Una aplicación del teorema dado en Rosenblueth–Vinter [3] produce familias de medidas de probabilidad sobre la $\sigma$–álgebra de conjuntos de Borel en $\mathcal{A}$ y $C$ sobre los cuales la función $\gamma$ es construida. Sin embargo en la demostración de ese teorema se recurre a varios resultados sobre extensiones de conjuntos y de funciones cuya construcción puede no ser explícita. Este hecho impide que se pueda exhibir el control relajado $\hat{\mu}$, asegurando únicamente su existencia.

La técnica de relajamiento fuerte para problemas de control óptimo con retardos conmensurados, se puede resumir de la siguiente manera.

1) Relajar fuertemente el problema original.

2) Resolver el problema fuertemente relajado.

3) Asociar al mínimo fuertemente relajado un control relajado del problema reducido.

4) Usar la técnica de relajamiento vía el problema reducido para construir una sucesión de controles ordinarios que converge a la solución del problema reducido.

Como la técnica de relajamiento fuerte muestra explícitamente qué subconjunto del espacio de controles relajados clásicos da una extensión propia del problema con retardos (4.1), la dimensión de los espacios involucrados en el problema original no se altera cuando el conjunto de controles es fuertemente relajado, resolviendo de esta manera una de las desventajas de la técnica de relajamiento vía el problema reducido. Ademas, las condiciones que definen los elementos de $\mathcal{M}_s$ se pueden verificar fácilmente, en términos de proyecciones sobre las coordenadas de las funciones de control, de tal manera que este conjunto está caracterizado sin la necesidad de transformar el problema original. Por otra parte, en la demostración de que esta técnica de relajamiento es propia se resuelve el problema de cómo los controles fuertemente relajados admisibles pueden estar asociados a los controles relajados admisibles para el problema reducido. Sin embargo, a pesar de que se ha demostrado que la técnica de relajamiento fuerte es propia, no se pudo exhibir explícitamente una sucesión de controles ordinarios que aproximen a un control fuertemente relajado dado, asegurando únicamente su existencia. Además, se aplica únicamente a problemas con retardos conmensurados.

Las técnicas de relajamiento hasta aquí discutidas tienen una limitación en común que impiden su utilidad en la práctica. En todas las técnicas de relajamiento la pregunta de *existencia* de controles óptimos ha sido contestada afirmativamente, pero el problema de cómo aproximarlo no ha sido resuelto todavía. En otras palabras, todas las técnicas de relajamiento aseguran la existencia de un control relajado óptimo, pero ninguna de ellas da una metodología explícita para aproximarlo con una sucesión de controles retardados ordinarios. Este es un problema cuya solución es uno de los propósitos principales para relajar problemas de control óptimo.

En el siguiente capítulo se resolverá el problema común que presentan las técnicas de relajamiento, dando una prueba constructiva totalmente independiente de la técnica de relajamiento vía el problema reducido, para aproximar minimizadores fuertemente relajados con una sucesión de controles retardados ordinarios.

# 5. NECESIDAD DE UN NUEVO ALGORITMO

La técnica de relajamiento fuerte discutida en el capítulo anterior se probó en [3] que es propia. La demostración de este resultado se llevó a cabo utilizando resultados abstractos sobre "desintegración de medidas" así como de la técnica de relajamiento vía el problema reducido. Esta demostración se puede describir de la siguiente manera: dado un control fuertemente relajado $\mu$, construir un control relajado $\hat{\mu}$ para el problema reducido usando resultados abstractos sobre existencia de medidas con ciertas distribuciones marginales. Luego se construye un control ordinario $\tilde{u}$ para el problema reducido cuyo costo está arbitrariamente cerca del de $\hat{\mu}$. Usando el mapeo 1-1 que existe entre los procesos ordinarios admisibles para (4.1) y para los del problema reducido, se obtiene un control ordinario cuyo costo está arbitrariamente cerca del de $\mu$.

Sin embargo, esta demostración tiene varias limitaciones, desde el punto de vista teórico así como desde el punto de vista computacional, que impiden su utilidad en la práctica. En primer lugar, desde el punto de vista teórico, como es necesario utilizar la técnica del problema reducido se heredan las desventajas de la dimensión que tiene dicha técnica de relajamiento. En segundo lugar, si bien es cierto que desde el punto de vista teórico no es necesario reducir el problema original ni agrandar la dimensión de los espacios involucrados, desde el punto de vista computacional la aproximación requiere de dicha reducción, por el siguiente motivo. Si empezamos el algoritmo resolviendo el problema fuertemente relajado, el siguiente paso consistirá en asociar al minimizador fuertemente relajado un control relajado para el problema reducido. A continuación se usará la técnica del problema reducido para construir una sucesión de controles ordinarios que converge a la solución del problema reducido. Sin embargo, no se resolvió el problema de cómo aproximar un minimizador fuertemente relajado sin hacer uso del problema reducido. En tercer lugar, no se pudo llevar a cabo la construcción de un proceso relajado admisible para el problema reducido asociado a un proceso fuertemente relajado (a pesar de que el mapeo 1-1 que indica cómo pasar entre los dos problemas relajados está bien definido), asegurando únicamente su existencia.

Por lo tanto, uno de los objetivos de una técnica de relajamiento no se ha logrado todavía. En este capítulo se resolverán estos problemas, dando una metodología explícita, completamente independiente de la técnica de relajamiento vía el problema reducido, para aproximar un control fuertemente relajado arbitrario con una sucesión de controles ordinarios. En esta metodología se dará una nueva demostración de que los controles fuertemente relajados proporciona una extensión propia de los controles retardados ordinarios. Esta demostración es mucho más sencilla que la que se dió en Rosenblueth–Vinter [3], puesto que la sucesión convergente se construye directamente en terminos del control fuertemente relajado sin recurrir a los resultados sobre "desintegración de medidas" ni de la técnica de relajamiento vía el problema reducido. Además, esta metología muestra directamente que la técnica de relajamiento fuerte es propia en el sentido de que el espacio de controles fuertemente relajados coincide con la cerradura débil estrella del espacio de controles retardados ordinarios.

## 5.1 La técnica constructiva

La metodología constructiva está basada en el siguiente resultado, debido a Rosenblueth [5,6]. Para $\tilde{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_p) \in \mathbf{R}^{p+1}$, denotamos por

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_p(\theta) &= \{\text{controles retardados ordinarios para (4.1)}\}\\ &= \left\{\tilde{u} \in \mathcal{U}(T, \Omega^{p+1}) \mid (u_1, u_2, \ldots, u_p)(t) = (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})(t-\theta) \text{ c.s. en } [\theta, 1]\right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_p(\theta) &= \{\text{controles fuertemente relajados}\}\\ &= \left\{\mu \in \mathcal{M}(T, \Omega^{p+1}) \mid \mathcal{P}_{1,2,\ldots,p}\,\mu(t) = \mathcal{P}_{0,1,\ldots,p-1}\,\mu(t-\theta) \;\text{ c.s. en } [\theta, 1]\right\}.\end{aligned}$$

$$I_{s(i)} = \{1, 2, \ldots, s(i)\}, \quad \forall\, i \in \mathbf{N}.$$

**Teorema 5.1** El conjunto $\mathcal{M}_p(\theta)$ coincide con la cerradura del conjunto $\mathcal{U}_p(\theta)$.

*Demostración.* Por simplicidad se analiza primero el problema con un retardo en los controles ($p = 1$). Para este caso, dado $\theta \in (0,1]$ y $\tilde{u} = (u, v)$, el conjunto de controles ordinarios y el de controles fuertemente relajados están dados por

$$\mathcal{U}_1(\theta) = \left\{(u,v) \in \mathcal{U}(T,\Omega^2) \;\middle|\; v(t) = u(t-\theta) \quad \text{c.s. en } [\theta,1]\right\},$$

$$\mathcal{M}_1(\theta) = \left\{\mu \in \mathcal{M}(T,\Omega^2) \;\middle|\; \mathcal{P}_1\,\mu(t) = \mathcal{P}_0\,\mu(t-\theta) \quad \text{c.s. en } [\theta,1]\right\}.$$

Como en la demostración del Teorema 2.8, para $i \in \mathbb{N}$, se empieza particionando el conjunto $\Omega$ en conjuntos $R_k^i$ de diámetro a lo más $1/i$, para $k \in I_{k(i)}$, que son diferencias de conjuntos abiertos tales que

$$\Omega \times \Omega = \bigcup_{k,l=1}^{k(i)} R_k^i \times R_l^i.$$

De manera similar, partimos el intervalo $T$ en subintervalos disjuntos consecutivos $T_j^i$ de diámetro $\theta/i$, de la forma

$$T_j^i = \left[\frac{(j-1)\theta}{i}, \frac{j\theta}{i}\right), \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,j(i)$$

donde

$$j(i) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k\theta \geq i\}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Sea $\mu \in \mathcal{M}_1(\theta)$. Si es necesario, extendemos $\mu$ como

$$\mu(t) := \mathcal{P}_{1,0}\,\mu(t-\theta) \quad \forall\, t \in (1, j(1)\theta],$$

de tal manera que $\mathcal{P}_1\,\mu(t) = \mathcal{P}_0\,\mu(t-\theta)$ c.s. en $T' := [\theta, j(1)\theta]$. Para toda $i \in \mathbb{N}$, $j \in I_{j(i)}$ y $k, l \in I_{k(i)}$, definimos

$$\alpha_{j,k,l}^i := \int_{T_j^i} \mu(t)(R_k^i \times R_l^i)dt.$$

Como

$$\sum_{k,l=1}^{k(i)} \alpha_{j,k,l}^i = m(T_j^i), \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,j(i),$$

donde $m$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, podemos particionar cada subintervalo $T_j^i$ en subconjuntos $T_{j,k,l}^i$ de tal manera que $m(T_{j,k,l}^i) = \alpha_{j,k,l}^i$.

Para $k \in I_{k(i)}$, elegimos un punto $r_k^i \in R_k^i$ y definimos

$$(u_i(t), v_i(t)) = (r_k^i, r_l^i) \quad \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T_{j,k,l}^i, \quad \text{para } k, l \in I_{k(i)}.$$

Aplicando una prueba similar a la del Teorema 2.8, se prueba que

$$\lim_{i\to\infty} (u_i(t), v_i(t)) = \mu.$$

Hasta aquí se ha probado que la sucesión $\{(u_i, v_i\}$ converge a $\mu$, pero esta prueba no garantiza que sea una sucesión de controles ordinarios. En otras palabras, puede suceder que $(u_i(t), v_i(t))$ restringida a $T$ no pertenezcan a $\mathcal{U}_1(\theta)$. A continuación se probará que si $\mu$ es un control fuertemente relajado, se puede elegir el orden de los conjuntos $T_{j,k,l}^i$ de tal manera que $(u_i(t), v_i(t))$ sean controles ordinarios. Para ello sólo se requiere que los conjuntos $\{T_{j,k,l}^i\}$ sean conjuntos medibles disjuntos que satisfagan las siguientes propiedades:

$$m(T_{j,k,l}^i) = \alpha_{j,k,l}^i \tag{5.1}$$

$$\bigcup_{k,l=1}^{k(i)} T_{j,k,l}^i = T_j^i. \tag{5.2}$$

Para toda $i \in \mathbb{N}$, por construcción

$$T_j^i + \theta = T_{j+i}^i, \ \forall\, j = 1, 2, \ldots, j(i) - i.$$

Si se denota por $\mathcal{X}_A$ la función caracterítica de un conjunto $A$, y definimos

$$\varphi(t, s) := \mathcal{X}_{T_{j+i}^i \times R_k^i}(t, s), \quad \forall\, (t, s) \in T' \times \Omega,$$

entonces

$$\varphi(t + \theta, s) = \mathcal{X}_{T_j^i \times R_k^i}(t, s), \quad \forall\, (t, s) \in (T' - \theta) \times \Omega.$$

Como $\mu \in \mathcal{M}_1(\theta)$, esto implica que

$$\begin{aligned}
\int_{T_j^i} \mu(t)(R_k^i \times \Omega)dt &= \int_{T'-\theta} dt \int \varphi(t + \theta, r_0)\mu(t)(dr) \\
&= \int_{T'} dt \int \varphi(t, r_1)\mu(t)(dr) \\
&= \int_{T_{j+i}^i} \mu(t)(\Omega \times R_k^i)dt
\end{aligned}$$

de modo que

$$(5.3)\qquad \sum_{l=1}^{k(i)} \alpha^i_{j,k,l} = \sum_{l=1}^{k(i)} \alpha^i_{j+i,l,k}, \quad \forall\, i \in \mathrm{N},\ j = 1,2,\ldots,j(i)-i \ \text{ y } \ k \in I_{k(i)}.$$

Consideremos primero el caso $i = 1$. Elegimos conjuntos medibles disjuntos $\{T^i_{1,k,l}\}$, para $k, j \in I_{k(1)}$ con la propiedad (5.1) y (5.2). Si

$$A_{1,k} = \bigcup_{l=1}^{k(1)} T^1_{1,k,l}, \quad \text{para } k \in I_{k(1)},$$

definimos

$$B_{2,k} := A_{1,k} + \theta, \quad \text{para } k \in I_{k(1)}.$$

De la ecuación (5.3), se tiene que

$$m(B_{2,k}) = m(A_{1,k}) = \sum_{l=1}^{k(1)} \alpha^1_{1,k,l} = \sum_{l=1}^{k(1)} \alpha^1_{2,l,k},$$

lo que permite partir $B_{2,k}$ en subconjuntos $\{T^1_{2,l,k}\}_{l=1}^{k(1)}$ tales que

$$m(T^1_{2,l,k}) = \alpha^1_{2,l,k}$$

satisfaciendo así la condición (5.1). Como

$$\bigcup_{k=1}^{k(1)} B_{2,k} = \bigcup_{k=1}^{k(1)} (A_{1,k} + \theta) = T^1_1 + \theta = T^1_2,$$

estos conjuntos también satisfacen la condición (5.2).

Es importante observar que, si fijamos $k \in I_{k(1)}$, entonces $B_{2,k}$ es una traslación de $A_{1,k}$, pero los conjuntos $\{T^1_{1,k,l}\}_{j=1}^{k(1)}$ que cubren a $A_{1,k}$ son "intercambiados" y la cubierta de $B_{2,k}$ está dada por $\{T^1_{2,l,k}\}_{k=1}^{k(1)}$. Entonces $(u_1, v_1)$ es un control ordinario; es decir, satisface la relación $v_1(t) = u_1(t-\theta)$.

Esta es la idea básica de la construcción y, para un control relajado arbitrario $\mu \in \mathcal{M}(T, \Omega^{p+1})$, esta construcción puede no ser posible. En otras palabras, se puede lograr sólo porque $\mu$ es un control fuertemente relajado.

Por inducción, construimos, para $j = 2, 3, \ldots, j(1) - 1$,

$$A_{j,k} := \bigcup_{l=1}^{k(1)} T^1_{j,k,l}, \quad \text{y} \quad B_{j+1,k} := A_{j,k} + \theta, \quad \text{para } k \in I_{k(1)}.$$

Como antes, como

$$m(B_{j+1,k}) = m(A_{j,k}) = \sum_{l=1}^{k(1)} \alpha^1_{j,k,l} = \sum_{l=1}^{k(1)} \alpha^1_{j+1,l,k}$$

podemos particionar $B_{j+1,k}$ en subconjuntos $\{T^1_{j+1,l,k}\}_{l=1}^{k(1)}$ con las propiedades (5.1) y (5.2).

Ahora, recuérdese que

$$(u_1(t), v_1(t)) = (r^1_k, r^1_l), \ \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{j(1)} T^1_{j,k,l}, \text{ para } k \in I_{k(1)}.$$

Tómese $t \in [\theta, 1]$ y sean $j \in \{2, \ldots, j(1)\}$ tal que $t \in T^1_j$ y $k \in I_{k(1)}$ tales que

$$t \in B_{j,k} = \bigcup_{l=1}^{k(1)} T^1_{j,l,k}.$$

Obsérvese que

$$t - \theta \in A_{j-1,k} = \bigcup_{l=1}^{k(1)} T^1_{j-1,k,l}.$$

Por lo tanto,

$$v_1(t) = r^1_k = u_1(t - \theta),$$

demostrando que $(u_1, v_1)$ restringido a $T$ pertenece a $\mathcal{U}_1(\theta)$.

La prueba para $i > 1$ es similar. Se empieza eligiendo conjuntos medibles disjuntos $T^i_{j,k,l}$, para $j = 1, 2, \ldots, i$ y $k, l \in I_{k(i)}$, con las propiedades (5.1) y (5.2). Definiendo

$$A_{j,k} := \bigcup_l T^i_{j,k,l} \quad \text{y} \quad B_{j+i,k} := A_{j,k} + \theta, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, i$$

se particiona $B_{j+i,k}$ en subconjuntos $\{T^i_{j+i,l,k}\}_l$ satisfaciendo

$$m(T^i_{j+i,l,k}) = \alpha^i_{j+i,l,k}, \quad \text{para } l, k \in I_{k(i)}.$$

Por inducción se definen, para $j = i+1, \ldots, j(i) - i$,

$$A_{j,k} := \bigcup_l T^i_{j,k,l} \quad \text{y} \quad B_{j+i,k} := A_{j,k} + \theta,$$

particionando $B_{j+i,k}$ como antes. Si $t \in [\theta, 1]$ entonces, para alguna $j \in \{i+1, i+2, \ldots, j(i)\}$ y $k \in I_{k(i)}$,

$$t \in B_{j,k} = \bigcup_l T^i_{j,l,k} \quad \text{y} \quad t - \theta \in A_{j-i,k} = \bigcup_l T^i_{j-i,k,l}$$

de modo que

$$v_i(t) = r^i_k = u_i(t-\theta).$$

Esto prueba que $(u_i, v_i)$ restringido a $T$ pertenece a $\mathcal{U}_1(\theta)$.

Para problemas que involucran varios retardos, se definen los conjuntos $R^i_k, T^i_j$ y $T'$ de manera similar, y $\mu \in \mathcal{M}_p(\theta)$. Extendemos $\mu$ de tal manera que

$$\mathcal{P}_{1,2,\ldots,p}\, \mu(t) = \mathcal{P}_{0,1,\ldots,p-1}\, \mu(t-\theta) \quad \text{c.s. en } T'$$

y definimos

$$\alpha^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p} := \int_{T^i_j} \mu(t)(R^i_{k_0} \times \cdots \times R^i_{k_p})dt$$

donde $i \in \mathbb{N}$, $j \in I_{j(i)}$ y $k_0, k_1, \ldots, k_p \in I_{k(i)}$. Particionando cada $T^i_j$ en subconjuntos $T^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p}$ tales que

$$m(T^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p}) = \alpha^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p} \tag{5.4}$$

y asignando

$$(u^0_i(t), u^1_i(t), \ldots, u^p_i(t)) = (r^i_{k_0}, r^i_{k_1}, \ldots, r^i_{k_p}) \quad \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T^i_{j,k_0,\ldots,k_p}$$

donde

$$r^i_k \in R^i_k, \quad \forall\, k \in I_{k(i)}.$$

Entonces

$$\lim_{i\to\infty} (u^0_i(t), u^1_i(t), \ldots, u^p_i(t)) = \mu.$$

La demostración de que se puede encontrar una partición de los conjuntos $T_j^i$ tal que la sucesión de funciones medibles $\tilde{u}_i = (u_i^0, \ldots, u_i^p)$ pertenece a $\mathcal{U}_p(\theta)$, será estabecida solamente para el caso $i = 1$. Como en el caso de un retardo, no surgen dificultades al extender la partición para toda $i \in \mathbf{N}$.

Como $\mu \in \mathcal{M}_p(\theta)$, se tiene

$$\sum_{k_p=1}^{k(i)} \alpha^i_{j,k_0,\ldots,k_p} = \sum_{k_p=1}^{k(i)} \alpha^i_{j+1,k_p,k_0,\ldots,k_{p-1}}. \tag{5.5}$$

Elegir conjuntos medibles disjuntos $T^1_{1,k_0,\ldots,k_p}$ cuya unión sea $T_1^1$ y con la propiedad (5.4). Construir inductivamente conjuntos

$$A_{j,k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}} = \bigcup_{k_p} T^1_{j,k_0,\ldots,k_p} \quad \text{y} \quad B_{j+1,k_0,\ldots,k_{p-1}} = A_{j,k_0,\ldots,k_{p-1}} + \theta$$

tales que $\{T^1_{j+1,k_p,k_0,\ldots,k_{p-1}}\}_{k_p}$ sea una partición de $B_{j+1,k_0,\ldots,k_{p-1}}$ y, por la ecuación (5.5), satisfacen $m(T^1_{j+1,k_p,k_0,\ldots,k_{p-1}}) = \alpha^1_{j+1,k_p,k_0,\ldots,k_{p-1}}$.

Ahora, dado $T \in [\theta, 1]$,

$$t \in B_{j,k_0,\ldots,k_{p-1}} = \bigcup_{k_p} T^1_{j,k_p,k_0,\ldots,k_{p-1}}$$

para alguna $j \in \{2, 3, \ldots, j(1)\}$ y $k_0, \ldots, k_{p-1} \in I_{k(1)}$. Así,

$$t - \theta \in A_{j-1,k_0,\ldots,k_{p-1}} = \bigcup_{k_p} T^1_{j-1,k_0,\ldots k_p}$$

implicando que

$$(u_1^1(t), u_1^2(t), \ldots, u_1^p(t)) = (r^1_{k_0}, r^1_{k_1}, \ldots, r^1_{k_{p-1}})(u_1^0, u_1^1, \ldots, u_1^{p-1})(t - \theta).$$

Esto demuestra que $(u_1^0, u_1^1, \ldots, u_1^p)$ restringido a $T$ pertenece a $\mathcal{U}_p(\theta)$.

Los diferentes pasos de la técnica constructiva se puede resumir en el siguiente algoritmo.

**Algoritmo 5.1** (Técnica constructiva). Dados $T \subset \mathbf{R}^n$, $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ conjuntos compactos, $p$ el número de retardos, $\theta \in (0, 1/p]$ y un control fuertemente relajado $\mu \in \mathcal{M}_p(\theta)$. El siguiente algoritmo calcula una sucesión de controles ordinarios $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$ que converge a $\mu$.

1) Sea $i \in \mathbf{N}$

2) Particionar $\Omega$ en conjuntos $R_k^i$ de diámetro a lo más $1/i$, para $k = 1, 2, \ldots, k(i)$.

3) Particionar $T$ en subintervalos de diámetro a lo más $\theta/i$:

$$T_j^i = \left[\frac{(j-1)\theta}{i}, \frac{j\theta}{i}\right), \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, j(i).$$

4) Para $j = 1, \ldots, j(i)$ y $k_0, k_1, \ldots, k_p = 1, 2, \ldots, k(i)$, calcular

$$\alpha^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p} = \int_{T_j^i} \mu(t)(R^i_{k_0} \times R^i_{k_1} \times \cdots \times R^i_{k_p})dt.$$

5) Particionar cada $T_j^i$ en subconjuntos consecutivos $T^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p}$ de tal manera que

$$m(T^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p}) = \alpha^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p}$$

para $j = 1, 2, \ldots, j(i)$ y $k_0, k_1, \ldots, k_p = 1, 2, \ldots, k(i)$.

6) Para $k = 1, 2, \ldots, k(i)$, elegir un punto $r_k^i \in R_k^i$ y asignar

$$\{\tilde{u}_i(t)\} = (r^i_{k_0}, r^i_{k_1}, \ldots, r^i_{k_p}) \quad \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p}$$

7) Para $j = 1, 2, \ldots, i$ construir los conjuntos $\{A_{j,k_0,\ldots,k_{p-1}}, B_{j+1,k_0,\ldots,k_{p-1}}\}$ donde

$$A_{j,k_0,\ldots,k_{p-1}} = \bigcup_{k_p} T^i_{j,k_0,k_1,\ldots,k_p}$$

$$B_{j+1,k_0,\ldots,k_{p-1}} = A_{j,k_0,\ldots,k_{p-1}} + \theta$$

para $k_0, k_1, \ldots, k_p = 1, 2, \ldots, k(i)$.

8) Para $j = 1, 2, \ldots, i$ particionar $B_{j+i,k_0,\ldots,k_{p-1}}$ en subconjuntos $T^i_{j+i,k_p,k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}}$ de tal manera que

$$m(T^i_{j+i,k_p,k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}}) = \alpha^i_{j+i,k_p,k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}}$$

para $k_0, k_1, \ldots, k_p = 1, 2, \ldots, k(i)$.

9) Para $j = i+1, i+2, \ldots, j(i) - i$ construir los conjuntos $\{A_{j,k_0,\ldots,k_{p-1}}, B_{j+i,k_0,\ldots,k_{p-1}}\}$, para $k_0, k_1, \ldots, k_{p-1} = 1, 2, \ldots, k(i)$.

10) Particionar $B_{j+i,k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}}$ en subconjuntos $T^i_{j+i,k_p,k_0,\ldots,k_{p-1}}$ de tal manera que

$$m(T^i_{j+i,k_p,k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}}) = \alpha^i_{j+i,k_p,k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}}$$

para $j = i+1, \ldots, j(i) - i$ y $k_0, k_1, \ldots, k_{p-1} = 1, 2, \ldots, k(i)$.

## 5.2 Ejemplos numéricos

En esta sección se dan varios ejemplos de controles fuertemente relajados constantes con uno y dos retardos conmensurables, en los cuales se compara la nueva metodología constructiva con las técnicas de relajamiento discutidas en el capítulo anterior, para aproximar estos controles con una sucesión de controles retardados ordinarios. Se explica, además, porque sólo una de ellas es útil desde el punto de vista computacional. Para todos los ejemplos se tiene $T = \Omega = [0,1]$.

Los siguientes ejemplos pertenecen a un control fuertemente relajado de la forma

$$\mu(t) = c_1\delta(0,0) + c_2\delta(0,1) + c_3\delta(1,0) + c_4\delta(1,1).$$

donde $0 \leq c_j \leq 1$ y $\sum_{j=1}^{4} c_j = 1$. Puesto que $\mu$ es un control fuertemente relajado, se sigue que

$$(c_1 + c_2)\delta(0) + (c_3 + c_4)\delta(1) = (c_1 + c_3)\delta(0) + (c_2 + c_4)\delta(1)$$

implicando que $c_2 = c_3$. Por consiguiente, $\mu$ será un control fuertemente relajado $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{4} c_i = 1, 0 \leq c_i \leq 1$ y $c_2 = c_3$. Para estos ejemplos tratamos con un retardo $\theta = 1/2$. Para este caso el conjunto de controles ordinarios y el de controles fuertemente relajados están dados por

$$\mathcal{U}_1(1/2) = \{(u,v) \in \mathcal{U}(T,\Omega^2) \mid v(t) = u(t-1/2) \quad \text{c.s. en } [1/2,1]\},$$

$$\mathcal{M}_1(1/2) = \{\mu \in \mathcal{M}(T,\Omega^2) \mid \mathcal{P}_1\,\mu(t) = \mathcal{P}_0\,\mu(t-1/2) \quad \text{c.s. en } [1/2,1]\},$$

respectivamente.

La técnica de relajamiento vía el problema reducido no se puede aplicar en estos ejemplos porque no está relacionada con controles fuertemente relajados en $\mathcal{M}(T,\Omega^2)$, ya que esta técnica asocia controles relajados solamente a controles retardados ordinarios.

Como se mencionó en el capítulo anterior, para problemas con un retardo la técnica de relajamiento débil coincide con la técnica de relajamiento fuerte. Siguiendo la demostración de la Proposición 5 dada en [3], se asocia a un control fuertemente relajado $\mu \in \mathcal{M}(T,\Omega^2)$, un control relajado (reducido) $\hat{\mu} \in \mathcal{M}([0,1/2],\Omega^3)$ con la propiedad,

$$\mathcal{P}_{1,0}\hat{\mu}(t) = \mu(t) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_{2,1}\hat{\mu}(t) = \mu(t+1/2), \qquad \text{c.s. en } [0,1/2].$$

Aplicando la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos, se construye una sucesión $\{\hat{u}^i\} \subset \mathcal{U}([0,1/2],\Omega^3)$ de controles ordinarios reducidos que converge a $\hat{\mu}$. Si se denota a $\hat{u}_i$ por $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)$, entonces la sucesión deseada $\{(u_i, v_i)\} \subset \mathcal{U}_1(1/2)$ de controles ordinarios con retardos que converge a $\mu$ se obtiene definiendo

$$(u_i(t), v_i(t)) = \begin{cases} (\hat{u}_1^i(t), \hat{u}_0^i(t)) & \text{si } t \in [0,1/2), \\ (\hat{u}_2^i(t-1/2), \hat{u}_1^i(t-1/2)) & \text{si } t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Para la técnica constructiva, se empieza, para toda $i \in \mathbf{N}$, particionado $\Omega$ en conjuntos disjuntos $R_k^i$ de diámetro a lo más $1/i$, por ejemplo,

$$R_k^i = \begin{cases} [0, \frac{1}{i+1}] & \text{para } k = 1 \\ (\frac{k-1}{i+1}, \frac{k}{i+1}] & \text{para } k = 2,3,\ldots,i+1. \end{cases}$$

Se particiona el intervalo $T$ en subintervalos $T_j^i$ definiendo

$$T_j^i = \left[\frac{(j-1)}{2i}, \frac{j}{2i}\right), \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,2i$$

y se calcula, para $j = 1,2,\ldots,2i$ y $k,l = 1,2,\ldots,i+1$

$$\alpha_{j,k,l}^i = \int_{T_j^i} \mu(t)(R_k^i \times R_l^i)dt.$$

Se particiona cada $T_j^i$ en subconjuntos consecutivos $T_{j,k,l}^i$ de tal manera que $m(T_{j,k,l}^i) = \alpha_{j,k,l}^i$ y se elige, para $k = 1,2,\ldots,i+1$, un punto $r_k^i \in R_k^i$. Definiendo

$$(u_i(t), v_i(t)) = (r_k^i, r_l^i) \quad \forall t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T_{j,k,l}^i, \qquad k,l = 1,2,\ldots,i+1$$

la sucesión de controles en $\mathcal{U}(T,\Omega^2)$, se sigue que $\lim_i (u_i, v_i) = \mu$. Como se demostró en el Teorema 5.1, como $\mu$ es un control fuertemente relajado implica que

$$\int_{T_j^i} \mu(t)(R_k^i \times \Omega)dt = \int_{T_{j+i}^i} \mu(t)(\Omega \times R_k^i)dt$$

y esto permite reordenar la sucesión de intervalos $T_{j,k,l}^i$ de tal manera que las funciones $(u_i, v_i)$ satisfagan las condiciones de compatibilidad $v_i(t) = u_i(t-1/2)$, c.s. en $[1/2,1]$.

Para representar algunos elementos de la sucesión $\{\tilde{u}_i(t)\} = \{(u_i, v_i)\}$ obtenidos con la técnica constructiva se usan tablas con dos líneas. La primera línea representa el valor de $u_i$ y la segunda representa el valor de $v_i$, ambas en el intervalo $[0,1]$. En cada tabla el área sombreada corresponde al valor 1, mientras que el área en blanco corresponde al valor 0 de la sucesión $\{(u_i, v_i)\}$. Además, en cada tabla se representan los conjuntos $T_j^i$ así como su correspondiente partición $T_{j,k,l}^i$.

**Ejemplo 5.1** Considérese la función

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\,\delta(0,0) + \frac{1}{2}\,\delta(1,1) \qquad (t \in [0,1]).$$

Para aplicar la técnica de relajamiento fuerte, considérese la función

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{2}\,\delta(0,0,0) + \frac{1}{2}\,\delta(1,1,1) \qquad (t \in [0,1/2]).$$

Claramente, esta función pertenece a $\mathcal{M}([0,1/2],\Omega^3)$ y satisface

$$\mathcal{P}_{1,0}\,\hat{\mu}(t) = \mu(t) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{P}_{2,1}\,\hat{\mu}(t) = \mu(t+1/2) \quad \text{c.s. en } [0,1/2].$$

Aplicando la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos se obtiene una sucesión $\{\hat{u}^i\}$ que converge a $\hat{\mu}$. Esta sucesión toma alternadamente los valores $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$ en intervalos consecutivos de longitud $1/(4i)$. La sucesión asociada $\{(u_i, v_i)\} \subset \mathcal{U}_1(1/2)$ que converge a $\mu$ toma alternadamente los valores $(0,0)$ y $(1,1)$ en intervalos consecutivos también de longitud $1/(4i)$.

La técnica constructiva no requiere pasar del espacio de controles relajados $\mathcal{M}(T,\Omega^2)$ a $\mathcal{M}([0,1/2],\Omega^3)$. Para este ejemplo se tiene, para toda $i \in \mathbb{N}$ y $j = 1,2,\ldots,2i$

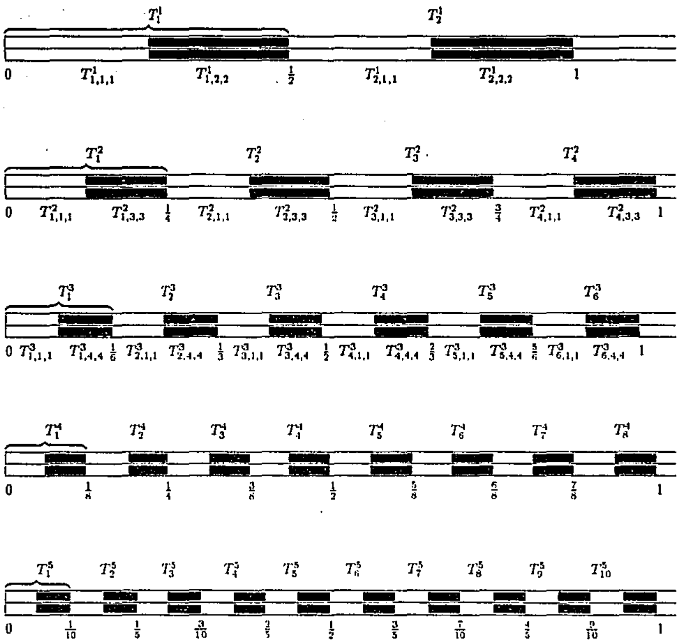
$$\alpha_{j,k,l}^i = \begin{cases} 1/(4i) & \text{si } k = l \in \{1, i+1\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La sucesión $\{(u_i, v_i)\}$ en $\mathcal{U}_1(1/2)$ que converge a $\mu$ se obtiene definiendo

$$(u_i(t), v_i(t)) = \begin{cases} (0,0) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T_{j,1,1}^i, \\ (1,1) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T_{j,i+1,i+1}^i. \end{cases}$$

donde $\{T_{j,1,1}^i, T_{j,i+1,i+1}^i\}$ para $j = 1,2,\ldots,2i$ son intervalos consecutivos de longitud $1/(4i)$. En la siguiente figura se representan algunos elementos de esta sucesión.

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(0,0) + \frac{1}{2}\delta(1,1), \qquad \theta = \frac{1}{2}$$



**Ejemplo 5.2** Considérese la función

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(0,1) + \frac{1}{2}\delta(1,0) \qquad (t \in [0,1]).$$

Para aplicar la técnica de relajamiento fuerte, considérese la función

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{2}\,\delta(1,0,1) + \frac{1}{2}\,\delta(0,1,0) \qquad (t \in [0,1/2]).$$

Como en el ejemplo anterior, $\hat{\mu}$ satisface $\mathcal{P}_{j+1,j}\hat{\mu}(t) = \mu(t+j/2)$ para $j = 0,1$. Al utilizar la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos se obtiene una sucesión $\{\hat{u}^i\}$ en $\mathcal{U}([0,1/2],\Omega^3)$ que converge a $\hat{\mu}$. Esta sucesión toma alternadamente los valores $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$ en intervalos consecutivos de longitud $1/(4i)$. La sucesión asociada $\{(u_i,v_i)\} \subset \mathcal{U}_1(1/2)$ que converge a $\mu$ toma entonces alternadamente los valores $(0,1)$ y $(1,0)$ en $[0,1/2]$ y los valores $(1,0)$ y $(0,1)$ en $[1/2,1]$ en intervalos consecutivos de longitud $1/(4i)$.

Para la técnica constructiva se tiene, para toda $i \in \mathrm{N}$ y $j = 1,2,\ldots,2i$

$$\alpha^i_{j,k,l} = \begin{cases} 1/(4i) & \text{si } k \neq l \in \{1, i+1\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $\{T^i_{j,1,i+1}, T^i_{j,i+1,1}\}$ para $j = 1,2,\ldots,i$ corresponde a intervalos consecutivos de longitud $1/(4i)$, se define

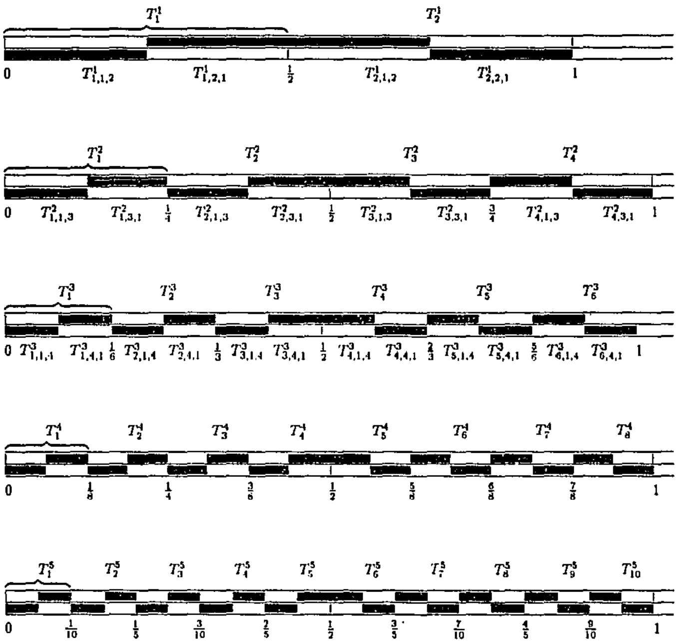
$$T^i_{j,1,i+1} = T^i_{j-i,1,i+1} + 1/2 \quad \text{y} \quad T^i_{j,i+1,1} = T^i_{j-i,i+1,1} + 1/2$$

para toda $j = i+1, i+2, \ldots, 2i$. La sucesión $\{(u_i,v_i)\}$ dada por

$$(u_i(t), v_i(t)) = \begin{cases} (0,1) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T^i_{j,1,i+1}, \\ (1,0) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T^i_{j,i+1,1} \end{cases}$$

converge a $\mu$ y satisface las condiciones de compatibilidad $v_i(t) = u_i(t-1/2)$ c.s. en $[1/2,1]$. En la siguiente figura se representan algunos elementos de esta sucesión. En esta figura se puede observar el "intercambio" de los conjuntos $T^j_{j,k,l}$ que se efectuaron para que la sucesión $\{\hat{u}_i(t)\}$ satisfaga las condiciones de compatibilidad.

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(0,1) + \frac{1}{2}\delta(1,0), \qquad \theta = \frac{1}{2}$$



**Ejemplo 5.3** Considérese la función

$$\mu(t) = \frac{1}{4}\delta(0,0) + \frac{3}{8}\delta(0,1) + \frac{3}{8}\delta(1,0) \qquad (t \in [0,1]).$$

Para aplicar la técnica de relajamiento fuerte, considérese la función

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{4}\delta(0,0,0) + \frac{3}{8}\delta(0,1,0) + \frac{3}{8}\delta(1,0,1) \qquad (t \in [0,1/2]).$$

Como en el ejemplo anterior, $\hat{\mu}$ satisface $\mathcal{P}_{j+1,j}\hat{\mu}(t) = \mu(t + j/2)$ para $j = 0,1$. Al utilizar la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos se obtiene una sucesión $\{\hat{u}^i\}$ en $\mathcal{U}([0,1/2],\Omega^3)$ que converge a $\hat{\mu}$. Esta sucesión toma alternadamente los valores $(0,0,0)$ en intervalos consecutivos de longitud $1/(8i)$ y (0,1,0) y (1,0,1) en intervalos consecutivos de longitud $3/(16i)$. La sucesión asociada $\{(u_i, v_i)\} \subset \mathcal{U}_1(1/2)$ que converge a $\mu$ toma entonces alternadamente los valores $(0,0), (0,1)$ y $(1,0)$ en $[0,1/2]$ y los valores $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$ en $[1/2,1]$ en intervalos consecutivos de longitud $1/(8i)$ o $3/(16i)$.

Para la técnica constructiva se tiene, para toda $i \in \mathbb{N}$ y $j = 1, 2, \ldots, 2i$

$$\alpha^i_{j,k,l} = \begin{cases} 1/(8i) & \text{si } k = l = 1, \\ 3/(16i) & \text{si } k \neq l \in \{1, i+1\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $\{T^i_{j,1,1}, T^i_{j,1,i+1}, T^i_{j,i+1,1}\}$ para $j = 1, 2, \ldots, i$ corresponden a intervalos consecutivos de longitud $1/(8i)$ o $3/(16i)$, se define

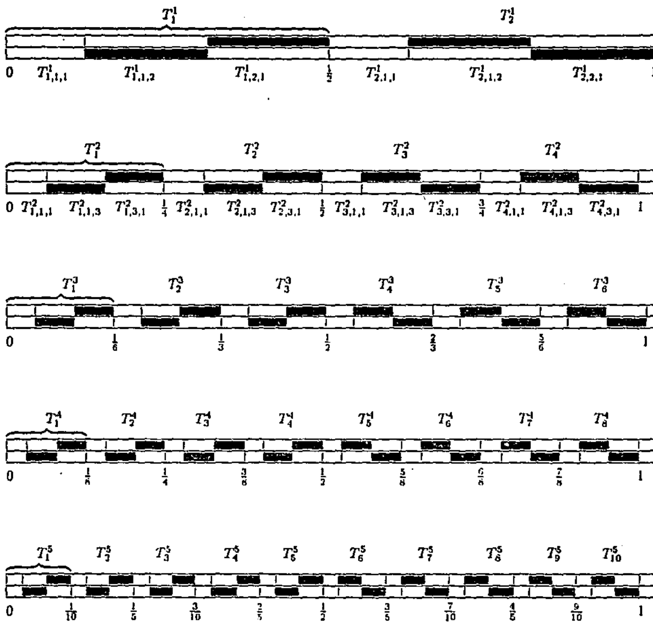
$$T^i_{j,1,1} = T^i_{j-i,1,1} + 1/2, \; T^i_{j,1,i+1} = T^i_{j-i,1,i+1} + 1/2 \;\text{ y }\; T^i_{j,i+1,1} = T^i_{j-i,i+1,1} + 1/2$$

para toda $j = i+1, i+2, \ldots, 2i$. La sucesión $\{(u_i, v_i)\}$ definida por

$$(u_i(t), v_i(t)) = \begin{cases} (0,0) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T^i_{j,1,1}, \\ (0,1) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T^i_{j,1,i+1}, \\ (1,0) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T^i_{j,i+1,1} \end{cases}$$

converge a $\mu$ y satisface las condiciones de compatibilidad $v_i(t) = u_i(t - 1/2)$ c.s. en $[1/2, 1]$. En la siguiente figura se representan algunos elementos de esta sucesión. Además, en cada tabla se ilustra el intercambio de los conjuntos $T^i_{j,k,l}$ que se efectuaron para que $\{\hat{u}_i(t)\}$ satisfaga las condiciones de compatibilidad.

$$\mu(t) = \frac{1}{4}\delta(0,0) + \frac{3}{8}\delta(0,1) + \frac{3}{8}\delta(1,0), \qquad \theta = \frac{1}{2}$$



**Ejemplo 5.4** Considérese la función

$$\mu(t) = \frac{3}{8}\delta(0,1) + \frac{3}{8}\delta(1,0) + \frac{1}{4}\delta(1,1) \qquad (t \in [0,1]).$$

Para aplicar la técnica de relajamiento fuerte, considérese la función

$$\mu(t) = \frac{3}{8}\delta(0,1,0) + \frac{3}{8}\delta(1,0,1) + \frac{1}{4}\delta(1,1,1) \qquad (t \in [0,1/2]).$$

Como en el ejemplo anterior, $\hat{\mu}$ satisface $\mathcal{P}_{j+1,j}\hat{\mu}(t) = \mu(t + j/2)$ para $j = 0,1$. Al utilizar la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos se obtiene una sucesión $\{\hat{u}^i\}$ en $\mathcal{U}([0,1/2],\Omega^3)$ que converge a $\hat{\mu}$. Esta sucesión toma alternadamente los valores $(0,1,0)$ y $(1,0,1)$ en intervalos consecutivos de longitud $3/(16i)$ y $(1,1,1)$ en intervalos consecutivos de longitud $1/(8i)$. La sucesión asociada $\{(u_i,v_i)\} \subset \mathcal{U}_1(1/2)$ que converge a $\mu$ toma entonces alternadamente los valores $(0,1),(1,0)$ y $(1,1)$ en $[0,1/2]$ y los valores $(1,0),(0,1)$ y $(1,1)$ en $[1/2,1]$ en intervalos consecutivos de longitud $3/(16i)$ o $1/(8i)$.

Para la técnica constructiva se tiene, para toda $i \in \mathbf{N}$ y $j = 1,2,\ldots,2i$

$$\alpha^i_{j,k,l} = \begin{cases} 3/(16i) & \text{si } k \neq l \in \{1, i+1\}, \\ 3/(16i) & \text{si } k = l = i+1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $\{T^i_{j,1,i+1}, T^i_{j,i+1,1}, T^i_{j,i+1,i+1}\}$ para $j = 1,2,\ldots,i$ corresponde a intervalos consecutivos de longitud $3/(16i)$ o $1/(8i)$, se define

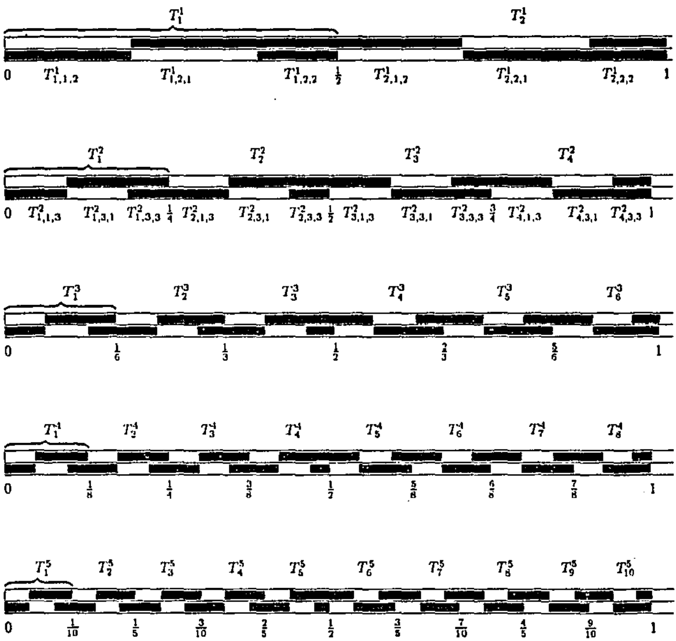
$$T^i_{j,1,i+1} = T^i_{j-i,1,i+1} + 1/2,\ T^i_{j,i+1,1} = T^i_{j-i,i+1,1} + 1/2 \ \text{ y } \ T^i_{j,i+1,i+1} = T^i_{j-i,i+1,i+1} + 1/2$$

para toda $j = i+1, i+2, \ldots, 2i$. La sucesión $\{(u_i,v_i)\}$ dada por

$$(u_i(t), v_i(t)) = \begin{cases} (0,1) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T^i_{j,1,i+1}, \\ (1,0) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T^i_{j,i+1,1}, \\ (1,1) & \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{2i} T^i_{j,i+1,i+1} \end{cases}$$

converge a $\mu$ y satisface las condiciones de compatibilidad $v_i(t) = u_i(t - 1/2)$ c.s. en $[1/2,1]$. En la siguiente figura se representan algunos elementos de esta sucesión, así como los intercambios de los conjuntos $T^i_{j,k,l}$ que se efectuaron para que la sucesión satisfaga las condiciones de compatibilidad.

$$\mu(t) = \frac{3}{8}\delta(0,1) + \frac{3}{8}\delta(1,0) + \frac{1}{4}\delta(1,1), \qquad \theta = \frac{1}{2}$$



Los siguientes ejemplos pertenecen a un control fuertemente relajado de la forma

$$\mu(t) = c_1\delta(0,0,0) + c_2\delta(0,1,0) + c_3\delta(1,0,1) + c_4\delta(1,1,1).$$

Para estos ejemplos tratamos con dos retardos conmensurados $1/4$ y $1/2$. En este caso el conjunto de controles ordinarios y el de controles fuertemente relajados están dados por

$$\mathcal{U}_2(1/4,1/2) = \left\{(u,v,w) \in \mathcal{U}(T,\Omega^3) \mid (v,w)(t) = (u,v)(t-1/4) \quad \text{c.s. en} \quad [1/4,1]\right\},$$

$$\mathcal{M}_2(1/4,1/2) = \left\{\mu \in \mathcal{M}(T,\Omega^3) \mid \mathcal{P}_{1,2}\,\mu(t) = \mathcal{P}_{0,1}\,\mu(t-1/4) \quad \text{c.s. en} \quad [1/4,1]\right\},$$

respectivamente.

Como en los ejemplos anteriores, la técnica de relajamiento vía el problema reducido no se puede aplicar en estos ejemplos porque no está relacionada con controles fuertemente relajados en $\mathcal{M}(T,\Omega^3)$. La técnica de relajamiento débil tampoco se puede aplicar porque, como se mencionó en el capítulo anterior, para problemas con dos retardos esta técnica de relajamiento no proporciona una extensión propia del problema original.

La técnica de relajamiento fuerte resuelve estos problemas. Siguiendo la demostración dada en [3] de que la técnica de relajamiento es propia, se asocia a un control fuertemente relajado $\mu \in \mathcal{M}_2([1/4,1/2])$, un control relajado (reducido) $\hat{\mu} \in \mathcal{M}([0,1/4],\Omega^6)$ con la propiedad, c.s. en $[0,1/4]$, $\mathcal{P}_{2,1,0}\hat{\mu}(t) = \mu(t)$, $\mathcal{P}_{3,2,1}\hat{\mu}(t) = \mu(t+1/4)$, $\mathcal{P}_{4,3,2}\hat{\mu}(t) = \mu(t+1/2)$, y $\mathcal{P}_{5,4,3}\hat{\mu}(t) = \mu(t+3/4)$. Basado en la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos, se construye una sucesión $\{\hat{u}^i\} \subset \mathcal{U}([0,1/4],\Omega^6)$ de controles ordinarios reducidos que converge a $\hat{\mu}$. Si se denota a $\hat{u}_i$ por $(\hat{u}_0^i,\hat{u}_1^i,\ldots,\hat{u}_5^i)$, entonces la sucesión deseada $\{(u_i,v_i,w_i)\} \subset \mathcal{U}_2(1/4,1/2)$ de controles ordinarios con retardos que converge a $\mu$ se obtiene definiendo

$$(u_i(t),v_i(t),w_i(t)) = (\hat{u}^i_{j+2}(t-j/4),\hat{u}^i_{j+1}(t-j/4),\hat{u}^i_j(t-j/4))$$

para $t \in [j/4,(j+1)/4)$ y $j = 0,1,2,3$.

Para la técnica constructiva se empieza, como en los ejemplos anteriores, particionando $\Omega$ en conjuntos $R^i_k$, para $k = 1,2,\ldots,i+1$. Se particiona también el intervalo $T$ en subintervalo $T^i_j$, definiendo

$$T^i_j = \left[\frac{(j-1)}{4i},\frac{j}{4i}\right), \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,4i$$

y se calcula, para $j = 1, 2, \ldots, 4i$ y $k, l, m = 1, 2, \ldots, i+1$

$$\alpha^i_{j,k,l,m} = \int_{T^i_j} \mu(t)(R^i_k \times R^i_l \times R^i_m)dt.$$

Se particiona cada $T^i_j$ en subconjuntos consecutivos $T^i_{j,k,l,m}$ de tal manera que $m(T^i_{j,k,l,m}) = \alpha^i_{j,k,l,m}$ y se elige, para $k = 1, 2, \ldots, i+1$, un punto $r^i_k \in R^i_k$. Definiendo

$$(u_i(t), v_i(t), w_i(t)) = (r^i_k, r^i_l, r^i_m) \quad \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{4i} T^i_{j,k,l,m}, \quad k, l, m = 1, 2, \ldots, i+1$$

se sigue que $\lim_i (u_i, v_i, w_i) = \mu$. Finalmente, como se demostró en el Teorema 5.1, el hecho de que $\mu$ sea un control fuertemente relajado implica que

$$\int_{T^i_j} \mu(t)(R^i_k \times R^i_l \times \Omega)dt = \int_{T^i_{j+i}} \mu(t)(\Omega \times R^i_k \times R^i_l)dt$$

lo cual permite reordenar la sucesión de intervalos $T^i_{j,k,l,m}$ de tal manera que las funciones $(u_i, v_i, w_i)$ satisfagan las condiciones de compatibilidad $(v_i, w_i)(t) = (u_i, v_i)(t - 1/4)$, c.s. en $[1/4, 1]$.

Como en los ejemplos anteriores, con el fin de representar algunos elementos de la sucesión $\{\bar{u}_i(t)\} = \{(u_i, v_i, w_i)\}$ obtenidos con la técnica constructiva se usan tablas con tres líneas. La primera línea representa el valor de $u_i$, la segunda representa el valor de $v_i$ y la tercera representa el valor de $w_i$, todas en el intervalo $[0, 1]$.

**Ejemplo 5.5** Considérese la función

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(0,0,0) + \frac{1}{2}\delta(1,1,1) \qquad (t \in [0,1]).$$

Para aplicar la técnica de relajamiento fuerte, sea

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{2}\delta(0,0,0,0,0,0) + \frac{1}{2}\delta(1,1,1,1,1,1) \qquad (t \in [0, 1/4]).$$

Claramente, esta función pertenece a $\mathcal{M}([0,1/4], \Omega^6)$ y satisface $\mathcal{P}_{j+2,j+1,j}\,\hat{\mu}(t) = \mu(t + j/4)$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Utilizando la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos se obtiene una sucesión $\{\hat{u}^i\}$ que converge a $\hat{\mu}$. Esta sucesión toma alternadamente