



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERIA

"ESTIMACION DEL ESPECTRO DE POTENCIA DE  
ANOMALIAS GEOELECTRICAS"

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO GEOFISICO  
P R E S E N T A :  
OSCAR EDUARDO ANDRADE ESTRADA

FACULTAD DE  
INGENIERIA



CIUDAD UNIVERSITARIA

1994

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVATARIA DE  
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-I-090

SR. OSCAR EDUARDO ANDRADE ESTRADA  
Presente.

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M. C. Andrés Tejero Andrade, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de ingeniero geofísico:

ESTIMACION DEL ESPECTRO DE POTENCIA DE ANOMALIAS GEOELECTRICAS

- I INTRODUCCION
- II TEORIA DE LOS METODOS ELECTRICOS DE CORRIENTE CONTINUA
- III FILTROS AUTORECURSIVOS
- IV FILTROS AUTORECURSIVOS DE PROMEDIOS MOVILES
- V FILTRADO POR MINIMOS CUADRADOS EN FRECUENCIAS
- VI APLICACIONES
- VII CONCLUSIONES  
BIBLIOGRAFIA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito par sustentar examen profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Ciudad Universitaria, 20 de diciembre de 1993  
EL DIRECTOR

  
ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS+EGLM\*gtg  


No hay ninguna otra especie en la Tierra que haga ciencia. Hasta ahora es una invención totalmente humana, que evoluciona por selección natural en la corteza cerebral por una sola razón: porque funciona. No es perfecta. Puede abusarse de ella. Es solo una herramienta, pero con mucho, es la mejor herramienta de que disponemos, que se autocorriga, que sigue funcionando, que se aplica a todo...

Carl Sagan, COSMOS.

A mamá Teté  
por los cuatro años que me concedió  
de dicha...

A papá Güero  
por su amor, su confianza y por el  
coraje de sacar adelante a sus hijos.  
Gracias de corazón.

A mi mami Cuquis y a Papá Max  
por aceptarnos en su hogar, sin  
distinciones y sin  
condiciones...Les debo una feliz  
infancia.

A mis padrinos, Marthita y Terán  
por su apoyo, sus consejos y por  
otorgarme momentos realmente  
agradables junto a ustedes.

A mis hermanos y sobrinos  
los quiero mucho.

A la memoria de mamá Rosita  
y de Sergio Daniel, donde  
quiera que se encuentren...

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco sinceramente a las siguientes personas, las cuales de alguna manera u otra, ayudaron en mi formación personal, profesional y en la elaboración de este trabajo:

Inga. Cynthia G. Martínez Leal, por su brillante intromisión en mi vida, haciendome ver las cosas de una forma muy especial.

M. C. Andrés Tejero Andrade, al que le reconozco el no pobre mérito de enseñarme a estudiar, a trabajar y a pensar.

Ing. Gilberto Silva Romo, quien me dió la confianza necesaria para continuar en esta carrera.

Ing. Raúl Cabrera Garzón, por sus valiosas opiniones al respecto de esta tesis.

Ingenieros Carlos Paredes y Felipe Zamora, a quienes les debo el tiempo otorgado, en horas laborables, a esta investigación.

Al departamento de Métodos Potenciales del Instituto Mexicano de Petroleo, al mando del M. C. Jaime Martínez Ramos, por su valioso apoyo y los recursos prestados para la elaboración de este trabajo.

A 'los volibolistas de los viernes': Cynthia, Emilio, Manuel Covarrubias, Martín, Roberto y Manuel Cruz, por ser tan buenos camaradas.

A Mundo y Chema, mis compañeros de aventuras.



## RESUMEN

En el presente estudio, se discute la aplicación de diferentes técnicas para el Análisis Espectral de Anomalías Geoeléctricas, en métodos de corriente continua, que permitan desarrollar nuevas técnicas interpretativas.

Entre los métodos de Análisis Espectral empleados se encuentran los procedimientos autorrecursivos (AR), donde se plantean las técnicas de Máxima Entropía y de Probabilidad Máxima, y los procedimientos autorrecursivos de promedios móviles (ARMA). Como un procedimiento alternativo, se empleó un filtrado de Wiener, en el dominio de las frecuencias, para obtener la estimación del espectro.

Las distintas técnicas fueron probadas, primeramente, en anomalías sintéticas y posteriormente en anomalías reales obtenidas durante una campaña de exploración para la detección de cuevas en la zona arqueológica de Teotihuacan.

Los resultados presentados muestran, que es factible realizar un Análisis Espectral para este tipo de señales obteniéndose una mayor confiabilidad en la interpretación y una significativa reducción de tiempo de proceso.

## INDICE

I	INTRODUCCION .....	1
II	TEORIA DE METODOS ELECTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA ...	3
	II.1 Definición.	
	II.2 Clasificación de los métodos eléctricos.	
	II.3 Métodos de resistividades.	
	II.3.1 Ecuaciones fundamentales del método resistivo.	
	II.3.2 Dispositivos electródicos Wenner y Dipolo-Dipolo.	
	II.3.3 Concepto de la resistividad aparente.	
III	MODELOS AUTORRECURSIVOS .....	15
	III.1 Desarrollo teórico.	
	III.2 Ecuaciones de Yule-Walker.	
	III.3 Análisis espectral por Máxima Entropía.	
	III.3.1 Concepto de entropía.	
	III.3.2 El método de Máxima Entropía.	
	III.3.3 Método de Yule-Walker.	
	III.3.4 Método de Burg.	
	III.3.5 Método de Covarianza Modificada.	
IV	MODELOS AUTORRECURSIVOS DE PROMEDIOS MOVILES .....	37
	IV.1 Desarrollo teórico.	
	IV.2 Estimación simultanea de los parámetros autorrecursivos (AR) y de promedios móviles (MA).	
	IV.3 Estimación de los parámetros autorrecursivos (AR) y de promedios móviles (MA) en forma separada.	
V	FILTRADO DE MINIMOS CUADRADOS EN FRECUENCIAS .....	44
	V.1 Teoría general de filtros.	
	V.2 Principio matemático del filtro de mínimos cuadrados.	
	V.3 Estimación espectral mediante el filtro de Wiener.	

<b>VI APLICACIONES .....</b>	<b>50</b>
<b>VI.1 Estimación espectral de anomalías eléctricas           sintéticas.</b>	
<b>VI.2 Prospecto Teotihuacan.</b>	
<b>VII CONCLUSIONES .....</b>	<b>100</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>102</b>

## I. INTRODUCCION

Los registros eléctricos son comunmente utilizados en la geotermia, minería, hidrogeología, geotecnia y, en tiempos recientes, en las ciencias ambientales y en la arqueología con buenos resultados. Pese a esta variedad de aplicaciones, existe una carencia de investigaciones en técnicas de procesado de datos geofísicos eléctricos. Esto implica que, en la mayoría de los casos, los registros eléctricos sean interpretados sin aplicarles antes algun tipo de filtrado que permita resaltar a la señal útil del ruido contaminante, con lo cual se podría mejorar de esta manera el resultado final de la interpretación.

Una técnica que ha sido de gran utilidad en el procesamiento de datos geofísicos, aplicada de manera importante a las señales sísmicas, es la del *Análisis Espectral* la cual realiza una caracterización del contenido de frecuencias de la señal a estudiar. La Estimación Espectral puede ser formulada en términos de tres modelos diferentes: *Autorrecursivos (AR)*, de *Promedios Móviles (MA)* y *Autorrecursivos de Promedios Móviles (ARMA)*. Cada modelo requiere un procedimiento de análisis diferente y del conocimiento de la naturaleza de los datos a procesar, si esto no se tomara en cuenta, se corre el riesgo de obtener resultados erróneos del análisis al aplicar el modelo inadecuado.

Los métodos denominados *Clásicos* de la Estimación Espectral se fundamentan en el modelo MA y se aplican mediante la Transformada de Fourier. Estos métodos han sido bien documentados por distintos textos, de los cuales cabe hacer mención el de Blackman y Tuckey [1958], y el de Jenkins y Watts [1968].

Sin embargo, el uso de la Transformada de Fourier no es el único ni el mejor medio para el cálculo del espectro. Esto es

debido principalmente a que estos métodos necesitan un número infinito de muestras para obtener el resultado óptimo. Como esto es imposible de obtener, se ha buscado la implementación de nuevas técnicas de análisis que presenten una mejor resolución de frecuencias en una serie finita y corta de datos. Esta es la gran ventaja que presentan las técnicas de los modelos AR y ARMA basados en *métodos paramétricos*.

Además de los métodos AR y ARMA utilizados en esta tesis, se implementó también el algoritmo del *Filtrado de Wiener* para ser aplicado a los espectros de potencia de las señales eléctricas.

Cada una de las técnicas utilizadas fueron analizadas con curvas sintéticas de resistividad para evaluar su eficiencia. Una vez realizado lo anterior, se implementaron estos métodos de estimación espectral a registros obtenidos de un estudio geoelectrico levantado en la zona arqueológica de Teotihuacan. Para este estudio, así como en la elaboración de las curvas sintéticas de resistividad, se utilizaron los arreglos Wenner y Dipolo-Dipolo.

## II. TEORIA DE LOS METODOS ELECTRICOS

### II.1 DEFINICION

El método eléctrico de prospección se ocupa del estudio de los campos electromagnéticos de la corteza terrestre, tanto los naturales como los provocados en la misma; con la subsecuente interpretación geológica en términos de las propiedades eléctricas del subsuelo. Los principales parámetros que intervienen en la distribución de dichos campos son la resistividad, la constante dieléctrica, la permitividad magnética y la polarización de las rocas o de los minerales.

### II.2 CLASIFICACION DE LOS METODOS ELECTRICOS

Con base al tipo de campo de potencial que se utilice, los métodos eléctricos pueden ser divididos en tres grupos principales:

a) **Métodos de Polarización Espontánea:** Esta modalidad es usada comunmente en minería para la detección de sulfuros; pues la oxidación de estos provocan las condiciones que generan el campo de potencial de manera natural. La posición del depósito mineral se determina estudiando las formas de las líneas equipotenciales en la superficie del terreno, pudiéndose hacer directamente o mediante mediciones de perfiles. Además de usar el método en la detección de sulfuros, se puede utilizar para encontrar depósitos de grafito y para otros casos especiales, como la detección de rasgos estructurales (fallas, diques, etc.).

b) **Métodos de Potencial o Conductivos:** Este grupo está comprendido por aquellos métodos que crean un campo electromagnético por medio de electrodos que inyectan corriente

directamente al terreno llamados electrodos de corriente, y cuyas variaciones en el subsuelo son medidas por electrodos denominados de potencial. Se puede utilizar corriente continua o alterna. Este método comprende las siguientes modalidades: Métodos de líneas equipotenciales, Métodos de resistividades, Métodos de gradiente de potencial, Métodos tipo Eltran y Métodos de polarización inducida.

c) **Métodos Electromagnéticos:** Estos métodos miden las variaciones de un campo magnético alterno inducido en el terreno por una corriente eléctrica. Si existe un material conductor en el subsuelo, el campo electromagnético creado presentará ciertas características; en caso contrario, el campo será diferente y esta diferencia puede reconocerse y medirse. Esto es, se reconocerá una anomalía cuando el campo se aparte de las características que debe cumplir un campo normal.

### II.3 METODOS DE RESISTIVIDADES

El método de resistividades es considerado como el más importante de todos los métodos eléctricos. Existen tres modos básicos de operación: el sondeo, el perfilaje y el modo combinado sondeo-perfilaje. En el sondeo eléctrico, mejor conocido como Sondeo Eléctrico Vertical o SEV, la separación de los electrodos de corriente va aumentando y sus resultados son interpretados en términos de estratos horizontales. En el perfil o calicata eléctrica, los electrodos de corriente o de potencial, o ambos, son desplazados a lo largo de la superficie del terreno para detectar anomalías laterales. El método más completo es la combinación de los dos descritos anteriormente, el cual determina tanto las variaciones laterales como verticales del campo eléctrico en el subsuelo.

### II.3.1 Ecuaciones fundamentales del Método Resistivo

Considerando a la tierra como un medio conductor, caracterizado en cada punto por un valor de conductividad  $\sigma$ , el número de líneas de corriente que llega a un volumen  $V$  dentro del medio será igual al número de líneas de corriente que salen del mismo volumen; esto se cumple para cualquier punto del medio excepto en el punto conectado con la fuente de corriente, donde la integral de flujo de la densidad de corriente  $J$ , dentro del volumen, será igual a la corriente total  $I$  que fluye por un electrodo puntual hasta el medio, como se muestra en la siguiente figura:

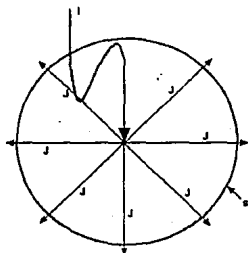


Fig. 2.1 Carga eléctrica puntual en un medio

La representación matemática del enunciado anterior es:

$$\int_V \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (2.1)$$



Por otro lado, la función impulso  $\delta$  está definida como:

$$\int_V \delta(\vec{r}) dV = 1 \quad (2.2)$$

combinando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V I \delta(\vec{r}) dV \quad (2.3)$$

al aplicar el Teorema de la Divergencia, la integral de flujo para  $\vec{J}$  se expresa como:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV \quad (2.4)$$

sustituyendo la ecuación (2.3) en (2.4) ahora se tiene:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = \int_V I \delta(\vec{r}) dV \quad (2.5)$$

Para continuar con el análisis, se hará uso de la Ley de Ohm, la cual enuncia que la densidad de corriente en cada punto del medio es proporcional a la intensidad del campo eléctrico  $E$  y la conductividad del medio en el mismo punto, esto es:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.6)$$

sustituyéndola en (2.5), ahora queda de la forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = I \delta(\vec{r}) \quad (2.7)$$

donde  $E$  puede ser expresado en términos de una función escalar,

llamada función de potencial eléctrico, por la relación:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (2.8)$$

Utilizando la ecuación anterior en la (2.7), se obtiene la expresión del comportamiento eléctrico del espacio estudiado en función del campo potencial  $\varphi$ :

$$\nabla^2\varphi = -I_0\delta(\vec{r}) \quad (2.9)$$

Ahora lo que se desea es encontrar la expresión de  $\varphi$  en un semiespacio como el mostrado en la figura 2.2, para cuando  $z > 0$ :

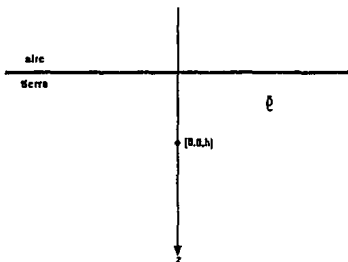


Fig. 2.2 Condiciones de frontera

bajo la condición de que  $E_z = 0$  en  $z = 0$ , esto es:

$$\nabla^2\varphi = -I_0\delta(\vec{r}) \quad \text{en } V \quad (2.10.a)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z=0 \quad (2.10.b)$$

Para solucionar el problema planteado se hará uso de la segunda forma del teorema de Green, la cual se enuncia como:

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \Phi) dV = \int_S \left( \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds \quad (2.11)$$

Lo anterior se presenta como un problema de Neumann, cuya solución es:

$$\nabla^2 \Phi = -\delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad \text{en } V \quad (2.12.a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z=0 \quad (2.12.b)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.10) y (2.12) en (2.11):

$$\int_V \Phi (-I_0 \delta(\bar{x}') - \varphi (-\delta(\bar{x} - \bar{x}'))) dV = 0$$

despejando:

$$-\int_V \Phi I_0 \delta(\bar{x}') dV = -\int_V \varphi \delta(\bar{x} - \bar{x}') dV$$

reordenando la ecuación:

$$\int_V \varphi \delta(\bar{x} - \bar{x}') dV = I_0 \int_V \Phi \delta(\bar{x}') dV$$

de la siguiente propiedad de la función impulso:

$$\int_V \varphi(\bar{x}') \delta(\bar{x} - \bar{x}') dV = \varphi(\bar{x})$$

se tiene que:

$$\varphi(\vec{r}) = I_Q \int_V \Phi \delta(\vec{r}') dV \quad (2.13)$$

La función de Green que satisface a la ecuación (2.12) en el semiespacio es:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right)$$

sustituyendo en (2.13):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{I_Q}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\delta(0) \delta(0) \delta(z'-h) dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \int_V \frac{\delta(0) \delta(0) \delta(z'-h) dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]$$

resolviendo la integral queda:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{I_Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right] \quad (2.14)$$

considerando que la fuente puntual se encuentra en la interfase, entonces  $h = 0$ , quedando la ecuación (2.14) de la forma:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{I_Q}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

la expresión final del potencial eléctrico del espacio estudiado, considerando que la carga puntual fue aplicada en la interfase, es:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{I_0}{2\pi R} \quad (2.15)$$

Los dispositivos electródicos con mayor demanda en la prospección eléctrica utilizan dos electrodos de corriente A y B, los cuales crean un circuito cerrado al ser conectados de la batería al medio. Como se muestra en la figura que a continuación se presenta.

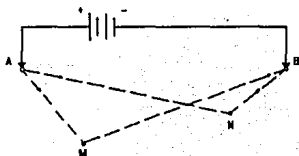


Fig. 2.3 Circuito eléctrico

El potencial en un punto tal como M, en donde se encuentra el electrodo de medida, viene dado por el teorema de superposición de los campos eléctricos:

$$V_N = \frac{I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BN} \right) \quad (2.16)$$

De la misma manera, para el punto N se tendrá:

$$V_N = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right) \quad (2.17)$$

siendo así que la diferencia de potencial existente entre los puntos M y N, estará dada por la expresión:

$$\Delta V = V_M - V_N = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) - \left( \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right)$$

despejando la resistividad  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}} \cdot \frac{\Delta V}{I} = k \cdot \frac{\Delta V}{I} \quad (2.18)$$

la expresión anterior es aplicable a cualquier disposición de los cuatro electrodos sobre una superficie plana, donde  $k$  resulta ser una constante que depende únicamente del tipo de dispositivo empleado:

$$k = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}} \quad (2.19)$$

### II.3.2 Dispositivos electródicos Wenner y Dipolo-Dipolo

Son muy empleados los dispositivos en que los cuatro electrodos **AMNB** se encuentren, en este orden, sobre una misma recta. El coeficiente del dispositivo correspondiente puede calcularse por medio de la ecuación 2.19. Así, para el dispositivo

Wenner, cuya configuración electródica es:

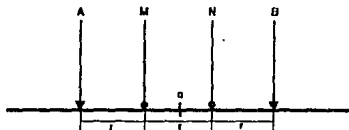


Fig. 2.4 Arreglo Wenner

se tiene que:

$$k = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{r} - \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{r}} = 2r\pi$$

sustituyendo en 2.18:

$$\rho_N = 2r\pi \cdot \frac{\Delta V}{I} \quad (2.20)$$

obteniendo así la expresión del cálculo de la resistividad para un arreglo tipo Wenner, el cual fué empleado para los perfilajes eléctricos procesados en esta tesis.

Otro dispositivo empleado fué el Dipolo-Dipolo. En los dispositivos electródicos dipolares, los electrodos de corriente A y B se encuentran lo suficientemente próximos entre sí con respecto de la distancia a que se miden sus efectos para que pueda considerarse un dipolo. Existen dos dipolos en este dispositivo, el AB de emisión y el MN de recepción, cuya posición mutua puede ser en principio cualquiera. La posición que observan en el dispositivo Dipolo-Dipolo es la que se muestra en la figura:

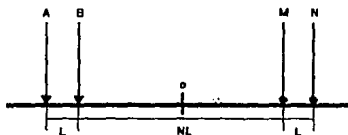


Fig. 2.5 Arreglo Dipolo-Dipolo

Aplicando la geometría presentada en el esquema dipolar y sustituyendo en la ecuación 2.19 se puede conocer la expresión del valor de la resistividad del medio cuando un dispositivo Dipolo-Dipolo es usado:

$$Q_{DD} = \pi L(N+2)(N+1)N \frac{\Delta V}{I} \quad (2.21)$$



### II.3.3 Concepto de la resistividad aparente

La resistividad que hasta ahora se ha venido manejando será constante siempre y cuando el medio en el que se encuentre sea homogéneo e isótropo. Sin embargo, esto no existe en el subsuelo. La resistividad medida varía con la posición y dirección del arreglo eléctrico. Estas mediciones representan una resistividad ficticia o aparente en un semiespacio homogéneo equivalente. La resistividad denominada aparente no es representativa de una resistividad real de cualquier elemento del subsuelo, ni tampoco se considera como un promedio de las resistividades existentes. Esta varía sistemáticamente a través de una sección geológica y puede detectar la presencia de inhomogeneidades resistivas o conductivas. A la *resistividad aparente* se le representa por el símbolo  $\rho_a$  y es calculada mediante la fórmula:

$$\rho_a = k \cdot \frac{\Delta V}{I} \quad (2.22)$$

siendo aplicable para cualquiera de las expresiones deducidas para el cálculo de la resistividad  $\rho$ .

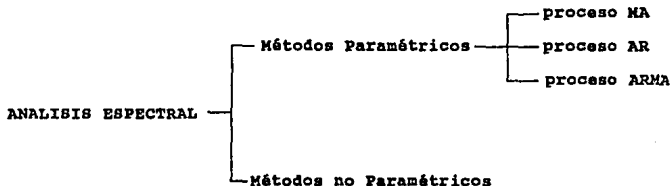
### III. MODELOS AUTORRECURSIVOS

Se define como *Densidad Espectral de Potencia (DEP)* a la transformada discreta de Fourier de la autocorrelación de una serie infinita de datos. A los distintos métodos utilizados para el cálculo del Espectro de Potencia por medio de la definición anterior reciben el nombre de *métodos no paramétricos*.

Otro camino para realizar dicho cálculo, consiste en ajustarse a la forma de los datos de la señal a procesar, por medio de los valores de los parámetros del modelo. Existen varias formas de aplicar esta metodología y son denominados *métodos paramétricos*.

Dentro de los métodos paramétricos, los modelos *autorrecursivos (AR)* han recibido una mayor atención por parte de la literatura especializada. Esto se debe primeramente a que una estimación autorrecursiva tiende a adaptarse a una imagen sinuosa, lo cual es asociado a una alta resolución en el proceso; además, los valores paramétricos de los modelos AR pueden ser calculados por medio de soluciones de ecuaciones lineales.

En la siguiente figura se muestra la clasificación de los métodos para la estimación espectral:



### III.1 DESARROLLO TEORICO

Asumiendo que una serie discretizada de datos en el tiempo ha sido generada mediante un sistema lineal, a este se le puede describir, matemáticamente hablando, de distintas maneras. Una forma de representar al sistema es el modelo AR, el cual presenta una justificación teórica válida.

Un modelo autorrecursivo  $y_t$ , es descrito por la relación:

$$y_t = a_0 x_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - \dots - a_m y_{t-m} \quad (3.1)$$

donde  $t$  es la variable discretizada en tiempo,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ , son los coeficientes a determinar. En un lenguaje ingenieril, al modelo AR se le denomina *sistema recursivo* con una señal de entrada  $x_t$  y una señal de salida  $y_t$ . En muchos casos, un ruido incorrelacionable  $\epsilon_t$ , con una media y una varianza de:

$$E[\epsilon_t] = 0 \quad (3.2)$$

$$E[\epsilon_t^2] = \sigma^2 \quad (3.3)$$

puede sustituir al sistema de entrada  $x_t$ . Donde  $E$  es conocido como operador promedio o esperanza. Cuando  $x_t = \epsilon_t$ , al sistema de salida  $y_t$  se le denomina *proceso autorrecursivo de orden  $m$  [AR( $m$ )]*. Obsérvese que el valor de  $y_t$  a un tiempo determinado  $t$  de un proceso autorrecursivo es una combinación lineal de los  $m$  valores previos del proceso  $y_t$ , mas el ruido  $\epsilon_t$ .

La ecuación (3.1) puede ser representada en términos de la transformada  $Z$ , donde  $z$  es el operador de desplazamiento unitario  $zy_t = y_{t+1}$ , además si se considera al coeficiente  $a_0$  unitario, se tiene que:

$$Y(z) = \frac{1}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m} X(z) \quad (3.4)$$

definiendo al polinomio  $A_m(z)$  de la forma:

$$A_m(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m \quad (3.5)$$

se obtiene, de la ecuación (3.4):

$$Y(z) = \frac{1}{A_m(z)} X(z) \quad (3.6)$$

donde  $X(z)$  y  $Y(z)$  son las transformadas Z de la señal de entrada  $x_t$  y de la señal de salida  $y_t$ , respectivamente.

Puede definirse a la expresión  $Y(z)Y(z^{-1}) = \phi(z)$  como la transformada Z de la función de autocorrelación de  $y_t$ . Evaluando  $\phi(z)$  en el círculo unitario, donde:

$$z = e^{-j\omega} \quad (3.7)$$

se obtiene:

$$\phi(e^{-j\omega}) \quad (3.8)$$

la cual es conocida como el *espectro de potencia de  $y_t$* , siendo  $\omega$  la frecuencia angular en radianes por unidad de tiempo. Ahora se puede escribir:

$$\phi(e^{-j\omega}) = Y(e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{-j\omega})|^2 \quad (3.9)$$

o simplemente:

$$\phi(\omega) = |Y(\omega)|^2 \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.6) en la ecuación (3.10), se llega finalmente a la representación del espectro de potencia de un modelo AR:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{|A_m(\omega)|^2} |X(\omega)|^2 \quad (3.11)$$

Para obtener el espectro de potencia de una serie de datos de un sistema AR, es necesario el uso de algoritmos que implementen a la ecuación anterior. El proceso de diseño debe realizarse con base en las características de la señal y del ruido registrado en la información geofísica. Como una simplificación del cálculo del problema ilustrado, se asume que la señal de entrada  $x_t$ , es un ruido incorrelacionable  $\epsilon_t$ , con una media igual a cero y un valor de varianza de:  $E\{\epsilon_t^2\} = \sigma^2$ . Esto lleva a decir que  $|X(\omega)|^2 = \sigma^2$  quedando la ecuación (3.11) de la siguiente forma:

$$\phi(\omega) = \frac{\sigma^2}{|A_m(\omega)|^2} \quad (3.12)$$

### III.2 ECUACIONES DE YULE-WALKER

La determinación de los parámetros del modelo AR puede llevarse a cabo cuando los elementos de la secuencia de autocorrelación son conocidos. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (3.1) por  $y_{t+n}$  y considerando que la señal de entrada es un ruido incorrelacionable  $\epsilon_t$ , el cual cumple con las condiciones de (3.2) y (3.3), se tiene:

$$\phi_y(n) = -\sum_{k=1}^n a(k) \phi_y(n-k) + \phi_{y\epsilon}(n) \quad (3.13)$$

paralelamente, al multiplicar la ecuación (3.1) por  $\epsilon_{t+n}$  se obtiene:

$$\phi_{y\epsilon}(i) = -\sum_{k=1}^n a(k) \phi_{y\epsilon}(i+k) + \phi_{\epsilon\epsilon}(i) \quad (3.14)$$

siendo  $k$  la variable en tiempo discreta y  $n$  e  $i$  los contadores de las funciones de correlación. De la ecuación (3.3) puede definirse:

$$\phi_x(i) = E[\varepsilon^2] = \sigma^2$$

sustituyendo en (3.14):

$$\phi_{y_x}(i) = -\sum_{k=1}^m a(k) \phi_{y_x}(i+k) + \sigma^2 \quad (3.15)$$

considerando las características de un ruido incorrelacionable se llega a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \phi_{y_x}(0) &= \sigma^2 \\ \phi_{y_x}(i) &= 0 \quad \text{para } \forall i \neq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

las cuales se sustituyen en la ecuación (3.13) y se expresan como:

$$\phi_y(n) = -\sum_{k=1}^m a(k) \phi_y(n-k) \quad \text{para } n \geq 1 \quad (3.17a)$$

$$\phi_y(0) = -\sum_{k=1}^m a(k) \phi_y(-k) + \sigma^2 \quad \text{para } n=0 \quad (3.17b)$$

lo anterior representa a un sistema de ecuaciones lineales denominadas *ecuaciones de Yule-Walker* cuya representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \cdot & \cdot & \phi(m) \\ \phi(1) & \phi(0) & \cdot & \cdot & \phi(m-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi(m) & \phi(m-1) & \cdot & \cdot & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ a(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2(m) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3.18)

A la matriz cuadrada se le conoce como *matriz de Toeplitz*. Los coeficientes de la matriz columna  $a_m$  deben ser calculados para

realizar la operación de procesado. Distintas técnicas se han desarrollado para optimizar la estimación espectral de un modelo AR aprovechando las condiciones del sistema matricial presentado. En el caso particular de esta tesis, fué aplicado el método de *Máxima Entropía (MEM)*, [Burg,1967], el cual ha sido una herramienta utilizada por los especialistas en los últimos años. Tres diferentes variantes del MEM se emplearon para el cálculo de los coeficientes autorrecursivos: la solución directa del sistema de ecuaciones de Yule-Walker, [Yule,1927; Walker,1931]; empleando el algoritmo propuesto por Burg, [Burg,1967,1975] y por el método de *Covarianza Modificada*, [Ulrych y Clayton,1976; Nutall,1976]. Otro método paralelo al de máxima entropía, denominado de *Probabilidad Máxima (MLM)* [Lacoss,1976], fué también utilizado.

### III.3 ANALISIS ESPECTRAL POR MAXIMA ENTROPIA

*El Análisis Espectral por Máxima Entropía, se basa en seleccionar al espectro que corresponda a la serie en tiempo más aleatoria o menos predecible, y cuya autocorrelación coincida con el número de valores de la autocorrelación conocida.* [Robinson,1982]. Para lograr esto, se debe maximizar la entropía de la serie temporal a procesar. La comprensión de este concepto, así como el porqué de su maximización, conduce al análisis de la información concerniente a un sistema desde un punto de vista probabilístico y su relación con la entropía.

#### III.3.1 Concepto de entropía.

Considerando una serie de posibles eventos cuyas probabilidades de ocurrencia sean  $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$ ; en el caso de que estas probabilidades sean iguales, ninguna información trascendente podrá obtenerse del sistema en cuestión. En cambio, al conocer el valor de una probabilidad específica  $p_i$ , se logrará

estimar una información extra del proceso estudiado. Continuando con esta lógica, si el evento por el cual se calcula una probabilidad es totalmente impredecible, se obtendrá entonces un significativo incremento de la información de nuestro sistema. La relación existente entre la información y la probabilidad de ocurrencia está dada por la expresión:

$$I = k \cdot \ln \frac{1}{p_i} \quad (3.19)$$

siendo  $k$  una constante la cual es igual a 1 cuando el logaritmo es de base dos. El logaritmo de la ecuación anterior es usado debido a la consideración de que la información es una cantidad aditiva.

Observando a la serie dentro de un intervalo de tiempo  $T$ , donde  $T$  es muy prolongado, puede esperarse que para cada evento  $i$  ocurra una probabilidad  $p_i$ , en un determinado tiempo  $t$  dentro del intervalo. En consecuencia, la información total del sistema podrá ser expresada como:

$$I_{total} = k(p_1 \ln \frac{1}{p_1} + p_2 \ln \frac{1}{p_2} + \dots + p_n \ln \frac{1}{p_n}) \quad (3.20)$$

Al promedio de la información dentro de un intervalo tiempo  $T$  es conocido como *entropía*, la cual se expresa como [Shannon, 1948]:

$$H = \frac{I_{total}}{T} = -k \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (3.21)$$

De la ecuación anterior se concluye que la entropía es una medida de la incertidumbre descrita por una serie de probabilidades. Si todas las probabilidades fueran nulas menos una,



la cual sería unitaria, entonces el valor de la entropía del sistema sería igual con cero; siendo el sistema perfectamente determinado. Para cualquier otro caso la entropía será positiva. En resumen, la entropía es una medida de la ignorancia que se tiene con respecto a la estructura de un sistema.

### III.3.2 El método de máxima entropía.

Como se mencionó anteriormente, a los métodos que calculan al espectro de potencia de una serie discretizada en el tiempo mediante la aplicación de la ecuación

$$\Phi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) e^{-j\omega n} \quad (3.22)$$

siendo  $\phi(n)$  la función de correlación de dicha serie, se les conoce como métodos no paramétricos; o bien, como métodos convencionales de estimación espectral. Para obtener un resultado aceptable de la expresión anterior, se debe conocer el mayor rango de valores posible de la función de autocorrelación. Sin embargo, es muy frecuente que sólo se conozca un determinado número finito  $p$  de los valores correlacionados, esto es:  $n=1, 2, 3, \dots, p$ . En base a la propiedad de simetría de la autocorrelación, donde  $\phi(n) = \phi(-n)$ , se conocen los valores de  $\phi(n)$  para  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm p$ , y se desconocen los valores para  $|n| > p$ .

Con la restricción anterior, se han venido haciendo estimaciones espectrales utilizando funciones de ventanas cuyas propiedades pueden ser analizadas mediante la teoría de Fourier. Estos métodos asumen que los valores conocidos de la autocorrelación son periódicos, y los no conocidos son cero. Tales suposiciones provocan que estimaciones espectrales presenten valores negativos en ciertos rangos de frecuencias. Adicionado a lo

anterior, en la aproximación por ventaneo es usada una función característica  $w(n)$  la cual modifica a los valores conocidos de  $\phi(n)$ , dando como resultado que la estimación espectral se amolde más a los valores de  $w(n)$  que de  $\phi(n)$ .

Para tratar de evitar los inconvenientes mencionados, Burg (op.cit.), propuso un método basado en principios de varianza y de entropía del cual se obtiene un espectro de potencia consistente con los valores conocidos de nuestra serie y no hace suposiciones inconvenientes con los no conocidos. Burg explica que para un número limitado de coeficientes de la autocorrelación  $\phi(n)$ , cuyo espectro de potencia  $\Phi(\omega)$  debe ser positivo en todo su rango de frecuencias, existen muchos espectros probables que concuerden con nuestra información. Se requiere entonces encontrar una función  $\Phi(\omega)$  la cual sea representativa de todos los espectros posibles y que concuerde con los valores conocidos.

Siguiendo con la teoría de la información de Shannon (op.cit.), la entropía de una serie discretizada en el tiempo es proporcional a la integral del logaritmo de su espectro de potencia:

$$H \propto \int_{-\pi}^{\pi} \log \Phi(\omega) d\omega \quad (3.23)$$

para obtener el espectro de potencia requerido mediante la entropía máxima, es necesario la maximización de la integral anterior de acuerdo a la condición:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \phi(n) \quad (3.24)$$

donde  $\Delta t$  es el intervalo de muestreo,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $\omega_N$  la frecuencia angular de Nyquist.

Un método posible para la solución del problema planteado es el empleo de los multiplicadores de Lagrange. En este caso se presenta un desarrollo paralelo hecho por Robinson [1982].

Observando a la ecuación (3.22), puede concluirse que la derivada parcial de la función  $\Phi(\omega)$  con respecto a  $\phi(n)$  es:

$$\frac{\partial \Phi(\omega)}{\partial \phi(n)} = e^{-j\omega n} \quad (3.25)$$

Además:

$$\frac{\partial \log \Phi(\omega)}{\partial \phi(n)} = \frac{e^{-j\omega n}}{\Phi(\omega)} = |\Phi(\omega)|^{-1} e^{-j\omega n} \quad (3.26)$$

Ahora se maximizará la ecuación (3.23) con respecto a los valores no conocidos de  $\phi(n)$ , donde  $|n| > p$ :

$$\frac{\partial}{\partial \phi(n)} \int_{-\pi}^{\pi} \log \Phi(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \log \Phi(\omega)}{\partial \phi(n)} d\omega = 0 \quad \text{para } |n| > p \quad (3.27)$$

Haciendo uso de (3.26), se puede ver que la ecuación (3.27) se reduce a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(\omega)|^{-1} e^{-j\omega n} d\omega = 0 \quad \text{para } |n| > p \quad (3.28)$$

Esta expresión indica la forma del espectro de potencia inverso,  $|\Phi(\omega)|^{-1}$ , de un proceso de máxima entropía. Esto es, que para cualquier proceso estacionario en el tiempo con un espectro de potencia positivo,  $\Phi(\omega)$ , su espectro inverso, también positivo,

estará representado por:

$$|\Phi(\omega)|^{-1} = \frac{1}{\Phi(\omega)} \quad (3.29)$$

el cual es acotado e integrable. Por todo lo anteriormente expuesto, se puede asociar al espectro inverso una función de autocorrelación, la cual será identificada como  $\psi(n)$ . En semejanza con las ecuaciones (3.22) y (3.24), puede escribirse que:

$$|\Phi(\omega)|^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(n) e^{-j\omega n} \quad \text{para } -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (3.30)$$

y

$$\psi(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(\omega)|^{-1} e^{j\omega n} d\omega \quad \forall n \quad (3.31)$$

Regresando al proceso de máxima entropía, si se reemplaza  $n$  por  $-n$  y también multiplicamos cada lado de la ecuación (3.28) por  $1/2\pi$ , puede apreciarse de que el espectro de inverso de potencia satisface a dicha ecuación, así tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(\omega)|^{-1} e^{j\omega n} d\omega = 0 \quad \text{para } |n| > p \quad (3.32)$$

comparando las ecuaciones (3.32) y (3.31), se observa que para un proceso de máxima entropía:

$$\psi(n) = 0 \quad \text{para } |n| > p \quad (3.33)$$

Así, utilizando las ecuaciones (3.30) y (3.33), se obtiene la expresión del espectro inverso de potencia de un proceso de máxima entropía en función de la autocorrelación:

$$|\Phi|^{-1} = \sum_{n=-p}^p \psi(n) e^{-j\omega n} \quad (3.34)$$

el lado derecho de la ecuación anterior es una serie trigonométrica finita, por lo cual puede decirse que dicho espectro de potencia es igual al recíproco de una serie trigonométrica finita:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sum_{n=-p}^p \psi(n) e^{-j\omega n}} \quad (3.35)$$

Si se emplea la ecuación (3.7), es factible representar a la serie trigonométrica en términos de la variable  $z$ :

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \sum_{n=-p}^p \psi(n) z^{-n} \quad (3.36)$$

la cual puede ser factorizada mediante el método de Fejer [Robinson, 1980] como:

$$\sum_{n=-p}^p \psi(n) z^{-n} = \frac{1}{\sigma^2} [1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_p z^{-p}] [1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_p z^p] \quad (3.37)$$

donde  $\sigma^2$  es una constante positiva y además:

$$A(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_p z^{-p} \quad (3.38)$$

es de fase mínima. En consecuencia, el proceso de máxima entropía de un modelo autorrecursivo AR(p) es representado por:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma^2}{A(z)A(z^{-1})} \quad (3.39)$$

### III.3.3 Método de Yule-Walker

La primera técnica de aproximación desarrollada para calcular los parámetros del modelo AR, se basa en el uso de la función de autocorrelación para la solución de las ecuaciones de Yule-Walker. Para realizar lo anterior puede optarse por cualquier método, (Gauss-Jordan, sobrerelajaciones, etc.), sin embargo, al aumentar el orden  $m$  del sistema el problema se complica. El *Algoritmo de recursión de Levinson* es una eficiente técnica que aprovecha la simetría de la matriz de Toeplitz para encontrar el valor de los coeficientes AR disminuyendo en forma considerable el tiempo de cálculo del sistema. En base a que un modelo AR de orden  $m_1$  es idéntico a un modelo AR de orden  $m_2 > m_1$ , si  $a_{m_1+1} = a_{m_1+2} = \dots = a_{m_2} = 0$ , entonces no es necesario conocer el orden  $m$  del modelo para utilizar las ecuaciones de Yule-Walker (Y-W) con el fin de determinar los parámetros AR, puede resolverse únicamente la ecuación 3.17a para  $m=1,2,3\dots$  hasta  $a_{k,m}=0$  para todo valor de  $k>m$ .

Siendo  $a_{1,m}$  y  $b_m$  los parámetros de un modelo AR de orden  $m$ , sus valores iniciales se calculan por las ecuaciones:

$$a_{1,1} = -\frac{\phi(1)}{\phi(0)} \quad (3.40)$$

$$b^2_1 = [1 - a^2_1] \phi(0) \quad (3.41)$$

y los subsecuentes valores  $m$ -ésimos de la recursión se estiman por:

$$a_{m,m} = -\frac{1}{b^2_{m-1}} \left[ \phi(m) + \sum_{p=1}^{m-1} a_{p,m-1} \phi(m-p) \right] \quad (3.42)$$

$$b^2_m = [1 - a^2_{m,m}] b^2_{m-1} \quad (3.43)$$

$$a_{k,m} = a_{k,m-1} + a_{m,m} a_{m-k,m-1} \quad \text{donde } k=1,2,3,\dots,m-1 \quad (3.44)$$

Los parámetros obtenidos por este método producen un mejor resultado en la estimación a medida de que el número de muestras aumenta, provocando en consecuencia que, para una secuencia de datos pequeña, la resolución del espectro de potencia estimado será muy pobre.

### III.3.4 Método de Burg

Para un proceso estacionario de segundo orden, la solución del sistema de ecuaciones en (3.18) es requerida, donde  $a_k$  son los coeficientes del filtro a calcular,  $\sigma_m^2$  es el error medio cuadrático para un filtro de orden  $m$  y  $\phi_k$  los valores de la función de autocorrelación.

Los valores de la autocorrelación pueden obtenerse de la secuencia de datos de entrada  $\{x_k, k=1,2,3,\dots,N\}$  de acuerdo a la relación:

$$\phi_s = \frac{1}{N-s} \sum_{k=0}^{N-|s|} x_k x_{k+s} \quad s=0,1,2,\dots,(N-1) \quad (3.45)$$

sin embargo, como se dijo en el inciso anterior, estos cálculos no son confiables para un valor pequeño de  $N$ . Mediante la técnica propuesta por Burg los coeficientes  $a_k$  son asociados directamente a los datos de entrada  $x_k$  en lugar de utilizar los valores de la autocorrelación  $\phi_k$ .

Definiendo a los valores  $1, a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{mm}$ , como los coeficientes del filtro de predicción de error de orden  $m+1$  y al error medio cuadrático  $\sigma_m^2$  como  $P_m$ ; el filtro de primer orden,  $(1, a_{11})$  se determina minimizando el promedio de la sumatoria de los errores medios cuadráticos anteriores y posteriores con respecto al coeficiente  $a_{mm}$  en turno:

$$P_1 = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} (x_{k+1} + a_{11}x_k)^2 + (x_k + a_{11}x_{k+1})^2 \quad (3.46)$$

minimizando la ecuación con respecto a  $a_{11}$ :

$$\frac{\partial P_1}{\partial a_{11}} = 0 \quad (3.47)$$

obteniendo de este modo:

$$a_{11} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} x_k x_{k+1}}{\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-1}^2 + \frac{1}{2}x_N^2} \quad (3.48)$$

En base al procedimiento de Andersen [1974], el promedio de los errores cuadráticos delanteros y traseros para un filtro de orden  $(m+1)$  se calcula mediante la expresión:

$$P_m = \frac{1}{2(N-m)} \sum_{k=1}^{N-m} (x_{k+m} + \sum_{p=1}^m a_{mp} x_{k,m-p})^2 + (x_k + \sum_{p=1}^m a_{mp} x_{k,p})^2 \quad (3.49)$$

Donde los coeficientes  $a_{mp}$  pueden ser expresados en términos de los coeficientes  $a_{m-1,p}$ :

$$\begin{aligned} a_{mp} &= a_{m-1,p} - p k_m a_{m-1,m-p} & p &= 1, 2, 3, \dots, (m-1) \\ a_{m0} &= k_m \end{aligned} \quad (3.50)$$

$k_m$  es el único término a evaluar si los  $a_{m-1,p}$  son conocidos en la anterior etapa del proceso para poder generar todos los



coeficientes  $a_{mp}$ . Si la recursión en (3.50) es sustituida en (3.49) se obtienen:

$$P_m = \frac{1}{2(N-m)} \sum_{k=1}^{N-m} (b_{mk} + a_{mm} b'_{mk})^2 + (b'_{mk} + a_{mm} b_{mk})^2 \quad (3.51)$$

donde

$$\begin{aligned} b_{mk} &= \sum_{p=0}^{m-1} a_{m-1,p} X_{k+p} \\ b'_{mk} &= \sum_{p=0}^{m-1} a_{m-1,p} X_{k+m-p} \end{aligned} \quad (3.52)$$

una vez que  $a_{mm}$  ha sido calculado, los demás coeficientes  $a_{m,1}$ ,  $a_{m,2}$ , ...,  $a_{m,m}$  son determinados mediante la recursión en (3.50). De la sustitución de (3.50) en (3.52) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} b_{mk} &= b_{m-1,k} - a_{m-1,m} + b'_{m-1,k} \\ b'_{mk} &= b'_{m-1,k} \dots \end{aligned} \quad (3.53)$$

observando que  $b_{mk}$  y  $b'_{mk}$  también pueden ser calculados recursivamente. Para  $m=1$ , la inicialización de los valores del arreglo anterior son:

$$\begin{aligned} b_{1,k} &= X_k \\ b'_{1,k} &= X_{k+1} \quad k=1, 2, \dots, (N-1) \end{aligned} \quad (3.54)$$

La popularidad del método de Burg en el área del procesado de datos se refleja en la gran cantidad de información que se tiene al respecto, sin embargo, este método presenta, en algunos casos, problemas de sesgamiento (división) de la señal espectral y de bias en la frecuencia estimada, los cuales pueden ser evitados con el uso de otras técnicas, como la de Covarianza Modificada.

### III.2.5 Método de Covarianza Modificada

La técnica de Covarianza Modificada, también conocida como método de Mínimos Cuadrados, fué propuesta por Ulrich y Clayton [1976] y por Nutall [1976] de manera independiente.

Para poder diseñar un buen estimador, debe minimizarse el error medio cuadrático de potencia,  $P_m$  de la ecuación (3.49). La técnica de Burg minimiza este error usando las propiedades recursivas del algoritmo de Levinson:

$$a_{m,p} = a_{m-1,p} + a_{m,m} a_{m-1,m-p}^* \dots \quad p=1, 2, 3, \dots, m$$

reduciendo el problema de la minimización con respecto a un solo valor desconocido  $a_{mm}$ . Los coeficientes AR del orden deseado son obtenidos de manera iterativa.

El método de Covarianza Modificada minimiza  $P_m$  con respecto a todos los coeficientes AR en cada etapa de la recursión. Con base en lo planteado, diferenciando la ecuación (3.49) con respecto a cada coeficiente AR se obtiene el siguiente sistema lineal:

$$R^m \hat{a} = S^m \quad (3.55)$$

donde:

$$R^m = (r_{pq}^m) = \left( \sum_{k=m+1}^N x_{k-p} x_{k-q} + \sum_{k=1}^{N-m} x_{k,p} x_{k,q} \right) \quad p, q=1, 2, 3, \dots, m \quad (3.56)$$

$$S^m = (s_p^m) = \left( \sum_{k=m+1}^N x_{k-p} x_k + \sum_{k=1}^{N-m} x_{k,p} x_k \right) \quad p=1, 2, 3, \dots, m \quad (3.57)$$

La matriz resultante del sistema, aunque simétrica, no necesariamente representa a una matriz tipo Toeplitz, no obstante, a medida de que  $N$  aumenta se aproxima asintóticamente a esta forma.

Debido a que el algoritmo de Levinson no puede aplicarse a este caso, otras técnicas de cálculo se han elaborado, como el algoritmo de Cholesky [Gardner, 1988] o la solución de las ecuaciones normales de Marple [Marple, 1987].

### III.4 ESTIMACION ESPECTRAL POR PROBABILIDAD MAXIMA

El método de estimación espectral por Probabilidad Máxima (MLM), fué propuesto por Capon [1969], bajo el nombre de método de Mínima Varianza (MV), para su aplicación en arreglos sísmicos multidimensionales. Lacoss [1971] reformuló el análisis original de Capon para su aplicación en series de tiempo unidimensionales y renombró dicha técnica como Método de Probabilidad Máxima. El método de Mínima Varianza se basa en la minimización de la varianza en la salida de un filtro de banda limitada al cual se adapta el contenido de espectral de una señal de entrada para cada frecuencia de interés. [Marple, op. cit.]

#### III.4.1 Método de Mínima Varianza

Si se considera un sistema con  $m+1$  coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , siendo  $x_n$  y  $y_n$  las señales de entrada y salida del sistema respectivamente, éste puede expresarse de la siguiente manera:

$$y_n = \sum_{k=0}^m a_k x_{n-k} = X^T[n] a \quad (3.58)$$

siendo las matrices columna  $X[n]$  y  $a$  definidas como:

$$X[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-m] \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a[0] \\ a[1] \\ \vdots \\ a[m] \end{bmatrix}$$

pudiendo calcularse la variancia de la salida del sistema por la ecuación:

$$\sigma^2 = \epsilon(|y_n|)^2 = \epsilon(a^T X[n] X^T[n] a) = a^T \phi_{xx} a \quad (3.59)$$

donde la matriz de Toeplitz de orden  $(m+1) \times (m+1)$  se encuentra representada por:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \dots & \dots & \phi(m) \\ \phi(1) & \phi(0) & \dots & \dots & \phi(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \phi(m) & \phi(m-1) & \dots & \dots & \phi(0) \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de la ecuación (3.59) deben ser calculados de tal manera, que a una frecuencia  $f_0$ , la respuesta del filtro debe ser unitaria; esto es:

$$\sum_{k=0}^m a_k e^{-j2\pi f_0 n T} = e^T(f_0) a = 1 \quad (3.60)$$

siendo la matriz columna  $e(f_0)$ :

$$e(f_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi f_0 T} \\ \vdots \\ e^{j2\pi f_0 m T} \end{bmatrix}$$

Se puede apreciar que para una señal sinusoidal de frecuencia  $f_0$ , ésta no será distorsionada en su respuesta de salida al pasar por el filtro. Para rechazar componentes del espectro que no se

encuentren cerca de la frecuencia  $f_0$ , se debe minimizar el valor de la varianza de la ecuación (3.60). La solución de los coeficientes del sistema satisfacen lo siguiente:

$$a_{MV} = \frac{\phi_{XX}^{-1} e(f_0)}{e^T(f_0) \phi_{XX}^{-1} e(f_0)} \quad (3.61)$$

si se sustituye la (3.61) en (3.59) se obtiene la varianza mínima del sistema expresada por:

$$\sigma_{MV}^2 = \frac{1}{e^T(f_0) \phi_{XX}^{-1} e(f_0)} \quad (3.62)$$

de lo anterior es posible, ahora, formular la ecuación del Estimador Espectral por Mínima Varianza:

$$\Phi_{MV}(f) = T \sigma_{MV}^2 = \frac{T}{e^T(f) \phi_{XX}^{-1} e(f)} \quad \text{para } -\frac{1}{2}T \leq f \leq \frac{1}{2}T \quad (3.63)$$

La estimación espectral obtenida por esta técnica no se ajusta del todo la potencia del espectro buscado [Marple, 1987], esto es, el area bajo la curva del espectro de Mínima Varianza (MV) no representa al total de la energía del proceso estudiado, aunado a esto, su transformada inversa no corresponde a la función de autocorrelación de la secuencia de datos con que el análisis fué efectuado. No obstante, se puede considerar al proceso de MV como un estimador espectral siempre y cuando no deje de tomarse en cuenta que el resultado obtenido describe una Densidad Espectral Relativa.

### III.4.2 Relación existente entre el MLM y el MEM

Burg [1972] demostró que el inverso del espectro por MV es igual al promedio de los inversos de los espectros de Máxima Entropía obtenidos desde el primer hasta el emésimo punto de los errores predictivos del filtro:

$$\frac{1}{\Phi_{MV}(m, f)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m \frac{1}{\Phi_{MEM}(k, f)} \quad (3.64)$$

considerando que la notación  $\phi(k, f)$  indica que el espectro es de orden  $k$  con una frecuencia  $f$ .

Musicus [1985] demostró que la estimación por MV podía realizarse en el dominio del tiempo mediante la expresión:

$$\Phi_{MV}^{-1} = \frac{T}{\sum_{k=-m}^m \psi_{MV}[k] e^{-j2\pi kT}} \quad (3.65)$$

Calculándose los coeficientes  $\psi_{MV}(k)$  mediante una autocorrelación de los parámetros MEM:

$$\Phi_{mv}(k) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{m-k} (m+1-k-2i) a_m[k+i] a_m[i] \quad k=0, 1, \dots, m \quad (3.66)$$

con base en lo anterior, para calcular de manera eficiente una estimación espectral por Mínima Varianza, debe seguirse la siguiente secuencia:

- 1) Estimar los coeficientes MEM mediante el algoritmo de Burg.
- 2) Correlacionar los parámetros MEM para obtener los coeficientes MV (Ec. 3.66).
- 3) Evaluar el espectro de Potencia MV en las frecuencias utilizando la ecuación (3.65) y un algoritmo de FFT.

## IV. MODELOS AUTORRECURSIVOS DE PROMEDIOS MOVILES

El modelo *Autorrecursivo de Promedio Móvil (ARMA)* utiliza tanto coeficientes autorrecursivos (AR) como de promedios móviles (MA) para realizar una Estimación Espectral. A pesar del mayor estudio que se le ha dedicado a los métodos autorrecursivos de análisis espectral, también se han desarrollado otras técnicas en base a los modelos ARMA, cuya aplicación es más apropiada para señales que presentan un menor grado de sinusoidad en su forma, que las señales obtenidas en base a los modelos AR.

### IV.1 DESARROLLO TEORICO

Una manera diferente de describir en forma matemática a una serie de datos discretizada en el tiempo generada por un sistema lineal, es mediante un modelo autorrecursivo de promedio móvil, ARMA. Cuya expresión  $y_t$  es:

$$y_t = b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + b_n x_{t-n} - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} - \dots - a_m y_{t-m} \quad (4.1)$$

siendo  $t$  la variable temporal discretizada,  $a_m$  y  $b_n$  son los coeficientes autorrecursivos y de promedios móviles a determinar.

Si siguiendo el desarrollo efectuado en el capítulo anterior (ec. 3.6), es posible representar al sistema en términos de la transformada Z:

$$Y(z) = \frac{B_n(z)}{A_m(z)} X(z) \quad (4.2)$$



donde  $X(z)$  y  $Y(z)$  son las transformadas Z de la señal de entrada  $x_t$  y de la salida  $y_t$ , respectivamente. Además, los polinomios  $A_m(z)$  y  $B_n(z)$  se definen como:

$$\begin{aligned} A_m(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m \\ B_n(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n \end{aligned} \quad (4.3)$$

y la expresión del espectro de potencia para un proceso ARMA será de la forma:

$$\Phi(\omega) = \sigma^2 \frac{|B_n(\omega)|^2}{|A_m(\omega)|^2} \quad (4.4)$$

siendo  $\sigma^2$  la varianza de un ruido incorrelacionable  $\epsilon_t$ , que sustituye al valor de la señal de entrada  $x_t$ , esto es, que  $|X(\omega)|^2 = \sigma^2$ . En un lenguaje ingenieril, a la señal de salida  $y_t$ , se le conoce como *Proceso Autorrecursivo de Promedio Móvil de orden m, n*. [proceso ARMA (m, n)].

El Análisis Espectral de los modelos ARMA puede realizarse por dos distintos criterios. El primero consiste en la optimización de técnicas iterativas basadas en la Estimación por Probabilidad Máxima (MLE) y de otros conceptos relacionados con métodos no lineales de mínimos cuadrados. Estas técnicas requieren de un considerable tiempo de cálculo y no se tiene una garantía de la estabilidad del filtro resultante, pero potencialmente son las que realizan una mejor estimación del espectro.

El segundo criterio utilizado consiste en la estimación de los coeficientes AR y MA en forma separada. Este se basa en criterios de mínimos cuadrados y requiere de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. El cálculo de los coeficientes AR es realizado

en primer lugar y, acto seguido, se estiman los parámetros MA asumiendo que los parámetros AR son conocidos o que han sido estimados con anterioridad. Este último método es el más práctico en lo que a simplificación computacional se refiere, aunque se obtiene una relativa disminución en la definición del espectro estimado.

Marple [1987] desarrolló un algoritmo de estimación ARMA basado en el último criterio presentado, el cual, para los fines de esta tesis, presentó muy buenos resultados.

#### IV.2 ESTIMACION SIMULTANEA DE LOS PARAMETROS AR Y MA

Distintos métodos se han diseñado para realizar el cálculo conjunto de los coeficientes AR y MA dentro de un proceso ARMA de estimación espectral. Los más frecuentes se basan en variantes del concepto de prefiltrado iterativo propuesto por Steiglitz y McBride [1965], la cual es una de una serie de técnicas que procuran resolver un problema lineal mediante la estimación de la señal de entrada, considerada como ruido incorrelacionable [Marple, op.cit.].

Otros métodos utilizados para la estimación de los coeficientes, requieren del cálculo de los valores máximos, en las ecuaciones (4.1) y (4.4), de los  $m+n+2$  coeficientes ARMA  $a_m$  y  $b_n$  y de la varianza  $\sigma^2$ , obteniendo así una aproximación relevante a la función de probabilidad máxima. Esta técnica incluye algunos métodos no lineales de mínimos cuadrados y otros procesos iterativos descritos por Kay [1987].

Las estimaciones realizadas mediante las técnicas de cálculo simultáneo deben ser aplicadas sobre una secuencia larga de datos, para no generar errores en el proceso de estimación. Otro inconveniente presente en estos métodos radica en la no garantizada

convergencia de los procesos, pudiendo obtenerse filtros inestables, esto es, que no sean de fase mínima. De hecho, no se conocen con exactitud condiciones de convergencia para estos casos. Para evitar lo anterior, usualmente se realiza alguna modificación del algoritmo iterativo para obtener un filtro inverso de fase mínima. Uno de estos procesos de modificación al algoritmo ha sido implementado en el programa MAYNE en el texto de Kay [1987].

#### IV.3 ESTIMACION DE LOS PARAMETROS AR Y MA EN FORMA SEPARADA

Dentro de las técnicas desarrolladas para el cálculo de los parámetros AR y MA de un proceso ARMA, son las del cálculo por separado las más empleadas. Lo anterior se debe a la simplificación del desarrollo matemático y, en consecuencia, a la reducción del tiempo de cálculo que el proceso requiere. Generalmente los coeficientes AR son estimados en primera instancia, elaborándose a continuación un filtro inverso para ser aplicado a los datos originales. La función resultante de este filtrado es considerada representativa de un *proceso de promedio móvil de orden n [proceso MA (n)]*, al cual puede serle aplicado un estimador lineal para definir a los parámetros del proceso  $b_n$ .

La secuencia de autocorrelación de ARMA(m,n) satisface a la relación:

$$\phi_{xx}[p] = - \sum_{k=1}^m a_m[k] \phi_{xx}[p-k] \quad (4.5)$$

para  $p > n$ . Si la autocorrelación  $\phi_{xx}$  fuese conocida con exactitud, entonces las relaciones de  $m$  para  $n+1 \leq p \leq m+n$  pueden ser consideradas como un sistema de ecuaciones simultáneas el cual tiene que ser resuelto para obtener los parámetros AR. A este sistema se le conoce como *sistema de ecuaciones modificadas de*

### Yule-Walker.

En una situación práctica, los únicos valores conocidos son los de los datos muestreados, siendo así que los valores estimados mediante la función de autocorrelación no sean del todo exactos. En consecuencia, los resultados obtenidos para el cálculo de los coeficientes AR mediante las ecuaciones modificadas de Y-W son generalmente de poca calidad (larga varianza). El Espectro de Potencia Estimado ARMA normalmente arroja valores pequeños cuando los valores de la autocorrelación calculados son inexactos, o cuando el orden seleccionado no es correcto o cuando ambos casos sucedan.

Si se utiliza un número mayor de ecuaciones que las definidas por el orden del proceso AR(n), y se minimiza el error cuadrático sujeto a estos parámetros, se obtiene una alternativa de aproximación que evita los inconvenientes mencionados en el párrafo anterior. A este proceso se le conoce como *técnica de mínimos cuadrados de las ecuaciones modificadas de Y-W*. Asumiendo que los valores de autocorrelación  $\hat{\phi}_{xx}[n]$  de 0 a L han sido calculados, donde L es el índice del coeficiente mayor que puede ser exactamente estimado, las ecuaciones L-n (dado que L-n > m) quedan de la forma:

$$\hat{\phi}_{xx}[p] - \sum_{k=1}^m a[k] \hat{\phi}_{xx}[p-k] + \epsilon[p] \quad (4.6)$$

para los  $n+1 \leq p < L$  valores creados, el error estimado se denota como  $\epsilon[p]$ . La autocorrelación estimada es usada para asegurar que el valor del error estimado no sea nulo. La suma de los errores cuadráticos:

$$\sigma^2 = \sum_{p=n+1}^L |\epsilon[p]|^2 \quad (4.7)$$

es minimizada con respecto a los  $m$  parámetros autorrecursivos  $a[k]$ . Las ecuaciones normales resultantes son idénticas a las usadas por el método de covarianza de predicción lineal [Marple, 1987, sec. 8.5.1]:

$$[T_{m-1} \ T_m] \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

donde  $T_m$  representa a la Matriz de Toeplitz de los valores de la autocorrelación estimada.

Resolviendo la ecuación (4.8) por medio del método de covarianza ya mencionado, los parámetros AR son obtenidos. Con la obtención de los coeficientes autorrecursivos, un proceso MA puede ser definido como el resultado del filtrado de la secuencia original de los datos con el filtro resultante de la función de transferencia del proceso AR:

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^n \hat{a}[k] z^{-k} \quad (4.9)$$

donde  $\hat{a}[k]$  son los parámetros AR estimados. La función de transferencia para un proceso ARMA es  $B(z)/A(z)$ , de la cual puede hacerse la consideración siguiente:

$$\frac{B(z)}{A(z)} \hat{A}(z) = B(z) \quad (4.10)$$

De esta manera, al pasar la secuencia de los datos de entrada a través del filtro de la función de transferencia  $\hat{A}(z)$  se obtiene

un proceso aproximado de promedio móvil. A este proceso resultante se le aplica alguna técnica de estimación para el cálculo de sus coeficientes  $b_n$ .

Mientras que los parámetros MA son necesarios para estimar el modelo ARMA en tiempo, la estimación del Espectro de Potencia ARMA solo necesita conocer el valor de la función  $\sigma^2 |B_n(\omega)|^2$ . Explícitamente, la estimación de los parámetros MA no es requerida, el método del correlograma puede ser usado directamente para calcular el numerador de la ecuación (4.4):

$$\sigma^2 |B_n(\omega)|^2 = \sum_{l=-n}^n \phi_{zz}[l] e^{-j2\pi flT} \quad (4.11)$$

siendo  $\phi_{zz}[i]$  la autocorrelación producida por la secuencia filtrada  $z[m]$ .

El proceso efectuado en esta tesis para la implementación del programa que realiza la Estimación ARMA del Espectro de Potencia se desarrolla en tres etapas:

- (1) Estimación de los parámetros AR mediante las ecuaciones modificadas de Yule-Walker.
- (2) Filtrado de los datos originales y
- (3) estimación de los parámetros MA del proceso residual filtrado.

Para esta última etapa, se utilizó un algoritmo de estimación espectral MA propuesto por Marple [1987, sec.10.3].

## V. FILTRADO POR MINIMOS CUADRADOS EN FRECUENCIAS

Además de los métodos paramétricos de Estimación Espectral descritos en los capítulos anteriores, el método de *Filtrado de Mínimos Cuadrados* o *Filtro de Wiener*, se presenta como una opción viable para realizar el análisis del espectro de potencia de las señales eléctricas a tratar. Esta técnica de filtrado se basa en la *teoría de Mínimos Cuadrados*, de ahí su nomenclatura. Las ventajas que presenta este método, en las distintas aplicaciones que se le han asignado, son la calidad de los resultados obtenidos y la sencillez de los conceptos matemáticos que lo fundamentan.

### V.1 TEORIA GENERAL DE FILTROS

Se conoce como filtro a la parte de un sistema que elimina cierta información de la señal que entra a este. Dos clases de filtros son considerados. Los *Filtros de Frecuencia* permiten el paso o rechazo de ciertas componentes de frecuencias, mientras que los *Filtros Optimos* realizan una separación de la señal útil de la señal contaminante (ruido), cuando éstas tienen prácticamente el mismo contenido de frecuencias. Ambos tipos de filtrado pueden ser aplicados en forma numérica tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

El uso de los filtros en forma digital ha permitido el mejoramiento de su resolución en la caracterización de las señales procesadas, indistintamente del dominio en el que se trabaje. Un *filtro digital* es representado por una secuencia de números denominados *coeficientes*; la salida de un filtro digital (señal filtrada) se obtiene mediante la convolución, en el dominio del tiempo, de la señal de entrada con los coeficientes del filtro.

Para realizar el diseño de un filtro digital, debe elegirse un modelo el cual involucre las señales a estudiar. Un modelo versátil y de amplia aplicación se muestra en la siguiente figura.

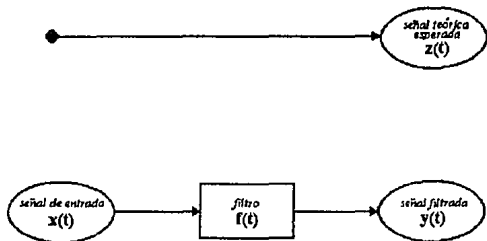


fig. 5.1 Esquema general de un filtro

El esquema del modelo consiste de tres señales diferentes:

1. Una señal de entrada  $x$ , la cual representa en la práctica a un registro geofísico, sea una curva resistiva, un sismograma, etc.
2. La señal real o filtrada de salida  $y$ . Esta es el registro geofísico ya trabajado por alguna técnica de procesamiento.
3. La señal de salida  $z$ , que representa a un modelo teórico de la anomalía que se espera encontrar mediante el procesado del registro geofísico.

Una vez realizada la elección del modelo, lo que procede a continuación es aplicar una técnica la cual defina un filtro  $f$ , óptimo en términos de la señal de entrada y la deseada. Existen



diferentes técnicas de aproximación que realizan lo anteriormente expuesto, sin embargo, la técnica de mínimos cuadrados presentan una base matemática muy simple dando resultados satisfactorios; es este el motivo de su aplicación para los fines que esta tesis persigue.

## V.2 PRINCIPIO MATEMATICO DEL FILTRO DE MINIMOS CUADRADOS

El principio básico del criterio de mínimos cuadrados es el de la minimización de la energía existente en la diferencia de la salida deseada  $z$ , y la salida real  $y$ . Es decir, se pretende calcular los coeficientes de  $f$ , para cuando el valor de

$$J = E \{ (z_t - y_t)^2 \} \quad (5.1)$$

sea mínimo. Siendo  $E$  el operador promedio o esperanza,  $J$  representa a la energía del error, entre más pequeño sea su valor, se irá obteniendo un mejor o un "óptimo" filtro lineal según la teoría de los mínimos cuadrados. Para realizar el cálculo de los coeficientes del filtro en forma digital, se debe restringir el número de éstos a un valor finito:

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_{j-1}, \dots, f_m$$

siendo el filtro  $f_i$  descrito por  $(m+1)$  coeficientes equiespaciados  $o$ , en otras palabras, se dice que el filtro  $f_i$  es de orden  $(m+1)$ .

La salida  $y_t$  es el resultado de la convolución entre los coeficientes del filtro y la señal de entrada  $x_t$ ; esto es:

$$y_t = x_t * f_t = \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} x_{t-\tau} \quad (5.2)$$

teniendo que la expresión de la energía del error puede ser:

$$J = E \left( \left( z_t - \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} x_{t-\tau} \right)^2 \right) \quad (5.3)$$

Esta cantidad es minimizada derivando parcialmente a J con respecto a cada uno de los coeficientes del filtro e igualando a cero. La derivada parcial de J con respecto a  $f_1$  es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial f_1} &= E \left( 2 \left( z_t - \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} x_{t-\tau} \right) \frac{\partial}{\partial f_1} \left( z_t - \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} x_{t-\tau} \right) \right) \\ &= 2E \left( \left( z_t - \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} x_{t-\tau} \right) (-x_{t-1}) \right) \\ &= 2E \left( -z_t x_{t-1} + \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} x_{t-\tau} x_{t-1} \right) \\ &= 2 \left[ -E \left( z_t x_{t-1} \right) + \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} E \left( x_{t-\tau} x_{t-1} \right) \right] \\ &= 2 \left[ -\phi_{zx}(1) + \sum_{\tau=0}^m f_{\tau} \phi_{xx}(1-\tau) \right] \end{aligned}$$

Igualando la anterior expresión a cero, se obtiene la ecuación:

$$\sum_{\tau=0}^m f_{\tau} \phi_{xx}(1-\tau) = \phi_{zx}(1)$$

De manera similar, se calcula la derivada parcial de J con respecto a  $f_j$  ( para  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ), dando como resultado un sistema de  $(m+1)$  ecuaciones simultáneas:

$$\sum_{\tau=0}^m f_{\tau} \phi_{xx}(j-\tau) = \phi_{yx}(j) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (5.4)$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \dots & \phi_{xx}(m) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \dots & \phi_{xx}(m-1) \\ \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(1) & \dots & \phi_{xx}(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{xx}(m) & \phi_{xx}(m-1) & \dots & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yx}(0) \\ \phi_{yx}(1) \\ \phi_{yx}(2) \\ \vdots \\ \phi_{yx}(m) \end{bmatrix}$$

Estas son las *Ecuaciones Normales* de cuya solución se obtienen los coeficientes del filtro. Los valores conocidos del sistema de ecuaciones son los de la función de autocorrelación  $\phi_{xx}(\tau)$  de la señal de entrada y los de la correlación cruzada  $\phi_{yx}(\tau)$  de la salida deseada con la señal de entrada.

Si las señales de salida  $z_i$  y  $y_i$  son representadas en forma vectorial, se tiene que  $z = y + e$ ; siendo  $e$  el error existente entre la salida deseada y la salida real, cuya magnitud será mínima cuando  $e$  sea normal a  $y$ . Es por esto que a las ecuaciones de (5.4) se les conoce como *ecuaciones normales*.

### V.3 ESTIMACION ESPECTRAL MEDIANTE EL FILTRADO DE WIENER

Para aplicar el filtro de Wiener en espectros de potencia, fueron calculados éstos, en primera instancia, mediante la

Transformada de Fourier. De ésta manera, las variables  $x$ , y  $z$ , de la ecuación (5.4) son sustituidos en la misma por sus respectivos espectros de potencia  $|X(f)|^2$  y  $|Z(f)|^2$  obteniendose así un filtro en el dominio de las frecuencias. El algoritmo de Wiener implementado sigue los siguientes pasos:

- 1) Cálculo de la autocorrelación de  $|X(f)|^2$
- 2) Cálculo de la crosscorrelación entre  $|X(f)|^2$  y  $|Z(f)|^2$
- 3) Resolución del sistema resultante (ec 5.4) por medio del método autorrecursivo de Levinson.
- 4) Convolución del filtro  $F(f)$  resultante con el espectro de la señal de entrada  $|X(f)|^2$  para así obtener el espectro de la salida filtrada  $|Y(f)|^2$ .

En base al análisis teórico del filtro presentado y apoyandose en el trabajo desarrollado por Martínez et. al. [1993] cabe hacerse notar que el filtro de Wiener trabaja como un identificador de patrones, esto es, basa su comportamiento en la existencia de un modelo teórico el cual supuestamente coincide en forma con la anomalía que busca hacerse resaltar dentro del registro. Esto presenta el inconveniente de que si el modelo teórico elegido no concordase con la forma de la anomalía, el filtro resaltará una señal más parecida a la teórica que a la real [Martínez, op. cit.].

## VI. APLICACIONES

Los métodos de estimación espectral descritos en los anteriores capítulos fueron implementados para el análisis del contenido de potencia de anomalías geoelectricas dentro de un determinado rango de frecuencia.

En primera instancia, se observó la efectividad de cada una de las técnicas utilizadas al ser aplicadas a modelos sintéticos de resistividad. Posteriormente, se analizaron anomalías reales obtenidas durante una campaña de exploración para la detección de túneles en la zona arqueológica de Teotihuacan.

### VI.1 ESTIMACION ESPECTRAL DE ANOMALIAS ELECTRICAS SINTETICAS

Los modelos sintéticos usados para la observación del comportamiento de los filtros implementados fueron obtenidos mediante un programa de cómputo elaborado por Cifuentes [1992]. Este algoritmo calcula la respuesta eléctrica de una calicata realizada sobre un subsuelo de capas verticales de resistividades  $\rho(1)$ ,  $\rho(2)$  y  $\rho(3)$ , donde  $\rho(1)=\rho(3)$  y, además,  $\rho(2)/\rho(1)=10$ . La capa  $\rho(2)$  es de un espesor  $E$  finito designado por el operador del programa, los modelos pueden realizarse simulando un perfilaje tipo Wenner o bien, uno tipo Dipolo-Dipolo. En la figura (6.1a) se muestra el modelado de un perfil eléctrico considerando una configuración electródica de Wenner. A estos modelos resistivos les fué sumado una serie de valores aleatorios de manera que simulara el efecto de una señal eléctrica contaminada por ruido (fig 6.1b).

Los espectros de potencia como los mostrados en las figuras (6.2a) y (6.2b) corresponden al de la señal sin contaminar y a la contaminada, respectivamente. Estos fueron calculados mediante la

Transformada Rápida de Fourier y, en el mismo orden, fueron considerados como señal esperada y como señal a procesar para el filtrado.

El criterio usado para evaluar la efectividad de cada proceso consistió en la comparación directa de los espectros de los modelos sin ruido contra los espectros obtenidos mediante las técnicas de análisis. El número de coeficientes utilizado para cada estimación es de aproximadamente la mitad del número de muestras de los modelos analizados, a dicho estándar se llegó después de realizar exhaustivas pruebas de ensayo y error.

A continuación se describe la metodología realizada de un solo proceso efectuado, esto se debe a la similitud de resultados que se consiguieron al aplicarse las técnicas de estimación a otros modelos con distintas características tanto de amplitud como de cantidad de ruido.

En la figura (6.3a) se observa el resultado del filtrado de Wiener a los modelos teóricos de la figura 6.2 usando 33 coeficientes. Se puede apreciar que la amplitud de la señal procesada disminuye, pero esto se debe a la diferencia de contenidos de potencia que las señales involucradas en el filtrado tienen. No obstante a esta variación, la forma se define muy bien, y las caídas de amplitud del espectro estimado coinciden con las del espectro teórico en casi toda la gama de frecuencias siendo esto un buen indicador de la calidad del estimador.

El proceso ARMA (fig. 6.3b) presentó una mayor similitud en lo que a contenido de potencia respecta; sin embargo, en el rango de las frecuencias bajas, las caídas de amplitud no coinciden del todo con los del espectro esperado, esta discrepancia disminuye a medida que la frecuencia aumenta. No obstante, el resultado de la estimación se considera aun de utilidad para los fines que esta tesis persigue. El número de coeficientes autorrecursivos y de

promedios móviles usados fué de 16.

Los análisis espectrales de las técnicas autorrecursivas de Covarianza Modificada (fig. 6.3c), de Burg (fig. 6.3d) y de Yule-Walker (fig. 6.3e) se aplicaron con 32 coeficientes para cada una. Los resultados obtenidos son muy similares entre sí, tanto en la amplitud como en la marcada sinusoidad de los espectros estimados. Como se puede apreciar, no existe una similitud entre el espectro esperado y el espectro procesado, por lo cual se considera que estos estimadores no arrojan resultados confiables para el objetivo del presente estudio.

La estimación por Mínima Varianza que se observa en la figura (6.3f) es la más pobre en calidad de todas las realizadas en esta tesis. No solo los rangos de frecuencia de las caídas de amplitud no coinciden entre las señales comparadas, sino que además los valores del espectro de potencia estimado disminuyen notablemente, siendo muy similar al del espectro estimado por la técnica de Wiener. El número de coeficientes del filtro utilizado fué de 32.

Una vez realizado un análisis de confiabilidad a los filtros, se procedió a aplicarlos a un problema real de procesamiento de señales eléctricas.

## **VI.2 PROSPECTO TEOTIHUACAN**

Distintos estudios se han venido realizando para lograr una mejor definición de las anomalías eléctricas obtenidas en una campaña de exploración. Cifuentes et al [1992] demostraron que la curva de resistividad aparente puede ser representada como la suma de dos efectos: un potencial primario y otro secundario, los cuales definen a las anomalías regional y residual respectivamente (fig. 6.4) Un problema que surge de la metodología por él explicada es la de encontrar la frecuencia de corte adecuada para obtener una

separación satisfactoria de la curva resistiva en sus dos componentes.

Estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UNAM hicieron un perfilaje eléctrico en la zona arqueológica de Teotihuacan, las anomalías obtenidas fueron procesadas mediante las técnicas ya presentadas con la finalidad de obtener la frecuencia de corte propicia para la diferenciación de la curva de resistividad en sus componentes regional y residual.

El estudio eléctrico fué realizado en la parte Este (E) de la pirámide del Sol para definir la continuación de un túnel, el cual parte del centro de la base de la construcción hacia el Oeste (W) a una profundidad promedio de 6 metros.

El método de prospección eléctrica utilizado fué el de perfilaje aplicándose con dispositivos Wenner y Dipolo-Dipolo, los cuales pueden ser identificados en el croquis de la figura 6.5 como TEOW y TEOD respectivamente. EL número de datos de los perfiles procesados fué de 128 para el Teow-1 y de 64 para los perfiles restantes, con un intervalo de muestreo de 1 metro. Los espectros usados como patrón de comparación, para los procesos de estimación efectuados, fueron obtenidos mediante el programa de Cifuentes ya mencionado. En base a las características del túnel estudiado, se consideró un espesor de 3 m. y una relación de resistividades  $\rho(2)/\rho(1)$  de 10; la variante de cada uno de los espectros modelados radica en la configuración electródica usada para cada registro (tanto en el dispositivo empleado como en la separación de los electrodos).

La anomalía observada en el perfil Teow-1 se aprecia en la figura (6.6a), la separación entre electrodos fué de 4 m. El modelo teórico de la anomalía, generado por el programa de Cifuentes, se observa en la gráfica b de la figura 6.6. El espectro de potencia a procesar, el cual corresponde a la anomalía observada es



presentado, en la figura 6.6c. Una vez realizados los procesos de estimación correspondientes, se compararon estos con el espectro de potencia obtenido del modelo teórico (fig. 6.6d). La frecuencia de corte considerada para el perfil estudiado tiene un valor de 0.195 c/m.

En la gráfica a de la figura 6.7 se tiene el espectro de estimado por la técnica de Wiener (en línea continua), comparado con el espectro del modelo teórico (en línea discontinua). El filtrado se realizó usando un operador de 65 coeficientes obteniéndose una destacada estimación, no coincidiendo la frecuencia de corte calculada (0.188 c/m) con la precisada en el modelo ideal (0.195 c/m), aunque son muy próximas. Nuevamente se hace presente el problema de desescalamiento de una señal con respecto a otra, pero esto no genera ningún inconveniente para los fines del estudio realizado.

La estimación realizada por el modelo ARMA (fig. 6.7b), se observa una discrepancia de forma para las frecuencias menores a la frecuencia de corte; debido a esto, la frecuencia calculada presenta un valor de 0.101 c/m, que no es la requerida. Hacia frecuencias más altas, las caídas de amplitud de ambas señales coinciden en los mismos valores de las abscisas.

Las estimaciones autorrecursivas de Covarianza Modificada (fig. 6.7c), de Burg (fig. 6.7d) y de Yule-Walker (fig. 6.7e) volvieron a presentar formas y contenidos de potencia semejantes entre sí. Su sinusoides muy marcada y, en consecuencia, la definición de la frecuencia de corte buscada es muy confusa, pues puede considerarse el valor de 0.094 c/m en lugar del valor obtenido del espectro teórico.

En la gráfica del espectro estimado mediante el método de Mínima Varianza (fig. 6.7d), se aprecia una pobre resolución del proceso efectuado, pues no solo el contenido de potencia entregado

es inferior al de la señal de entrada, sino que las caídas de amplitud no se encuentran bien definidas como en los procesos anteriores. El valor estimado de la frecuencia de corte fué de 0.141 c/m, diferente al valor estimado por los métodos autorrecursivos.

Para el perfil dipolar de la línea 1 (TeoD-1) se utilizó una separación de dipolos de 6 m. Su anomalía observada, modelo teórico y espectros de potencia respectivos son mostrados en la figura 6.8. La frecuencia de corte precisada por el espectro del modelo teórico es de 0.047 c/m, los resultados obtenidos a continuación se mencionan.

El espectro estimado por Wiener (fig. 6.9a) volvió a ser muy preciso en la definición de la señal, sobre todo en las frecuencias bajas, la frecuencia de corte estimada es de 0.047 c/m usando un filtro de 33 coeficientes. La figura (6.9b) corresponde a la estimación realizada por el modelo ARMA con 12 coeficientes AR y 18 MA. Para este perfil solo fué bien definida la frecuencia de la primera caída de amplitudes del espectro, la cual es la de corte requerida. El valor obtenido fué de 0.047 c/m.

El espectro estimado por Covarianza Modificada (fig. 6.9c) volvió a presentar una marcada sinuosidad, aun mayor que la de los otros métodos autorrecursivos, empleando 32 coeficientes para el filtro. la frecuencia de corte que le corresponde es de 0.125 c/m, la cual no coincide con el valor esperado. El método de Burg (fig. 6.9d) realizó una estimación similar a la de Covarianza, pero puede distinguirse una mejor definición de la frecuencia de corte buscada, a pesar de resaltar el mismo valor erróneo de 0.125 c/m.

Los métodos de Yule-Walker (fig. 6.9e) y de Mínima Varianza (fig. 6.9f) tuvieron una respuesta semejante en la forma estimada de los espectros, obteniéndose un valor para la frecuencia de corte de 0.125 c/m para ambos procesos, aunque se aprecia que el

contenido de potencia y la definición de caídas de amplitud en la estimación por Mínima Varianza es menor que en la de Yule-Walker.

En la figura 6.10 se observa la respuesta eléctrica del perfil TeoW-4 y las gráficas concernientes a este registro. Se espera que las estimaciones realizadas arrojen un valor de 0.188 c/m para la frecuencia de corte. Los resultados obtenidos se comentan a continuación.

El filtrado de Wiener aplicado a este perfil (fig. 6.11a) volvió a realizar una estimación destacada del espectro en cuestión, la señal resultante se destaca es muy semejante al espectro del modelo esperado y, lo más importante, las frecuencias de corte de ambos espectros coinciden en 0.188 c/m. Por otro lado, la estimación del modelo ARMA mostrada en la figura 11b resalta en forma clara a la caída de amplitud que define a la frecuencia de corte esperada (0.188 c/m); además, muestra una buena resolución del espectro procesado para frecuencias altas.

Nuevamente se presentaron resultados similares en los análisis realizados por los procesos de Covarianza Modificada y de Burg (fig. 6.11c y 6.11d respectivamente), la sinuosidad mostrada es ya característica. Las frecuencias de corte obtenidas por ambas técnicas también coincidió en el valor de 0.156 c/m, siendo menor que la frecuencia estimada por el modelo teórico.

Para este perfil, la estimación realizada por el método de Yule-Walker (fig. 6.11e) fué aun más pobre que la obtenida por la técnica de Mínima Varianza (fig. 6.11f). Para el primer caso se observa una disminución en el contenido de potencia del espectro obtenido, aunque el comportamiento de ambos son muy semejantes. A pesar de lo anterior, la frecuencia de corte estimada por Yule-Walker es idéntica a la esperada en 0.188 c/m, mientras que la de Mínima Varianza es de 156 c/m.

La línea número 4, realizada con el dispositivo dipolar, con una separación entre dipolos de 6m., se muestra en la figura número 6.12. La anomalía observada se tiene en la gráfica 6.12a, el modelo teórico se presenta en la figura 6.12b, el espectro de la anomalía observada y del modelo teórico se tienen en las gráficas 6.12c y 6.12d respectivamente, de este último espectro se obtuvo la frecuencia de corte a estimar, la cual tiene un valor de 0.047 c/m.

El espectro estimado por el método de Wiener con 33 coeficientes se observa en la figura 6.13a. Como era de esperarse, volvió a resaltar el comportamiento del modelo espectral. La frecuencia de corte se encuentra bien definida en 0.047 c/m. El modelo ARMA (fig. 13b) no resultó tan eficaz como el de Wiener, aunque su resolución no es deficiente, pues tiende a adaptarse a la forma del espectro esperado. La frecuencia de corte estimada es de 0.078 c/m.

Las estimaciones autorrecursivas de 32 coeficientes realizadas por el método de Covarianza Modificada (fig. 6.13c) y de Burg (fig. 6.13d) presentan una estimación similar, pero difieren en los resultados de la frecuencia de corte: 0.063 c/m para el método de Covarianza Modificada y de 0.094 c/m para el de Burg. El método espectral de Yule-Walker (fig. 6.13e) y de Mínima Varianza (fig. 6.13f) aplicados con 32 coeficientes realizaron una estimación pobre en la definición de caídas de amplitud y un bajo contenido de potencia en el espectro estimado, sobre todo en Mínima Varianza. Aunque en forma incierta, las frecuencias de corte calculadas son de 0.094 c/m.

La anomalía eléctrica presentada en la figura 6.14a corresponde a la respuesta del perfil realizado en la línea 5, usando un dispositivo Wenner con una separación electrodica de 6m. (perfil TeoW-5). Como en las anteriores anomalías presentadas, se adjuntan su modelo teórico (fig. 6.14b), su espectro de potencia (fig. 6.14c) y el espectro de potencia del modelo teórico (fig.

6.14e). La frecuencia de corte a estimar es de valor de 0.188 c/m.

La estimación realizada por el procesado de Wiener (fig. 6.15a) presenta un espectro estimado muy semejante al espectro esperado. Las bajas frecuencias se encuentran muy bien definidas, se estimó un valor de 0.188 c/m para la frecuencia de corte de este proceso. El espectro ARMA estimado (fig. 6.15b), no se apega a la forma del espectro del modelo esperado, sin embargo la frecuencia de corte (0.141) definida por esta técnica es cercana al valor definido por el espectro del modelo.

Los espectros estimados de Covarianza Modificada (fig. 6.15c) y de Burg (fig. 6.15d) resaltaron una frecuencia de corte con un valor de 0.141 c/m el cual no coincide con el valor esperado. Entre ambos modelos se aprecia una marcada similitud. Los métodos de Yule-Walker (fig. 6.15e) y de Mínima Varianza obtuvieron un valor de la frecuencia de corte igual al obtenido por los métodos autorrecursivos mostrados en las figura 6.15c y 6.15d, de 0.141 c/m.

Para el perfil TeoD-5, se realizó un perfilaje con una separación entre dipolos de 20 metros (fig. 6.16a), en su modelo teórico se aprecia el efecto de tan marcada separación. Lo anterior provoca que el espectro de potencia obtenido tenga una marcada variación de amplitud para intervalos de frecuencia pequeños. La frecuencia de corte requerida es de 0.156 c/m. De las estimaciones realizadas se obtuvieron los resultados siguientes:

Nuevamente la técnica de Wiener (fig. 6.17a) aplicada con un filtro de 33 coeficientes destacó con precisión la forma del espectro esperado, definiendo muy bien las variaciones de amplitud, coincidiendo su valor de frecuencia de corte con el del modelo esperado en 0.156 c/m.

Debido a la forma tan sinuosa del espectro de modelo teórico,

el proceso ARMA (fig. 6.17b) resultó no ser tan buen estimador de la frecuencia de corte buscada, arrojando un valor de 0.141 c/m, sumado a que sus caídas de amplitud no coinciden en toda la gama de frecuencias.

Los métodos autorrecursivos tampoco resultaron ser buenos estimadores, observando que la disimilitud entre espectro teórico y espectro estimado es marcada. Los valores que arrojaron fueron de 0.219 c/m para la técnica de Covarianza Modificada (fig. 6.17c) y Burg (fig. 6.17d), de 0.156 c/m para el modelo de Yule-Walker (fig. 6.17e) y de 0.203 para el proceso de Mínima Varianza (fig. 6.17f). Este último método volvió a presentar la disminución del contenido de potencia de la señal procesada, aunque para este perfil logró definir exactamente al valor buscado de frecuencia en forma clara.

Cifuentes, en conversación personal, mencionó que la frecuencia de corte requerida para obtener un buen proceso de separación de la curva resistiva, se encuentra dentro de una determinada banda de frecuencia, la cual está limitada por la primera y segunda caída de amplitud del espectro analizado. Con los resultados de las estimaciones realizadas en este trabajo, los cuales se muestran en la tabla I, junto con las frecuencias de corte seleccionadas por Cifuentes (op. cit.), se llevó a efecto el proceso de separación de la curva resistiva en sus componentes residual y regional.

En la fig. 6.18a, la cual presenta el proceso efectuado para el modelo teórico sin contaminar de la figura 6.1a, puede observarse la forma de la componente residual esperada en el proceso. La frecuencia de corte empleada (0.125 c/m) fué obtenida del espectro teórico de potencia (fig. 6.2a), la cual coincide con la estimación obtenida por el filtrado de Wiener.

Las figuras 6.18b a la 6.18f presentan el proceso efectuado al modelo teórico contaminado de la fig. 6.1b, con las frecuencias de

corte estimadas por las técnicas espectrales estudiadas, así como la que podría precisarse del perfil contaminado sin proceso alguno.

Los resultados obtenidos no fueron muy destacados para las frecuencias de corte menores a 0.12 c/m, la cual corresponde al modelo sin contaminar; para este valor, el residual mostrado en la fig. 6.19e logra atenuar algunos componentes de amplitud que distorsionan a la respuesta esperada del proceso, pero cabe resaltar que el resultado obtenido usando una frecuencia de corte de 0.14 c/m (obtenida de la estimación de Yule-Walker) mejoró aún mas la definición del residual esperado, disminuyendo las amplitudes generadas por el ruido aleatorio de manera significativa. En base a lo anterior, puede resaltarse la importancia de realizar una estimación espectral, pues pueden precisar valores de frecuencia que optimizen el proceso aún mejor que el que podría efectuarse por algún modelo sintético generado en base a estructuras esperadas.

En la figura 6.19, se observa el resultado del proceso aplicado al perfil TeoW-1, con frecuencias de corte oportunamente estimadas mostradas en la tabla I. Los métodos autorrecursivos de Covarianza Modificada, de Burg y de Yule-Walker coincidieron en el valor de 0.09 c/m para la frecuencia de corte requerida, el cual al usarse como valor de separación mostró una respuesta semejante a la obtenida usando una frecuencia de de corte de 0.10 c/m (correspondiente al proceso ARMA) y a la resultante de una frecuencia de corte de 0.13 c/m (que es la frecuencia seleccionada por Cifuentes), cuyas gráficas aparecen en las figuras 6.19a, 6.19b y 6.19c respectivamente. La anomalía de interés se encuentra señalada por el rectángulo en cada gráfica. Puede observarse que a medida de que el valor de la frecuencia de corte aumenta, hasta llegar a 0.195 c/m, correspondiente al modelo sintético esperado (fig. 6.6d), el método tiende a enmascarar a la anomalía de interés resaltando otras componentes de la señal que no corresponden a lo previsto. Se puede de nuevo resaltar la importancia que la

estimación espectral encierra en este proceso, pues arroja mejores resultados tanto en la optimización de tiempo por la búsqueda de la frecuencia de corte requerida (en vez de usar la técnica de ensayo y error), como en la mejor definición de la separación de las componentes resistivas (resultando más confiable que el emplear modelos sintéticos para la selección de la frecuencia a buscar).



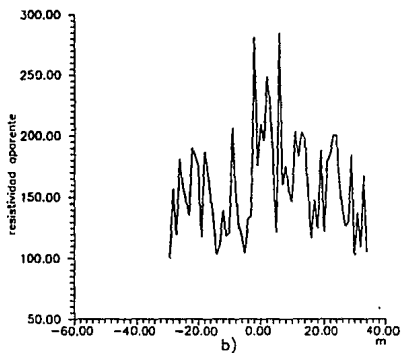
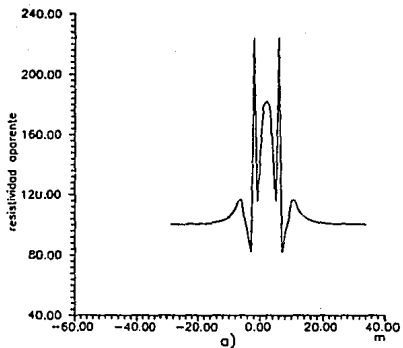
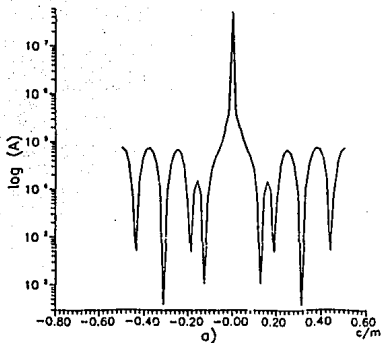
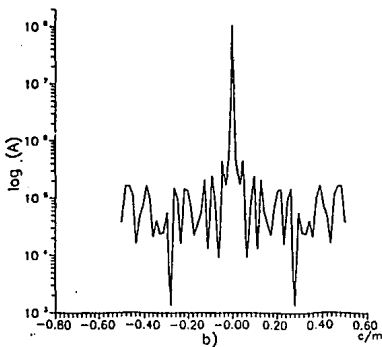


Fig. 6.1 a) Perfil teórico de un dispositivo Wenner. b) Perfil la contaminado con pseudoruido aleatorio.

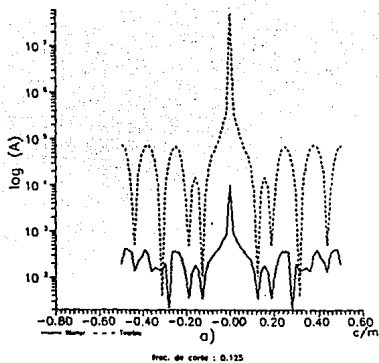


freq. de corte : 0.125

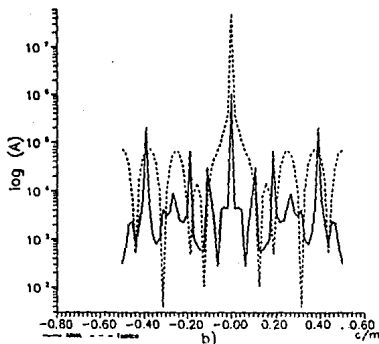


freq. de corte : 0.063

Fig. 6.2 a) Espectro de Potencia del perfil Wenner teórico y  
 b) Espectro de Potencia del perfil contaminado.



frac. de corte : 0.125



frac. de corte : 0.063

Fig 6.3 a) Estimación espectral de Wiener con 33 coeficientes y  
 b) Estimación espectral ARMA con 16 coefs. AR y 16 MA.

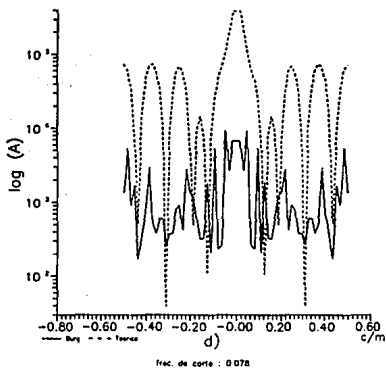
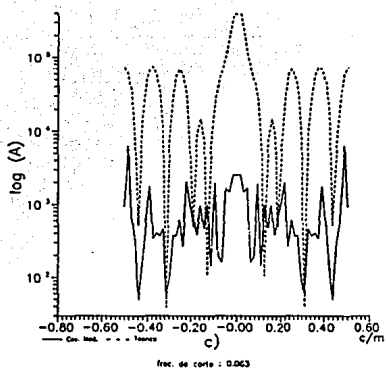
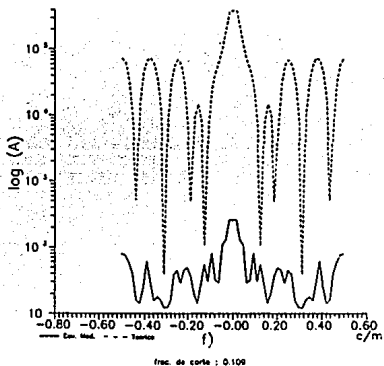
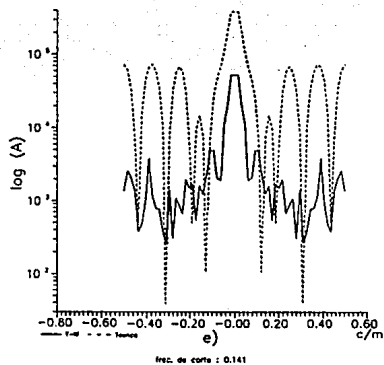
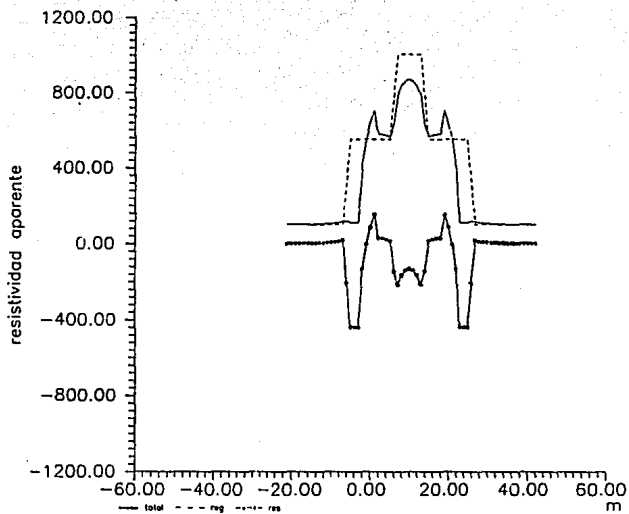


Fig 6.3 (continuación) c) Estimación espectral de Covarianza Modificada y d) de Burg con 32 coeficientes.



**Fig 6.3 (continuación)** e) Estimación espectral de Yule-Walker y f) de Mínima Varianza con 32 coeficientes.



**Fig. 6.4** Separación de una anomalía eléctrica en sus componentes regional y residual.

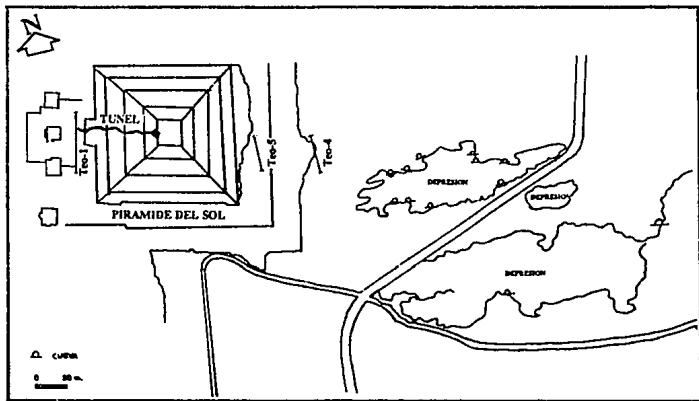


Fig. 6.5 a) Croquis de localización del túnel y de los perfiles realizados en la zona arqueológica de Teotihuacan.

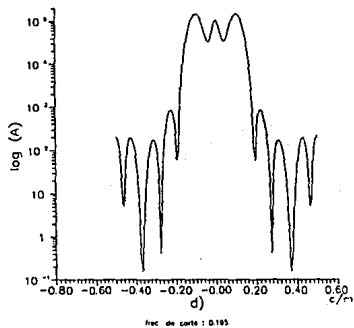
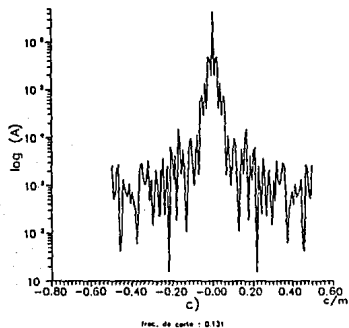
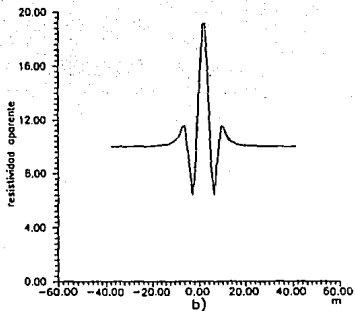
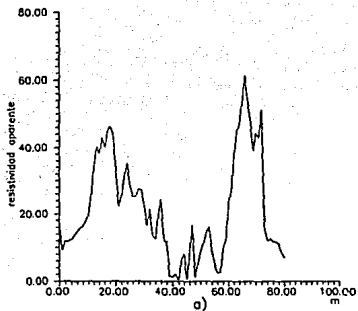
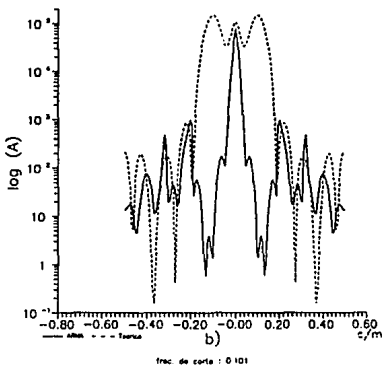
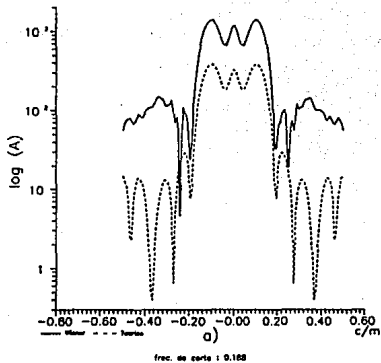
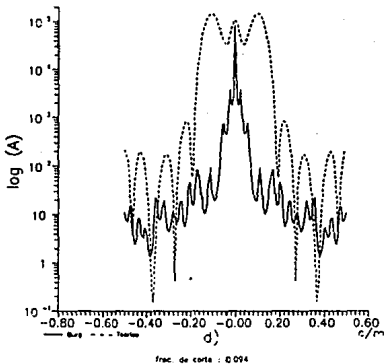
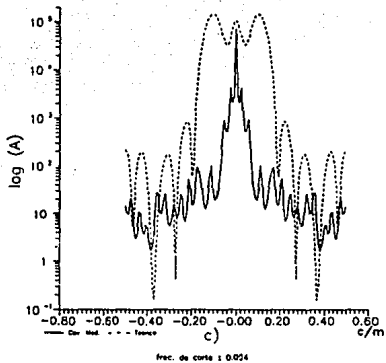


Fig. 6.6 a) Anomalia del perfil TeoW-1, b) modelo teórico de TeoW-1 c) Espectro de potencia de 6.6a y d) Espectro de 6.6b.





**Fig 6.7** Estimación del espectro de potencia del perfil TeoW-1 con:  
 a) Un filtro Wiener con 65 coeficientes y b) Un filtro ARMA  
 con 12 coefs. AR y 24 MA.



**Fig 6.7 (continuación)** Estimación del espectro de potencia del perfil TeoW-1 con: c) el método de Covarianza Modificada con 32 coefs. y d) el método de Burg con 32 coeficientes.

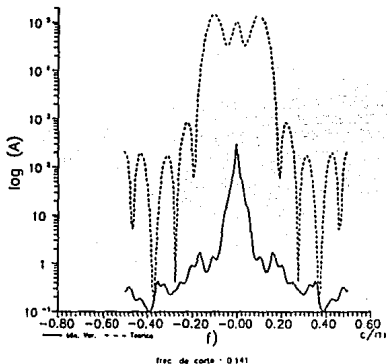
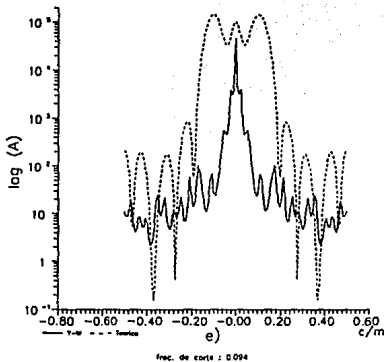


Fig 6.7 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil TeOW-1 con: e) el método de Yule-Walker con 32 coefs. y f) el método de Mínima Varianza con 32 coeficientes.

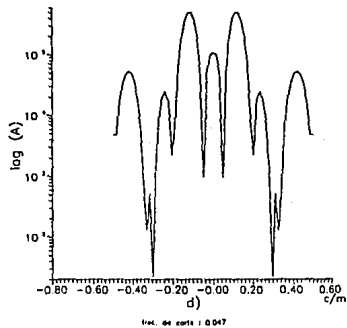
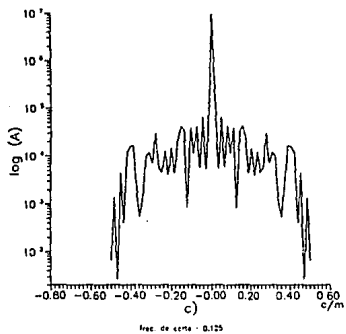
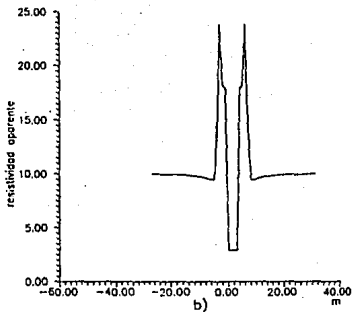
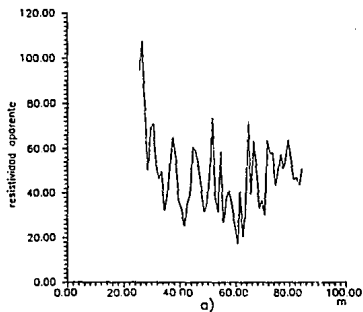


Fig. 6.8 a) Anomalia del perfil TeoD-1, b) modelo teórico de TeoD-1 c) Espectro de potencia de 6.8a y d) Espectro de 6.8b.

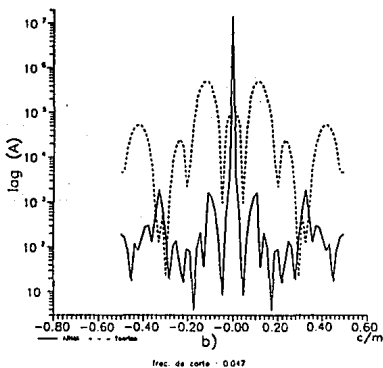
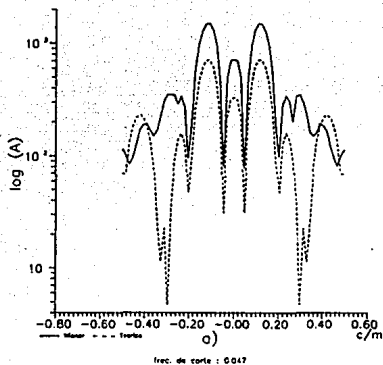
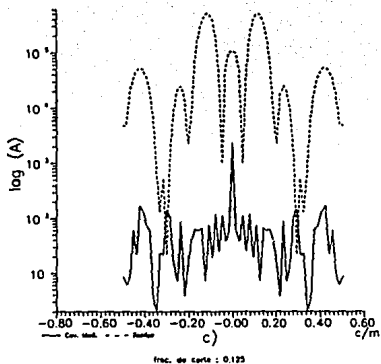
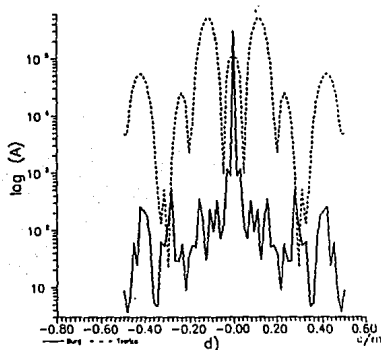


Fig 6.9 Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-1 con:  
 a) Un filtro Wiener con 33 coeficientes y b) Un filtro ARMA  
 con 12 coefs. AR y 18 MA.



freq. de corte : 0.125



freq. de corte : 0.125

Fig 6.9 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-1 con: c) el método de Covarianza Modificada con 32 coefs. y d) el método de Burg con 32 coeficientes.

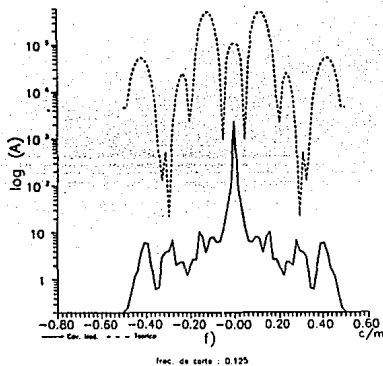
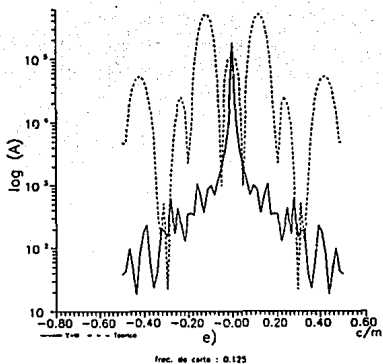
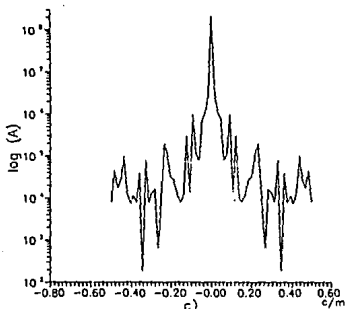
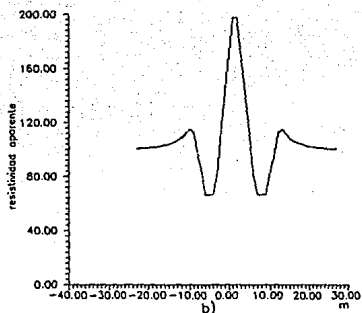
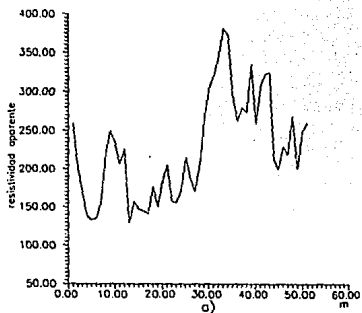
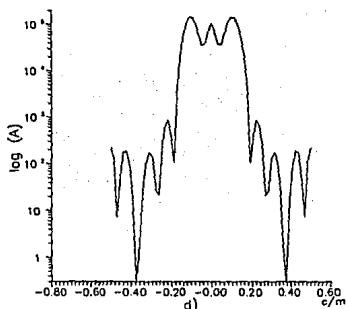


Fig 6.9 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-1 con: e) el método de Yule-Walker con 32 coefs. y f) el método de Mínima Varianza con 32 coeficientes.



frec. de corte : 0.110



frec. de corte : 0.185

Fig. 6.10 a) Anomalia del perfil Teow-4, b) modelo teórico de Teow-4 c) Espectro de potencia de 6.10a y d) Espectro de 6.10b.



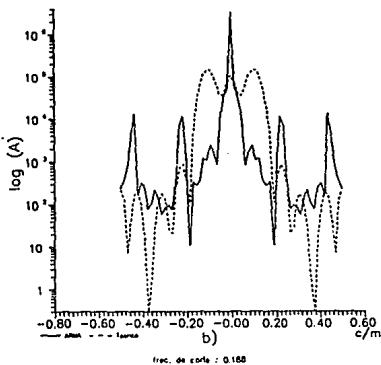
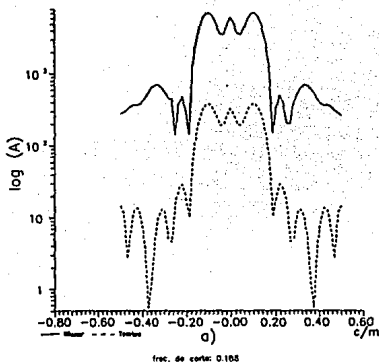


Fig 6.11 Estimación del espectro de potencia del perfil TeoW-4 con: a) Un filtro Wiener con 33 coeficientes y b) Un filtro ARMA con 12 coefs. AR y 24 MA.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

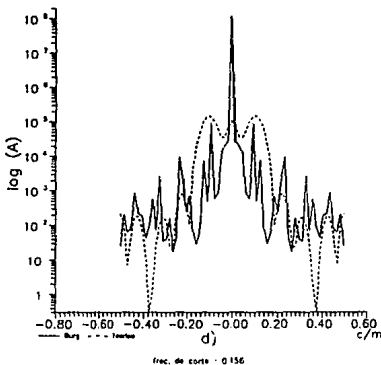
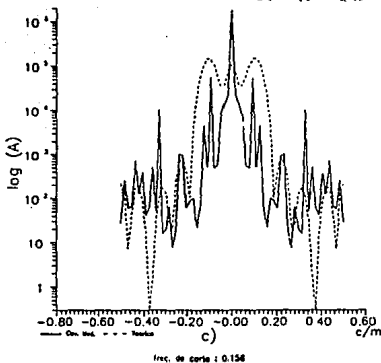


Fig 6.11 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil TeoW-4 con: c) el método de Covarianza Modificada con 32 coefs. y d) el método de Burg con 32 coeficientes.

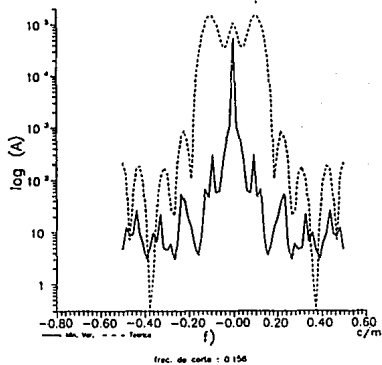
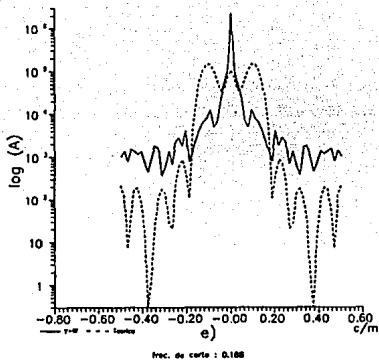


Fig 6.11 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil TeoW-4 con: e) el método de Yule-Walker con 32 coefs. y f) el método de Mínima Varianza con 32 coeficientes.

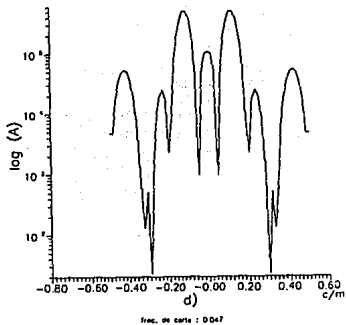
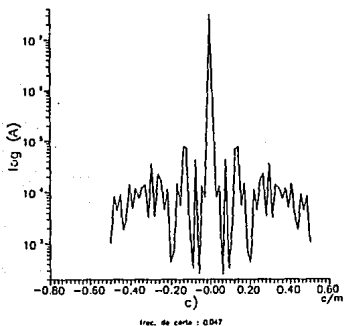
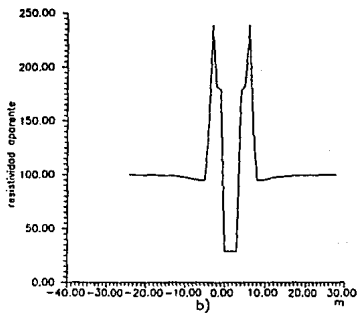
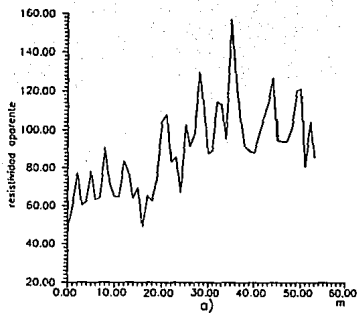
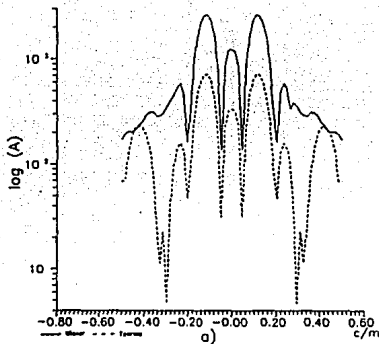
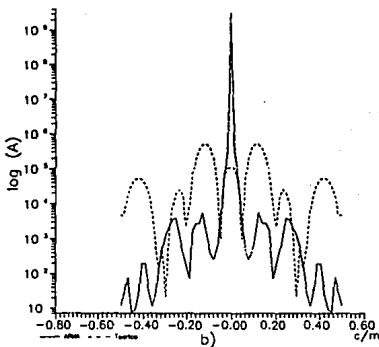


Fig. 6.12 a) Anomalia del perfil TeoD-4, b) modelo teórico de TeoD-4 c) Espectro de potencia de 6.12a y d) Espectro de 6.12b.



freq. de corte : 0.047



freq. de corte : 0.078

Fig 6.13 Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-4 con: a) Un filtro Wiener con 33 coeficientes y b) Un filtro ARMA con 12 coefs. AR y 18 MA.

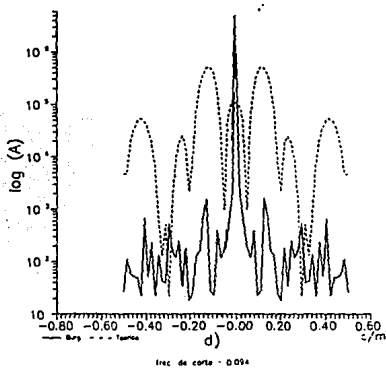
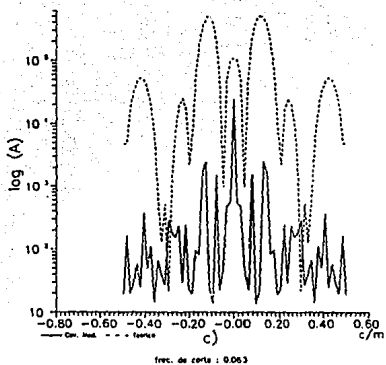
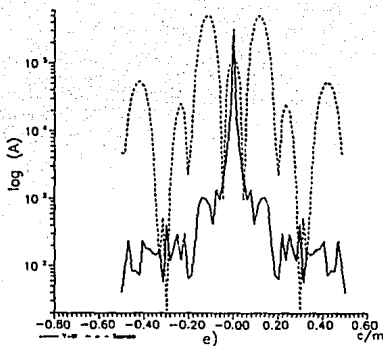
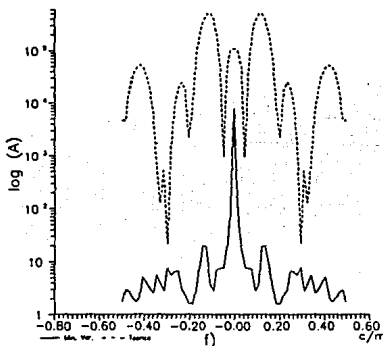


Fig 6.13 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-4 con: c) el método de Covarianza Modificada con 32 coefs. y d) el método de Burg con 32 coeficientes.



freq. de corte : 0.094



freq. de corte : 0.094

Fig 6.13 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-4 con: e) el método de Yule-Walker con 32 coef. y f) el método de Mínima Varianza con 32 coeficientes.

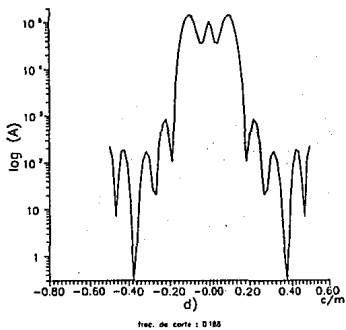
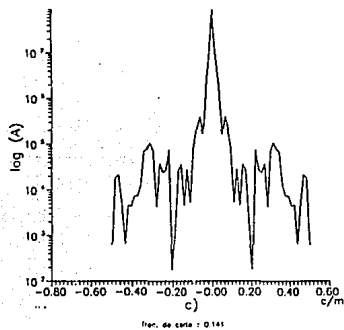
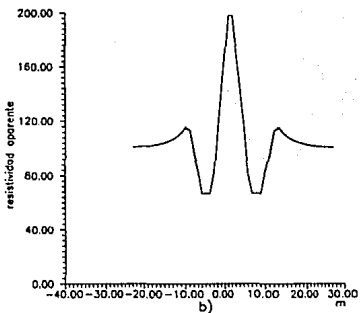
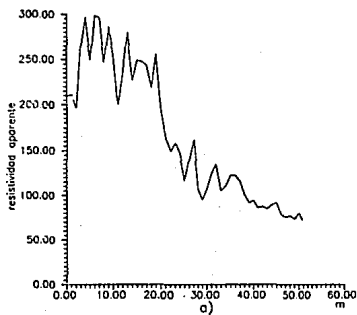


Fig. 6.14 a) Anomalia del perfil TeoW-5, b) modelo teórico de TeoW-5 c) Espectro de potencia de 6.14a y d) Espectro de 6.14b.



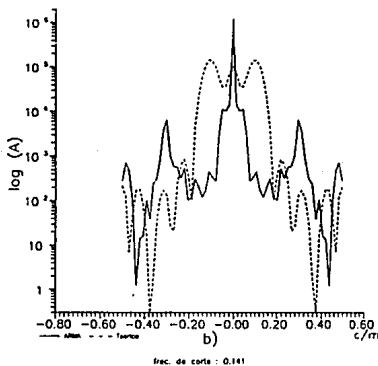
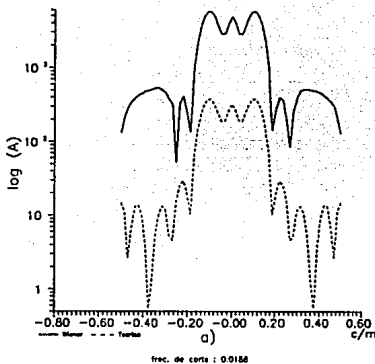
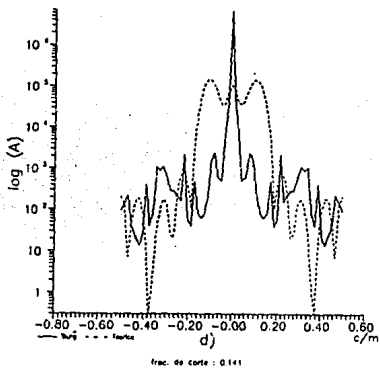
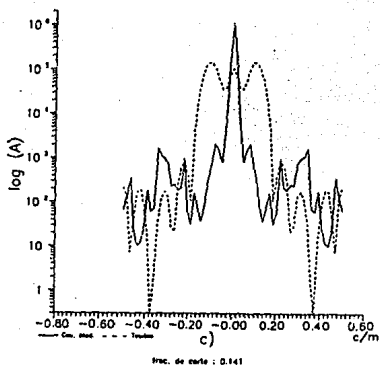


Fig 6.15 Estimación del espectro de potencia del perfil TeoW-5 con: a) Un filtro Wiener con 33 coeficientes y b) Un filtro ARMA con 12 coefs. AR y 24 MA.



**Fig 6.15 (continuación)** Estimación del espectro de potencia del perfil TeoW-5 con: c) el método de Covarianza Modificada con 32 coefs. y d) el método de Burg con 32 coeficientes.

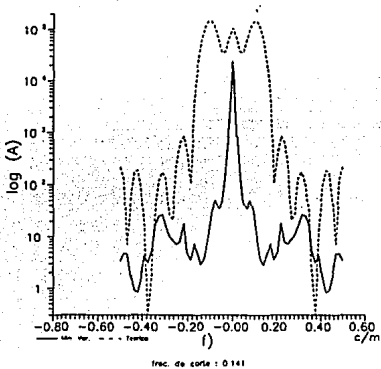
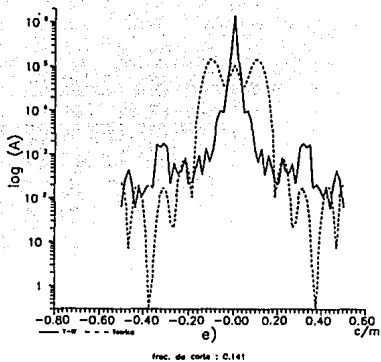


Fig 6.15 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil Teow-5 con: e) el método de Yule-Walker con 32 coef. y f) el método de Mínima Varianza con 32 coeficientes.

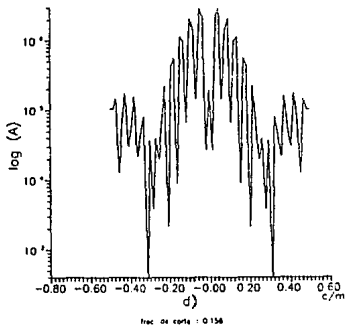
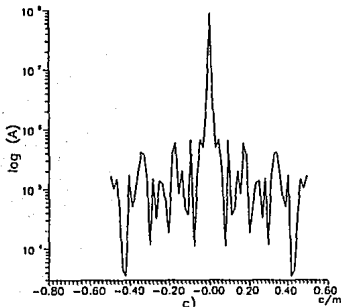
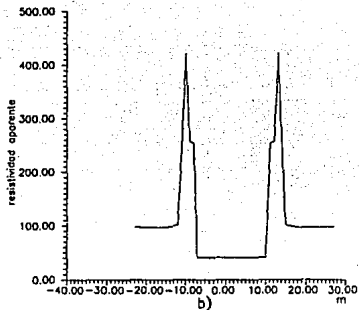
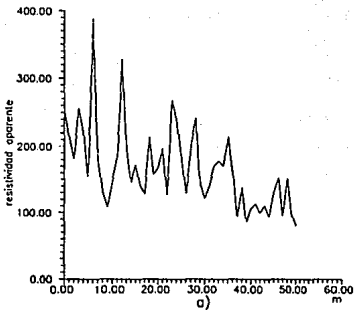


Fig. 6.16 a) Anomalia del perfil TeoD-5, b) modelo teórico de TeoD-5 c) Espectro de potencia de 6.12a y d) Espectro de 6.12b.

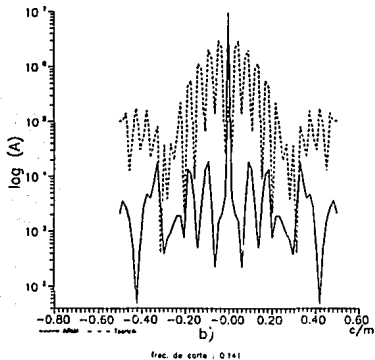
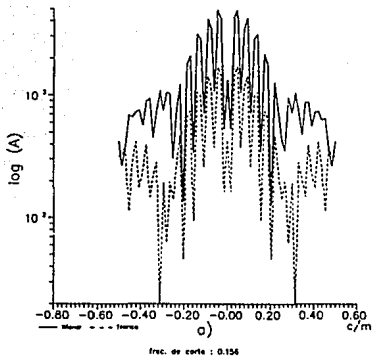


Fig 6.17 Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-5 con: a) Un filtro Wiener con 33 coeficientes y b) Un filtro ARMA con 12 coefs. AR y 18 MA.

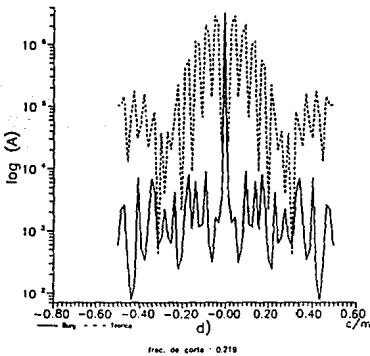
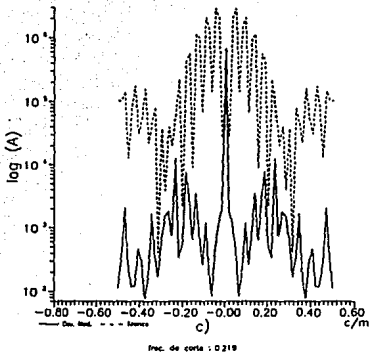
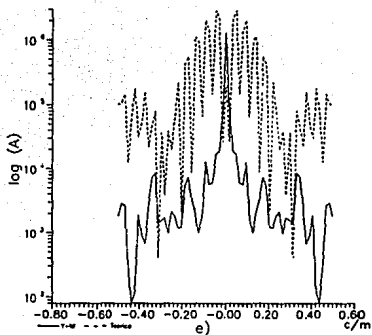
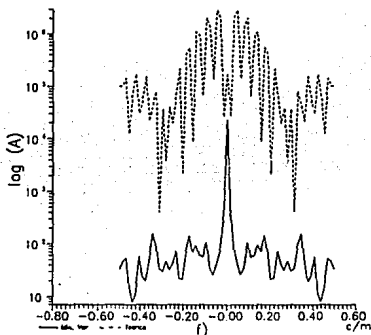


Fig 6.17 (continuación) Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-5 con: c) el método de Covarianza Modificada con 32 coefs. y d) el método de Burg con 32 coeficientes.



frec. de corte : 0.158



frec. de corte : 0.203

**Fig. 6.17 (continuación)** Estimación del espectro de potencia del perfil TeoD-5 con: e) el método de Yule-Walker con 32 coef. y f) el método de Mínima Varianza con 32 coeficientes.

	fc Cifun	fc Regis	fc Esper	fc Miener	fc ARNA	fc CovMod	fc Burg	fc Yule	fc MinVar
Modelo		0.063	0.125	0.125	0.063	0.063	0.078	0.141	0.109
TeoM-1	0.130	0.131	0.195	0.188	0.101	0.094	0.094	0.094	0.141
TeoD-1	0.170	0.125	0.047	0.047	0.047	0.125	0.125	0.125	0.125
TeoM-4	0.110	0.110	0.188	0.188	0.188	0.156	0.156	0.188	0.156
TeoD-4	0.110	0.094	0.047	0.047	0.078	0.063	0.094	0.094	0.094
TeoM-5	0.140	0.141	0.188	0.188	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141
TeoD-5	0.156	0.203	0.156	0.156	0.141	0.219	0.219	0.156	0.203

Tabla I Comparación de los procesos realizados



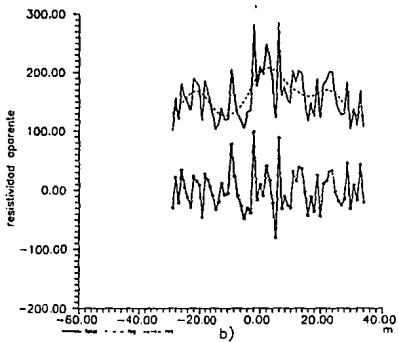
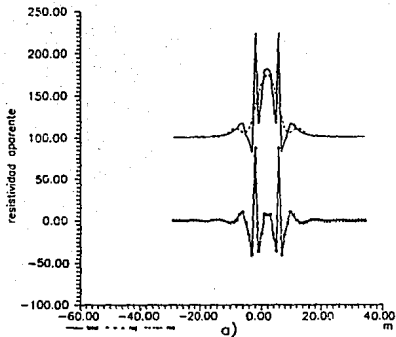


Fig. 19 a) Separación de una anomalía sintética con una frec. de corte de 0.12 c/m c) separación de la anomalía sintética, ahora contaminada, con una frec. de corte de 0.06 c/m.

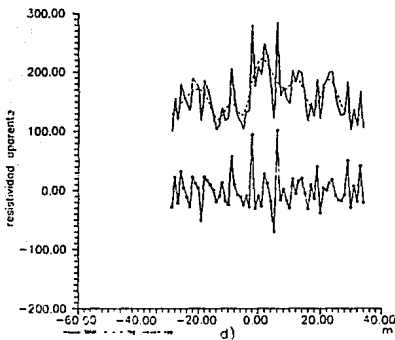
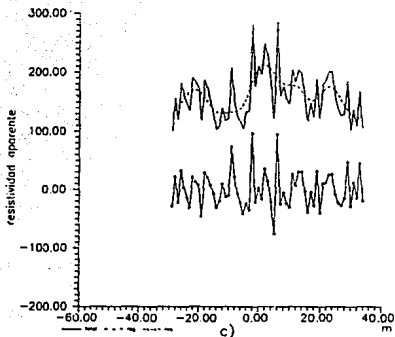


Fig. 19 (continuación) Separación de la anomalía sintética contaminada con una frec. de corte de c) 0.07 c/m d) 0.10 c/m.

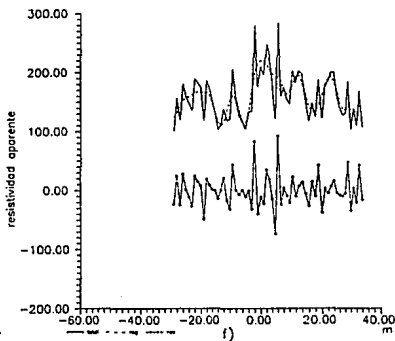
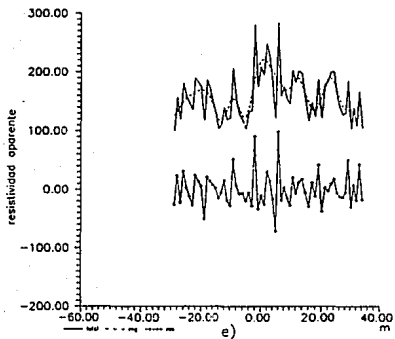


Fig. 19 (continuación) Separación de la anomalía sintética contaminada con una frec. de corte de e) 0.12 c/m f) 0.14 c/m.

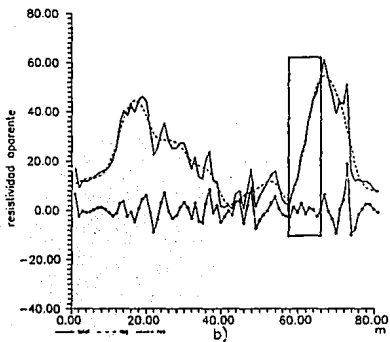
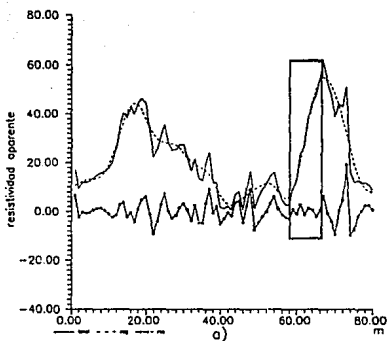


Fig. 20 a) Separación de la anomalía eléctrica del perfil TeoW-1 con una frec. de corte de a) 0.09 c/m b) 0.10 c/m.

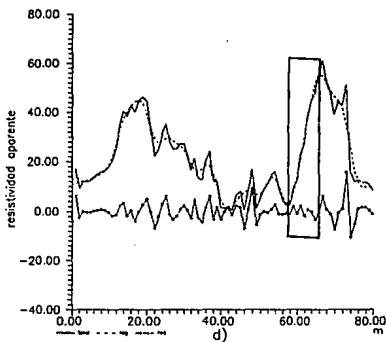
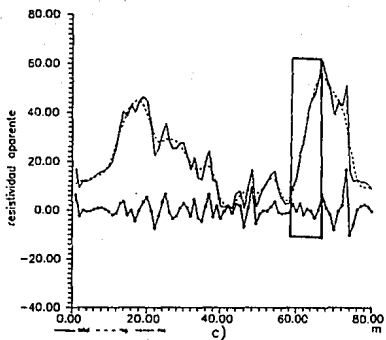


Fig. 20 (continuación) Separación de la anomalía eléctrica del perfil Teow-1 con una frec. de corte de c) 0.131 c/m d) 0.14 c/m.

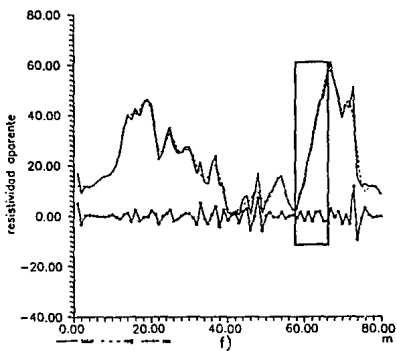
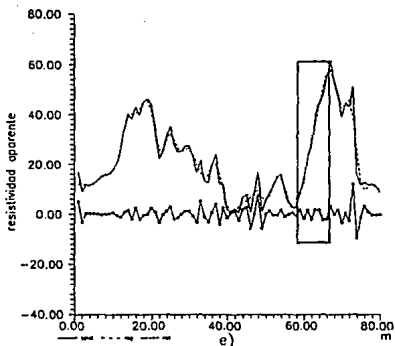


Fig. 20 (continuación) Separación de la anomalía eléctrica del perfil TeoW-1 con una frec. de corte de e) 0.018 c/m f) 0.195 c/m.

## VII. CONCLUSIONES

Del estudio de las diferentes técnicas propuestas, podemos concluir que la del Filtrado de Wiener en frecuencias es la que realiza una mejor estimación espectral, siendo muy precisa para las bajas frecuencias y perdiendo definición hacia las frecuencias altas. No obstante, por no ser un estimador espectral propiamente dicho, sino un filtro identificador de patrones, este método presentó los inconvenientes, en algunos de los procesos efectuados, de calcular valores negativos de amplitud en cierto rango de frecuencias y de entregar un contenido de potencia menor al del espectro de potencia esperado. Además, es muy notable su tendencia a adaptarse a la forma de la señal esperada, lo cual puede ser una fuente de error si el modelo resistivo empleado como señal esperada no coincide con la anomalía encontrada en el perfil estudiado.

El método que le precedió en resolución fué el ARMA, cuya resolución superior a los métodos AR se puede explicar por la forma del espectro a analizar, que no es tan sinuosa como en un modelo AR sino que presentan cierto suavizamiento en su perfil, mostrando una tendencia a los modelos ARMA. Sin embargo, el método presenta inconvenientes al tratar de precisar el número determinado de coeficientes AR y MA para obtener un operador convergente.

De los filtros AR, las técnicas de Covarianza Modificada, de Burg y de Yule-Walker, aunque ésta última en menor grado, arrojaron resultados aceptables, muy similares entre sí, para la definición de la frecuencia de corte deseada. El método de Mínima Varianza mostró una resolución muy pobre en todos los espectros estimados, aunado al bajo contenido de potencia entregado por cada estimación, lo cual corrobora lo mencionado por Marple [op. cit.] al mencionar las características de este proceso.

El número de coeficientes de los filtros fueron obtenidos por pruebas de ensayo y error, observándose que el orden requerido para una buena estimación es la de aproximadamente la mitad del número de muestras de la señal de entrada.

Para el proceso de separación de la curva resistiva en sus componentes residual y regional, la ventaja de haber realizado un análisis espectral por distintos métodos, radicó en la obtención de la frecuencia de corte requerida en forma casi automática con un alto grado de confiabilidad, mejorando la resolución del proceso y optimizando el tiempo de cálculo.

Finalmente, podemos concluir a partir de los resultados obtenidos, que la Estimación Espectral se presenta como una alternativa viable para lograr una mayor fluidez y precisión en las técnicas interpretativas de las Anomalías Geoeléctricas.



## BIBLIOGRAFIA

- Andersen, N. O.; On the Calculation of Filter Coefficients for Maximun Entropy Spectral Analysis, *Geophysics*, vol. 39, pp. 69-72, February 1974.
- Blackman, R. B. and J. W. Tuckey; *The Measurement of Power Spectra*, New York: American Telephone and Telegraph Co., 1958
- Burg, J. P.; Maximun Entropy Spectral Analisis, *Proceedings of the 37th Meeting of the Society of Exploracion Geophysicists*, 1967.
- Burg, J. P.; The Relationship between Maximun Entropy and Maximun Likelihood Spectra, *Geophysics*, vol. 37, pp. 375-376, April 1972.
- Burg, J. P.; Maximun Entropy Spectral Analisis, Ph.D. dissertation, Departament of Geophysics, Stanford University, Stanford, Calif., May 1975.
- Cantos F., J.; *Tratado de Geofísica Aplicada*, Madrid, 1979.
- Capon, J.; High-Resolution Frecuency-Wavenumber Spectrum Analysis, *Proc. IEEE*, vol. 57, pp. 1408-1418, August 1969.
- Cifuentes, G., A. Tejero, y R. Chávez; Interpretation of Geoelectric Anomalies by the Fourier Analisis, *European Assoc. Exploracion Geophysicists*, Expanded abstrac 54, Paris, 1990.
- Danko, J. y Azze P., A.; *Geoelectricidad I*, Serie 8 ingeniería Geofísica, No. 4, Universidad de la Habana, Enero de 1972.

- Gardner, W. A.; *Statistical Spectral Analysis*, T. Kailath (ed.), Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1988.
- Jenkins, G. M. and D. G. Watts; *Spectral Analysis and Its Applications*, San Francisco: Holden-Day, 1968.
- Karl, J. N.; *An Introduction to Digital Signal Processing*, Academic Press Inc., San Diego, Cal., 1989.
- Kay, S. M.; *Modern Spectral Estimation*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.; 1987.
- Lacoss, R. T.; Data Adaptive Spectral Analysis Methods, *Geophysics*, vol. 36, pp. 661-675, August 1971.
- Levinson, N.; The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction, *J. Math. Phys.*, vol.25, pp. 261-278, 1947.
- Marple, S. L.; *Digital Spectral Analysis with applications*, A.V. Oppenheim (ed.), Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1980.
- Martínez, C., A. Tejero, R. Chávez y O. Andrade; Interpretación de Anomalías Geoelectricas empleando técnicas de filtrado, Trabajo presentado en reunión anual de la UGM, Pto. Vallarta, 1993.
- Musicus, B.; Fast MLM Power Spectrum Estimation from Uniformly Spaced Correlations, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol ASSP-33, pp. 1333-1335, October 1985.
- Nutall, A. H.; Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points via Maximun Entropy and Linear Predictive Techniques, *Naval Underwater Systems Center Technical Report TR-5303*, New London, Conn., March 1976.

- Orellana, E.; *Prospección Geoelectrica en Corriente Continua*, Ed. Paraninfo, S.A.; Madrid, 1982.
- Robinson E. A. and S. Treitel; *Principles of Digital Filtering, Geophysics*, vol. 29, pp. 395-404, 1964.
- Robinson, E. A. and S. Treitel; *Digital Signal Processing in Geophysics*, A.V. Oppenheim (ed.), Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1980.
- Robinson, E. A. and S. Treitel; *Geophysical Signal Analysis*, A.V. Oppenheim (ed.), Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1982.
- Shannon, C. E.; *A Mathematical Theory of Communication*, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379-423, 1948.
- Steiglitz, K. and L. E. McBride; *A Technique for the Identification of Linear Systems*, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol AC-10, pp. 461-464, October 1965.
- Ulrych, T. J. and T. N. Bishop, *Maximun Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decomposition*, *Rev. Geophys. Space Phys.*, vol.13, pp. 183-200, February 1975.
- Ulrych, T. J. and R. W. Clayton, *Time Series Modeling and Maximun Entropy*, *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 12, pp. 182-200, August 1976.
- Walker, G.; *On Periodicity in Series of Related Terms*, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.*, 131: 518-532, 1931.
- Yule, G. U.; *On a Method of Investigating Periodicities In Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers*. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A.*, 226: 267-298, 1927.

N. de A.: Usualmente se refiere al espacio de la *Frecuencia*, a la dimensión en que una función es trasladada al aplicarse la Transformada de Fourier, pero esto es solo cierto cuando esta función se encuentra en el espacio temporal. Para este trabajo se trabajaron con señales variantes en el espacio, por lo cual el espacio en el que se encuentran al serles aplicada la operación de transformación se le denomina el de *Número de Onda*. Lo anterior debe ser considerado al leer el capítulo VI y VII de la presente tesis.